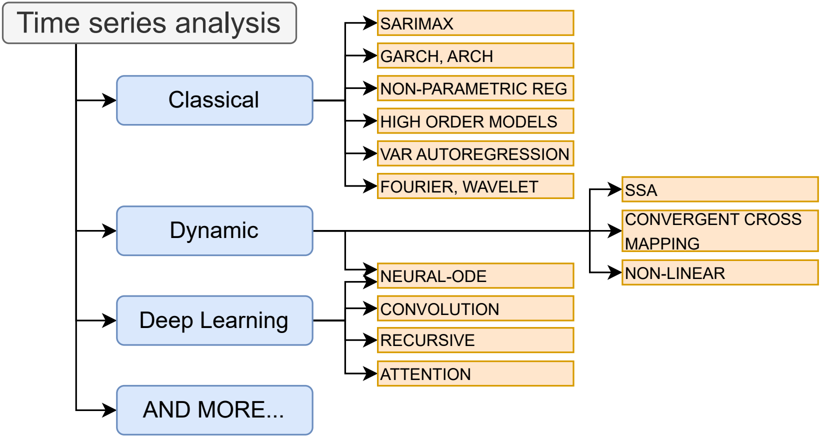
Mathematical Forecasting Methods

Лекция 4

МФТИ

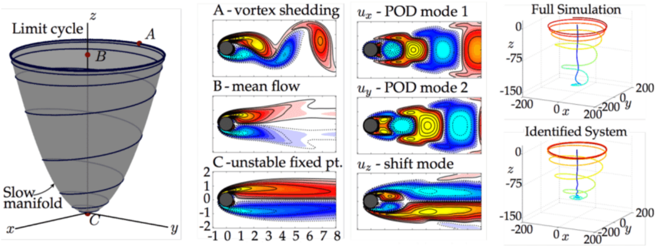
Осень, 2024

Forecasting Methods/Models zoo



Элементы теории динамических систем

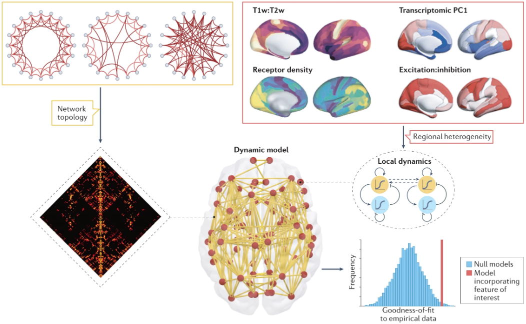
Теория динамических систем изучает процессы, которые развиваются во времени. Описание этих процессов дается в терминах разностных или дифференциальных уравнений или последовательности преобразований.
Динамическая система — это система, которая эволюционирует (меняется) со временем согласно некоему закону.



Элементы теории динамических систем

Теория динамических систем изучает процессы, которые развиваются во времени. Описание этих процессов дается в терминах разностных или дифференциальных уравнений или последовательности преобразований.

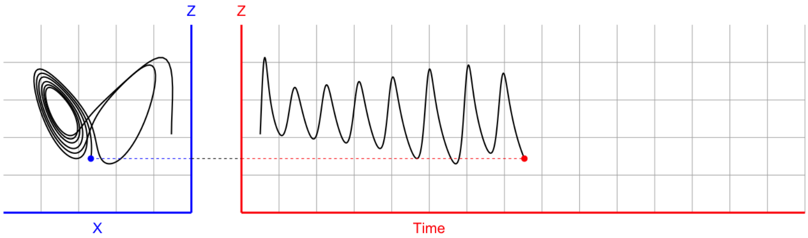
Динамическая система — это система, которая эволюционирует (меняется) со временем согласно некоему закону.



Динамическая система

Определение динамической системы включает в себя три компоненты:

- фазовое пространство (также называемое пространством состояний)
- время
- закон эволюции



Динамическая система

Фазовое пространство — это множество, элементы которого (называемые "точками") представляют возможные состояния системы* в любой момент времени.

Время может быть либо дискретным, либо непрерывным.

Закон эволюции — это правило, которое позволяет, если известно состояние системы в какой-то момент времени, определить состояние системы в любой другой момент времени. Предполагается, что процесс детерминирован в прошлом и в будущем.

*Одна и та же динамическая система может описываться с помощью разных фазовых пространств и разных векторов состояний – предпочтительным, как правило, является наиболее низкоразмерное описание.

Теория динамических систем

Модель динамической системы – функция, описывающая динамику системы в терминах дифференциального уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}(t), t, \mathbf{u}(t), \beta\Big) + n,$$

где $\mathbf{x}$ – состояние системы, t – время, $\mathbf{u}$ – управление, β – параметры, n – шум.

Альтернатива – рекуррентное соотношение $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$.

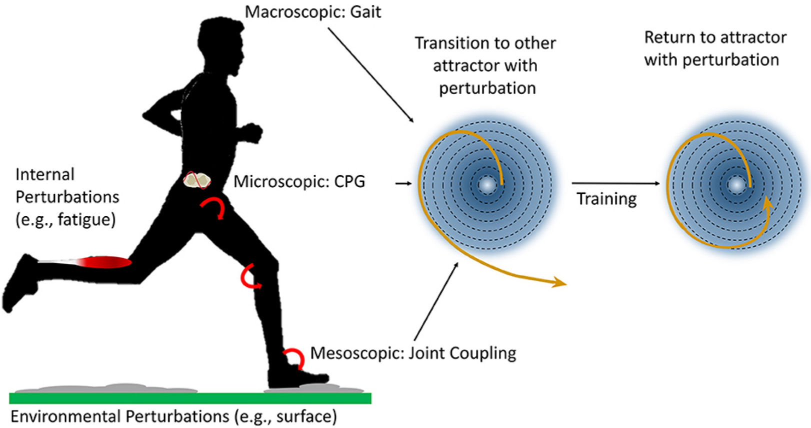
Проблемы:

1. Функция $\mathbf{f}$ зачастую неизвестна.
2. Функция $\mathbf{f}$ зачастую нелинейна.
3. Как правило, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, а n может быть очень большим.
4. Распределение шума неизвестно.
5. Что должно выступать в качестве состояния $\mathbf{x}$? (проблема выбора "координат")

Зачем моделировать динамические системы?

- **Предсказание**: мы хотим предвидеть поведение системы в будущем (метеорология, климатология и т.д.)
- **Оптимизация/дизайн**: введение параметров в модель динамической системы позволяет нам изучать её поведение в зависимости от параметров и находить их оптимальные значения.
- **Управление**: введение управления в описание системы позволяет нам изучать отклик системы на внешнее контролируемое воздействие в реальном времени и моделировать управляемые системы.
- **Интерпретация и физический смысл**: анализ поведения, параметров и траекторий моделируемой динамической системы позволяет лучше понять её физическую природу.

Зачем моделировать динамические системы?

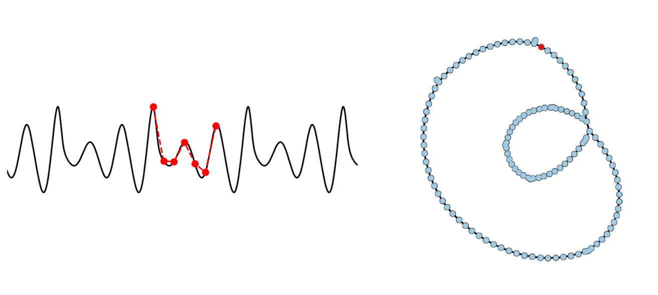


Вектор задержек (Delay embedding)

Временным рядом $\{x_i\}_1^N$ называется массив из N чисел

- представляющих собой значения некоторой измеренной (наблюдаемой) динамической переменной $\mathbf{x}(t)$,
- с некоторым постоянным шагом Δt по времени.

Зачастую временной ряд удобно представить в виде *фазовых траекторий* – вместо переменных, входящих в систему, использовать векторы задержек: $\mathbf{z}_i = [x_i, x_{i-1}, ..., x_{i-m+1}]$. Один такой вектор является элементом m-мерного фазового пространства $\mathbb{R}^m$.



Элементы теории Такенса

- Пусть задана динамическая система $f(\mathbf{x})$ с фазовым пространством $\mathbb{R}^M$.
- Величины, образующие временной ряд, являются значениями некоторой функции h состояния $\mathbf{x}(t)$ этой динамической системы на многообразии $W^d \subset \mathbb{R}^M$: $h : W^d \to \mathbb{R}, \quad x_i = h(\mathbf{x}(t_i)) = h(f(\mathbf{x}_0, t_i))$.
- При фиксированном шаге во времени Δt: $\mathbf{x}(t) = f(\mathbf{x}_0, t_i + i \cdot \Delta t)$.

Поэтому для компонент векторов задержки выполняется:

$$x_i = h(\mathbf{x}(t_i)) = h(f(\mathbf{x}_0, t_i))$$

$$x_{i+1} = h(\mathbf{x}(t_{i+1})) = h(f(\mathbf{x}_0, t_i + \Delta t))$$

$$\dots$$

$$x_{i+m-1} = h(\mathbf{x}(t_{i+m-1})) = h(f(\mathbf{x}_0, t_i + (m-1) \cdot \Delta t)$$

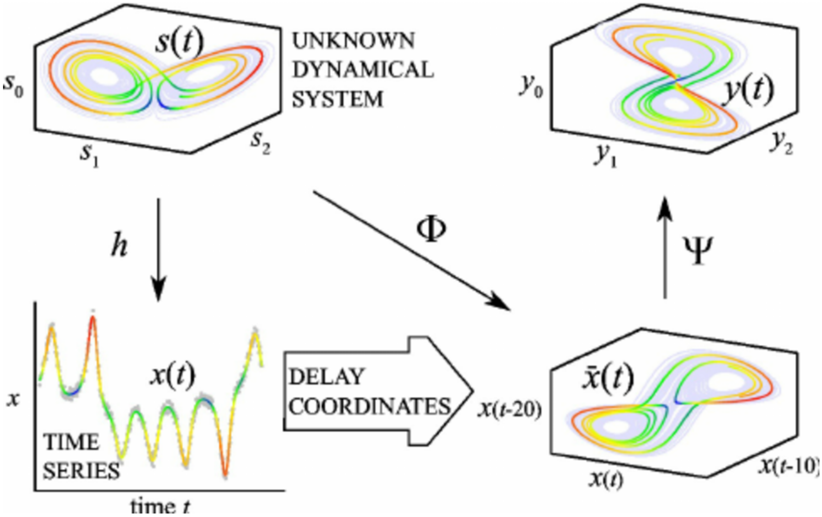
Элементы теории Такенса

Поскольку все компоненты вектора $\mathbf{z}_i = [x_i, x_{i-1}, ..., x_{i+m-1}]$ можно связать с одним и тем же измерением состояния динамической системы $x_i = h(f(\mathbf{x}_0, t_i))$, то существует векторная функция Λ, отображающая x_i в векторы m-мерного пространства $\mathbb{R}^m$:

$$\mathbf{z}_i = \Lambda(x_i), \quad \mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^m.$$

Приведенные рассуждения и составляют основное содержание теоремы Такенса, утверждающей, что при $m \geq 2d + 1$ свойством отображения Λ является вложение W^d в $\mathbb{R}^m$.

Элементы теории Такенса



Выводы из теоремы Такенса

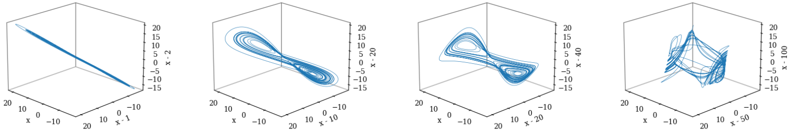
- В соответствии с теорией Такенса приемлемое описание фазового пространства динамической системы можно получить, если взять вместо реальных переменных системы m–мерные векторы задержек, составленные из значений ряда в последовательные моменты времени.
- При выполнении условия $m \geq 2d + 1$, где d — размерность вложения, возможно реконструировать пространство состояний системы.
- При условии стационарности временного ряда на базе этой реконструкции строится прогноз его дальнейшей динамики.

Методы поиска m

- На сегодняшний день наиболее часто используемым алгоритмом для оценки величины m является алгоритм Грассбергера–Прокаччиа (метод оценки, основанный на расстояниях в фазовых пространствах).
- Имеются также и другие методы, среди которых наиболее приемлемый — это т.н. функциональный метод.
- Зачастую из-за сложности методов величина m определяется эмпирически.
- **Главный критерий** — выбор такого m, начиная с которого **прекращается качественное изменение прогноза**.

Проблемы выбора τ

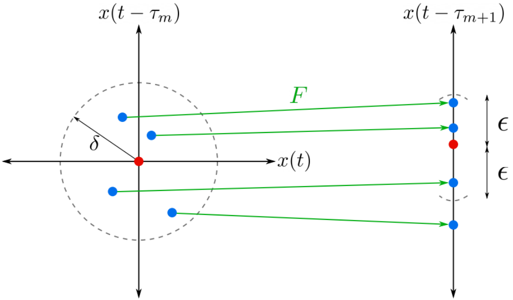
- Малые значения могу затеряться в шумовой компоненте сигнала
- Большие значения — малоинформативны из-за слабой связи между измерениями
- При плохо подобранном m появляется проблема оценки близости в фазовом пространстве



(a) $\tau = 1$ (b) $\tau = 10$ (c) $\tau = 20$ (d) $\tau = 50$

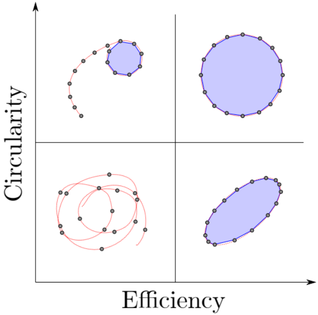
Проблемы выбора τ

- Малые значения могу затеряться в шумовой компоненте сигнала
- Большие значения — малоинформативны из-за слабой связи между измерениями
- При плохо подобранном m появляется проблема оценки близости в фазовом пространстве



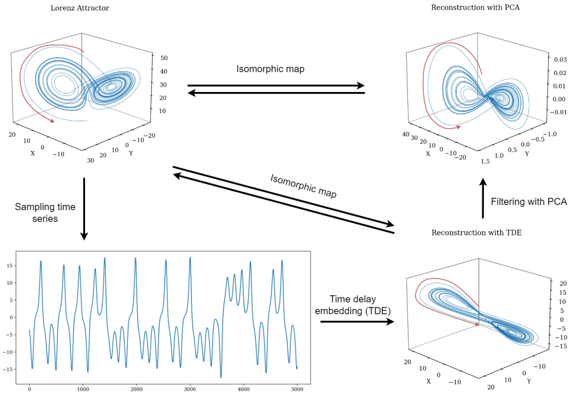
Проблемы выбора τ

- Часто используемая эвристика — τ как четверть наиболее доминирующего периода в сигнале.
- Эта эвристика основана на задача вложения синусоиды в 2D $x(t) = sin(\omega t)$.
- При $\tau = \frac{2\pi}{4\omega}$ метод восстанавливает круговую траекторию. Другие значения приводят к эллиптическим траекториям.
- Эта эвристика не может быть применено к хаотическим системам, где сигналы апериодические.



Проблемы выбора τ

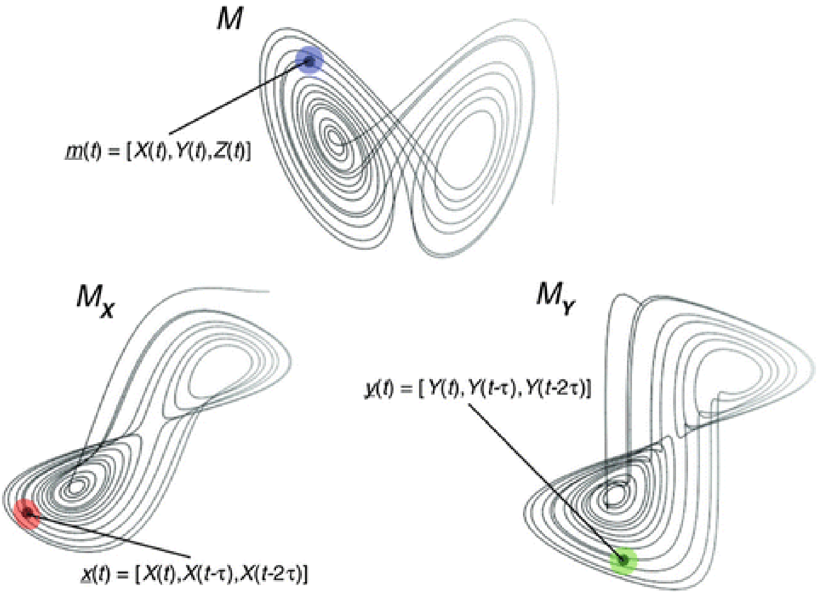
- Подход на основе моделей снижения размерности
- В подходе используются большие m и малые τ для снижения размерности до некоего малого значения
- Часто используется метод главных компонент



Идея алгоритма Convergent Cross Mapping

- Пусть имеется пара динамических систем X и Y, истинное поведение которых описывается многообразиями W_x и W_y в соответствующих фазовых пространствах. Об этих многообразиях мы можем судить лишь по их проекциям M_x и M_y на измеренные значения временных рядов $\{x_t\}_{t=1}^T$ и $\{y_t\}_{t=1}^T$, соответствующих данным системам.
- (**Cross Mapping**) По фазовой траектории одной из систем M_x можно предсказывать значения второй системы $y_t \simeq \hat{y}_t | M_x$. Аналогично, можно строить и предсказания $\hat{x}_t | M_y$. По точности данных предсказаний можно судить о наличии причинно-следственной связи между системами.
- (**Convergence**) При этом, если такая связь существует, то качество предсказания должно расти при увеличении рассматриваемого временного отрезка T.

Иллюстрация Cross Convergent Mapping



Алгоритм Convergent Cross Mapping

1. Пусть имеются 2 временных ряда $\{x_1, x_2, ..., x_T\}$ и $\{y_1, y_2, ..., y_T\}$ длины T.
2. Для ряда $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ формируем векторы предыстории размерности E с шагом по времени τ:

$$\mathbf{x}_t = \left(x_t, \quad x_{t-\tau}, \quad x_{t-2\tau}, \quad \ldots, \quad x_{t-(E-1)\tau}\right)$$

3. В пространстве $\mathbb{R}^E$ (*фазовом пространстве*) такие векторы предыстории образуют*фазовую траекторию* системы – множество $M_x = \{\mathbf{x}_t \mid t = 1 + (E-1)\tau, ..., T\}$.
4. Пусть требуется построить предсказание для значения y_t. Для этого сначала найдем $E+1$ векторов из M_x, ближайших к $\mathbf{x}_t$ (в терминах, например, стандартной метрики d в $\mathbb{R}^n$). Пусть им соответствуют временные индексы $t_1, ..., t_{E+1}$, отсортированные в порядке от ближайшей точки до наиболее удалённой.

$$d_i = d(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t_i}), \quad d_1 < d_2 < ... < d_{E+1}$$

Алгоритм Convergent Cross Mapping

5. Тогда оценка значения y_t строится следующим образом в виде взвешенной суммы значений ряда в моменты времени $t_1, \dots, t_{E+1}$:

$$\hat{y}_t | M_x = \sum_{i=1}^{E+1} \omega_i y(t_i)$$

$$\omega_i = \frac{u_i}{\sum\limits_{j=1}^{E+1} u_j}, \qquad u_i = e^{-\frac{d_i}{d_1}}, \qquad i = 1, \dots, E+1$$

6. Для того, чтобы посудить о существовании зависимости между рядами $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ и $\{\mathrm{y}_t\}_{t=1}^{T}$, рассчитаем теперь коэффициент корреляции Пирсона:

$$C_{yx} = \left[\rho\Big(y, \hat{y}|M_x\Big)\right]^2$$

Резюме

- Временной ряд – это характеристика состояния динамической системы (набор значений некоторой функции состояния).
- Математические основы динамических систем позволяют осуществлять анализ временных рядов.
- Теорема Такенса позволяет использовать вектора задержек для восстановления внутренней структуры динамической системы.
- В частности, выводы теоремы Такенса используются в CCM. Алгоритм CCM является аналогом статистического теста и оценивает причинно-следственную связь двух временных рядов.