# Mathematical Forecasting Methods

## Лекция 5

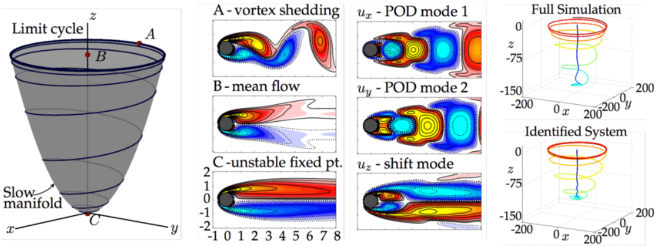
МФТИ

Осень, 2023

# Элементы теории динамических систем

Теория динамических систем изучает процессы, которые развиваются во времени. Описание этих процессов дается в терминах разностных или дифференциальных уравнений или последовательности преобразований.

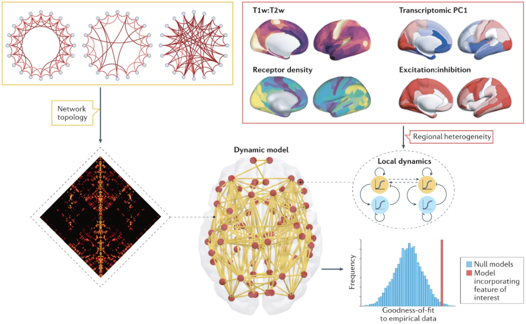
**Динамическая система** — это система, которая эволюционирует (меняется) со временем согласно некоему закону.



# Элементы теории динамических систем

Теория динамических систем изучает процессы, которые развиваются во времени. Описание этих процессов дается в терминах разностных или дифференциальных уравнений или последовательности преобразований.

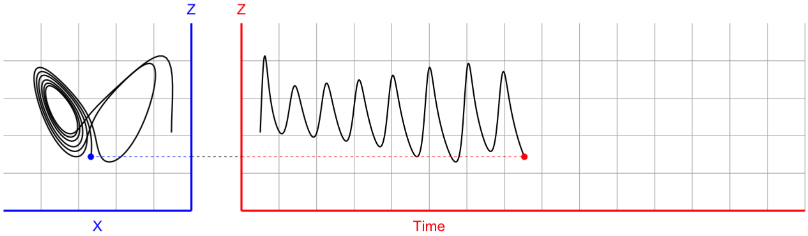
**Динамическая система** — это система, которая эволюционирует (меняется) со временем согласно некоему закону.



# Динамическая система

Определение динамической системы включает в себя три компоненты:

- фазовое пространство (также называемое пространством состояний)
- время
- закон эволюции



# Динамическая система

**Фазовое пространство** — это множество, элементы которого (называемые “точками”) представляют возможные состояния системы* в любой момент времени.

**Время** может быть либо дискретным, либо непрерывным.

**Закон эволюции** — это правило, которое позволяет, если известно состояние системы в какой-то момент времени, определить состояние системы в любой другой момент времени. Предполагается, что процесс детерминирован в прошлом и в будущем.

*Одна и та же динамическая система может описываться с помощью разных фазовых пространств и разных векторов состояний – предпочтительным, как правило, является наиболее низкоразмерное описание.

# Теория динамических систем

Модель динамической системы – функция, описывающая динамику системы в терминах дифференциального уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}(t), t, \mathbf{u}(t), \beta\Big) + n,$$

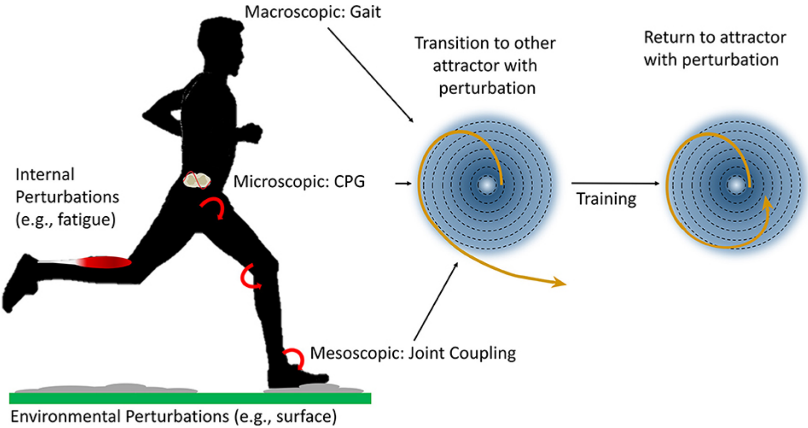
где $\mathbf{x}$ – состояние системы, $t$ – время, $\mathbf{u}$ – управление, $\beta$ – параметры, $n$ – шум.
Альтернатива – рекуррентное соотношение $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k)$.
Проблемы:

1. Функция $\mathbf{f}$ зачастую неизвестна.
2. Функция $\mathbf{f}$ зачастую нелинейна.
3. Как правило, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, а $n$ может быть очень большим.
4. Распределение шума неизвестно.
5. Что должно выступать в качестве состояния $\mathbf{x}$? (проблема выбора "координат")

# Зачем моделировать динамические системы?

- **Предсказание**: мы хотим предвидеть поведение системы в будущем (метеорология, климатология и т.д.)
- **Оптимизация/дизайн**: введение параметров в модель динамической системы позволяет нам изучать её поведение в зависимости от параметров и находить их оптимальные значения.
- **Управление**: введение управления в описание системы позволяет нам изучать отклик системы на внешнее контролируемое воздействие в реальном времени и моделировать управляемые системы.
- **Интерпретация и физический смысл**: анализ поведения, параметров и траекторий моделируемой динамической системы позволяет лучше понять её физическую природу.

# Зачем моделировать динамические системы?

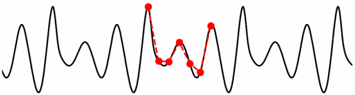


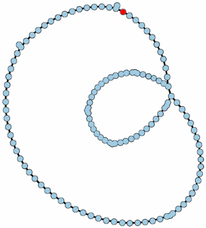
# Вектор задержек (Delay embedding)

Временным рядом $\{x_i\}_1^N$ называется массив из N чисел

- представляющих собой значения некоторой измеренной (наблюдаемой) динамической переменной $\mathbf{x}(t)$,
- с некоторым постоянным шагом $\Delta t$ по времени.

Зачастую временной ряд удобно представить в виде *фазовых траекторий* – вместо переменных, входящих в систему, использовать векторы задержек: $\mathbf{z}_i = [x_i, x_{i-1}, ..., x_{i-m+1}]$. Один такой вектор является элементом $m$-мерного фазового пространства $\mathbb{R}^m$.





# Элементы теории Такенса

- Пусть задана динамическая система $f(\mathbf{x})$ с фазовым пространством $\mathbb{R}^M$.
- Величины, образующие временной ряд, являются значениями некоторой функции $h$ состояния $\mathbf{x}(t)$ этой динамической системы на многообразии $W^d \subset \mathbb{R}^M$:
$h : W^d \to \mathbb{R}, \quad x_i = h(\mathbf{x}(t_i)) = h(f(\mathbf{x}_0, t_i))$.
- При фиксированном шаге во времени $\Delta t$:
$\mathbf{x}(t) = f(\mathbf{x}_0, t_i + i \cdot \Delta t)$.

Поэтому для компонент векторов задержки выполняется:

$$x_i = h(\mathbf{x}(t_i)) = h(f(\mathbf{x}_0, t_i))$$

$$x_{i+1} = h(\mathbf{x}(t_{i+1})) = h(f(\mathbf{x}_0, t_i + \Delta t))$$

$$\dots$$

$$x_{i+m-1} = h(\mathbf{x}(t_{i+m-1})) = h(f(\mathbf{x}_0, t_i + (m-1) \cdot \Delta t)$$

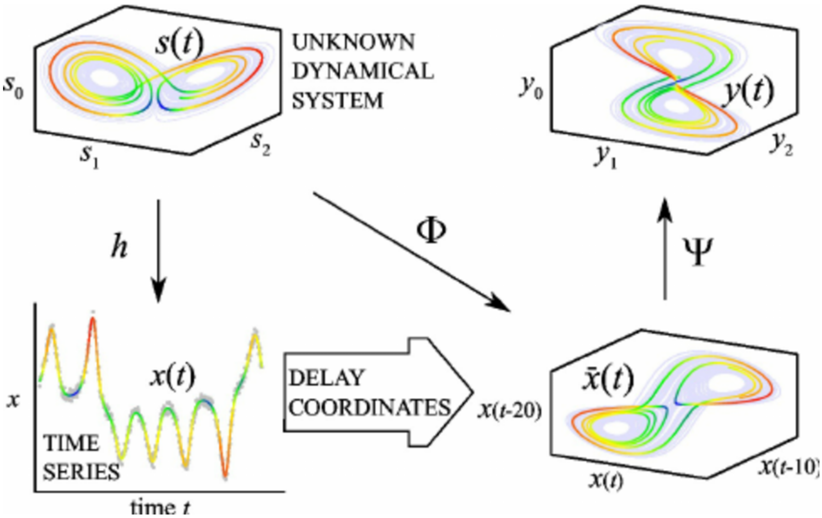
# Элементы теории Такенса

Поскольку все компоненты вектора $\mathbf{z}_i = [x_i, x_{i-1}, ..., x_{i+m-1}]$ можно связать с одним и тем же измерением состояния динамической системы $x_i = h(f(\mathbf{x}_0, t_i))$, то существует векторная функция $\Lambda$, отображающая $x_i$ в векторы $m$-мерного пространства $\mathbb{R}^m$:

$$\mathbf{z}_i = \Lambda(x_i), \quad \mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^m.$$

Приведенные рассуждения и составляют основное содержание теоремы Такенса, утверждающей, что при $m \geq 2d + 1$ свойством отображения $\Lambda$ является вложение $W^d$ в $\mathbb{R}^m$.

# Элементы теории Такенса



# Выводы из теоремы Такенса

- В соответствии с теорией Такенса приемлемое описание фазового пространства динамической системы можно получить, если взять вместо реальных переменных системы $m$–мерные векторы задержек, составленные из значений ряда в последовательные моменты времени.
- При выполнении условия $m \geq 2d + 1$, где $d$ — размерность вложения, возможно реконструировать пространство состояний системы.
- При условии стационарности временного ряда на базе этой реконструкции строится прогноз его дальнейшей динамики.

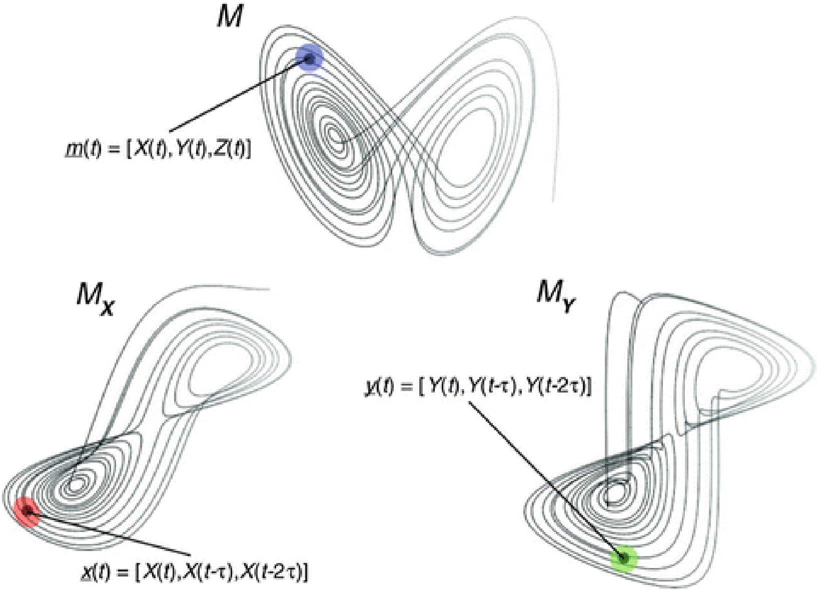
# Методы поиска $m$

- На сегодняшний день наиболее часто используемым алгоритмом для оценки величины $m$ является алгоритм Грассбергера–Прокаччиа (метод оценки, основанный на расстояниях в фазовых пространствах).
- Имеются также и другие методы, среди которых наиболее приемлемый — это т.н. функциональный метод.
- Зачастую из-за сложности методов величина $m$ определяется эмпирически.
- **Главный критерий** — выбор такого $m$, начиная с которого **прекращается качественное изменение прогноза**.

# Идея алгоритма Convergent Cross Mapping

- Пусть имеется пара динамических систем $X$ и $Y$, истинное поведение которых описывается многообразиями $W_x$ и $W_y$ в соответствующих фазовых пространствах. Об этих многообразиях мы можем судить лишь по их проекциям $M_x$ и $M_y$ на измеренные значения временных рядов $\{x_t\}_{t=1}^T$ и $\{y_t\}_{t=1}^T$, соответствующих данным системам.
- (**Cross Mapping**) По фазовой траектории одной из систем $M_x$ можно предсказывать значения второй системы $y_t \simeq \hat{y}_t | M_x$. Аналогично, можно строить и предсказания $\hat{x}_t | M_y$ . По точности данных предсказаний можно судить о наличии причинно-следственной связи между системами.
- (**Convergence**) При этом, если такая связь существует, то качество предсказания должно расти при увеличении рассматриваемого временного отрезка $T$.

# Иллюстрация Cross Convergent Mapping



# Алгоритм Convergent Cross Mapping

1. Пусть имеются 2 временных ряда $\{x_1, x_2, ..., x_T\}$ и $\{y_1, y_2, ..., y_T\}$ длины $T$.
2. Для ряда $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ формируем векторы предыстории размерности $E$ с шагом по времени $\tau$:

$$\mathbf{x}_t = \left(x_t, \quad x_{t-\tau}, \quad x_{t-2\tau}, \quad \ldots, \quad x_{t-(E-1)\tau}\right)$$

3. В пространстве $\mathbb{R}^E$ (*фазовом пространстве*) такие векторы предыстории образуют*фазовую траекторию* системы – множество $M_x = \{\mathbf{x}_t \mid t = 1 + (E-1)\tau, ..., T\}$.
4. Пусть требуется построить предсказание для значения $y_t$. Для этого сначала найдем $E+1$ векторов из $M_x$, ближайших к $\mathbf{x}_t$ (в терминах, например, стандартной метрики $d$ в $\mathbb{R}^n$). Пусть им соответствуют временные индексы $t_1, ..., t_{E+1}$, отсортированные в порядке от ближайшей точки до наиболее удалённой.

$$d_i = d(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t_i}), \quad d_1 < d_2 < ... < d_{E+1}$$

# Алгоритм Convergent Cross Mapping

5. Тогда оценка значения $y_t$ строится следующим образом в виде взвешенной суммы значений ряда в моменты времени $t_1, \ldots, t_{E+1}$:

$$\hat{y}_t | M_x = \sum_{i=1}^{E+1} \omega_i y(t_i)$$

$$\omega_i = \frac{u_i}{\sum_{j=1}^{E+1} u_j}, \qquad u_i = e^{-\frac{d_i}{d_1}}, \qquad i = 1, \ldots, E+1$$

6. Для того, чтобы посудить о существовании зависимости между рядами $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ и $\{\mathrm{y}_t\}_{t=1}^{T}$, рассчитаем теперь коэффициент корреляции Пирсона:

$$C_{yx} = \left[\rho\Big(y, \hat{y}|M_x\Big)\right]^2$$

# Резюме

- Временной ряд – это характеристика состояния динамической системы (набор значений некоторой функции состояния).
- Математические основы динамических систем позволяют осуществлять анализ временных рядов.
- Теорема Такенса позволяет использовать вектора задержек для восстановления внутренней структуры динамической системы.
- В частности, выводы теоремы Такенса используются в CCM. Алгоритм CCM является аналогом статистического теста и оценивает причинно-следственную связь двух временных рядов.