

第二幕 度量

Wayne Zheng

2025 年 6 月 7 日

目录

1 曲面映射：度量	i
2 伪球面和双曲平面	iii
2.1 利用变分原理证明广义斯涅尔定律	iii
2.2 广义斯涅尔定律的应用	iv
3 等距映射和复数	iv

1 曲面映射：度量

度量 (Metric): 也被称为第一基本形式 (first fundamental form), 表示两个临近点之间的无穷小距离的参数化规则。参数化的规则选取可以有很多种, 因此每个曲面原则上可以写下无穷多种度量。度量决定了曲面的内蕴几何, 这是高斯最早对微分几何的基本见解。

例如, 平面可以有无穷多种度量, 直角坐标系中 $d\hat{s}^2 = dx^2 + dy^2$, 极坐标中是 $d\hat{s}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$. 其对应的度量张量 (metric tensor) 分别为:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

下面我们看球面的例子。我们先考虑球坐标系 (ϕ, θ) , 其中 $\phi \in [0, \pi]$ 是极角, 表示纬度的取值范围; $\theta \in [0, 2\pi)$ 是方位角, 表示经度的取值范围。我们先来看几何直观。



图 1: 球坐标系下的度量。

由图 1 可知, 球面上无穷小两点之间的距离可以表示为 $d\hat{s}^2 = (Rd\phi)^2 + (R\sin\phi d\theta)^2$. 然后, 让我们严格地详细计算这个度量。球面上的一点 (x, y, z) 可以用球坐标参数化, 即

$$(x(\phi, \theta), y(\phi, \theta), z(\phi, \theta)) = (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi).$$

进一步地, 球面上任意一条曲线可以用一个参数参数化, 即 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\phi(t), \theta(t))$. 其切向量为: $\mathbf{r}'(t) = \partial_\phi \mathbf{r} \dot{\phi} + \partial_\theta \mathbf{r} \dot{\theta}$. 其中两个极坐标参数的切向量为:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\phi &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (R\cos\phi\cos\theta, R\cos\phi\sin\theta, -R\sin\phi), \\ \mathbf{r}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-R\sin\phi\sin\theta, R\sin\phi\cos\theta, 0). \end{aligned} \tag{2}$$

球面度量为

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= (\partial_\phi x d\phi + \partial_\theta x d\theta)^2 + (\partial_\phi y d\phi + \partial_\theta y d\theta)^2 + (\partial_\phi z d\phi + \partial_\theta z d\theta)^2 \\ &= \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\phi d\phi^2 + \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\theta d\theta^2 + \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\theta d\phi d\theta + \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\phi d\theta d\phi. \end{aligned}$$

则其度量张量为

$$g = \begin{pmatrix} g_{\phi\phi} & g_{\phi\theta} \\ g_{\theta\phi} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\phi & \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\theta \\ \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\phi & \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \phi \end{pmatrix}. \quad (3)$$

最终，球面用 (ϕ, θ) 写下的度量为 $d\hat{s}^2 = R^2 (d\phi^2 + \sin^2 \phi d\theta^2)$ ，与几何直观方法得到的一致。

类似地，我们计算中心投影的度量（习题 3）。首先是用切平面上的参数 (r, θ) 来参数化球面上的点：

$$\begin{aligned} \mathbf{l} = (x, y, z) &= (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi) \\ &= \left(\frac{Rr \cos \theta}{\sqrt{R^2 + r^2}}, \frac{Rr \sin \theta}{\sqrt{R^2 + r^2}}, \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + r^2}} \right). \end{aligned}$$

相应地，可以计算切向量 $\mathbf{l}_r = \partial_r \mathbf{l}, \mathbf{l}_\theta = \partial_\theta \mathbf{l}$ 。度量张量为

$$g = \begin{pmatrix} g_{rr} & g_{r\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_r \cdot \mathbf{l}_r & \mathbf{l}_r \cdot \mathbf{l}_\theta \\ \mathbf{l}_\theta \cdot \mathbf{l}_r & \mathbf{l}_\theta \cdot \mathbf{l}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R^4}{(R^2 + r^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{R^2 r^2}{R^2 + r^2} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

则其度量为

$$d\hat{s}^2 = \frac{R^4}{(R^2 + r^2)^2} dr^2 + \frac{R^2 r^2}{R^2 + r^2} d\theta^2 = \frac{1}{1 + (r/R)^2} \left[\frac{dr^2}{1 + (r/R)^2} + r^2 d\theta^2 \right], \quad (5)$$

与几何直观方法得到的一致。

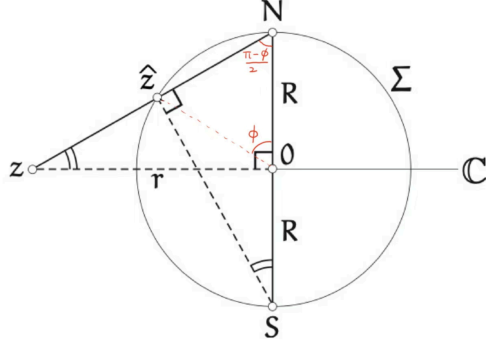


图 2: 球极投影的侧剖图。

我们再来计算球极投影的度量。如图 2 所示，我们有：

$$\sin \left(\frac{\pi - \phi}{2} \right) = \cos \left(\frac{\phi}{2} \right) = \frac{r}{\sqrt{R^2 + r^2}}, \quad \cos \left(\frac{\pi - \phi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + r^2}}.$$

球极投影的参数化为

$$\begin{aligned} \mathbf{l} = (x, y, z) &= (R \sin \phi \cos \theta, R \sin \phi \sin \theta, R \cos \phi) \\ &= \left[\frac{2R^2 r \cos \theta}{R^2 + r^2}, \frac{2R^2 r \sin \theta}{R^2 + r^2}, \frac{R(r^2 - R^2)}{R^2 + r^2} \right]. \end{aligned}$$

相应地，可以计算切向量 $\mathbf{l}_r = \partial_r \mathbf{l}, \mathbf{l}_\theta = \partial_\theta \mathbf{l}$. 度量张量为

$$g = \begin{pmatrix} g_{r\phi} & g_{r\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_r \cdot \mathbf{l}_r & \mathbf{l}_r \cdot \mathbf{l}_\theta \\ \mathbf{l}_\theta \cdot \mathbf{l}_r & \mathbf{l}_\theta \cdot \mathbf{l}_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4R^4 r^2}{(R^2+r^2)^2} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

则其度量为 $d\hat{s}^2 = \frac{4R^4}{(R^2+r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2)$. 即 $d\hat{s} = \frac{2R^2}{R^2+r^2} ds$, 是一个共形变换, 与几何直观方法得到的一致。

设平面的方程为:

$$Ax + By + Cz = D.$$

设 $P = (x_0, y_0, z_0)$ 与 $Q = (x_1, y_1, z_1)$ 是平面上的两点, $\mathbf{v} \equiv (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$. 则显然 \mathbf{v} 与 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 正交, 即 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. \mathbf{n} 是平面的法向量. 另设 $P' = (x'_0, y'_0, z'_0)$ 是平面外的任意一点, 则 P' 到平面的距离的向量即为投影到法向量方向: $\mathbf{d} = \text{Proj}_{\mathbf{n}}(\overrightarrow{P'P}) = |\overrightarrow{P'P}| \cos \alpha \hat{\mathbf{n}}$. 距离为

$$d = \overrightarrow{P'P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{|Ax'_0 + By'_0 + Cz'_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2 伪球面和双曲平面

贝尔特拉米 (Beltrami) 是意大利数学家, 对双曲几何有重要贡献. 他也发现了拉格朗日力学中的贝尔特拉米等式. 他 also 知道局部的高斯-博内定理。

2.1 利用变分原理证明广义斯涅尔定律

贝尔特拉米等式. 考虑作用量

$$S = \int L(u, u', x) dx$$

使函数 $u(x)$ 取到极值. 这里 x 是描述系统演化的独立参数 (类比于时间 t), u 可以看作是广义坐标. 可以定义广义动量 $p = \partial L / \partial u'$. 此时变分原理导出的拉格朗日方程简化为

$$\frac{dp}{dx} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0.$$

哈密顿量 $H = u'p - L$. 利用拉格朗日方程, 则可以得到贝尔特拉米等式:

$$\frac{dH}{dx} = \left(pu'' + \frac{dp}{dx} u' \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial u} u' + \frac{\partial L}{\partial u'} u'' + \frac{\partial L}{\partial x} \right) = -\frac{\partial L}{\partial x}.$$

这是诺特定理的一个特例。

考虑光在介质中的传播, 坐标是 (x, y) , 路径可以表示成曲线 $y = y(x)$. 不妨进一步假设折射率只是纵坐标的函数 $n = n(y)$. 则光从 A 到 B 的作用量是累积用时的积分

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{ds}{v} = \int \frac{1}{v(y)} \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_{x_A}^{x_B} n(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx \equiv \int_{x_A}^{x_B} L dx, \end{aligned} \quad (7)$$

其中拉氏量 $L = n(y) \sqrt{1 + y'^2}$. 根据费马变分原理, 光线沿着作用量 S 取极值 (最小值) 的路径. 哈密顿量

$$H = y'p - L = -\frac{n(y)}{\sqrt{1 + y'^2}}. \quad (8)$$

根据贝尔特拉米等式，易得 $dH/dx = 0$ ，即 $H = -k$ 是一个常数，也就意味着系统沿着 x 方向具有连续的平移不变性，从而对应有一个守恒量，这个守恒量

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1+y'^2}} = n(y) \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = n(y) \sin \theta = k \quad (9)$$

给出了连续介质的斯涅尔定律， θ 是光线与入射平面的法线的夹角。这与几何方法得到的斯涅尔定律一致。

2.2 广义斯涅尔定律的应用

下面讨论两个例子。

在贝尔特拉米-庞加莱半平面 (x, y) 中， $y > 0$ ，光速 $v(y) = y$ ，根据广义斯涅尔定律

$$\frac{\sin \theta}{y} = \frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}} = k.$$

原则上需要求解这个关于 y 的常微分方程： $y^2(1+y'^2) - 1/k^2 = 0$ ，但实际上我们知道 $x^2 + y^2 = 1/k^2 \equiv r^2$ 。也容易验证 $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ 满足此微分方程。

（习题 15）如果光在平面 (x, y) 中传播，光速 $v(y) = 1/\sqrt{1-y}$ ，则根据广义斯涅尔定律，

$$\frac{\sin \theta}{v(y)} = \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y'^2}} = k.$$

求解这个关于 y 的常微分方程： $k^2 y'^2 + y + k^2 - 1 = 0$ ，得到的一般解是

$$y(x) = -\frac{1}{4k^2} (x - kC)^2 - k^2 + 1,$$

其中 C 是任意常数。这是一条开口向下的抛物线，顶点在 $(kC, 1 - k^2)$ 处。

3 等距映射和复数

等距映射（Isometric map）是曲面上保持第一基本形式不变的映射。可以理解为无穷小的全等变换，而共形映射则是无穷小的相似变换。