

# 第 5 章 伪球面和双曲平面

Wayne Zheng

2025 年 6 月 1 日

贝尔特拉米 (Beltrami) 是意大利数学家，对双曲几何有重要贡献。他也发现了拉格朗日力学中的贝尔特拉米等式。他 also 知道局部的高斯-博内定理。

## 1 利用变分原理证明广义斯涅尔定律

贝尔特拉米等式。考虑作用量

$$S = \int L(u, u', x) dx$$

使函数  $u(x)$  取到极值。这里  $x$  是描述系统演化的独立参数（类比于时间  $t$ ）， $u$  可以看作是广义坐标。可以定义广义动量  $p = \partial L / \partial u'$ 。此时变分原理导出的拉格朗日方程简化为

$$\frac{dp}{dx} - \frac{\partial L}{\partial u} = 0.$$

哈密顿量  $H = pu' - L$ 。利用拉格朗日方程，则可以得到贝尔特拉米等式：

$$\frac{dH}{dx} = \frac{dp}{dx}u' + pu'' - \left( \frac{\partial L}{\partial u}u' + \frac{\partial L}{\partial u'}u'' + \frac{\partial L}{\partial x} \right) = -\frac{\partial L}{\partial x}.$$

这是诺特定理的一个特例。