

# 第三幕 曲率

Wayne Zheng

2025 年 11 月 28 日

## 目录

1 平面曲线的曲率	i
2 三维空间的曲线	ii
3 曲面的主曲率	ii
4 测地线和测地曲率	iii
4.1 两种曲率	iii
4.2 旋转曲面上的测地线	iii
4.3 开普勒第二定律	iv
5 曲面的外在曲率	iv
6 高斯的绝妙定理	v
7 尖刺曲率	v
7.1 圆锥曲率	v
7.2 多面角曲率	v

## 1 平面曲线的曲率

不存在一维的内蕴曲率概念。几何与物理的联系：如果一个单位质量的滚珠在一段无摩擦的曲线上以单位速率运动，金属丝就会有一个垂直于切向的作用力作用在滚珠上，牛顿知道，这个力  $F$  的大小就是曲线的曲率  $\kappa$ 。

曲率最早由牛顿引入，描述曲线的“弯曲性”。更确切地说，曲率是切线关于弧长的转向率。如果  $\varphi$  是切线的变化角，则  $\kappa = d\varphi/ds$ 。设  $\mathbf{T}$  和  $\mathbf{N}$  是曲线的单位切向量和指向曲率中心的单位法向量，则我们容易得到  $\delta\mathbf{T} \asymp \mathbf{N}\delta\varphi$ ，从而

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \equiv \mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N}. \tag{1}$$

也可以用法向量取代切向量，考虑法向量的转向率

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} \equiv \mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T}. \tag{2}$$

因为如果将考虑对象从曲线变成曲面，就不存在唯一的切向量了。换句话说，在平面内，切向量和法向量的转向速率都是曲率  $\kappa$ ，其变化率的方向是相反的，平行于另一个向量。

一般地，牛顿发现质点在二维平面的运动曲线  $[x(t), y(t)]$  的曲率公式

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

上方的点是关于时间的导数。对于单位速率运动的质点， $|\mathbf{v}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ 。如果质点在  $\delta t$  时刻内走过了  $\delta\varphi$ ，此时  $\delta t = \delta s$ 。则  $\dot{y}$  方向的增量为  $\delta\dot{y} \asymp \ddot{y}\delta t = \ddot{y}\delta s$ 。根据相似三角形，

$$\frac{\delta\varphi}{\ddot{y}\delta s} \asymp \frac{1}{\dot{x}}.$$

即

$$\kappa \equiv \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\ddot{y}}{\dot{x}}. \quad (4)$$

利用三角形另一边的相似性质，容易得此时曲率的另一个表达式  $\kappa = -\ddot{x}/\dot{y}$ 。

## 2 三维空间的曲线

密切平面：在三维空间中扭曲的曲线，每个无限小的部分仍可以认为是在一个平面内的，这个平面称为密切平面（osculating plane）。密切平面可以看作是曲线在瞬时最贴合的平面。密切平面由两个（单位）向量切向量  $\mathbf{T}$  和主法向量  $\mathbf{N}$  张成。考虑沿着该曲线的质点运动，切向量  $\mathbf{T}$  描述的是曲线的瞬时速度方向，主法向量  $\mathbf{N}$  描述的是曲线的瞬时加速度方向，指向曲率中心。密切平面的法向量称为副法向量  $\mathbf{B}$ 。( $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ ) 组成了弗勒内（Frenet）框架。

设曲线是关于弧长  $s$  的函数，即  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ 。则切向量定义为

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

密切平面的旋转速率称为挠率（torsion） $\tau$ ，也就是副法线绕  $\mathbf{T}$  的旋转速率，即

$$\mathbf{B}' = -\tau\mathbf{N}. \quad (5)$$

在三维空间中，主法线向量  $\mathbf{N}$  不仅在密切平面内旋转，还要沿着  $\mathbf{B}$  方向，绕着切向量  $\mathbf{T}$  旋转，因此综合起来，主法线的变化率为

$$\mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}. \quad (6)$$

因此，三维空间中曲线的弗勒内-塞雷方程（Frenet-Serret formulas）总结如下：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

## 3 曲面的主曲率

$p$  是曲面上的一点， $\mathbf{n}_p$  是  $p$  的法向量（normal vector）， $\Pi_\theta$  是法平面（normal plane）束，其与曲面的交线记作  $\mathcal{C}_\theta$ ， $p$  到  $\mathcal{C}_\theta$  的曲率中心  $c$  的距离为  $1/\kappa_\theta$ 。如果  $c$  在  $+\mathbf{n}_p$  方向上， $\kappa_\theta$  为正，反之为负。□ 7

选取  $p$  点作为原点，法线方向为  $z$  轴，切平面为  $x$ - $y$  平面，建立直角坐标系。可以用  $z = f(x, y)$  来表示曲面，在原点处  $f(0, 0) = 0, \partial_x f = \partial_y f = 0$ 。当  $x, y \rightarrow 0$  时，我们可以展开  $z \asymp ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey$ 。因为在原点  $\partial_x f = \partial_y f = 0$ ，所以  $\partial_x f = 2ax + cy + d \rightarrow 0$ 。因此  $d = e = 0$ 。我们可以用非常靠近且平行于切面面的一个平面  $z = k$  来切开曲面，得到的截面曲线在原点附近可以表示为

$$z \asymp ax^2 + by^2 + cxy \quad (8)$$

是一个二次齐次曲线。圆锥曲线都有两个相互垂直的对称轴，如果我们选取这两个轴作为  $x$  轴和  $y$  轴，则可以消去交叉项，因为在反射变换下  $x \rightarrow -x, y \rightarrow y, f(x, y)$  保持不变。因此，我们可以将截面曲线表示为

$$z \asymp ax^2 + by^2. \quad (9)$$

根据二维空间中的曲线，我们知道分别沿着  $x$  轴和  $y$  轴的曲线可以表示为  $z \asymp \frac{1}{2}\kappa_1 x^2$  和  $z \asymp \frac{1}{2}\kappa_2 y^2$ ，其中我们定义了  $\kappa_1 = \kappa(0), \kappa_2 = \kappa(\pi/2)$ 。因此，

$$z \asymp \frac{1}{2}\kappa_1 x^2 + \frac{1}{2}\kappa_2 y^2. \quad (10)$$

如果考虑任意角度的截面曲线，设该截面与  $x$  轴的夹角为  $\theta$ ，如果在切平面内沿着  $\theta$  方向移动一小段距离  $\epsilon$ ，则  $x = \epsilon \cos \theta, y = \epsilon \sin \theta$ ，则

$$\kappa(\theta) \asymp 2 \left( \frac{z}{\epsilon^2} \right) \asymp 2 \left[ \frac{\frac{1}{2}\kappa_1(\epsilon \cos \theta)^2 + \frac{1}{2}\kappa_2(\epsilon \sin \theta)^2}{\epsilon^2} \right] = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta. \quad (11)$$

这就是欧拉曲率公式。

## 4 测地线和测地曲率

### 4.1 两种曲率

三维空间中，一般曲面内的一般曲线的曲率可以分为两个分量：在曲面内（对其中的居民可见）的称为测地曲率（geodesic curvature） $\kappa_g$ ，在曲面外（对其中的居民不可见）的称为法曲率（normal curvature） $\kappa_n$ 。如果密切平面垂直于曲面（的法向量），那么所有曲率都是法曲率  $\kappa = \kappa_n, \kappa_g = 0$ 。地球表面的大圆就是这样。

如果质点以单位速率走过一条曲线，其加速度向量的方向指向曲率中心，长度就是曲率，因此可以将质点的加速度称为曲率向量（curvature vector） $\vec{\kappa} = \kappa \mathbf{N} \equiv \dot{\mathbf{T}}$ 。

设  $\mathbf{T}$  是曲线  $C$  在点  $p$  处的单位切向量， $\mathbf{n}$  是法向量。 $T_p$  是曲面在点  $p$  处的切平面， $\mathbf{n}$  与  $\mathbf{T}$  张成法平面  $\Pi_T$ 。 $\Pi_T$  与密切平面（副法向量  $\mathbf{B}$ ）的夹角为  $\gamma$ ，则测地曲率向量  $\vec{\kappa}_g$  和法曲率向量  $\vec{\kappa}_n$  实际上就是  $\vec{\kappa}$  在  $T_p$  和  $\Pi_T$  上的投影分量，即

$$\kappa_g = \kappa \cos \gamma, \quad \kappa_n = \kappa \sin \gamma. \quad (12)$$

默尼耶（Jean Baptiste Meusnier, 法国数学家、物理学家和工程师）在 1776 年就注意到：曲面迫使其上面的所有曲线沿着法方向弯曲同等的量，从而给出默尼耶定理：

曲面上经过点  $p$ 、指向同一方向  $\mathbf{T}$  的所有曲线都具有相同的法曲率  $\kappa_n(\mathbf{T})$ ，即曲面在  $\mathbf{T}$  方向的法截线曲率。如果曲线在  $p$  点密切平面与曲面在  $p$  点的切平面成夹角  $\gamma$ ，曲线在  $p$  点的曲率为  $\kappa_\gamma$ ，则  $\kappa_\gamma \sin \gamma = \kappa_n(\mathbf{T})$ 。

测地线是内蕴的“直线”，其上每一点  $\kappa_g = 0$ 。也就是说：对于测地线上的每一点，曲面在该点的法向量  $\mathbf{n}_p$  一定位于该点的密切平面  $\Pi_p$  之内。换句话说，这些线对于曲面内的居民而言是真正的直线，因为他们无法得知法曲率  $\kappa_n$  的存在；对于曲面外的观察者而言，就是测地线。

### 4.2 旋转表面上的测地线

下面我们考虑旋转曲面。一般旋转曲面的子午线一定是测地线。

我们先考虑球面，设半径为  $R$ ，假设一质点以单位速率沿着球面上的一大圆运动，大圆与赤道平面  $\Pi$  的夹角为  $\gamma$ 。不妨设大圆平面与  $\Pi$  的交线是  $y$  轴，因为大圆过球心，所以大圆的平面方程为  $Ax + Bz = 0$ 。又因为大圆过  $(0, R, 0)$  和  $(R \cos \gamma, 0, R \sin \gamma)$  点，从而得到平面方程为  $z = x \tan \gamma$ 。带入到球面方程  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  中，得到大圆的方程，也就是球与该平面的交线方程：

$$\frac{x^2}{R^2 \cos^2 \gamma} + \frac{y^2}{R^2} = 1,$$

用  $(x, y)$  坐标描述，即在  $\Pi$  上的投影。这是一个椭圆。

下面我们具体考虑从  $z = x \tan \gamma$  到  $\Pi$  的投影  $\mathcal{P}$ . 容易看出, 这是一个带有缩放性质的线性变换。我们首先要在  $z = x \tan \gamma$  上来表示一个点, 即一个向量。容易看出, 可以选取两个正交归一的基向量  $\mathbf{e}_1 = (0, 1, 0), \mathbf{e}_2 = (\cos \gamma, 0, \sin \gamma)$ .  $\mathbf{r}$  在该平面上的坐标为  $(u, v)$ , 即

$$\mathbf{r} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 = (v \cos \gamma, u, v \sin \gamma) \mapsto (v \cos \gamma, u) \equiv (x, y).$$

则  $\mathcal{P}$  的表示矩阵 (雅可比矩阵) 是

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \cos \gamma \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意,  $\det(P) = \cos \gamma$  代表了面积微元的缩放比例系数, 即  $d\mathcal{A} = \cos \gamma \cdot dA$ .

当一个质点以单位速率在  $z = x \tan \gamma$  平面内的大圆上运动时, 在  $\Delta t$  时间内其扫过的角度为  $\Delta \theta = 1 \cdot \Delta t / R$ , 面积为  $A = \frac{1}{2} R^2 \Delta \theta = \frac{1}{2} R \Delta t$ , 即相等时间内扫过的面积相等。其在  $\Pi$  上的投影也是如此, 即  $d\mathcal{A}/dt = \frac{1}{2} R \cos \gamma$ . 由于是椭圆, 因此要满足此条件只能在距离焦点较近时速度较快, 远离焦点时速度较慢。

设质点在大圆测地线上运动到了点  $p$ , 其与经线 (子午线) 的夹角为  $\psi$ . 则质点的单位速率在点  $p$  处的切平面  $T_p$  内可以分解为纬线分量  $\sin \psi$  和经线分量  $\cos \psi$ . 设投影半径为  $\rho$ , 则容易得到

$$\frac{1}{2} \rho \sin \psi = \frac{1}{2} R \cos \gamma$$

是一个常数。推广到任意旋转曲面即为克莱罗定理 (Clairaut's Theorem):

设  $S$  是曲线  $C$  绕轴  $L$  形成的旋转曲面, 如果  $\rho$  是测地线  $g$  上的点  $q$  到  $L$  的距离,  $\psi$  是经过点  $q$  的子午线与测地线之间的夹角。当  $q$  沿着  $g$  移动时,  $\rho \sin \psi$  保持不变。而且, 如果当  $q$  沿着曲线  $g'$  (任意一段都不是  $S$  的平行线) 移动时, 如果  $\rho \sin \psi$  保持不变, 则  $g'$  是测地线。

该定理是克莱罗 1733 年研究旋转曲面时得到的。

### 4.3 开普勒第二定律

在相等的时间内扫过相等的面积, 是所有中心力场的普遍性质。牛顿能够使用几何方法分析动力学问题, 关键正是将时间几何化, 面积就是时钟。开普勒第一定律指出: 行星的轨道是一个椭圆, 这与力随距离线性变化有关。

牛顿对开普勒第二定律给出了一个几何证明。

## 5 曲面的外在曲率

主曲率 (principal curvature):

$$H = \bar{\kappa} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}. \quad (13)$$

极小曲面 (minimal surface) 在每一个点都满足  $H = 0$ , 因此极小曲面一定是鞍型或者平坦的。

设曲面上有一点  $p$ , 其法向量为  $\mathbf{n}_p$ . 球面映射, 也叫高斯映射 (Gauss map) 是选取曲面上包含点  $p$  的面积为  $\delta\mathcal{A}$  的一小片,  $n: \mathcal{S} \mapsto \mathbb{S}^2$ . 在  $\mathbb{S}^2$  的面积我们记作  $\delta\tilde{\mathcal{A}}$ .

曲面的外在曲率被定义成球面映射下的局部面积的放大系数:

$$\mathcal{K}_{\text{ext}} \asymp \frac{\delta\tilde{\mathcal{A}}}{\delta\mathcal{A}} = \kappa_1 \kappa_2.$$

## 6 高斯的绝妙定理

高斯绝妙定理告诉我们：虽然  $\mathcal{K}_{\text{ext}} = \kappa_1 \kappa_2$  是通过外蕴的  $\kappa_{1,2}$  定义的（ $\kappa_{1,2}$  依赖于曲面如何嵌入三维空间），当时  $\mathcal{K}_{\text{ext}}$  却是内蕴的，在  $\mathcal{S}$  的等距变换下保持不变。用外在方式定义的曲率  $\mathcal{K}_{\text{ext}}$  与通过内蕴角盈定义的高斯曲率是相等的，即  $\mathcal{K}_{\text{ext}} = \mathcal{K}$ 。

例子：将一张白纸卷成圆筒，这是一个等距变换。

## 7 尖刺曲率

### 7.1 圆锥曲率

广义球面映射：想象将一个平面附着在圆锥顶端，并且有一个单位法向量  $\mathbf{n}$ 。这个平面可以朝任意方向晃动，直到它碰到圆锥的侧面，当平面走过所有可能的位置时，单位法向量  $\mathbf{n}$  扫过了一个球冠，其面积为  $2\pi(1 - \sin \alpha)$ ，其中  $\alpha$  是圆锥到对称轴的内角。这个球冠的面积就被定义为尖刺曲率（conical curvature） $\mathcal{K}_{\text{spike}}$ 。

### 7.2 多面角曲率

在  $\alpha = \pi/2$  时，圆锥退化成平面， $\mathcal{K}_{\text{spike}} = 0$ 。

另外我们还可以将单位圆锥剪开，展开成一个单位半径的扇形，记展开后的缺口角度为  $\beta$ 。这个扇形的周长为  $2\pi \sin \alpha = 2\pi - \beta$ ，因此  $\beta = 2\pi(1 - \sin \alpha)$ 。因此，尖刺曲率也可以定义为扇形的缺口角度  $\beta$ 。