# Порядковая классификация с использованием частично упорядоченных наборов признаков

Папай Иван Дмитриевич

Московский физико-технический институт

Кафедра интеллектуального анализа данных ФПМИ МФТИ

*Научный руководитель:* д-р физ.-мат. наук В. В. Стрижов

2025

# Порядковая классификация

## Объект исследования

Определим задачу ранговой классификации. По имеющемуся набору объектов, каждый из которых задаётся множеством частично упорядоченных признаков, требуется воссоздать ранг каждого из них.

## Цель исследования

Разработать метод решения данной задачи и сравнить его с уже существующими альтернативными подходами.

## Пример датасета

В Football Player List под объектами имеются в виду футболисты, популярность каждого из которых требуется оценить по шкале от 1-го до 5-го порядка(неизвестный и невероятно популярный соответственно).

# Постановка задачи ранговой классификации

Дана выборка

$$\{(X_i, y_i)\}_{i=1}^{m},$$

где $X_i = [x_{i1}, ..., x_{ij}, ..., x_{in}]$ это объект, который требуется классифицировать, $y_i$ это метка класса. Объект $X_i$ является $n$-мерным вектором, каждый компонент которого принадлежит ч.у.м.-у $X_j$.
Задача - найти монотонную функцию

$$f : X \to \hat{y},$$

такую, что отклонение её предсказаний от реальных меток классов будет минимальным.

$$S(f) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - f(X_i)| \to min,$$

# Частично упорядоченные множества

Другими словами, элемент $j$ вектора $X_i$ принадлежит множеству $X_j$, в свою очередь подчинённое некоторому частичному порядку $\succeq$ со следующими свойствами:

1. рефлексивность, $\forall a \in X \ (a \succeq a)$,
2. антисимметричность, $\forall a, b \in X$, $(a \succeq b) \wedge (b \succeq a) \Rightarrow (a = b)$,
3. транзитивность, $\forall a, b, c \in X \ (a \succeq b) \wedge (b \succeq c) \Rightarrow (a \succeq c)$.

Под объектом $X$ имеется в виду декартово произведение ч.у.м.-ов $X_1, ..., X_n$,

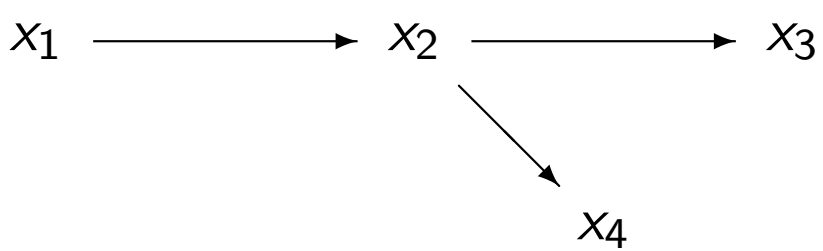
$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n,$$

множества $X_1, ..., X_n$ являются множествами значений признаков.

# Матрицы частичных порядков

Каждый частичный порядок $\succeq$, определённый на мн-ве $X_j$, описывается бинарной функцией $z_j(x_i, x_k)$

$$z_j(x_i, x_k) = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad x_{ij} \succeq x_{kj}, \\ 0, & \text{при} \quad x_{ij} \not\succeq x_{kj}, \end{cases}$$




Этот граф соответствует матрице $Z_j$:

$$Z_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы строим матрицы $Z_j$ для каждого из частичных порядков $X_j$.

# Конусы и генераторы

Выпуклый конус в $\mathbb{R}^m$ это такое множество $\mathcal{X}$, что

$$\mathcal{X} = \{\chi \mid A\chi \leq \mathbf{0}, \in \mathbb{R}^m\},$$

## Теорема

Вектор $\chi$, принадлежащий конусу $\mathcal{X}$ может быть единственным образом разложен в ЛК с неотрицательными коэффициентами,

$$\chi = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \zeta_k, \quad \lambda_k \geq 0,$$

где $\zeta_k$ это генератор конуса $\mathcal{X}$,

$$\zeta_k(i) = \begin{cases} 1, & \text{if} \quad x_i \succeq x_k, \\ 0, & \text{if} \quad x_i \not\succeq x_k, \end{cases}$$

# Задача оптимизации

Поскольку целевой вектор $\hat{y} \in \sum_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i$, применим теорему выше для декомпозиции вектора $\hat{y}$ в линейную комбинацию конусов $\mathcal{X}_1, ..., \mathcal{X}_n$,

$$\hat{y} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk} \zeta_{jk}, \quad \lambda_{jk} \in \mathbb{R}_+,$$

Вектор $\zeta_{jk}$ является $k$ столбцом матрицы $Z_j$. Отсюда определим $u$ для каждого объекта,

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk} z_j(x, x_k), \tag{1}$$

Таким образом мы свели задачу к минимизации лосса следующей функции по параметрам $w$ и $\lambda$

$$f_{w,\lambda}(x_i) = \phi \left( \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Psi(x_i, x_k) \right) \tag{2}$$

# Альтернативный подход: Изотоническая регрессия

Задача изотонической регрессии ставится следующим образом:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} w_i (x_i - y_i)^2 \tag{3}$$
$$\text{s.t.} \quad Ax \leq 0$$

Где матрица определена следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^\top \\ \vdots \\ a_{n-1}^\top \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1 \times n} \ ,$$

# Альтернативный подход: Косые решающие деревья

Решающие деревья задаются последовательностью условий на ЛК на каждом из узлов. Более общно говоря, возьмем в качестве примера $X = x_1; x_2; \dots x_d;\ C_j$ где $C_j$ метка класса и $x_i$ вещественные признаки. Проверка условий на узлах имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{d} a_i x_i + a_{d+1} > 0. \tag{4}$$

Здесь $a_1; \dots; a_{d+1}$ вещественные. Так как такие условия будут аналогичными тем же в обычных решающих деревьях при криволинейной замене координат, мы называем класс таких деревьев косыми.

# Стохастическая модификация прежнего алгоритма

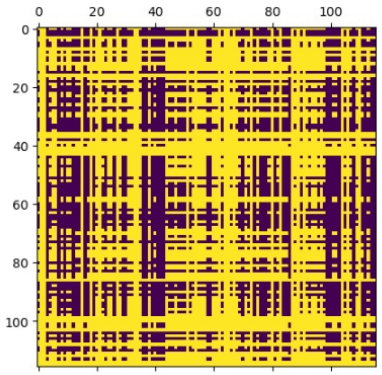
Заменим матрицы $Z_j$, элементы которых принимали бинарные значения, на $P$, векторы которой лежат в вероятностных симплексах.

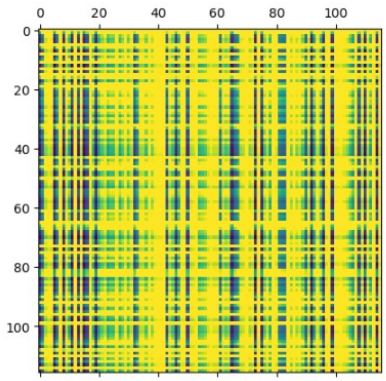
$$P_0 = \begin{pmatrix} P(x_1 \succeq x_1 | \mu_1 \succeq \mu_1) & P(x_1 \succeq x_2 | \mu_1 \succeq \mu_2) & & \\ & \ddots & P(x_i \succeq x_j | \mu_i \succeq \mu_j) & \cdots \\ & & & \ddots \\ & & & P(x_n \succeq x_n | \mu_n \succeq \mu_n) \end{pmatrix}$$

Оцениваем изначальное приближение матрицы по выборке(сэмплированием), а затем, меняя распределения бернуллиевских распределений компонент матриц, оптимизируем старый функционал, только уже по трём параметрам.

# Сравнение методов решения задачи

Визуализируем матрицу попарных сравнений между оригинальными метками классов и матрицу, соответствующую полученным предсказаниям.




Сравнение методов на датасете футбольных игроков.

| Algorithm | Learn error(MAE) | Test error(MAE) |
|---|---|---|
| Partial Orders | 1.14 $\pm$0.05 | 1.69 $\pm$0.2 |
| Isotonic Regression | 0.98 $\pm$0.2 | 1.28 $\pm$0.4 |
| Oblique Decision Trees | 0.47 $\pm$0.5 | 1.06 $\pm$0.71 |
| Stochastic Partial Orders | 1.48 $\pm$0.14 | 1.32 $\pm$0.05 |

# На защиту выносится

- Был разработан новый метод для решения задачи ранговой классификации. Также проведён сравнительный анализ с другими методами, решающими данную задачу.
- Дальнейшим направлением исследования будет дальнейшее улучшение алгоритма, возможно в сторону прямого восстановления матрицы отношений между объектами через спектр графа его Лапласиана.