المحاضرة الأولى

Tuesday 17/10

sets ... المجموعات

introduction : مقدمة

sets: is a collection of elements. or membership of the set عنصر جزئية

Ex: write the set of even & odd numbers.
الزوجية الفردية

$E = \{2, 4, 6, \dots\}$ infinte غير منتهية

$O = \{3, 5, 7, \dots\}$ infinte =

$\cap$: intersection &: and $\cup$: union

Real Numbers

1) Natural Number : (N) الأعداد الطبيعية

$N: \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ infinte

2). Integers Numbers : (Z) الأعداد الصحيحة

$Z = \{\dots -2, -1, 0, 1, +2, \}$ infinte

3) Rational Number : (Q) الأعداد النسبية

$Q = \{\frac{a}{b} : a, b \in Z ; b \neq 0\}$

Ex. $\{\cancel{\pi}, \frac{2}{3}, \frac{4}{1}, \frac{1}{2}, \sqrt{25}, 0.\bar{6}, \dots\}$ عدد دوري

4) Irrational Number : (I)

$I = \{\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{5}, \dots\}$

5) Real Number : ($\mathbb{R}$)

المحاضرة الثانية

خميس 10/19

$\mathbb{R} = \mathbb{N} \cup \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ Note

والعكس غير صحيح

القيمة المطلقة Absolute Value

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

$-a$ ... 0 ... $+a$

خواص القيمة المطلقة:

1. $|a| = \sqrt{a^2}$
2. $|a| = 0$ IFF $a = 0$ — إذا وفقط إذا IFF
3. $|a| = |-a|$
4. $|a+b| \leq |a| + |b|$

   Ex: $|-3+5| \leq |-3| + |5|$, $2 \leq 8$
5. $|a.b| = |a|.|b|$
6. $|a^2| = a^2$; $a^2 \geq 0$
7. $|a.a| = |a|.|a| = |a|^2$
8. $|a^2| = |a|^2$ or $|a^n| = |a|^n$

تتوزع القيمة المطلقة على الجمع والطرح والضرب

الفترات Intervals

1. $(a,b) = [x : a < x < b]$ open interval — $(2,3)$
2. $[a,b] = [x : a \leq x \leq b]$ closed interval — $[2,3]$
3. $[a,b) = [x : a \leq x < b]$ half closed interval
4. $(a,b] = [x : a < x \leq b]$ half open interval

إذا يوجد يساوي تكون مغلقة

المحاضرة الثانية

الخميس ١٩ / ١٠

5. $(a, \infty) = \{x : x > a\}$

6. $(-\infty, a) = \{x : x < a\}$

كثير الحدود >>> Polynomials <<<

A polynomial of one variable has the form

$P(x) = a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + ax + a_0$

$a_n, a_{n-1}, \dots a_2, a, a_0$ called the coefficients المعاملات

$p(x) = 3x^7 + 6x^5 + 2$ is polynomial of degree 7

$p(x) = 3\sqrt{x} + 4\sqrt[3]{x}$ is not polynomial

متباينات >>> Inqueltities <<<

An expression has one of the following

$<, \leq, >, \geq$

المحاضرة الأولى
22/10 Sunday

Sets, Number, Absolute value

Sets

- A set: is collection of elements or (عناصر مجموعة جزئية) membership of the set.

- Capital latters A, B, C ...... are usual use to denote sets للتعريف
دلالة مجموعات

- Small latters a, b, c ...... are usual use to denote element of a set. عنصر من مجموعة

زوجية
Ex: Write the set of even numbers.
$E = \{2, 4, 6, \dots\}$

فردية
Ex2: Write the set of odd numbers.
$O = \{1, 3, 5, \dots\}$

$2 \in E$ — $\in$ belong تنتمي
$2 \notin O$ — $\notin$ not belong لا تنتمي
$\cup$ union اتحاد
$\cap$ intersection تقاطع

Ex: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{2, 4, 6, 8\}$
$A \cap B = \{2, 4\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

* اتحاد ← المشتركة فقط (U)
* تقاطع ← الكل بس دون تكرار

المحاضرة الأولى

22 /10/2017

Numbers

1). Natural Number: ($\mathbb{N}$) الأعداد الطبيعية

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$\boxed{\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+}$ 0 ليس عدد طبيعي ، هي مجموعة صحيحة موجبة

2). Integar Number: ($\mathbb{Z}$)

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$

3). Rational Number: ($\mathbb{Q}$)

$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}, a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$ الدورية $\in \mathbb{Q}$

هي الأعداد النسبية والتي تتكون من الصحيحة والغير صحيحة تكتب على شكل الأعداد

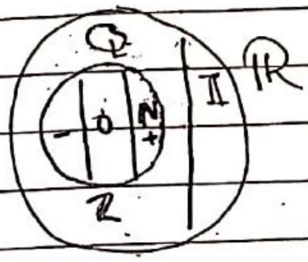
4). Irrational Number: ($\mathbb{I}$)

$\mathbb{I} = \{\sqrt{2}, \sqrt{7}, \pi, e, \dots\}$

مجموعة الأعداد العشرية الغير منتهية والجذور التي ليس لها جذور صحيحة
الدورية

5). Real Number: ($\mathbb{R}$)

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$



$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

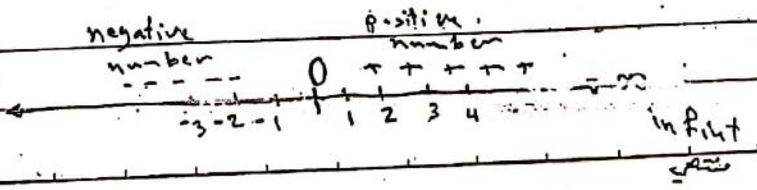
Real Line

$x > 0 \rightarrow$ positive (+)

$x < 0 \rightarrow$ negative (-)

Less than $<$ bigger than $>$

greater than



الأولى

Absolute Value

القيمة المطلقة

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

خواص القيمة المطلقة

2. $\sqrt{a^2} = |a|$

$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = |5| = 5$

$\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$

3. $|a| = 0$ iff $a = 0$

4. $|a| = |-a|$

5. $|a+b| \leq |a| + |b|$

6. $|a|^2 = a^2$

انتهت المحاضرة الأولى

المحاضرة الثانية ٢٤/١٠ الثلاثاء

Interval

الفترة

1. open interval: $(a,b) = \{x : a < x < b\}$

Ex: $(5,8) = \{5 < x < 8\}$

2. closed interval: $[a,b] = \{x : a \leq x \leq b\}$

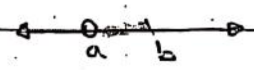
Ex: $[2,7] : \{2 \leq x \leq 7\}$

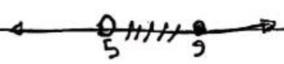
3. half closed interval:
opened

المحاضرة الثانية

شهر 24/10

$[a,b) = \{x : a \le x < b\}$ 

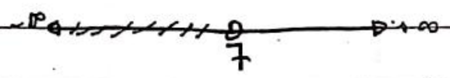
$(a,b] = \{x : a < x \le b\}$ 

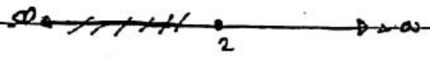
Ex: $(5,9] = \{5 < x \le 9\}$ 

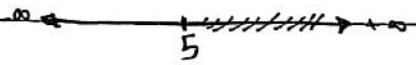
4. $(-\infty,a)$ / $(-\infty,a]$ * عند $\infty \Leftarrow$ دائماً القوس مفتوح

(a,∞) / $[a,\infty)$

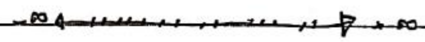
$(-\infty,+\infty)$

Ex: $(-\infty,7)$ 

$(-\infty,2]$ 

$[5,\infty)$ 

م٢ - ٦٤

$(-\infty,+\infty)$ 

Algebra ... الجبر

فرق مربعين

$$\boxed{a^2-b^2 = (a-b)(a+b)}$$

$x^2-25 = (x-5)(x+5)$

فرق مكعبين

$$\boxed{a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

$x^3-27 = (x-3)(x^2+3x+9)$

جمع مكعبين

$$\boxed{a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

المحاضرة الثانية

$x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$

Note ومجموع مربعين لا يحلل لأن المميز سالب

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

المطابقات التربيعية

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

المطابقات التكعيبية

$(x+5)^2 = x^2+2(5)x+25 = x^2+10x+25$

$(x+3)^3 = x^3+3(x^2)(3)+3(3)^2x+(3)^3$
$= x^3+9x^2+27x+27$

polynomials .... كثير الحدود

A polynomial of one variable has the form

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$

حيث أن $a_n, a_{n-1}, \dots\dots, a_1, a_0$ ((Cofficient)) كوفيشنت

و n (degree)

Ex: $P(x)=5x+7x^2-2$

اقتران تربيعي

Cofficient $(7, 5, -2)$

degree (2)

المحاضرة الثانية

A polynomial of degree 1 has the form

$p(x) = ax + b \; ; \; a \neq 0 \rightarrow$ linear خطي

لاقترانات التي منحناها خط مستقيم

A polynomial of degree 2 has the form

$p(x) = ax^2 + bx + c \; ; \; a \neq 0 \rightarrow$ quadratic
تربيعي

القانون العام لحل الاقتران التربيعي

c b a

$$r = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$

Ex

$f(x) = 2x^2 + x - 3$

a ⟸ معامل x^2
B ⟸ معامل المتغير الثاني
c ⟸ الحد الثابت

$a = 2 \quad b = 1 \quad c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 1 - 4(2)(-3) = 1 + 24 = 25 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

$$r = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{cases} \dfrac{-1+5}{4} = 1 \\[2ex] \dfrac{-1-5}{4} = \dfrac{-6}{4} \end{cases}$$

** انتهت المحاضرة الثانية **

Notes

$a^2 \mp b^2 \neq (a+b)^2$

التربيع يوزع على الضرب و القسمة فقط ولا يوزع على الجمع والطرح

$(ab)^2 = a^2 b^2 \; ; \; \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 = \dfrac{a^2}{b^2}$

المحاضرة الثالثة

الخميس 26/10

المحاضرة الثالثة

Geometry: الهندسة

1. Triangle: المثلث

مساحة المثلث = نصف القاعدة بالارتفاع

$$\boxed{area = \frac{1}{2} \cdot c \cdot M}$$

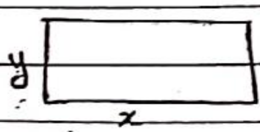
Ex. 

$area = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$

2. square: المربع

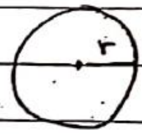
$\boxed{area = x^2}$ المحيط Perimeter $= 4x$

3. Rectangle: المستطيل



$$\boxed{\begin{array}{l} area = xy \\ P = 2x + 2y \end{array}}$$

4. circle: الدائرة



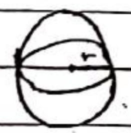
r: نصف القطر

$$\boxed{\begin{array}{l} area = \pi r^2 \\ P = 2\pi r \end{array}}$$

محيطها مشتقة المساحة

المساحة = π . مربع نصف القطر

5. sphere: كرة



ثلاثية الأبعاد:

الأشكال الثلاثية الأبعاد لها حجم (V) أما ثنائية الأبعاد لها مساحة $Ar = a$

حجم

مساحة سطح

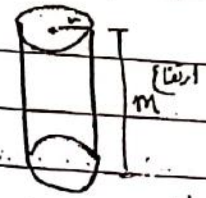
$$\boxed{\begin{array}{l} Volume = \frac{4}{3} \pi r^3 \\ surface\ Area = 4 \pi r^2 \end{array}}$$

مشتقة

المحاضرة الثالثة

26/10 الخميس

6. cylinder : اسطوانة



$$\boxed{\text{Volum} = \pi r^2 . m}$$

مساحة القاعدة × الارتفاع

7. Cone : مخروط

حجم المخروط = ثلث حجم الأسطوانة

$$\boxed{\text{Volum} = \frac{1}{3} . \pi r^2 . m}$$

>>> ...... Inqualites ...... <<< متباينات

تحتوي على إشارة $<, >, \leq, \geq$

The propartioes of inqualitys

1) $\left.\begin{array}{l} a<b \\ b<c \end{array}\right\} \longrightarrow a<c$

$5<7 \;,\; 7<9 \to 5<9$

2). $a<b$

$a \mp c < b \mp c$

لو أضفنا أي عدد موجب أو سالب للطرفين المتباينة فإنها لا تتغير

$5<7 \Rightarrow 5+2 < 7+2 \quad 7<9$

3). $a<b \Rightarrow a.c < b.c$ if $c>0$ موجب

لو ضربنا طرفي المتباينة بعدد موجب لا تتغير وتبقى إشارتها كما هي (العشرة)

$a<b \Rightarrow a.c > b.c$ if $c<0$ ثالث

تقلب إشارة المتباينة إذا ضربنا (قسمنا) طرفي المتراجحة بعدد سالب

$5>3 \Rightarrow 5.2 > 3.2 \quad 10>6$

$5>3 \Rightarrow 5.(-2) > 3(-2) \quad -10 < -6$

المحاضرة الثالثة

الخميس 26/10

4) $a > b \rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(تتغير) تُقلب إشارة المتباينة إذا قلبنا المتباينة

$3 > 2 \rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

الخلاصة: لا تتغير إشارة المتباينة إذا أضفنا أو طرحنا أي عدد (موجب أو سالب) لطرفي المتباينة. أو قسمنا أو ضربنا بعدد موجب

تُقلب إشارة المتباينة بحالتين فقط (الضرب والقسمة بعدد سالب) وعندما نقلب المتباينة.

Solving the inequality

Ex1 $2x + 5 > 3$

$2x + 5 - 5 > 3 - 5 \Rightarrow 2x > -2 \Rightarrow x > -1$

$(-1, +\infty)$

Ex2 $3 - 4x \geq 5$

$-3 + 3 - 4x \geq -3 + 5 \Rightarrow -4x \geq 2$

نضرب بـ $(-\frac{1}{4})$ ← تتغير إشارة المتباينة

$x \leq -\frac{1}{2}$

$(-\infty, -\frac{1}{2}]$

Ex3 $1 \leq 2x + 3 < 5$

$-3 + 1 \leq 2x < -3 + 5 \Rightarrow -2 \leq 2x < 2$

$-1 \leq x < 1 \rightarrow x \in [-1, 1)$

Ex4 $x^2 - 1 < 0$

ملاحظة: بالمتباينات التربيعية (بالأسس متطابقات) نحاول أن تبقى على طرف والطرف الثاني

$x^2 - 1 = 0$ نجعلها تساوي الصفر

المحاضرة الثالثة

الخميس ٢٦/١٠

Ex: $x^2-1<0$

$x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0$

إما $x-1=0 \Rightarrow x=1$

نعوض قيم موجبة في $x-1$ وقيم سالبة لنعرف الإشارات

$- - - - - - \quad +1 \quad + + + +$

نضرب

أو $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

نعوض قيم موجبة وسالبة فيها $- - - - - - \quad -1 \quad + + + + + + +$

لازم نضرب بالمستقيم لإيجاد الحل ومجال التربيعة $-\infty \quad + + + + \quad -1 \quad - - - \quad +1 \quad + + + + + \quad \infty$

حيث نضرب الإشارات على المستقيم

بما أن $x^2-1<0$ أي المتباينة أصغر من الصفر (سالب) نأخذ المجال السالب

$\Leftarrow x\in(-1,+1)$

Ex: $x^2-1>0$

نفس الطريقة السابقة ولكن بما أن إشارة المتباينة أكبر من الصفر

فإن المجال هو

S: $(-\infty,-1)\cup(+1,+\infty)$

انتهت المحاضرة.

المحاضرة الرابعة

الأحد ١٠/٢٩

$\frac{2x}{2} > \frac{8}{2}$ $\quad x > 4$

$2x - 3 > 5$
$\quad +3 \quad +3$

$2x > 8 \Rightarrow x > 4 \qquad (4, \infty) \qquad -\infty \longleftarrow 4 \longrightarrow \infty$

$-- \; 4 \; ++$

$x^2 - 4 \geq 5 \qquad (4, \infty)$

$x^2 - 4 - 5 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 9 \geq 0$

إما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \qquad -\infty \; - - - - - - \; 3 \; +++ \; \infty$

أو $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \qquad -\infty \; - - \; -3 \; + + + + \; \infty$

$x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty) \qquad +++ \; -3 \; - - - \; 3 \; +++$

$(x-1)(x-3)(x+2) > 0$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \qquad -\infty \; - - - \; 1 \; +++ \; \infty$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \qquad -\infty \; - - - \; 3 \; ++ \; \infty$

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \qquad -\infty \; - - \; -2 \; + + + + \; \infty$

$-\infty \; - - - \; -2 \; ++ \; 1 \; - - \; 3 \; ++ \; +\infty$

$x \in (-2, 1) \cup (3, \infty)$

$(x-1)^2 (x-3)^3 (x+2)^4 > 0$

نقوم نفس خطوات (ما تحت التربيع) ثم نجري العمليات على الإشارات بمستقيم الأعداد

وهذا يعني $(x-1)^2$ نفس خطوات ... ثم نقوم بعملية تربيع الإشارات

الاثنين المحاضرة الرابعة
29/10/الأم

$(x-1)^2 \rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

نوزع الإشارات

$-\infty \quad + + + + \quad 1 \quad + \quad + \quad + \quad \infty$

$(x-3)^3 \rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$

$(-)^3 = -$ نكتب الإشارات

$-\infty \quad - - - - - - \quad 3 \quad + + + \quad \infty$

$(x+2)^4 \rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$-\infty \quad + + \quad -2 \quad + \quad + \quad + \quad + \quad \infty$

المتباينة على شكل حاصل ضرب الإشارات نغير الأعداد

المتباينة > 0 فإن $\quad -\infty \quad - - \quad -2 \quad - - \quad 1 \quad - - \quad 3 \quad + + \quad \infty$

$x \in (3, \infty)$

Note

$$\frac{a}{b} > 0 \rightarrow a \cdot b > 0$$

كإشارة وعليه
كجواب

$$\frac{a}{b} < 0 \rightarrow a \cdot b < 0$$

Ex: $\frac{x+2}{x-3} \geq 0 \rightarrow$ نضرب $(x+2)(x-3) \geq 0$

$x \neq 2 \quad x \neq 3$

$(x+2)(x-3) \geq 0 \Rightarrow$

$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \qquad -\infty \quad - \quad -2 \quad + + \quad + \quad \infty$

$x-3=0 \Rightarrow x=3$

$-\infty \quad - \quad - \quad - \quad 3 \quad + + \quad \infty$

$x \in (-\infty, -2] \cup (3, \infty)$

$-\infty \quad + + \quad -2 \quad - - \quad 3 \quad + + \quad \infty$

E. R.

المحاضرة الرابعة

الثلاثاء ١٠/٢٩

ضع دائرة

الحشابات الحصة

واجب

$$\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)} > 0$$

$(x-1)(x-3)(x-2) > 0$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x-3=0 \Rightarrow x=3$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$x \in (1,2) \cup (3,\infty)$

$$\frac{x+2}{1-x} < 1$$ واجب

ننقل 1 ونوحد المقامات

$$\frac{(x+2)}{1-x} - \frac{(1-x)}{1-x} < 0$$

$$\frac{x+2-1+x}{1-x} = \frac{2x+1}{1-x} < 0$$

$-(2x+1)(1-x) < 0$

$2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

$1-x=0 \Rightarrow x=1$

$x \in (-\infty,-\frac{1}{2}) \cup (1,\infty)$

$$\frac{2X}{} \quad 1$$

$$\frac{\cancel{X}+2}{1-X} = 1+\cancel{X}$$

$$\frac{2X+1}{1-X} \qquad (2X+1)(1-X) < 0$$

الأكبر والأصغر ← متباينة
المساواة ← معادلة

volve inquality ← ...

المحاضرة الرابعة
الأحد ٩/٢٠

مهم: راح يكون عليه كثير من الأسئلة

inquality and absolut Value

عندما تكون أصغر منها C نحصرها بـ C وسالب C

1) $|f(x)| < c \rightarrow -c < f(x) < c$

أيضاً ≤

Ex $|2x+1| < 5 \rightarrow -5 < 2x+1 < 5$
$-1 \quad -1$

$-6 < 2x < 4 \rightarrow -3 < x < 2 \quad x \in (-3, 2)$

$-\infty \quad -3 \quad 2 \quad +\infty$

2) $|f(x)| > c \rightarrow f(x) > c$ أو (or) $f(x) < -c$

Ex $|3x-5| \geq 7$ solve

$b < |f(x)| < a$ موجب

$b < f(x) < a \qquad b < -f(x) < a$

إما $3x-5 \geq 7 \Rightarrow 3x \geq 12 \Rightarrow x \geq 4$

$-\infty \quad 4 \quad +\infty \qquad x \in [4, +\infty)$

أو $3x-5 \leq -7 \Rightarrow 3x \leq -2 \Rightarrow x \leq -\frac{2}{3}$

$-\infty \quad -\frac{2}{3} \quad +\infty \qquad x \in (-\infty, -\frac{2}{3}]$

$x \in (-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [4, +\infty)$ مربوطة مع

$-5 < |f(x)| < 3$ ~~-5~~ سالب نحذفها
نعمل

3) $b < |f(x)| < a$

① إذا كان $a < 0$ سالب ليس لها حل
② إذا كانت $b < 0$ سالبة نحذفها ونكمل
③ $a > 0$ و $b > 0$ موجبان بشرط $b < a$ لها حلين

لا على الورقة

$b < f(x) < a$
إما
$b < -f(x) < a$
أو
ليس لها حل

إذا كانت $b > a$ ليس لها حل

إذا أصغر نحصر بين سالب

وإذا كان أكبر منها $f(x)$ أكبر من أو

* اذا كان الطرفين موجبات نأخذ الطرفين ± ونحل المتباينة

* a ← سالبة ليس لها حل
* b ← سالبة نحذفها ونكمل حل

المحاضرة الرابعة

الخميس ١٠/٣

Ex_1: $3 < |2x+1| < -2$

عندك $a = 2$ سالب فعليه لها حل

$\emptyset$ solution.

Ex_2: $\cancel{-2} < |2x+1| < 3$

$b = -2$ سالبة فلنا نحذفها ونكمل

نصير $|2x+1| < 3$

$|f(x)| < 3$

$-3 < 2x+1 < 3$

$-4 < 2x < 2 \Rightarrow -2 < x < 1 \quad (-2,1)$

Ex_3: $1 < |2x+1| < 3$

إما

$1 < 2x+1 < 3$

$0 < 2x < 2$

$\frac{0}{2} < x < 1$

$0 < x < 1$

$x \in (0,1)$

$-\infty$ —— 0 //// 1 —— $+\infty$

أو

$1 < -(2x+1) < 3$

$1 < -2x-1 < 3$

$2 < -2x < 4$

$-1 > x > -2$

$-2 < x < -1$

—— -2 //// -1 —— $(-2,-1)$

$x \in (-2,-1) \cup (0,1)$

4) $|f(x)| = c$ معادلة وليس متباينة

إما $f(x) = c$ أو $f(x) = -c$

Ex: $|2x+5| = 3$

$2x+5 = 3$

$2x = -2$

$x = -1$

$2x+5 = -3$

$2x = -8$

$x = -4$

المعادلات غير وليس فترات

التذكير بالحاضرة

$x \in \{-1, -4\}$

المحاضرة الخامسة

الثلاثاء ٣١/١٠

سؤال ليه ما أخذنا

$9, -9$

إذا كانت معادلة

مجموعه وليس فترة

$|f(x)| = c$

$f(x) = c$

$f(x) = -c$

$$|x-2| + |x-5| = 9$$

له أربع حالات $(-\,-)\ (+\,-)\ (-\,+)\ (+\,+)$

1). $(x-2)+(x-5) = 9$

$2x - 7 = 9 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow \boxed{x = 8}$

2) $(x-2) - (x-5) = 9$

$x-2-x+5 \Rightarrow -2+5 = 9 \Rightarrow 3 = 9$ X مرفوض

3) $-(x-2)+(x-5) = 9$

$-x+2+x-5 = 9 \Rightarrow -3 = 9$ X مرفوض

4) $-(x-2)-(x-5) = 9$

$-2x+2+5 = 9 \Rightarrow -2x = 9-7 \Rightarrow \boxed{x = -1}$

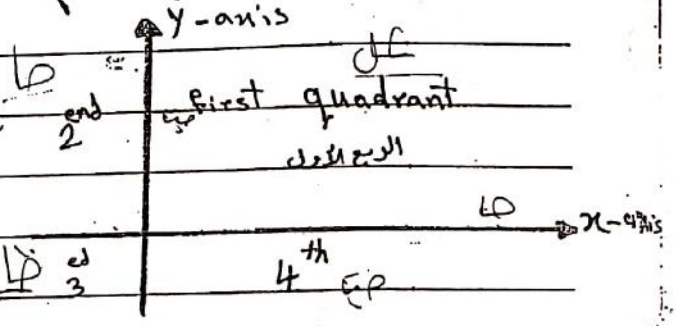
$x \in \{-1, 8\}$ مجموعة وليست فترة

* * * * *

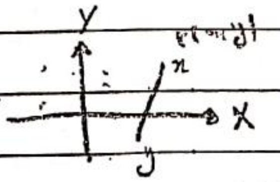
Coordinate plane

X axis = horizontal
أفقي

Y axis = veartical
عمودي



We called (a,b) to be order pair (زوج مرتب)



لتكن

* Let $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$

تعاريف

1). the distance between P_0, P_1 مسافة بين نقطتين

$$\underset{\text{مسافة}}{d}(P_0, P_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$$

المحاضرة الخامسة
الثلاثاء ٢١/١٠

2). The Mid point P_0, P_1 is $M(P_0, P_1)$ نقطة المنتصف

$$M(P_0, P_1) = \left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}\right)$$

3) The slop الميل

$$\boxed{m = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}}$$

Ex: $P_0(1,5)$, $P_1(4,7)$

* $d(P_0, P_1) = \sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2} = \sqrt{(4-1)^2+(7-5)^2}$

$(3)^2 + (2)^2$

$d(P_0, P_1) = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

* $M(P_0, P_1) = M\left(\frac{x_1+x_0}{2}, \frac{y_1+y_0}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{12}{2}\right)$

$= (2.5, 6)$

* $m = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \frac{7-5}{4-1} = \frac{2}{3}$

The equation of line l passing through $P(x,y)$, $P_0(x_0, y_0)$

$y - y_0 = m(x - x_0)$ المماس

معادلة الخط المستقيم

$$\boxed{y = mx + b}$$

b: المقطع (y) الصادي

slop ميل ← intercept (y)

المحاضرة الخامسة

$\frac{2}{0}$ غير معرف | $\frac{0}{2} = 0$

ملاحظة: إيجاد الميل [عن طريق القانون $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$

معامل x = الميل

عن طريق $\tan$ الزاوية]

Ex: Find the slop, y-intercept

$L_1 : 3x + 3y - 12 = 0$

$3y = -3x + 12$

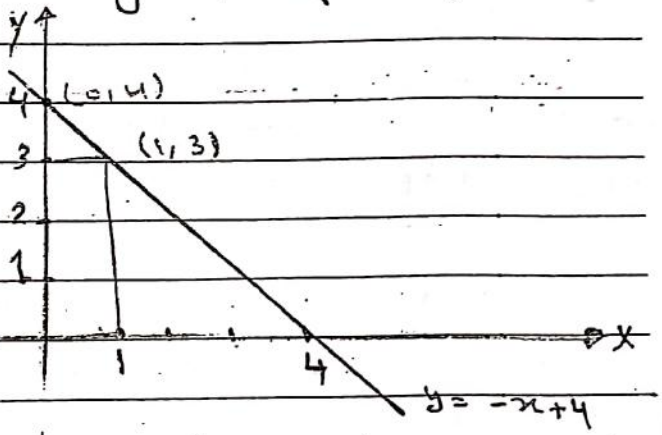
$y = -x + 4$

$y = mx + b \Rightarrow m = -1$

y-intercept $= 4$

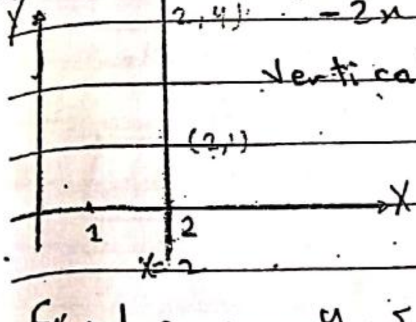
نفرض أي نقطتين ونعوض

x	0	1
y	4	3



Ex: $L_2 : 6 - 2x = 2$

$-2x = -4 \Rightarrow x = 2$

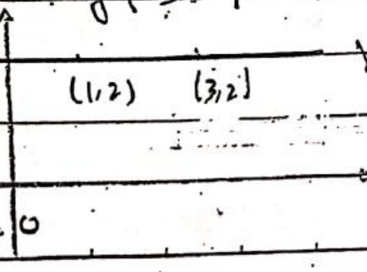


الميل غير معرف. $y = 0$ هنا اقتران عمودي vertical

نفرض $(2,4)$ $(2,1)$ $m = \frac{4-1}{2-2}$

$\frac{3}{0}$ غير معرف undefined

Ex: $L_3 : y + 5 = 7 \Rightarrow y = 2$



$y = 2$

اقتران أفقي والميل 0 horizontal

$y = mx + b$

$y = 0x + b$

$b = 2$ intercept

اي نقطتين

$(1,2)$

$(3,2)$

$\frac{2-2}{3-1} = \frac{0}{2} = 0$

Scanned by CamScanner

المحاضرة السادسة
الخميس ٣/١١

كل اقترانات كثيرات الحدود
يكون دائماً Dom = R
واحفظ

Functions
الاقترانات

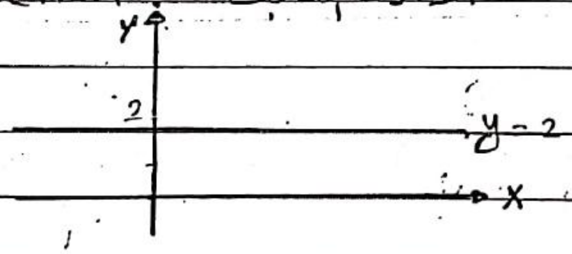
Def: A function $f: D \to R$ is a rule the send every element in D to only one element in R.

D: is called the domain = Dom(f) المجال
R: is called the Range = Range(f) المدى

Polynomial function

1. Constant function: الاقتران الثابت

Ex: $F(x) = 2$



Dom(f) = R
Range(f) = 2

التوضيح Dom هي الاعداد التي نستطيع أن نعوضها بالاقتران

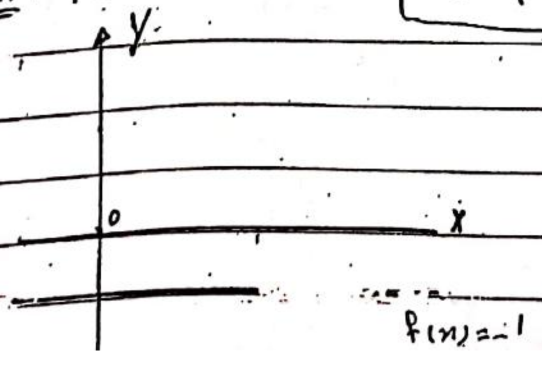
Dom: $f(1) = 2$, $f(2) = 2$, $f(-5) = 2$, $f(-1) = 2$ Range

ثابتة

Note
Rang constant = constant
Dom constant = R

$\boxed{\text{Dom الثابت } \mathbb{R} \text{ و Rang هو الثابت}}$

Ex: $f(x) = -1$



Dom(f) = R
Rang(f) = -1

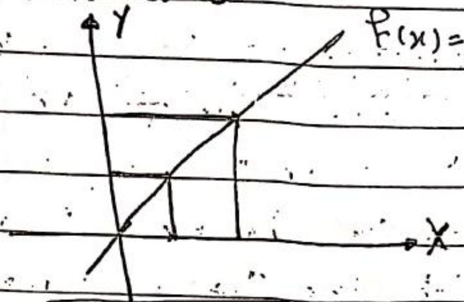
المحاضرة السادسة
الخميس ٢/١١

2. Linear Function

اقتران خطي

$F(x) = ax + b \quad ; \quad a \neq 0$

Ex: $f(x) = x$



x	0	1	2
y	0	1	2

$(0,0) \; ; (1,1) \; ; (2,2)$

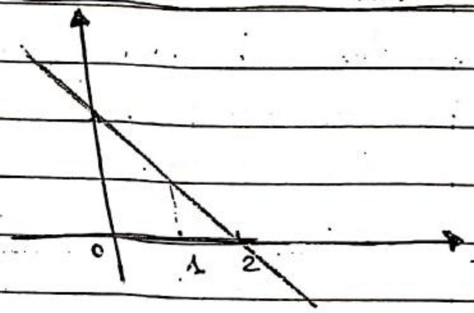
Range = R
DoM = R

Ex: $f(x) = 2 - x$

x	0	1
y	2	1

$(0,2) \quad (1,1)$

Note للاقتران الخطي $f(x) = ax + b$: DoM = Rang = $\mathbb{R}$



DoM (f) = Rang (f) $= \mathbb{R}$

Note عندما يكون الاقتران موجب الرسمة ، واذا كان الاقتران سالب الرسمة

3. quadratic function

الاقتران التربيعي

Note بالاقتران التربيعي DoM = $\mathbb{R}$

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , a \neq 0$

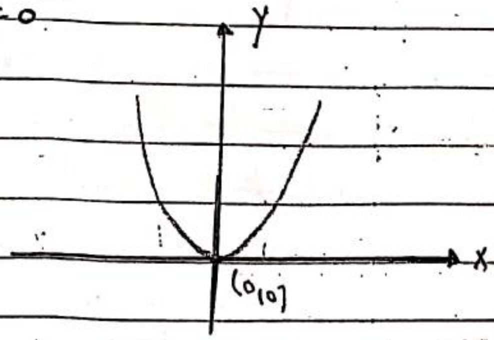
رأس الاقتران التربيعي $x = \frac{-b}{2a}$

Ex. $f(x) = x^2$ تربيعي $\quad a = 1 \;\; b, c = 0$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2} = 0$

$y = f(0) = (0)^2 = 0 \Rightarrow$

$(x, y) = (0, 0)$



DoM (f) = R

Rang (f) $= [0, \infty)$

سلام
منتصر

... لما تكون a سالب تكون decreasing على [رأس, ∞)

* // // سالب // // ← // (−∞, رأس]

* نحدد الرأس عن طريق $\boxed{x = \frac{-b}{2a}}$

المحاضرة السادسة

خميس ١١/٢

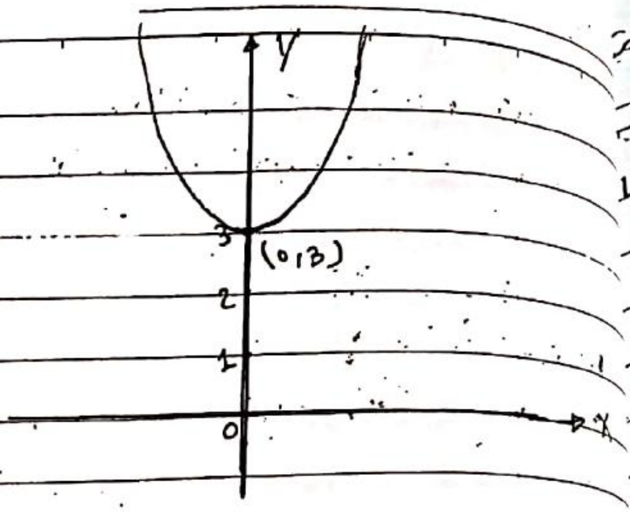
Ex_2: $F(x) = X^2 + 3$

$a = 1 \quad b = 0 \quad c = 3$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2} = 0$

$y = f(0) = (0)^2 + 3 = 3$

$(x, y) = (0, 3)$



Dom (f) = $\mathbb{R}$

Rang(f) = $[3, \infty)$

Ex_3: $f(x) = x^2 + 2x + 1$

$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 1$

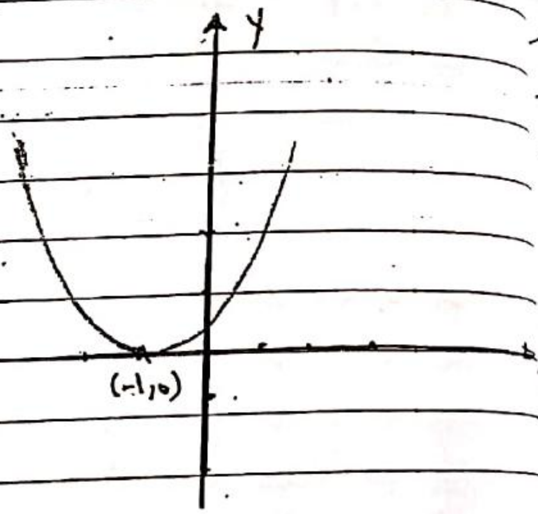
$y = f(x)$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(1)} = -1$

$y = f(-2) = (-1)^2 + 2(-1) + 1$

$y = 1 - 2 = 0$

$(x, y) = (-1, 0)$



Dom(f) = R , Range(f) = $[0, \infty)$

important

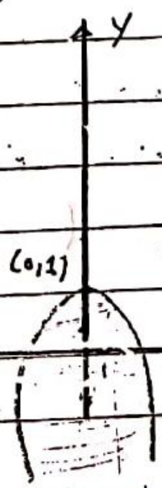
Ex_4: $f(x) = 1 - x^2$

$a = -1 \quad b = 0 \quad c = 1$

$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{-2} = 0$

$f(x) = y = f(0) = 1$

$(x, y) = (0, 1)$



Dom(f) = R

Range(f) = $(-\infty, 1]$

المحاضرة الخامسة وسبعة
الخميس ١١/٢

4. Cubics function

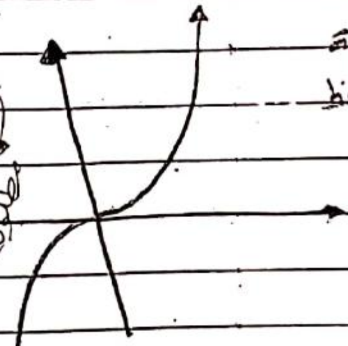
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$

Domain
Range

Ex: $f(x) = x^3$

Dom(f) = R

Range (f) = R



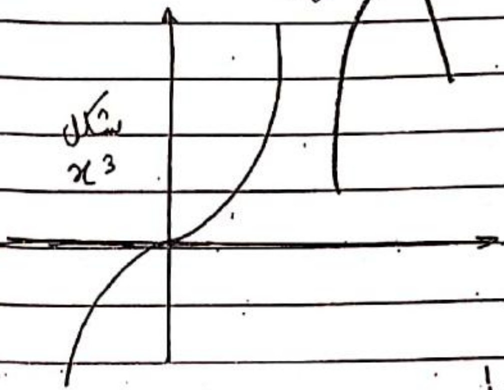
Ex: $F(x) = x^3 + 2$

Dom (f) = R

Range (f) = R

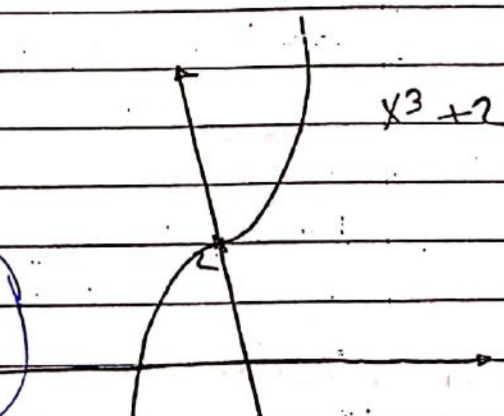
شكل x^3

نرفع الرسمة بمقدار 2 عن x^3



لو كان $x^3 - 2$ فإننا ننزل بالرسمة بمقدار 2.

$x^3 + 2$



Dom(f) = Range (f) = واحدة = R في الاقترانات التكعيبية

5. Absolute Value functions

اقترانات القيمة المطلقة

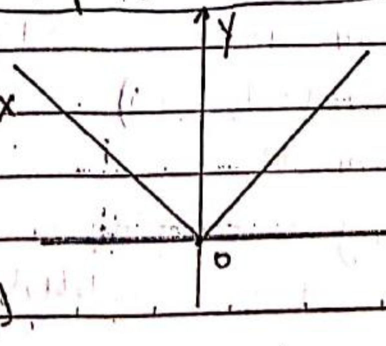
Ex1. $F(x) = |x|$

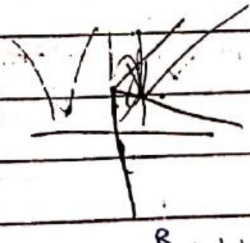
linear اقتران x

$x = 0$

Dom(f) = R

Range (f) = $[0, \infty)$





الاقتران الخطي Dom = Range = R

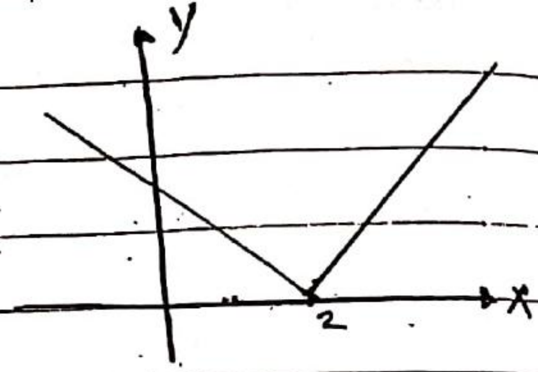
الاقتران التربيعي Dom = R / Range

موجبة $(\ \cdot\ , \infty)$ سالبة $(-\infty, \ \cdot\ )$

* * * * * * * * *

المحاضرة السادسة

الخميس ١١/٢



Ex: $f(x) = |2x - 4|$

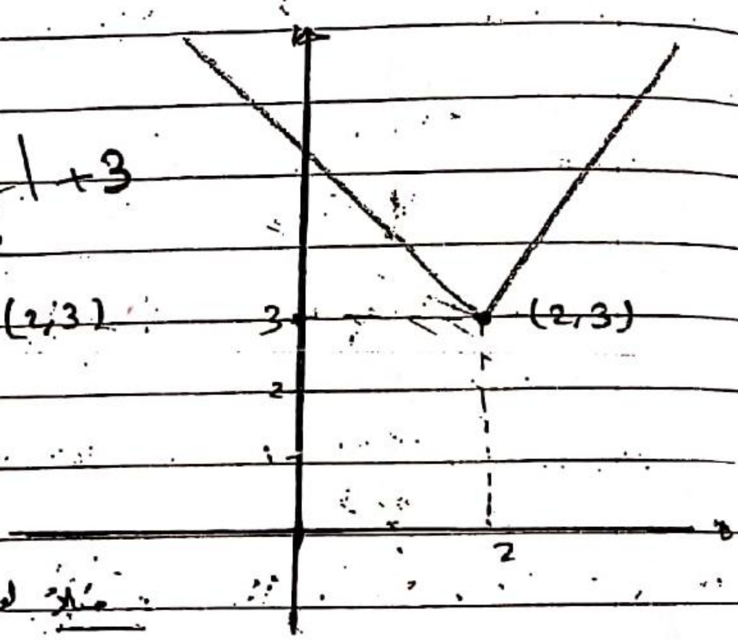
$2x - 4 = 0$

$2x = 4 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = 0 \quad (2, 0)$

$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Range(f) = [0, \infty)$



Ex: $f(x) = |2x - 4| + 3$

$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

$y = f(2) = 3 \Rightarrow (x, y) = (2, 3)$

$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Range(f) = [3, +\infty)$

مثلاً: لو كان $|2x-4|-3$ تنزل تحت 3

انتهت المحاضرة السادسة

المحاضرة السابعة
الأحد ٥ / ١١

Note: polynomail (linar, quadrtic, consonat, cubics, ...)

always $Dom(F) = \mathbb{R}$

Dom: ما بيأثر عليه بأي نوع سواء كانت ثابتة خطي تربيعي تكعيبي ..... دومها

هو $\mathbb{R}$

5. rational function

الاقتران الكسري

$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. DoM

خطوات تفكير حل

1. منطلع Dom البسط و Dom المقام
2. منطلع التقاطع بين Dom البسط والمقام أي البسط ∩ المقام
3. منطلع أصفار المقام أي نجعل المقام يساوي صفر
4. Dom F هو Dom المشترك - أصفار المقام

Ex $F(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

$Dom(2x+1) = \mathbb{R}$
$Dom(x-3) = \mathbb{R}$ } $\mathbb{R}$ المشترك

لإيجاد أصفار المقام $x-3=0 \Rightarrow x=3$

$Dom\ F = \mathbb{R} - \{3\}$

Ex_2: $f(x) = \frac{2}{x^2-4}$

$Dom(2) = \mathbb{R}$
$Dom(x^2-4) = \mathbb{R}$ } $\mathbb{R}$

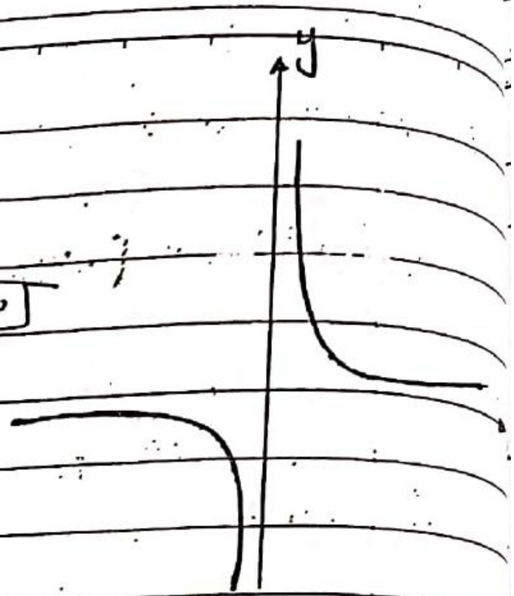
$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x = \mp 2$

$Dom\ f = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$
مجموعة وليست فترة

السابعة

الأحد ١١/٥

Ex3: $f(x) = \frac{1}{x}$

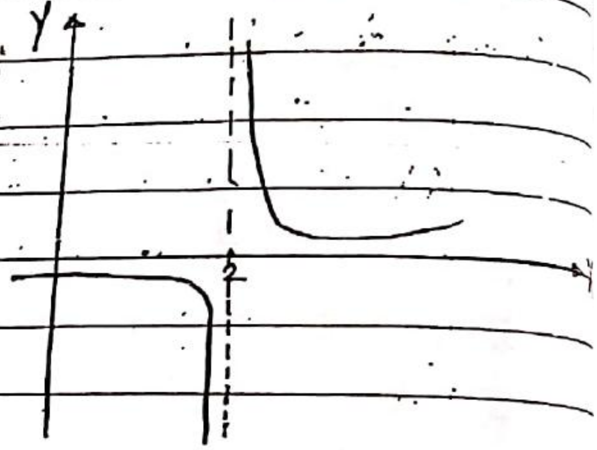


$Dom(1) = \mathbb{R}$ } $\mathbb{R}$
$Dom(x) = \mathbb{R}$

أصفار المقام $\boxed{x = 0}$

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
$Rang(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ من المطلوب

Ex4: $f(x) = \frac{1 \to \mathbb{R}}{x-2 \to \mathbb{R}}$ } $\mathbb{R} - \{2\}$



$Dom(1) = \mathbb{R}$ } $\mathbb{R}$
$Dom(x-2) = \mathbb{R}$
$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$
$Dom(f) = \mathbb{R} - \{2\}$

الرسم منزيح الرسمة بمقدار 2

وإذا بالجذر تكون مغلقة عند الرقم $[3, \infty)$

6. Square root functions اقتران الجذر التربيعي

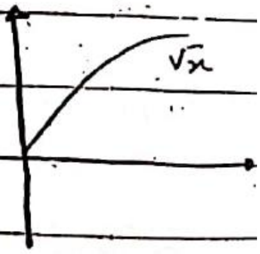
Ex1. $F(x) = \sqrt{x}$ نعوض النقاط في الدالة التي تحت الجذر لمعرفة الإشارات

$x = 0$ $\boxed{\text{نجعل ما تحت الجذر = الصفر}}$

$-\infty$ - - - $\underset{0}{\cdot}$ + + + ∞

$Dom(f) = [0, \infty)$

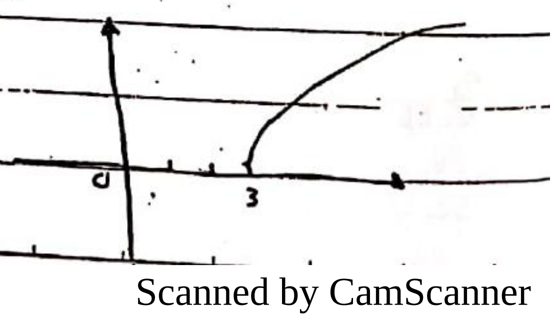
$Rang(f) = [0, \infty)$



Ex2. $F(x) = \sqrt{x-3}$ 3

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ $-\infty$ - - - $\underset{3}{\cdot}$ + +

$Dom(f) = [3, \infty)$
$Rang(f) = [0, \infty)$



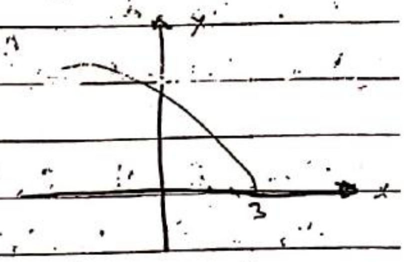
المحاضرة السابعة
الأحد ١١/٥

Range ... ؟

· Ex_3. $F(x) = \sqrt{3-x}$

$3 - x = 0 \Rightarrow x = 3$

$-\infty \quad + + \quad 3 \quad - - - \quad \infty$



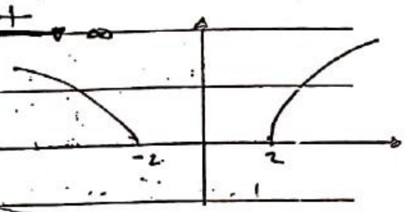
$Dom(f) = (-\infty, 3]$

Range $[0, \infty)$

· Ex_4. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \mp 2$

$-\infty \quad + + \quad -2 \quad - - \quad +2 \quad + + \quad \infty$



$Dom(f) = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

* * * * * * *

* Piecewise functions

الاقترانات المتشعب .

Ex.

$$F(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 2x+1 & x < 0 \end{cases}$$

Dom

الحل: ننظر للحدود Dom

Range

$Dom(x^2) = [0, \infty)$

$Dom(2x+1) = (-\infty, 0)$

$Dom(f) = (-\infty, 0) \cup [0, \infty) = \mathbb{R}$

$Dom(f) = \mathbb{R}$

مسودة

x^2 اقتران تربيعي قطع ناقص

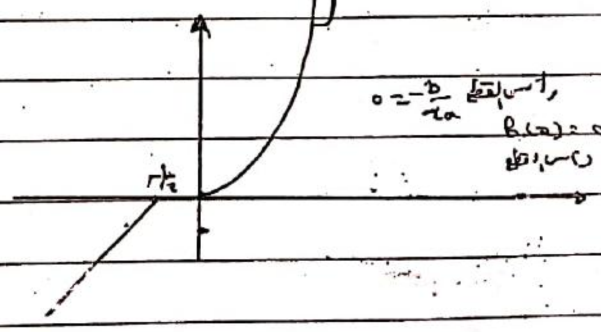
بأنه مجد نقطة رأس القطع

الموجب

$y = 0$

$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ اقتران خطي

نقطة تقاطع مع السالب



رأس القطع $x = -\frac{b}{2a} = 0$

$f(0) = 0$

رأس القطع $(0, 0)$

المحاضرة

الأربعاء ١١/٥

$$Ex_2: f(x) = \begin{cases} x^2+2 & x<0 \\ -1 & 0<x<2 \quad (0,2) \\ x+3 & x\geq 2 \end{cases}$$

$Dom\,(x^2+2) = (-\infty, 0)$

$Dom(-1) = (0, 2)$

$Dom(x+3) = [2, \infty)$

$D_o(f) =$ اتحاد ال Dom ∪

$Dom\,(f) = (-\infty,0) \cup (0,2) \cup [2,\infty)$ $\quad \mathbb{R} - \{0\}$

$Dom\,(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

* * * * * *

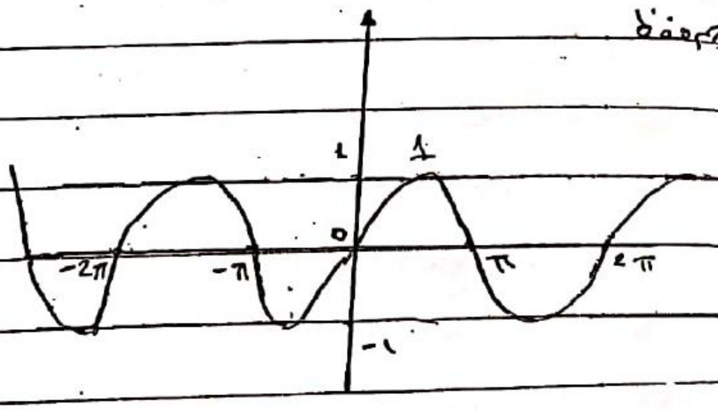
Trigonometric Functions

الاقترانات المثلثية

1. $f(x) = \sin x$

$Dom\,(\sin x) = \mathbb{R}$

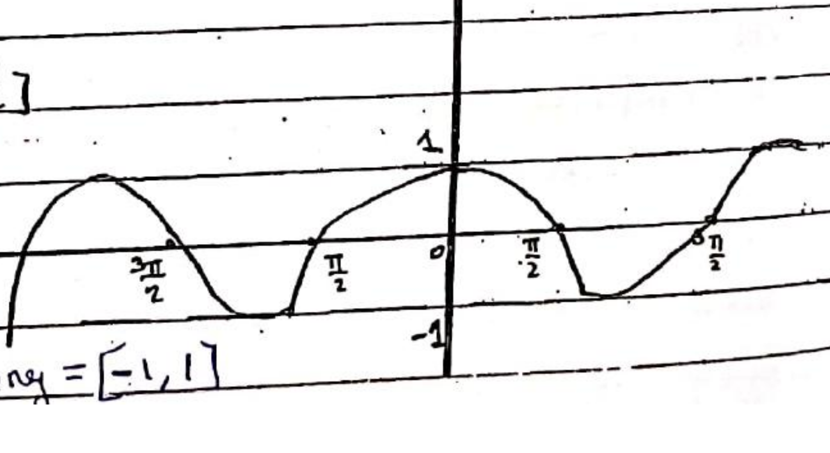
$Range\,(\sin x) = [-1, 1]$ مهمة



2. $f(x) = \cos x$

$Dom\,(\cos x) = \mathbb{R}$

$Range\,(\cos x) = [-1, 1]$ مهمة



$\sin \Rightarrow Dom = R \,/\, Rang = [-1, 1]$

$\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} +$

3. $F(x) = \tan x$ $\left(\frac{\pi}{2} \leftarrow 90\right)$ $\leftarrow (\cos x)$ دائما

$\tan x = \frac{\sin x \to \mathbb{R}}{\cos x \to \mathbb{R}}$

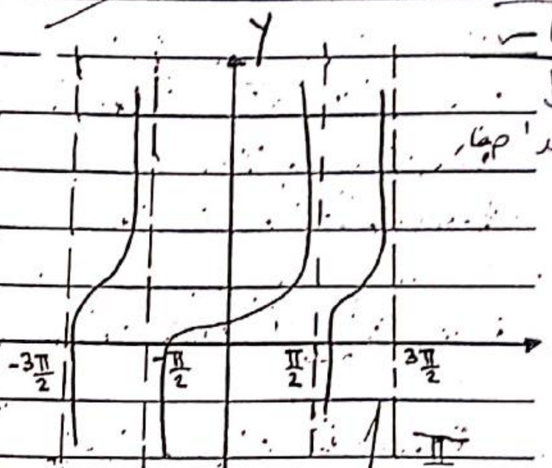
$Dom(\sin x) = \mathbb{R}$

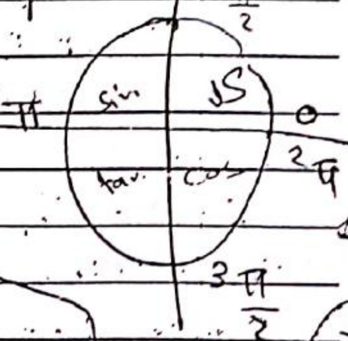
$Dom(\cos x) = \mathbb{R}$

أصفار $\cos x = 0$

$x = \mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{3\pi}{2}, \mp\frac{5\pi}{2}$

$Dom(\tan x) = \mathbb{R} - \left\{\mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$





Notes

$\pi = 180°$ $\qquad \frac{\pi}{2} = 90°$

$\frac{\pi}{3} = 60°$ $\qquad \frac{\pi}{6} = 30°$

$\frac{\pi}{4} = 45°$ $\qquad 2\pi = 360°$

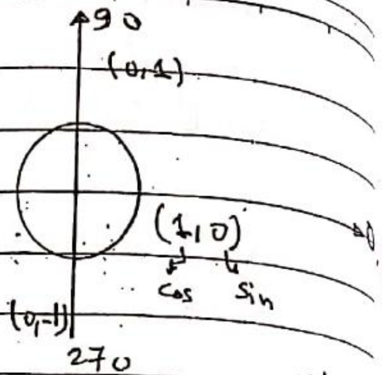
جدول للحفظ

	0	$\frac{\pi}{6} = 30$	$\frac{\pi}{4} = 45$	$\frac{\pi}{3} = 60$	$\frac{\pi}{2} = 90$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

المحاضرة الثامنة

الثلاثاء ٧/١١

4. $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$



$\left.\begin{array}{l} Dom(\cos) = \mathbb{R} \\ Dom(\sin x) = \mathbb{R} \end{array}\right\} \mathbb{R}$

أصفار الدالة $\sin x = 0$

$x = 0, \mp\pi, \mp 2\pi, \mp 3\pi$

Notes.

x على محور $\sin x = 0$

y على محور $\cos x = 0$

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0, \mp\pi, \mp 2\pi, \dots\}$

5. $F(x) = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ سيكان

$\left.\begin{array}{l} Dom(1) = \mathbb{R} \\ Dom(\cos x) = \mathbb{R} \end{array}\right\} \mathbb{R}$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \mp\dfrac{\pi}{2}, \mp\dfrac{3\pi}{2} \dots$

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{\mp\dfrac{\pi}{2}, \mp\dfrac{3\pi}{2}, \mp\dfrac{5\pi}{2} \dots\}$

6. $f(x) = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ كوسيكان

$\left.\begin{array}{l} Dom(1) = \mathbb{R} \\ Dom(\sin x) = \mathbb{R} \end{array}\right\} \mathbb{R}$

$\sin x = 0$

$x = 0, \mp\pi, \mp 2\pi, \mp 3\pi \dots$

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{0, \mp\pi, \mp 2\pi \dots\}$

المحاضرة الثامنة

الثلاثاء ١١/٧

Ex: Find the Domain of the function:

Ex$_1$: $F(x) = \sqrt{6 + 5x - x^2}$

$-x^2 + 5x + 6 \geq 0$

$-x^2 + 5x + 6 = 0$

$x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-6) = 0$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$ $\quad -\infty \leftarrow \; - - \;|_{-1}\; + + \;|_{6}\; - - - \rightarrow \infty$

$Dom(f) = [-1, 6]$ ، لأن ما تحت الجذر يجب أن يكون

موجب ≥ 0 $\sqrt{\ }$ فنختار الفترة الموجبة

والإشارات بواقع يخالف إشارة (x^2).

Ex$_2$: $F(x) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{x - 1}$

$Dom(\sqrt{4-x^2})$; $(\sqrt{4-x^2}) \geq 0$ لم

$4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 4 - x^2 = 0 \quad x = \mp 2$

$-\infty \leftarrow - - \;|_{-2}\; + + \;|_{+2}\; - - \rightarrow \infty$

$Dom(\sqrt{4-x^2}) = [-2, 2]$ ، تقاطع

$Dom(x-1) = \mathbb{R}$

$[-2, 2] \cap \mathbb{R} = [-2, 2]$

أصفار المقام $\quad x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad -\infty \leftarrow - - \;|_{1}\; + + \rightarrow \infty$

$Dom(f) = [-2, 2] - \{1\}$

Note

التقاطع بين $\mathbb{R}$ وأي فترة مباشرة الجواب هو الفترة

$\boxed{\mathbb{R} \cap \text{فترة} = \text{الفترة}}$

المحاضرة الثامنة
الأربعاء ١١/٧

important

(٤٥)

Ex_3. $F(x)=\sqrt{\dfrac{x-3}{x-5}}$

$x-3=0 \Rightarrow x=3$ $\quad -\infty \xleftarrow{\;-\;} 3 \xrightarrow{\;++\;} \infty$

$x-5=0 \Rightarrow x=5$ $\quad -\infty \xleftarrow{\;---\;} 5 \xrightarrow{\;+\;} \infty$

$\dfrac{x-3}{x-5}$ $\quad -\infty \xleftarrow{\;+\;} 3 \;-\; 5 \xrightarrow{\;+\;} \infty$

مفتوح لأنه مقام

$DoM(f)=(-\infty,3]\cup(5,\infty)$

Ex_4: $F(x)=5\sin x$

$DoM(f)=\mathbb{R}$

$Range(f)=[-5,5]$

$-1\le \sin x\le 1$

نضرب بـ 5 $\quad -5\le 5\sin x\le 5$

$[-5,5]$

Ex_5. $f(x)=2-3\cos x$ $\quad$ فاينل هام

$DoM(f)=\mathbb{R}$

$Range(f)=[-1,5]$

$(*-3)$ $\quad -1\le \cos x\le 1$

$3\ge -3\cos x\ge -3$

$(+2)$ $\quad 2+3\ge 2-3\cos x\ge 2-3$

$5\ge f(x)\ge -1$

$-1\le F(x)\le 5$

المحاضرة الثامنة
الثلاثاء ١١/٧

$Ex_6 .\ F(x) = \frac{1}{\sqrt{2-x}} + 3$

$Dom(1) = \mathbb{R}$ المشترك

$Dom(\sqrt{2-x}) = (-\infty, 2]$ $\Big\}$ $(-\infty, 2]$

$2-x \geq 0 \Rightarrow 2-x=0 \ , x=2$ $\quad \overset{+\ +}{\longleftarrow}\underset{2}{|}\overset{-\ -}{\longrightarrow}$

$(-\infty, 2]$

$(\sqrt{2-x})^2 = (0)^2 \Rightarrow 2-x=0 \Rightarrow x=2$

$Dom(f) = (-\infty, 2] - \{2\} = (-\infty, 2)$

$Ex_7 .\ F(x) = \frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x+4}-\sqrt{3}}$

$Dom(\text{بسط}) = \mathbb{R}$ المشترك

$Dom(\text{مقام}) = [-4, \infty)$ $\Big\}$ $[-4, \infty)$

$\sqrt{x+4} \Rightarrow x+4 \geq 0 \quad x+4=0 \Rightarrow x=-4$ $\quad \overset{-\ -}{\longleftarrow}\underset{-4}{|}\overset{+\ +}{\longrightarrow}$

$Dom(\sqrt{x+4}) = [-4, \infty)$

أصفار المقام $\sqrt{x+4} - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow (\sqrt{x+4})^2 = (\sqrt{3})^2$ نربع الطرفين

$x+4 = 3 \Rightarrow x = -1$

$Dom(f) = [-4, \infty) - \{-1\}$

انتهت المحاضرة الثامنة

المحاضرة التاسعة

خميس ٩/١١

Combanation of function

العمليات على الاقترانات

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

2) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

3) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

4) $(f/g)(x) = f(x) / g(x)$; $g(x) \neq 0$

- $\text{dom}(f+g) = \text{dom}(f-g) = \text{dom}(f \cdot g)$

$= \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$

- $\text{dom}(f/g) = \left\{ \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) \right\} - \{x : g(x) = 0\}$

أصفار المقام

Ex $f(x) = x^2 + x + 5$

$g(x) = \sqrt{x} - 2$

1. find $(f+g)x$, $(f+g)(2)$ - $\text{dom}(f+g)$
2. $(f-g)(x)$, $(f-g)(3)$ - $\text{dom}(f-g)$
3. $(f \cdot g)(x)$, $(f \cdot g)(4)$ - $\text{dom}(f \cdot g)$
4. $(f/g)(x)$, $(f/g)(9)$ - $\text{dom}(f/g)$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

$\text{Dom}(g) = [0, \infty)$ ... Dom root

التاسعة
الخميس ١١/٩

$f+g(x) = (x^2+x+5)+(\sqrt{x}-2) =$
$x^2+x+\sqrt{x}+3 =$
$x^2+x+3+\sqrt{x}$

$f+g(2) = (2)^2+2+3+\sqrt{2} = 9+\sqrt{2}$

$\text{DoM}(f+g) = \text{DoM}(f) \cap \text{DoM}(g)$

$\text{DoM}(f+g) = \mathbb{R} \cap [0,\infty) = [0,\infty)$

$(f-g)(x) = (x^2+x+5)-(\sqrt{x}-2)$
$= x^2+x+7-\sqrt{x}$

$f-g(3) = (3)^2+3+7-\sqrt{3} = 19-\sqrt{3}$

$\text{DoM}(f-g) = \text{DoM } f \cap \text{DoM } g$
$= \mathbb{R} \cap [0,\infty) = [0,\infty)$

$(F.g)(x) = (x^2+x+5).(\sqrt{x}-2)$
$= x^2\sqrt{x}+x\sqrt{x}+5\sqrt{x}-2x^2-2x-10$
$=$

$(f.g)(1) = 1+1+5-2-2-10 = -7$

$\text{DoM}(f.g) = \text{DoM}(f) \cap \text{DoM}(g)$
$= \mathbb{R} \cap [0,\infty) = [0,\infty)$

محاضرة التاسعة

الخميس ١١/٢

$$(f/g)(x) = \frac{x^2+x+5}{\sqrt{x}-2}$$

$$(f/g)(5) = \frac{25+5+5}{\sqrt{5}-2} = \frac{35}{\sqrt{5}-2}$$

$\text{Dom}\,(f/g)(x) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x,\ g(x)=0\}$

$\sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (2)^2 \qquad x = 4$

$\text{Dom}(f/g) = \mathbb{R} \cap [0,\infty) - \{4\} = [0,\infty) - \{4\}$

$(3f + 2g)(x)$

$3(x^2 + x + 5) + 2(\sqrt{x} - 2)$

$3x^2 + 3x + 15 + 2\sqrt{x} - 4$

$3x^2 + 3x + 11 + 2\sqrt{x}$

Composition of functions

دمج الاقترانات

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ — g مع f

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$(f \circ g)(x)$ is called composition f with

$\text{Dom}\,(f \circ g) = \text{Dom}\,(g(x)) \cap \text{Dom}\,(f(g(x)))$

الجواب

[illegible]

11/9 [illegible]

Ex: $f(x) = x + 3$

$g(x) = x^2$

Find $(f \circ g)(x)$

1) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2)$

$f(x^2) = x^2 + 3$

[illegible] $f(x+1)$ x^2 x

2) $\mathrm{Dom}\,(f \circ g)(x)$

$\mathrm{Dom}\,(g(x)) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Dom}\,(f(g(x))) = \mathrm{dom}\,(x^2 + 3) = \mathbb{R}$

$\mathrm{Dom}\,(g(x)) \cap \mathrm{Dom}\,(x^2 + 3) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$

Ex $g(x) = \sqrt{3 - x}$

$f(x) = x^2 - 1$

1. $(f \circ g)(x)$ 2. $(g \circ f)(x)$

$\mathrm{Dom}\,(f \circ g)(x)$ $\mathrm{Dom}\,(g \circ f)(x)$

1. $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{3 - x})$

$= (\sqrt{3 - x})^2 - 1 = \cancel{3 - 2\sqrt{3}x + x^2 - 1}$ $3 - x - 1$

[illegible] $= -x + 2$

2. $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1)$

$= g(x^2 - 1) = \sqrt{3 - x^2 + 1} = \sqrt{4 - x^2}$

Scanned by CamScanner

$Dom(f \circ g) =$

$Dom(g(x)) = (-\infty, 3]$

$Dom(f(g(x))) = \mathbb{R}$

$Dom(g(x)) \cap Dom(f(g(x))) = (-\infty, 3]$

$Dom(g \circ f)$

$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Dom(g(f(x))) = [-2, 2]$

$Dom(g \circ f) = \mathbb{R} \cap [-2, 2] = [-2, 2]$

طبعة الجامعة لوا بشارة

الأحد ١٥/١١

Ex1. Let $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$, $(f \circ g)x = 4x$

find $g(x)$

$(f \circ g)x = f\{g(x)\} = 4x$ نعوض في $f(x)$ بدل كل x ب $g(x)$

$\dfrac{2g(x)}{g(x)-1} = 4x \Rightarrow 4xg(x) - 4x = 2g(x)$

$4xg(x) - 2g(x) = 4x$

$\dfrac{g(x)(4x-2)}{(4x-2)} = \dfrac{4x}{4x-2}$

$4xg(x) - 4x = 2g(x)$

$4xg(x) - 2g(x) = 4x$

$g(x)(4x-2) = 4x \Rightarrow g(x) = \dfrac{4x}{4x-2}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $g(x) = x^2$ $h(x) = x+1$

find $(f \circ g \circ h)(x)$.

$(f \circ g \circ h)(x) = f \circ (g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$

نعوض في $g(x)$ ب $h(x)$

$f((x+1)^2) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

نعوض في f

odd and even functions

الاقترانات الفردية والزوجية

Def: $f(x)$ is odd function if

$f(-x) = -f(x)$ فردي

f symmetric about origen

متماثل حول نقطة الأصل ...... الاقتران الفردي

المحاضرة العاشرة

الأحد ١٢/١١

* $f(x)$ is even functions if

$$f(-x) = f(x)$$

& symmetric about y-axis

متماثل حول محور y

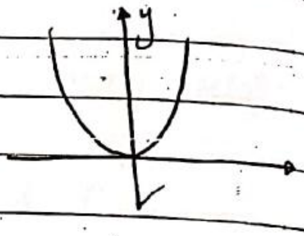
Ex: مثال

Classify the following function as odd or even or neither (none)

$f(x) = x^2$

$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \Rightarrow f(-x) = f(x)$

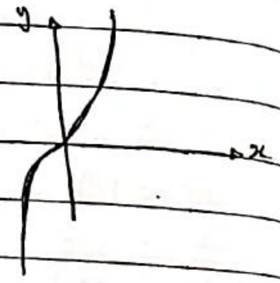
even



$f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ odd



Ex:

$$f(x) = \frac{x^2}{1-|x|}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2}{1-|-x|} = \frac{x^2}{1-|x|} = f(x)$$

even

$f(x) = x^2 + x^3$

$f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3 \Rightarrow$ non even, non odd $\Rightarrow$ none

حفظ

$f(x) = \sin x \rightarrow$ odd

$\sin(-x) = -\sin x$

$f(x) = \cos x \rightarrow$ even

$\cos(-x) = \cos x$

المرشح لقوى زوجية (x^8, x^4, x^2) even ← لعاشرة

لقوى فردية (x^5, x^3, x) odd ← الاحد ١٢/١٣

تمرين

$f(x) = x^3 + \sin x$

$f(-x) = (-x)^3 + \sin(-x)$

$= -x^3 - \sin x = -(x^3 + \sin x)$

$f(-x) = -f(x)$

→ odd

Note
للحفظ

$-3 - 4 = -7$

$$\boxed{\begin{gathered} \text{even} + \text{even} = \text{even} \\ \text{odd} + \text{odd} = \text{odd} \\ \frac{\text{odd}}{\text{odd}}, \frac{\text{even}}{\text{even}} = \text{even} \\ \frac{\text{odd}}{\text{even}}, \frac{\text{even}}{\text{odd}} = \text{odd} \end{gathered}}$$

$f(x) = x^2 + \cos x$

even + even → even

$f(x) = \frac{x^3}{\sin x} = \frac{\text{odd}}{\text{odd}} = \text{even}$

$\frac{(-x)^3}{-\sin(x)} = \frac{-x^3}{-\sin(x)} = -f(x)$

Note
$\sin(-x) = -\sin(x)$
نفس الشي
$\sin(-3x) = -\sin 3x$
جوا القوس

قاعدة

$$\boxed{\begin{gathered} f(x) = x^n \to n \text{ زوجي} \to \text{even} \\ n \text{ فردي} \to \text{odd} \end{gathered}}$$

$\cos -x = \cos x$

$\sin -x = -\sin x$

حفظ

ex $f(x) = x^3, x^5, x^7, \ldots\ldots$ odd

$f(x) = x^2, x^4, x^6$ even

odd | فردي sin ← التكعيب

even | زوجي cos ← تربيع

العلامة؟ الثابت ليس واحد لواحد

الخميس ١٢ / ١١

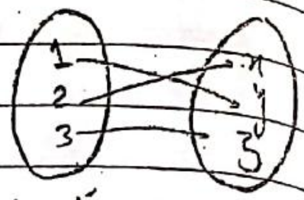
one-to-one function

اقتران واحد لواحد (1-1)

Def.:

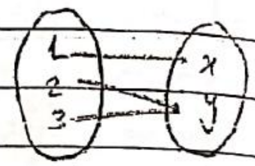
$f : D \longrightarrow R$ is (1-1) if

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \\ \text{or} \\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \end{array}}$$



اقتران واحد لواحد لا عنصر بـ

يالا اخذ عنصر (الصورة) بالمدى



$f(x) = 2x + 1$

$f(x_1) = f(x_2)$

$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$

$2x_1 = 2x_2$

$x_1 = x_2$

$\Rightarrow 1 - 1$

ليس واحد لواحد

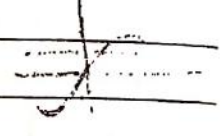
بالرسم إذا رسم خط y بنقطة

واحدة فقط

إذا قطع بنقطتين يصير

ليس اقتران واحد لواحد

رسم خطي y

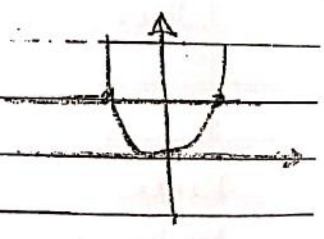


$f(x) = x^2$

$f(x_1) = f(x_2)$

$x_1^2 = x_2^2$ نأخذ جذر

$\sqrt{x_1^2} = \sqrt{x_2^2} \Rightarrow |x_1| = |x_2|$



$x_1 =$ إما x_2 أو $-x_2$ $\Rightarrow$ not (1-1)

(1 - 1) لانه صار واحد لاثنين

لانه قطعه بنقطتين

الثلاثاء ١١/١٤
محاضرة 11

invers function

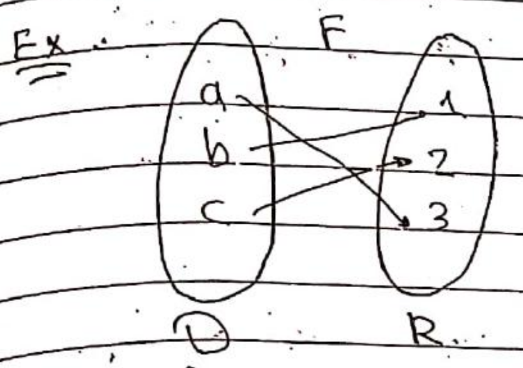
الدالة العكسية

$(f \circ f^{-1})$ مدى x
$(f^{-1} \circ f)$ مجال x

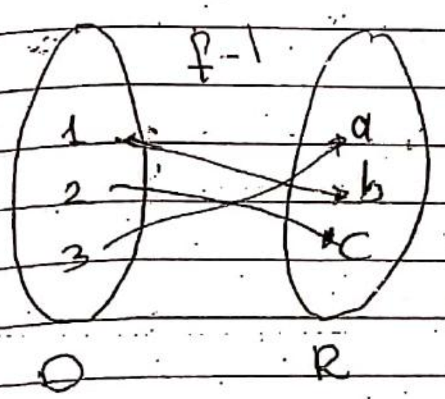
Defi: let f be a (1-1) functions. the invers of F denoted by f^{-1} is the unique (وحيد) function with domain equal to the range of F that's satifies: (تُعرف) ([illegible])

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \text{ in the range of } f.$$

Ex:



Sol: f is (1-1) function هنا افترضنا انه هو
$Dom = \{a, b, c\}$ $\quad$ $Rang(1, 2, 3)$
$f(a) = 3$ $\quad$ $f(b) = 1$ $\quad$ $f(c) = 2$



$f^{-1}(1) = b$
$f^{-1}(2) = c$
$f^{-1}(3) = a$

$Dom(f^{-1}) = \{1, 2, 3\}$
$Rang(f^{-1}) = \{a, b, c\}$

الحصة ٨ ٨

التاريخ ١٥/١٢

$$f\left(f^{-1}(3)\right) = f(a) = 3$$

$$f\left(f^{-1}(2)\right) = 2$$

$$f\left(f^{-1}(1)\right) = 1$$

Ex: find the f^{-1} for:

- $f(x) = 2x + 1$

طريقة الحل: نضع بدل كل x ← $f^{-1}(x)$ وبدل كل $f(x)$ ← x

ونسميها $f^{-1}(x) = y$

$$x = 2f^{-1}(x) + 1$$

$$x = 2y + 1 \Rightarrow x - 1 = 2y \Rightarrow y = \frac{x-1}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

- $f(x) = x^3$

$$x = y^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = y \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y^3}$$

- $f(x) = (x-1)^3$

$$x = \left(f^{-1}(x) - 1\right)^3 \Rightarrow x = (y-1)^3$$

$$\sqrt[3]{x} = y - 1 \Rightarrow \sqrt[3]{x} + 1 = y$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 1$$

Scanned by CamScanner

الحصة 11

الثلاثاء ١١/١٤

$$f(x) = \frac{x+2}{x-4}$$

$$x = \frac{y+2}{y-4} \Rightarrow xy - 4x = y + 2$$

$$xy - y = 2 + 4x \Rightarrow y(x-1) = 2 + 4x$$

$$y = \frac{2+4x}{x-1} \Rightarrow f^{-1} = \frac{2+4x}{x-1}$$

$$f(x) = \sqrt{8x - x^2}$$

$$x = \sqrt{8y - y^2} \Rightarrow x^2 = 8y - y^2$$

$$y^2 - 8y = -x^2$$ نقوم بالإكمال على مربع كامل

تذكير $\left(\frac{\text{معامل } y}{2}\right)^2$ نزيدها إلى الطرفين

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{-8}{2}\right)^2 = (4)^2 = 16$$

$$y^2 - 8y + 16 = -x^2 + 16$$

$$(y-4)(y-4) = -x^2 + 16$$

$$(y-4)^2 = -x^2 + 16$$ جذر للطرفين

$$y - 4 = \sqrt{-x^2 + 16}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{-x^2 + 16} + 4$$

Scanned by CamScanner

solve

$x^2 - 9 < 0$

$x^2 - 9 = 0$ $\quad x = +3 \quad x = -3$

$+ + \quad -3 \quad - - \quad +3 \quad + +$

$x \in (-3, +3)$

$\frac{1}{x} < x$ علوا سابقاً

$|2x - 3| > 5$

إما أو

$2x - 3 > 5$ or $2x - 3 < -5$

$2x > 8$ $\quad 2x < -2$

$x > 4$ $\quad x < -1$

$[4, \infty)$ or $(-\infty, -1)$

$x \in (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$

$|3x + 5| \leq 4$

$-4 \leq 3x + 5 \leq 4$

$-9 \leq 3x \leq -1$

$-3 \leq x \leq -\frac{1}{3}$

$x \in [-\frac{1}{3}, 3]$ $\quad [-3, -\frac{1}{3}]$

$|5x+4| = 2$

$5x+4 = 2$
$-4 \quad -4$

$5x = -2$

$x = \frac{-2}{5}$

$|5x+4| = 2$

$5x+4 = 2$ or $5x+4 = -2$

$5x = -2$

$x = \frac{-2}{5}$ or $x = \frac{-6}{5}$

$x \in \{ -\frac{2}{5}, -\frac{6}{5} \}$

إيجاد DoM

DoM

$f(x) = \frac{2x}{x^2-9}$

$\left.\begin{array}{l} DoM(2x) = \mathbb{R} \\ DoM(x^2-9) = \mathbb{R} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{الاشتراك}} \mathbb{R}$

أصفار المقام $x = \mp 3$

$DoM(f(x)) = \mathbb{R} - \{3, -3\}$

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-3}$

DoM الجذر نقطة جهة موجبة

$\left.\begin{array}{l} DoM(\sqrt{x}) = [0, \infty) \\ \sqrt{x} : x = 0 \\ DoM(x-3) = \mathbb{R} \end{array}\right\}$ الاشتراك $[0, \infty)$

$DoM(f) = [0, \infty) - \{3\}$

$F(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = -3 \quad x = +3$

$-\infty \quad ++ \quad -3 \quad -- \quad +3 \quad ++ \quad +\infty$

$Dom(f) = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

$F(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x} - 3} \rightarrow Range\ [3, \infty)$

$Dom(2x) = \mathbb{R}$

$Dom(\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{نقطة الجذر}} - 3) = [0, \infty)$

$\Rightarrow [0, \infty)$

$\sqrt{x} \quad x = 0$

أصفار المقام $\sqrt{x} - 3 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (3)^2 \Rightarrow x = 9$

$Dom(f) = [0, \infty) - \{9\}$

الأشياء المطلوب منا Range

$F(x) = 3$

$Dom(f) = R \quad \therefore Range(F) = 3$

$F(x) = 2x + 1$

$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Range(f) = \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 - 4$ التربيعي يلزمه رسم

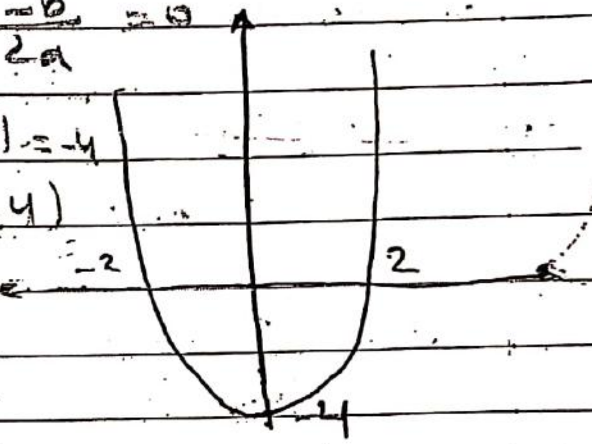
$\frac{-b}{2a} = 0$

$Dom(f) = \mathbb{R}$

$f(0) = -4$

Range (f) $(0, -4)$

$[-4, \infty)$



$\sin x \to Dom = \mathbb{R}$

$\to$ Range $[-1, 1]$

Range $F(x) = 2\sin x$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$-2 \leq 2\sin x \leq 2$

Range $[-2, 2]$ $Dom(f) = \mathbb{R}$

Range

$F(x) = 4\sin x + 5$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$-4 \leq 4\sin x \leq 4$

$+5 - 4 \leq f(x) \leq 4 + 5$

$1 \leq f(x) \leq 9$

Range(f) $[1, 9]$

$Dom(f) = \mathbb{R}$

$F(x) = 2 - 3\sin x$

$-1 \le \sin x \le 1$

$(-3)(-1) \geq -3\sin x \geq (-3)(1)$

$+2+3 \geq -3\sin x + 2 \geq -3+2$

$5 \geq f(x) \geq -1$

$Rang(f) : [-1, 5]$

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= 2x+3 \\ g(x) &= x^2 \end{aligned}\right\} \; fog(x)$$

$f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2+3$

$Dom\ fog(x)$

$$f(g(x)) \; ; \; \left.\begin{aligned} Dom\ g(x) &= \mathbb{R} \\ Dom\ (fog) &= \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbb{R} \quad \text{الـتـقاطع}$$

الجواب

$fog(2)$

$f(g(2)) = f(4) = 11$

Note

$g(2)$

نعوض 2 في g

أي 2 في x^2

$(f \circ 3g)(2) =$

$f(3g(2)) = f(3 \cdot 4)$

$f(12)$

$f(12) = 2(12) + 3$

$f(12) = 5 . \quad g(2) = 4$

find $(f \circ 3g)(2)$:

$f(3g(2)) = f(3 \cdot 4) ; \quad f(12) = 5$

$f(x) = x^2 + 5$

$(f \circ g)(x) = 7x - 1$

find $g(x)$

$f(g(x)) = 7x - 1$

$g(x) + 5 = 7x - 1$

$g(x) = 7x - 1 - 5$

$g(x) = 7x - 6$

$F(x) = \dfrac{x^2+3}{x^2-1}$

$g(x) = \sqrt{x}$

find $(f \circ g)(x)$

$f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \dfrac{(\sqrt{x})^2+3}{(\sqrt{x})^2-1}$

$\left.\dfrac{x+3 \to R}{x-1 \to R}\right\} R - \{1\}$

Dom $(f \circ g)$

Dom $(g) = [0, \infty)$

Dom $f \circ g = R \{1\}$ 0 1

$F(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$

find f^{-1}

$x = \dfrac{y+2}{y-3}$

$xy - 3x = y + 2$

$xy - y = 3x + 2$

$y(x-1) = 3x+2$

$y = \dfrac{3x+2}{x-1}$

$f(x) = x - \dfrac{1}{2x}$ DoM

$f(x) = \dfrac{2x^2-1 \to R}{2x \to R} \Big\} R - \{0\}$

DoM $(f) = R - \{0\}$

$f(x) = \dfrac{3-x}{2} = \dfrac{1}{2}(3-x)$

DoM $f = R$

$f(x) = \dfrac{6+x \to R}{x^3+x^2}$

$x^3 + x^2 = x^2(x+1)$ $x=0$

$(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$

DoM

$f(x) = \dfrac{6+x \Rightarrow R}{x^3+x^2 \Rightarrow R}$

(أصفار المقام)

$x^2(x+1) = 0$

$x = -1$ أو $x = 0$ أو

$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad +\infty$

$(-1, \infty)$

$R - \{0, -1\}$

المحاضرة 15
التاريخ 11/26

بداية السكند

CH2: Limits and Continuty

النهايات والاتصال

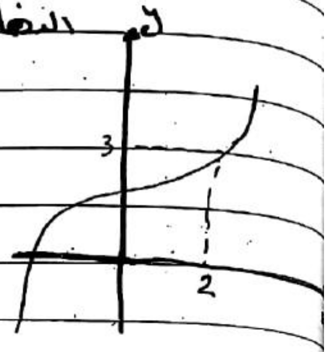
limit from graph:

النهاية باستخدام الرسم

$f(2) = 3$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ → $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3$

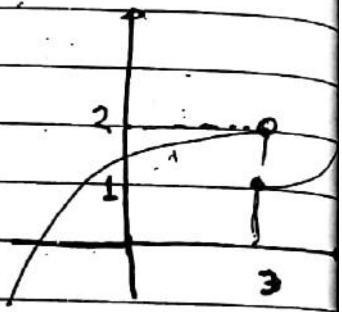
→ $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$



$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ موجودة

$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ → $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$

→ $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$



$\Rightarrow$ d.n.e = does not exst

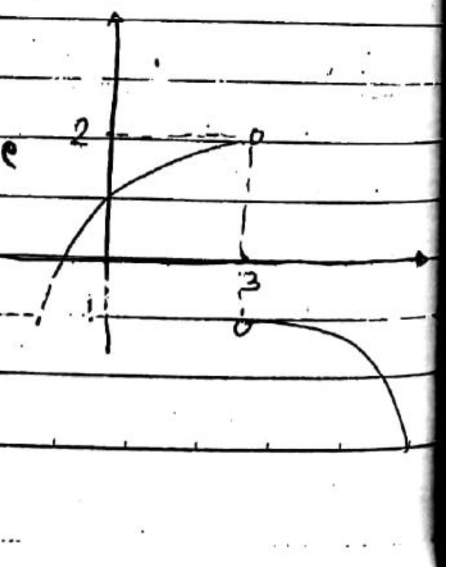
النهاية غير موجودة

$f(3) = 1$

2 شرط النهاية غير موجودة

$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ → $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 1$ } d.n.e

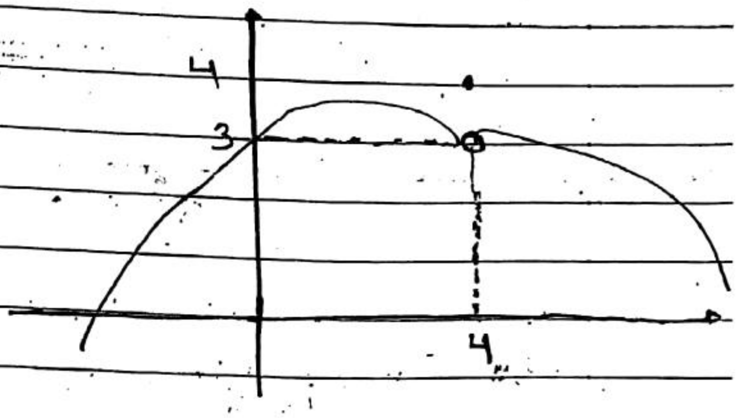
→ $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2$



$f(3) = $ d.n.e

المحاضرة 15
الأحد 26/1

$\lim_{x \to 4} f(x)$



$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 3$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 3$

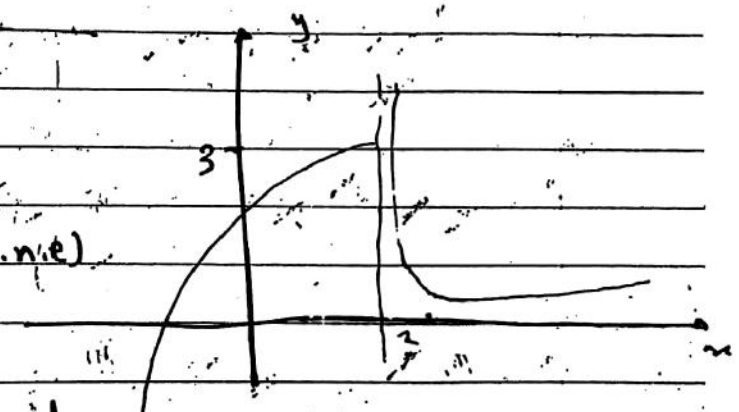
لما نهاية موجودة

$\Rightarrow \lim_{x \to 4} f(x) = 3$

لو في نقطة تكون $f(4)$ (d.n.e)

$f(4) = 4$

$\lim_{x \to 2} f(x) =$



$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \infty$ (d.n.e)

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^-} f(x) = 3 \end{array}\right\}$ d.n.e

11/26 الأحد 15 أبا صفحة

Def: We say that the limit of $F(x)$ as x approaches to c is equal to L
تؤول
if

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

In this case we write

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

if $\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$

does not exist (d.n.e)

Thm:

if $\lim_{x \to c} F(x) = L$ / $\lim_{x \to c} g(x) = M$

1) $\lim_{x \to c} (f(x) \mp g(x)) = \lim_{x \to c} f(x) \mp \lim_{x \to c} g(x)$

$L \mp M$

2) $\lim_{x \to c} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \to c} f(x) = \alpha . L$

α عدد ثابت
constant

3) $\lim_{x \to c} (f.g) = \lim_{x \to c} f(x) . \lim_{x \to c} g(x) = L.M$

4) $\lim \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$

المحاضرة 15

يوم 26/10

if $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 3$

find

$\lim\limits_{x \to 2} (f(x) + 3g(x))$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) + \lim\limits_{x \to 2} 3g(x) = 5 + 3\lim\limits_{x \to 2} g(x)$

$= 5 + 3(3) = 14$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^2 + g(x)}{2f(x)} \right) = \frac{\lim\limits_{x \to 2} x^2 + \lim g(x)}{2\lim\limits_{x \to 2} f(x)}$$

(2) نعوض

$$\frac{4+3}{2.5} = \frac{7}{10} = 0.7$$

$\lim\limits_{x \to 2} x^2 f(x) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 \cdot \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4 \cdot (5) = 2$

1) Polynomail Limits

$\lim\limits_{x \to c} P_n(x) = P_n(c)$

نهاية كثير الحدود نعوض مباشرة

Ex: find $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x + 5) = 1 + 2 + 5 = 8$

المحاضرة 6 هـ
التاريخ: 11/28

المحاضرة السادسة عشر

نهاية الثابت ثابت

$$\lim_{x \to 3} 5 = 5$$

$$\lim_{x \to 2} (2x+3) = 2.2 + 3 = 4+3 = 7$$

Piecewise Functions الاقترانات المتشعبة

Ex:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq 1 \\ 3x & x < 1 \end{cases}$$

Find: $\lim_{x \to 2} f(x)$, $\lim_{x \to 1} f(x)$, $\lim_{x \to 0} f(x)$, $f(1)$

$3x \quad 1 \quad x^2+1$

إذا كانت النهاية المطلوبة عند نقطة التشعب نجد النهاية من اليمين واليسار. (غير نقطة التشعب نعوض مباشرة)

$$\lim_{x \to 2} f(x) = (2)^2 + 1 = 5$$

$\lim_{x \to 1} f(x) =$ نوجد النهاية من اليمين واليسار

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1^2 + 1 = 2 \\ \lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \cdot 1 = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{d.n.e} \\ \text{النهاية غير موجودة} \end{array}$$

$2 \neq 3$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 3 \cdot 0 = 0$$

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

$f(1)$ [illegible]

Ahmoud Alamro

المحاضرة 16

بتاريخ 28/11

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x \leq 2 \\ 3x+1 & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

Find $\lim_{x\to1} f(x)$, $\lim_{x\to2} f(x)$, $\lim_{x\to5} f(x)$, $f(2)$ $f(0)$

x^2 | $3x+1$ on the number line: 0, 2, 5

$\lim_{x\to1} f(x) = 1^2 = 1$

[illegible]

$\lim_{x\to2} f(x)$:

$\lim_{x\to2^+} f(x) = 3.2+1 = 7$

$\lim_{x\to2^-} f(x) = 2^2 = 4$

d.n.e

$\lim_{x\to5} f(x)$:

$\lim_{x\to5^+} f(x) = \cancel{\text{d.n.e}}$

$\lim_{x\to5^-} f(x) = 3.5+1 = 16$

d.n.e

$f(2) = 4$ $f(0) = \text{d.n.e}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \neq 2 \\ 15 & x = 2 \end{cases}$$

حل = ≠ نعوض

≠ المعادلة

= الصحيحة

Find $\lim_{x\to2} f(x)$, $\lim_{x\to3} f(x)$, ~~[illegible]~~ $f(2)$ $f(n)$

16 / 11/28

محاضرة 16

$\lim_{x \to 2} f(x) = 2^2 + 1 = 5$

$\lim_{x \to 3} f(x) = 3^2 + 1 = 10$

$f(2) = 15$

$f(4) = 4^2 + 1 = 17$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & , \ x \text{ an integer} \\ 1 & , \ \text{otherwise} \end{cases}$$ غير ذلك

Find $\lim_{x \to 2} f(x)$, $\lim_{x \to 3} f(x)$, $f(2)$, $f(5)$

الدالة مستمرة مستمرة

$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$

$\lim_{x \to 3} f(x) = 1$

$f(2) = 3$ $\quad f(5) = 3$ $\quad f(2.5) = 1$

5/2 integer $\quad$ 2.5 not integer

(9)

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & x > 3 \\ x^2 & x \leq 3 \end{cases}$$

Find a if $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x)$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x)$

$a \cdot 3 + 3 = 3^2$

المحاضرة 17

الأحد 3/11

$3a = 9 - 3 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

$\lim \sqrt{\quad}$

إذا موجبا

موجب ينتج

سالب $\sqrt{\quad} = d.n.e$

$\sqrt{0}$

نعاين مع خط الأعداد

find $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x+5} = \sqrt{3+5} = \sqrt{8}$

$\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{x-4} = \sqrt{1-4} = \sqrt{-3} = d.n.e$

$\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{x-3} = \sqrt{3-3} = \sqrt{0}$

$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$\lim\limits_{x \to 3^+} \sqrt{x-3} = \sqrt{3-3} = 0$

$- - - \; 3 \; + + +$

$\lim\limits_{x \to 3^-} \sqrt{x-3} = d.n.e$

$\Rightarrow d.n.e$

$\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{4-x^2} = \sqrt{0}$

$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \mp 2$

$- \; -2 \; + \; 2 \; -$

$\lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{4-x^2} = d.n.e$

$\lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0$

$d.n.e$

الجمعة 17
3/12

$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2} = \sqrt{0}$

$x^2 = 0$

$x = 0$

$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x^2} = 0$

$\lim_{x \to 0^-} \sqrt{x^2} = 0$

$\Big\}\ \lim_{x \to 0} \sqrt{x^2} = 0$

هناك فرق بين 0 و تقترب الصفر
النهاية لا تعني العدد بل القرب من العدد

Rational limits النهايات النسبية

$\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}} =$ هو الجواب انتهى الحل

$\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}} = 0$ هو الجواب انتهى الحل

$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$ غير موجود d.n.e

$\frac{0}{0}$ نعالج (تحليل، ضرب بالمرافق، توحيد مقامات، اختصار وطرح) أو بتال

Find $\lim_{x \to 2} \frac{x+5}{x^2-1} = \frac{2+5}{4-1} = \frac{7}{3}$

$\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2+1} = \frac{3-3}{9+1} = \frac{0}{10} = 0$

$\lim \frac{x^2+2}{x-1} = \frac{1^2+2}{1-1} = \frac{3}{0}$ d.n.e

$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{0}{0}$ نعالج

$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$ $x \neq 2$

خط الأعداد فقط الحقيقية المطلقة والجذور

$$\lim_{x \to 2} x+2 = 2+2 = 4$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$$

لو طبقنا لوبيتال

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2}{2x} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x+x^2}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(2+x)}{x} = \lim_{x \to 0} (2+x) = 2$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2+x-12}{(x-3)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)^2} = \lim_{x \to 3} \frac{x+4}{x-3} = \frac{7}{0} \quad d.n.e$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3+2x^2+3x-6}{x^2-1} = \frac{0}{0}$$ قسمة تركيبية

x^3+2x^2+3x-6

معاملات : 1 2 3 -6 اللي موجود ومن وكانه صفر

+				
معامل x^3 $\boxed{1}$ ينزله		1	3	6	ناتج جمع
x	1	3	6	0	ناتج ضرب

لازم يكون صفر

نحذف x بالأس الأعلى درجة أقل من المطلوب

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+3x+6)}{(x-1)(x+1)}$$ المعاملات من نتائج الضرب

$$= \frac{1+3+6}{1+1} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$ حسب قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2+4x+3}{2x} = \frac{3+4+3}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

المحاضرة 18

الثلاثاء 12/5

القسمة التركيبية والضرب التبادلي

Ex :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 3x^2 + 4x - 8}{3x^3 + 2x^2 - 5}$$

نستخدم القسمة التركيبية للبسط والمقام

البسط

$x^3 + 3x^2 + 4x - 8$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & +4 & -8 \\ \boxed{1} & \downarrow & 1 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 4 & 8 & 0 \end{array}$$

نستبدل له الصفر بـ

أقل مرتبة ضد x^3

$x^2 + 4x + 8$

المقام

$3x^3 + 2x^2 - 5$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 2 & 0 & -5 \\ \boxed{1} & \downarrow & 3 & 5 & 5 \\ \hline & 3 & 5 & 5 & 0 \end{array}$$

$3x^2 + 5x + 5$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+4x+8)}{(x-1)(3x^2+5x+5)} = \frac{1+4+8}{3+5+5} = 1$$

Ex : $$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x+3} - \frac{1}{4}}{x-1} = \frac{0}{0}$$

نضرب بضرب تبادلي (توحيد مقامات)

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x+3) - 4}{4(x+3)} \cdot \frac{1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{-\cancel{(x-1)}}{4(x+3)} \cdot \frac{1}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{1}{4(x+3)} = \frac{-1}{16}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x-3} = \frac{0}{0}$$

الثلاثاء 12/5
المحاضرة 18

النهايات (الجذور والضرب بالمرافق)

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)}{3x} \cdot \frac{1}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{3x} = \frac{1}{9}$$

Ex $$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x-9} = \frac{0}{0}$$

نضرب بضرب مرافقه (مرافق البسط)

$$\lim_{x \to 9} \frac{(\sqrt{x}-3)\cdot(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x \to 9} \frac{x+3\sqrt{x}-3\sqrt{x}-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{(\sqrt{x}+3)(x-9)} = \lim_{x \to 9} \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{6}$$

في الحالات $\sqrt{} - \text{عدد}$, $\sqrt{} - \sqrt{}$, $\text{عدد} - \sqrt{}$

نستخدم الضرب بالمرافق

Ex $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 3}{x-9} =$$

لازم نتأكد انه $\frac{0}{0}$

$$\frac{1-3}{1-9} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$$

Ex $$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1} = \frac{0}{0}$$

نضرب بمرافقه

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+8-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{x-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+8}+3} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{8+x}+3} = \frac{1}{6}$$

18/04/2019

Ex $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})}{x-1\,(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})}$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1-2}{x-1\,(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}$

$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}} = \frac{1+1}{\sqrt{1+1}+\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{\sqrt{2x+2}-2}$

$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2-1)(\sqrt{2x+2}+2)}{(\sqrt{2x+2}-2)(\sqrt{2x+2}+2)}$

$\lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{2x+2}+2)}{2x+2-4} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{2x+2}+2)}{2(x-1)}$

$2x \quad 2$

$\lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2}(\sqrt{2x+2}+2) = \frac{1+1}{2}(\sqrt{4}+2) = 4$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3\sqrt{5x-1} - 24}{x^2-4}$$

$$8\sqrt{5x-1} \leftarrow x^3\sqrt{5x-1} \rightarrow 3x^3$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3\sqrt{5x-1} - 3x^3}{x^2-4} + \frac{3x^3 - 24}{x^2-4}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3\left[\sqrt{5x-1} - 3\right]\cdot\left(\sqrt{5x-1}+3\right)}{x^2-4\left(\sqrt{5x-1}+3\right)} + \frac{3(x^3-8)}{x^2-4}$$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ مطابقة تكعيبية

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3(5x-1-9)}{(x-2)(x+2)} + \frac{3\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

$(5x-10 = 5(x-2))$

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x^3}{x+2} + \frac{3(x^2+2x+4)}{x+2} = \frac{(2)(8) + 3[4+4+4]}{4} = -5$$

لوبيتال

$$\lim_{x \to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2\sqrt{5x-1} + x^3 \frac{5}{2\sqrt{5x-1}}}{2x}$$

$\sqrt{10-1}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x\left[\sqrt{5x-1} + \frac{5x}{2\sqrt{5x-1}}\right]}{2} = \frac{3\cdot\cancel{2}\left[3 + \frac{5\cdot 2}{2\cdot 3}\right]}{\cancel{2}}$$

$$3\left[3 + \frac{5}{3}\right] = 3\left[\frac{9+5}{3}\right] = 14$$

المحاضرة 19

الخميس 7/ 12

النهايات المثلثية والجذور غير التربيعية

أوجد جذر غير التربيعي

بعض

طريقة التعويض

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt[3]{x+5}-2}{2x-6} \qquad \frac{0}{0}$$

نفرض $y = \sqrt[3]{x+5} \Rightarrow y^3 = x+5$

$y^3 - 5 = x$

$x \to 3$

$y \to \sqrt[3]{3+5} = \sqrt[3]{8} = 2$

$y \to 2$

$$\lim_{y \to 2} \frac{y-2}{2(y^3-5)-6} = \lim_{y \to 2} \frac{y-2}{2y^3-10-6} = \lim_{y \to 2} \frac{y-2}{2y^3-16}$$

$$\lim_{y \to 2} \frac{y-2}{2(y^3-8)} = \lim_{y \to 2} \frac{y-2}{2(y-2)(y^2+2y+4)}$$

$$= \frac{1}{2(4+4+4)} = \frac{1}{24}$$

واجب

$$\lim_{x \to 6} \frac{\sqrt[4]{x+10}-2}{x-6} \qquad \frac{0}{0}$$

$y = \sqrt[4]{x+10} \Rightarrow y^4 = x+10 \Rightarrow y^4 - 10 = x$

$x \to 6 \quad y \to 2$

$x \to 6$

$y \to \sqrt[4]{6+10} = \sqrt[4]{16} = 2$

$$\lim_{y \to 2} \frac{y-2}{y^4-10-6} = \frac{y-2}{y^4-16} = \lim \frac{y-2}{(y^2)^2-(4)^2} = \lim \frac{y-2}{(y^2-4)(y^2+4)} = \frac{y-2}{(y-2)(y+2)(y^2+4)}$$

بالتعويض

$$\lim_{y \to 2} \frac{y-2}{(y-2)(y+2)(y^2+4)} = \lim_{y \to 2} \frac{1}{(y+2)(y^2+4)} = \frac{1}{4(2^2+4)} = \frac{1}{32}$$

Scanned by CamScanner

المحاضرة 19

تجنيس

Trigonometric Limits

الكفايات الثانية

($\frac{\text{عدد}}{\text{صفر}}$, $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$, $\frac{\text{صفر}}{\text{عدد}}$, $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$)

DNE   موجب   صفر   نعالج

متطابقات مثلثية

$$\sin^2 ax + \cos^2 ax = 1$$

$$1 + \tan^2 ax = \sec^2 ax$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$\csc = \frac{1}{\sin}$

$\sec = \frac{1}{\cos}$

$\cot = \frac{1}{\tan}$

Thm نظرية

tan نفس القاعدة

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

قتا $\csc = \frac{1}{\sin}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

قا $\sec = \frac{1}{\cos}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

ظتا $\cot = \frac{1}{\tan}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$$

$(\sin ax)(\sin ax) = \sin^2 ax$ محاضرة ولا

$= (\sin ax)^2$ الخميس ح / 12

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

cot, sec, csc } نحولهم لـ cos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

Ex

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{7x} = \frac{5}{7}$$

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin 2x}{x} = \frac{\sin 2\pi}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0$$ تعويض

(360 written above 2π)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 5x}{\sin 3x} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{x}$$

$$\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{1} = 4$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 \csc^2 3x$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 \cdot \frac{1}{\sin^2 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 3x} \cdot \frac{x}{\sin 3x}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

Scanned by CamScanner

محاضرة 19

إذا في x (اثنين فوق تحت)

بدون تربيع

طالما جاي بالشكل (يعني $1 - \cos$) (إشارة $\cos$)

نستخدم ضرب مرافق

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 3x}{3x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos 3x)}{3x^2} \cdot \frac{1 + \cos 3x}{1 + \cos 3x}$$

تقريب فرق مربعين

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{3x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos 3x}$$

$\sin^2 x$ (متطابقة)

$\sin^2 = 1 - \cos^2$

$$\lim \frac{\sin^2 3x}{3x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos 3x}$$

$\sin 0 = 0$

$\cos 0 = 1$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos 3x}$$

$$\frac{3}{3} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{1 + \cos 0} = 1 \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

المحاضرة 19

12/7

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+\sin x}-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1+\sin x}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+\sin x}+1}{\sqrt{1+\sin x}+1}$$

$$\lim \frac{x}{1+\sin x-1}\cdot\frac{\sqrt{1+\sin x}+1}{1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sqrt{1+\sin x}+1}{1}$$

$$1\cdot\sqrt{1+\sin 0}+1$$

$$1\cdot 2 = 2$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4-\tan x}-2}{x\sec x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{4-\tan x}-2)(\sqrt{\ }+2)}{x\cdot\sec x(\sqrt{4-\tan x}+2)}$$

$$\lim \frac{4-\tan x-4}{} = \lim \frac{-\tan}{x}\cdot\frac{1}{\sec(\ldots)}$$

$$\lim \underbrace{-\frac{\tan x}{x}}_{1}\cdot\frac{\cos x}{\cos 0=1}\cdot\frac{1}{\sqrt{4-\tan x}+2}\qquad 1\cdot(-1)$$

$$(-1)\frac{1}{\sqrt{4-\tan 0}+2} = \frac{-1}{4}$$

$(\cos x)^2 = \cos^2 x = \cos x \cdot \cos x$

$\cos^2 x \neq \cos x^2$

محاضرة 20

الأول

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x}{\sin 3x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(x+2)}{\sin 3x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 3x} \cdot (x+2)$$

$$= \frac{1}{3}(0+2) = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos^4 x - \cos^2 x}{3x^2} = \frac{0}{0}$$

نأخذ

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\lim \frac{\cos^2 x\,[\cos^2 x - 1]}{3x^2} = \lim \frac{\cos^2 x(-\sin^2 x)}{3x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \cos^2 x \cdot \frac{-\sin x}{3x} \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$= 1 \cdot \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{1} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{a \mp b}{c} = \frac{a}{c} \mp \frac{b}{c}$$

$$\frac{x^2 + \sin x}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{\sin x}{x}$$

$$\frac{a \cdot b}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = a \cdot \frac{b}{c}$$

$$\frac{\sin x \cos x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \cos x = \sin x \cdot \frac{\cos x}{x}$$

المحاضرة 20
الأحد 12/10

استنتجي
$0 \leq \sin^n x \leq 1$
$0 \leq \cos x \leq 1$

ساوي بعددي
$\sin$
$-1 \leq \cos \leq 1$

$\frac{a}{b \mp c}$ لا توزع

$\frac{a \cdot b}{c \cdot d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{a}{d} \cdot \frac{b}{c}$

$\frac{x^2 \cdot \sin x}{\tan x \cos x} = \frac{x^2}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\tan x} = \frac{x^2}{\tan x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$

Pinching theorem نظرية الشطيرة.

Thm: if $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ and $\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$

then $\lim_{x \to c} f(x) = L$

use pinching thm to calculate:

$\lim_{x \to 0} x \cdot \sin(\frac{1}{x})$

أستنتج
$0 \leq \sin^n x \leq 1$
$\cos x$

والمزدوج
$-1 \leq \frac{\sin x}{\cos x} \leq 1$

القاعدة
$-1 \leq \sin \leq 1$
$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$

نضرب ب x

نأخذ lim للطرفين
$-x \leq x \cdot \sin \frac{1}{x} \leq x$

$\lim_{x \to 0} -x \leq \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \to 0} x$

(نشيل الـ lim ونعوض بقيمة)
$0 \leq \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} \leq 0$

نعوض القيمة اللي بالطرفين بين الطرفين اذا تساوا

20

$$\lim_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \left(x^3 \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) + 3\right)$$

$$0 \leq \cos^2 \leq 1$$

$$0 \leq \cos^2 \frac{1}{x} \leq 1$$

x^3 نضرب

$$0 \leq x^3 \cdot \cos^2 \frac{1}{x} \leq x^3$$

3 نضيف.

$$3 \leq x^3 \cdot \cos^2 \frac{1}{x} + 3 \leq x^3 + 3$$

lim ناخذ $\lim_{x \to 0} 3 \leq \lim_{x \to 0} x^3 \cos^2 \frac{1}{x} + 3 \leq \lim_{x \to 0} x^3 + 3$

$$3 \leq \lim_{x \to 0} x^3 \cdot \cos^2 \frac{1}{x} + 3 \leq 3$$

$$\lim_{x \to 0} x^3 \cdot \cos^2 \frac{1}{x} + 3 = 3$$

نعوض

Ex: suppose that $|f(x)| \leq a$

use pinching thm to calculate

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x+1} \cdot f(x)$$

12/10/2019

$$|f(x)| \leq a$$

$$-a \leq f(x) \leq a$$

ضرب بـ $\frac{x^2}{x+1}$

$$-a \cdot \frac{x^2}{x+1} \leq \frac{x^2}{x+1} \cdot f(x) \leq a \cdot \frac{x^2}{x+1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-ax^2}{x+1} \leq \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x+1} \cdot f(x) \leq \lim_{x \to 0} \frac{ax^2}{x+1}$$

$$0 \leq \lim \frac{x^2}{x+1} \cdot f(x) \leq 0$$

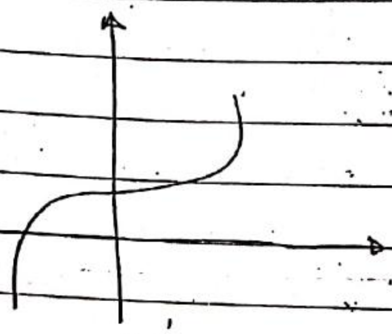
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x+1} \cdot f(x) = 0 \quad \blacksquare$$

محاضرة 2-1
الثلاثاء 12/12

الاتصال

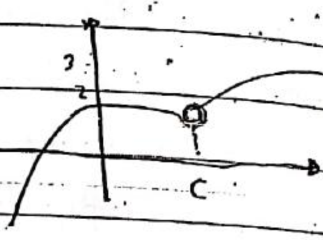
الاتصال Continuity

$\boxed{\text{continues}}$



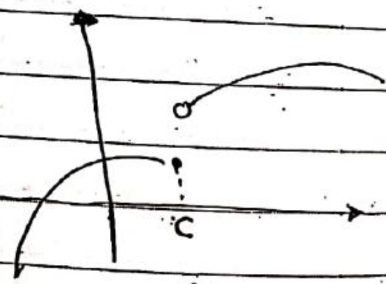
$\boxed{\text{dis continuous}}$

① Removable dis



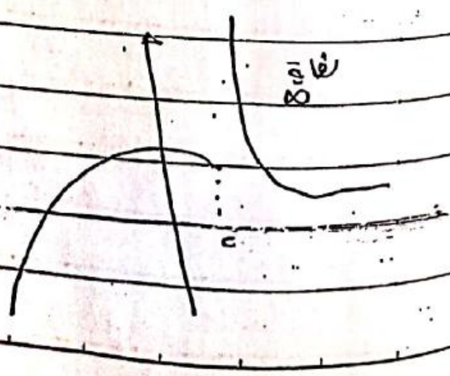
$\lim_{x\to c^+} = \lim_{x\to c^-} \neq f(c)$

② jump dis



$\lim_{x\to c^+} \neq \lim_{x\to c^-}$

③ infinte dis



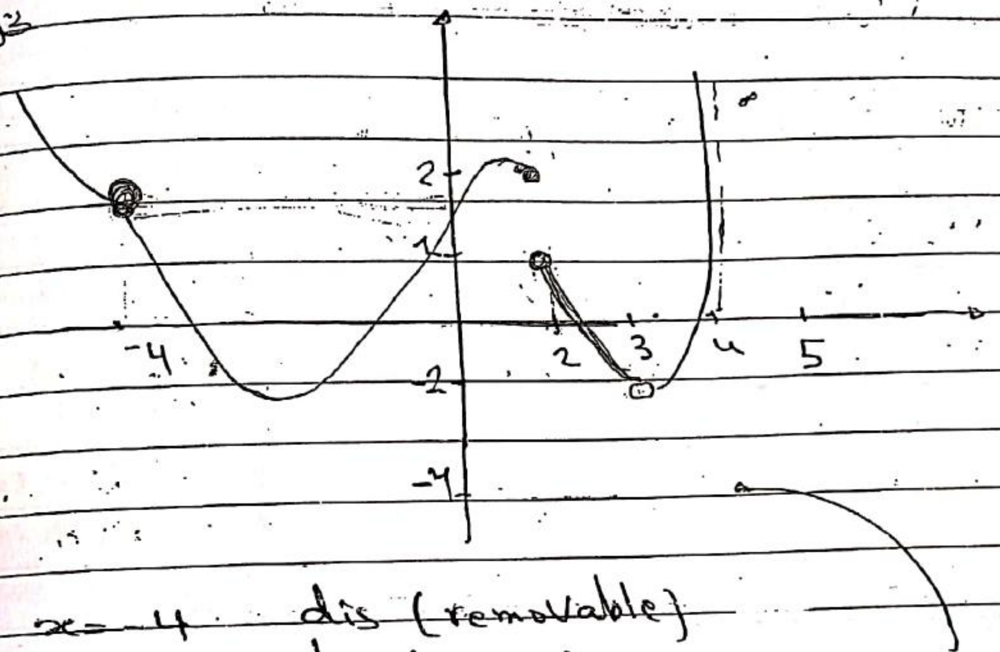
$\lim_{x\to c^-} = \mp\infty$

$\lim_{x\to c^+} = \mp\infty$

المحاضرة 21
التاريخ 12/12

الاتصال

From the graph determine the Points of dis and their types.



at $x=-4$ dis (removable)
at $x=2$ dis (jump)
at $x=3$ dis (removable)
at $x=4$ dis (infinte)

continuity at $x=c$

Ex Let $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & , x>2 \\ 3x & , x\leq 2 \end{cases}$ النهاية من اليمين = النهاية من اليسار = الصورة عند النقطة $\Rightarrow$ cont

if $f(x)$ cont at $x=2$?

sol $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2^2+2 = 6$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 3\cdot 2 = 6$

cont at $x=2$

$f(2) = 3\cdot 2 = 6$

محاضرة 21

الأحد 18/12

$$F(x) = \begin{cases} 2 + \sin x & x < 0 \\ 3 & x = 0 \\ 2\cos x & x > 0 \end{cases}$$

is $f(x)$ cont at $X = 0$?

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2\cos 0 = 2 \cdot 1 = 2$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2 + \underbrace{\sin 0}_{0} = 2$

$f(0) = 3$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2 \neq f(0)$

$\Rightarrow$ dis cont at 0

(Removable)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \quad \left(\begin{matrix} x > 2 \\ x < 2 \end{matrix} \right) \\ 4 & x = 2 \end{cases}$$

is f cont at $x = 2$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} x + 2$

$\lim\limits_{x \to 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$

cont at $x = 2$

الفترات على الاتصال

المحاضرة 21

الاثنين ١٢/١٢

Interval of continuity

١- كثير الحدود متصل دائماً (polynomeal)

٢- sin, cos متصل دائماً

٣- الجذر التربيعي متصل في مجاله (ما داخل الجذر موجب)

٤- كثير حدود / كثير حدود متصل دائماً عدا أصفار المقام

كثير حدود

البحث في الاتصال

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leq 1 \\ 2x+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

is $f(x)$ cont $(-\infty, \infty)$

at $x=1$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1^3 = 1$$

dis at $x = 1$

x^3 $2x+1$

1

الفترات

$(-\infty, 1)$ cont (poly) كثير حدود

$(1, \infty)$ cont. (poly)

$(-\infty, \infty)$ cont $- \{1\}$

$$F(x) = \begin{cases} x^3 & x \leq -1 \\ \dfrac{1}{x} & -1 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{x+1} & 1 \leq x < 4 \\ \dfrac{1}{8-x} & 4 < x < 9 \\ 5x+2 & x > 9 \end{cases}$$

Determine the dis and their types,

21

بالامس: 12/12

$x^3 \quad \frac{1}{x} \quad \frac{1}{x+1} \quad \frac{1}{8-x} \quad 5x+2$

$-1 \quad 1 \quad 4 \quad 9$

الفترات:

$(-\infty, -1)$ cont poly

$(-1, 1)$ cont $- \{0\}$ أصفار المقام

$(1, 4)$ cont نفس 1 لا يوجد أصفار

$(4, 9)$ cont $- \{8\}$

$(9, \infty)$ cont (poly)

النقاط (نأخذ نهاية من اليمين واليسار وصورة عند كل نقطة)

at $x=-1$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -1$

$\lim_{x \to -1} f(x) = -1$

$f(-1) \quad f(-1)$

cs: at $x=1$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$

غير متصل

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \frac{1}{4}$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \frac{1}{5}$ غير متصل

$\lim_{x \to 9^+} f(x) =$ لا

$\lim_{x \to 9^-} f(x) = -1$

المحاضرة 22
الخميس 12/14

محاضرة الصعوبات

الفترة والاتصال

اثبت أن الدالة متصلة على [1,5]

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & 1 \le x < 3 \\ x^2 - 1 & 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

sol

$$\left[\frac{1}{x-2},\ x^2-1\right]$$
1 3 5

1) at $x=1$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{1-2} = -1$$

cont at $x=1$

2) at $x=3$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = (3)^2 - 1 = 8$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \frac{1}{3-2} = \frac{1}{1} = 1$$

dis at $x=3$

3) at $x=5$

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = 5^2 - 1 = 24$$

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = 5^2 - 1 = 24$$

cont at $x=5$

أصفار المقام

الفترات $(1,3)$ cont $- \{2\}$

$(3,5)$ cont poly كثيرة حدود

$\Rightarrow [1,5]$ cont $- \{3, 2\}$

محاضرة 22
تاريخ 12/14

Ex

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 5 \\ x^2 & x < 5 \end{cases}$$

Sol.

$$\xleftarrow{\quad x^2 \quad} 5 \xrightarrow{\quad 2x \quad}$$

at $x = 5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = 2 \cdot 5 = 10 \\ \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = 5^2 = 25 \end{array}\right\} \text{dis at } x = 5$$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 0 \\ \dfrac{1}{x+1} & 0 \leq x < 2 \\ 2x & 2 \leq x < 4 \\ x^2 - 3 & x \geq 4 \end{cases}$$

if $f(x)$ cont at $(-\infty, +\infty)$

Sol

$$\xleftarrow{\; x^2+1 \;} 0 \xrightarrow{\; \frac{1}{x+1} \;} 2 \xrightarrow{\; 2x \;} 4 \xrightarrow{\; x^2-3 \;}$$

متصل 0 متصل 2 متصل 4 متصل

$\boxed{\text{at } x = 0}$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

Scanned by CamScanner

محاضرة 22

تاريخ: 14/12

$\boxed{\text{at } x=2}$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) =$

$\boxed{\text{at } x=4}$

$\lim_{x \to 4^+} f(x) =$

$\lim_{x \to 4^-} f(x) =$

(I. V. T)

نظرية القيمة المتوسطة Intermediate Value Theorem

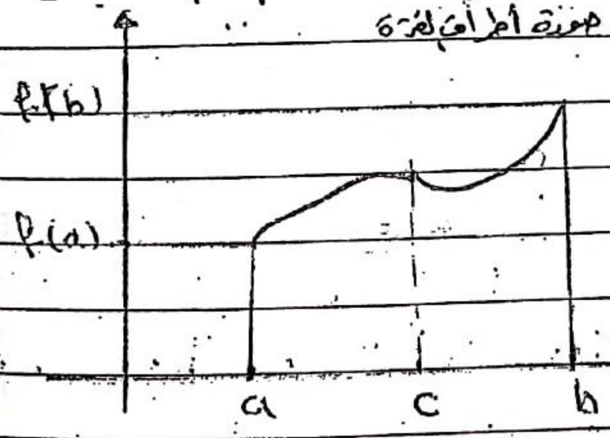
If $F(x)$ is continous on $[a,b]$ and k is number between $f(a)$ $f(b)$ then

There is $c \in [a,b]$ such that $f(c) = k$

(تابع متصل على فترة ولدينا عدد بين صورة اطراف الفترة فإنه يوجد عدد من الفترة صورته بين صورة أطراف الفترة

شروط النظرية

1 تكون f متصلة على فترة



محاضرة 22

ثلاثاء 12/14

$f(x) = \quad f(x) = x^3 - 1 \qquad [-1, 5]$

$f(-1) = -1 - 1 = -2$

$f(5) = 5^3 - 1 = 124$

$\exists\ k$ between $-2 < k < 124$ نوجد

$\exists\ d \in (-1, 5)$

$f(d) = 0$

* * *

if $f(x) = x^3 + 3x$ then $f(x) = 1$ has solution in

a $[-1, 0]$ b $[0, 2]$ c $[1, 2]$ d $[\ldots]$

$f(-1) = -4$ $f(0) = 0$ $f(1) = 4$

$f(0) = 0$ $f(2) = 14$ $f(2) = 14$

X   ✓   X

الواحد مش ضمن   ليس ضمن

* * *

اوقات بيجي سؤال ذو مترة فيها $f(x) = 0$ solution عادي وطلب

$f(x) = x^3 - 4x + 2$ has a root in

$[-3, 2]$ $[-2, 0]$ $[4, 5]$ $[3, 4]$

$f(-3) = -13 \rightarrow 0$

$f(-2) = 2$ شملت

* *

the equation $2x^2 - 4 = 0$ has solution in

$[0, 1]$ $(0, 1)$ $[1, 3]$ none

$f(0) = -4$ $f(1) = -2$

$f(1) = -2$ $f(3) =$

Scanned by CamScanner

الصفحة 23
الأحد ١٧/١٠

ch3 The Drevletive الاشتقاق

* definition of derevitive

رموز المشتقة

$f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, y' , $\frac{d(\ )}{dx}$

تعريف الاشتقاق

def -

1) $\boxed{f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}}$

2) $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Ex by using definition of dervitive - find $f'(x)$

$\boxed{f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}}$

1) $f(x) = 2x + 3$

$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$

$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{2y + \cancel{3} - 2x - \cancel{3}}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{2(y - x)}{y - x}$

$f'(x) = \lim_{y \to x} (2) = 2$

23

الاشتقاق

$f(x) = x^2$ at $x=3$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$= \lim_{y \to x} \frac{y^2 - x^2}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{(y-x)(y+x)}{y-x} = \lim_{y \to x} (y+x)$$

نعوض مكان كل y بـ x بعد الاختصار

$$f'(x) = x + x = 2x$$

$$f'(x) = 2 \cdot 3 = 6$$

أو بدل x نضع 3 بالسابقة

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{\text{ضعفي الجذر}}$$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} \cdot \frac{\sqrt{y} + \sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}$$

نقوم بضرب ثم اختصر

$$\lim_{y \to x} \frac{\cancel{y - x}}{\cancel{(y - x)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} = \lim_{y \to x} \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \frac{a}{g(x)} \qquad f'(x) = \frac{-a \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

23

بالتعويض

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

$$f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \to x} \frac{\frac{1}{y+2} - \frac{1}{x+2}}{y - x}$$

تعويض مباشر

$$\lim_{y \to x} (-1) \frac{\cancel{x-y}}{(x+2)(y+2)} \cdot \frac{1}{\cancel{y-x}} = \frac{-1}{(x+2)(x+2)}$$

$$\frac{-1}{(x+2)^2}$$

Derivation Rules قواعد الاشتقاق

1) $f(x) = c$ ثابت $\qquad f'(x) = 0$

اشتقاق الثابت صفر

Ex $f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$

$f(x) = -\frac{1}{3} \Rightarrow f'(x) = 0$

2) $f(x) = x^n \qquad f'(x) = n\,x^{n-1}$

$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$

$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$

$f(x) = x^{-6} \Rightarrow f'(x) = -6\,x^{-7}$

قواعد الاشتقاق

3) $f(x) = cx^n \Rightarrow f'(x) = c \cdot n\, x^{n-1}$

$f(x) = 5x^3 \qquad f'(x) = 15x^2$

$f(x) = 7x \qquad f'(x) = 7$

4) $f(x) = g(x) \mp b(x) \Rightarrow f' = g'(x) \mp b'(x)$

* $f(x) = x^5 + 3x^2 - 2x + 7$

$f'(x) = 5x^4 + 6x - 2$

* $f(x) = x^{-3} + 2x^5 - 4x + 1$

$f'(x) = -3x^{-4} + 10x^4 - 4$

5) $f(x) = g(x) \cdot h(x)$

$f'(x) = g(x) \cdot h'(x) + g'(x) \cdot h(x)$

$f(x) = (5x^2 - 3)(x^3 + 4x)$ at $x = 1$

$f'(x) = (5x^2 - 3)(3x^2 + 4) + (x^3 + 4x)(10x)$

عند $x=1$ $= (5-3)(3+4) + (1+4)(10)$

$= 14 + 50 = 64$

6) $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$

مشتقة البسط × المقام − مشتقة المقام × البسط

مربع المقام

$f'(x) = \dfrac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$

محاضرة 23
الأحد

(8) قواعد اشتقاق النسب المثلثية [illegible]

$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x$

$f(x) = \tan x \qquad f'(x) = \sec^2 x$ قا

$f(x) = \cot x \qquad f'(x) = -\csc^2 x$ قتا

$f(x) = \sec x \qquad f'(x) = \sec x \cdot \tan x$

$f(x) = \csc x \qquad f'(x) = -\csc x \cdot \cot x$

$f(x) = \sin x + 5\cos x + x^2 - 3$

$= \cos x - 5\sin x + 2x$

$f(x) = 4\tan x + 3\cos x - 3x^3 + 5$

$f'(x) = 4\sec^2 x - 3\sin x - 9x^2$

انتهت المحاضرة

الثلاثاء

يكون الاقتران متشعب قابل للاشتقاق عند نقطة التشعب إذا كان:

1) $\lim_{x \to a^+} f = \lim_{x \to a^-} f = f(a)$

2) $f'(x) = f'(x)$ اليسار

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & x \geq 0 \\ 4 - 3x & x < 0 \end{cases}$$

find $f'(x)$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & x > 0 \\ -3 & x < 0 \\ d.n.e & x = 0 \end{cases}$$

$f'(0) = d.n.e$

حتى نضع إشارة = في المساواة عند > أو < يجب أن نبحث في الاتصال والاشتقاق عند الاشتقاق

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ } d.n.e

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 4 - 0 = 4$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 2 \\ 2x - 1 & x < 2 \end{cases}$$

find $f'(x)$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 3$

1- الشرط الأول تحقق

$2 \cdot 2 = 4$

2

d.n.e

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x > 2 \\ 2 & x < 2 \\ d.n.e & x = 2 \end{cases}$$

نعوض في f و f'

$f'(5) = 2 \cdot 5 = 10$

$f'(2) = d.n.e$ $\quad f'(1) = 2$

Scanned by CamScanner

~~24~~ محاضرة ١

Tangent Line

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x^2 & x \geq 0 \\ x^2 + 3x^4 & x < 0 \end{cases}$$

find $f'(x)$. من نوع عادة f' في

نعوض بنقطة التشعب في f' (لليمين واليسار) ونعوض بنقطة f' (اليمين واليسار) متساوية

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x & x \geq 0 \\ 2x + 12x^3 & x < 0 \end{cases}$$

→ نعوض f' في $x=0$ (النهاية)

Tangent and normal

المماس العمودي

إيجاد slop (m)

إيجاد معادلة المماس $m = f'(x_0)$

Tangent line $y - y_0 = m(x - x_0)$

- ~~Tangent~~ normal Line $y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$

ميل أو دالة (معادلة المماس)

- Where $f(x)$ has horizantal tangent

مماس أفقي $f'(x) = 0$, الميل يساوي صفر $m=0$

ex Let $f(x) = \frac{x}{x+2}$ find the equation of tangent line and normal Line at $x=4$?

لإيجاد معادلة المماس أو العمودي يجب أن أعرف (m, y_0, x_0)

$x_0 = -4$

$y_0 = \frac{-4}{-4+2} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow y_0 = 2$

$(-4, 2)$

24 المحاضرة

$$f'(x) = \frac{(x+2).1 - x.1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$$

$$f'(-4) = m = \frac{2}{(-4+2)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad \boxed{m = \frac{1}{2}}$$

tangent line : $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - (-4))$$

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 4)$$

normal line $y - y_0 = \frac{-1}{m}(x - x_0)$

$$y - 2 = -2(x + 4)$$

Ex:
Let $f(x) = x^2 - 2x$ find → tangent line where has horizontal tangent.

Sol
$f' = 0 \Rightarrow m = 0$

$2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \boxed{x_0 = 1}$

$y = 1^2 - 2.1 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow y_0 = -1$

$m = 0$

tangent line : $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y + 1 = 0(x - 1)$$

$$y + 1 = 0$$

Scanned by CamScanner

الأحد

صفحة 25

The Higher derivatives

$y' , f'(x) , \frac{dy}{dx}$: المشتقة الأولى

$y'' , f''(x) , \frac{d^2y}{dx^2}$ المشتقة الثانية

المشتقة الثالثة

Ex Find $\frac{d^2y}{dx^2}$ at $x = 2$

$y = x^3 + 5x^2 - 3$

$y' = 3x^2 + 10x$

$y'' = 6x + 10$

$f''(2) = 6 \cdot 2 + 10 = 12 + 10 = 22$

important

$y = \frac{2}{x+3}$

$y' = \frac{-2(1)}{(x+3)^2} = \frac{-2}{(x+3)^2}$

$y'' = \frac{2 \cdot 2(x+3) \cdot 1}{((x+3)^2)^2} = \frac{4(x+3)}{(x+3)^4}$

Chain Rule قاعدة السلسلة

Ex find $f'(x)$.

$f(x) = (x^2 - 3x + 5)^4$

اقتران بعليه أُس
مثل القوس كما هو بنزل الأس
وننقص من الأس واحد × مشتقة ما داخل

$f'(x) = 4(x^2 - 3x + 5)^3 \, (2x - 3)$

$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 2}$

$f(x) = (x^2 - 5x + 2)^{\frac{1}{3}}$ $\qquad \left(\frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}\right)$

$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 5x + 2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x - 5)$

(مشتقة القوس) . (مشتقة ما داخل القوس)

$f(x) = \sqrt{x^3 + \sin x + 5}$

مشتقة الجذر مقلوب
ضعف الجذر التربيعي

$$f'(x) = \frac{3x^2 + \cos x}{2\sqrt{x^3 + \sin x + 5}}$$

قاعدة

$f(x) = \sqrt{g(x)}$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

$\boxed{y = \cos^2 x}$ د. قاعدة السلسلة

(cos مشتقة)(مشتقة الأس)[cos الباقي كما هو]

$y' = 2\cos x \cdot (-\sin x)$

$= -2\cos x \sin$

أو بطريقة ثانية: $y = \cos x \cdot \cos x$ باستخدام قاعدة الضرب

$y' = \cos x\,(-\sin x) + (-\sin x)\cos x$

$y' = -\cos x\,[\sin x + \sin x]$

$y' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$

(sin مشتقة).(sin وهو الباقي)

$y'' = -[2 \cdot \cos 2x] = -2\cos 2x$

$y = \dfrac{1+x}{1-x}$

$y' = \dfrac{(1-x)(1) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$

$y'' = \dfrac{-2 \cdot 2(1-x)(-1)}{(1-x)^4} = \dfrac{4}{(1-x)^3}$

أو $y' = \dfrac{2}{(1-x)^2} = 2(1-x)^{-2}$

$y'' = -4(1-x)^{-2-1}(-1)$ قاعدة السلسلة

$= +4(1-x)^{-3} = \dfrac{4}{(1-x)^3}$

Scanned by CamScanner

حسب قاعدة السلسلة

$f(x) = g(x)^n$

$f'(x) = n \cdot g(x)^{n-1} \cdot g'(x)$

$f(x) = \sin(5x^2)$

(مشتقة ما بداخل sin) [sin مشتقة]

$f'(x) = 10x \cdot \cos(5x^2)$

$f(x) = \tan^5(7x^2)$

مشتقة ما بداخل tan x مشتقة الأس x مشتقة tan

$f'(x) = 14x \cdot 5\tan^4(7x^2) \cdot \sec^2(7x^2)$

$f(x) = \left(\dfrac{x+2}{2x-3}\right)^7$ مشتقة ما داخل القوس

مشتقة

$f'(x) = 7\left(\dfrac{x+2}{2x-3}\right)^6 \cdot \dfrac{(2x-3)(1) - (x+2)2}{(2x-3)^2}$

Find $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$y = \cos(4x^2)$ $\quad y = \cos^2 x$ $\quad y = \dfrac{1+x}{1-x}$

$y = \cos 4x^2$

$y' = 8x(-\sin 4x^2) = -8x \cdot \sin 4x^2$

$y'' = (-8x)(8x\cos 4x^2) + \sin 4x^2 \cdot (-8)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx}$$

سؤال ... توحيد مقامات ...

$xy = 5$ at $(2,3)$

Ex find slope of the tangent

$x^2+y^2 = 3$ at $(0,1)$

$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{2y\frac{dy}{dx}}{2y} = \frac{-2x}{2y}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$

$M = \frac{-0}{1} = 0$

Tangent

معادلة المماس

$y - y_0 = m(x - x_1)$

$y - 1 = 0 \quad y = 1$

normal العمودي

$y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$

$y = 1$

$xy = 5$ at $(2,3)$

مشتقة

$1 \cdot y + \frac{dy}{dx} x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} x = -y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}\Big|_{(2,3)} = \frac{-3}{2}$

Notes

$y = c^{g(x)}$ $\quad y' = g'(x) \cdot c^{g(x)} \cdot \ln|c|$

ثابت

Ex 5^{x^2-3x} $\quad \frac{dy}{dx} = (2x-3)\, 5^{x^2-3x} \ln|5|$

Tangent

$y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 2)$

normal $\quad y - y_0 = \frac{-1}{m}(x - x_0)$

$y - 3 = \frac{2}{3}(x - 2)$

$\frac{1}{0} = \infty$

الخميس 12/28

المحاضرة 26

L. Hopitals rule

عندما يكون

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ أو } \frac{\infty}{\infty}$$

نستخدم قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ex : find

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^2+3x} = \frac{\sin 0}{0+0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2x+3} = \frac{\cos 0}{2 \cdot 0+3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim \frac{\sin x}{x(x+3)} \quad \lim \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$1 \cdot \frac{1}{0+3} = \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{0} = \infty$

2) $$\lim_{x \to 1} \frac{5x^4 - 4x^3 + 1}{x^5 + 3x^3 - 4} = \frac{0}{0}$$

المشتقة تكتيبية

$$\lim_{x \to 1} \frac{20x^3 - 12x^2}{5x^4 + 9x^2} = \frac{20-12}{5+9} = \frac{8}{14}$$

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{0}{0}$$

"تطبيقات على المشتقات"

تزايد وتناقص (تقعر وقيم عظمى وصغرى)

المحاضرة الـ 26

نشتق مرة أخرى

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{0}{0}$$

نشتق مرة أخرى

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$$

* هي قاعدة لحل أسئلة النهايات باستخدام المشتقات (قاعدة لوبيتال)

ch4 Critical Point النقاط الحرجة

$f'(x) = 0$ أو $f'(x) = d.n.e$

يجب أن تكون النقاط ضمن المجال (DOM) والفترة

Ex: find the critical point

1) $F(x) = x^3 - 3x^2$ $\quad$ $Dom\ f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(3x-6) = 0$

إما $\boxed{x = 0}$ أو $3x - 6 = 0$ $\quad \boxed{x = 2}$

$(-\infty, 0]$ inc

$[0, 2]$ dec

$[2, \infty)$ inc

critical point $= \{0, 2\}$

2) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

$Dom = \mathbb{R} - \{2\}$

$f'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} = 0$

$x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2}$

none critical point

المحاضرة 26

$f(x) = \sqrt{9-x^2}$

DoM $\quad 9-x^2=0 \Rightarrow x = \mp 3$

DoM $f = [-3, 3]$

$f'(x) = 0$

$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = 0$

$\boxed{x=0}$

$9-x^2=0 \Rightarrow \boxed{x = \mp 3}$

مجموعة الحل

critical point $= \{-3, 0, 3\}$

بإيجاد DoM ، نشتق ، نساوي بالصفر ، مجموعة الحل

إذا كانت النقطة غير داخلة في DoM نستبعدها من مجموعة الحل.

يتبع التناقص التزايد

Increase and decrease

التزايد و التناقص

خطوات الحل 1) نجد DoM

2) نشتق و نساوي بالصفر ونجد critical point

3) نضع على خط الأعداد ، أشارة f'

inc $\quad + +$

dec $\quad - -$

Ex. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

DoM $= \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

$\boxed{x=0} \quad \boxed{x=2}$

$+\,+ \;|\; -\,-\,- \;|\; +\,+\,+ \quad F'$

متزايد 2 متناقص 0 متزايد

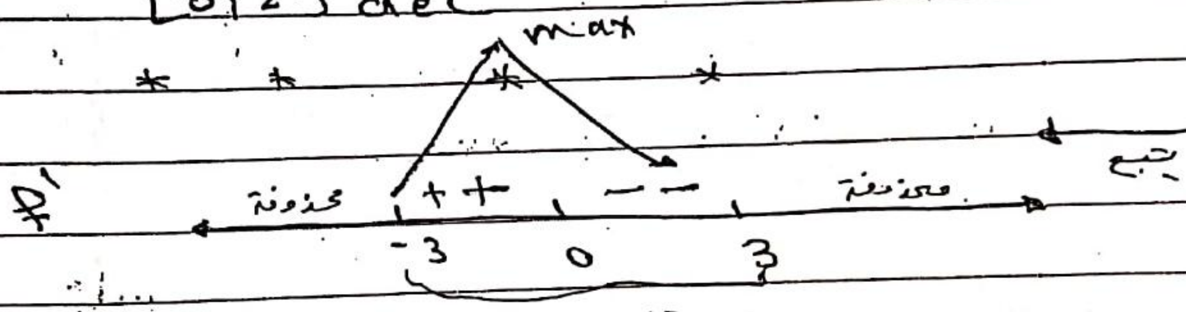
نعوض بالمشتقة مثلاً 3 ($3(3)^2 - 6(3) =$ موجب) مثل 2

لنعرف الاشارات -1 , 1

إذا كانت حدود الفترة

$(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$ inc

$[0, 2]$ dec



مثلاً نختار (-1) للاختبار $[-3,0]$

(1) للاختبار $[0,3]$

$[-3, 0]$ Inc

$[0, 3]$ dec

القيم المطلقة

at $x=0$ max $\Rightarrow$ abs max $f(0)=3$

at $x=3$ min $\Rightarrow f(-3)=0$

at $x=3$ min $\Rightarrow f(3)=0$ } abs min

الأحد 12/31

المحاضرة 27

notes

في الجذر و الكسور

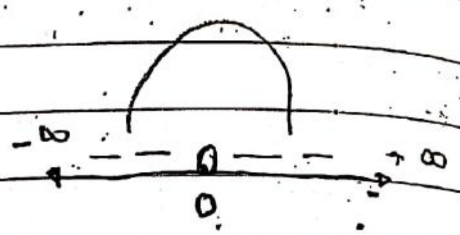
بالبداية إيجاد DOM

Ex: $f(x) = \frac{1}{x}$

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$



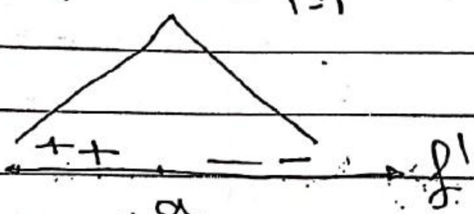
$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ dec

قيم قصوى ∄

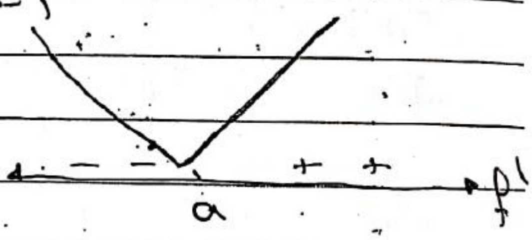
Local Extremum : القيم القصوى المحلية

max : القيم العظمى

min : القيم الصغرى



max



min

Ex find the Local extremum

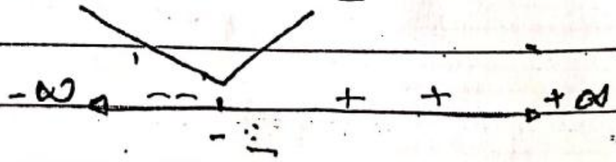
$f(x) = x^2 + 4x$

$\text{Dom} = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$

critical point

at $x = -2$



الأحد 12/31

المحاضرة 27

" 2 "

$(-\infty, -2]$ dec

$[-2, \infty)$ Inc

at $x = -2$ min → its value $f(-2)$

نعوض قيمة x الحرجة بالاقتران الأصلي

$f(x)$ ← الصفحة 1 $\qquad (-2)^2 - 4(-2)$

$f(-2) = -4$

$f(x) = (x-5)^3$

Dom $f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3(x-5)^2 \cdot 1 = 0$

$\Rightarrow x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

نعوض في f' $\qquad f' \quad -\infty \longleftarrow ++ \quad 5 \quad ++ \longrightarrow +\infty$

critical point

at $x = 5$ $\qquad$ الاقتران متزايد في جميع قيمه لا يوجد قيم قصوى على $\mathbb{R}$

$(-\infty, +\infty)$ Inc

max, min → none

$f(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}$

Dom $= \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$f'(x) = \dfrac{-2(x-3)}{(x-3)^4} = \dfrac{-2}{(x-3)^3} = 0$

المحاضرة 27

$x - 3 = 0$ $-\infty \quad + + \quad 3 \quad - - \quad +\infty \quad f'$

$x = 3$

لا يوجد تزايد تناقص لأنه لا يوجد نقاط حرجة ولا قيم عظمى ولا صغرى

End point Extreamum

شرطها معرفة الفترة

end point min $\quad [a \quad + + \quad b] \quad f'$ $\quad$ end point max

Ex: find the end point extremum

1) $f(x) = x^2 \quad ; \quad x \in [-3, 2]$

$f'(x) = 2x \Rightarrow x = 0$ نعوضها بالمشتقة

$-3 \quad - - \quad 0 \quad + + \quad 2 \quad f'$

at $x = -3$ end point max

at $x = 2$ end point max

$x = 0$ Local min

Ex: $f(x) = x^3 \quad ; \quad x \in [-2, 3]$ مسدودة لما بتقفل هونا

$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

at $x = -2$

end point min $\quad -\infty \quad -2 \quad + + \quad 0 \quad + + \quad 3 \quad +\infty \quad f'$ $\quad$ end point

انتهت المحاضرة

Absolut Extremum

القيم القصوى المطلقة

أعلى max يسمى abs max (لكن يلغى اذا كان هناك lim أعلى منه).

أقل min يسمى abs min (لكن يلغى اذا كان هناك lim أقل منه)

Ex:
Find the absolut max and min

$f(x) = x^2 - 4x + 5 \qquad x \in [0,3]$

$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

max   min   max

--   ++ f', f

0   2   3

at $x = 0$ max $\rightarrow f(0) = 5$ (abs) → [illegible]

يلغى تلقائيا - at $x = 3$ max $\rightarrow f(3) = 2$

at $x = 2$ min $\rightarrow f(2) = 1$ (abs) [illegible] abs max

Ex: $f(x) = x^3 \qquad x \in [-2, 3)$

$f'(x) = 3x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

min   ++   ++ f'

-2   0   3

[illegible]

at $x = -2$ min $\rightarrow f(-2) = -8 \rightarrow$ abs min

none abs max

$f(x) = \frac{x^3}{3} - 9x \qquad x \in [-5, 6]$

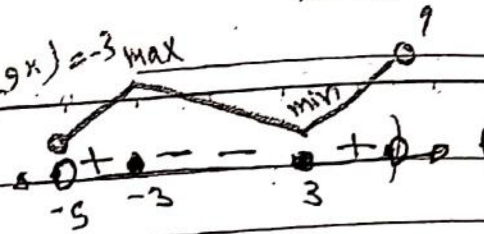
$f'(x) = x^2 - 9 = 0 \qquad (x-3)(x+3) = 0$

$\lim_{x \to 6^-} (\frac{x^3}{3} - 9x) = 18$ ناقص

للفترة $(-5,7)$ تكون (abs)

$\lim_{x \to -5^+} (\frac{x^3}{3} - 9x) = -3$

$x = \mp 3$



ماكو abs كروعي نفس الجواب

at $x = -3$ max $\to f(-3) = -9+27 = 18$ $\to$ non abs

at $x = 3$ min $\to f(3) = 9 - 27 = -18$ $\to$ abs لان القيمة بنقطة صفر... أقل منها

Ex مراجعة :

$\lim_{x \to \mp\infty} \to$

درجة البسط = درجة المقام

Ex نختار الحد الأكبر في البسط والمقام

لنطبق على الحل تكون معاملات البسط على معاملات المقام

إذا تساوي

Ex $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^5 + 2x^2 + 1}{7x^4 + 2x^5 - 3}$

درجة البسط = درجة المقام

الناتج = معامل البسط / معامل المقام

$\lim \frac{3\cancel{x^5}}{2\cancel{x^5}} = \frac{3}{2}$

2) درجة المقام > درجة البسط $\to$ الناتج = صفر

Ex $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 - 3x^3 + 2}{7x^2 + 2x^4 + 3}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{-3x^3}{2x^4} = \lim_{x \to \infty} \frac{-3}{2x} = \frac{-3}{\infty} = 0$

$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$

3) درجة البسط > درجة المقام $\xrightarrow{\text{الناتج}}$ $-\infty$ (d.n.e)

Ex $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + 5x^2 + 2}{3x^2 - 1}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{3x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{3} = \frac{-\infty}{3} = -\infty = \text{d.n.e}$$

قواعد :

$\dfrac{\infty}{\text{عدد موجب}} = \infty$ | $\dfrac{-\infty}{-5} = \infty$

$\dfrac{\infty}{\text{عدد سالب}} = -\infty$ | $\dfrac{-\infty}{2} = -\infty$

الخميس ٤/١
المحاضرة 23

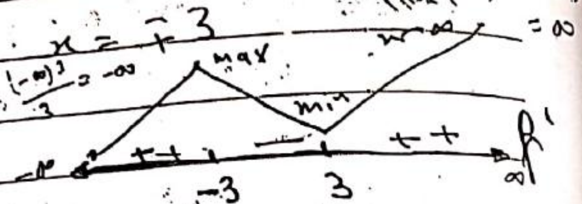
إذا استاوت قيم ال max نشير لها abs

Ex: $f(x) = \frac{x^3}{3} - 9x$

$f'(x) = x^2 - 9 = 0 \quad x = \mp 3$

$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{(-\infty)^3}{3} = -\infty$

$\lim (f) = \lim \left(\frac{x^3}{3}\right) = \infty$



at $x = -3$ max

$f(-3) = \frac{-27}{3} + 27 = 18$

at $x = 3$ min

$f(3) = 9 - 27 = -18$

none abs

أقل min تكون abs
أعلى max تكون abs
ماتي تتم مقارنة

Ex: $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$

x^2+4 مجموع مربعين لا يحلل

$Dom(f) = \mathbb{R}$

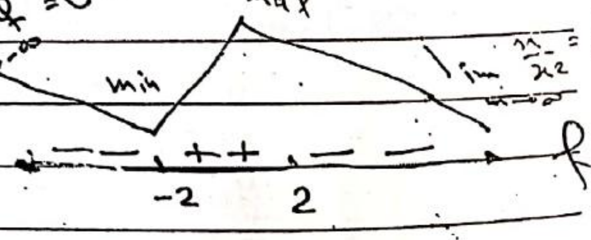
$f' = \frac{(x^2+4) \cdot 1 - x(2x)}{(x^2+4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2+4)^2} = 0$

$4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \mp 2$

$\lim_{x \to -\infty} f = \left(\frac{x}{x^2}\right) = 0$

$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2} = 0$

أما x^2+4 لا يحلل



at $x = -2$ min

$f(-2) = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4} < 0 \quad \lim_{x \to \infty} f \rightarrow$ abs

at $x = 2$ max

$f(2) = \frac{1}{4} \rightarrow$ abs $> 0 \ (\lim_{x \to -\infty} f)$

(التمارين مع إشارة فقط دون الحاجة للفترات)

الفترات بالتقعر دائماً مفتوحة عند حدود المجال

Concavity التقعر

$+ + +$ f'' $- - -$ f''

إشارة المشتقة الثانية

Concave up   Concave down

التقعر للأعلى   التقعر للأسفل

$- - -$ a $+ +$ f''

inflection Point نقطة انعطاف

Ex: for the following a) describe the concave.
b) find the point of inflection.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$-\infty$ $- -$ 1 $+ +$ $+\infty$ f'' المشتقة الثانية

Concave up $(1, \infty)$

Concave down $(-\infty, 1)$ قيمة نقطة الانعطاف

at $x = 1$ inflection Point $= (1, f(1))$ نعوض في الاقتران الأصلي

$= (1, -1)$

$f(x) = x^6$

$f'(x) = 6x^5$ $f''(x) = 30x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$

$(-\infty, \infty)$

concave up $+ +$ 0 $+ +$ f''

تقعر للأعلى   ليس نقطة انعطاف

ملاحظة الأخيرة
ملاحظة الأخيرة

$f(x) = \frac{1}{x}$ no critical point

Dof $= \mathbb{R} - \{0\}$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ decr.

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $f''(x) = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} = 0$

$x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\cap$ $\cup$

$- - -$ 0 $+ +$ f''

لا يوجد نقاط انقلاب لأن الصفر ليس بالدالة

$(-\infty, 0)$ concave down
$(0, \infty)$ concave up

none inflation

$f(x) = \sqrt{x-3}$ $x-3 = 0$ $x = 3$

Dom $= [3, \infty)$

$f' = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} =$ $\sqrt{x-3} = (x-3)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-3}} = \frac{1}{2}(x-3)^{-\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2} - 1$

$f'' = -\frac{1}{4}(x-3)^{-\frac{3}{2}} \cdot 1$

$$f'' = \frac{-1}{4\sqrt{(x-3)^3}} = 0$$

$x-3=0 \rightarrow x=3$

concave down $(3,\infty)$

find
1) critical point, Increase and dec
2) Local extreamum
3) inflection point, concave (up, down)

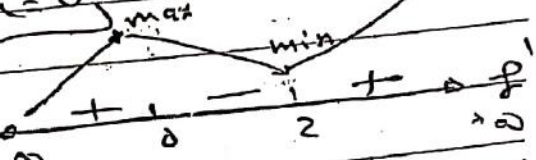
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

Dom $f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

$\boxed{x=2}$ $\boxed{x=0}$



$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ } none

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$

critical point

at $x = \{0, 2\}$

$(0, f(0)) = (0, 1)$

$(2, f(2)) = (2, -3)$

الفترات مغلقة

Incres $= [-\infty, 0] \cup [2, \infty)$

dec $= [0, 2]$

Scanned by CamScanner

- عندما يكون تحديد شكل الجدول وكان اقتران كثير حدود $x^3 - 3x + 1$ نعوض فقط بأعلى أس

∞ (عدد موجب) = ∞ $\quad \frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$

∞ (عدد سالب) = $-\infty$

2) at $x=0$ max $\rightarrow f(0)=1$

$x=2$ min $\rightarrow f(2) = -2$

3) $f''(x) = 6x - 6 = 0$

$x = 1$

f'': $-$ | $+$ (at 1)

at $x=1$ inflection point نقطة انعطاف

$f(1) = -1 \Rightarrow (1, -1)$

التقعر فترات مفتوحة من داخل المجال

concave up $(1, \infty)$

concave up $(-\infty, 1)$

$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ $\quad 9 - x^2 = 0 \quad x = \mp 3$

ناخذ الجزء الموجب $\quad -\ |\ +\ |\ -$ at -3, 3

Dom = $\mathbb{R}$ $[-3, 3]$

$$f' = \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = 0$$

$x = 0 \Rightarrow \sqrt{9-x^2} = 0 \qquad 9 - x^2 = 0$

$x = \mp 3$

f': $-\infty$ ... -3 $+$ 0 $-$ 3 ... $+\infty$

critical point

at $x = \{-3, 0, 3\}$

Scanned by CamScanner

$(-3, f(-3)) = (-3, 0)$

$(0, f(0)) = (0, 3)$

$(3, f(3)) = (3, 0)$

$[-3, 0]$ incres

$[0, 3]$ dec

end point

$x = 3 \quad x = -3$

at $x = -3$ min its value $f(-3)$ abs

at $x = 0$ max = = $f(0) =$ أكبر قيمة ... $= 0$

at $x = 3$ min = $f(3) =$ abs

أقل قيمة ... $= 0$

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}} = -x\,(9-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

مشتقة ما داخل القوس

$$f''(x) = (-1)\,(9-x^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,2x\,(9-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-x)$$

$$f''(x) = -(9-x^2)^{-\frac{1}{2}} + \cancel{\tfrac{1}{2}}\,x^2\,(9-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{-x^2}{\sqrt{(9-x^2)^3}} - \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$$

بنزل 2 على الترتيب $\sqrt{(9-x^2)^2(9-x^2)} = \sqrt{9-x^2}\,(9-x^2)$

$$f''(x) = \frac{-x^2}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \cdot \frac{9-x^2}{9-x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-x^2 + x^2 - 1}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$$

نهايات مشتقات
نقاط حرجة

$$f''(x) = \frac{-9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} = 0$$

$9 - x^2 = 0 \qquad x = \mp 3$

$-3 \qquad +3 \qquad f''$

concave down $(-3,3)$

no up's
inflection

ماڤي نقاط انقلاب

$$f(x) = \frac{8}{x^2-9}$$

dom $= R - \{3, -3\}$

$+ \quad - \quad f'$
$-3 \quad 0 \quad 3$

$+ \quad - \quad + \quad f''$
$-3 \quad 3$

$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ قاعدة

$\lim_{x \to 0} x \cdot \cot 3x = \lim_{x \to 0} x \cdot \frac{\cos 3x}{\sin 3x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 3x} \cdot \cos 3x = \frac{1}{3} \cos 0 = \frac{1}{3}$

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sec x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(\sec x + 1)}{\underbrace{\sec^2 x - 1}_{\tan^2 x}}$

ضرب والحد $(\sec x + 1)$ قانون $\tan^2 x$

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\tan^2 x} \cdot (\sec x + 1) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\tan^2 x} \left(\frac{1}{\cos x} + 1\right)$

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\tan x} \cdot \frac{x}{\tan x}$ نظرية (1)

$1 + \left(\frac{1}{\cos 0} + 1\right) = 1 + 1 = 2$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{2x \csc x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2x \cdot \frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{2x}$ مرافق $= \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{2x(\cos x + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin^2 x}{2x(\cos x + 1)}$

$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{(\cos x + 1)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{0}{2} = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x}{\cot 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{\frac{\cos 3x}{\sin 3x}} = \lim \frac{4x \sin 3x}{\cos 3x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 3x}{4x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{4x} \cdot \frac{\tan 3x}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 4x}{9x^2} \cdot \frac{(1 + \cos 4x)}{(1 + \cos 4x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2 4x}{9x^2 (1 + \cos 4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x}{9x^2} \cdot \frac{1}{(1 + \cos 4x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{9x} \cdot \frac{\sin 4x}{x} \cdot \frac{1}{(1 + \cos 4x)}$$

$$\frac{4}{9} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4}{9 \cdot 2} = \frac{8}{9}$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 (1 + \cot^2 3x)$$

$$x^2 \left(1 + \frac{\cos^2 3x}{\sin^2 3x}\right) = x^2 + \frac{x^2}{\sin^2 3x} \cdot \cos^2 3x$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 + \lim \frac{x \cdot x}{\sin 3x \cdot \sin 3x} \cdot \cos^2 3x$$

$$0 + \frac{1}{9} \cdot 1 = \frac{1}{9}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec x - 1}{x \cdot \sec x} = \cancel{\lim \frac{\sec x}{x \sec x}} - \frac{1}{x \cdot \sec x}$$

نضرب بمرافق

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{x \cdot \sec x (\sec x + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan^2 x}{x \sec x (\sec x + 1)}$$

X

$$\lim \frac{\sec x}{x \cdot \sec x} - \frac{1}{x \sec x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\frac{x}{\cos x}}$$

$$\lim \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{x} \right) = \lim \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$$