第 4 章 曲面映射：度量

Wayne Zheng

2025 年 5 月 21 日

1 度量

度量 (Metric)：也被称为第一基本形式（first fundamental form），表示两个临近点之间的无穷小距离的参数化规则。参数化的规则选取可以有很多种，因此每个曲面原则上可以写下无穷多种度量。度量决定了曲面的内蕴几何，这是高斯最早对微分几何的基本见解。

例如，平面可以有无穷多种度量，直角坐标系中 $d\hat{s}^2 = dx^2 + dy^2$，极坐标中是 $d\hat{s}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$. 其对应的度量张量（metric tensor）分别为：

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

2 球面度量

下面我们看球面的例子。我们先考虑球坐标系 (ϕ, θ), 其中 $\phi \in [0, \pi]$ 是极角，表示纬度的取值范围；$\theta \in [0, 2\pi)$ 是方位角，表示经度的取值范围。我们先来看几何直观。

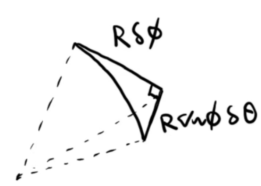

图 1: 球坐标系下的度量。

由图 1可知，球面上无穷小两点之间的距离可以表示为 $d\hat{s}^2 = (Rd\phi)^2 + (R\sin\phi d\theta)^2$.

然后，让我们严格地详细计算这个度量。球面上的一点 (x, y, z) 可以用球坐标参数化，即

$$(x(\phi,\theta), y(\phi,\theta), z(\phi,\theta)) = (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi).$$

进一步地，球面上任意一条曲线可以用一个参数参数化，即 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\phi(t), \theta(t))$. 其切向量为：$\mathbf{r}'(t) = \partial_\phi \mathbf{r}\dot{\phi} + \partial_\theta \mathbf{r}\dot{\theta}$. 其中两个极坐标参数的切向量为：

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\phi &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (R\cos\phi\cos\theta, R\cos\phi\sin\theta, -R\sin\phi), \\ \mathbf{r}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-R\sin\phi\sin\theta, R\sin\phi\cos\theta, 0). \end{aligned} \tag{2}$$

球面度量为

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= (\partial_\phi x d\phi + \partial_\theta x d\theta)^2 + (\partial_\phi y d\phi + \partial_\theta y d\theta)^2 + (\partial_\phi z d\phi + \partial_\theta z d\theta)^2 \\ &= \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\phi d\phi^2 + \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\theta d\theta^2 + \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\theta d\phi d\theta + \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\phi d\theta d\phi. \end{aligned}$$

则其度量张量为

$$g = \begin{pmatrix} g_{\phi\phi} & g_{\phi\theta} \\ g_{\theta\phi} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\phi & \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\theta \\ \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\phi & \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\phi \end{pmatrix}. \tag{3}$$

最终，球面用 (ϕ, θ) 写下的度量为 $d\hat{s}^2 = R^2 \left(d\phi^2 + \sin^2\phi d\theta^2\right)$，与几何直观方法得到的一致。

类似地，我们计算中心投影的度量（习题 3）。首先是用切平面上的参数 (r, θ) 来参数化球面上的点：

$$\begin{aligned} \mathbf{l} = (x, y, z) &= (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi) \\ &= \left(\frac{Rr\cos\theta}{\sqrt{R^2+r^2}}, \frac{Rr\sin\theta}{\sqrt{R^2+r^2}}, \frac{R^2}{\sqrt{R^2+r^2}}\right). \end{aligned}$$

相应地，可以计算切向量 $\mathbf{l}_r = \partial_r \mathbf{l}, \mathbf{l}_\theta = \partial_\theta \mathbf{l}$. 度量张量为

$$g = \begin{pmatrix} g_{r\phi} & g_{r\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_r \cdot \mathbf{l}_r & \mathbf{l}_r \cdot \mathbf{l}_\theta \\ \mathbf{l}_\theta \cdot \mathbf{l}_r & \mathbf{l}_\theta \cdot \mathbf{l}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R^4}{(R^2+r^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{R^2 r^2}{R^2+r^2} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

则其度量为

$$d\hat{s}^2 = \frac{R^4}{\left(R^2+r^2\right)^2} dr^2 + \frac{R^2 r^2}{R^2+r^2} d\theta^2 = \frac{1}{1+(r/R)^2}\left[\frac{dr^2}{1+(r/R)^2} + r^2 d\theta^2\right], \tag{5}$$

与几何直观方法得到的一致。

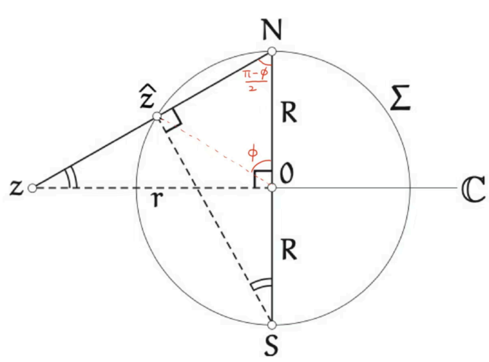

图 2: 球极投影的侧剖图。

我们再来计算球极投影的度量。如图 2所示，我们有：

$$\sin\left(\frac{\pi-\phi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{r}{\sqrt{R^2+r^2}}, \quad \cos\left(\frac{\pi-\phi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{R}{\sqrt{R^2+r^2}}.$$

球极投影的参数化为

$$\begin{aligned} \mathbf{l} = (x, y, z) &= (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi) \\ &= \left[\frac{2R^2 r\cos\theta}{R^2+r^2}, \frac{2R^2 r\sin\theta}{R^2+r^2}, \frac{R(r^2-R^2)}{R^2+r^2}\right]. \end{aligned}$$

相应地，可以计算切向量 $\mathbf{l}_r = \partial_r \mathbf{l}, \mathbf{l}_\theta = \partial_\theta \mathbf{l}$. 度量张量为

$$g = \begin{pmatrix} g_{r\phi} & g_{r\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_r \cdot \mathbf{l}_r & \mathbf{l}_r \cdot \mathbf{l}_\theta \\ \mathbf{l}_\theta \cdot \mathbf{l}_r & \mathbf{l}_\theta \cdot \mathbf{l}_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4R^4 r^2}{(R^2+r^2)^2} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

则其度量为 $d\hat{s}^2 = \frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2}\left(dr^2 + r^2 d\theta^2\right)$. 即 $d\hat{s} = \frac{2R^2}{R^2+r^2} ds$, 是一个共形变换，与几何直观方法得到的一致。

3 球极投影的保圆性

设平面的方程为:

$$Ax + By + Cz = D.$$

设 $P = (x_0, y_0, z_0)$ 与 $Q = (x_1, y_1, z_1)$ 是平面上的两点, $\mathbf{v} \equiv (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. 则显然 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 正交, 即 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. $\mathbf{n}$ 是平面的法向量。另设 $P' = (x_0', y_0', z_0')$ 是平面外的任意一点, 则 P' 到平面的距离的向量即为投影到法向量方向: $\mathbf{d} = \mathrm{Proj}_{\mathbf{n}}\left(\overrightarrow{P'P}\right) = |\overrightarrow{P'P}| \cos\alpha \hat{\mathbf{n}}$. 距离为

$$d = \overrightarrow{P'P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{|Ax_0' + By_0' + Cz_0' - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$