第 5 章 伪球面和双曲平面

Wayne Zheng

2025 年 6 月 2 日

贝尔特拉米（Beltrami）是意大利数学家，对双曲几何有重要贡献。他也发现了拉格朗日力学中的贝尔特拉米等式。他也知道局部的高斯-博内定理。

1 利用变分原理证明广义斯涅尔定律

贝尔特拉米等式。考虑作用量

$$S = \int L(u, u', x)dx$$

使函数 $u(x)$ 取到极值。这里 x 是描述系统演化的独立参数（类比于时间 t），u 可以看作是广义坐标。可以定义广义动量 $p = \partial L/\partial u'$. 此时变分原理导出的拉格朗日方程简化为

$$\frac{dp}{dx} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0.$$

哈密顿量 $H = u'p - L$. 利用拉格朗日方程，则可以得到贝尔特拉米等式：

$$\frac{dH}{dx} = \left(pu'' + \frac{dp}{dx}u'\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial u}u' + \frac{\partial L}{\partial u\prime}u'' + \frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial L}{\partial x}.$$

这是诺特定理的一个特例。

考虑光在介质中的传播，坐标是 (x, y)，路径可以表示成曲线 $y = y(x)$. 不妨进一步假设折射率只是纵坐标的函数 $n = n(y)$. 则光从 A 到 B 的作用量是累积用时的积分

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{ds}{v} = \int \frac{1}{v(y)}\sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= \int_{x_A}^{x_B} n(y)\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx \equiv \int_{x_A}^{x_B} Ldx, \end{aligned} \tag{1}$$

其中拉氏量 $L = n(y)\sqrt{1 + y'^2}$. 根据费马变分原理，光线沿着作用量 S 取极值（最小值）的路径。哈密顿量

$$H = y'p - L = -\frac{n(y)}{\sqrt{1 + y'^2}}. \tag{2}$$

根据贝尔特拉米等式，易得 $dH/dx = 0$, 即 $H = -k$ 是一个常数，也就意味着系统沿着 x 方向具有连续的平移不变性，从而对应有一个守恒量，这个守恒量

$$\frac{n(y)}{\sqrt{1 + y'^2}} = n(y)\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = n(y)\sin\theta = k \tag{3}$$

给出了连续介质的斯涅尔定律，θ 是光线与入射平面的法线的夹角。这与几何方法得到的斯涅尔定律一致。

下面讨论两个例子。

在贝尔特拉米-庞加莱半平面 (x,y) 中，$y>0$, 光速 $v(y)=y$, 根据广义斯涅尔定律

$$\frac{\sin\theta}{y}=\frac{1}{y\sqrt{1+y'^2}}=k.$$

原则上需要求解这个关于 y 的常微分方程：$y^2(1+y'^2)-1/k^2=0$，但实际上我们知道 $x^2+y^2=1/k^2\equiv r^2$. 也容易验证 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 满足此微分方程。

（习题 15）如果光在平面 (x,y) 中传播，光速 $v(y)=1/\sqrt{1-y}$，则根据广义斯涅尔定律，

$$\frac{\sin\theta}{v(y)}=\frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{1+y'^2}}=k.$$

求解这个关于 y 的常微分方程：$k^2y'^2+y+k^2-1=0$, 得到的一般解是

$$y(x)=-\frac{1}{4k^2}\left(x-kC\right)^2-k^2+1,$$

其中 C 是任意常数。这是一条开口向下的抛物线，顶点在 $(kC,1-k^2)$ 处。