

Прикладной статистический анализ данных

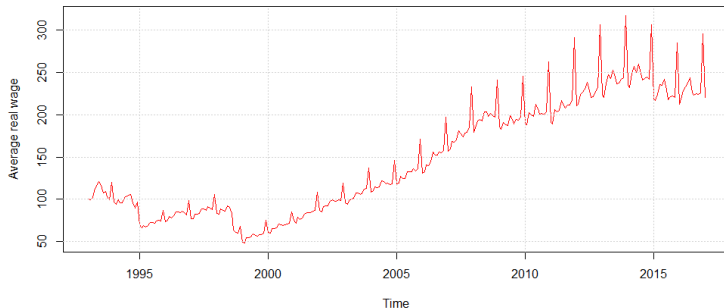
Анализ временных рядов

Олег Бахтеев
psad@phystech.edu

2022

Прогнозирование временного ряда

Временной ряд: y_1, \dots, y_T, \dots , $y_t \in \mathbb{R}$, — значения признака, измеренные через постоянные временные интервалы.



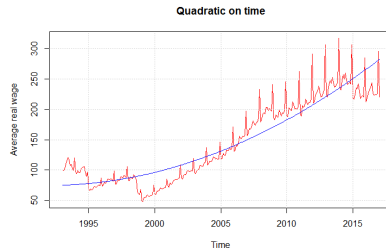
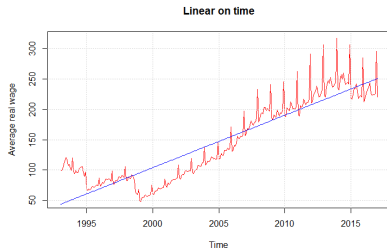
Задача прогнозирования — найти функцию f_T :

$$y_{T+d} \approx f_T(y_T, \dots, y_1, d) \equiv \hat{y}_{T+d|T},$$

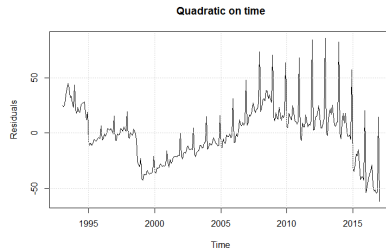
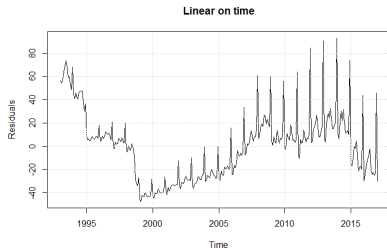
где $d \in \{1, \dots, D\}$ — отсрочка прогноза, D — горизонт прогнозирования.

Регрессия

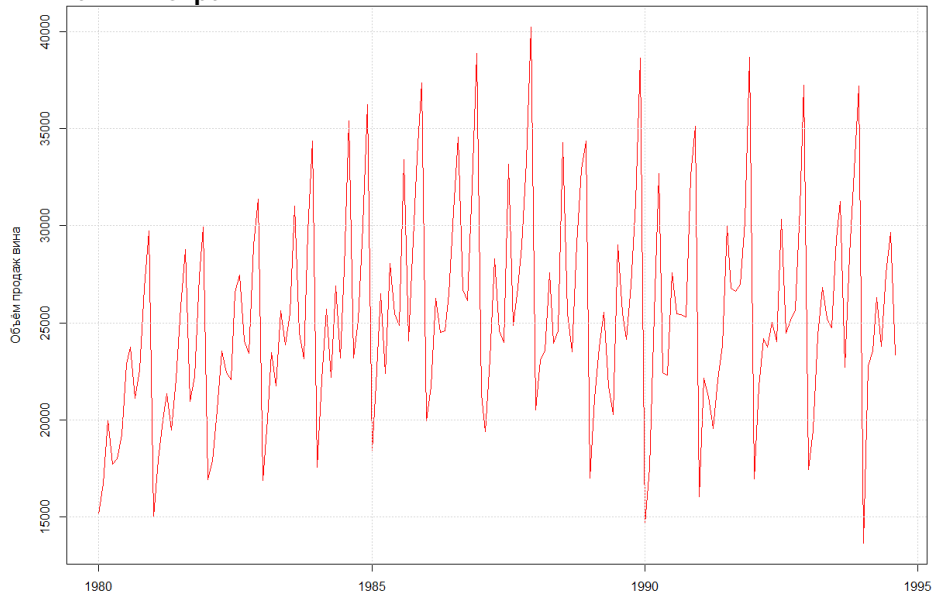
Простейшая идея: сделать регрессию на время.



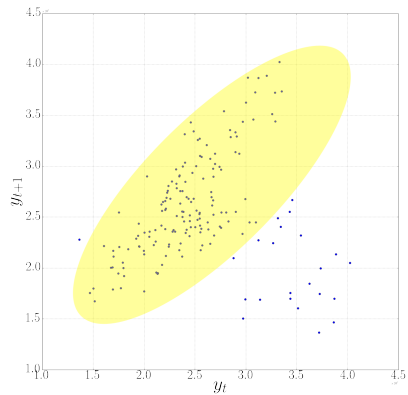
Остатки не выглядят как шум:



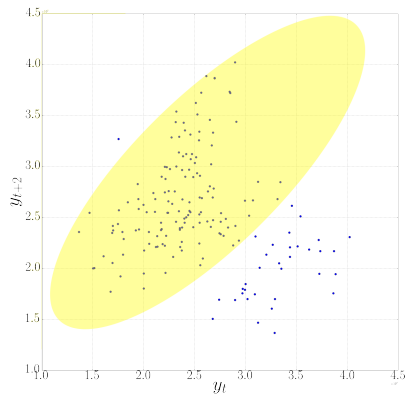
Продажи вина в Австралии



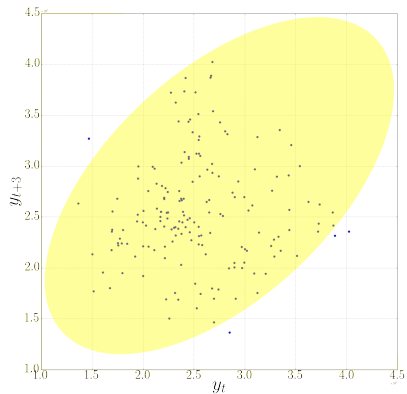
Продажи в соседние месяцы



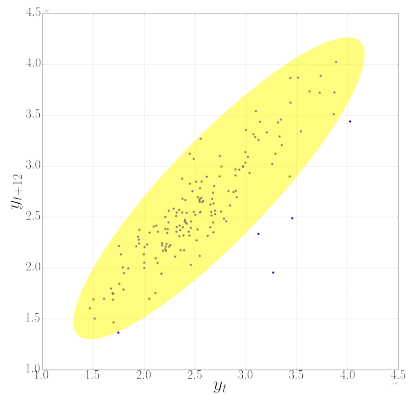
Продажи через 1 месяц



Продажи через 2 месяца



Продажи через год



Автокорреляционная функция (ACF)

Наблюдения временного ряда автокоррелированы.

Автокорреляция:

$$r_{\tau} = r_{y_t y_{t+\tau}} = \frac{\sum_{t=1}^{T-\tau} (y_t - \bar{y})(y_{t+\tau} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}, \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t.$$

$r_{\tau} \in [-1, 1]$, τ — лаг автокорреляции.

Проверка значимости отличия автокорреляции от нуля:

временной ряд: $Y^T = Y_1, \dots, Y_T$;

нулевая гипотеза: $H_0: r_{\tau} = 0$;

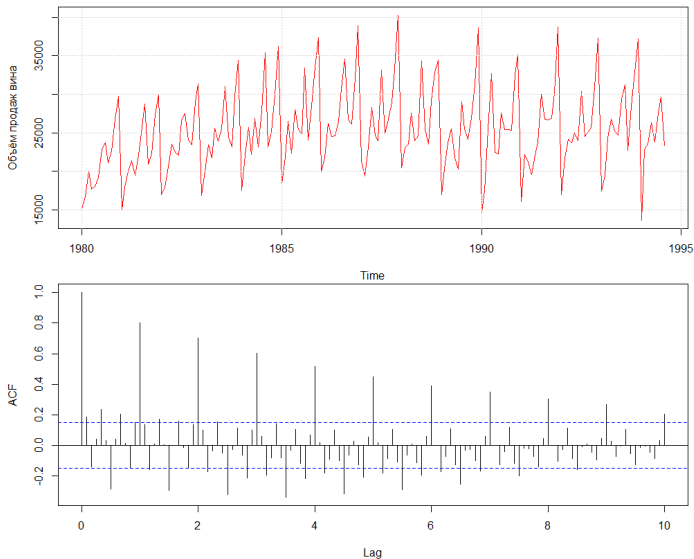
альтернатива: $H_1: r_{\tau} \neq 0$;

статистика: $T(Y^T) = \frac{r_{\tau} \sqrt{T-\tau-2}}{\sqrt{1-r_{\tau}^2}}$;

нулевое распределение: $St(T - \tau - 2)$.

Автокорреляционная функция (ACF)

Коррелограмма:



Компоненты временных рядов

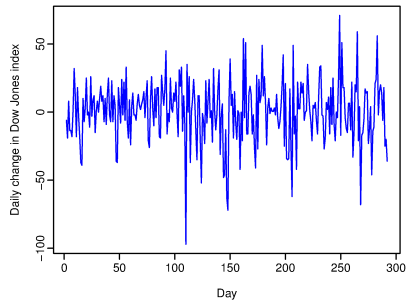
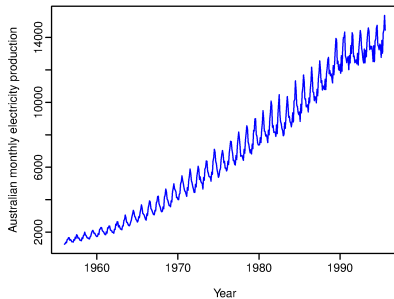
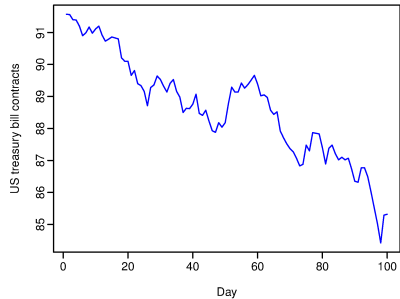
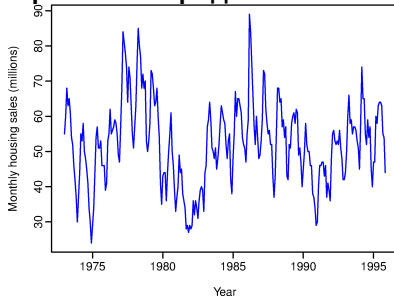
Тренд — плавное долгосрочное изменение уровня ряда.

Сезонность — циклические изменения уровня ряда с постоянным периодом.

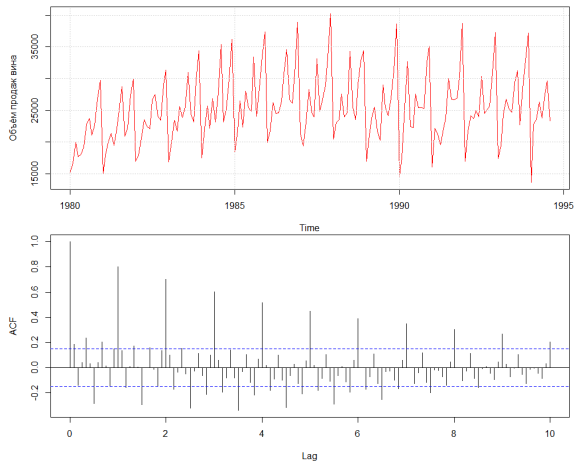
Цикл — изменения уровня ряда с переменным периодом (цикл жизни товара, экономические волны, периоды солнечной активности).

Ошибка — непрогнозируемая случайная компонента ряда.

Компоненты временных рядов

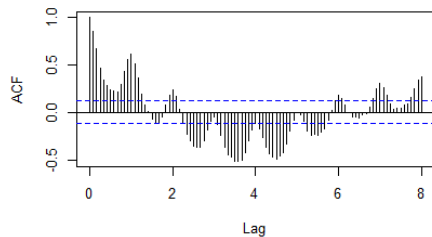


Компоненты временных рядов

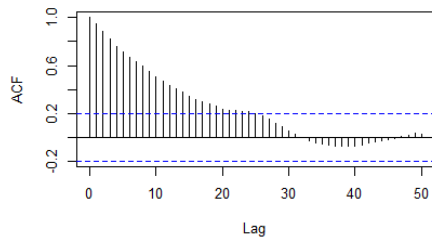


Компоненты временных рядов

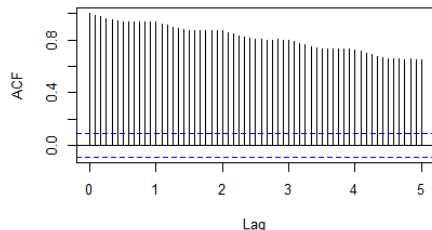
Monthly housing sales (millions)



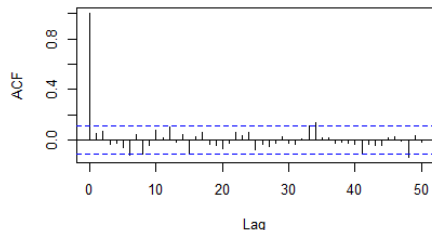
US treasury bill contracts



Australian monthly electricity production

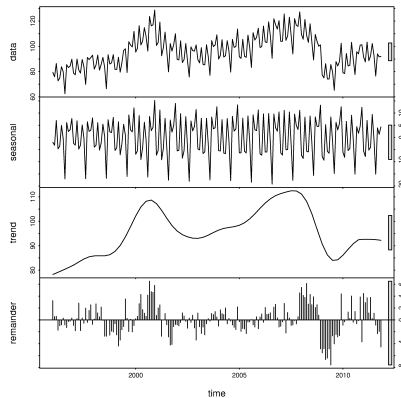


Daily change in Dow Jones index



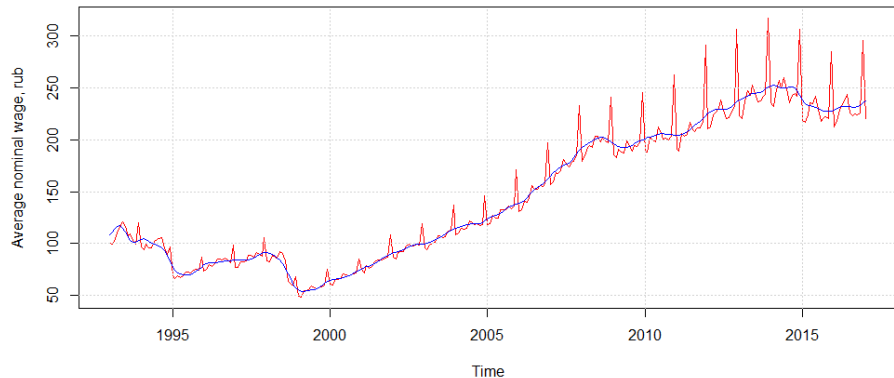
Компоненты временных рядов

STL-декомпозиция:



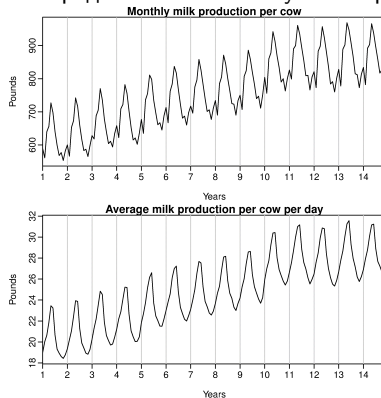
Снятие сезонности

Часто для удобства интерпретации ряда сезонная компонента вычитается:



Календарные эффекты

Иногда упростить структуру временного ряда можно за счёт учёта неравномерности отсчётов:



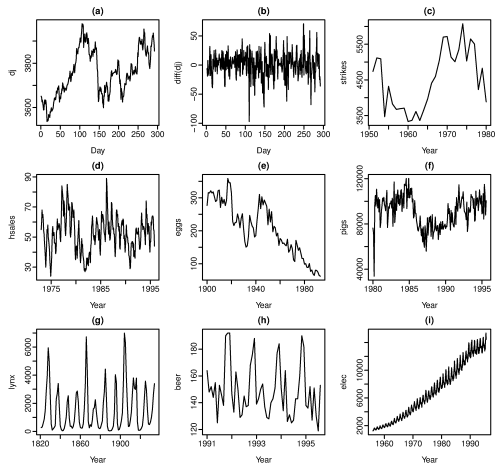
Стационарность

Ряд y_1, \dots, y_T **стационарен**, если $\forall s$ распределение y_t, \dots, y_{t+s} не зависит от t , т. е. его свойства не зависят от времени.

Ряды с трендом или сезонностью нестационарны.

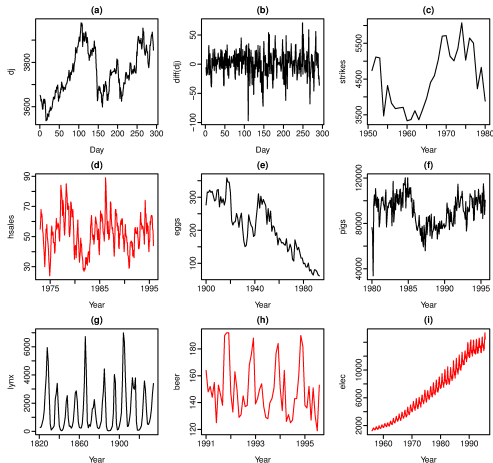
Ряды с непериодическими циклами стационарны, поскольку нельзя предсказать заранее, где будут находиться максимумы и минимумы.

Стационарность



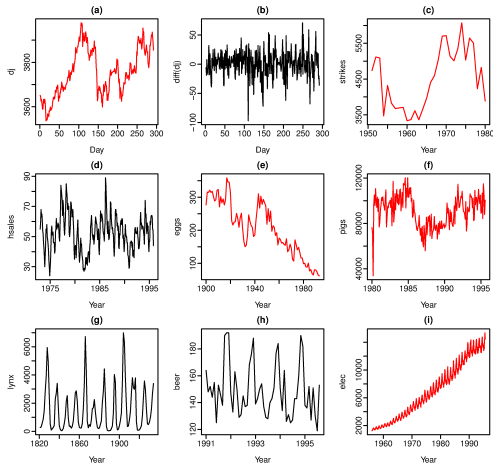
Стационарность

Нестационарны из-за сезонности:



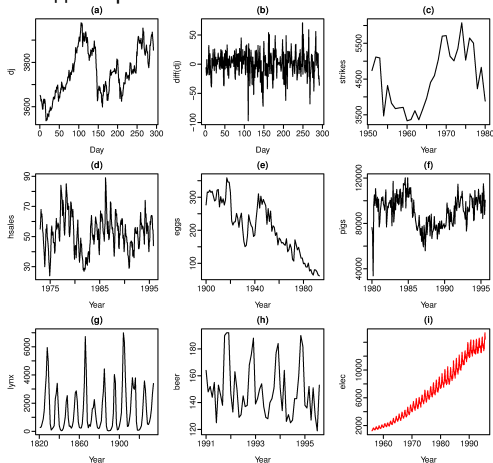
Стационарность

Нестационарны из-за тренда:



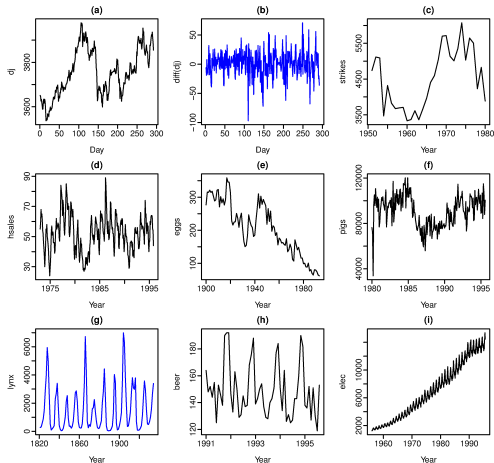
Стационарность

Нестационарны из-за меняющейся дисперсии:



Стационарность

Стационарны:



Критерий KPSS (Kwiatkowski-Philips-Schmidt-Shin)

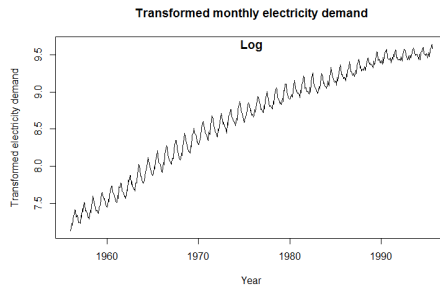
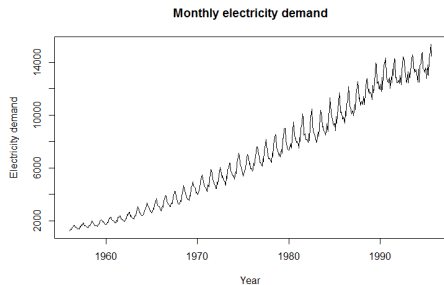
- ряд ошибок прогноза: $\varepsilon^T = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T$;
нулевая гипотеза: H_0 : ряд ε^T стационарен;
альтернатива: H_1 : ряд ε^T описывается моделью
вида $\varepsilon_t = \alpha \varepsilon_{t-1}$;
статистика: $KPSS(\varepsilon^T) = \frac{1}{T^2} \sum_{i=1}^T \left(\sum_{t=1}^i \varepsilon_t \right)^2 / \lambda^2$,
 λ^2 —оценка дисперсии ошибок;
нулевое распределение: табличное.

Другие критерии для проверки стационарности: Дики-Фуллера, Филлипса-Перрона и их многочисленные модификации (см. Patterson K. *Unit root tests in time series, volume 1: key concepts and problems*. — Palgrave Macmillan, 2011).

Стабилизация дисперсии

Для рядов с монотонно меняющейся дисперсией можно использовать стабилизирующие преобразования.

Часто используют логарифмирование:

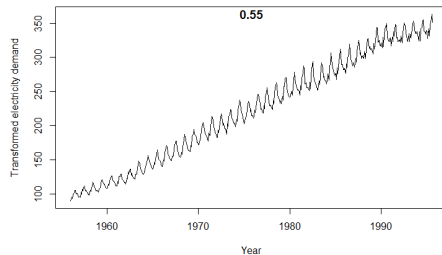
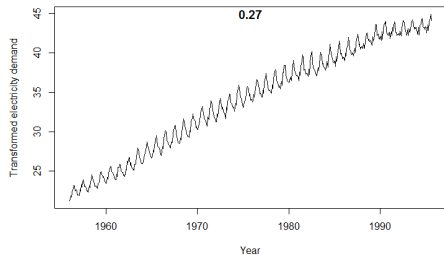


Преобразования Бокса-Кокса

Параметрическое семейство стабилизирующих дисперсию преобразований:

$$y'_t = \begin{cases} \ln y_t, & \lambda = 0, \\ (y_t^\lambda - 1) / \lambda, & \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Параметр λ выбирается так, чтобы минимизировать дисперсию или максимизировать правдоподобие модели.



Преобразования Бокса-Кокса

После построения прогноза для трансформированного ряда его нужно преобразовать в прогноз исходного:

$$\hat{y}_t = \begin{cases} \exp(\hat{y}'_t), & \lambda = 0, \\ (\lambda \hat{y}'_t + 1)^{1/\lambda}, & \lambda \neq 0. \end{cases}$$

- если некоторые $y_t \leq 0$, преобразования Бокса-Кокса невозможны (нужно прибавить к ряду константу)
- часто оказывается, что преобразование вообще не нужно
- можно округлять значение λ , чтобы упростить интерпретацию
- как правило, стабилизирующее преобразование слабо влияет на прогноз и сильно — на предсказательный интервал

Дифференцирование

Дифференцирование ряда — переход к попарным разностям его соседних значений:

$$y_1, \dots, y_T \longrightarrow y'_2, \dots, y'_T,$$

$$y'_t = y_t - y_{t-1}.$$

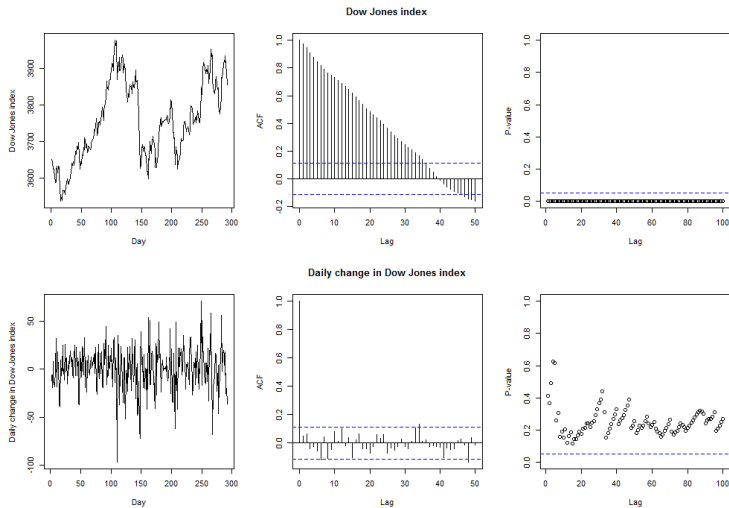
Дифференцированием можно стабилизировать среднее значение ряда и избавиться от тренда и сезонности.

Может применяться неоднократное дифференцирование; например, для второго порядка:

$$y_1, \dots, y_T \longrightarrow y'_2, \dots, y'_T \longrightarrow y''_3, \dots, y''_T,$$

$$y''_t = y'_t - y'_{t-1} = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}.$$

Дифференцирование



Критерий KPSS: для исходного ряда $p < 0.01$, для ряда первых разностей — $p > 0.1$.

Сезонное дифференцирование

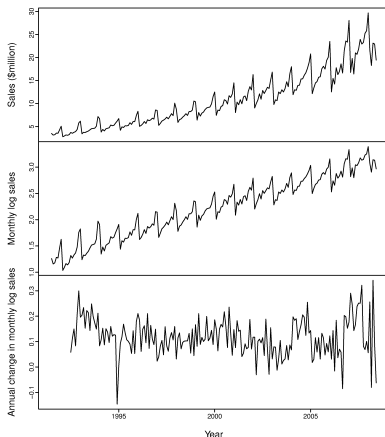
Сезонное дифференцирование ряда — переход к попарным разностям его значений в соседних сезонах:

$$y_1, \dots, y_T \longrightarrow y'_{s+1}, \dots, y'_T,$$

$$y'_t = y_t - y_{t-s}.$$

Сезонное дифференцирование

Antidiabetic drug sales



Критерий KPSS:

для исходного ряда $p < 0.01$,

для логарифмированного — $p < 0.01$,

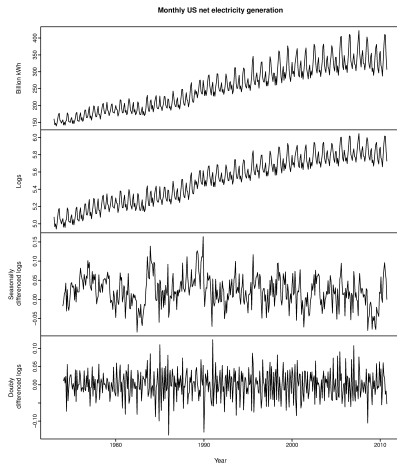
после сезонного дифференцирования — $p > 0.1$.

Комбинированное дифференцирование

Сезонное и обычное дифференцирование может применяться к одному ряду в любом порядке.

Если ряд имеет выраженный сезонный профиль, рекомендуется начинать с сезонного дифференцирования — после него ряд уже может оказаться стационарным.

Комбинированное дифференцирование



Критерий KPSS:

для исходного ряда $p < 0.01$,

для логарифмированного — $p < 0.01$,

после сезонного дифференцирования — $p = 0.0355$,

после ещё одного дифференцирования — $p > 0.1$.

Остатки

Остатки — разность между фактом и прогнозом:

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \hat{y}_t.$$

Прогнозы \hat{y}_t могут быть построены с фиксированной отсрочкой:

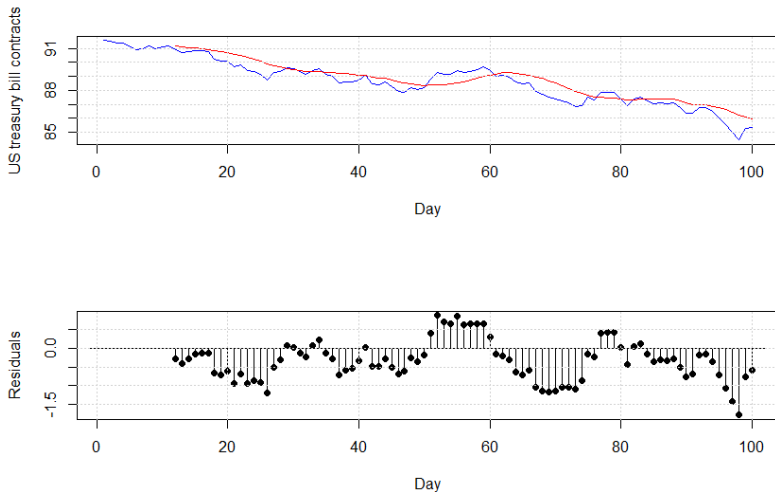
$$\hat{y}_{R+d|R}, \dots, \hat{y}_{T|T-d},$$

или с фиксированным концом истории при разных отсрочках:

$$\hat{y}_{T-D+1|T-D}, \dots, \hat{y}_{T|T-D}.$$

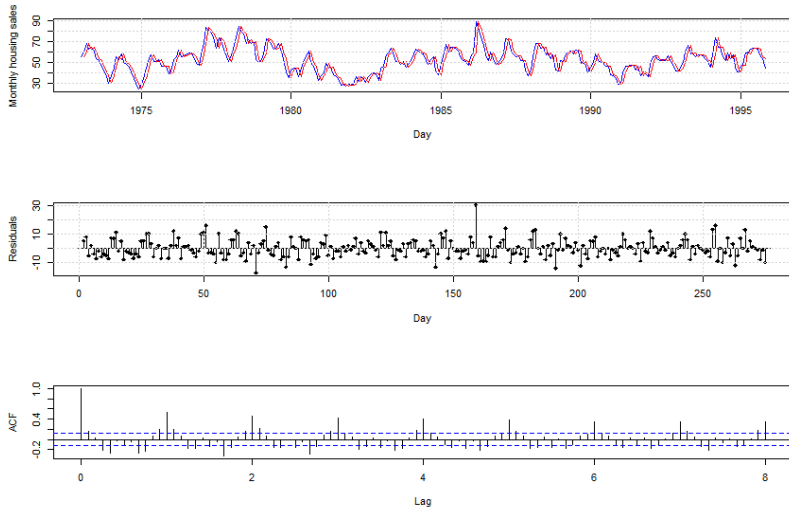
Необходимые свойства остатков прогноза

- Несмещённость — равенство среднего значения нулю:



Необходимые свойства остатков прогноза

- Неавтокоррелированность — отсутствие неучтённой зависимости от предыдущих наблюдений:



Q-критерий Льюнга-Бокса

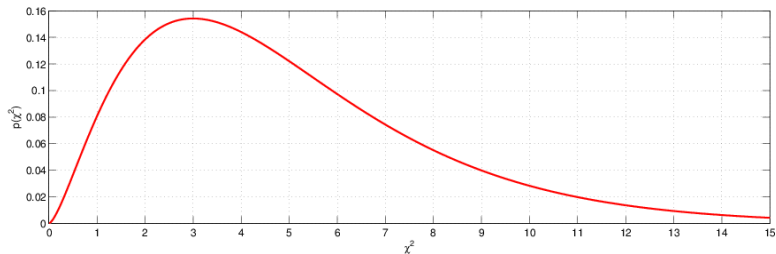
ряд ошибок прогноза: $\varepsilon^T = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T$;

нулевая гипотеза: $H_0: r_1 = \dots = r_L = 0$;

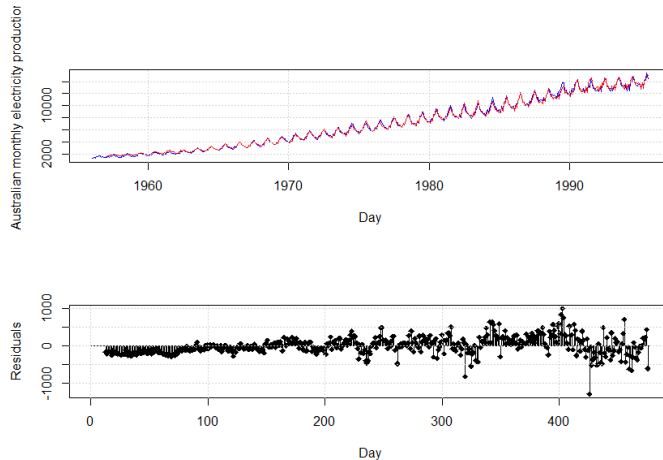
альтернатива: $H_1: H_0$ неверна;

статистика: $Q(\varepsilon^T) = T(T+2) \sum_{\tau=1}^L \frac{r_\tau^2}{T-\tau}$;

нулевое распределение: χ_{L-K}^2 , K — число настраиваемых параметров модели ряда.

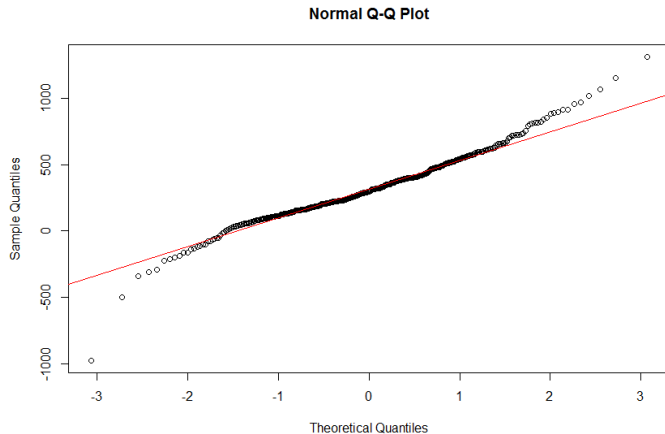


- Стационарность — отсутствие зависимости от времени:



Желательные свойства остатков прогноза

- Нормальность:



Проверка свойств остатков

- Несмещённость — критерий Стьюдента или Уилкоксона.
- Стационарность — визуальный анализ, критерий KPSS.
- Неавтокоррелированность — коррелограмма, Q-критерий Льюнга-Бокса.
- Нормальность — q-q plot, критерий Шапиро-Уилка.

Простейшие методы прогнозирования

- средним:

$$\hat{y}_{T+d} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t;$$

- средним за последние k отсчётов:

$$\hat{y}_{T+d} = \frac{1}{k} \sum_{t=T-k}^T y_t;$$

- наивный:

$$\hat{y}_{T+d} = y_T;$$

- наивный сезонный (s — период сезонности):

$$\hat{y}_{T+d} = y_{T+d-ks}, \quad k = \lfloor (d-1)/s \rfloor + 1;$$

- экстраполяции тренда:

$$\hat{y}_{T+d} = y_T + d \frac{y_T - y_1}{T - 1}.$$

Простое экспоненциальное сглаживание (метод Брауна)

Наивный прогноз:

$$\hat{y}_{T+1|T} = y_T.$$

Прогноз средним значением:

$$\hat{y}_{T+1|T} = \sum_{t=1}^T y_t.$$

Прогноз с помощью взвешенного среднего с экспоненциально убывающими весами:

$$\hat{y}_{T+1|T} = \alpha y_T + \alpha(1 - \alpha) y_{T-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{T-2} + \dots$$

$\alpha \uparrow 1 \Rightarrow$ больший вес последним точкам,

$\alpha \downarrow 0 \Rightarrow$ большее сглаживание.

Наблюдение	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$	$\alpha = 0.8$
y_T	0.2	0.4	0.6	0.8
y_{T-1}	0.16	0.24	0.24	0.16
y_{T-2}	0.128	0.144	0.096	0.032
y_{T-3}	0.1024	0.0864	0.0384	0.0064
y_{T-4}	0.08192	0.05184	0.01536	0.00128
y_{T-5}	0.065536	0.031104	0.006144	0.000256

Простое экспоненциальное сглаживание (метод Брауна)

- Метод подходит для прогнозирования рядов без тренда и сезонности:

$$\hat{y}_{t+1|t} = l_t,$$

$$l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) l_{t-1} = \hat{y}_{t|t-1} + \alpha \cdot e_t.$$

$e_t = y_t - \hat{y}_{t|t-1}$ — ошибка прогноза отсчёта времени t

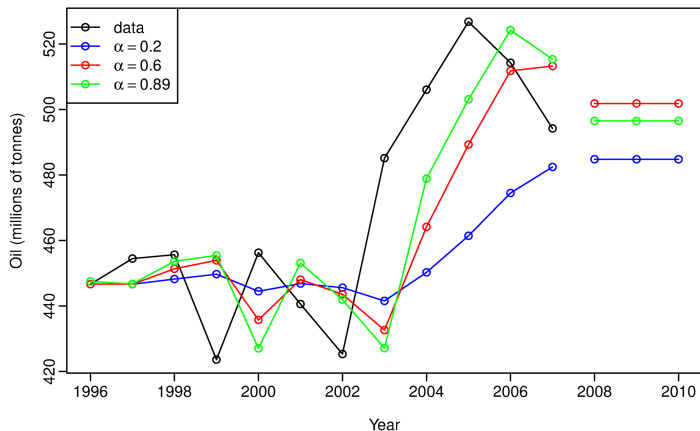
- Прогноз зависит от l_0 :

$$\hat{y}_{T+1|T} = \sum_{j=1}^{T-1} \alpha (1 - \alpha)^j y_{T-j} + (1 - \alpha)^T l_0.$$

Можно взять $l_0 = y_1$ или оптимизировать его.

- Прогноз получается плоский, т. е. $\hat{y}_{t+d|t} = \hat{y}_{t+1|t}$.

Простое экспоненциальное сглаживание (метод Брауна)



Простое экспоненциальное сглаживание в применении к данным о добыче нефти в Саудовской Аравии (1996–2007).

Методы, учитывающие тренд

Аддитивный линейный тренд (метод Хольта):

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+d|t} &= l_t + db_t, \\ l_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha) (l_{t-1} + b_{t-1}), \\ b_t &= \beta (l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta) b_{t-1}.\end{aligned}$$

Мультипликативный линейный (экспоненциальный) тренд:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+d|t} &= l_t b_t^d, \\ l_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha) (l_{t-1} b_{t-1}), \\ b_t &= \beta \frac{l_t}{l_{t-1}} + (1 - \beta) b_{t-1}.\end{aligned}$$

$$\alpha, \beta \in [0, 1].$$

Методы, учитывающие тренд

Аддитивный затухающий тренд:

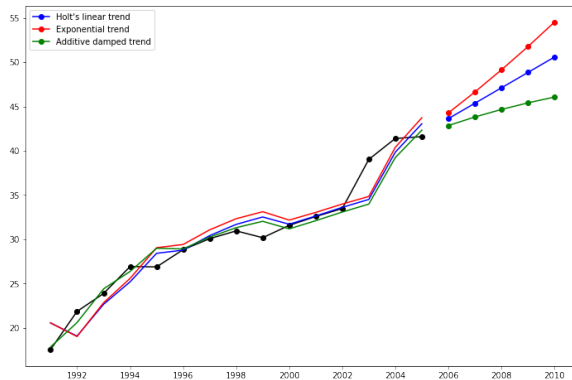
$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+d|t} &= l_t + \left(\phi + \phi^2 + \dots + \phi^d \right) b_t, \\ l_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha) (l_{t-1} + \phi b_{t-1}), \\ b_t &= \beta (l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta) \phi b_{t-1}.\end{aligned}$$

Мультипликативный затухающий тренд:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+d|t} &= l_t b_t^{(\phi + \phi^2 + \dots + \phi^d)}, \\ l_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha) l_{t-1} b_{t-1}^\phi, \\ b_t &= \beta \frac{l_t}{l_{t-1}} + (1 - \beta) b_{t-1}^\phi.\end{aligned}$$

$$\alpha, \beta \in [0, 1], \quad \phi \in (0, 1).$$

Методы, учитывающие тренд



Прогнозы поголовья овец в Азии с учётом тренда.

Методы, учитывающие сезонность

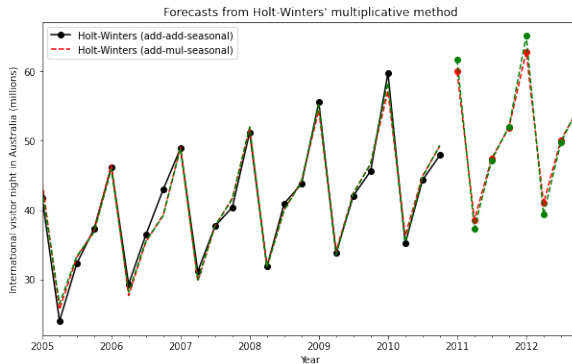
Аддитивная сезонность с периодом длины m (метод Тейла-Веджа):

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+d|t} &= l_t + db_t + s_{t-m+(d \bmod m)}, \\ l_t &= \alpha (y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha) (l_{t-1} + b_{t-1}), \\ b_t &= \beta (l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta) b_{t-1}, \\ s_t &= \gamma (y_t - l_{t-1} - b_{t-1}) + (1 - \gamma) s_{t-m}.\end{aligned}$$

Мультипликативная сезонность (Хольта-Уинтерса):

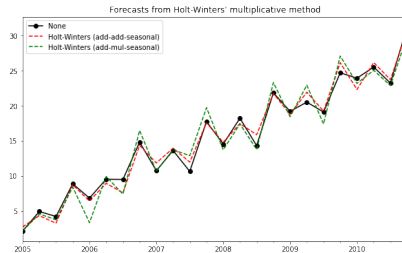
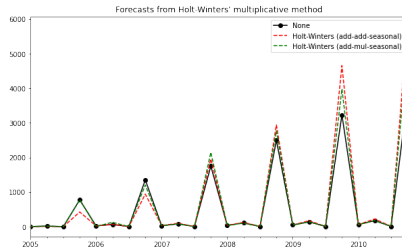
$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+d|t} &= (l_t + db_t) s_{t-m+(d \bmod m)}, \\ l_t &= \alpha \frac{y_t}{s_{t-m}} + (1 - \alpha) (l_{t-1} + b_{t-1}), \\ b_t &= \beta (l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta) b_{t-1}, \\ s_t &= \gamma \frac{y_t}{l_{t-1} + b_{t-1}} + (1 - \gamma) s_{t-m}.\end{aligned}$$

Методы, учитывающие сезонность



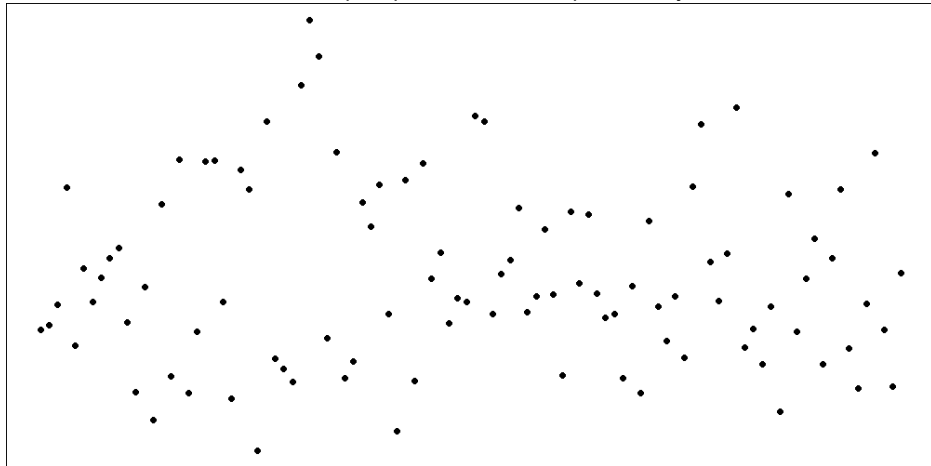
Прогнозы с учётом тренда и сезонности количества ночей, проведённых туристами в Австралии.

Методы, учитывающие сезонность



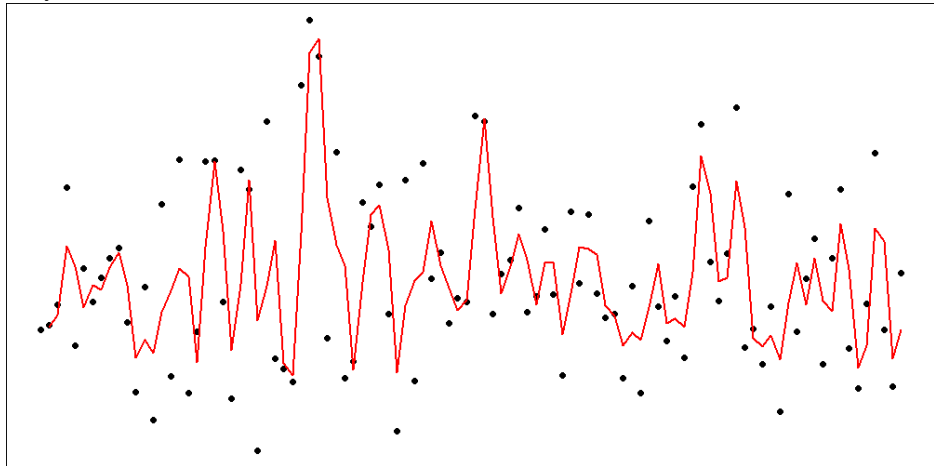
Скользящее среднее

Пусть у нас есть независимый одинаково распределённый во времени шум ε_t :



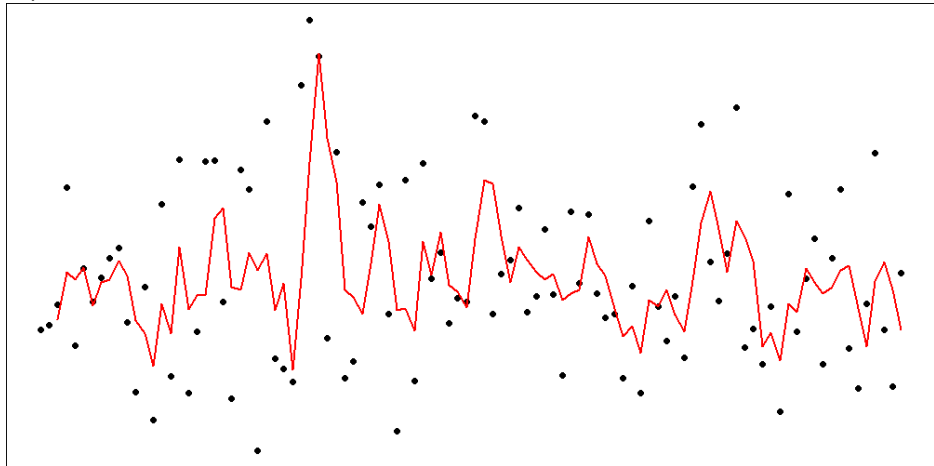
Скользящее среднее

Среднее по двум соседним точкам:



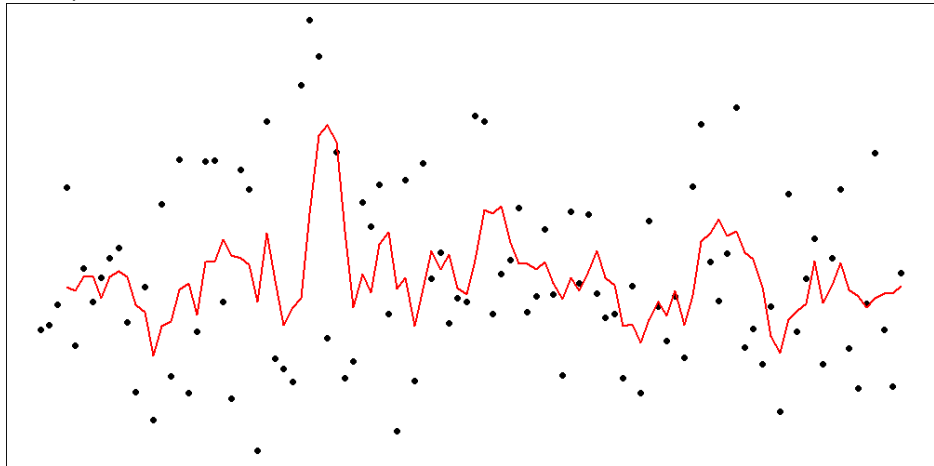
Скользящее среднее

Среднее по трём соседним точкам:



Скользящее среднее

Среднее по четырём соседним точкам:



Авторегрессия

$$AR(p): \quad y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

где y_t — стационарный ряд с нулевым средним, ϕ_1, \dots, ϕ_p — константы ($\phi_p \neq 0$), ε_t — гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией σ_ε^2 .

Если среднее равно μ , модель принимает вид

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

где $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p)$.

Другой способ записи:

$$\phi(B) y_t = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p) y_t = \varepsilon_t,$$

где B — разностный оператор ($B y_t = y_{t-1}$).

Линейная комбинация p подряд идущих членов ряда даёт белый шум.

ARMA (Autogressive moving average)

$$ARMA(p, q): y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

где y_t — стационарный ряд с нулевым средним, $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$ — константы ($\phi_p \neq 0, \theta_q \neq 0$), ε_t — гауссов белый шум с нулевым средним и постоянной дисперсией σ_ε^2 .

Если среднее равно μ , модель принимает вид

$$y_t = \alpha + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},$$

где $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$.

Другой способ записи:

$$\phi(B) y_t = \theta(B) \varepsilon_t.$$

Теорема Вольда: любой стационарный ряд может быть аппроксимирован моделью $ARMA(p, q)$ с любой точностью.

ARIMA (Autogerressive integrated moving average)

Ряд описывается моделью $ARIMA(p, d, q)$, если ряд его разностей

$$\nabla^d y_t = (1 - B)^d y_t$$

описывается моделью $ARMA(p, q)$.

$$\phi(B) \nabla^d y_t = \theta(B) \varepsilon_t.$$

α, ϕ, θ

- Если все остальные параметры фиксированы, коэффициенты регрессии подбираются методом наименьших квадратов
- Чтобы найти коэффициенты θ , шумовая компонента предварительно оценивается с помощью остатков авторегрессии
- Если шум белый (независимый одинаково распределённый гауссовский), то МНК даёт оценки максимального правдоподобия

d, D

- Порядки дифференцирования подбираются так, чтобы ряд стал стационарным
- Ещё раз: если ряд сезонный, рекомендуется начинать с сезонного дифференцирования
- Чем меньше раз мы продифференцируем, тем меньше будет дисперсия итогового прогноза

q, Q, p, P

- Гиперпараметры нельзя выбирать из принципа максимума правдоподобия: L всегда увеличивается с их ростом
- Для сравнения моделей с разными q, Q, p, P можно использовать информационные критерии
- Начальные приближения можно выбрать с помощью автокорреляций

Автокорреляционная функция (ACF)

Наблюдения временного ряда автокоррелированы.

Автокорреляция:

$$r_{\tau} = r_{y_t y_{t+\tau}} = \frac{\sum_{t=1}^{T-\tau} (y_t - \bar{y})(y_{t+\tau} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^T (y_t - \bar{y})^2}, \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t.$$

$r_{\tau} \in [-1, 1]$, τ — лаг автокорреляции.

Проверка значимости отличия автокорреляции от нуля:

временной ряд: $Y^T = Y_1, \dots, Y_T$;

нулевая гипотеза: $H_0: r_{\tau} = 0$;

альтернатива: $H_1: r_{\tau} \neq 0$;

статистика: $T(Y^T) = \frac{r_{\tau} \sqrt{T-\tau-2}}{\sqrt{1-r_{\tau}^2}}$;

нулевое распределение: $St(T - \tau - 2)$.

Частичная автокорреляционная функция (PACF)

Частичная автокорреляция стационарного ряда y_t — автокорреляция остатков авторегрессии предыдущего порядка:

$$\phi_{hh} = \begin{cases} r(y_{t+1}, y_t), & h = 1, \\ r(y_{t+h} - \hat{y}_{t+h}, y_t - \hat{y}_t), & h \geq 2, \end{cases}$$

где \hat{y}_{t+h} и \hat{y}_t — предсказания регрессий y_{t+h} и y_t на $y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+h-1}$:

$$\begin{aligned} \hat{y}_t &= \beta_1 y_{t+1} + \beta_2 y_{t+2} + \dots + \beta_{h-1} y_{t+h-1}, \\ \hat{y}_{t+h} &= \beta_1 y_{t+h-1} + \beta_2 y_{t+h-2} + \dots + \beta_{h-1} y_{t+1}. \end{aligned}$$

q, Q, p, P

- В модели $ARIMA(p, d, 0)$ ACF экспоненциально затухает или имеет синусоидальный вид, а PACF значимо отличается от нуля при лаге p
- В модели $ARIMA(0, d, q)$ PACF экспоненциально затухает или имеет синусоидальный вид, а ACF значимо отличается от нуля при лаге q

⇒ начальные приближения для p, q, P, Q :

- q : номер последнего лага $\tau < S$, при котором автокорреляция значима
- p : номер последнего лага $\tau < S$, при котором частичная автокорреляция значима

Прогнозирование с помощью ARIMA

- 1 Строится график ряда, идентифицируются необычные значения.
- 2 При необходимости делается стабилизирующее дисперсию преобразование.
- 3 Если ряд нестационарен, подбирается порядок дифференцирования.
- 4 Анализируются ACF/PACF, чтобы понять, можно ли использовать модели AR(p)/MA(q).
- 5 Обучаются модели-кандидаты, сравнивается их AIC/AICс.
- 6 Остатки полученной модели исследуются на несмещённость, стационарность и неавтокоррелированность; если предположения не выполняются, исследуются модификации модели.
- 7 В финальной модели t заменяется на $T + h$, будущие наблюдения — на их прогнозы, будущие ошибки — на нули, прошлые ошибки — на остатки.

Литература

Hyndman R.J., Athanasopoulos G. *Forecasting: principles and practice*. — OTexts, <https://www.otexts.org/book/fpp>