第二幕 度量

Wayne Zheng

2025 年 7 月 4 日

目录

1 曲面映射：度量

度量 (Metric)：也被称为*第一基本形式*（first fundamental form），表示两个临近点之间的无穷小距离的参数化规则。参数化的规则选取可以有很多种，因此每个曲面原则上可以写下无穷多种度量。度量决定了曲面的内蕴几何，这是高斯最早对微分几何的基本见解。

例如，平面可以有无穷多种度量，直角坐标系中 $d\hat{s}^2 = dx^2 + dy^2$，极坐标中是 $d\hat{s}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$. 其对应的*度量张量*（metric tensor）分别为：

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

下面我们看球面的例子。我们先考虑球坐标系 (ϕ, θ), 其中 $\phi \in [0, \pi]$ 是极角，表示纬度的取值范围；$\theta \in [0, 2\pi)$ 是方位角，表示经度的取值范围。我们先来看几何直观。

图 1: 球坐标系下的度量。

由图 1可知，球面上无穷小两点之间的距离可以表示为 $d\hat{s}^2 = (Rd\phi)^2 + (R\sin\phi d\theta)^2$.

然后，让我们严格地详细计算这个度量。球面上的一点 (x, y, z) 可以用球坐标参数化，即

$$(x(\phi,\theta), y(\phi,\theta), z(\phi,\theta)) = (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi).$$

进一步地，球面上任意一条曲线可以用一个参数参数化，即 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\phi(t), \theta(t))$. 其切向量为：$\mathbf{r}'(t) = \partial_\phi \mathbf{r}\dot{\phi} + \partial_\theta \mathbf{r}\dot{\theta}$. 其中两个极坐标参数的切向量为：

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\phi &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (R\cos\phi\cos\theta, R\cos\phi\sin\theta, -R\sin\phi), \\ \mathbf{r}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-R\sin\phi\sin\theta, R\sin\phi\cos\theta, 0). \end{aligned} \tag{2}$$

球面度量为

$$\begin{aligned}
d\hat{s}^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\
&= (\partial_\phi x d\phi + \partial_\theta x d\theta)^2 + (\partial_\phi y d\phi + \partial_\theta y d\theta)^2 + (\partial_\phi z d\phi + \partial_\theta z d\theta)^2 \\
&= \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\phi d\phi^2 + \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\theta d\theta^2 + \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\theta d\phi d\theta + \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\phi d\theta d\phi.
\end{aligned}$$

则其度量张量为

$$g = \begin{pmatrix} g_{\phi\phi} & g_{\phi\theta} \\ g_{\theta\phi} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\phi & \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\theta \\ \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\phi & \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \phi \end{pmatrix}. \tag{3}$$

最终，球面用 (ϕ, θ) 写下的度量为 $d\hat{s}^2 = R^2 \left(d\phi^2 + \sin^2 \phi d\theta^2\right)$，与几何直观方法得到的一致。

类似地，我们计算中心投影的度量（习题 3）。首先是用切平面上的参数 (r, θ) 来参数化球面上的点：

$$\begin{aligned}
\mathbf{l} = (x, y, z) &= (R \sin\phi \cos\theta, R \sin\phi \sin\theta, R \cos\phi) \\
&= \left(\frac{Rr\cos\theta}{\sqrt{R^2 + r^2}}, \frac{Rr\sin\theta}{\sqrt{R^2 + r^2}}, \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + r^2}}\right).
\end{aligned}$$

相应地，可以计算切向量 $\mathbf{l}_r = \partial_r \mathbf{l}, \mathbf{l}_\theta = \partial_\theta \mathbf{l}$. 度量张量为

$$g = \begin{pmatrix} g_{r\phi} & g_{r\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_r \cdot \mathbf{l}_r & \mathbf{l}_r \cdot \mathbf{l}_\theta \\ \mathbf{l}_\theta \cdot \mathbf{l}_r & \mathbf{l}_\theta \cdot \mathbf{l}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R^4}{(R^2+r^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{R^2 r^2}{R^2+r^2} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

则其度量为

$$d\hat{s}^2 = \frac{R^4}{\left(R^2 + r^2\right)^2} dr^2 + \frac{R^2 r^2}{R^2 + r^2} d\theta^2 = \frac{1}{1 + (r/R)^2} \left[\frac{dr^2}{1 + (r/R)^2} + r^2 d\theta^2\right], \tag{5}$$

与几何直观方法得到的一致。

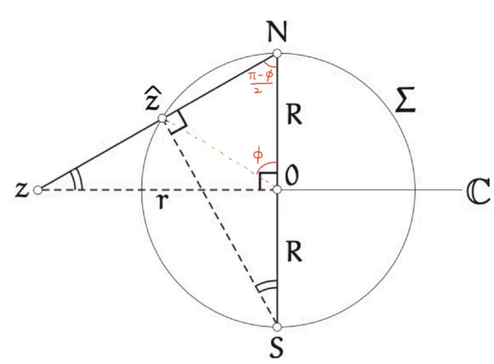

图 2: 球极投影的侧剖图。

我们再来计算球极投影的度量。如图 2所示，我们有：

$$\sin\left(\frac{\pi - \phi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}}, \quad \cos\left(\frac{\pi - \phi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2}}.$$

球极投影的参数化为

$$\begin{aligned}
\mathbf{l} = (x, y, z) &= (R \sin\phi \cos\theta, R \sin\phi \sin\theta, R \cos\phi) \\
&= \left[\frac{2R^2 r \cos\theta}{R^2 + r^2}, \frac{2R^2 r \sin\theta}{R^2 + r^2}, \frac{R(r^2 - R^2)}{R^2 + r^2}\right].
\end{aligned}$$

相应地，可以计算切向量 $\mathbf{l}_r = \partial_r \mathbf{l}, \mathbf{l}_\theta = \partial_\theta \mathbf{l}$. 度量张量为

$$g = \begin{pmatrix} g_{r\phi} & g_{r\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_r \cdot \mathbf{l}_r & \mathbf{l}_r \cdot \mathbf{l}_\theta \\ \mathbf{l}_\theta \cdot \mathbf{l}_r & \mathbf{l}_\theta \cdot \mathbf{l}_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4R^4 r^2}{(R^2+r^2)^2} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

则其度量为 $d\hat{s}^2 = \frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}(dr^2 + r^2 d\theta^2)$. 即 $d\hat{s} = \frac{2R^2}{R^2+r^2} ds$, 是一个共形变换，与几何直观方法得到的一致。

设平面的方程为：

$$Ax + By + Cz = D.$$

设 $P = (x_0, y_0, z_0)$ 与 $Q = (x_1, y_1, z_1)$ 是平面上的两点，$\mathbf{v} \equiv (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. 则显然 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 正交，即 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. $\mathbf{n}$ 是平面的法向量。另设 $P' = (x_0', y_0', z_0')$ 是平面外的任意一点，则 P' 到平面的距离的向量即为投影到法向量方向：$\mathbf{d} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\left(\overrightarrow{P'P}\right) = |\overrightarrow{P'P}| \cos\alpha \hat{\mathbf{n}}$. 距离为

$$d = \overrightarrow{P'P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{|Ax_0' + By_0' + Cz_0' - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2 伪球面和双曲平面

贝尔特拉米（Beltrami）是意大利数学家，对双曲几何有重要贡献。他也发现了拉格朗日力学中的贝尔特拉米等式。他也知道局部的高斯-博内定理。

2.1 利用变分原理证明广义斯涅尔定律

贝尔特拉米等式。考虑作用量

$$S = \int L(u, u', x) dx$$

使函数 $u(x)$ 取到极值。这里 x 是描述系统演化的独立参数（类比于时间 t），u 可以看作是广义坐标。可以定义广义动量 $p = \partial L / \partial u'$. 此时变分原理导出的拉格朗日方程简化为

$$\frac{dp}{dx} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0.$$

哈密顿量 $H = u'p - L$. 利用拉格朗日方程，则可以得到贝尔特拉米等式：

$$\frac{dH}{dx} = \left(pu'' + \frac{dp}{dx}u'\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial u}u' + \frac{\partial L}{\partial u\prime}u'' + \frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial L}{\partial x}.$$

这是诺特定理的一个特例。

考虑光在介质中的传播，坐标是 (x, y)，路径可以表示成曲线 $y = y(x)$. 不妨进一步假设折射率只是纵坐标的函数 $n = n(y)$. 则光从 A 到 B 的作用量是累积用时的积分

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{ds}{v} = \int \frac{1}{v(y)} \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_{x_A}^{x_B} n(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \equiv \int_{x_A}^{x_B} L dx, \end{aligned} \tag{7}$$

其中拉氏量 $L = n(y)\sqrt{1 + y'^2}$. 根据费马变分原理，光线沿着作用量 S 取极值（最小值）的路径。哈密顿量

$$H = y'p - L = -\frac{n(y)}{\sqrt{1 + y'^2}}. \tag{8}$$

根据贝尔特拉米等式，易得 $dH/dx=0$, 即 $H=-k$ 是一个常数，也就意味着系统沿着 x 方向具有连续的平移不变性，从而对应有一个守恒量，这个守恒量

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1+y'^2}}=n(y)\frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=n(y)\sin\theta=k \tag{9}$$

给出了连续介质的斯涅尔定律，θ 是光线与入射平面的法线的夹角。这与几何方法得到的斯涅尔定律一致。

2.2 广义斯涅尔定律的应用

下面讨论两个例子。

在贝尔特拉米-庞加莱半平面 (x,y) 中，$y>0$, 光速 $v(y)=y$, 根据广义斯涅尔定律

$$\frac{\sin\theta}{y}=\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}}=k.$$

原则上需要求解这个关于 y 的常微分方程：$y^2(1+y'^2)-1/k^2=0$，但实际上我们知道 $x^2+y^2=1/k^2\equiv r^2$. 也容易验证 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 满足此微分方程。

（习题 15）如果光在平面 (x,y) 中传播，光速 $v(y)=1/\sqrt{1-y}$，则根据广义斯涅尔定律，

$$\frac{\sin\theta}{v(y)}=\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y'^2}}=k.$$

求解这个关于 y 的常微分方程：$k^2y'^2+y+k^2-1=0$, 得到的一般解是

$$y(x)=-\frac{1}{4k^2}\left(x-kC\right)^2-k^2+1,$$

其中 C 是任意常数。这是一条开口向下的抛物线，顶点在 $(kC,1-k^2)$ 处。

3 等距映射和复数

等距映射（isometric map）是曲面上保持第一基本形式不变的映射。包括正向（direct）等距映射和反向（opposite）等距映射。给定一个曲面 $\mathcal{S}$，上面的所有等距变换构成一个群，记作 $\mathcal{G}$. 所有正向等距变换构成一个子群，记作 $\mathcal{G}_+(\mathcal{S})$. 在欧几里德几何中，其正向等距变换是

$$E(z)=e^{\mathrm{i}\theta}z+k.$$

莫比乌斯变换（Möbius transformation）：$z\mapsto M(z)=\frac{az+b}{cz+d}$. 其中最重要的复反演 $z\mapsto 1/z$ 可以被看作是几何反演与复共轭的结合，几何上是黎曼球面绕实轴旋转 π.

（习题 24）考虑 z^m 的伸缩扭转从而证明：$(z^m)'=mz^{m-1}$.

令 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $\tilde{z}\equiv f(z)=z^m=r^me^{\mathrm{i}m\theta}$. 根据定义，$\delta\tilde{z}\equiv f'(z)\delta z\equiv ae^{\mathrm{i}\tau}\delta z$, 其中 a 是伸缩缝因子，τ 是扭转角。

我们首先考虑沿着 r 方向的小变化 $\delta z=\delta re^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $\tilde{z}\to(r+\delta r)^me^{m\mathrm{i}\theta}$. $(r+\delta r)^m\simeq r^m+mr^{m-1}\delta r$, 从而

$$\delta\tilde{z}=mr^{m-1}\delta re^{\mathrm{i}m\theta}=mr^{m-1}e^{\mathrm{i}(m-1)\theta}\left(\delta re^{\mathrm{i}\theta}\right),$$

从而可以得到伸缩和扭转因子分别为 $a=mr^{m-1},\tau=(m-1)\theta$. 所以 $f'(z)=ae^{\mathrm{i}\tau}=mr^{m-1}e^{\mathrm{i}(m-1)\theta}=mz^{m-1}$.

再让我们考虑沿着弧线方向的小变化，此时原弧长是 $\delta l=r\delta\theta$, $\delta z=\delta le^{\mathrm{i}(\theta+\pi/2)}$. 像弧长变化为 $r^m(m\delta)=mr^{m-1}(r\delta\theta)=mr^{m-1}\delta l$, 因此

$$\delta\tilde{z}=mr^{m-1}\delta le^{\mathrm{i}(m\theta+\pi/2)}=mr^{m-1}e^{\mathrm{i}(m-1)\theta}\left[\delta le^{\mathrm{i}(\theta+\pi/2)}\right].$$

从而可以得到伸缩和扭转因子分别为 $a=mr^{m-1},\tau=(m-1)\theta$, 与前一致。这也再次说明

$f'(z)$ 不依赖于 δz 的角度，是解析共形的。

（习题 27）让我们进一步考虑黎曼球面上的旋转，我们已知黎曼球面上的一点 (X, Y, Z) 到赤道复平面的球极投影公示是：

$$(X, Y, Z) \to \left[\frac{2\Re(z)}{|z|^2+1}, \frac{2\Im(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right].$$

如果绕着 X 轴旋转 θ，则对应着在 YZ 平面内旋转 θ, 其旋转矩阵为

$$R_X(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

因此旋转后的点为 (X', Y', Z'). 对应复平面上的点

$$z = \frac{X + \mathtt{i}Y}{1-Z} \to \frac{X' + \mathtt{i}Y'}{1-Z'} = \frac{X + \mathtt{i}\,(Y\cos\theta - Z\sin\theta)}{1-(Z\cos\theta + Y\sin\theta)}.$$

If $\theta = \pi/2$, 则 $Y' = -Z$, $Z' = Y$.