第三幕曲率

Wayne Zheng

2025 年 9 月 22 日

目录

1 平面曲线的曲率

不存在一维的内蕴曲率概念。几何与物理的联系：如果一个单位质量的滚珠在一段无摩擦的曲线上以单位速率运动，金属丝就会有一个垂直于切向的作用力作用在滚珠上，牛顿知道，这个力 F 的大小就是曲线的曲率 κ.

曲率最早由牛顿引入，描述曲线的“弯曲性”。更确切地说，曲率是切线关于弧长的转向率。如果 φ 是切线的变化角，则 $\kappa = d\varphi/ds$. 设 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{N}$ 是曲线的单位切向量和指向曲率中心的单位法向量，则我们容易得到 $\delta\mathbf{T} \asymp \mathbf{N}\delta\varphi$，从而

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \equiv \mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N}. \tag{1}$$

也可以用法向量取代切向量，考虑法向量的转向率

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} \equiv \mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T}. \tag{2}$$

因为如果将考虑对象从曲线变成曲面，就不存在唯一的切向量了。换句话说，在平面内，切向量和法向量的转向速率都是曲率 κ, 其变化率的方向是相反的，平行于另一个向量。

2 三维空间的曲线

密切平面：在三维空间中扭曲的曲线，每个无限小的部分仍可以认为是在一个平面内的，这个平面称为密切平面（osculating plane）。密切平面可以看作是曲线在瞬时最贴合的平面。密切平面由两个（单位）向量切向量 $\mathbf{T}$ 和主法向量 $\mathbf{N}$ 张成。考虑沿着该曲线的质点运动，切向量 $\mathbf{T}$ 描述的是曲线的瞬时*速度*方向，主法向量 $\mathbf{N}$ 描述的是曲线的瞬时*加速度*方向，指向曲率中心。密切平面的法向量称为副法向量 $\mathbf{B}$. $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ 组成了*弗勒内*（Frenet）框架。

设曲线是关于弧长 s 的函数，即 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. 则切向量定义为

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

密切平面的旋转速率称为*挠率*（torsion）τ, 也就是副法线绕 $\mathbf{T}$ 的旋转速率，即

$$\mathbf{B}' = -\tau\mathbf{N}. \tag{3}$$

在三维空间中，主法线向量 $\mathbf{N}$ 不仅在密切平面内旋转，还要沿着 $\mathbf{B}$ 方向，绕着切向量 $\mathbf{T}$ 旋转，因此综合起来，主法线的变化率为

$$\mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}. \tag{4}$$

因此，三维空间中曲线的弗勒内-塞雷方程（Frenet-Serret formulas）总结如下：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}. \tag{5}$$