Mathematical Forecasting Methods

Лекция 5

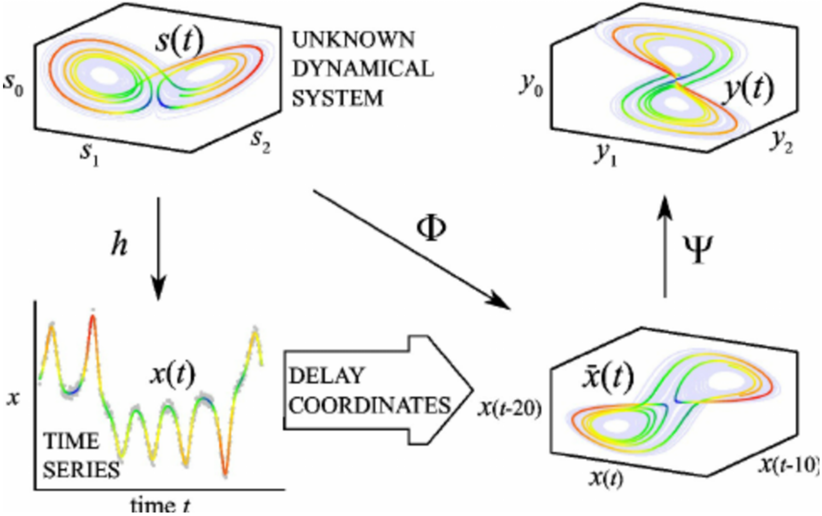
МФТИ

Осень, 2024

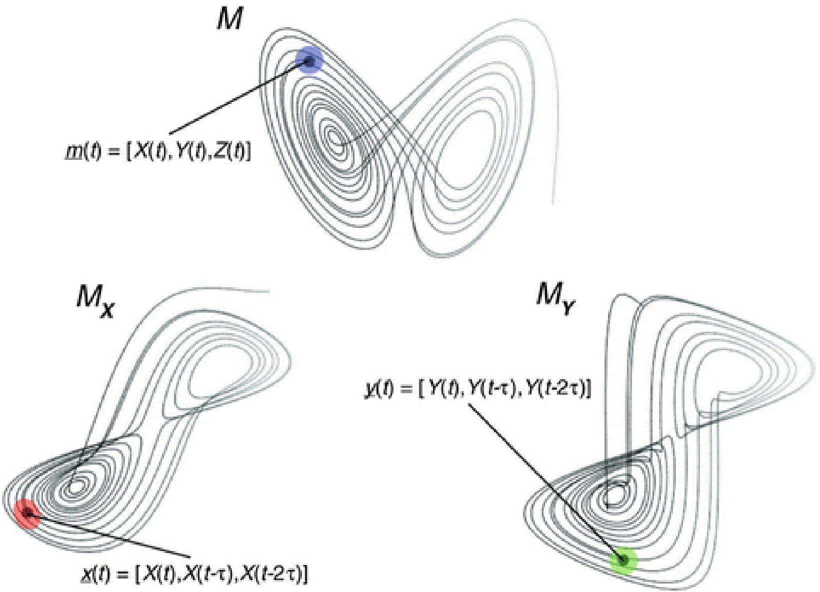
Краткое повторение

- Математические основы динамических систем позволяют осуществлять анализ временных рядов.
- Теорема Такенса позволяет использовать вектора задержек для восстановления внутренней структуры динамической системы.
- При выполнении условия $m \geq 2d + 1$, где d — размерность вложения, возможно реконструировать пространство состояний системы.
- В частности, выводы теоремы Такенса используются в CCM. Алгоритм CCM является аналогом статистического теста и оценивает причинно-следственную связь двух временных рядов.

Краткое повторение



Cross Convergent Mapping



Краткое повторение

1. Пусть имеются 2 временных ряда $\{x_1, x_2, ..., x_T\}$ и $\{y_1, y_2, ..., y_T\}$ длины T.
2. Для ряда $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ формируем векторы предыстории размерности E с шагом по времени τ:

$$\mathbf{x}_t = \left(x_t, \quad x_{t-\tau}, \quad x_{t-2\tau}, \quad \dots, \quad x_{t-(E-1)\tau}\right)$$

3. В пространстве $\mathbb{R}^E$ (*фазовом пространстве*) такие векторы предыстории образуют*фазовую траекторию* системы – множество $M_x = \{\mathbf{x}_t \mid t = 1 + (E-1)\tau, ..., T\}$.
4. Пусть требуется построить предсказание для значения y_t. Для этого сначала найдем $E+1$ векторов из M_x, ближайших к $\mathbf{x}_t$ (в терминах, например, стандартной метрики d в $\mathbb{R}^n$). Пусть им соответствуют временные индексы $t_1, ..., t_{E+1}$, отсортированные в порядке от ближайшей точки до наиболее удалённой.

$$d_i = d(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t_i}), \quad d_1 < d_2 < ... < d_{E+1}$$

Алгоритм Convergent Cross Mapping

5. Тогда оценка значения y_t строится следующим образом в виде взвешенной суммы значений ряда в моменты времени $t_1, \dots, t_{E+1}$:

$$\hat{y}_t | M_x = \sum_{i=1}^{E+1} \omega_i y(t_i)$$

$$\omega_i = \frac{u_i}{\sum\limits_{j=1}^{E+1} u_j}, \qquad u_i = \exp\Big(-\frac{d_i}{d_1}\Big), \qquad i = 1, \dots, E+1$$

6. Для того, чтобы посудить о существовании зависимости между рядами $\{x_t\}_{t=1}^T$ и $\{\mathrm{y}_t\}_{t=1}^T$, рассчитаем теперь коэффициент корреляции Пирсона:

$$C_{yx} = \Big[\rho\Big(y, \hat{y} | M_x\Big)\Big]^2$$

Применение рядов Фурье для анализа временных рядов

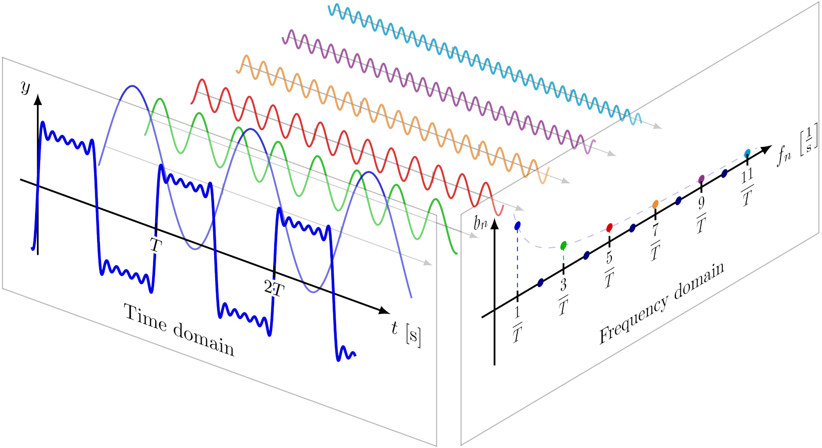
Исследуется функция $x(t)$, заданная на отрезке $[0, T]$.
Фурье-анализ позволяет представить функцию $x(t)$ в виде:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi \frac{k}{T} t + \theta_k)$$

T – отрезок, где функция определена (длительность сигнала)
a_k – амплитуда k-ой гармонической составляющей,
θ_k – начальная фаза k-ой гармонической составляющей.

Разложение в ряд Фурье позволяет представить непрерывную функцию $x(t)$, определенную на отрезке $[0, T]$ в виде бесконечного ряда тригонометрических функций с определёнными амплитудами и фазами, также рассматриваемых на отрезке $[0, T]$.

Применение рядов Фурье для анализа временных рядов



Глобальные и локальные методы прогнозирования

В анализе и прогнозировании временных рядов можно выделить две группы методов:

- глобальные – параметры аппроксимирующей функции находятся посредством использования всех известных значений ряда; основное приложение – получение глобальных характеристик системы (ARMA, SSA)
- локальные методы основаны на принципе локальной аппроксимации (LA)

Глобальные и локальные методы прогнозирования

Преимущества локальных методов прогноза нерегулярных (хаотических, квазипериодических) рядов:

- применение не требует априорной информации о системе, породившей временной ряд
- нет необходимости в построении специфической модели динамики исследуемого ряда
- использования для прогнозирования наиболее близких к стартовой точке (стартовому вектору) значений ряда
- использование меньшего количества исходных данных
- меньше ограничений на горизонт прогнозирования

Матричное представление временного ряда

- Вектор задержек:

$$\mathbf{x}_t = (x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+\tau-1})^T \in \mathbb{R}^\tau$$

- Матрица задержек:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \dots & \mathbf{x}_\tau & \dots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_\tau & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{\tau+1} & \dots & x_{n+1} \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_{\tau+2} & \dots & x_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_\tau & x_{\tau+1} & x_{\tau+2} & \dots & x_{2\tau-1} & \dots & x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\tau \times n}$$

Здесь предполагаем, что $n > \tau$.

SVD: напоминание

Для матрицы $\mathbf{X}$ существует (и, вообще говоря, не единственно) сингулярное разложение:

$$\underset{\tau\times n}{\mathbf{X}} = \underset{\tau\times\tau}{U}\;\underset{\tau\times n}{\Sigma}\;\underset{n\times n}{V^T}$$

Здесь:

- $U \in \mathbb{R}^{\tau\times\tau}$ – ортогональная матрица собств. векторов $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ (столбцы U образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^\tau$)
- $\Sigma \in \mathbb{R}^{\tau\times n}$ – прямоугольная диагональная матрица сингулярных чисел $\mathbf{X}$, причем $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_\tau$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_\tau & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – ортогональная матрица собств. векторов $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ (столбцы V образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$)

Low Rank Approximation

Одним из важных свойств сингулярного разложения матрицы является возможность построения для неё *низкорангового приближения*, а именно:

- Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $A = U\Sigma V^T$ – сингулярное разложение A.
- Рассмотрим матрицу Σ и её приближение ранга r – матрицу $\tilde{\Sigma}$, где подматрица Σ_1 имеет размер $r \times r$:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\Sigma} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Теорема:** среди всех матриц B ранга не более r норма разности матриц A и $\tilde{A} = U\tilde{\Sigma}V^T$ минимальна:

$$\tilde{A} = \underset{\mathrm{rank}(B) \leq r}{\arg\min} \; ||A - B|| \quad (\text{верно для } ||\cdot||_2, \text{ для } ||\cdot||_F)$$

- Матрица $\tilde{A}$ также может быть получена, как $\tilde{A} = U_1\Sigma_1 V_1^T$, где $U_1, \; V_1$ – первые r столбцов матриц U и V.

Метод SSA и алгоритм SSA-сглаживания

Метод SSA (Singular Spectral Analysis) основан на использовании сингулярного разложения матрицы задержек для анализа временного ряда.

Алгоритм SSA-сглаживания:

1. Для матрицы задержек $\mathbf{X}$ построим её низкоранговое приближение $\tilde{\mathbf{X}}$ с помощью SVD.
2. Из элементов матрицы $\tilde{\mathbf{X}}$ получим сглаженные оценки значений временного ряда $x_1, \ldots, x_N$. Заметим, что в исходной матрице эти значения стоят на нескольких позициях одновременно:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_\tau & \cdots & x_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & \cdots & x_{\tau+1} & \cdots & x_{n+1} \\ x_3 & x_4 & x_5 & \cdots & x_{\tau+2} & \cdots & x_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_\tau & x_{\tau+1} & x_{\tau+2} & \cdots & x_{2\tau-1} & \cdots & x_N \end{pmatrix}$$

Метод SSA и алгоритм SSA-сглаживания

3. Отсюда получаем формулу для сглаженных оценок:

$$\hat{x}_s = \begin{cases} \dfrac{1}{s} \displaystyle\sum_{i=1}^{s} \tilde{x}_{i,s-i+1}, & 1 \leq s \leq \tau \\ \dfrac{1}{\tau} \displaystyle\sum_{i=1}^{\tau} \tilde{x}_{i,s-i+1}, & \tau \leq s \leq n \\ \dfrac{1}{N-s+1} \displaystyle\sum_{i=1}^{N-s+1} \tilde{x}_{i+s-n,n-i+1}, & n \leq s \leq N \end{cases}$$

Такое сглаживание помогает снизить шум.

Cross Convergent Mapping

lecture_5/figs/CCM.png

Метод Local Approximation (LA)

1. Перейдём к векторному представлению временного ряда с помощью векторов задержек и матрицы задержек. В этом методе, однако, удобно изменить порядок следования элементов вектора по времени – имеем следующее обозначение:

$$\mathbf{x}_t = \left(x_t, x_{t-1}, \ldots, x_{t-\tau+1}\right)^T \in \mathbb{R}^\tau$$

2. Матрица задержек:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_\tau & \mathbf{x}_{\tau+1} & \ldots & \mathbf{x}_{N-2} & \mathbf{x}_{N-1} & \mathbf{x}_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\tau \times (N-\tau+1)}$$

3. Пусть требуется построить предсказание значения временного ряда x_{N+1}. Возьмём предшествующий данному моменту вектор задержек $\mathbf{x}_N$.
4. Зададимся параметром S и найдём в матрице $\mathbf{X}$ S векторов – ближайших соседей для $\mathbf{x}_N$ в терминах, например, евклидовой нормы. Обозначим их $\mathbf{x}_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_S}$.

Метод Local Approximation (LA)

5. Предсказание для значения x_{N+1} построим с помощью параметризованной функции f:

$$x_{N+1} = f(\mathbf{x}_N|\boldsymbol{\theta})$$

   Например, линейная аппроксимация: $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = \theta_0 + \boldsymbol{\theta}_1^T\mathbf{x}$. Необходимо лишь определить оптимальный набор параметров $\boldsymbol{\theta}$.

6. Параметры $\boldsymbol{\theta}$ определим по локальной окрестности вектора $\mathbf{x}_N$ в пространстве векторов задержек:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg\min \sum_{s=1}^{S} \left(x_{i_s+1} - f(\mathbf{x}_{i_s}|\boldsymbol{\theta}) \right)^2$$

7. Окончательно, предсказание для $N+1$-ого значения:

$$x_{N+1} = f(\mathbf{x}_N|\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

Резюме

- Временной ряд можно аппроксимировать отрезком его ряда Фурье.
- Вектор задержек и матрица задержек – это удобные способы многомерного представления временного ряда.
- Метод SSA основан на сингулярном разложении матрицы задержек ряда и, как правило, переходе к её низкоранговому приближению.
- Метод LA позволяет предсказывать значения временного ряда по окрестности соответствующего вектора задержек в своём пространстве (идея, схожая с алгоритмом CCM).