

第三幕 曲率

Wayne Zheng

2026 年 2 月 6 日

目录

1 平面曲线的曲率	i
2 三维空间的曲线	ii
3 曲面的主曲率	ii
4 测地线和测地曲率	iii
4.1 两种曲率	iii
4.2 旋转曲面上的测地线	iii
4.3 开普勒第二定律	iv
5 曲面的外在曲率	iv
6 高斯的绝妙定理	v
7 尖刺曲率	v
7.1 圆锥曲率	v
7.2 多面角曲率	v
8 形状算子	v
8.1 补充：奇异值分解的几何学	v
8.2 形状算子的矩阵表示和几何意义	vi
8.3 曲面一般参数化后的形状算子	vi

1 平面曲线的曲率

不存在一维的内蕴曲率概念。几何与物理的联系：如果一个单位质量的滚珠在一段无摩擦的曲线上以单位速率运动，金属丝就会有一个垂直于切向的作用力作用在滚珠上，牛顿知道，这个力 F 的大小就是曲线的曲率 κ .

曲率最早由牛顿引入，描述曲线的“弯曲性”。更确切地说，曲率是切线关于弧长的转向率。如果 φ 是切线的变化角，则 $\kappa = d\varphi/ds$. 设 \mathbf{T} 和 \mathbf{N} 是曲线的单位切向量和指向曲率中心的单位法向量，则我们容易得到 $\delta\mathbf{T} \asymp \mathbf{N}\delta\varphi$, 从而

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \equiv \mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N}. \quad (1)$$

也可以用法向量取代切向量，考虑法向量的转向率

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} \equiv \mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T}. \quad (2)$$

因为如果将考虑对象从曲线变成曲面，就不存在唯一的切向量了。换句话说，在平面内，切向量和法向量的转向速率都是曲率 κ , 其变化率的方向是相反的，平行于另一个向量。

一般地，牛顿发现质点在二维平面的运动曲线 $[x(t), y(t)]$ 的曲率公式

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x} + \dot{y}^2)^{3/2}}. \quad (3)$$

上方的点是关于时间的导数。对于单位速率运动的质点， $|\mathbf{v}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$. 如果质点在 δt 时刻内走过了 $\delta\varphi$, 此时 $\delta t = \delta s$. 则 \dot{y} 方向的增量为 $\delta\dot{y} \asymp \ddot{y}\delta t = \ddot{y}\delta s$. 根据相似三角形，

$$\frac{\delta\varphi}{\ddot{y}\delta s} \asymp \frac{1}{\dot{x}}.$$

即

$$\kappa \equiv \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\ddot{y}}{\dot{x}}. \quad (4)$$

利用三角形另一边的相似性质，容易得此时曲率的另一个表达式 $\kappa = -\ddot{x}/\dot{y}$.

2 三维空间的曲线

密切平面：在三维空间中扭曲的曲线，每个无限小的部分仍可以认为是在一个平面内的，这个平面称为密切平面 (osculating plane)。密切平面可以看作是曲线在瞬时最贴合的平面。密切平面由两个（单位）向量切向量 \mathbf{T} 和主法向量 \mathbf{N} 张成。考虑沿着该曲线的质点运动，切向量 \mathbf{T} 描述的是曲线的瞬时速度方向，主法向量 \mathbf{N} 描述的是曲线的瞬时加速度方向，指向曲率中心。密切平面的法向量称为副法向量 \mathbf{B} . $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ 组成了弗勒内 (Frenet) 框架。

设曲线是关于弧长 s 的函数，即 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. 则切向量定义为

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

密切平面的旋转速率称为挠率 (torsion) τ , 也就是副法线绕 \mathbf{T} 的旋转速率，即

$$\mathbf{B}' = -\tau\mathbf{N}. \quad (5)$$

在三维空间中，主法线向量 \mathbf{N} 不仅在密切平面内旋转，还要沿着 \mathbf{B} 方向，绕着切向量 \mathbf{T} 旋转，因此综合起来，主法线的变化率为

$$\mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}. \quad (6)$$

因此，三维空间中曲线的弗勒内-塞雷方程 (Frenet-Serret formulas) 总结如下：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

3 曲面的主曲率

p 是曲面上的一点， \mathbf{n}_p 是 p 的法向量 (normal vector) , Π_θ 是法平面 (normal plane) 束，其与曲面的交线记作 \mathcal{C}_θ , p 到 \mathcal{C}_θ 的曲率中心 c 的距离为 $1/\kappa_\theta$. 如果 c 在 $+\mathbf{n}_p$ 方向上， κ_θ 为正，反之为负。

选取 p 点作为原点，法线方向为 z 轴，切平面为 $x-y$ 平面，建立直角坐标系。可以用 $z = f(x, y)$ 来表示曲面，在原点处 $f(0, 0) = 0, \partial_x f = \partial_y f = 0$. 当 $x, y \rightarrow 0$ 时，我们可以展开 $z \asymp ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey$. 因为在原点 $\partial_x f = \partial_y f = 0$, 所以 $\partial_x f = 2ax + cy + d \rightarrow 0$. 因此 $d = e = 0$. 我们可以用非常靠近且平行于切平面的一个平面 $z = k$ 来切开曲面，得到的截面曲线在原点附近可以表示为

$$z \asymp ax^2 + by^2 + cxy \quad (8)$$

是一个二次齐次曲线。圆锥曲线都有两个相互垂直的对称轴，如果我们选取这两个轴作为 x 轴和 y 轴，则可以消去交叉项，因为在反射变换下 $x \rightarrow -x, y \rightarrow y, f(x, y)$ 保持不变。因此，我们可以将截面曲线表示为

$$z \asymp ax^2 + by^2. \quad (9)$$

根据二维空间中的曲线，我们知道分别沿着 x 轴和 y 轴的曲线可以表示为 $z \asymp \frac{1}{2}\kappa_1 x^2$ 和 $z \asymp \frac{1}{2}\kappa_2 y^2$ ，其中我们定义了 $\kappa_1 = \kappa(0), \kappa_2 = \kappa(\pi/2)$ 。因此，

$$z \asymp \frac{1}{2}\kappa_1 x^2 + \frac{1}{2}\kappa_2 y^2. \quad (10)$$

如果考虑任意角度的截面曲线，设该截面与 x 轴的夹角为 θ ，如果在切平面内沿着 θ 方向移动一小段距离 ϵ ，则 $x = \epsilon \cos \theta, y = \epsilon \sin \theta$ ，则

$$\kappa(\theta) \asymp 2 \left(\frac{z}{\epsilon^2} \right) \asymp 2 \left[\frac{\frac{1}{2}\kappa_1(\epsilon \cos \theta)^2 + \frac{1}{2}\kappa_2(\epsilon \sin \theta)^2}{\epsilon^2} \right] = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta. \quad (11)$$

这就是欧拉曲率公式。

4 测地线和测地曲率

4.1 两种曲率

三维空间中，一般曲面内的一般曲线的曲率可以分为两个分量：在曲面内（对其中的居民可见）的称为测地曲率（geodesic curvature） κ_g ，在曲面外（对其中的居民不可见）的称为法曲率（normal curvature） κ_n 。如果密切平面垂直于曲面（的法向量），那么所有曲率都是法曲率 $\kappa = \kappa_n, \kappa_g = 0$ 。地球表面的大圆就是这样。

如果质点以单位速率走过一条曲线，其加速度向量的方向指向曲率中心，长度就是曲率，因此可以将质点的加速度称为曲率向量（curvature vector） $\vec{\kappa} = \kappa \mathbf{N} \equiv \dot{\mathbf{T}}$ 。

设 \mathbf{T} 是曲线 C 在点 p 处的单位切向量， \mathbf{n} 是法向量。 T_p 是曲面在点 p 处的切平面， \mathbf{n} 与 \mathbf{T} 张成法平面 Π_T 。 Π_T 与密切平面（副法向量 \mathbf{B} ）的夹角为 γ ，则测地曲率向量 $\vec{\kappa}_g$ 和法曲率向量 $\vec{\kappa}_n$ 实际上就是 $\vec{\kappa}$ 在 T_p 和 Π_T 上的投影分量，即

$$\kappa_g = \kappa \cos \gamma, \quad \kappa_n = \kappa \sin \gamma. \quad (12)$$

默尼耶（Jean Baptiste Meusnier, 法国数学家、物理学家和工程师）在 1776 年就注意到：曲面迫使其上面的所有曲线沿着法方向弯曲同等的量，从而给出默尼耶定理：

曲面上经过点 p 、指向同一方向 \mathbf{T} 的所有曲线都具有相同的法曲率 $\kappa_n(\mathbf{T})$ ，即曲面在 \mathbf{T} 方向的法截线曲率。如果曲线在 p 点密切平面与曲面在 p 点的切平面成夹角 γ ，曲线在 p 点的曲率为 κ_γ ，则 $\kappa_\gamma \sin \gamma = \kappa_n(\mathbf{T})$ 。

测地线是内蕴的“直线”，其上每一点 $\kappa_g = 0$ 。也就是说：对于测地线上的每一点，曲面在该点的法向量 \mathbf{n}_p 一定位于该点的密切平面 Π_p 之内。换句话说，这些线对于曲面内的居民而言是真正的直线，因为他们无法得知法曲率 κ_n 的存在；对于曲面外的观察者而言，就是测地线。

4.2 旋转曲面上的测地线

下面我们考虑旋转曲面。一般旋转曲面的子午线一定是测地线。

我们先考虑球面，设半径为 R ，假设一质点以单位速率沿着球面上的一大圆运动，大圆与赤道平面 Π 的夹角为 γ 。不妨设大圆平面与 Π 的交线是 y 轴，因为大圆过球心，所以大圆的平面方程为 $Ax + By + Cz = 0$ 。又因为大圆过 $(0, R, 0)$ 和 $(R \cos \gamma, 0, R \sin \gamma)$ 点，从而得到平面方程为 $z = x \tan \gamma$ 。带入到球面方程 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 中，得到大圆的方程，

也就是球与该平面的交线方程：

$$\frac{x^2}{R^2 \cos^2 \gamma} + \frac{y^2}{R^2} = 1,$$

用 (x, y) 坐标描述，即在 Π 上的投影。这是一个椭圆。

下面我们具体考虑从 $z = x \tan \gamma$ 到 Π 的投影 \mathcal{P} . 容易看出，这是一个带有缩放性质的线性变换。我们首先要在 $z = x \tan \gamma$ 上来表示一个点，即一个向量。容易看出，可以选取两个正交归一的基向量 $\mathbf{e}_1 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_2 = (\cos \gamma, 0, \sin \gamma)$. \mathbf{r} 在该平面上的坐标为 (u, v) , 即

$$\mathbf{r} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 = (v \cos \gamma, u, v \sin \gamma) \mapsto (v \cos \gamma, u) \equiv (x, y).$$

则 \mathcal{P} 的表示矩阵（雅可比矩阵）是

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \cos \gamma \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意， $\det(P) = \cos \gamma$ 代表了面积微元的缩放比例系数，即 $dA = \cos \gamma \cdot dA$.

当一个质点以单位速率在 $z = x \tan \gamma$ 平面内的大圆上运动时，在 Δt 时间内其扫过的角度为 $\Delta\theta = 1 \cdot \Delta t / R$, 面积为 $A = \frac{1}{2}R^2\Delta\theta = \frac{1}{2}R\Delta t$, 即相等时间内扫过的面积相等。其在 Π 上的投影也是如此，即 $dA/dt = \frac{1}{2}R \cos \gamma$. 由于是椭圆，因此要满足此条件只能在距离焦点较近时速度较快，远离焦点时速度较慢。

设质点在大圆测地线上运动到了点 p , 其与经线（子午线）的夹角为 ψ . 则质点的单位速率在点 p 处的切平面 T_p 内可以分解为纬线分量 $\sin \psi$ 和经线分量 $\cos \psi$. 设投影半径为 ρ , 则容易得到

$$\frac{1}{2}\rho \sin \psi = \frac{1}{2}R \cos \gamma$$

是一个常数。推广到任意旋转曲面即为克莱罗定理 (Clairaut's Theorem) :

设 S 是曲线 C 绕轴 L 形成的旋转曲面，如果 ρ 是测地线 g 上的点 q 到 L 的距离， ψ 是经过点 q 的子午线与测地线之间的夹角。当 q 沿着 g 移动时， $\rho \sin \psi$ 保持不变。而且，如果当 q 沿着曲线 g' (任意一段都不是 S 的平行线) 移动时，如果 $\rho \sin \psi$ 保持不变，则 g' 是测地线。

该定理是克莱罗 1733 年研究旋转曲面时得到的。

4.3 开普勒第二定律

在相等的时间内扫过相等的面积，是所有中心力场的普遍性质。牛顿能够使用几何方法分析动力学问题，关键正是将时间几何化，面积就是时钟。开普勒第一定律指出：行星的轨道是一个椭圆，这与力随距离线性变化有关。

牛顿对开普勒第二定律给出了一个几何证明。

5 曲面的外在曲率

主曲率 (principal curvature) :

$$H = \bar{\kappa} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}. \quad (13)$$

极小曲面 (minimal surface) 在每一个点都满足 $H = 0$, 因此极小曲面一定是鞍型或者平坦的。

设曲面上有一点 p , 其法向量为 \mathbf{n}_p . 球面映射，也叫高斯映射 (Gauss map) 是选取曲面上包含点 p 的面积为 δA 的一小片， $n : S \mapsto \mathbb{S}^2$. 在 \mathbb{S}^2 的面积我们记作 $\delta \tilde{A}$.

曲面的外在曲率被定义成球面映射下的局部面积的放大系数:

$$\mathcal{K}_{\text{ext}} \asymp \frac{\delta \tilde{\mathcal{A}}}{\delta \mathcal{A}} = \kappa_1 \kappa_2.$$

6 高斯的绝妙定理

高斯绝妙定理告诉我们: 虽然 $\mathcal{K}_{\text{ext}} = \kappa_1 \kappa_2$ 是通过外蕴的 $\kappa_{1,2}$ 定义的 ($\kappa_{1,2}$ 依赖于曲面如何嵌入三维空间), 当时 \mathcal{K}_{ext} 却是内蕴的, 在 \mathcal{S} 的等距变换下保持不变。用外在方式定义的曲率 \mathcal{K}_{ext} 与通过内蕴角盈定义的高斯曲率是相等的, 即 $\mathcal{K}_{\text{ext}} = \mathcal{K}$. 注意: 绝命定理的逆命题不成立, 即具有相等曲率的曲面不一定是等距同构的。

例子: 将一张白纸卷成圆筒, 这是一个等距变换。

7 尖刺曲率

7.1 圆锥曲率

广义球面映射: 想象将一个平面附着在圆锥顶端, 并且有一个单位法向量 \mathbf{n} . 这个平面可以朝任意方向晃动, 直到它碰到圆锥的侧面, 当平面走过所有可能的位置时, 单位法向量 \mathbf{n} 扫过了一个球冠, 其面积为 $2\pi(1 - \sin \alpha)$, 其中 α 是圆锥到对称轴的内角。这个球冠的面积就被定义为尖刺曲率 (conical curvature) $\mathcal{K}_{\text{spike}}$.

在 $\alpha = \pi/2$ 时, 圆锥退化成平面, $\mathcal{K}_{\text{spike}} = 0$.

另外我们还可以将单位圆锥剪开, 展开成一个单位半径的扇形, 记展开后的缺口角度为 β . 这个扇型的周长为 $2\pi \sin \alpha = 2\pi - \beta$, 因此 $\beta = 2\pi(1 - \sin \alpha)$. 因此, 尖刺曲率也可以定义为扇形的缺口角度 β .

7.2 多面角曲率

类似地, 我们可以定义多面角的内在和外在曲率。 \mathcal{K}_{int} 被定义为尖刺展开后的分割角 β . \mathcal{K}_{ext} 被定义为 \mathbb{S}^2 上连接多面角各个面的单位法向量所形成的 m 边形的面积。

多面体的绝妙定理: $\mathcal{K}_{\text{int}} = \mathcal{K}_{\text{ext}}$.

8 形状算子

在曲面 p 点处的形状算符 (shape operator, 亦称 Weingarten 映射) 告诉我们的是从 p 点出发沿着任意切向量 \mathbf{v} 移动时, 法向量 \mathbf{n} 的变化率:

$$S(\mathbf{v}) \equiv -\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{n}.$$

S 也可以被看成一个从切空间 T_p 到自身的线性映射, 是在切空间内作用于曲面的一个线性算子, 描述的是如何把一个切向量变换到另一个切向量的具体信息。主方向 (principal direction) 上的单位向量是形状算子的本征向量, 主曲率是对应的本征值, 即 $S(\mathbf{e}_i) = \kappa_i \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2$. 在此坐标系下, 形状算子的矩阵表示为 $\text{diag}(\kappa_1, \kappa_2)$. 从而, \mathcal{K}_{ext} 是形状算子的面积扩张系数, 即 $\det(S) = \kappa_1 \kappa_2$.

8.1 补充: 奇异值分解的几何学

奇异值分解 (singular value decomposition, SVD) : 平面上的每一个线性变换等价于两个正交方向的拉伸, 拉伸系数为 σ_1 和 σ_2 , 称之为奇异值。再接一个角度为 τ 的旋转。

$$M = R_{\varphi} \Sigma R_{-\theta}.$$

$\tau = \varphi - \theta$. 我们注意到: $M^{-1} = R_{\theta} \Sigma^{-1} R_{-\varphi}$ 以及 $M^T = R_{-\theta} \Sigma R_{\varphi}$. 说明 M^T 和 M^{-1} 类似, 是做一个反向的扭转, 再像 M 一样沿着两个正交方向做拉伸。

如果 $M^T = M$, 则 $M = R_\theta \Sigma R_{-\theta}$. 这时候 M 的两个正交本征向量正好是奇异值分解中的两个拉伸方向, M 被称为自伴算子 (self-adjoint operator). 这时候奇异值分解即为谱分解, 这个结果也被称为谱定理, M 的本征值一定为实数。自伴算符有重要性质: 对于线性空间的任意向量 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} , 都有

$$\langle M\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, M\mathbf{v} \rangle.$$

在实空间里, $\langle M\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (M\mathbf{u})^T \mathbf{v} = \mathbf{u}^T M^T \mathbf{v} = \mathbf{u}^T (M\mathbf{v}) \equiv \langle \mathbf{u}, M\mathbf{v} \rangle$. 这也被在代数层面被用作自伴算子的定义。

8.2 形状算子的矩阵表示和几何意义

形状算子是一个自伴算子, 因此其奇异值分解即为谱分解。假设任意的正交坐标系 $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$, 其与主方向 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 的夹角为 θ . 则形状算子的矩阵表示为 $[S] = R_{-\theta} \cdot \text{diag}(\kappa_1, \kappa_2) \cdot R_\theta$, 即

$$\begin{aligned} [S] &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta & (\kappa_1 - \kappa_2) \sin \theta \cos \theta \\ (\kappa_1 - \kappa_2) \sin \theta \cos \theta & \kappa_1 \sin^2 \theta + \kappa_2 \cos^2 \theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

根据欧拉曲率公式, 我们看到形状算子的对角线元素正好是 $\kappa(\mathbf{E}_1)$ 和 $\kappa(\mathbf{E}_2)$. 从而,

$$[S] = \begin{bmatrix} \kappa(\mathbf{E}_1) & \frac{\Delta\kappa}{2} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta\kappa}{2} \sin 2\theta & \kappa(\mathbf{E}_2) \end{bmatrix}.$$

实际上, 形状算子的意义还有:

任意切方向的单位向量 $\hat{\mathbf{E}}$ 的法截痕曲率都可以表示为 $\kappa(\mathbf{E}) = \langle \hat{\mathbf{E}}, S(\hat{\mathbf{E}}) \rangle$.

根据线性代数的知识,

$$[S] = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{E}_1, S(\mathbf{E}_1) \rangle & \langle \mathbf{E}_1, S(\mathbf{E}_2) \rangle \\ \langle \mathbf{E}_2, S(\mathbf{E}_1) \rangle & \langle \mathbf{E}_2, S(\mathbf{E}_2) \rangle \end{bmatrix}. \quad (14)$$

以 $[S]$ 的第一列为例, 其几何意义: $\langle \mathbf{E}_1, S(\mathbf{E}_1) \rangle$ 表示的是 \mathbf{E}_1 方向的法平面 Π_1 内部法向量 \mathbf{n} 旋转的快慢; $\langle \mathbf{E}_2, S(\mathbf{E}_1) \rangle$ 表示 \mathbf{n} 在垂直于法平面的方向旋转的快慢。当选定主方向时, \mathbf{n} 只会在法平面内运动, 因此形状算子的矩阵表示为对角矩阵。

8.3 曲面一般参数化后的形状算子

以曲面上的某一点为原点建立坐标系, 一般选取切平面为 x - y 平面, z 轴方向为法向量, 则曲面可以被 $z = f(u, v)$ 参数化。在三维空间中的表示就是 $\mathbf{r} = (x, y, z = f)$. 则切向量为 $\mathbf{r}_u = (x_u, y_u, f_u)$, $\mathbf{r}_v = (x_v, y_v, f_v)$. 我们可以取归一化之后的切向量来作为基向量:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + f_u^2}}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{r}_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + f_v^2}}.$$

注意 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ 一般来说不是正交的。 S 在该坐标系下的表示为

$$S(\mathbf{u}_j) \equiv -\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^j} = \sum_i S_j^i \mathbf{u}_i,$$

u^j 是曲面的第 j 个参数, 在这里即 $u^1 = u, u^2 = v$. S_j^i 是具体的矩阵元。上式两边再同时点乘 \mathbf{u}_k , 即可得到第二基本形式的矩阵元:

$$\langle S(\mathbf{u}_j), \mathbf{u}_k \rangle = \sum_i S_j^i \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k \rangle = \sum_i S_j^i g_{ik}.$$

即 $II = S \cdot G$, 从而

$$S = II \cdot G^{-1}.$$

如果是正交坐标系, $G = \mathbb{1}$, 则 $S = II$ 回到公式 14.