

Обратные задачи в моделировании нейронных дифференциальных уравнений в частных производных

Александр Терентьев

Московский физико-технический институт,
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра интеллектуальных систем
Научный руководитель: д.ф.-м.н. Стрижов Вадим Викторович

17 мая 2025 г.

Классификация траекторий динамических систем

Проблема

В задачах EEG трудность вызывает получение точного сигнала от головного мозга. Исследователи встречаются со следующими проблемами. Высокая чувствительность прибора к движениям и тремору, обусловленному психоэмоциональным напряжением пациента, вызывает помехи в работе, что может затруднить диагностику.

Цель

Целью работы является предложить метод решения восстановления источников сигнала ЭЭГ и уменьшения уровня шума в их определении. Предлагается использовать физико-информированный подход в восстановлении, использующийся в задачах восстановления временных рядов, вносящий априорные знания о модели для уменьшения уровня шума от данных.

Постановка обратной задачи

Дано

1. $\mathcal{D} = \{X_i\}_{i=1}^N$ - набор данных пространственно-временных рядов ЭЭГ, где $X_i = \chi(r, t) : \mathbb{R}^{(3 \times 1)} \rightarrow \mathbb{R}^K$ - пространственно-временной ряд сигналов K .
2. $\mathcal{S} = \{s_i(t)\}_{i=1}^M$ - конечный набор источников сигналов.

Найти

1. $D(\hat{s}|X, \mathcal{D})$ - суперпозиция пространственно-временных рядов ЭЭГ X_i по M источникам
2. $G(\hat{X}(t+1)|X(t), \hat{s}, \mathcal{D})$ - восстановление пространственно-временных рядов ЭЭГ X_i на основе s источника

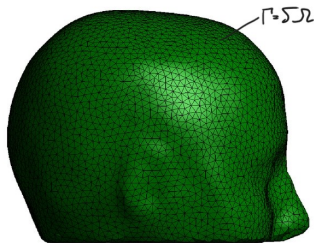
Критерий

MSE - ошибка предсказаний рядов $\|\hat{X} - X\|_2$

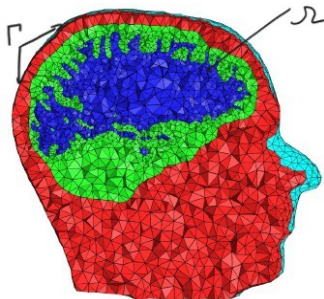
О схеме восстановления источников сигналов

$$\chi_i : (N_x \times N_y \times N_z \times T) \xrightarrow{D(\hat{s}|X, \mathcal{D})} s \xrightarrow{G(\hat{X}|X(t), \hat{s}, \mathcal{D})} \hat{\mathbf{X}}$$

Метод Inverse NPDE



Поверхность головы Γ

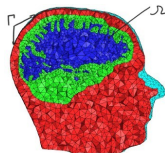


Разрез объема головы Ω

Во восстановление электромагнитных потенциалов

Уравнения Максвелла в СГС

1. $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$
2. $\square \varphi = -4\pi \frac{\rho}{\varepsilon}$
3. $\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mu \mathbf{j}$
4. $\square = \Delta - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$



Разрез объема головы Ω

Задача nPDE

Необходимо восстановить $\rho, \phi, \mathbf{A}, \mathbf{j}$ Моделируется нейросетью с 8 выходами. Граничное условие: $\phi|_{\Gamma} = 0, \mathbf{A}|_{\Gamma} = 0$

Критерий

$$\text{Loss} = \text{BCSLoss} + \text{PDELoss} + \|\hat{X} - X\|_2 + R(\mathbf{w})$$

Энергия в качестве регуляризации

Идея

1. Требуется добиться наиболее простое распределение зарядов. Обычные методы регуляризации не решают данную задачу.
2. Предлагается в качестве регуляризации брать энергию электрического поля

Подсчет энергии

1. $\frac{d\mathcal{E}}{dt}(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}, t)$
2. Граничное условие $\mathcal{E}(\mathbf{r} = -\infty) = 0$

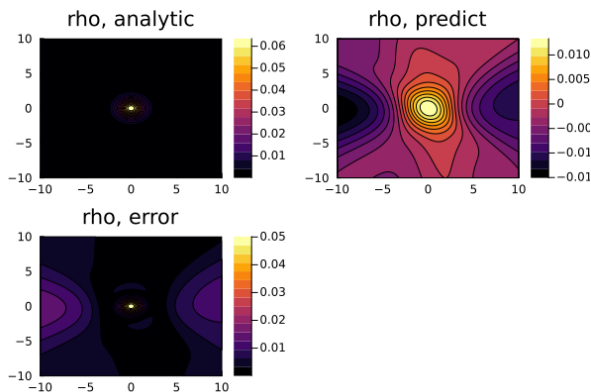
Критерий

$$\text{Loss} = \text{BCSLoss} + \text{PDELoss} + \|\hat{X} - X\|_2 - \mathcal{E} + \text{BCSLoss}_{\mathcal{E}} + \text{PDELoss}_{\mathcal{E}}$$

Цель эксперимента

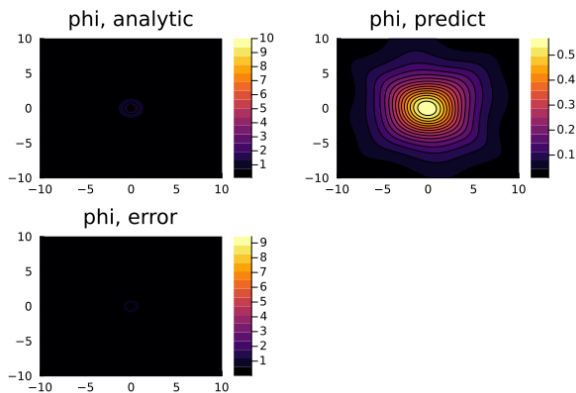
1. Исследовать зависимость качества восстановления источников в зависимости от расположения датчиков
2. Исследовать влияние регуляризации на картину распределения зарядов
3. Исследовать монотонность сходимости метода

Востановленное распределение зарядов



Распределение зарядов ρ в плоскости Oxy в момент времени $t = 0$

Восстановленный потенциал



Потенциал ϕ в плоскости Oxy в момент времени $t = 0$

1. Zhen Qi, Gregory M. Noetscher, Alton Miles, etc., Enabling electric field model of microscopically realistic brain