

Выявление причинно-следственных связей между видеофрагментами с помощью ССМ

Соболевский Федор Б05-111

ФПМИ МФТИ

Лабораторная работа №2 по курсу
Методы математического прогнозирования

2025

Цель работы

- ▶ Получить низкоразмерные фазовые траектории для высокоразмерных временных рядов.
- ▶ Исследовать по полученным фазовым траекториям причинно-следственные связи между исходными рядами с помощью ССМ.
- ▶ Применить многомерный ССМ для причинно-следственного анализа многомерных траекторий, построенных по данным временным рядам.

Постановка задачи

- ▶ В данном эксперименте мы будем работать с видеофрагментами, то есть с временными рядами следующего вида:

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{X}_t\}_{t=0}^{T-1}, \quad \mathbf{Y} = \{\mathbf{Y}_t\}_{t=0}^{T-1}, \quad \mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t \in \mathbb{R}^{H \times W \times C},$$

где H, W — высота и ширина кадра, $C = 3$ — количество цветовых каналов, $t \in [0, T - 1]$. Для используемых в этой работе видеофрагментов $H = 240$, $W = 212$, $T = 451$.

- ▶ **Задача:** получить по видеофрагментам $\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t$ траектории низкой размерности $x_t, y_t \in \mathbb{R}^d$ и по этим траекториям проанализировать причинно-следственные связи между \mathbf{X}_t и \mathbf{Y}_t .

Используемые данные

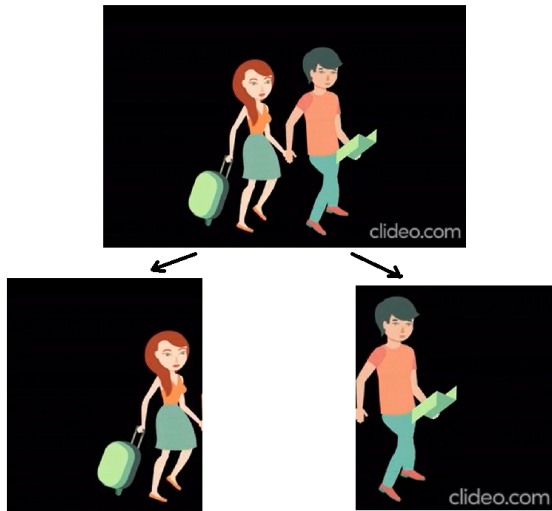


Рис.: Исследуемые видеофрагменты — анимация шагающей пары

- ▶ Для получения из высокоразмерного временного ряда более низкоразмерной траектории воспользуемся сингулярным разложением высших порядков (HOSVD):

$$\hat{\mathbf{X}} = [[\mathbf{S}, \mathbf{U}_d^{(T)}, \mathbf{U}_h^{(H)}, \mathbf{U}_w^{(W)}, \mathbf{U}_c^{(C)}]],$$

где $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{d \times h \times w \times c}$, $\mathbf{U}_d^{(T)} \in \mathbb{R}^{T \times d}$, $\mathbf{U}_h^{(H)} \in \mathbb{R}^{H \times h}$, $\mathbf{U}_w^{(W)} \in \mathbb{R}^{W \times w}$, $\mathbf{U}_c^{(C)} \in \mathbb{R}^{C \times c}$. Тогда в качестве низкоразмерного приближения ряда из \mathbb{R}^d можно исследовать $\mathbf{U}_d^{(T)} := \{x_t\}_{t=0}^{T-1}$, $x_t \in \mathbb{R}^d$.

- ▶ Наилучшее приближение HOSVD для исследуемых тензоров будем искать и помощью метода ортогональных итераций высших порядков (HOOI).

Методы: CCM и HOCCM

Для исследования причинно-следственной зависимости между одномерными временными рядами можно использовать метод конвергентных перекрёстных отображений (CCM). Однако для применения данного метода для векторных временных рядов (HOCCM) требуются некоторые модификации:

1. Скрытые представления $M_X = \{\underline{x}_t\}_{t=E}^T$ будут состоять из матриц $\underline{x}_t = (x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-E})$, т. к. $x_t \in \mathbb{R}^d$, поэтому ближайшие соседи будут определяться по матричной норме Фробениуса.
2. Корреляция Пирсона модифицируется для векторного ряда:

$$r_{x\hat{x}} = \frac{\sum_{t=E}^T (\underline{x}_t - \bar{\underline{x}}_t)^T (\hat{\underline{x}}_t - \bar{\hat{\underline{x}}}_t)}{\sqrt{\sum_{t=E}^T \|\underline{x}_t - \bar{\underline{x}}_t\|^2} \cdot \sqrt{\sum_{t=E}^T \|\hat{\underline{x}}_t - \bar{\hat{\underline{x}}}_t\|^2}}$$

Эксперимент: одномерная траектория

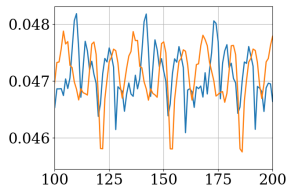


Рис.: Одномерное приближение рядов

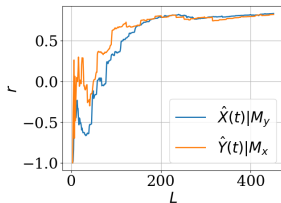


Рис.: ССМ для одномерного приближения

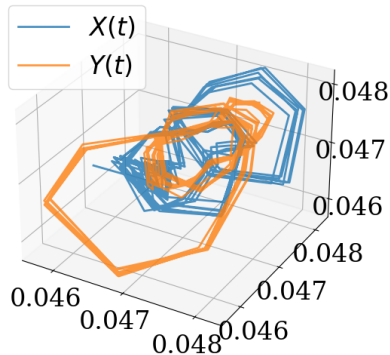


Рис.: Фазовая траектория по одномерному приближению

Эксперимент: трехмерная траектория

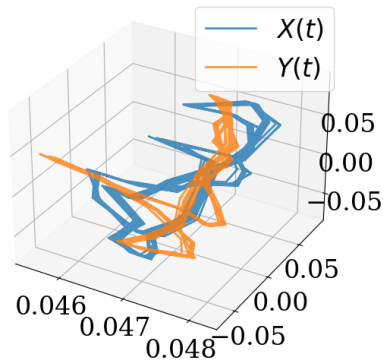


Рис.: Трёхмерное приближение рядов

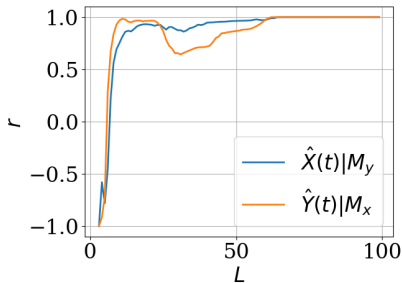


Рис.: НОССМ для трехмерного приближения

Эксперимент: 10-мерное приближение

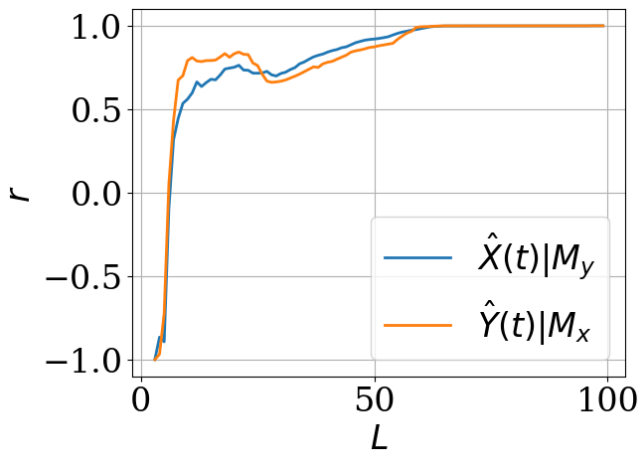


Рис.: НОССМ для 10-мерного приближения

Результаты:

- ▶ С помощью сингулярного разложения высших порядков удалось получить низкоразмерные приближения исследуемых временных рядов.
- ▶ С помощью ССМ удалось установить взаимозависимость между двумя исследованными рядами.
- ▶ Модификация ССМ для многомерных рядов позволила успешно установить взаимозависимость для траекторий более высокой размерности.