# Классификация временных рядов в пространстве модели с подходом NeuralODE

Сёмкин Кирилл

Московский физико-технический институт
Кафедра интеллектуальных систем

*Научный руководитель*: д.ф.-м.н. Стрижов Вадим Викторович
2025

# Проблематика работы

## Проблема

Необходим метод классификации временных рядов, порождаемых скрытыми динамическими системами. Классификация без учёта порождения данных может быть неустойчивой и некорректной.

## Цель

Ввести вероятностную постановку порождения временных рядов в связке с моделью *ОДУ*. Решить проблему ненаблюдаемости порождающих динамических систем. Сформулировать формальную задачу классификации и предложить способы решения.

## Решение

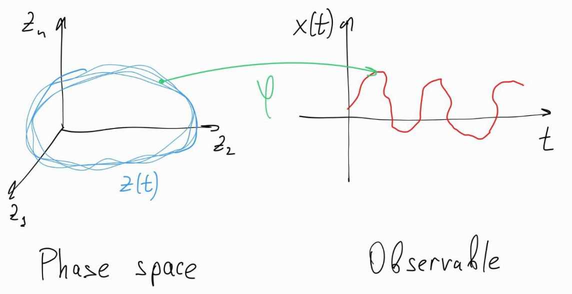
Использовать *NeuralODE* для аппроксимации динамических систем. Параметры системы могут быть фиксированными или порождаться *априорным* распределением. Классификацию осуществлять с помощью *байесовского тестирования гипотез* или строить классификатор в пространстве параметров дин. системы.

# Постановка задачи

Задана обучающая и тестовая выборка временных рядов для каждого класса. Количество классов $K$.
Пусть для каждого класса существует динамическая система $\mathbf{f}_i$, порождающая траектории $\mathbf{z}(t)$ что

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{z}}{dt}(t) = \mathbf{f}_i\big(\mathbf{z}(t)\big), \\ \mathbf{z}(0) = 0. \end{cases}$$

Пусть существует *функция наблюдений* $\phi$: $\phi\big(\mathbf{z}(t)\big) = x(t)$.



# Восстановление и параметризация дин. системы

Наложив некоторые условия регулярности на $\mathbf{f}_i$ и $\phi$, с помощью теоремы Такенса можем получить *вложение* исходных дин. систем в $\mathbb{R}^m$. Фазовыми траекториями будут *вектора задержки* $\overleftarrow{\mathbf{x}}_t$

$$\mathbf{z}(t) = \overleftarrow{\mathbf{x}}_t := \begin{pmatrix} x(t-L+1) \\ \vdots \\ x(t-1) \\ x(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Предположим, что векторные поля $\mathbf{f}_i$ лежат в известном параметрическом классе, т.е. $\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_{\Theta_i}$. Наконец наложим на тректории независимый шум с нулевым средним и ограниченной дисперсией

$$\mathbf{z}(t) \to \mathbf{z}(t) + \boldsymbol{\epsilon},$$
$$\text{s.t. } \mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}] = 0,\ \mathbb{D}[\boldsymbol{\epsilon}] < +\infty.$$

# Полная модель порождения данных

Предлагаются три типа связи параметров $\Theta_i$ с дин. системами $\mathbf{f}_i$ в рамках класса:

1. Дин. система класса имеет фиксированные параметры $\Theta_i =$ const.
2. Класс имеет *априорное* распределение на параметры $\Theta_i \sim p_i(\Theta)$ (генеративная модель).

Добавив априорное распределение на классы $C \sim \mathrm{Cat}(C)$, мы полностью определим вероятностную модель задачи.

3. Каждый параметр $\Theta$ задаёт распределение на класс $C \sim p(C|\Theta)$ (дискриминативная модель).

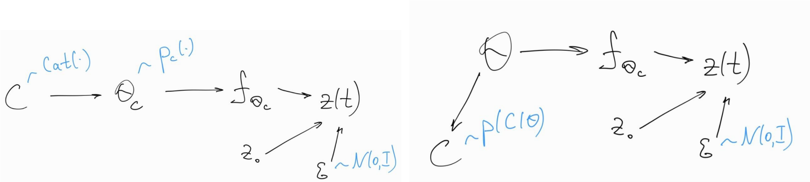



Рис.: Графические модели для 2 и 3 типов связи

# Алгоритмы классификации временных рядов

Для каждого типа связи:

1. На обучающей выборке получить ML оценки параметров класса $\hat{\Theta}_i$. Для тестовой траектории воспользоваться *байесовским решающим правилом*:

$$C_{\text{test}} = \arg\max_{C_i} p(C_i)p\big(\mathbf{z}_{\text{test}}(t)|\hat{\Theta}_i\big)$$

2. Байесовский вывод

$$p\big(C = C_i|\mathbf{z}_{\text{test}}(t), \mathbf{z}_{\text{train}}(t)\big) = \int p\big(C = C_i|\Theta, \mathbf{z}_{\text{test}}(t)\big)p_i\big(\Theta|\mathbf{z}_{\text{train}}(t)\big)d\Theta$$

3. По каждой обучающей траектории получить ML оценку порождающей дин.системы $\hat{\Theta}$. Далее, на полученных оценках обучить классификатор в пространстве параметров $p(C|\Theta)$. Для тестовой траектории снова получаем оценку $\hat{\Theta}_{\text{test}}$, пользуемся классификатором:

$$C_{\text{test}} = \arg\max_{C_i} p(C_i|\hat{\Theta}_{\text{test}})$$

# Постановка эксперимента

## Цель эксперимента

Восстановить фазовые траектории и скрытые дин. системы по обучающей выборке, сравнить качество классификации тремя предложенными методами + с моделями RNN, CNN. Оценить применимость предложенных методов.

## Данные

Акселерометрия движений человека для разных типов активностей (50 Гц, 6 классов), датасет MotionSense.

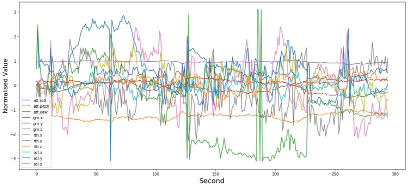
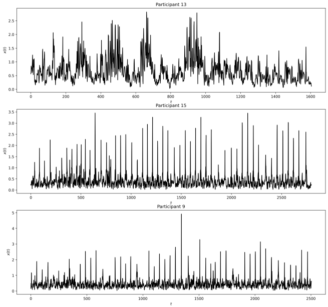
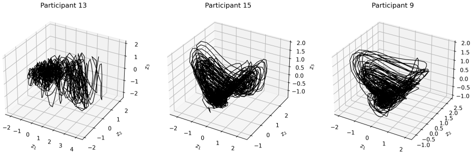



Рис.: Примеры временных рядов в MotionSense

# Фазовые траектории

Временные ряды активности "upstairs"и восстановленные фазовые траектории.



# Классификация в пространстве параметров

Классы активности "jog"и "stand". Для каждой траектории обучалась линейная модель. В пространстве параметров построен kNN-классификатор. Приведены метрики качества для каждого класса (тестовая выборка) и визуализация t-SNE обученных моделей.

| **Label** | **Accuracy** |
|---|---|
| jog | 0.4 |
| std | 0.7 |

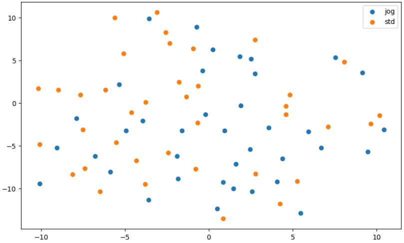
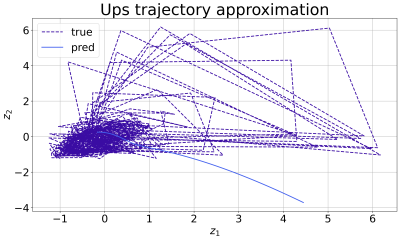


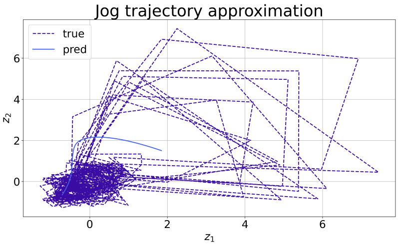

Рис.: t-SNE на параметрах обученных моделей. Perplexity = 15.

# Байесовское решающее правило

Классы активности "jog"и "upstairs"с равномерным априорным расределением. Траектории поделены на train/test. NN-модели обучены на train. Тестовая траектория классифицируется по наибольшему правдоподобию у обученной модели. Приведены метрики качества для каждого класса (тестовая выборка), примеры аппроксимации реальной траектории обученными моделями.

| **Label** | **Accuracy** |
|---|---|
| jog | 0.68 |
| ups | 0.32 |



# Выносится на защиту

1. Поставлена задача классификации временных рядов, порождённых скрытыми дин. системами
2. Предложены три вероятностные модели порождения фазовых траекторий
3. Для каждой модели предложен алгортим классификации новых траекторий
4. Поставлены вычислительные эксперименты по восстановлению параметров дин. систем и классификации

В ближайшее время будут проводиться эксперименты на данных гироскопа, где должно получиться более высокое качество классификации. Будет оформлена теор. оценка на точность классификации в связи с численной ошибкой ode-солвера. Работа оформляется для будущей публикации.