第 4 章 曲面映射：度量

Wayne Zheng

2025 年 5 月 20 日

度量 (Metric)：也被称为第一基本形式（first fundamental form），表示两个临近点之间的无穷小距离的参数化规则。参数化的规则选取可以有很多种，因此每个曲面原则上可以写下无穷多种度量。度量决定了曲面的内蕴几何，这是高斯最早对微分几何的基本见解。

例如，平面可以有无穷多种度量，直角坐标系中 $d\hat{s}^2 = dx^2 + dy^2$，极坐标中是 $d\hat{s}^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$. 其对应的度量张量（metric tensor）分别为：

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

下面我们看球面的例子。我们先考虑球坐标系 (ϕ, θ), 其中 $\phi \in [0, \pi]$ 是极角，表示纬度的取值范围；$\theta \in [0, 2\pi)$ 是方位角，表示经度的取值范围。我们先来看几何直观。

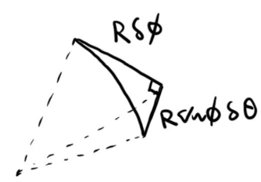

图 1: 球坐标系下的度量。

由图 1可知，球面上无穷小两点之间的距离可以表示为 $d\hat{s}^2 = (Rd\phi)^2 + (R\sin\phi d\theta)^2$.

然后，让我们严格地详细计算这个度量。球面上的一点 (x, y, z) 可以用球坐标参数化，即

$$(x(\phi,\theta), y(\phi,\theta), z(\phi,\theta)) = (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi).$$

进一步地，球面上任意一条曲线可以用一个参数参数化，即 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(\phi(t), \theta(t))$. 其切向量为：$\mathbf{r}'(t) = \partial_\phi \mathbf{r}\dot{\phi} + \partial_\theta \mathbf{r}\dot{\theta}$. 其中两个极坐标参数的切向量为：

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_\phi &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (R\cos\phi\cos\theta, R\cos\phi\sin\theta, -R\sin\phi), \\ \mathbf{r}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (-R\sin\phi\sin\theta, R\sin\phi\cos\theta, 0). \end{aligned} \tag{2}$$

球面度量为

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= (\partial_\phi x d\phi + \partial_\theta x d\theta)^2 + (\partial_\phi y d\phi + \partial_\theta y d\theta)^2 + (\partial_\phi z d\phi + \partial_\theta z d\theta)^2 \\ &= \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\phi d\phi^2 + \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\theta d\theta^2 + \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\theta d\phi d\theta + \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\phi d\theta d\phi. \end{aligned}$$

则其度量张量为

$$g = \begin{pmatrix} g_{\phi\phi} & g_{\phi\theta} \\ g_{\theta\phi} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\phi & \mathbf{r}_\phi \cdot \mathbf{r}_\theta \\ \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\phi & \mathbf{r}_\theta \cdot \mathbf{r}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2\phi \end{pmatrix}. \tag{3}$$

最终，球面用 (ϕ, θ) 写下的度量为 $d\hat{s}^2 = R^2\left(d\phi^2 + \sin^2\phi d\theta^2\right)$, 与几何直观方法得到的一致。

类似地，我们计算中心投影的度量（习题 3）。首先是用切平面上的参数 (r,θ) 来参数化球面上的点：

$$\begin{aligned}\mathbf{l} = (x,y,z) &= (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi)\\ &= \left(\frac{Rr\cos\theta}{\sqrt{R^2+r^2}}, \frac{Rr\sin\theta}{\sqrt{R^2+r^2}}, \frac{R^2}{\sqrt{R^2+r^2}}\right).\end{aligned}$$

相应地，可以计算切向量 $\mathbf{l}_r, \mathbf{l}_\theta$. 相应的度量张量为

$$g = \begin{pmatrix} g_{r\phi} & g_{r\theta} \\ g_{\theta r} & g_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{l}_r\cdot\mathbf{l}_r & \mathbf{l}_r\cdot\mathbf{l}_\theta \\ \mathbf{l}_\theta\cdot\mathbf{l}_r & \mathbf{l}_\theta\cdot\mathbf{l}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R^4}{(R^2+r^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{R^2r^2}{R^2+r^2} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

则其度量为

$$d\hat{s}^2 = \frac{R^4}{\left(R^2+r^2\right)^2}dr^2 + \frac{R^2r^2}{R^2+r^2}d\theta^2 = \frac{1}{1+(r/R)^2}\left[\frac{dr^2}{1+(r/R)^2} + r^2d\theta^2\right], \tag{5}$$

与几何直观方法得到的一致。