第三幕曲率

Wayne Zheng

2025 年 9 月 18 日

目录

1 平面曲线的曲率

不存在一维的内蕴曲率概念。几何与物理的联系：如果一个单位质量的滚珠在一段无摩擦的曲线上以单位速率运动，金属丝就会有一个垂直于切向的作用力作用在滚珠上，牛顿知道，这个力 F 的大小就是曲线的曲率 κ.

曲率最早由牛顿引入，描述曲线的"弯曲性"。更确切地说，曲率是切线关于弧长的转向率。如果 φ 是切线的变化角，则 $\kappa = d\varphi/ds$. 设 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{N}$ 是曲线的单位切向量和指向曲率中心的单位法向量，则我们容易得到 $\delta\mathbf{T} \asymp \mathbf{N}\delta\varphi$，从而

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}. \tag{1}$$

2 三维空间的曲线

密切平面：在三维空间中扭曲的曲线，每个无限小的部分仍可以认为是在一个平面内的，这个平面称为密切平面（osculating plane）。密切平面由两个（单位）向量切向量 $\mathbf{T}$ 和主法向量 $\mathbf{N}$ 张成，密切平面的法向量称为副法向量 $\mathbf{B}$. $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ 组成了弗勒内（Frenet）框架. 设曲线是关于弧长 s 的函数，即 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. 则切向量定义为

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$