1.5em 0pt

# Сходимость с оценкой вероятностей больших отклонений для задач выпуклой оптимизации и седловых задач в условиях повышенной гладкости

Денис Николаевич Рубцов

Московский физико-технический институт

*Научный руководитель:* д.ф.-м.н. А. В. Гасников

2024

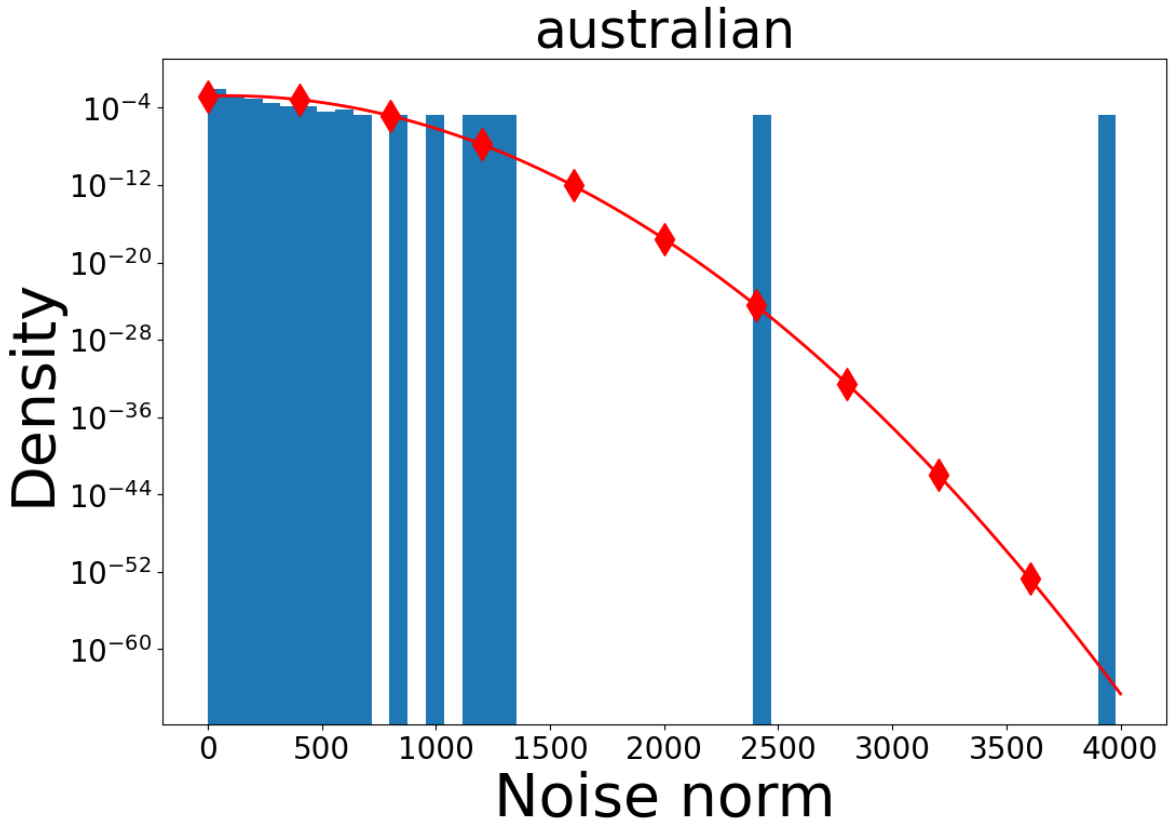
# Цель исследования

## Цели

- разработать быстрые алгоритмы для решения задач выпуклой оптимизации и седловыз задач с высокой вероятностью сходимости
- разработать ускоренные версии алгоритмов в условиях повышенной гладкости функций

# Тяжелые хвосты распределения шума стохастического градиента

Гистограмма распределения шума стох.градиента для датасета "australian"из библиотеки LIBSVM. Красная линия аппроксимирует гистограмму функцией плотности нормального распределения.



# Постановка задачи

Задача стохастической оптимизации

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) := \mathbb{E} f(x, \xi), \ \xi \sim \mathcal{P}$$

Как правило, результатом стохастических градиентных методов является точка $x_\varepsilon$ такая, что

$$\mathbb{E} f(x_\varepsilon) - \min f \leq \varepsilon$$

Мы рассматриваем алгоритмы, результатом которых являются точки $x_{\varepsilon,p}$, удовлетворяющие условию

$$P\{f(x_{\varepsilon,p}) - \min f \leq \varepsilon\} \geq 1 - p$$

где «уровень уверенности» $1 - p$ может быть достаточно большим

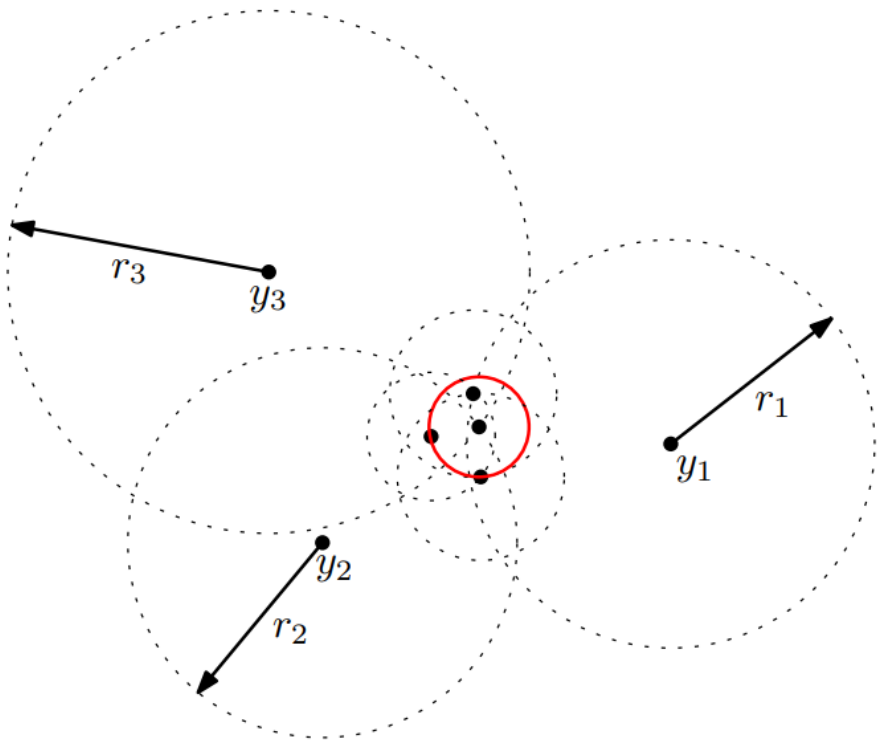
# Постановка задачи

Если решить задачу $\mathbb{E}f(x_\varepsilon) - \min f \leq p\varepsilon$, то желаемое неравенство $P\{f(x_{\varepsilon,p}) - \min f \leq \varepsilon\} \geq 1 - p$ следует автоматически по неравенству Маркова.
Сложность решения задачи сходимости по матожиданию, обычно, порядка $\mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon})$. Тогда сложность наивного решения задачи сходимости с высокой вероятностью $\mathcal{O}(\frac{1}{p\varepsilon})$. Хочется уменьшить множитель $\frac{1}{p}$ до $\ln(\frac{1}{p})$

# Robust distance estimation (RDE)

Обозначим за $\mathcal{D}(\varepsilon)$ - оракул, возвращающий точку $x$: $\mathbb{E}f(x) - \min f \leq \frac{\varepsilon}{3}$, т.е. $P[||x - x^*|| \leq \varepsilon] \geq \frac{2}{3}$. Можно сделать $m$ вызовов этого оракула $x_1, ..., x_m$ и выбрать среди полученных точек такую $x_{i*}$, вокруг которой класстеризуются остальные точки.

Рис.: Идея метода RDE




**Theorem**

*Точка $x_{i*}$, возвращаемая алгоритмом RDE удовлетворяет условию*

$$P(||x_{i*} - x^*|| \leq 3\varepsilon) \geq 1 - e^{-\frac{m}{18}}$$

# Применение RDE для обеспечения сходимости с высокой вероятностью: описание подхода

$$\frac{\mu}{2}||x - x^*||^2 \leq f(x) - f(x^*) \leq \frac{L}{2}||x - x^*||^2$$

Пусть мы имеем точки $x_i$ $(i = 1, ..., m)$ такие, что

$$\mathbb{E}f(x_i) - \min f \leq \frac{\varepsilon}{3} \xrightarrow{\text{неравенство Маркова}}$$

$$P(f(x_i) - f^* \leq \varepsilon) \geq \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{сильная выпуклость}}$$

$$P(||x_i - x^*|| < \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\mu}} =: \delta) \geq \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{RDE}}$$

$$P(||x_{i^*} - x^*|| < 3\delta) \geq 1 - e^{-\frac{m}{18}} \xrightarrow{\text{гладкость}}$$

$$P(f(x_{i^*}) - f^* \leq 9\frac{L}{\mu}\varepsilon) \geq 1 - e^{-\frac{m}{18}}$$

# Применение RDE для обеспечения сходимости с высокой вероятностью: проблема

$$\mathbb{E}f(x_i) - \min f \leq \frac{\varepsilon}{3} \overset{\cdots}{\Longrightarrow}$$

$$P\left(f(x_{i^*}) - f^* \leq 9\frac{L}{\mu}\varepsilon\right) \geq 1 - e^{-\frac{m}{18}}$$

Таким образом, генерируя точки алгоритмом, дающим гарантии сходимости с точностью $\varepsilon$ по матожиданию, но не с высокой вероятностью, мы предъявили алгоритм, дающий гарантию сходимости с высокой вероятностью, но лишь с $\kappa\varepsilon$-точностью, где число обусловленности $\kappa = \frac{L}{\mu} \gg 1$ может быть достаточно большим.

# Проксимальный метод *proxBoost*

Зафиксируем возрастающую последовательность $\lambda_0, ..., \lambda_T$ и последовательность точек $x_0, ..., x_T$. На каждой итерации $i = 0, ..., T$ будем решать задачу минимизации не функции $f$, а функции $f^i$

$$f^i(x) := f(x) + \frac{\lambda_i}{2}||x - x_i||^2$$

$$\bar{x}_{i+1} := \arg\min_x f^i(x)$$

Число обусловленности новых функций можно сделать значительно меньше $\kappa_i = \frac{L+\lambda_i}{\mu+\lambda_i} = (\lambda_i = \mu \cdot 2^i) = \frac{L+\mu\cdot 2^i}{\mu+\mu\cdot 2^i} = \mathcal{O}(1)$ при $i > \log \frac{L}{\mu}$

При этом решение новых задач будет приближенным решением основных задач

$$f(x_{j+1}) - f^* \leq (f^j(x_{j+1}) - f^j(\bar{x}_{j+1})) + \sum_{i=0}^{j} \frac{\lambda_j}{2}||\bar{x}_i - x_i||^2.$$

# Сложность алгоритма proxBoost

**Theorem**

*Пусть имеется оракул $\mathcal{M}(f, \varepsilon)$, возвращающий точку $x_\varepsilon$ такую, что $P(f(x_\varepsilon) - \min f \leq \varepsilon) \geq \frac{2}{3}$. Стоимость вызова такого оракула обозначим за $\mathcal{C}_\mathcal{M}(f, \varepsilon)$. Тогда для $\mu$-сильно выпуклых $L$-гладких функций алгоритм, решающий задачу $P\{f(x_{\varepsilon,p}) - \min f \leq \varepsilon\} \geq 1 - p$ требует*

$$\log\left(\frac{\log \kappa}{p}\right) \log \kappa \cdot \mathcal{C}_\mathcal{M}\left(f, \frac{\varepsilon}{\log \kappa}\right).$$

# Метод регуляризации для решения не сильно выпуклых задач

**Theorem**

*Пусть функция $f(x)$ выпукла. Будем решать задачу минимизации функции*

$$f^{\mu}(x) = f(x) + \frac{\mu}{2}||x - x_0||^2,$$

*где $\mu \sim \frac{\varepsilon}{R^2}$, $R = ||x^* - x_0||$.*
*Пусть мы нашли точку $x$ такую, что*

$$f^{\mu}(x) - \min f^{\mu} < \frac{\varepsilon}{2}$$

*Тогда*

$$f(x) - \min f < \varepsilon$$

# Сложность алгоритма proxBoost в выпуклом случае

**Theorem**

*Обобщение алгоритма proxBoost для* ***выпуклых*** *L-гладких функций алгоритм, решающего задачу* $P\{f(x_{\varepsilon,p}) - \min f \leq \varepsilon\} \geq 1 - p$ *требует*

$$\log(\frac{\log \frac{LR^2}{\varepsilon}}{p}) \log \frac{LR^2}{\varepsilon} \cdot \mathcal{C}_{\mathcal{M}}(f, \frac{\varepsilon}{\log \frac{LR^2}{\varepsilon}}).$$

# Заключение

## Результаты

- алгоритм proxBoost для решения задач стохастической оптимизации сильно выпуклых функций обобщен для не сильно выпуклых функций

## Планы

- проведение численных экспериментов сходимости предложенных методов
- разработка аналогичных алгоритмов для седловых задач
- использование повышенной гладкости функций для ускорения алгоритмов