DEMOSTRACIÓN

Para todo x del intervalo se tiene $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$, de modo que, según el corolario 1, existe un número c tal que $f - g = c$. ▮

La proposición del corolario siguiente exige alguna terminología que se ilustra en la figura 14.

DEFINICIÓN

> Se dice que una función f es **creciente** sobre un intervalo si $f(a) < f(b)$ siempre que a y b sean dos puntos del intervalo con $a < b$. La función f es **decreciente** sobre un intervalo si $f(a) > f(b)$ para todos los a y b del intervalo con $a < b$. (Muchas veces decimos simplemente que f es creciente o decreciente, en cuyo caso se sobreentiende que el intervalo es el dominio de f.)

COROLARIO 3

Si $f'(x) > 0$ para todo x de un intervalo, entonces f es creciente en el intervalo; si $f'(x) < 0$ para todo x del intervalo, entonces f es decreciente en el intervalo.

DEMOSTRACIÓN

Consideremos el caso $f'(x) > 0$. Sean a y b dos puntos del intervalo con $a < b$. Entonces existe algún x en (a, b) con

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Pero $f'(x) > 0$ para todo x de (a, b), de modo que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0.$$

Puesto que $b - a > 0$ se sigue que $f(b) > f(a)$.

La demostración en el caso de ser $f'(x) < 0$ para todo x se deja para el lector. ▮

Obsérvese que si bien son ciertos los recíprocos de los corolarios 1 y 2 (y además evidentes), el recíproco del corolario 3 es falso. Si f es creciente, es fácil ver que

$f'(x) \geq 0$ para todo x, pero puede valer el signo de igualdad para algún x [considérese $f(x) = x^3$].

El corolario 3 aporta información suficiente para adquirir una buena idea de la gráfica de una función trazando el menor número posible de puntos. Consideremos una vez más la función $f(x) = x^3 - x$. Tenemos

$$f'(x) = 3x^2 - 1.$$

Hemos observado ya que $f'(x) = 0$ para $x = \sqrt{1/3}$ y $x = -\sqrt{1/3}$, y el también posible determinar el signo de $f'(x)$ para todos los demás x. Observemos que $3x^2 - 1 > 0$ precisamente cuando

$$\begin{aligned} 3x^2 &> 1, \\ x^2 &> \tfrac{1}{3}, \\ x > \sqrt{1/3} \quad &\text{o} \quad x < -\sqrt{1/3}; \end{aligned}$$

Así, pues, $3x^2 - 1 < 0$ precisamente cuando

$$-\sqrt{1/3} < x < \sqrt{1/3}.$$

Así f es creciente para $x < -\sqrt{1/3}$, decreciente entre $-\sqrt{1/3}$ y $\sqrt{1/3}$, y otra vez creciente para $x > \sqrt{1/3}$. Combinando esta información con los siguientes hechos

(1) $f(-\sqrt{1/3}) = \frac{2}{3}\sqrt{1/3}$,
$f(\sqrt{1/3}) = -\frac{2}{3}\sqrt{1/3}$,

(2) $f(x) = 0$ para $x = -1, 0, 1$,

(3) $f(x)$ se hace grande con x, y grande negativo cuando x es grande negativo.

es posible trazar una aproximación bastante respetable de la gráfica (figura 15).

Observemos de paso que los intervalos en que f crece y decrece los podríamos haber hallado sin molestarnos en examinar el signo de f'. Por ejemplo, puesto que f' es continua, y se anula solamente en $-\sqrt{1/3}$ y $\sqrt{1/3}$, sabemos que f' conserva siempre el mismo signo en el intervalo $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$. Puesto que $f(-\sqrt{1/3}) > f(\sqrt{1/3})$, se sigue que f decrece en este intervalo. Análogamente, f' conserva siempre el mismo signo en $(\sqrt{1/3}, \infty)$ y $f(x)$ es grande para x grandes, de modo que f debe ser creciente en $(\sqrt{1/3}, \infty)$. Otro punto que merece destacar: