

# Снижение размерности фазового пространства в задачах канонического корреляционного анализа

Курдюкова Антонина

Научный руководитель:  
д.ф.-м.н. В. В. Стрижов

Московский физико-технический институт  
Факультет управления и прикладной математики  
Кафедра «Интеллектуальные системы»

8 июня 2022 г.

## Снижение размерности фазового пространства

Решается задача декодирования сигналов. Требуется восстановить зависимость между двумя наборами гетерогенных данных.

### Цель

Показать, что методы канонического корреляционного анализа являются частным случаем метода сходящихся перекрестных отображений Сугихары.

### Проблема

Сложная структура временного ряда – наличие нелинейных зависимостей и варьирующийся период.

Требуется построить адекватную модель прогноза сигнала гироскопа по сигналу акселерометра для ходьбы.

### Решение

Предлагается использовать скрытое пространство, снизив размерность исходного фазового пространства, и применить метод сходящихся перекрестных отображений для учёта причинно-следственных связей между временными рядами.

## Литература

Предлагается латентный ССМ для выявления причинно-следственных связей в хаотических динамических системах

- De Brouwer E. et al. Latent convergent cross mapping //International Conference on Learning Representations, 2020

Предложены методы декодирования сигналов. Учитываются зависимости в исходном и целевом пространствах, а также случай избыточности описания исходных данных

- Исаченко Р. В., Стрижов В. В. Снижение размерности пространства в задачах декодирования сигналов, 2018

Предлагаемый метод осуществляет нелинейную реконструкцию пространства состояний по временному ряду и позволяет отличить причинность от корреляции во временных рядах

- Sugihara G. et al. Detecting causality in complex ecosystems //Science, 2012

# Прогностическая модель в задаче декодирования

Дано

Выборка –  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , где

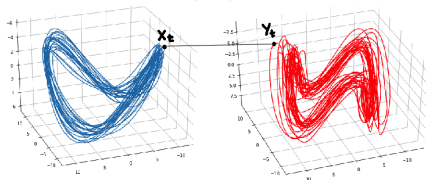
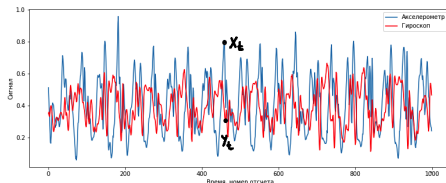
$\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_{N_1}\}$ ,

$\mathbf{y} = \{y_1, \dots, y_{N_2}\}$ .

Требуется построить прогноз ряда  $\mathbf{y}$  на  $m$  значений вперед:

$$y_{N_2+1}, \dots, y_{N_2+m}.$$

При построении прогноза учесть влияние ряда  $\mathbf{x}$  на  $\mathbf{y}$ .



Прогноз на один шаг вперед

$$\hat{y}_{t+1} = \mathcal{F}(\hat{\mathbf{w}}, y_t, \dots, y_{t-h+1}, x_t, \dots, x_1),$$

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg \min_{\mathbf{w}} \mathcal{L}(\mathbf{w}, \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}),$$

здесь  $\mathcal{L}$  – функция потерь,  $h$  —горизонт прогнозирования.

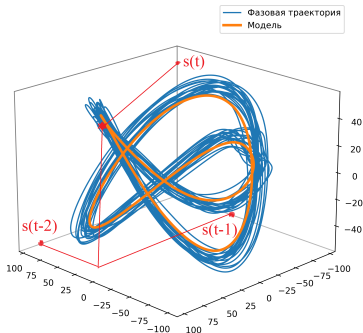
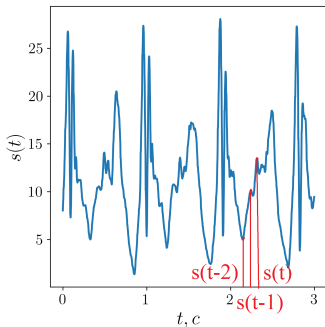
## Построение фазового пространства

Траекторная матрица временного ряда  $x$

Точки  $x_j \in \mathbb{R}^k$  образуют фазовую траекторию

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_k \\ x_2 & \dots & x_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & \dots & x_{N_1} \end{bmatrix}^T = [\mathbf{x}_1 \quad \dots \quad \mathbf{x}_n],$$

где  $k$  - ожидаемая длина периода,  $n = N_1 - k + 1$ .

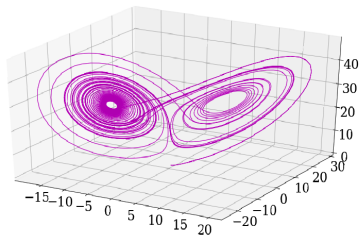
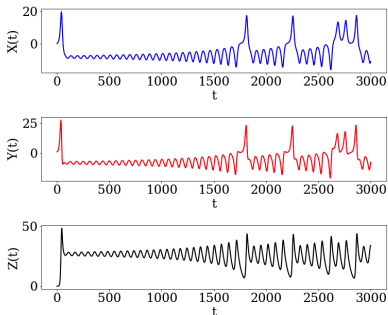


## Аттрактор Лоренца

Динамическую систему можно описывать системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} = X(r - Z) - Y \\ \dot{Z} = XY - bZ, \end{cases}$$

где  $\sigma$ ,  $r$ ,  $b$  — параметры.



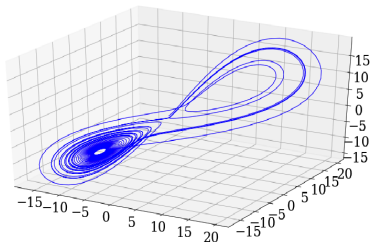
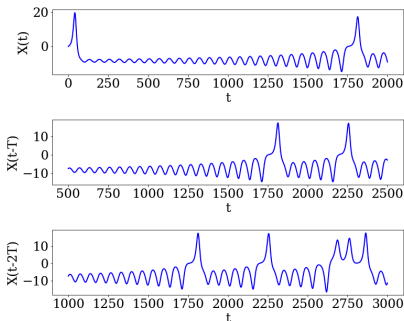
## Теорема Такенса о вложениях

Теорема формулирует условия, при которых аттрактор динамической системы можно восстановить по временному ряду лишь одной из наблюдаемых.

Диффеоморфизм  $\phi(x)$  отображает аттрактор  $\mathbf{M}$  в его скрытое представление  $\mathbf{M}_X$ :

$$\phi(x) = (\alpha(x), \alpha(f_M(x)), \dots, \alpha(f_M^{d-1}(x))),$$

где  $\alpha : \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$  — функция наблюдений,  $f_M$  задает динамику системы,  $d$  — размерность скрытого представления.



## Метод перекрестных сходящихся отображений

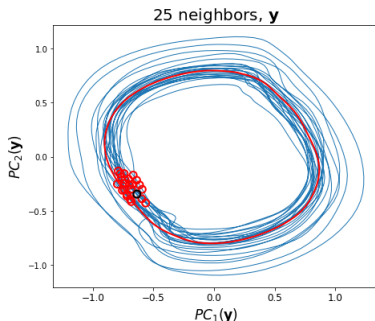
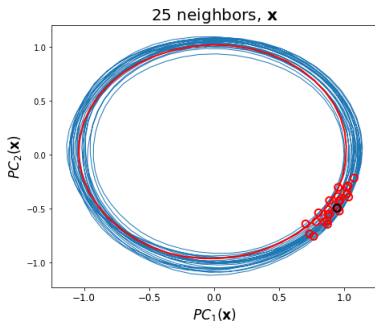
Выберем точку фазовой траектории  $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$ .

Найдем  $k$  ближайших соседей  $\mathbf{x}_{t_1}, \dots, \mathbf{x}_{t_k} \in \mathbf{X}$ .

Временным индексам  $t_1, \dots, t_k$  соответствуют точки  $\mathbf{y}_{t_1}, \dots, \mathbf{y}_{t_k} \in \mathbf{Y}$ .

Введем отображение:

$$\varphi : \mathbf{x}_0 \mapsto \hat{\mathbf{y}}_0 = \sum_{i=1}^k w_i \mathbf{y}_{t_i}, \quad w_i = \frac{u_i}{\sum_{j=1}^k u_j}, \quad u_i = \exp(-\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{t_i}\|).$$





## Зависимость между временными рядами

### Липшицевость отображения

Временные ряды  $x$  и  $y$  называются **связанными**, если отображение  $\varphi$  является липшицевым:

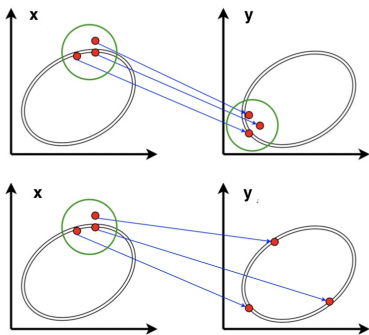
$$\rho_Y(\varphi(x_i), \varphi(x_j)) \leq C \rho_X(x_i, x_j), \quad x_i, x_j \in X.$$

### Функция близости

Для проверки наличия связанности введём метрическую функцию близости векторов в окрестностях  $U_k(x_0)$  и  $U_k(y_0)$ :

$$L(x, y) = \frac{R(U_k(x_0))}{R(U_k(y_0))}, \quad R(U_k(x_0)) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \rho_x(x_0, x_{t_j}).$$

Если  $L(x, y)$  больше заданного порога, то временной ряд  $y$  зависит от временного ряда  $x$ .

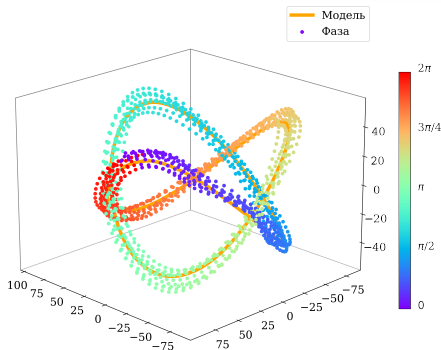


## Модель определения фазы

Модель  $m : \varphi \rightarrow \mathbf{x}$  ставит в соответствие фазе  $\varphi \in [0, 2\pi)$  точку ожидаемой траектории  $E(\hat{\mathbf{x}}|\varphi)$ .

### Регрессия Надарая-Ватсона

$$m(\varphi) = E(\hat{\mathbf{x}}|\varphi) = \frac{\sum_{\vec{x} \in \vec{X}} \vec{x} K\left(\frac{\rho(\hat{\varphi} - \varphi)(\vec{x})}{h}\right)}{\sum_{\vec{x} \in \vec{X}} K\left(\frac{\rho(\hat{\varphi} - \varphi)(\vec{x})}{h}\right)}.$$



### Функции потерь

$$L_1(\varphi) = \frac{1 - \cos(\varphi - \varphi')}{2}, \quad L_2(\varphi) = \sum_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < \varepsilon, \mathbf{x}' \in \mathbf{X}} \rho(\varphi, \varphi'), \quad L_3(\varphi) = \frac{\|\mathbf{x} - m(\varphi)\|_2}{d(\varphi)}$$

### Искомое значение фазы

$$\hat{\varphi}_i = \arg \min_{\varphi} \lambda_1 \cdot L_1(\varphi) + \lambda_2 \cdot L_2(\varphi) + \lambda_3 \cdot L_3(\varphi), \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1.$$

## Снижение размерности фазового пространства

### Линейная зависимость

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ,  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{k \times r}$  – матрицы фазовых пространств  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ .

Предполагается линейная зависимость между строками  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$ :

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}_i \cdot \boldsymbol{\Theta} + \varepsilon \quad \mathbf{Y}_i \in \mathbb{R}^r, \mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, k.$$

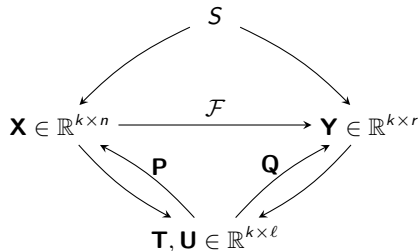
### Метод частичных наименьших квадратов (PLS)

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{F} = \sum_{j=1}^l \mathbf{t}_j \cdot \mathbf{p}_j^T + \mathbf{F}$$

$k \times n \quad k \times l \quad l \times n \quad k \times n \quad k \times 1 \quad 1 \times n \quad k \times n$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{E} = \sum_{j=1}^l \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{q}_j^T + \mathbf{E}$$

$k \times r \quad k \times l \quad l \times r \quad k \times r \quad k \times 1 \quad 1 \times r \quad k \times r$



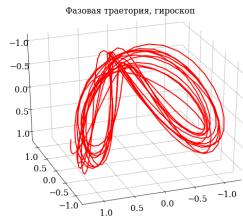
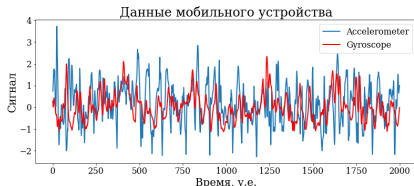
### Ошибка

$$L(\boldsymbol{\Theta}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\Theta}\|_2^2$$

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{W}(\mathbf{P}^T \mathbf{W})^{-1} \mathbf{Q}^T$$

# Вычислительный эксперимент

## Данные



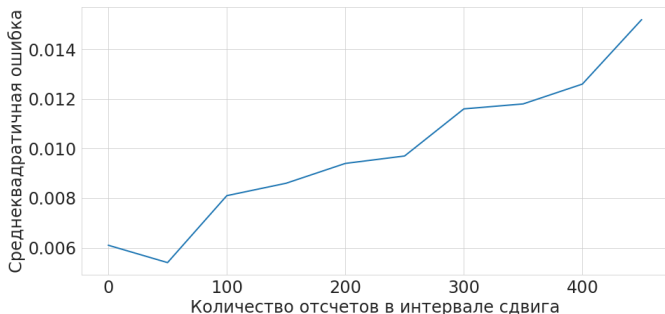
## Ошибка предсказания алгоритма PLS

	Датчики	Прибор	Тип движения	MSE
1	Акселерометр + гироскоп	один	ходьба	0.006
2	Акселерометр + гироскоп	один	медленная ходьба	0.069
3	Акселерометр + акселерометр	разные	ходьба	0.997
4	Акселерометр + гироскоп	один	бег	0.027
5	Акселерометр + гироскоп	один	быстрая ходьба	0.024

## Корреляция Пирсона и Спирмена

	Прибор	Тип движения	$E_p \pm D_p$	$E_s \pm D_s$
1	Один	ходьба	$0.664 \pm 0.01$	$0.663 \pm 0.01$
2	Один	медленная ходьба	$0.411 \pm 0.33$	$0.409 \pm 0.28$
3	Разные	ходьба	$0.108 \pm 0.13$	$0.077 \pm 0.08$
4	Один	бег	$0.596 \pm 0.02$	$0.581 \pm 0.03$
5	Один	быстрая ходьба	$0.029 \pm 0.14$	$0.017 \pm 0.15$

## Зависимость ошибки MSE от величины сдвига сигналов



## Выносятся на защиту

- Исследовано утверждение о том, что методы канонического корреляционного анализа являются частным случаем метода перекрестных сходящихся отображений.
- Предложен метод обобщения PLS и CCM.
- Проведен вычислительный эксперимент на данных мобильного устройства.
- Показано, что учет зависимостей между временными рядами улучшает качество прогноза.
- Планируется рассмотреть другие методы канонического корреляционного анализа.