第三幕 曲率

Wayne Zheng

2025 年 10 月 7 日

目录

1 平面曲线的曲率

不存在一维的内蕴曲率概念。几何与物理的联系：如果一个单位质量的滚珠在一段无摩擦的曲线上以单位速率运动，金属丝就会有一个垂直于切向的作用力作用在滚珠上，牛顿知道，这个力 F 的大小就是曲线的曲率 κ.

曲率最早由牛顿引入，描述曲线的"弯曲性"。更确切地说，曲率是切线关于弧长的转向率。如果 φ 是切线的变化角，则 $\kappa = d\varphi/ds$. 设 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{N}$ 是曲线的单位切向量和指向曲率中心的单位法向量，则我们容易得到 $\delta\mathbf{T} \asymp \mathbf{N}\delta\varphi$，从而

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \equiv \mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N}. \tag{1}$$

也可以用法向量取代切向量，考虑法向量的转向率

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} \equiv \mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T}. \tag{2}$$

因为如果将考虑对象从曲线变成曲面，就不存在唯一的切向量了。换句话说，在平面内，切向量和法向量的转向速率都是曲率 κ, 其变化率的方向是相反的，平行于另一个向量。

一般地，牛顿发现质点在二维平面的运动曲线 $[x(t), y(t)]$ 的曲率公式

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x} + \dot{y}^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

上方的点是关于时间的导数。对于单位速率运动的质点，$|\mathbf{v}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$. 如果质点在 δt 时刻内走过了 $\delta\varphi$，此时 $\delta t = \delta s$. 则 $\dot{y}$ 方向的增量为 $\delta\dot{y} \asymp \ddot{y}\delta t = \ddot{y}\delta s$. 根据相似三角形，

$$\frac{\delta\varphi}{\ddot{y}\delta s} \asymp \frac{1}{\dot{x}}.$$

即

$$\kappa \equiv \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\ddot{y}}{\dot{x}}. \tag{4}$$

利用三角形另一边的相似性质，容易得此时曲率的另一个表达式 $\kappa = -\ddot{x}/\dot{y}$.

2 三维空间的曲线

密切平面：在三维空间中扭曲的曲线，每个无限小的部分仍可以认为是在一个平面内的，这个平面称为*密切平面*（osculating plane）。密切平面可以看作是曲线在瞬时最贴合的平面。密切平面由两个（单位）向量切向量 $\mathbf{T}$ 和主法向量 $\mathbf{N}$ 张成。考虑沿着该曲线的质点运动，切向量 $\mathbf{T}$ 描述的是曲线的瞬时*速度*方向，主法向量 $\mathbf{N}$ 描述的是曲线的瞬时*加速度*方向，指向曲率中心。密切平面的法向量称为副法向量 $\mathbf{B}$. $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ 组成了*弗勒内*（Frenet）框架。

设曲线是关于弧长 s 的函数，即 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. 则切向量定义为

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

密切平面的旋转速率称为*挠率*（torsion）τ, 也就是副法线绕 $\mathbf{T}$ 的旋转速率，即

$$\mathbf{B}' = -\tau\mathbf{N}. \tag{5}$$

在三维空间中，主法线向量 $\mathbf{N}$ 不仅在密切平面内旋转，还要沿着 $\mathbf{B}$ 方向，绕着切向量 $\mathbf{T}$ 旋转，因此综合起来，主法线的变化率为

$$\mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}. \tag{6}$$

因此，三维空间中曲线的*弗勒内-塞雷方程*（Frenet-Serret formulas）总结如下：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

3 曲面的主曲率

选取 p 点作为原点，法线方向为 z 轴，切平面为 x-y 平面，建立直角坐标系。可以用 $z = f(x, y)$ 来表示曲面，在原点处 $f(0, 0) = 0, \partial_x f = \partial_y f = 0$. 当 $x, y \to 0$ 时，我们可以展开 $z \asymp ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey$. 因为在原点 $\partial_x f = \partial_y f = 0$, 所以 $\partial_x f = 2ax + cy + d \to 0$. 因此 $d = e = 0$. 我们可以用*非常靠近*且平行于切面面的一个平面 $z = k$ 来切开曲面，得到的截面曲线在原点附近可以表示为

$$z \asymp ax^2 + by^2 + cxy \tag{8}$$

是一个二次齐次曲线。圆锥曲线都有两个相互垂直的对称轴，如果我们选取这两个轴作为 x 轴和 y 轴，则可以消去交叉项，因为在反射变换下 $x \to -x, y \to y$, $f(x, y)$ 保持不变。因此，我们可以将截面曲线表示为

$$z \asymp ax^2 + by^2. \tag{9}$$

根据二维空间中的曲线，我们知道分别沿着 x 轴和 y 轴的曲线可以表示为 $z \asymp \frac{1}{2}\kappa_1 x^2$ 和 $z \asymp \frac{1}{2}\kappa_2 y^2$，其中我们定义了 $\kappa_1 = \kappa(0), \kappa_2 = \kappa(\pi/2)$. 因此，

$$z \asymp \frac{1}{2}\kappa_1 x^2 + \frac{1}{2}\kappa_2 y^2. \tag{10}$$

如果考虑任意角度的截面曲线，设该截面与 x 轴的夹角为 θ，如果在切平面内沿着 θ 方向移动一小段距离 ϵ，则 $x = \epsilon\cos\theta, y = \epsilon\sin\theta$, 则

$$\kappa(\theta) \asymp 2\left(\frac{z}{\epsilon^2}\right) \asymp 2\left[\frac{\frac{1}{2}\kappa_1(\epsilon\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}\kappa_2(\epsilon\sin\theta)^2}{\epsilon^2}\right] = \kappa_1\cos^2\theta + \kappa_2\sin^2\theta. \tag{11}$$

这就是*欧拉曲率公式*。

4 测地线和测地曲率

三维空间中，一般曲面内的一般曲线的曲率可以分为两个分量：在曲面内（对其中的居民可见）的称为*测地曲率*（geodesic curvature）κ_g, 在曲面外（对其中的居民不可见）的称为*法曲率*（normal curvature）κ_n. 如果密切平面垂直于曲面（的法向量），那么所有曲率都是法曲率 $\kappa = \kappa_n$，$\kappa_g = 0$. 地球表面的大圆就是这样。

如果质点以单位速率走过一条曲线，其加速度向量的方向指向曲率中心，长度就是曲率，因此可以将质点的加速度称为*曲率向量*（curvature vector）$\boldsymbol{\kappa} = \kappa\mathbf{N}$.

设 $\mathbf{T}$ 是曲线 $\mathcal{C}$ 在点 p 处的单位切向量，$\mathbf{n}$ 是法向量。T_p 是曲面在点 p 处的切平面，$\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{T}$ 张成法平面 Π_T. Π_T 与密切平面（副法向量 $\mathbf{B}$）的夹角为 γ, 则*测地曲率向量* $\boldsymbol{\kappa}_g$ 和*法曲率向量* $\boldsymbol{\kappa}_n$ 实际上就是 $\boldsymbol{\kappa}$ 在 T_p 和 Π_T 上的投影分量，即

$$\kappa_g = \kappa\cos\gamma, \quad \kappa_n = \kappa\sin\gamma. \tag{12}$$

默尼耶（Jean Baptiste Meusnier）在 1776 年就注意到：曲面迫使其上面的所有曲线沿着法方向弯曲同等的量。