Mathematical Forecasting Methods

Лекция 14

МФТИ

Весна, 2024

Краткое повторение: Матричное представление временного ряда

- Вектор задержек:

$$\mathbf{x}_t = (x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+\tau-1})^T \in \mathbb{R}^\tau$$

- Матрица задержек:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \dots & \mathbf{x}_\tau & \dots & \mathbf{x}_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_\tau & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{\tau+1} & \dots & x_{n+1} \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_{\tau+2} & \dots & x_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_\tau & x_{\tau+1} & x_{\tau+2} & \dots & x_{2\tau-1} & \dots & x_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\tau \times n}$$

Здесь предполагаем, что $n > \tau$.

Низкоранговое приближение

- Пусть $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{\tau \times n}$, $\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\mathrm{T}$ – сингулярное разложение $\mathbf{X}$.
- Сингулярное разложение можно также представить в виде суммы *компонент* – матриц ранга 1:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\mathrm{T},$$

  где $r = \mathrm{rg}\, \mathbf{X}$, $\mathbf{u}_i$ и $\mathbf{v}_i$ - столбцы матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$, σ_i – i-ое сингулярное число.
- Низкоранговое приближение исходной матрицы можно получить, оставив лишь часть компонент суммы. Пусть $\mathcal{I} \subseteq \{1, ..., r\}$, тогда имеем:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_{i \in \mathcal{I}} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\mathrm{T}$$

- Если индексное множество $\mathcal{I}$ соответствует первым k компонентам, то мы получаем *наилучшее приближение* исходной матрицы ранга k: $\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{U}_k \mathbf{\Sigma}_k \mathbf{V}_k^\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\mathrm{T}$,

Метод Singular Spectrum Analysis

Метод SSA основан на использовании сингулярного разложения матрицы задержек для анализа временного ряда.

Алгоритм SSA-сглаживания:

1. Для матрицы задержек $\mathbf{X}$ построим её низкоранговое приближение $\tilde{\mathbf{X}}$ с помощью SVD.
2. Из элементов матрицы $\tilde{\mathbf{X}}$ получим сглаженные оценки значений временного ряда $x_1, \ldots, x_N$. Заметим, что в исходной матрице эти значения стоят на нескольких позициях одновременно:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_\tau & \dots & x_n \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_{\tau+1} & \dots & x_{n+1} \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_{\tau+2} & \dots & x_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_\tau & x_{\tau+1} & x_{\tau+2} & \dots & x_{2\tau-1} & \dots & x_N \end{pmatrix}$$

Метод Singular Spectrum Analysis

3. Отсюда получаем формулу для сглаженных оценок (диагональное усреднение):

$$\hat{x}_s = \begin{cases} \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s} \tilde{x}_{i,s-i+1}, & 1 \le s \le \tau \\ \frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{\tau} \tilde{x}_{i,s-i+1}, & \tau \le s \le n \\ \frac{1}{N-s+1}\sum_{i=1}^{N-s+1} \tilde{x}_{i+s-n,n-i+1}, & n \le s \le N \end{cases}$$

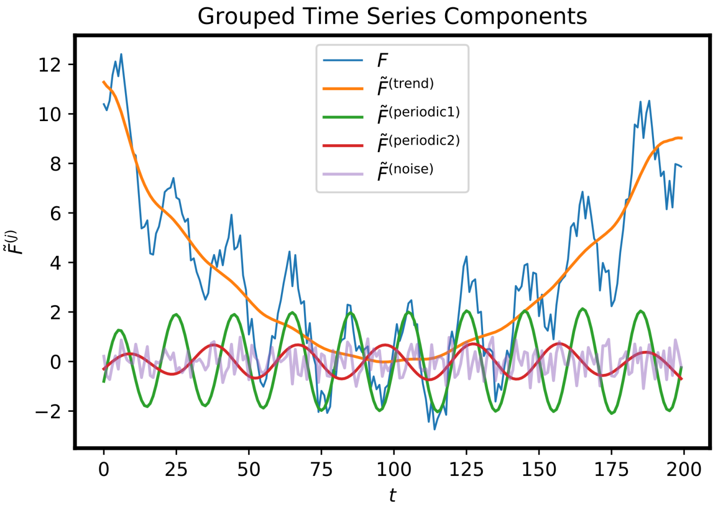
Такое сглаживание помогает снизить шум.

Метод Singular Spectrum Analysis

Используя полученное низкоранговое приближение исходной матрицы, можно получить разложение временного ряда на составляющие, соответствующие тренду, сезонности, шуму и т.д.:

- Для каждой пары векторов и соответствующего сингулярного числа $\sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\mathsf{T}$ с помощью диагонального усреднения получаем восстановленный временной ряд;
- На основе попарных корреляций восстановленных временных рядов выбираем группы для объединения;
- На основе группировки получаем разложение временного ряда на составляющие $\tilde{\mathbf{F}}_i$.

Метод Singular Spectrum Analysis



Multivariate SSA

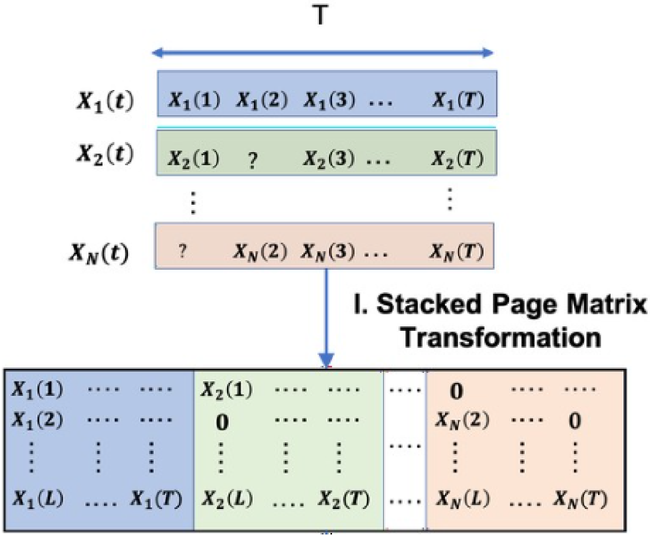
Пусть имеется P временных рядов $\{x_t^{(1)}\}_{t=1}^{T}$, ..., $\{x_t^{(P)}\}_{t=1}^{T}$.

1. Для каждого из рядов построим матрицу задержек $\mathbf{X}^{(P)} \in \mathbb{R}^{\tau \times n}$.
2. Объединим данные матрицы в одну 'длинную' блочную матрицу:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}^{(1)} & \mathbf{X}^{(2)} & \ldots & \mathbf{X}^{(P)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\tau \times Pn}$$

3. Построим для объединённой матрицы задержек $\mathbf{X}$ её низкоранговое приближение $\tilde{\mathbf{X}}$.
4. Получим сглаженные оценки элементов временных рядов $\hat{x}_t^{(1)}$, ..., $\hat{x}_t^{(P)}$ с помощью диагонального усреднения матрицы $\tilde{\mathbf{X}}$, с учётом её блочной структуры.

Multivariate SSA



Multivariate SSA. Сравнение с SSA

Table 2: MSE of signal reconstruction

Example 1	$L = 12$	$L = 24$	$L = 36$	$L = 48$	$L = 60$
SSA	6.58	4.09	**4.06**	4.09	6.58
MSSA	6.44	3.71	3.22	**3.01**	4.06
CSSA	6.58	4.09	**4.07**	4.09	6.58

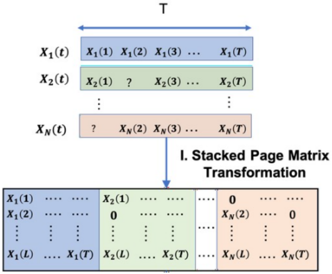
Example 2	$L = 12$	$L = 24$	$L = 36$	$L = 48$	$L = 60$
SSA	6.57	4.08	**4.05**	4.08	6.57
MSSA	6.44	3.71	3.24	**3.03**	4.02
CSSA	3.22	2.08	**2.07**	2.08	3.22

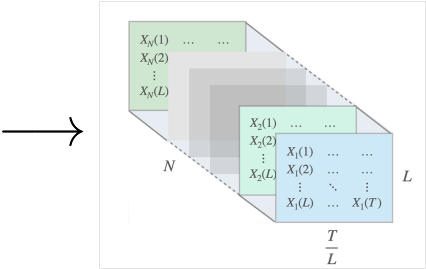
Example 3	$L = 12$	$L = 24$	$L = 36$	$L = 48$	$L = 60$
SSA	6.42	3.99	**3.96**	3.99	6.42
MSSA	13.77	7.57	6.13	**5.75**	7.66
CSSA	13.91	8.16	**7.68**	8.16	13.91

credit: Golyandina, N. and D. Stepanov (2005): "SSA-based approaches to analysis and forecast of multidimensional time series". In: Proceedings of the 5th St.Petersburg Workshop on Simulation, June 26-July 2, 2005, St. Petersburg State University, St. Petersburg, pp. 293–298

От mSSA к Tensor SSA для многомерного временного ряда

- Метод mSSA имеет преимущество, если временные ряды имеют совпадающие компоненты.
- Для учета более сложных зависимостей предлагается перейти от матричного вида к тензорному.





Tensor SSA

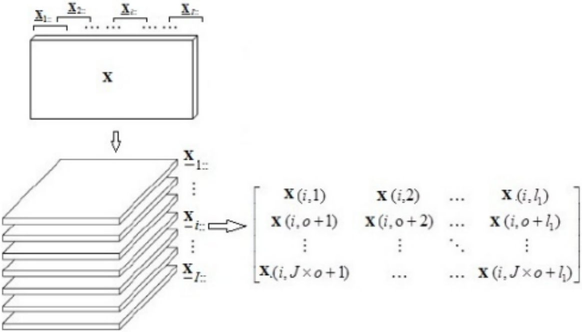
Пусть имеется P временных рядов $\{x_t^{(1)}\}_{t=1}^{T}$, ..., $\{x_t^{(P)}\}_{t=1}^{T}$.

1. Для каждого из рядов построим матрицу задержек $\mathbf{X}^{(p)} \in \mathbb{R}^{\tau \times n}$.
2. Объединим данные матрицы в тензор 3-его порядка:

$$\underline{\mathbf{X}}_{:,:,p} = \mathbf{X}^{(p)}$$

3. Построим для данного тензора приближение $\underline{\tilde{\mathbf{X}}}$ с помощью алгоритма ALS – каноническое разложение ранга R .
4. Для срезов результирующего тензора $\underline{\tilde{\mathbf{X}}}_{:,:,p}$ осуществляем диагональное усреднение и получаем сглаженные оценки элементов временных рядов $\hat{x}_t^{(1)}$, ..., $\hat{x}_t^{(P)}$.

Tensor SSA для одномерного временного ряда



Tensor SSA. Сравнение с SSA

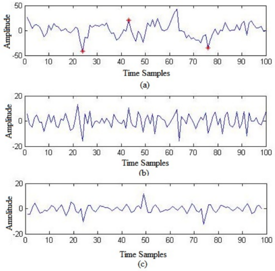


Figure 4 (a) Measured iEEG data, (b) output of SSA, and (c) output of TSSA.

Table 1. Table 1 Comparison in the Euclidean distance between the original signal and the signal estimated by the proposed method, and SSA.

Method	Proposed	SSA
Distance	0.045	0.23

credit: S. Kouchaki and S. Sanei, "Tensor based singular spectrum analysis for nonstationary source separation," 2013 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP), Southampton, UK, 2013, pp. 1-5

Резюме

- SSA — это связанный с SVD метод, который который позволяет разложить исходный временной ряд на составляющие компоненты, сгладить, избавится от шума.
- В случае работы с многомерными временными рядами существует обобщение SSA — mSSA.
- В mSSA используется матрица, полученная путем объединения ганкелевых матриц для каждого временного ряда.
- По аналогии с HOSVD SSA имеет обобщение на тензорный случай.
- С помощью CP-разложения выбираются интересующие компоненты, по аналогии с классическим SSA.