第三幕 曲率

Wayne Zheng

2026 年 1 月 23 日

目录

1 平面曲线的曲率

不存在一维的内蕴曲率概念。几何与物理的联系：如果一个单位质量的滚珠在一段无摩擦的曲线上以单位速率运动，金属丝就会有一个垂直于切向的作用力作用在滚珠上，牛顿知道，*这个力 F 的大小就是曲线的曲率 κ.*

曲率最早由牛顿引入，描述曲线的“弯曲性”。更确切地说，曲率是切线关于弧长的转向率。如果 φ 是切线的变化角，则 $\kappa = d\varphi/ds$. 设 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{N}$ 是曲线的单位切向量和指向曲率中心的单位法向量，则我们容易得到 $\delta\mathbf{T} \asymp \mathbf{N}\delta\varphi$，从而

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} \equiv \mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N}. \tag{1}$$

也可以用法向量取代切向量，考虑法向量的转向率

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} \equiv \mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T}. \tag{2}$$

因为如果将考虑对象从曲线变成曲面，就不存在唯一的切向量了。换句话说，在平面内，切向量和法向量的转向速率都是曲率 κ, 其变化率的方向是相反的，平行于另一个向量。

一般地，牛顿发现质点在二维平面的运动曲线 $[x(t), y(t)]$ 的曲率公式

$$\kappa = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x} + \dot{y}^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

上方的点是关于时间的导数。对于单位速率运动的质点，$|\mathbf{v}|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$. 如果质点在 δt 时刻内走过了 $\delta\varphi$，此时 $\delta t = \delta s$. 则 $\dot{y}$ 方向的增量为 $\delta\dot{y} \asymp \ddot{y}\delta t = \ddot{y}\delta s$. 根据相似三角形，

$$\frac{\delta\varphi}{\ddot{y}\delta s} \asymp \frac{1}{\dot{x}}.$$

即

$$\kappa \equiv \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\ddot{y}}{\dot{x}}. \tag{4}$$

利用三角形另一边的相似性质，容易得此时曲率的另一个表达式 $\kappa = -\ddot{x}/\dot{y}$.

2　三维空间的曲线

密切平面：在三维空间中扭曲的曲线，每个无限小的部分仍可以认为是在一个平面内的，这个平面称为*密切平面*（osculating plane）。密切平面可以看作是曲线在瞬时最贴合的平面。密切平面由两个（单位）向量切向量 $\mathbf{T}$ 和主法向量 $\mathbf{N}$ 张成。考虑沿着该曲线的质点运动，切向量 $\mathbf{T}$ 描述的是曲线的瞬时*速度*方向，主法向量 $\mathbf{N}$ 描述的是曲线的瞬时*加速度*方向，指向曲率中心。密切平面的法向量称为副法向量 $\mathbf{B}$. $(\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B})$ 组成了*弗勒内*（Frenet）框架。

设曲线是关于弧长 s 的函数，即 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$. 则切向量定义为

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}.$$

密切平面的旋转速率称为*挠率*（torsion）τ, 也就是副法线绕 $\mathbf{T}$ 的旋转速率，即

$$\mathbf{B}' = -\tau\mathbf{N}. \tag{5}$$

在三维空间中，主法线向量 $\mathbf{N}$ 不仅在密切平面内旋转，还要沿着 $\mathbf{B}$ 方向，绕着切向量 $\mathbf{T}$ 旋转，因此综合起来，主法线的变化率为

$$\mathbf{N}' = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}. \tag{6}$$

因此，三维空间中曲线的*弗勒内-塞雷方程*（Frenet-Serret formulas）总结如下：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

3　曲面的主曲率

p 是曲面上的一点，$\mathbf{n}_p$ 是 p 的法向量（normal vector）,Π_θ 是法平面（normal plane）束，其与曲面的交线记作 $\mathcal{C}_\theta$, p 到 $\mathcal{C}_\theta$ 的曲率中心 c 的距离为 $1/\kappa_\theta$. 如果 c 在 $+\mathbf{n}_p$ 方向上，κ_θ 为正，反之为负。

选取 p 点作为原点，法线方向为 z 轴，切平面为 x-y 平面，建立直角坐标系。可以用 $z = f(x, y)$ 来表示曲面，在原点处 $f(0, 0) = 0, \partial_x f = \partial_y f = 0$. 当 $x, y \to 0$ 时，我们可以展开 $z \asymp ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey$. 因为在原点 $\partial_x f = \partial_y f = 0$, 所以 $\partial_x f = 2ax + cy + d \to 0$. 因此 $d = e = 0$. 我们可以用*非常靠近*且平行于切面面的一个平面 $z = k$ 来切开曲面，得到的截面曲线在原点附近可以表示为

$$z \asymp ax^2 + by^2 + cxy \tag{8}$$

是一个二次齐次曲线。圆锥曲线都有两个相互垂直的对称轴，如果我们选取这两个轴作为 x 轴和 y 轴，则可以消去交叉项，因为在反射变换下 $x \to -x, y \to y$, $f(x,y)$ 保持不变。因此，我们可以将截面曲线表示为

$$z \asymp ax^2 + by^2. \tag{9}$$

根据二维空间中的曲线，我们知道分别沿着 x 轴和 y 轴的曲线可以表示为 $z \asymp \frac{1}{2}\kappa_1 x^2$ 和 $z \asymp \frac{1}{2}\kappa_2 y^2$，其中我们定义了 $\kappa_1 = \kappa(0), \kappa_2 = \kappa(\pi/2)$. 因此，

$$z \asymp \frac{1}{2}\kappa_1 x^2 + \frac{1}{2}\kappa_2 y^2. \tag{10}$$

如果考虑任意角度的截面曲线，设该截面与 x 轴的夹角为 θ，如果在切平面内沿着 θ 方向移动一小段距离 ϵ，则 $x = \epsilon\cos\theta, y = \epsilon\sin\theta$, 则

$$\kappa(\theta) \asymp 2\left(\frac{z}{\epsilon^2}\right) \asymp 2\left[\frac{\frac{1}{2}\kappa_1(\epsilon\cos\theta)^2 + \frac{1}{2}\kappa_2(\epsilon\sin\theta)^2}{\epsilon^2}\right] = \kappa_1\cos^2\theta + \kappa_2\sin^2\theta. \tag{11}$$

这就是*欧拉曲率公式*。

4 测地线和测地曲率

4.1 两种曲率

三维空间中，一般曲面内的一般曲线的曲率可以分为两个分量：在曲面内（对其中的居民可见）的称为*测地曲率*（geodesic curvature）κ_g, 在曲面外（对其中的居民不可见）的称为*法曲率*（normal curvature）κ_n. 如果密切平面垂直于曲面（的法向量），那么所有曲率都是法曲率 $\kappa = \kappa_n$，$\kappa_g = 0$. 地球表面的大圆就是这样。

如果质点以单位速率走过一条曲线，其加速度向量的方向指向曲率中心，长度就是曲率，因此可以将质点的加速度称为*曲率向量*（curvature vector）$\vec{\kappa} = \kappa\mathbf{N} \equiv \dot{\mathbf{T}}$.

设 $\mathbf{T}$ 是曲线 $\mathcal{C}$ 在点 p 处的单位切向量，$\mathbf{n}$ 是法向量。T_p 是曲面在点 p 处的切平面，$\mathbf{n}$ 与 $\mathbf{T}$ 张成法平面 Π_T. Π_T 与密切平面（副法向量 $\mathbf{B}$）的夹角为 γ, 则*测地曲率向量* $\vec{\kappa}_g$ 和*法曲率向量* $\vec{\kappa}_n$ 实际上就是 $\vec{\kappa}$ 在 T_p 和 Π_T 上的投影分量，即

$$\kappa_g = \kappa\cos\gamma, \quad \kappa_n = \kappa\sin\gamma. \tag{12}$$

默尼耶（Jean Baptiste Meusnier, 法国数学家、物理学家和工程师）在 1776 年就注意到：曲面迫使其上面的所有曲线沿着法方向弯曲同等的量，从而给出默尼耶定理：

曲面上经过点 p、指向同一方向 $\mathbf{T}$ 的所有曲线都具有相同的法曲率 $\kappa_n(\mathbf{T})$, 即曲面在 $\mathbf{T}$ 方向的法截线曲率。如果曲线在 p 点密切平面与曲面在 p 点的切平面成夹角 γ, 曲线在 p 点的曲率为 κ_γ, 则 $\kappa_\gamma\sin\gamma = \kappa_n(\mathbf{T})$.

测地线是内蕴的"直线"，其上每一点 $\kappa_g = 0$. 也就是说：*对于测地线上的每一点，曲面在该点的法向量 $\mathbf{n}_p$ 一定位于该点的密切平面 Π_p 之内*。换句话说，这些线对于曲面内的居民而言是真正的直线，因为他们无法得知法曲率 κ_n 的存在；对于曲面外的观察者而言，就是测地线。

4.2 旋转曲面上的测地线

下面我们考虑旋转曲面。一般旋转曲面的子午线一定是测地线。

我们先考虑球面，设半径为 R，假设一质点以单位速率沿着球面上的一大圆运动，大圆与赤道平面 Π 的夹角为 γ. 不妨设大圆平面与 Π 的交线是 y 轴，因为大圆过球心，所以大圆的平面方程为 $Ax + By + Cz = 0$. 又因为大圆过 $(0, R, 0)$ 和 $(R\cos\gamma, 0, R\sin\gamma)$ 点，从而得到平面方程为 $z = x\tan\gamma$. 带入到球面方程 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 中，得到大圆的方程，

也就是球与该平面的交线方程：

$$\frac{x^2}{R^2\cos^2\gamma}+\frac{y^2}{R^2}=1,$$

用 (x,y) 坐标描述，即在 Π 上的投影。这是一个椭圆。

下面我们具体考虑从 $z=x\tan\gamma$ 到 Π 的投影 $\mathcal{P}$. 容易看出，这是一个带有缩放性质的线性变换。我们首先要在 $z=x\tan\gamma$ 上来表示一个点，即一个向量。容易看出，可以选取两个正交归一的基向量 $\mathbf{e}_1=(0,1,0),\mathbf{e}_2=(\cos\gamma,0,\sin\gamma)$. $\mathbf{r}$ 在该平面上的坐标为 (u,v), 即

$$\mathbf{r}=u\mathbf{e}_1+v\mathbf{e}_2=(v\cos\gamma,u,v\sin\gamma)\longmapsto(v\cos\gamma,u)\equiv(x,y).$$

则 $\mathcal{P}$ 的表示矩阵（雅可比矩阵）是

$$P=\begin{pmatrix}0 & \cos\gamma\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

注意，$\det(P)=\cos\gamma$ 代表了面积微元的缩放比例系数，即 $d\mathcal{A}=\cos\gamma\cdot dA$.

当一个质点以单位速率在 $z=x\tan\gamma$ 平面内的大圆上运动时，在 Δt 时间内其扫过的角度为 $\Delta\theta=1\cdot\Delta t/R$, 面积为 $A=\frac{1}{2}R^2\Delta\theta=\frac{1}{2}R\Delta t$, 即相等时间内扫过的面积相等。其在 Π 上的投影也是如此，即 $d\mathcal{A}/dt=\frac{1}{2}R\cos\gamma$. 由于是椭圆，因此要满足此条件只能在距离焦点较近时速度较快，远离焦点时速度较慢。

设质点在大圆测地线上运动到了点 p, 其与经线（子午线）的夹角为 ψ. 则质点的单位速率在点 p 处的切平面 T_p 内可以分解为纬线分量 $\sin\psi$ 和经线分量 $\cos\psi$. 设投影半径为 ρ, 则容易得到

$$\frac{1}{2}\rho\sin\psi=\frac{1}{2}R\cos\gamma$$

是一个常数。推广到任意旋转曲面即为克莱罗定理（Clairaut's Theorem）：

> 设 S 是曲线 C 绕轴 L 形成的旋转曲面，如果 ρ 是测地线 g 上的点 q 到 L 的距离，ψ 是经过点 q 的子午线与测地线之间的夹角。当 q 沿着 g 移动时，$\rho\sin\psi$ 保持不变。而且，如果当 q 沿着曲线 g'（任意一段都不是 S 的平行线）移动时，如果 $\rho\sin\psi$ 保持不变，则 g' 是测地线。

该定理是克莱罗 1733 年研究旋转曲面时得到的。

4.3 开普勒第二定律

在相等的时间内扫过相等的面积，是所有中心力场的普遍性质。牛顿能够使用几何方法分析动力学问题，关键正是将时间几何化，面积就是时钟。开普勒第一定律指出：行星的轨道是一个椭圆，这与力随距离线性变化有关。

牛顿对开普勒第二定律给出了一个几何证明。

5 曲面的外在曲率

主曲率（principal curvature）：

$$H=\bar{\kappa}=\frac{\kappa_1+\kappa_2}{2}. \tag{13}$$

极小曲面（minimal surface）在每一个点都满足 $H=0$, 因此极小曲面一定是鞍型或者平坦的。

设曲面上有一点 p, 其法向量为 $\mathbf{n}_p$. 球面映射，也叫高斯映射（Gauss map）是选取曲面上包含点 p 的面积为 $\delta\mathcal{A}$ 的的一小片，$n:\mathcal{S}\mapsto\mathbb{S}^2$. 在 $\mathbb{S}^2$ 的面积我们记作 $\delta\tilde{\mathcal{A}}$.

曲面的外在曲率被定义成球面映射下的局部面积的放大系数:

$$\mathcal{K}_{\rm ext} \asymp \frac{\delta\tilde{\mathcal{A}}}{\delta\mathcal{A}} = \kappa_1\kappa_2.$$

6 高斯的绝妙定理

高斯绝妙定理告诉我们：虽然 $\mathcal{K}_{\rm ext} = \kappa_1\kappa_2$ 是通过外蕴的 $\kappa_{1,2}$ 定义的（$\kappa_{1,2}$ 依赖于曲面如何嵌入三维空间），当时 $\mathcal{K}_{\rm ext}$ 却是*内蕴*的，在 $\mathcal{S}$ 的等距变换下保持不变。用外在方式定义的曲率 $\mathcal{K}_{\rm ext}$ 与通过内蕴角盈定义的高斯曲率是相等的，即 $\mathcal{K}_{\rm ext} = \mathcal{K}$.

例子：将一张白纸卷成圆筒，这是一个等距变换。

7 尖刺曲率

7.1 圆锥曲率

广义球面映射：想象将一个平面附着在圆锥顶端，并且有一个单位法向量 $\mathbf{n}$. 这个平面可以朝任意方向晃动，直到它碰到圆锥的侧面，当平面走过所有可能的位置时，单位法向量 $\mathbf{n}$ 扫过了一个球冠，其面积为 $2\pi(1-\sin\alpha)$, 其中 α 是圆锥到对称轴的内角。这个球冠的面积就被定义为*尖刺曲率*（conical curvature）$\mathcal{K}_{\rm spike}$.

在 $\alpha = \pi/2$ 时，圆锥退化成平面，$\mathcal{K}_{\rm spike} = 0$.

另外我们还可以将单位圆锥剪开，展开成一个单位半径的扇形，记展开后的缺口角度为 β. 这个扇型的周长为 $2\pi\sin\alpha = 2\pi - \beta$, 因此 $\beta = 2\pi(1-\sin\alpha)$. 因此，尖刺曲率也可以定义为扇形的缺口角度 β.

7.2 多面角曲率

类似地，我们可以定义多面角的内在和外在曲率。$\mathcal{K}_{\rm int}$ 被定义为尖刺展开后的分割角 β. $\mathcal{K}_{\rm ext}$ 被定义为 $\mathbb{S}^2$ 上连接多面角各个面的单位法向量所形成的 m 边形的面积。

多面体的绝妙定理：$\mathcal{K}_{\rm int} = \mathcal{K}_{\rm ext}$.

8 形状算子

在曲面 p 点处的*形状算符*（shape operator, 亦称 Weingarten 映射）告诉我们的是从 p 点出发沿着任意切向量 $\mathbf{v}$ 移动时，法向量 $\mathbf{n}$ 的变化率：

$$S(\mathbf{v}) \equiv -\nabla_{\mathbf{v}}\mathbf{n}.$$

S 也可以被看成一个*从切空间 T_p 到自身的线性映射*，是在切空间内作用于曲面的一个线性算子，描述的是如何把一个切向量变换到另一个切向量的具体信息。主方向（principal direction）上的单位向量是形状算子的本征向量，主曲率是对应的本征值，即 $S(\mathbf{e}_i) = \kappa_i\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2$. 在此坐标系下，形状算子的矩阵表示为 $\mathrm{diag}(\kappa_1, \kappa_2)$. 从而，$\mathcal{K}_{\rm ext}$ 是形状算子的面积扩张系数，即 $\det(S) = \kappa_1\kappa_2$.

8.1 补充：奇异值分解的几何学

奇异值分解（singular value decomposition, SVD）：平面上的每一个线性变换等价于两个*正交*方向的拉伸，拉伸系数为 σ_1 和 σ_2, 称之为*奇异值*。再接一个角度为 τ 的旋转。

$$M = R_\varphi \Sigma R_{-\theta}.$$

$\tau = \varphi - \theta$. 我们注意到：$M^{-1} = R_\theta \Sigma^{-1} R_{-\varphi}$ 以及 $M^T = R_{-\theta}\Sigma R_\varphi$. 说明 M^T 和 M^{-1} 类似，是做一个反向的扭转，再像 M 一样沿着两个正交方向做拉伸。

如果 $M^T = M$, 则 $M = R_\theta \Sigma R_{-\theta}$. 这时候 M 的两个正交本征向量正好是奇异值分解中的两个拉伸方向，M 被称为*自伴算子*（self-adjoint operator）. 这时候奇异值分解即为谱分解，这个结果也被称为*谱定理*，M 的本征值一定为实数。自伴算符有重要性质：对于线性空间的任意向量 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$，都有

$$\langle M\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, M\mathbf{v}\rangle.$$

在实空间里，$\langle M\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = (M\mathbf{u})^T\mathbf{v} = \mathbf{u}^T M^T \mathbf{v} = \mathbf{u}^T(M\mathbf{v}) \equiv \langle \mathbf{u}, M\mathbf{v}\rangle$. 这也被在代数层面被用作自伴算子的定义。

8.2 形状算子的矩阵表示和几何意义

形状算子是一个自伴算子，因此其奇异值分解即为谱分解。假设任意的*正交坐标系* $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2\}$, 其与主方向 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ 的夹角为 θ. 则形状算子的矩阵表示为 $[S] = R_{-\theta}\cdot\mathrm{diag}(\kappa_1, \kappa_2)\cdot R_\theta$, 即

$$\begin{aligned}[S] &= \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\kappa_1 & 0\\ 0 & \kappa_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\kappa_1\cos^2\theta + \kappa_2\sin^2\theta & (\kappa_1-\kappa_2)\sin\theta\cos\theta\\ (\kappa_1-\kappa_2)\sin\theta\cos\theta & \kappa_1\sin^2\theta + \kappa_2\cos^2\theta\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

根据欧拉曲率公式，我们看到形状算子的对角线元素正好是 $\kappa(\mathbf{E}_1)$ 和 $\kappa(\mathbf{E}_2)$. 从而，

$$[S] = \begin{bmatrix}\kappa(\mathbf{E}_1) & \frac{\Delta\kappa}{2}\sin 2\theta\\ \frac{\Delta\kappa}{2}\sin 2\theta & \kappa(\mathbf{E}_2)\end{bmatrix}.$$

实际上，形状算子的意义还有：

任意切方向的单位向量 $\widehat{\mathbf{E}}$ 的法截痕曲率都可以表示为 $\kappa(\mathbf{E}) = \langle \widehat{\mathbf{E}}, S(\widehat{\mathbf{E}})\rangle$.

根据线性代数的知识，

$$[S] = \begin{bmatrix}\langle \mathbf{E}_1, S(\mathbf{E}_1)\rangle & \langle \mathbf{E}_1, S(\mathbf{E}_2)\rangle\\ \langle \mathbf{E}_2, S(\mathbf{E}_1)\rangle & \langle \mathbf{E}_2, S(\mathbf{E}_2)\rangle\end{bmatrix}. \tag{14}$$

以 $[S]$ 的第一列为例，其几何意义：$\langle \mathbf{E}_1, S(\mathbf{E}_1)\rangle$ *表示的是* $\mathbf{E}_1$ *方向的法平面* Π_1 *内部法向量* $\mathbf{n}$ *旋转的快慢*；$\langle \mathbf{E}_2, S(\mathbf{E}_1)\rangle$ *表示* $\mathbf{n}$ *在垂直于法平面的方向旋转的快慢*。当选定主方向时，$\mathbf{n}$ 只会在法平面内运动，因此形状算子的矩阵表示为对角矩阵。

8.3 曲面参数化

以曲面上的某一点为原点建立坐标系，一般选取切平面为 x-y 平面，z 轴方向为法向量，则曲面可以被 $z = f(u, v)$ 参数化。在三维空间中的表示就是 $\mathbf{r} = (x, y, z = f)$. 则切向量为 $\mathbf{r}_u = (x_u, y_u, f_u), \mathbf{r}_v = (x_v, y_v, f_v)$. 我们可以取归一化之后的切向量来作为基向量：

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{r}_u}{\sqrt{x_u^2 + y_u^2 + f_u^2}}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{r}_v}{\sqrt{x_v^2 + y_v^2 + f_v^2}}.$$

注意 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ 一般来说不是正交的。S 在该坐标系下的表示为

$$S(\mathbf{u}_j) \equiv -\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial u^j} = \sum_i S^i_j \mathbf{u}_i,$$

u^j 是曲面的第 j 个参数，在这里即 $u^1 = u, u^2 = v$. S^i_j 是具体的矩阵元。上式两边再同时点乘 $\mathbf{u}_k$，即可得到*第二基本形式*的矩阵元：

$$\langle S(\mathbf{u}_j), \mathbf{u}_k\rangle = \sum_i S^i_j\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_k\rangle = \sum_i g_{ik}S^i_j = \langle \mathbf{u}_j, S(\mathbf{u}_k)\rangle \equiv II_{jk}.$$

从而，$II = G \cdot S$, $S = G^{-1} \cdot II$. 如果是正交坐标系，$G = \mathbb{1}$, 则 $S = II$ 回到公式 14.