

Генеративный причинно-следственный подход к анализу данных нейроинтерфейсов

Владимиров Э.А.

Московский физико-технический институт

Научный руководитель: д. ф.-м. н. В. В. Стрижов

2025

Причинно-следственный анализ

Проблема обнаружения связи

- Традиционные методы (корреляция, линейная регрессия) неадекватны для сложных нелинейных связей.
- Данные имеют высокую размерность, что усложняет поиск причинно-следственных связей.
- Зависимости между переменными могут изменяться во времени.

Требуется

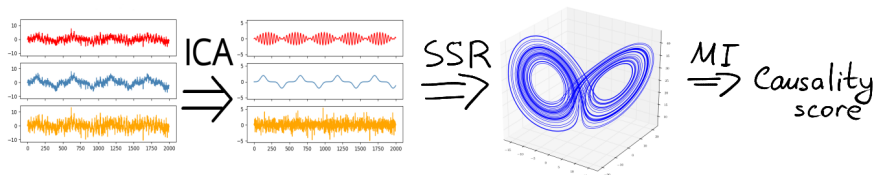
Построить устойчивую и интерпретируемую форму вероятностного анализа причинного влияния $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$.

Решение

Предлагается следующий подход ПАНКВИ — Причинный Анализ на основе Независимых Компонент и Взаимной Информации:

Метод независимых компонент \rightarrow восстановление фазового пространства
 \rightarrow вычисление взаимной информации.

Различные подходы к поиску связей



Предлагаемый подход ПАНКВИ

Постановка задачи обнаружения связи

Даны $\mathbf{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_{n_x}(t)\}$ и $\mathbf{Y}(t) = \{Y_1(t), Y_2(t), \dots, Y_{n_y}(t)\}$ — набор временных рядов, наблюдаемых в моменты времени $t = 1, \dots, T$.

Необходимо определить направленные причинные связи:

$$X_i(t - \tau) \rightarrow Y_j(t) \text{ и } Y_j(t - \tau) \rightarrow X_i(t)$$

для $i = 1, \dots, n_x$, $j = 1, \dots, n_y$, и лагов $\tau \geq 0$,

Предполагаем, что многомерные временные ряды $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{Y}(t)$ генерируются следующим образом:

$$X_i(t) = f_i(\text{Pa}_{X_i}(t), \varepsilon_{X_i}(t)),$$

$$Y_j(t) = g_j(\text{Pa}_{Y_j}(t), \varepsilon_{Y_j}(t)),$$

где:

- $\text{Pa}_{X_i}(t)$, $\text{Pa}_{Y_j}(t)$ — множество родителей переменных $X_i(t)$ и $Y_j(t)$ из \mathbf{Y} и \mathbf{X} соответственно,
- f_i и g_j — детерминированные функции, описывающие зависимость,
- $\varepsilon_{X_i}(t)$ и $\varepsilon_{Y_j}(t)$ — шумовые компоненты.

Метод независимых компонент

Предположим, что $\mathbf{X}(t)$ образуется из нескольких скрытых источников $\mathbf{S}(t) \in \mathbb{R}^{d_s}$:

$$\mathbf{X}(t) = A \mathbf{S}(t)$$

Каждая компонента $S_k(t)$ предполагается статистически независимой от других:

$$p(\mathbf{S}) = p(S_1, S_2, \dots, S_{d_s}) = \prod_{k=1}^{d_s} p(S_k).$$

Задача оптимизации: Минимизировать взаимную информацию между компонентами $\hat{S}_k(t)$.

$$\text{MI}(\hat{\mathbf{S}}(t)) \approx \sum_{k=1}^{d_s} H(S_k) - H\left(\sum_k S_k\right),$$

найдя обратный линейный оператор \hat{A}^{-1}

$$\hat{\mathbf{S}}(t) = \hat{A}^{-1} \mathbf{X}(t).$$

Сходящийся перекрестный анализ

Теневое вложение:

$$M_{X,t} = (X_t, X_{t-\tau}, \dots, X_{t-(E-1)\tau}) \in \mathbb{R}^E,$$

где E — размерность вложения, τ — временной лаг.

Реконструкция:

$$\hat{Y}_t | M_{X,t} = \sum_{i=1}^k w_i Y_{n_i},$$

здесь n_i — индексы ближайших соседей точки $M_{X,t}$ в пространстве M_X , а w_i — веса, зависящие от расстояния до $M_{X,t}$.

Критерий причинности:

$$\rho_{X \rightarrow Y} = \text{corr}(Y_t, \hat{Y}_t | M_{X,t}).$$

Если при увеличении размера “библиотеки” (множества рассматриваемых соседей) $\rho_{X \rightarrow Y}$ *сходится монотонно*, считается, что $\mathbf{X}(t)$ влияет на $\mathbf{Y}(t)$.

Вероятностный перекрёстный анализ

Рассматриваем $p(Y_t | M_{X,t})$ и $p(Y_t)$ вместо точечных значений.

Взаимная информация как оценка причинности

Вместо корреляции, в качестве оценки причинно-следственной связи возьмём взаимную информацию:

$$Prob_{CCM}(X, Y) = MI(M_X, Y) = \mathbb{E}_X D_{KL}[p(Y | M_X) \parallel p(Y)],$$

Направленная связь и относительная взаимная информация

Поскольку взаимная информация — симметричная функция, то для оценки однонаправленных связей необходимо воспользоваться условной взаимной информацией:

$$MI(X, Y | Y_{hist}) = \mathbb{E}_{X, Y_{hist}} D_{KL}[p(Y | M_X, Y_{hist}) \parallel p(Y | Y_{hist})]$$

Предлагаемый метод ПАНКВИ

1. Независимый анализ компонент

Для исходных ЭЭГ-данных $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^{d_x}$ получаем независимые компоненты:

$$\hat{\mathbf{S}}(t) = \hat{A}^{-1} \mathbf{X}(t).$$

2. Восстановление фазового пространства

Для каждого времени t формируем вектор:

$$M_{X,t} = (\hat{\mathbf{S}}(t), \hat{\mathbf{S}}(t - \tau), \dots, \hat{\mathbf{S}}(t - (E - 1)\tau)),$$

3. Оценка причинно-следственных связей

В полученном пространстве $(M_{X,t}, M_{Y,t})$ определяем для каждого $l \in \{1, \dots, d_y\}$ оценку влияния $\mathbf{X} \rightarrow Y_l(t)$, вычисляя:

$$\text{Prob}_{\text{CCM}}(M_{X,t}, Y_l(t)).$$

Аналогично, для каждого $m \in \{1, \dots, d_x\}$ вычисляем $\text{Prob}_{\text{CCM}}(M_{Y,t}, X_m(t))..$

Альтернативная постановка задачи обнаружения связи

Причинно-следственная связь — вероятность диффеоморфизма.

Основная проблема — построение многообразий

Опр. Причинно-следственный механизм “ $X \rightarrow Y$ ” это марковское ядро:
 $\kappa(y|x) : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Y})$

Опр. Пусть $\mathcal{M}_X, \mathcal{M}_Y$ — статистические многообразия мер на \mathcal{X} и \mathcal{Y} . Назовём отображением эффекта $\mathbb{T}_\kappa : \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{M}_Y$:

$$\mathbb{T}_\kappa(P_X) = P_X * \kappa, \text{ то есть } \mathbb{T}_\kappa(P_X)(B) = \int_{\mathcal{X}} \kappa(B|x) P_X(dx)$$

Эффект $(P_X \rightarrow Q_X) = \text{Изменение } (\mathbb{T}_\kappa P_X \rightarrow \mathbb{T}_\kappa Q_X)$

Задача обнаружения причинно-следственной связи — построение \mathbb{T}_κ или определение её свойств на основе данных.

Пример: $do(X = x_0) \Leftrightarrow P_X = \delta_{x_0}$

Тогда,

$$\mathbb{T}(\delta_{x_0}) = \kappa(\cdot|x_0) = \mathbb{P}(Y|do(X = x_0))$$

Вычислительный эксперимент на данных ЭЭГ - ИИМ

Данные

У 25 участников были записаны показания ЭЭГ, ИИМ, МРТ во время игры в настольный теннис. С каждым участником было сыграно 4 сессии, длительность каждой из них составляет 7-10 минут.

Human Player



Ball Machine



Block 1		Block 2		Block 3		Block 4	
Machine Rally	Cooperative	Machine Serve	Competitive	Cooperative	Machine Serve	Competitive	Machine Rally
2:30 2:30 2:30	7:30						

15 min.

Выносятся на защиту

1. Проведено сравнение методов выявления причинно-следственных связей
2. Предложен новый способ обнаружения связей, учитывающий высокую размерность данных и нелинейную связь компонент
3. Представлена альтернативная постановка задачи обнаружения связи, которая будет развиваться в дальнейшем