

Scores de Bartlett

Imanol Núñez Morales

23 de septiembre de 2015

- 1 Un poco de regresión lineal
 - Gauss-Markov
- 2 Obteniendo los scores
 - Recordando el modelo
 - ¿Regresión lineal de nuevo?
- 3 ¡A la carga!
 - Reproduciendo los scores de R
- 4 Referencias

Teorema (Gauss-Markov)

Sea $Y = X\beta + \varepsilon$ con $Y, \varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}^p$ y $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$, en donde $E[\varepsilon] = 0$ y $\text{Var}(\varepsilon) = \sigma^2 \mathcal{I}_n$ con $\sigma^2 < \infty$. Entonces el estimador $\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$, de β , de mínimos cuadrados es el mejor estimador lineal insesgado en el sentido del error cuadrático medio.

En análisis factorial tenemos la ecuación

$$\underbrace{X^{\text{cat}}}_{k \times 1} = \underbrace{A}_{k \times m} \underbrace{F}_{m \times 1} + \underbrace{e}_{k \times 1}, \quad (1)$$

en donde

- i) $X^{\text{cat}} = \mathcal{D}^{-\frac{1}{2}} (X - \mu)$ con $\mathcal{D} = \text{diag}(\Sigma)$,
- ii) $F \sim (0, \mathcal{I}_m)$,
- iii) $e \sim (0, \Psi)$ con Ψ una matriz diagonal,
- iv) $\text{Cov}(F, e) = 0_{m \times k}$,
- v) A se define como la matriz de pesos de los factores.

Para obtener los scores de Bartlett se asume que se conocen X^{\otimes} y A en la ecuación (1). Lo que queremos estimar es el valor de F y esto es un caso claro de regresión lineal.

Inmediatamente pensamos en utilizar mínimos cuadrados ordinarios para estimar F , pero como no sabemos si $\Psi = \sigma^2 \mathcal{I}_k$ para alguna $\sigma^2 > 0$, no podemos asegurar que esta estimación sea la mejor.

¿Cómo resolver este problema?

Si premultiplicamos ambos lados de la ecuación (1) por $\Psi^{-\frac{1}{2}}$ obtenemos lo siguiente:

$$\Psi^{-\frac{1}{2}} X^{\text{cat}} = \Psi^{-\frac{1}{2}} A F + \Psi^{-\frac{1}{2}} e. \quad (2)$$

Si nombramos $\epsilon = \Psi^{-\frac{1}{2}} e$ es inmediato que $E[\epsilon] = 0$ y $\text{Var}(\epsilon) = \mathcal{I}_k$, además de que sigue siendo un modelo lineal, por lo que el mejor estimador lineal de F es el que se obtiene de minimizar lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^k \epsilon_i^2 = \epsilon^T \epsilon \quad (3)$$

Resolvamos el problema.

El problema de minimizar (3) se escribe como sigue:

$$\min \sum_{i=1}^k \epsilon_i^2. \quad (4)$$

Veamos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \epsilon_i^2 &= \epsilon^T \epsilon \\ &= \left(\Psi^{-\frac{1}{2}} X^{\text{cat}} - \Psi^{-\frac{1}{2}} A F \right)^T \left(\Psi^{-\frac{1}{2}} X^{\text{cat}} - \Psi^{-\frac{1}{2}} A F \right) \\ &= \left(X^{\text{cat}} - A F \right)^T \Psi^{-1} \left(X^{\text{cat}} - A F \right) \\ &= \left(X^{\text{cat}} \right)^T \Psi^{-1} X^{\text{cat}} - 2 \left(\left(X^{\text{cat}} \right)^T \Psi^{-1} A \right) F \\ &\quad + F^T \left(A^T \Psi^{-1} A \right) F. \end{aligned}$$

De las operaciones anteriores se deduce que el problema (4) es equivalente a minimizar la función $g(F)$ dada por

$$\left(X^{\otimes}\right)^T \Psi^{-1} X^{\otimes} - 2 \left(\left(X^{\otimes}\right)^T \Psi^{-1} A \right) F + F^T \left(A^T \Psi^{-1} A \right) F. \quad (5)$$

Para esto necesitamos que $\nabla g(F) = 0$. Es fácil demostrar que

$$\nabla g(F) = 2 \left(A^T \Psi^{-1} A \right) F - 2 A^T \Psi^{-1} X^{\otimes}, \quad (6)$$

por lo que $\nabla g(\hat{F}) = 0$ si y sólo si

$$\hat{F} = \left(A^T \Psi^{-1} A \right)^{-1} A^T \Psi^{-1} X^{\otimes}. \quad (7)$$

El resultado (7) es lo que se conoce como los scores de Bartlett.

El código para obtener los scores de Bartlett en R se encuentra en:
[https://github.com/inuzm/Aplicada3/blob/master/recuperar_
factores.R](https://github.com/inuzm/Aplicada3/blob/master/recuperar_factores.R).

La idea es aprovechar la teoría desarrollada hasta el momento.

- [1] Koch, Inge. *Analysis of Multivariate and High-Dimensional Data*, Cambridge University Press, 2013.
- [2] https://en.wikipedia.org/wiki/Gauss%E2%80%93Markov_theorem
- [3] Documentación de *R*.