

Причинно-ориентированное снижение размерности для анализа данных нейроинтерфейсов

Владимиров Э.А.

Московский физико-технический институт

Научный руководитель: д. ф.-м. н. В. В. Стрижов

2025

Причинно-следственный анализ в данных высокой размерности

Проблема

- Нелинейные, лагированные во времени зависимости не выявляются корреляцией и линейной регрессией.
- Высокая размерность данных усиливает мультиколлинеарность и усложняет поиск причинно-следственной связи

Цель исследования

Найти компактное и интерпретируемое скрытое пространство, в котором обнаруживается причинное воздействие $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$.

Предлагаемая модель CaSCA

Предлагается подход CaSCA – Канонический анализ каузальных подпространств.

CaSCA проецирует данные на два взаимно ортогональных подпространства: **каузальное**, где лагированное представление \mathbf{X} максимально предсказывает \mathbf{Y} , и **реконструктивное**, которое объясняет остаточную дисперсию сигналов.

Основная идея метода CaSCA

Ключевая мысль:

CaSCA строит общее латентное пространство, где на первом этапе извлекаются низкоразмерные причинные компоненты, а на втором — восстанавливается оставшаяся вариативность данных.

Постановка задачи каузального снижения размерности

Даны два синхронных многомерных временных ряда

$$\mathbf{X}_t \in \mathbb{R}^{n_x}, \mathbf{Y}_t \in \mathbb{R}^{n_y}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Общий энкодер каждой строки

$$\varphi_{\text{enc}}: \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \psi_{\text{enc}}: \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

создаёт скрытые представления

$$\mathbf{P}_t = \varphi_{\text{enc}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t), \quad \mathbf{Q}_t = \psi_{\text{enc}}(\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t).$$

Разбиение скрытого пространства. $m = d_c + d_r$,

$$\mathbf{P}_t = [\mathbf{P}_t^c \mid \mathbf{P}_t^r], \mathbf{Q}_t = [\mathbf{Q}_t^c \mid \mathbf{Q}_t^r], \mathbf{P}_t^c, \mathbf{Q}_t^c \in \mathbb{R}^{d_c}, d_c \ll d_r \ll \min(n_x, n_y).$$

Декодеры и реконструкция.

$$\hat{\mathbf{X}}_t = \varphi_{\text{dec}}(\mathbf{P}_t), \quad \hat{\mathbf{Y}}_t = \psi_{\text{dec}}(\mathbf{Q}_t).$$

Постановка задачи каузального снижения размерности

Необходимо построить *низкоразмерное и причинно-информативное* латентное пространство, в котором

- причинные компоненты $(\mathbf{P}_t^c, \mathbf{Q}_t^c)$ максимально объясняют влияние $\mathbf{X}_{t-\tau} \rightarrow \mathbf{Y}_t$;
- реконструктивные компоненты $(\mathbf{P}_t^r, \mathbf{Q}_t^r)$ сохраняют оставшуюся дисперсию сигналов;

Задача моделирования

Найти преобразования $\varphi_{\text{enc}}, \psi_{\text{enc}}, \varphi_{\text{dec}}, \psi_{\text{dec}}$, минимизируя

$$\mathcal{L} = \lambda_{\text{rec}} (\|\mathbf{X}_t - \hat{\mathbf{X}}_t\|_F + \|\mathbf{Y}_t - \hat{\mathbf{Y}}_t\|_F) + \lambda_c \mathcal{L}_c(\mathbf{P}_{t-\tau}^c, \mathbf{Q}_t^c),$$

- \mathcal{L}_c — критерий причинно-следственной связи (корреляция/ССМ/MI).

Предположения.

- Аттрактор допускает задержанное вложение при умеренном шуме.
- Вся значимая причинная информация содержится в d_c -мерном подпространстве.
- Задержка τ заранее известна.

Критерии качества модели снижения размерности

1. Устранение мультиколлинеарности

Максимальный Variance Inflation Factor (VIF) $\max_j \frac{1}{1 - R_j^2}$

Condition Number $\max(\kappa(\mathbf{P}_t^T \mathbf{P}_t), \kappa(\mathbf{Q}_t^T \mathbf{Q}_t)) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$

Чем меньше — тем более устойчивы линейные модели в скрытом пространстве

2. Точность реконструкции сигналов

$$\text{RMSE}_X = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_t \|\hat{\mathbf{X}}_t - \mathbf{X}_t\|^2} \text{ (аналогично для } \mathbf{Y})$$

Explained Variance Ratio — доля дисперсии, восстановленная декодером

3. Прогностическая полезность причинных эмбедингов

- (i) модель Y_t по собственным лагам $\mathbf{Y}_{t-\tau}$
- (ii) модель Y_t по \mathbf{Y}_t и исходным \mathbf{X}_t
- (iii) модель Y_t по \mathbf{Y}_t и причинным эмбедингам \mathbf{P}_t^c

$$\Delta \text{Score} = \text{Perf}(\text{модель (iii)}) - \max\{\text{Perf}(\text{(i)}), \text{Perf}(\text{(ii)})\}$$

► Perf — снижение RMSE / рост R^2 или F1 (для классификации)

CaSCA: причинно-ориентированное снижение размерности

Require: Временные ряды $\mathbf{X}_t \in \mathbb{R}^{T \times n_x}$, $\mathbf{Y}_t \in \mathbb{R}^{T \times n_y}$, лаги \mathcal{T} , размерности d_c, d_{hid}

Ensure: Каузальные проекции $\mathbf{P}_t^c, \mathbf{Q}_t^c$, реконструктивные проекции $\mathbf{P}_t^r, \mathbf{Q}_t^r$

Шаг 1. Автовыбор лага

- 1: **for** $\tau \in \mathcal{T}$ **do**
- 2: $\rho(\tau) \leftarrow \text{corr}(\text{CCA}_1(\mathbf{X}_{t-\tau}, \mathbf{Y}_t))$
- 3: **end for**
- 4: $\tau^* \leftarrow \arg \max_{\tau} \rho(\tau)$

Шаг 2. Канонический блок (каузальный)

- 5: $[\mathbf{W}_x^c, \mathbf{W}_y^c] \leftarrow \text{CCA}(\mathbf{X}_{t-\tau^*}, \mathbf{Y}_t, d_c)$
- 6: $\mathbf{P}_t^c \leftarrow \mathbf{X}_t \mathbf{W}_x^c, \mathbf{Q}_t^c \leftarrow \mathbf{Y}_t \mathbf{W}_y^c$

Шаг 3. Дефляция остатка

- 7: $\mathbf{X}_{\text{res}} \leftarrow \mathbf{X}_t - \mathbf{P}_t^c \mathbf{W}_x^{c\top}, \mathbf{Y}_{\text{res}} \leftarrow \mathbf{Y}_t - \mathbf{Q}_t^c \mathbf{W}_y^{c\top}$

Шаг 4. PCA-блок (реконструктивный)

- 8: $\mathbf{W}_x^r \leftarrow \text{PCA}(\mathbf{X}_{\text{res}}, d_r), \mathbf{W}_y^r \leftarrow \text{PCA}(\mathbf{Y}_{\text{res}}, d_r)$
 - 9: $\mathbf{P}_t^r \leftarrow \mathbf{X}_{\text{res}} \mathbf{W}_x^r, \mathbf{Q}_t^r \leftarrow \mathbf{Y}_{\text{res}} \mathbf{W}_y^r$
-

Теоретические свойства модели CaSCA

Теорема Владимирова (2025, ортогональность и блочная дисперсия)

Пусть после центрирования данные приведены к единичной ковариации $\Sigma_{XX} = I_p$, $\Sigma_{YY} = I_q$. Тогда проекции $\mathbf{P}_t^c, \mathbf{P}_t^r$ и ортогональные веса $\mathbf{W}_x^c, \mathbf{W}_x^r$ модели обладают следующими свойствами:

1. **Ортогональность весов:** $\mathbf{W}_x^{c\top} \mathbf{W}_x^r = 0_{d_c \times d_r}$ и аналогично для Y -блока.
2. **Разложение ковариации:** $I_p = \mathbf{W}_x^c \Sigma_{pp}^{cc} \mathbf{W}_x^{c\top} + \mathbf{W}_x^r \Sigma_{pp}^{rr} \mathbf{W}_x^{r\top}$ (кросс-блочные элементы обнуляются).
3. **Независимость латентных координат:** $\mathbf{P}_t^{c\top} \mathbf{P}_t^r = 0_{d_c \times d_r}$, т.е. причинные и реконструктивные факторы некоррелированы.

Интерпретация.

Причинные оси \mathbf{W}^c изолируют подпространство, достаточное для прогноза \mathbf{Y}_t по $\mathbf{X}_{t-\tau}$.

Реконструктивные оси \mathbf{W}^r содержат остаточную дисперсию, не мешая оценке причинных связей.

Блочное разложение дисперсии упрощает прикладные модели: \mathbf{P}_t^c используется в регрессии/классификации, \mathbf{P}_t^r — в реконструкции и фильтрации шума.

Переход в траекторное пространство

Вместо исходных наблюдений $\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t$ строим их отложенные векторы и применяем **CaSCA** уже к этим псевдонаблюдениям. Это раскрывает внутреннюю динамику системы и улучшает выявление причинных связей.

Require: временные ряды $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1}^T, \{\mathbf{Y}_t\}_{t=1}^T$, лаговое окно E, τ

Шаг 1. Построение траекторий

1: $\mathbf{X}_t^{(\text{traj})} = [\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t-\tau}, \dots, \mathbf{X}_{t-(E-1)\tau}]$

2: Аналогично $\mathbf{Y}_t^{(\text{traj})}$

Шаг 2. Применение CaSCA

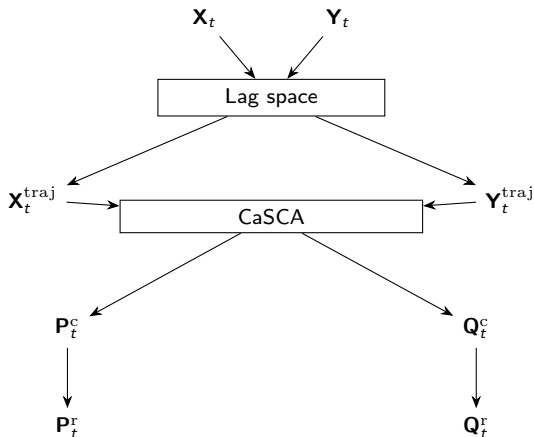
3: $(\mathbf{P}^c, \mathbf{P}^r, \mathbf{Q}^c, \mathbf{Q}^r) \leftarrow \text{CaSCA}(\mathbf{X}^{(\text{traj})}, \mathbf{Y}^{(\text{traj})})$

Шаг 3. Восстановление сигналов

4: $\hat{\mathbf{X}}_t = \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{P}_t^c \mathbf{W}_x^c{}^\top + \mathbf{P}_t^r \mathbf{W}_x^r{}^\top$

5: аналогично $\hat{\mathbf{Y}}_t$

Переход в траекторное пространство



Преимущество: вложение Такенса отображает исходные временные ряды в траекторное пространство, где нелинейные и запаздывающие взаимодействия становятся линейно отделимыми. В этом пространстве CaSCA извлекает ортогональные причинные координаты даже при больших лагах.

Переход в Риманово пространство

Мотивация

- ▶ EEG-сигналы многоканальны, шумны и содержат коррелированные компоненты.
- ▶ Ковариационные матрицы каналов естественно живут на многообразии $\text{SPD}(n)$.
- ▶ Проекция в касательное пространство = «локальная евклидизация»: работает линейная CaSCA.

Пошаговый алгоритм

1. **XdawnCovariance.** Из N каналов формируем $n \ll N$ пространственных паттернов $\Sigma_t \in \text{SPD}(n)$ внутри окна Δt .
2. **Log-Tangent.**

$$\mathbf{C}_t = \log(\Sigma_\star^{-1/2} \Sigma_t \Sigma_\star^{-1/2}) \in T_{\Sigma_\star} \text{SPD}(n),$$

где Σ_\star — геометрическое среднее.

Ключевая идея

Ковариации EEG являются точками на кривой SPD-многообразия; перевод в касательное пространство делает их «плоскими», после чего CaSCA отделяет *динамически-причинные* направления от *реконструктивного шума*.

Итоговые преимущества

Устойчивость к масштабированию и к артефактам отдельных электродов.

Геометрически корректная обработка SPD-данных.

Улучшенная

предсказательная точность 11 / 14

Вычислительный эксперимент: описание данных

Данные EEG-IMU

У 25 участников были записаны показания EEG, IMU, MRT во время игры в настольный теннис. С каждым участником было сыграно 4 сессии, длительность каждой из них составляет 7-10 минут.

Human Player

Ball Machine



Block 1		Block 2		Block 3		Block 4	
Machine Rally	Cooperative	Machine Serve	Competitive	Cooperative	Machine Serve	Competitive	Machine Rally
2:30 2:30 2:30	7:30						

15 min.

Показания акселерометра и гироскопа со смартфона и планшета, записанные во время 10 минутной ходьбы.



Данные двух IMU устройств

Вычислительный эксперимент: сравнение CaSCA в исходном и траекторном пространствах

		CaSCA	CaSCA traj.
kNN	Expl.var.ratio	-3.4%	-2.1%
	RMSE	-0.11	-0.08
Linear	Expl.var.ratio	-3.3%	+0.3%
	RMSE	-0.07	0.01
Grad.Boosting	Expl.var.ratio	-0.7%	-0.1%
	RMSE	-0.026	-0.006

Выносятся на защиту

1. Предложен причинный метод снижения размерности, выделяющий отдельное латентное подпространство для причинных компонент и обеспечивающий точную реконструкцию сигналов.
2. Доказано ортогональное разложение выборочной ковариации и строгая разделимость вариации на «причинный» и «реконструктивный» блоки в ортогональном пространстве состояний.
3. Разработаны модификации метода в траекторном, римановом и глубоком обучающих пространствах, а также регуляризатор ССМ, вводящий динамическое ограничение Сугихары через дифференцируемый штраф.
4. Сформулирован комплекс метрических показателей (мультиколлинеарность, ϵ , улучшение качества прогноза) для объективного сравнения методов причинного анализа. ϵ
5. Проведены тесты на двух наборах данных (два IMU-датчика и EEG-IMU).