Itô formula

Tatsuki Kodama

New Journal Club@Online

Table of contents

- Itô積分・Itô公式とは
- Random walk と Brown運動
- 確率微分方程式 (SDE)
- Itô積分・Itô公式の詳細
- 宇宙論への応用

Itô積分・Itô公式とは

- 確率微分方程式 (SDE) を解くための枠組み
- 微積分学の**基本定理の確率版**
- **Itô積分**

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \left(f(x, w, t)\,\mathrm{d}t + g(x, w, t)\,\mathrm{d}w \right)$$

- **Itô公式**

$$\mathrm{d}h(x, t) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} f + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} g^2 \sigma^2 + \frac{\partial h}{\partial t} \right) \mathrm{d}t + \frac{\partial h}{\partial x} g\,\mathrm{d}w$$

- **重要**：$\mathrm{d}w^2 = \sigma^2\,\mathrm{d}t$

Random walk と Brown運動

- $\mathrm{d}w^2 = \sigma^2 \mathrm{d}t$ の感覚を理解する
- **Random walk** $\rightarrow$ **Brown運動** (Wiener過程)
  - 離散確率過程 $\rightarrow$ 連続確率過程

Random walk

- 点 P：時刻 $t = 0$ で原点
- 1秒ごとに確率 $\frac{1}{2}$ で $\pm\sigma$ 移動
- t 秒後の位置 $r(t)$
- $r(t)$：random walk

Random walk

- $\Delta r(t) := r(t+1) - r(t)$
- $\mathbb{E}[\Delta r(t)] = 0, \mathrm{Var}[\Delta r(t)] = \sigma^2$
- $\mathbb{E}[r(t)] = 0$
- $\mathrm{Var}[r(t)] = \sigma^2 t$
  - ゆらぎ $\sim 1/\sqrt{t}$ に比例して増大

Brown運動

- w: 確率変数
- 時間分割 $\Delta t = 1/n$
- $\Delta w\left(\frac{k}{n}\right) := w\left(\frac{k+1}{n}\right) - w\left(\frac{k}{n}\right)$
- $\mathrm{Var}[w(t)] = \sigma^2 t$ となるように極限

$$\lim_{n\to\infty} w(t) \quad \text{を Brown運動 (Wiener過程) と定義}$$

- **ここで** $\mathrm{d}w^2 = \sigma^2\,\mathrm{d}t$

確率微分方程式 (SDE)

- 現実のデータは基本的にノイズあり
  - 例）stochastic inflation, 株価, 制御工学
- 古典的微分方程式が直接適用できない
  - $\to$ トレンドとノイズを明示的に分離
- 一般形

$$\mathrm{d}x = f(x, w, t)\,\mathrm{d}t + g(x, w, t)\,\mathrm{d}w$$

- 特に $\mathrm{d}x = ax\,\mathrm{d}t + bx\,\mathrm{d}w$ は **ブラック＝ショールズ過程**

SDEの統計的解釈

- 解 $x(t)$ は確率的に変動
  - 瞬間値はあまり有用でない
- 興味の対象は
  - 確率分布
  - 期待値
  - 分散
  - 相関関数などの統計量

Itô積分

定義

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x, w, t)\,\mathrm{d}t + g(x, w, t)\,\mathrm{d}w$$

は次の極限として定義：

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i} \left[f(x(t_i), w(t_i), t_i)(t_{i+1} - t_i) + g(x(t_i), w(t_i), t_i)(w(t_{i+1}) - w(t_i)) \right]$$

$\Rightarrow$ **Itô積分**

Itô積分の例

SDE: $\mathrm{d}x = bw\,\mathrm{d}w$

Itô積分より

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_0 + \int_0^t bw\,\mathrm{d}w \\
&= x_0 + \lim_N \sum_i bw(t_i)\left(w(t_{i+1}) - w(t_i)\right) \\
&= x_0 + \frac{1}{2}bw(t)^2 - \frac{1}{2}b\sigma^2 t
\end{aligned}
$$

- $\boxed{-\frac{1}{2}b\sigma^2 t}$ は Itô特有の項

Itô公式

一般形

SDE:

$$\mathrm{d}x = f\,\mathrm{d}t + g\,\mathrm{d}w$$

に従う場合、関数 $h(x,t)$ に対して

$$\mathrm{d}h(x,t) = \left(\frac{\partial h}{\partial x} f + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} g^2 \sigma^2 + \frac{\partial h}{\partial t}\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial h}{\partial x} g\,\mathrm{d}w$$

Itô公式の導出の流れ

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}h(x,t) = {} & \frac{\partial h}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial h}{\partial t}\mathrm{d}t \\
& + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

- $\mathrm{d}x = f\,\mathrm{d}t + g\,\mathrm{d}w$ 代入
- $\mathrm{d}w^2 = \sigma^2 \mathrm{d}t$ 使用
- 一次の微少量のみ保持 $\Rightarrow$ Itô公式

Itô公式 例

$x = w$, $h = x^2 = w^2$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}h &= \left(2x \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot \sigma^2\right)\mathrm{d}t + 2x\,\mathrm{d}w \\ &= \sigma^2 \mathrm{d}t + 2x\,\mathrm{d}w \end{aligned}$$

Itô積分により

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{2} b w(t)^2 - \frac{1}{2} b \sigma^2 t$$

Itô公式 応用例

SDE:

$$\mathrm{d}x = ax\,\mathrm{d}t + bx\,\mathrm{d}w$$

$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = a\,\mathrm{d}t + b\,\mathrm{d}w$

- $h = \log(x)$ に対して Itô公式

$$\mathrm{d}h = \left(a - \frac{b^2\sigma^2}{2}\right)\mathrm{d}t + b\,\mathrm{d}w$$

- 積分すると

$$x(t) = x_0 \exp\left[\left(a - \frac{b^2\sigma^2}{2}\right)t + bw(t)\right]$$

- **σ が大きいと減衰可能**

Summary

- **Itô積分** $\to$ ノイズを含む積分
- **Itô公式** $\to$ 関数変換時のSDE
- **応用**：金融、宇宙論、制御工学など

宇宙論への応用

- Eemeli Tomberg, "Itô, Stratonovich, and zoom-in schemes in stochastic inflation", https://arxiv.org/pdf/2411.12465
- Jérôme Martin et al., "Cosmological inflation and the quantum measurement problem", https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.86.103524