P3P 算法整理

P3P 问题（Perspective-Three-Point problem）是 PnP 问题中一种较为基础的情况，所有的 P3P 问题都可视作 PnP（$n \geq 3$）问题的一种特殊情况。故而 P3P 问题的研究是 PnP 问题的主要研究方向之一。由此得出的 P3P 算法也可用来求解 PnP 问题，P3P 算法所需的数据较少，相对而言更加简捷、高效、实用。

P3P 算法利用已知的 3 个参考点间的几何关系，应用余弦定理列写方程组，之后对方程组进行一定程度的化简，再使用吴消元法对非线性方程组进行求解，得到 4 组候选解，最后将第 4 个点作为验证点代入，以选取最可能的点。

一. 问题的简化

令$\boldsymbol{O}$为相机光心，$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$为选取的 3 个参考点，已知其世界坐标系下的坐标，和投影到图像中的像素坐标（记作$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$），如图 1。

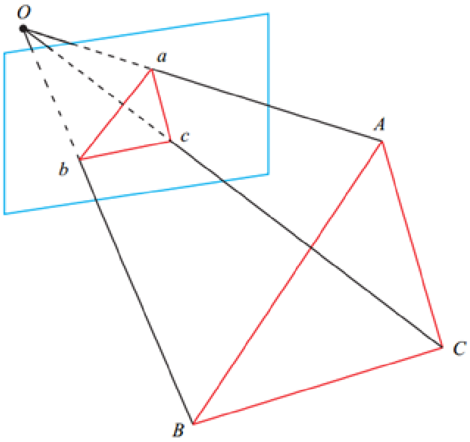

图 1 P3P 问题

令

$$|\boldsymbol{OA}| = X$$
$$|\boldsymbol{OB}| = Y$$
$$|\boldsymbol{OC}| = Z$$

再令

$$\angle \boldsymbol{bOc} = \alpha$$
$$\angle \boldsymbol{aOc} = \beta$$
$$\angle \boldsymbol{aOb} = \gamma$$

$$2\cos\alpha = p$$
$$2\cos\beta = q$$
$$2\cos\gamma = r$$

$$|\boldsymbol{AB}| = c'$$
$$|\boldsymbol{BC}| = a'$$
$$|\boldsymbol{AC}| = b'$$

其中X、Y、Z为未知量，其余为已知。

由三角形余弦定理，可以得出方程组

$$Y^2+Z^2-YZp-a'^2=0$$
$$X^2+Z^2-XZp-b'^2=0$$
$$X^2+Y^2-XYp-c'^2=0$$

若现实中三角形成立所需的条件（称现实条件）满足，X、Y、Z的一组解可称为物理解。这些现实条件贯穿整个算法流程。

$$\begin{cases} X>0, Y>0, Z>0, a'>0, b'>0, c'>0, a'+b'>c', a'+c'>b', b'+c'>a' \\ 0<\alpha<\pi, 0<\beta<\pi, 0<\gamma<\pi, 0<\alpha+\beta+\gamma<2\pi \\ \alpha+\beta>\gamma, \alpha+\gamma>\beta, \beta+\gamma>\alpha \\ I_0=p^2+q^2+r^2-pqr-1\neq 0 \end{cases} \quad (I_0)$$

即，各边边长大于 0，三角形两边之和大于第三边，角度在$(0,\pi)$区间内，三个角度之和小于2π，两角度之和大于第三角，$\boldsymbol{O}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$四点不共面。

为简化方程组，令

$$X=xZ$$
$$Y=yZ$$

$$|\boldsymbol{AB}|=\sqrt{v}Z$$
$$|\boldsymbol{BC}|=\sqrt{av}Z$$
$$|\boldsymbol{AC}|=\sqrt{bv}Z$$

那么可以得出

$$v=\frac{\boldsymbol{AB}^2}{\boldsymbol{OC}^2}$$
$$a=\frac{\boldsymbol{BC}^2}{\boldsymbol{AB}^2}$$
$$b=\frac{\boldsymbol{AC}^2}{\boldsymbol{AB}^2}$$

即a、b为已知量。方程组可化简为

$$y^2+1-yp-av=0$$
$$x^2+1-xq-bv=0$$
$$x^2+y^2-xyr-v=0$$

由于$|r|=2|\cos\gamma|<2$，故$v=x^2+y^2-xyr>0$，因此Z能够由$Z=|\boldsymbol{AB}|/\sqrt{v}$唯一决定。消去方程组中的$v$，有

$$\begin{cases} p_1=(1-a)y^2-ax^2-py+arxy+1=0 \\ p_2=(1-b)x^2-by^2-qx+brxy+1=0 \end{cases} \quad (ES)$$

其中x、y为未知量，PnP 问题至此转化为求此方程组的物理解。

二. 消元求解方程组

吴-Ritt 零点分解法是求解代数方程组的一般方法，可使用三角化方程组的零点集的并来表示多项式方程的零点集。

$$\begin{cases} f_1(u,x_1)=0 \\ f_2(u,x_1,x_2)=0 \\ \vdots \\ f_p(u,x_1,\dots,x_p)=0 \end{cases}$$

其中u为参数，x为待求解变量。对于方程组$PS=0$，其解集为$\mathrm{Zero}(PS)$；而$\mathrm{Zero}(PS/I)$为方程组$PS=0$的解集中不是$I=0$的部分，即$\mathrm{Zero}(PS/I)=\mathrm{Zero}(PS)-\mathrm{Zero}(I)$。对于 P3P 问题

的解而言，需要满足方程组(ES)的同时满足现实条件I_0。即，问题的解集为$\mathrm{Zero}(ES/I_0)$。运用吴-Ritt 零点分解法，将$(ES/\boldsymbol{I}_0)$分解为 10 个不相容的分支

$$\mathrm{Zero}(ES/I_0)=\bigcup_{i=1}^{10}\boldsymbol{C}_i$$

其中

$$\boldsymbol{C}_i=\mathrm{Zero}(TS_i/T_i), i=1,\dots,9$$
$$\boldsymbol{C}_{10}=\mathrm{Zero}(TS_{10}/T_{10})\cup\mathrm{Zero}(TS_{11}/T_{11})$$

三角化多项式组TS_i为

$$\begin{cases}a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4,\\ b_0y-b_1.\end{cases}\tag{TS_1}$$

$$\begin{cases}a_5x^3+a_6x^2+a_7x+a_8,\\ b_2y-b_3,\\ a^2+(-2+2b-br^2)a-2b+b^2+1.\end{cases}\tag{TS_2}$$

$$\begin{cases}(r^2p^2-4pqr+r^2q^2)x^2+(4p^2q-p^2r^2q)x-4p^2+r^2p^2,\\ b_4y-b_5,\\ (-4p^2+4pqr+r^2p^2+r^2q^2-r^3pq-4q^2)a+r^2p^2-4pqr+4q^2,\\ (-4p^2+4pqr+r^2p^2+r^2q^2-r^3pq-4q^2)b+r^2p^2+4p^2-4pqr.\end{cases}\tag{TS_3}$$

$$\begin{cases}(p^2b+q^2b-p^2)x^2+(-4bq+p^2q)x+4b-p^2,\\ py+qx-2,\\ a+b-1,\\ r.\end{cases}\tag{TS_4}$$

$$\begin{cases}qx-1,\\ py-1,\\ (p^2+q^2)a-q^2,\\ (p^2+q^2)b-p^2,\\ r.\end{cases}\tag{TS_5}$$

$$\begin{cases}qx-1,\\ py-1,\\ (p^4-2p^2q^2+q^4)a-p^2q^2-q^4,\\ (p^4-2p^2q^2+q^4)b-p^2q^2-p^4,\\ (p^2+q^2)r-4pq.\end{cases}\tag{TS_6}$$

$$\begin{cases}(p^2q-2pr)x-p^2+r^2,\\ py-1,\\ (4r^2+p^2q^2+p^4-r^4-p^3qr+pr^3q-4qpr)b+\\ 2pr^3q-2p^2r^2+2p^3qr-p^2q^2r^2-p^4-r^4.\end{cases}\tag{TS_7}$$

$$\begin{cases}(2pr^3q-2p^2r^2+4br^2+p^2q^2b+p^4b-r^4b+2p^3qr-p^2q^2r^2-p^4-r^4-\\ p^3qrb+r^3pbq-4qbpr)x^2+(-q^2r^3pb+2pq^2br+2p^2r^2q+p^2q^3r^2+r^4q+\\ qr^4b+p^4q-2bpr^3+3qr^2bp^2-4r^2bq+8rpb-2rbp^3-2p^3q^2r-4bp^2q-\\ 2r^3pq^2)x-p^2q^2r^2+2pr^3q+2p^3qr-p^4-r^4-2p^2r^2-4qbpr+q^2br^2+4bp^2,\\ (-qpr+p^2+r^2)y+pqx-2rx-2p+qr.\end{cases}\tag{TS_8}$$

$$\begin{cases}(-1+a+b)x^2+(-qa+q)x-1+a-b,\\ (-1+a+b)y^2-1-a+qxa+b,\\ p,\\ r.\end{cases}\tag{TS_9}$$

$$
\begin{cases}
(2pr - p^2q)x - r^2 + p^2, \\
py - 1, \\
(-pqr^3 + r^4 + rp^3q - 4r^2 - p^2q^2 + 4rpq - p^4)a + p^2q^2 - 4rpq + 4r^2, \\
(-pqr^3 + r^4 + rp^3q - 4r^2 - p^2q^2 + 4rpq - p^4)b + \\
p^4 + r^4 + 2r^2p^2 + p^2r^2q^2 - 2rp^3q - 2pqr^3.
\end{cases}
\qquad (TS_{10})
$$

$$
\begin{cases}
rx - p, \\
(-p^2r^2 + r^3qp - r^4)y^2 + (p^3r^2 - p^2r^3q + r^4p)y, \\
(-pqr^3 + r^4 + rp^3q - 4r^2 - p^2q^2 + 4rpq - p^4)a + p^2q^2 - 4rpq + 4r^2, \\
(-pqr^3 + r^4 + rp^3q - 4r^2 - p^2q^2 + 4rpq - p^4)b + \\
p^4 + r^4 + 2r^2p^2 + p^2r^2q^2 - 2rp^3q - 2pqr^3.
\end{cases}
\qquad (TS_{11})
$$

其中

$a_0 = -2b + b^2 + a^2 + 1 - br^2q + 2ba - 2a$

$a_1 = -2bqa - 2a^2q + br^2qa - 2q + 2bq + 4aq + pbr + brpa + b^2rp$

$a_2 = q^2 + b^2r^2 - bp^2 - qpbr + b^2p^2 - br^2a + 2 - 2b^2 - abrpq + 2a^2 - 4a - 2q^2a + q^2a^2$

$a_3 = -b^2rp + brpa - 2a^2q + qp^2b + 2bqa + 4aq + pbr - 2bq - 2q$

$a_4 = 1 - 2a + 2b + b^2 - bp^2 + a^2 - 2ba$

$a_5 = apr + 2qa - rpb + 2bq - 2q - ar^2q + pr$

$a_6 = (-2q^2 + r^2 - 4 + r^2q^2 - pqr)a + br^2 - p^2 - bq^2 + bp^2 + 2q^2 + 4 - pqr - 4b$

$a_7 = (6q + pr - 2r^2q)a + pr - 6q - rpb + 2bq + qp^2$

$a_8 = 4 - 4a - p^2 + ar^2$

$b_0 = b(p^2a - p^2 + bp^2 + pqr - qarp + ar^2 - r^2 - br^2)^2$

$$
\begin{aligned}
b_1 = {} & [(1 - a - b)x^2 + (qa - q)x + 1 - a + b][(a^2r^3 + 2br^3a - br^5a - 2ar^3 + r^3 \\
& + b^2r^3 - 2r^3b)x^3 + (pr^2 + pa^2r^2 - 2br^3qa + 2r^3bq - 2r^3q - 2par^2 - 2pr^2b \\
& + r^4pb + 4ar^3q + bqar^5 - 2r^3a^2q + 2r^2pba + b^2r^2p - r^4pb^2)x^2 + (r^3q^2 + r^5b^2 \\
& + rp^2b^2 - 4ar^3 - 2ar^3q^2 + r^3q^2a^2 + 2a^2r^3 - 2b^2r^3 - 2p^2br + 4par^2q + 2ap^2rb \\
& - 2ar^2qbp - 2p^2ar + rp^2 - br^5a + 2pr^2bq + rp^2a^2 - 2pqr^2 + 2r^3 - 2r^2pa^2q \\
& - r^4qbp)x + 4ar^3q + pr^2q^2 + 2p^3ba - 4par^2 - 2r^3bq - 2p^2qr - 2b^2r^2p + r^4pb \\
& + 2pa^2r^2 - 2r^3a^2q - 2p^3a + p^3a^2 + 2pr^2 + p^3 + 2br^3qa + 2qp^2br + 4qarp^2 \\
& - 2par^2q^2 - 2p^2a^2rq + pa^2r^2q^2 - 2r^3q - 2p^3b + p^3b^2 - 2p^2brqa]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_2 = {} & b(-4ar^3 + 4r^3 + ar^5 - 2p^3q + 4rp^2 - 6pqr^2 - 4rp^2b - 4p^2ar + 6par^2q + 2p^2rq^2 \\
& + 2p^2ar^3 + 2p^3bq + 2p^3qa + p^4ar + p^2ar^3q^2 - 2p^2rq^2a - p^2rbq^2 - 2p^3ar^2q - 2par^4q \\
& + 2pr^2bq)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_3 = {} & [(-1 + a + b)x^2 + (-qa + q)x - 1 + a - b][(-par^3 + ar^4q - 2ar^2q - 2r^2bq \\
& + 2r^2q - pr^3 + r^3bp)x^2 + (-r^2p^2a + 2r^3paq + 4ar^2 - r^4q^2a - ar^4 - 2qarp \\
& + 2ar^2q^2 - r^4b + r^2bq^2 + r^3pq + 2pqr + 4r^2b - 2qpbr - 2r^2q^2 - 4r^2)x - p^3ar \\
& + 2ar^4q - par^3q^2 + 2p^2ar^2q - 2par^3 + 2prq^2a - 2p^2aq - 6ar^2q + 4apr - pr^3 \\
& + 4pbr + prbq^2 - 2r^2bq - 2prq^2 + 2qp^2 - 2bqp^2 - 4pr + 6r^2q]
\end{aligned}
$$

$b_4 = r^2p^2(rq^2 + p^2r - 4pq)(p^2 - pqr + r^2 + q^2 - 4)$

$b_5 = r^2q[(rp^2 + rq^2 - r^2pq)x + pr^2 - 4p][(rp^2 + rq^2 - 4pq)x + q^2p - qp^2r + p^3]$

多项式T_i为

$$T_1 = I_0 I_1 I_2$$
$$T_2 = I_0 I_2 I_3 I_4$$
$$T_3 = I_0 I_2 I_4 I_5 I_6 I_7$$
$$T_4 = I_0 I_2 I_4 I_6 I_7 I_8$$
$$T_5 = I_0 I_2 I_4 I_6 I_7$$
$$T_6 = I_0 I_2 I_4 I_5 I_7$$
$$T_7 = I_0 I_2 I_3$$
$$T_8 = T_7$$
$$T_9 = I_0 I_1$$
$$T_{10} = I_0 I_1$$
$$T_{11} = I_0 I_1$$

其中I_0即为上文中的多项式I_0；其他的I_i为

$$I_1 = a_0$$
$$I_2 = b_0$$
$$I_3 = a_5$$
$$I_4 = b_2$$
$$I_5 = r$$
$$I_6 = rp - 4pq + rq^2$$
$$I_7 = p$$
$$I_8 = (p^2 + q^2)b - p^2$$

各个分支的解的最大数目如表 1 所示。

表 1 各个分支的解的最大数目

$\boldsymbol{C}_i, i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
解的最大数目	4	3	2	2	1	1	1	2	4	3

由于$\boldsymbol{C}_i$、$\boldsymbol{C}_j$互不相容（$i \neq j$），因此，对于一组参数p、q、r、a、b而言，方程组的解为$\mathrm{Zero}(TS_k/T_k), k = 1, \ldots, 9$或$\mathrm{Zero}(TS_{10}/T_{10}) \cup \mathrm{Zero}(TS_{11}/T_{11})$，即各个分支只选其一。

在这 10 个分支中，$\mathrm{Zero}(TS_1/T_1)$为解集的主分支，而其他的分支则可视为主分支的退化情形。在这些退化情形发生时，参数p、q、r、a、b须满足一定的代数关系，而这些代数关系只会在特定的场景条件下满足。

相比于主分支，这些退化情形发生的概率并不高；而另一方面，由于这些特定的场景条件较为复杂，不一定具备明确的几何意义，在实际应用中很难判定是否处于这些退化情形中；再者，实际计算相机位姿时的参考点数目一般都是远大于 3。因此，在实际的求解过程中，只计算主分支

$$\mathrm{Zero}(TS_1/T_1)$$

在得出主分支的 4 个解后，取另外一点$\boldsymbol{D}$代入所求得的位姿中，以验证结果，选取最合适的 1 个解。

参考

[1] Gao X S, Hou X R, Tang J L, Cheng H. Complete solution classification for the perspective-three-point problem [J]. Mathematics-M echanization Research Center Priprints, 2001, (20): 23-43.

[2] 孔辉. 吴方法在 PnP 问题中的应用[D].国防科学技术大学,2003.

[3] 汤建良.一类 P3P 问题方程系统的零点分解[J].数学的实践与认识,2004(08):124-127.
[4] 汤建良,蒋鲲.一类 P3P 问题求解算法研究[J].黑龙江大学自然科学学报,2004(02):9-12.