
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
Кафедра интеллектуальных систем

Направление подготовки / специальность: 03.04.01 Прикладные математика и физика

Направленность (профиль) подготовки: Математическая физика, компьютерные технологии и
математическое моделирование в экономике

МОДЕЛИ СОГЛАСОВАНИЯ СКРЫТОГО ПРОСТРАНСТВА В ЗАДАЧЕ КОРРЕЛЯЦИОННОГО АНАЛИЗА

(магистерская диссертация)

Студент:

Сафиуллин Роберт Русланович

(подпись студента)

Научный руководитель:

Стрижов Вадим Викторович,
д-р физ.-мат. наук

(подпись научного руководителя)

Консультант (при наличии):

(подпись консультанта)

Москва 2023

Аннотация

В данной работе мы осуществляем исследование задачи прогнозирования одной временной траектории на основе другой. В рамках этого исследования, мы предлагаем подход, основанный на снижении размерности исходного и целевого пространства траекторий, что позволяет упростить процесс анализа и создания модели согласования для перехода между этими пространствами.

Мы проводим обзор и анализ различных методов аппроксимации в контексте многомодельного моделирования, нацеленных на эффективное построение модели согласования. В качестве элемента предложенного решения, мы применяем подход к отбору признаков на основе квадратичного программирования и метод частичных наименьших квадратов для установления связей между траекториями.

В рамках экспериментальной части исследования, проводится проверка устойчивости предложенных подходов на данных, полученных от носимых устройств. Результаты подтверждают устойчивость и эффективность предложенного метода в задаче прогнозирования траекторий, что указывает на его применимость и перспективность для работы со сложными временными рядами и их взаимосвязями.

Ключевые слова: снижение размерности, мультимоделирование, скрытое пространство

Содержание

1	Введение	4
2	Обзор литературы	5
3	Теоретические основы	8
3.1	Динамическая система	8
3.2	Симметрично положительно определенные матрицы	8
3.3	Основные понятия римановой геометрии	8
3.4	Векторизация	10
3.5	Построение функции перехода	10
4	Предлагаемый метод	12
4.1	Постановка задачи	12
4.2	Построение отображений	12
4.3	Скрытое представление автокодировщика	13
4.4	Проекция на касательное пространство	14
4.5	Отбор признаков с помощью квадратичного программирования	15
5	Вычислительный эксперимент	16
5.1	Набор данных	16
5.2	Предварительная обработка данных и их преобразование	17
5.3	Параметры	17
5.4	Результаты	18
6	Заключение	22

1 Введение

Исследование фокусируется на разработке новой методологии для предсказания наборов данных высокой размерности, таких как ряды по осям акселерометра, с использованием римановой геометрии. Эта задача представляет собой значительную сложность, поскольку методы, которые часто используются для её решения, могут обладать нестабильностью или требовать высоких вычислительных затрат. Главной целью является выявление скрытых зависимостей между сигналами и способность точно прогнозировать целевую переменную. Для этого рассматриваются различные методы восстановления сложных зависимостей, включающие снижение размерности исходного и целевых пространств, а также построение функции согласования полученных представлений.

Использование римановой геометрии в анализе данных высокой размерности может быть полезным, как показано в работах, посвященных анализу временных рядов и сетевых данных, особенно в области мозговых сетей. Эти работы предоставляют важные взгляды на то, как риманова геометрия может быть использована для извлечения структурных особенностей и зависимостей из сложных данных. Однако, стоит отметить, что помимо римановой геометрии существуют и другие методы, которые также могут быть полезны в контексте аппроксимации и анализа данных высокой размерности. В частности, автоэнкодеры, будучи одним из мощных инструментов глубокого обучения, предлагают привлекательный подход к изучению и снижению размерности данных. Автоэнкодеры способны извлекать скрытые признаки и обучать компактные представления данных, что может быть весьма полезно при обработке сложных сигналов и временных рядов. Их гибкость и способность к обучению с несколькими уровнями абстракции делают их ценным инструментом в задачах аппроксимации и прогнозирования данных.

Таким образом, цель нашего исследования заключается в разработке методологии для предсказания наборов данных высокой размерности и выявлении эффективных методов для работы с ними.

2 Обзор литературы

Восстановление многомерных сигналов является активной областью исследований с множеством применений. Одним из наиболее известных методов, используемых для нахождения линейных взаимосвязей между многомерными сигналами, представленными в виде матриц, является метод Partial Least Squares (PLS), который широко применяется в химии и биоинформатике для анализа больших наборов данных с высокой размерностью [1], [2].

Недавно был предложен метод High Order Partial Least Squares (HOPLS) [3], который является расширением PLS для анализа тензорных данных. HOPLS позволяет эффективно работать с многомерными данными, сохраняя их структуру, что особенно важно при анализе сложных динамических систем. Этот метод был успешно применен в различных областях, таких как обработка изображений и анализ мозговой активности [2].

Основываясь на римановых многообразиях [4] и нейронных сетях, разработаны различные подходы к снижению размерности и согласованию моделей. Например, использование римановой геометрии в задачах анализа временных рядов позволяет получать статистические характеристики данных на основе их латентной геометрии, что способствует эффективной классификации активностей человека на основе его кардиограммы [2].

Важным примером применения геометрии Римана в анализе данных является классификация многообразий ковариационных матриц в задачах интерфейса мозг-компьютер (BCI, Brain-Computer Interface) на основе моторного воображения, которое связано с представлением движений без их физического исполнения. Работа [5] представляет новый подход к классификации, используя пространственные ковариационные матрицы как дескрипторы сигналов электроэнцефалограммы (ЭЭГ) и применяя геометрию Римана для классификации этих матриц, опираясь на топологию многообразия симметричных и положительно определенных (СПО) матриц [6].

Модели автокодировщика, также можно использовать при восстановлении многомерных сигналов. Они представляют собой вид алгоритмов, основная цель которых - обучение "информативного" представления [7] данных, которое может использоваться для различных приложений. Процесс их обучения направлен на восстановлении набора входных наблюдений. Главные компоненты автокодировщика - это кодировщик и декодер, которые в основном представляют собой две схожие архитектуры для перевода и восстановления сжатого представления данных.

Сжатое представление данных [8], которое можно получить с помощью кодировщика, затем может быть очень полезно для различных задач. Например, для извлечения признаков, которое затем можно использовать для

классификации или кластеризации, или просто для понимания основных характеристик набора данных [9].

Автокодировщики, состоящие из полносвязных слоев, могут быть применены для анализа сложных структурных сигналов. Они способны сжимать вектор признаков \mathbf{x} в сжатое представление \mathbf{h} и затем восстанавливать исходный вектор признаков из этого сжатого представления. Эта способность делает автокодировщики мощным инструментом для изучения сложных функций и распределений данных. Немного о принципе работы: Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ - вектор признаков, полученный из временного ряда. Кодировщик преобразует этот вектор в сжатое представление $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^m$, где $m < n$. Допустим, кодировщик имеет функцию активации φ и матрицу весов $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Тогда сжатое представление можно выразить следующим образом:

$$\mathbf{h} = \varphi(\mathbf{W}\mathbf{x} + \mathbf{b}) \quad (2.1)$$

где $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ - вектор смещения.

Декодировщик, в свою очередь, пытается восстановить исходный вектор признаков из сжатого представления. Если у декодировщика есть функция активации ψ и матрица весов $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, восстановленный вектор признаков $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ может быть определен следующим образом:

$$\hat{\mathbf{x}} = \psi(\mathbf{V}\mathbf{h} + \mathbf{c}) \quad (2.2)$$

где $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ - вектор смещения декодера.

Цель обучения автокодировщика состоит в минимизации функции потерь $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$, которая измеряет разницу между исходным вектором признаков и его восстановленной версией. Наиболее распространенным вариантом функции потерь является среднеквадратичная ошибка (MSE):

$$\text{MSE}(x, \hat{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2. \quad (2.3)$$

Автокодировщики представляют собой мощный инструмент для снижения размерности данных и извлечения признаков. В контексте корреляционного анализа, автокодировщики могут быть использованы для извлечения информативных признаков из многомерных временных рядов, что упрощает процесс выявления и квантификации зависимостей между различными сигналами. Это особенно полезно, когда структура данных сложна и требует высокой степени сжатия для эффективного анализа.

Метод квадратичного программирования для отбора признаков (QPFS)

Метод квадратичного программирования для отбора признаков (QPFS) представляет собой технику отбора признаков, основанную на оптимизации, которая особенно подходит для отбора признаков из многомерных сигналов. [10], [11] Основная идея QPFS заключается в формулировке задачи отбора признаков в виде задачи квадратичной оптимизации, где целью является минимизация квадратичной функции при линейных ограничениях.

В общем виде задача квадратичного программирования для отбора признаков может быть сформулирована следующим образом:

$$\underbrace{\alpha^T \mathbf{Q} \alpha}_{\text{Sim}(\mathbf{X})} - \underbrace{\mathbf{c}^T \alpha}_{\text{Rel}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})} \rightarrow \min_{\substack{\alpha \geq \mathbf{0}_n \\ \mathbf{1}_n^T \alpha = 1}} \quad (2.4)$$

где α - это вектор весов признаков, \mathbf{Q} - это матрица, представляющая корреляции между признаками, \mathbf{c} - это вектор корреляции признаков с целевой переменной.

Метод QPFS стремится сбалансировать релевантность каждого признака относительно целевой переменной с избыточностью самих признаков. Этот метод особенно полезен в случаях, когда признаки сильно коррелированы между собой, так как он позволяет выбирать не только высокорелевантные, но и взаимодополняющие признаки. В многомерном случае, когда $y \in R^n$ QPFS можно модифицировать таким образом, чтобы он учитывал агрегацию по всем n компонентам вектора признаков. $\text{Sim}(\mathbf{X})$ остается неизменным, а матрица \mathbf{Q} определяется аналогично (3.7). Вектор \mathbf{c} агрегируется по всем целям и определяется как

$$\mathbf{c} = \left[\sum_{k=1}^r \text{sim}(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_k) \right]_{i=1}^n. \quad (2.5)$$

При использовании подхода RelAgg для агрегации релевантности, мы используем его как наиболее простой вариант для отбора признаков и выполнения эксперимента. Этот подход основан на методе квадратичного программирования для отбора признаков (QPFS), который стремится сбалансировать релевантность каждого признака относительно целевой переменной с избыточностью самих признаков. QPFS особенно полезен в случаях, когда признаки сильно коррелированы между собой. Однако, стоит отметить, что RelAgg может быть нечувствителен к некоторым зависимостям, и в таких случаях может потребоваться более сложный подход.

3 Теоретические основы

В данной работе предлагается использовать Риманово многообразие как геометрическую структуру для моделирования динамики системы \mathbf{S} . Благодаря римановой метрике, этот математический объект обеспечивает инвариантность скалярного произведения в каждой точке многообразия, что делает его особенно подходящим для анализа динамических систем. Используя методы римановой геометрии, можно аппроксимировать наблюдаемые измерения и разработать модель согласования, которая формализует отношение диффеоморфизма между касательными пространствами на многообразии. Такой подход основан на гипотезе о том, что динамика системы детерминирована и может быть эффективно представлена с использованием Риманова многообразия.

3.1 Динамическая система

Определение 1. Динамическая система \mathbf{S} — это множество элементов, для каждого из которых задано положение в фазовом пространстве в зависимости от времени.

Динамика различных процессов, в том числе упомянутых выше, не является полностью случайной. То есть изменения динамической системы обладают детерминированностью. В этом смысле, в основе динамики системы \mathbf{S} лежит многообразие [12] \mathbf{M} , управляющее ей.

3.2 Симметрично положительно определенные матрицы

Симметрично положительно определенные (СПО) матрицы $\{\mathbf{C}_j\}_{j=1}^S \in \mathbb{R}^{a \times a}$ формируют риманово многообразие \mathbf{M} , расстояние между двумя точками $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ которого определяется как:

$$\delta_R(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2) = \|\log(\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2)\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \log^2 \lambda_i \right)^{1/2} \quad (3.1)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ - положительные собственные значения матрицы $\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2$.

3.3 Основные понятия римановой геометрии

В данном разделе акцент делается на двух важных понятиях римановой геометрии: риманово расстояние и ковариационная матрица. Риманово

расстояние между двумя точками на многообразии определяется как длина кратчайшей кривой, соединяющей эти точки, что осуществляется при помощи геодезической кривой и метрического тензора. Ковариационная матрица является основным объектом анализа в контексте СПО матриц. Она описывает взаимосвязи между различными измерениями в данных и может быть проецирована на риманово многообразие путем отображения данных в тангенциальное пространство к точке на многообразии, и последующего "переноса" их обратно на многообразие. Эти методы позволяют учесть взаимосвязи между различными измерениями в данных и предоставляют гибкую и мощную модель для их анализа.

Проекция \mathbf{S}_i ковариационной матрицы \mathbf{C}_i на риманово многообразие и обратно может быть выражена следующими формулами:

$$\forall \mathbf{C}_i \in \mathbf{S}_*^+, \quad \text{Log}_{\mathbf{C}_i}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \log(\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C} \mathbf{C}_i^{-\frac{1}{2}}) \mathbf{C}_i^{\frac{1}{2}} \in T_{\mathbf{C}} \quad (3.2)$$

$$\forall \mathbf{S}_i \in T_{\mathbf{C}}, \quad \text{Exp}_{\mathbf{C}}(\mathbf{S}) = \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \exp(\mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S}_i \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}}) \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \in \mathbf{S}_*^+ \quad (3.3)$$

Где $\text{Log}_{\mathbf{C}_0}(\mathbf{C})$ - это логарифмическое отображение, которое проецирует точку с многообразия в тангенциальное пространство, а $\text{Exp}_{\mathbf{C}_0}(\mathbf{S})$ - это экспоненциальное отображение, которое переносит вектор \mathbf{S} из тангенциального пространства в многообразие.

\mathbf{C} - геометрическое среднее, которое можно найти с помощью алгоритма:

Алгоритм 1 Поиск геометрического среднего C СПО матриц

Вход: Ω - множество из СПО матриц $\{C_i\} \in P(E)$ и $\epsilon > 0$.

Выход: C_0 - оцененное геометрическое среднее в $P(E)$ множества Ω .

- 1: **Инициализация:** $C_0^{(1)} = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P C_p$
 - 2: **повторять**
 - 3: $\bar{S} = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P \text{Log}_{C_0^{(t)}}(C_p)$ Арифметическое среднее в касательном пространстве
 - 4: $C_0^{(t+1)} = \text{Exp}_{C_0^{(t)}}(\bar{S})$
 - 5: **пока** $|\bar{S}|_F < \epsilon$
 - 6: **return** $C_0^{(t+1)}$
-

3.4 Векторизация

Векторизация проекций матриц ковариации на касательное пространство - ключевой этап в обработке и анализе таких данных. Учитывая, что матрицы ковариации симметричны, мы можем оптимизировать процесс векторизации, используя только элементы верхнетреугольной матрицы. Это позволяет уменьшить размерность данных без потери информации, так как нижняя половина матрицы является дубликатом верхней.

Таким образом, мы получаем новые признаковые описания в виде элементов матрицы, включая диагональные и внедиагональные элементы, где внедиагональные элементы умножаются на $\sqrt{2}$, чтобы компенсировать их повторное появление в симметричной матрице. Это признаковое описание может быть представлено следующим образом:

$$\text{vec}(\mathbf{S}) = [\mathbf{S}_{1,1}; \sqrt{2}\mathbf{S}_{1,2}; \sqrt{2}\mathbf{S}_{1,3}; \mathbf{S}_{2,2}; \sqrt{2}\mathbf{S}_{2,3}; \mathbf{S}_{3,3}]$$

Эта векторизация обеспечивает практичный и эффективный способ представления и последующего анализа матриц ковариации, что важно для построения устойчивых моделей прогнозирования.

3.5 Построение функции перехода

Рассмотрим Риманову поверхность M , представляющую собой гладкое многообразие, оборудованное римановой метрикой. Касательное пространство в точке $p \in M$ обозначим как $T_p M$, а в точке $q \in M$ как $T_q M$.

При определенных условиях возможно построить гладкую функцию перехода, которая отображает точки из касательного пространства $T_p M$ в касательное пространство $T_q M$.

тельное пространство $T_q M$. Такая функция называется диффеоморфизмом и обозначается $\varphi : T_p M \rightarrow T_q M$.

Определение 2 Диффеоморфизм между касательными пространствами к Риманову многообразию в точках p и q — это гладкое отображение, которое устанавливает взаимно однозначное соответствие между этими касательными пространствами и при этом сохраняет дифференциальную структуру.

Пусть $\mathbf{X} = \{x_i\}_{i=1}^N$ и $\mathbf{Y} = \{y_i\}_{i=1}^M$ обозначают временные ряды, полученные от двух различных устройств, согласованных таким образом, что они представляют собой отображения одной и той же системы. Далее, пусть представления траекторий этих временных рядов в виде ковариационных матриц обозначены как $\{\mathbf{C}_i^{\mathbf{X}}\}_{i=1}^N$ и $\{\mathbf{C}_i^{\mathbf{Y}}\}_{i=1}^M$ соответственно.

Теорема 1 (Сафиуллин, 2023)

Средние геометрические наборов ковариационных матриц $\{\mathbf{C}_i^{\mathbf{X}}\}_{i=1}^N$ и $\{\mathbf{C}_i^{\mathbf{Y}}\}_{i=1}^M$ — $\mathbf{C}^{\mathbf{X}}$ и $\mathbf{C}^{\mathbf{Y}}$ соответственно находятся на одном и том же Римановом многообразии, но в разных его точках. Эти точки представляют средние состояния системы, соответствующие

Доказательство:

Поскольку временные ряды \mathbf{X} и \mathbf{Y} представляют собой согласованные отображения одной и той же системы, их ковариационные матрицы $\mathbf{C}^{\mathbf{X}}$ и $\mathbf{C}^{\mathbf{Y}}$ могут быть рассмотрены как элементы Риманова многообразия симметричных положительно определенных матриц (СПО). Это многообразие, в свою очередь, представляет собой локальные фазовые пространства, аппроксимирующие динамику системы в окрестности средних состояний.

Далее, введем понятие геометрического среднего на Римановом многообразии. Геометрическое среднее ковариационных матриц $\{\mathbf{C}_i^{\mathbf{X}}\}_{i=1}^N$ и $\{\mathbf{C}_i^{\mathbf{Y}}\}_{i=1}^M$ представляет собой точки на этом многообразии, которые минимизируют сумму квадратов Римановых расстояний до каждой из матриц в наборе.

Теперь рассмотрим касательные пространства к этому Риманову многообразию в точках, соответствующих геометрическому среднему $\mathbf{C}^{\mathbf{X}}$ и $\mathbf{C}^{\mathbf{Y}}$. Касательное пространство в точке Риманова многообразия представляет собой линейное пространство, которое локально аппроксимирует многообразие вокруг этой точки. Это позволяет рассматривать касательные пространства как локальные фазовые пространства системы, которые аппроксимируют динамику системы в окрестности средних состояний.

Таким образом, средние геометрические ковариационных матриц $\mathbf{C}^{\mathbf{X}}$ и $\mathbf{C}^{\mathbf{Y}}$ представляют собой точки на одном и том же Римановом многообразии, но в разных его точках, которые соответствуют средним состояниям системы в различных локальных фазовых пространствах.

4 Предлагаемый метод

В нашем исследовании мы предлагаем метод аппроксимаций системы с использованием метода проекции на касательное пространство к поверхности Римана. Сравнивать данный подход будем с аппроксимацией системы с помощью скрытого представления автокодировщика. Более конкретно, между этими двумя представлениями строится нейронная сеть, которая действует как функция перехода от одного скрытого представления (сигналов с акселерометра смартфона) к другому (сигналов акселерометра смарт-часов).

4.1 Постановка задачи

Дано

$\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\} = \{x_i, y_i\}_{i=1}^N$ - выборка из сигналов.
 $x_i, y_i \in \mathbb{R}^{a \times T}$

где a - число осей датчика, T - число элементов временного ряда.

Требуется построить функции аппроксимации:

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^{a \times T} &\rightarrow \mathbb{R}^h \\ \psi : \mathbb{R}^{a \times T} &\rightarrow \mathbb{R}^p\end{aligned}$$

аппроксимирующие измерения исходных систем, а также **модель согласования** этих представлений:

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}^p$$

Основываясь на *теореме 1*, в соответствии с которой аппроксимации являются касательными пространствами на Римановом многообразии, и между ними существует диффеоморфизм. Затем, по полученному представлению $\mathbf{f}(\varphi(\mathbf{X}))$, строится **прогноз** $\hat{\mathbf{Y}}$ ряда \mathbf{Y} :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{Y}} &= \mathbf{g}(\mathbf{f}(\varphi(\mathbf{X}))) \\ \mathbf{g} : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^{a \times T}\end{aligned}$$

4.2 Построение отображений

Пусть $T_x M$ и $T_y M$ - два касательных пространства, с точками касания в средних геометрических наборах ковариационных матриц, связанных с двумя

различными локальными характеристиками движения динамической системы, описываемой заданными временными рядами: $\mathbf{X} = \mathbf{x}_{i=1}^N$ И целевыми временными рядами: $\mathbf{Y} = \mathbf{y}_{i=1}^N$. Согласно теореме о согласовании представлений траекторий временных рядов на римановом многообразии, касательные пространства $T_x M$, $T_y M$ аппроксимируют локальные фазовые пространства, содержащие информацию о локальных характеристиках динамики системы. Это означает, что между ними существует диффеоморфизм, который можно аппроксимировать с помощью функции согласования

$$\mathbf{f} : T_x M \rightarrow T_y M$$

4.3 Скрытое представление автокодировщика

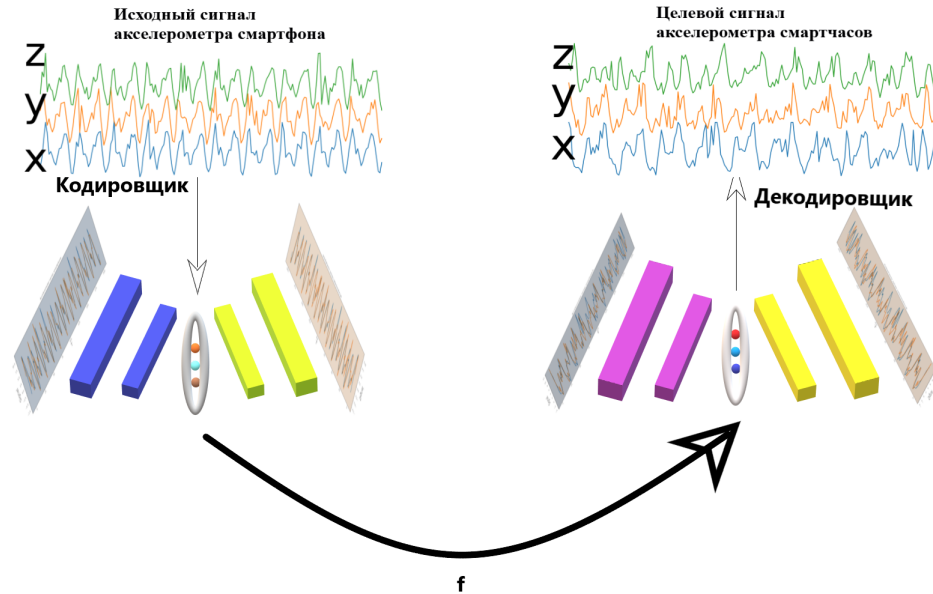


Рис. 1: Схема предложенного метода, где аппроксимация измерений происходит с помощью автокодировщика. Здесь \mathbf{f} - функция согласования

Сначала мы тренируем два автокодировщика: один для реконструкции временных рядов с акселерометра смартфона, а другой - для реконструкции временных рядов с акселерометра смарт-часов. Затем мы подаем проверочный временной ряд на кодировщике автокодировщика "смартфон чтобы получить его скрытое представление. Это скрытое представление затем переносится в скрытое пространство автокодировщика "смарт-часы" с помощью нейронной сети, описанной выше. Из этого скрытого пространства мы получаем целевой ряд акселерометра смарт-часов с помощью декодировщика автокодировщика "смарт-часы".

4.4 Проекция на касательное пространство

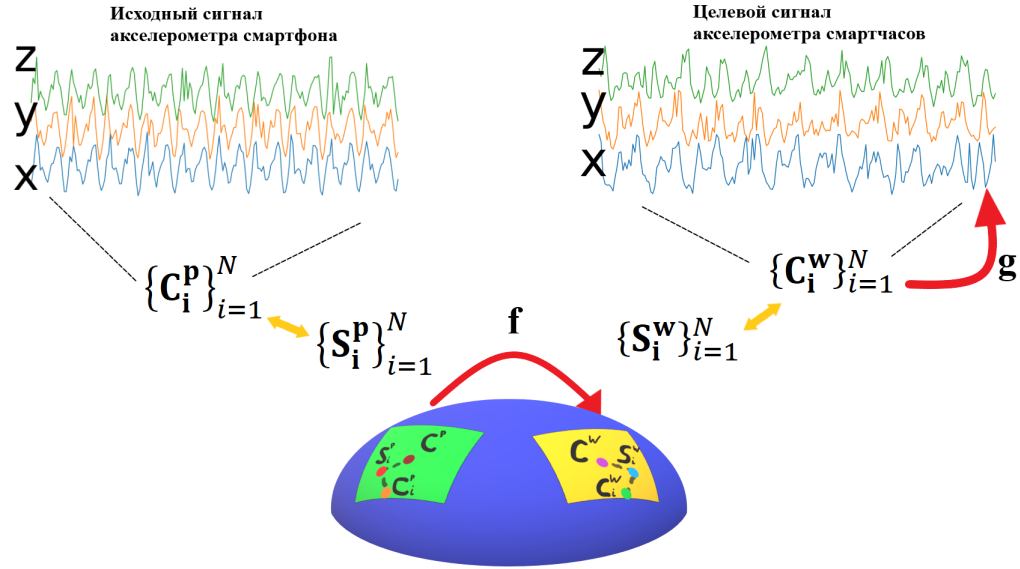


Рис. 2: Схема предложенного метода, где аппроксимация измерений происходит с использованием проекции на многообразие Римана. Здесь $\{C_i\}$, $\{S_i\}$ - соответствующие множества ковариационных матриц и их проекций на касательное к многообразию Римана пространство в точке C , а f - функция согласования

Используя метод проекции на касательное пространство, мы получаем проекции на касательном пространстве, соответствующие смарт-часам. Затем мы получаем ковариационные матрицы временных рядов, используя формулу [12], в случае метода проекции на касательное пространство. Наконец, с помощью нейронной сети, обученной на получение целевых временных рядов с акселерометра часов из ковариационных матриц, мы получаем прогнозируемый ряд \hat{Y} по ряду X .

4.5 Отбор признаков с помощью квадратичного программирования

Мы также применяем метод Quadratic Programming Feature Selection (QPFS) для отбора наиболее важных признаков из исходного сигнала смартфона. Использование данного метода позволяет нам извлечь наиболее значимые признаки из сигнала, удаляя менее важные признаки по мере убывания их значимости. Этот процесс продолжается до тех пор, пока не останется только множество наиболее важных признаков. Применение такого подхода обусловлено желанием проверить устойчивость процесса реконструкции сигнала в зависимости от числа признаков, которые используются моделью.

5 Вычислительный эксперимент

5.1 Набор данных

WISDM Smartphone and Smartwatch Activity and Biometrics Dataset [13] является обширным набором данных, включающим записи акселерометра и гироскопа с смартфонов и смарт-часов. Данный датасет предоставляет информацию о разнообразных физических активностях, выполняемых пользователями устройств, включая ходьбу, бег и другие. Это позволяет применить наш анализ временных рядов для изучения динамической системы, представленной человеком, и его взаимодействия с устройствами.

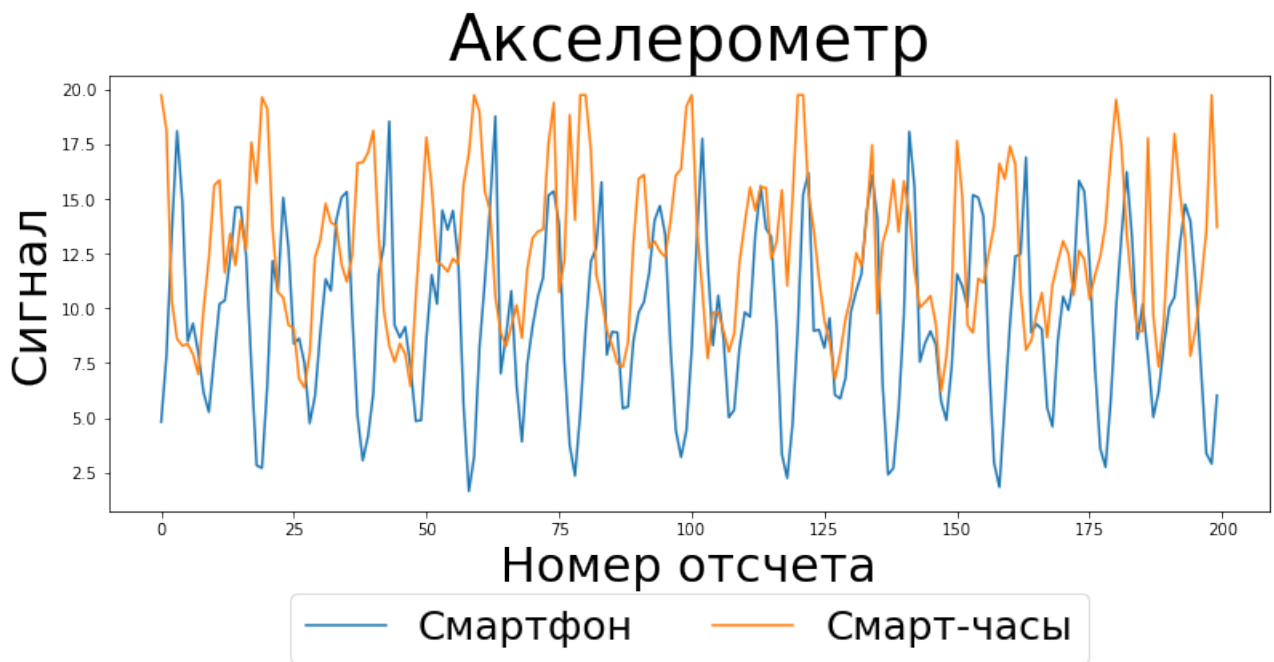


Рис. 3: Пример данных

В рамках нашего исследования данный датасет может быть использован для сравнения и анализа временных рядов, полученных с акселерометров смартфонов и смарт-часов. Из-за разницы в размещении устройств на теле пользователя, эти два типа акселерометров предоставляют разные представления одной и той же динамической системы. Таким образом, можно исследовать взаимосвязь между данными с разных устройств, снижать размерность исходных данных и определить общие закономерности.

Применение корреляционного анализа временных рядов на основе Риманова пространства и машинного обучения к данным из WISDM Smartphone and Smartwatch Activity and Biometrics Dataset позволит нам выявить возможные зависимости между данными акселерометров разных устройств и оценить

применимость нашего подхода в реальных условиях. Это также может привести к улучшению точности прогнозирования физической активности на основе данных акселерометра и повышению эффективности обнаружения аномалий или распознавания активностей.

5.2 Предварительная обработка данных и их преобразование

Перед анализом временных рядов производится предварительная обработка данных, включающая удаление выбросов, нормализацию. Затем данные аппроксимируются, согласно рисункам 1, 2, для получения компактного представления данных в пространстве меньшей размерности.

5.3 Параметры

Для модели согласования касательных пространств использовались следующие параметры:

- размеры скрытых слоев: 16, 32, 64,
- dropout: 0.4,
- скорость обучения: 0.01,
- количество эпох: 20,
- размер пакета: 256.

Для модели согласования скрытых представлений автокодировщиков:

- размеры скрытых слоев: 512, 256, 512, 1024, 2048, 1024,
- dropout: 0.5,
- скорость обучения: 0.001,
- количество эпох: 20,
- размер пакета: 256.

Кроме указанных выше параметров, важно отметить, что кодировщик и декодировщик автокодировщика представляют собой двухслойные нейронные сети. Размерность скрытого пространства, в котором происходит сжатие информации, составляет 16.

5.4 Результаты

В ходе вычислительного эксперимента, мы сравнили два предложенных метода: использование скрытого пространства автоэнкодера и метод проекции на касательное пространство Риманова многообразия. В обоих подходах, для отбора признаков из исходного сигнала смартфона, применялся метод QPFS. Результаты эксперимента показали, что оба метода демонстрируют высокие значения коэффициента корреляции, что свидетельствует о высокой согласованности прогноза с целевым сигналом. Тем не менее, применение в качестве аппроксимации системы метода, основанного на Римановом многообразии, позволило достичь более низких значений среднеквадратичной ошибки (MSE) в рамках вычислительного эксперимента. Это свидетельствует в пользу того, что использование Риманова многообразия для снижения размерности может приводить к более точным и устойчивым результатам по сравнению с подходом, основанным на автоэнкодере.

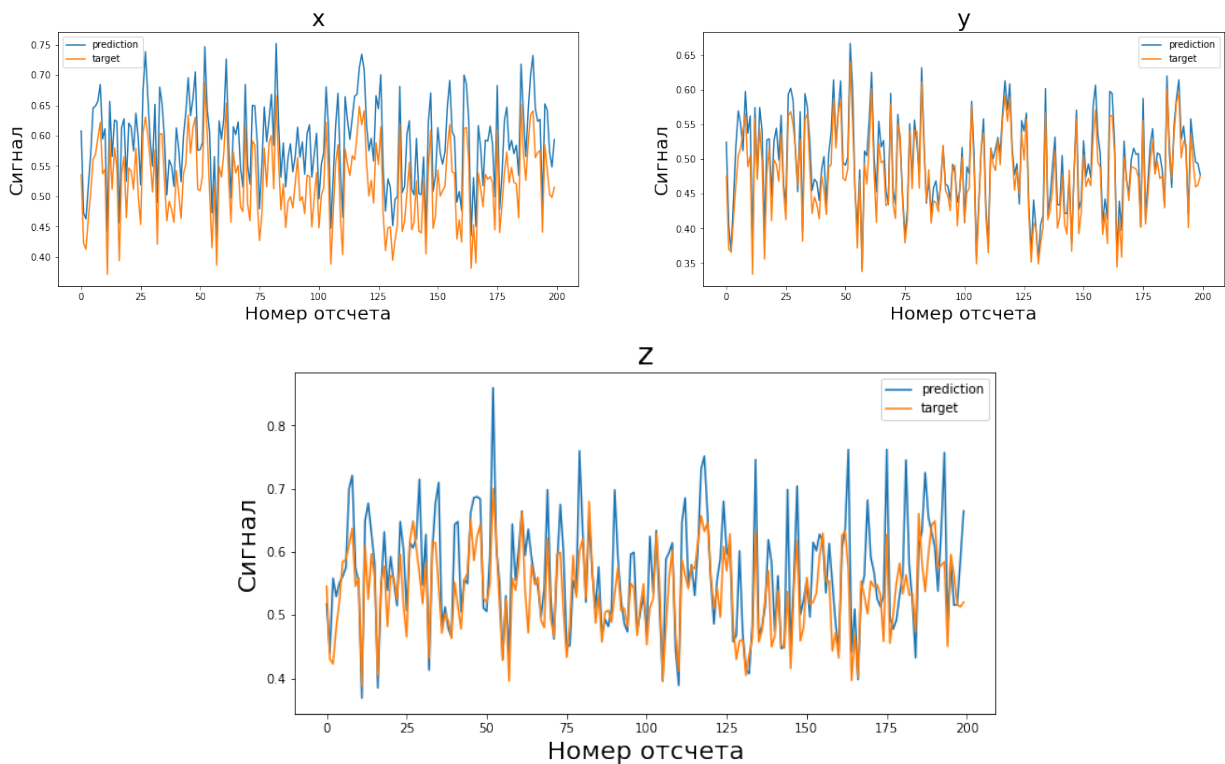


Рис. 4: Восстановленные траектории с помощью метода, где аппроксимация измерений происходит с помощью автокодировщика

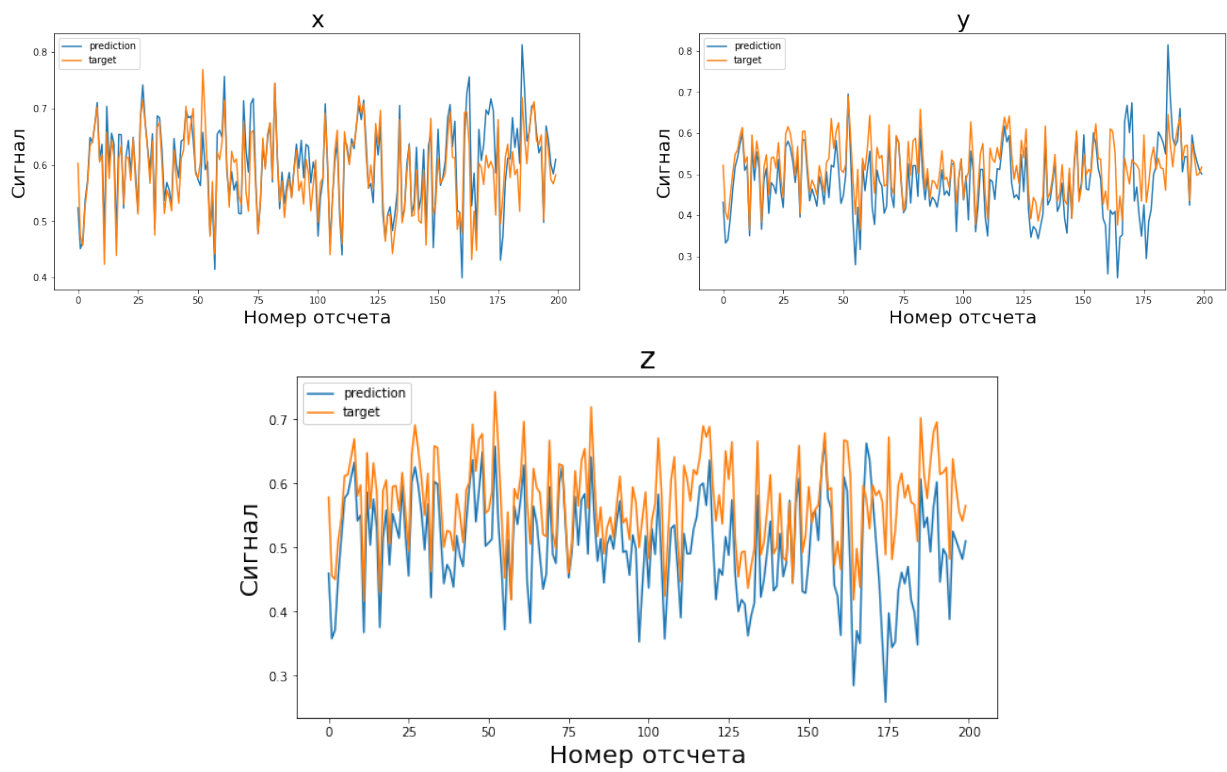


Рис. 5: Восстановленные траектории с помощью метода, где аппроксимация измерений происходит с помощью проекции на касательное к многообразию Римана пространство

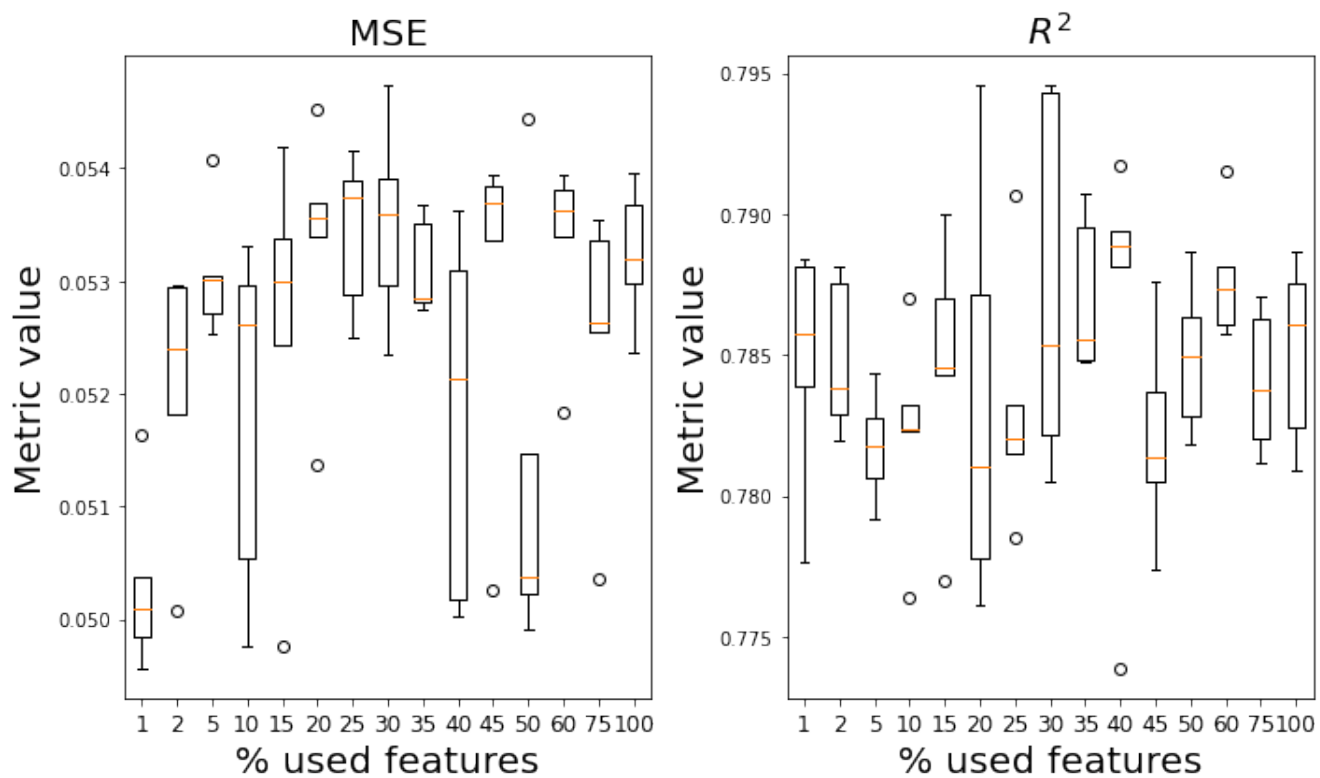


Рис. 6: Результаты вычислительного эксперимента в случае аппроксимации с использованием скрытого пространства автокодировщика

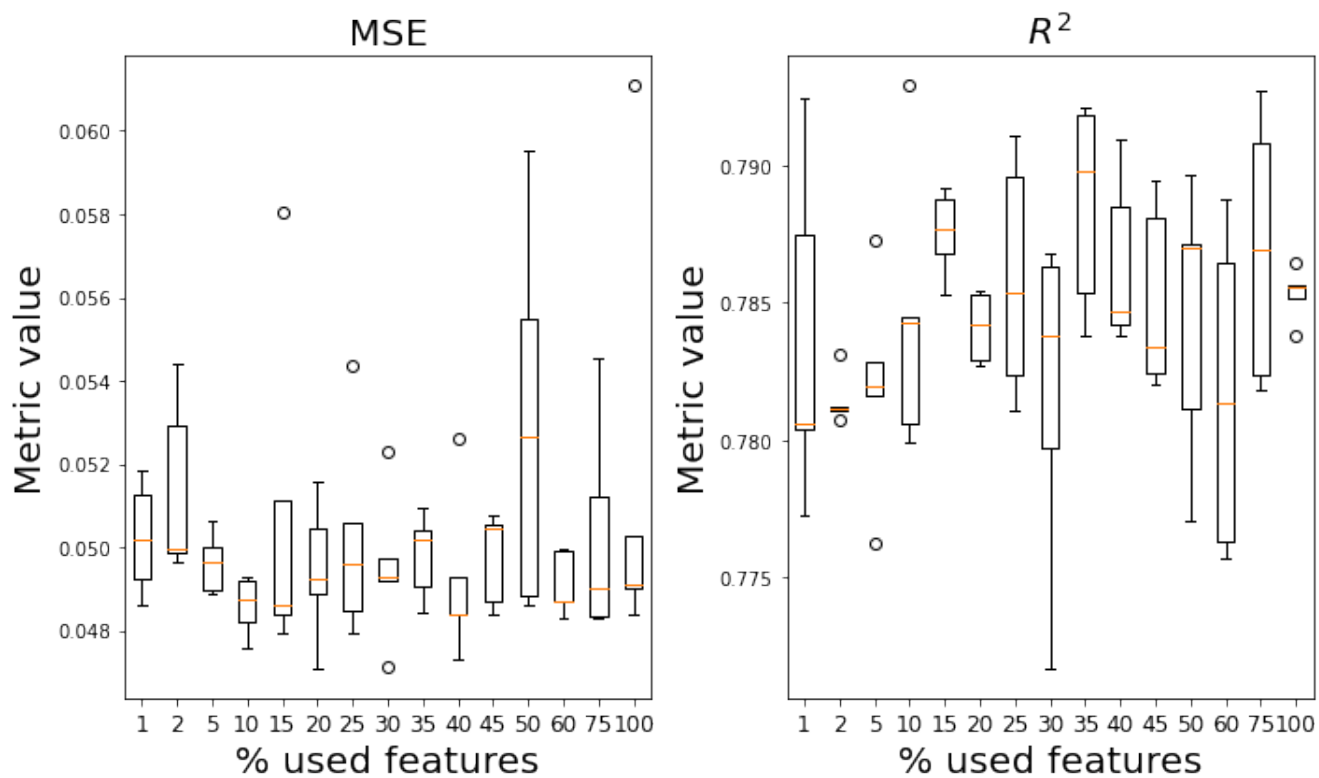


Рис. 7: Результаты вычислительного эксперимента в случае аппроксимации с использованием проекции на многообразие Римана

6 Заключение

Вычислительный эксперимент подтвердил нашу гипотезу о том, что представление данных в виде проекции на риманово многообразие может быть эффективным подходом к снижению размерности и обеспечению устойчивой реконструкции исходных данных. Это подтверждается меньшим значением среднеквадратичной ошибки, достигнутым при использовании этого подхода по сравнению с использованием автокодировщика. Однако оба метода показали себя достаточно эффективными, и их выбор может зависеть от конкретной задачи и требуемого уровня точности.

В заключение стоит отметить, что результаты нашего эксперимента указывают на применимость метода, основанного на аппроксимации систем и построении модели согласования. Особенно при работе с сложными временными рядами и динамическими системами.

Список литературы

- [1] A. Eliseyev and T. Aksenova, “Penalized multi-way partial least squares for smooth trajectory decoding from electrocorticographic (ecog) recording,” *PLOS ONE*, vol. 11, pp. 1–19, 05 2016.
- [2] A. Motrenko and V. Strijov, “Multi-way feature selection for ecog-based brain-computer interface,” *Expert Systems with Applications*, vol. 114, pp. 402–413, 2018.
- [3] Q. Zhao, C. F. Caiafa, D. P. Mandic, Z. C. Chao, Y. Nagasaka, N. Fujii, L. Zhang, and A. Cichocki, “Higher order partial least squares (hopls): A generalized multilinear regression method,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 35, no. 7, pp. 1660–1673, 2013.
- [4] M. Hadwiger, T. Theußl, and P. Rautek, “Riemannian geometry for scientific visualization,” in *ACM SIGGRAPH Asia 2022 Courses*, (Thuwal, Saudi Arabia), pp. 1–82, ACM, 2022.
- [5] A. Barachant, S. Bonnet, M. Congedo, and C. Jutten, “Multiclass brain-computer interface classification by riemannian geometry,” *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, vol. 59, no. 4, pp. 920–928, 2012.
- [6] M. Moakher, “A differential geometric approach to the geometric mean of symmetric positive-definite matrices,” *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 26, no. 3, pp. 735–747, 2005.
- [7] A. Hill, K. Kechris, R. Bowler, and F. Kashani, “Latent space semi-supervised time series data clustering,” 2021.
- [8] Y. Wang, H. Yao, and S. Zhao, “Auto-encoder based dimensionality reduction,” *Neurocomputing*, vol. 184, pp. 232–242, 2016.
- [9] J. Wang, M. Wei, L. Zhang, G. Huang, Z. Liang, L. Li, and Z. Zhang, “An autoencoder-based approach to predict subjective pain perception from high-density evoked eeg potentials,” *Annu Int Conf IEEE Eng Med Biol Soc*, vol. 2020, pp. 1507–1511, 2020.
- [10] R. Isachenko and V. Strijov, “Quadratic programming feature selection for multicorrelated signal decoding with partial least squares,” *Expert Systems with Applications*, vol. 207, p. 117967, 2022.

- [11] A. Katrutsa and V. Strijov, “Comprehensive study of feature selection methods to solve multicollinearity problem according to evaluation criteria,” *Expert Systems with Applications*, vol. 76, pp. 1–11, 2017.
- [12] R. Kirby, “Manifold theory,” *Algebraic & Geometric Topology*, vol. 2, p. 273, 1978.
- [13] K. Ron, W. Gary, and W. Samuel, “Wisdm smartphone and smartwatch activity and biometrics dataset,” 2011.