Procesos de Lévy

AUTOR:
inm

PROFESOR:
Victor Rivero

CIMAT
Guanajuato
22 de mayo de 2025

RESUMEN
Notas sobre procesos de Lévy. Basadas en el curso impartido por el Dr. Victor Rivero en el semestre Enero–Julio 2025.

CIMAT
Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Índice general

Parte I.

Notas del curso

El objetivo de estas notas es presentar una introducción a la teoría de procesos de Lévy.

1 Trayectorias de un proceso estocástico

1.1. Definición

Las trayectorias de un proceso estocástico $(X_t, t \geqslant 0)$, definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, son las funciones que para cada $\omega \in \Omega$ están dadas por

$$t \mapsto X_t(\omega)\,, \qquad t \geqslant 0\,.$$

1.2. Definición

Diremos que las trayectorias son continuas por la derecha con límites por la izquierda (càdlàg) si

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega \in \Omega : \lim_{s\uparrow t} X_s(\omega) \text{ existe y } \lim_{s\downarrow t} X_s(\omega) = X_t(\omega) \text{ para toda } t \geqslant 0\Big\}\Big) = 1\,.$$

1.3. Definición

Diremos que dos procesos estocásticos X y Y, definidos en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ tienen la misma ley si para toda $n \geqslant 0$ y para cualesquiera $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n < \infty$,

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in dy_1, X_{t_2} \in dy_2, \dots, X_{t_n} \in dy_n) = \mathbb{P}(Y_{t_1} \in dy_1, Y_{t_2} \in dy_2, \dots, Y_{t_n} \in dy_n)\,.$$

También se dice que hay igualdad de las *leyes finito dimensionales*.

Cuando X toma valores en $\mathbb{R}^d$, basta verificar que se da la igualdad

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big\{\sum_{j=1}^{n} i\langle\lambda_j, X_{t_j}\rangle\Big\}\Big] = \mathbb{E}\Big[\exp\Big\{\sum_{j=1}^{n} i\langle\lambda_j, Y_{t_j}\rangle\Big\}\Big]$$

para cualesquiera $n \geqslant 1$, $0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^d$.

1.4. Definición (Procesos de Lévy)

Un proceso estocástico $(X_t, t \geqslant 0)$ definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con valores en $\mathbb{R}^d$ es un *proceso de Lévy* si

(i) X es càdlàg;

(ii) $X_0 = 0$;

(iii) los incrementos de son independientes, i.e. para toda elección de $n \geqslant 1$ y $0 = t_0 < t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n < \infty$,

$$(X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$$

son variables aleatorias independientes;

(iv) para cualesquiera $t, s \geqslant 0$, $X_{t+s} - X_t \stackrel{d}{=} X_s$, i.e.

$$\mathbb{P}(X_{t+s} - X_t \in dy) = \mathbb{P}(X_s \in dy)\,.$$

1.5. *Observación*

Una caminata aleatoria $(S_n, n \geqslant 0)$ en $\mathbb{R}^d$ tiene las mismas propiedades de incrementos independientes y estacionarios son las mismas que las de los procesos de Lévy.

1.6. *Observación*

Si X es un proceso de Lévy, su ley está caracterizada por las leyes unidimensionales. Es decir, la medida inducida por la trayectoria del proceso está determinada por lo que pasa en los tiempos t.

Demostración: Basta ver que las funciones características de la forma

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big\{\sum_{j=1}^{n} i\langle \lambda_j, X_{t_j}\rangle\Big\}\Big]$$

están determinadas por funciones características de la forma

$$\mathbb{E}\big[\exp\{i\langle \lambda, X_t\rangle\}\big],$$

lo cual se deduce inmediatamente de los incrementos independientes y estacionarios. En efecto, de estas propiedades se obtiene la igualdad

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big\{\sum_{j=1}^{n} i\langle \lambda_j, X_{t_j}\rangle\Big\}\Big] = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\big[\exp\{i\langle \tilde{\lambda}_j, X_{t_j - t_{j-1}}\rangle\}\big],$$

donde $\tilde{\lambda}_j = \sum_{k=j}^{n} \lambda_k$. ■

Como una consecuencia de la última observación se obtiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X_{t_1}, X_{t_2})] &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbb{P}(X_{t_1} \in dy_1, X_{t_2} \in dy_2) f(y_1, y_2) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbb{P}(X_{t_1} \in dy_1)\mathbb{P}(X_{t_2 - t_1} \in dy_2) f(y_1, y_1 + y_2).
\end{aligned}$$

Algunos ejemplos fundamentales son

(i) La deriva pura, de la forma $X_t = ta$ con $a \in \mathbb{R}^d$.

(ii) Un movimiento browniano de la forma $Y_t = QB_t$, donde $Q \in \mathbb{R}^{d\times d}$ y B es un movimiento browniano estándar d-dimensional.

(iii) El proceso Poisson compuesto, que se puede escribir de la forma $Z_t = S_{N_t}$, donde $(S_n, n \geqslant 0)$ es una caminata aleatoria en $\mathbb{R}^d$ y N es un proceso de Poisson de intensidad β.

En cada uno de los casos es posible obtener la función característica. En efecto, se cumple que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\exp\{i\langle \lambda, X_t\rangle\}\Big] &= \exp\{t\, i\langle a, \lambda\rangle\}, \\
\mathbb{E}\Big[\exp\{i\langle \lambda, Y_t\rangle\}\Big] &= \exp\Big\{-\frac{t}{2}|Q^{T}\lambda|^2\Big\}, \\
\mathbb{E}\Big[\exp\{i\langle \lambda, Z_t\rangle\}\Big] &= \exp\Big\{-t\int_{\mathbb{R}^d}(1 - e^{i\langle \lambda, y\rangle})\beta F(dy)\Big\},
\end{aligned}$$

donde $F(dy) := \mathbb{P}(S_1 \in dy)$. En adición, se verifica fácilmente que si se consideran Y y Z independientes, entonces $X + Y + Z$ vuelve a ser un proceso de Lévy.

Nótese que en la función característica de Z_t, se considera $\beta F(dy)$. Así, si definimos $\Pi(dy) = \beta F(dy)$ obtenemos una medida sobre $\mathbb{R}^d$ que, en general ya no es de probabilidad, y que veremos que satisfará ciertas condiciones de integrabilidad.

Relación con las leyes infinitamente divisibles

2

2.1. Definición

Diremos que una variable aleatoria Z con valores en $\mathbb{R}^d$ es *infinitamente divisible* si para toda $n \geqslant 1$ existe una colección de variables aleatorias $(Z_{k,n}, k \in [n])$ independientes e idénticamente distribuidas tales que

$$Z \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{k=1}^{n} Z_{k,n}\,.$$

2.2. Lema (Descomposición de Lévy–Khintchine)

Si Z es una variable aleatoria infinitamente divisible con valores en $\mathbb{R}^d$ entonces, para cualquier λ, se tiene la descomposición

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\exp\{i\langle\lambda, Z\rangle\}\big] \\ = \exp\Big\{i\langle\gamma,\lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle\lambda, A\lambda\rangle + \int_{\mathbb{R}^d}\big(e^{i\langle\lambda,y\rangle} - 1 - i\langle\lambda,y\rangle 1_{\{|y|<1\}}\big)\Pi(dy)\Big\},\end{aligned}$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}^d$, A es una matriz simétrica y positiva definida, y en adición Π es una medida en $\mathbb{R}^d$ que satisface $\Pi(\{0\}) = 0$ y

$$\int_{\mathbb{R}^d} 1 \wedge |y|^2 \Pi(dy) < \infty\,.$$

La tripleta (γ, A, Π) es única y se le conoce como tercia característica.

La demostración del lema anterior se puede consultar en la sección 8 de Sato (2013). TODO: Copiar las notas que tengo con una demostración en un apéndice.

Ahora relacionaremos los Procesos de Lévy con leyes infinitamente divisibles.

2.3. Lema

Si X es un proceso de Lévy con valores en $\mathbb{R}^d$, entonces para toda $t \geqslant 0$, X_t es infinitamente divisible.

Demostración: Debido a la independencia y estacionariedad de los incrementos, basta considerar $(X_{kt/n} - X_{(k-1)t/n}, k \in [n])$ para cada $n \geqslant 1$. ■

La descomposición de Lévy–Khintchine garantiza, para cada $t \geqslant 0$ dada, la existencia y unicidad de una tercia característica (γ_t, A_t, Π_t) para la ley de X_t.

2.4. Lema

Sea X *un proceso de Lévy en* $\mathbb{R}^d$*. Para cada* $t \geqslant 0$ *se cumple que*

$$\mathbb{E}\left[\exp\{i\langle\lambda, X_t\rangle\}\right] = \left(\mathbb{E}\left[\exp\{i\langle\lambda, X_1\rangle\}\right]\right)^t.$$

2.5. Corolario

Dado un proceso de Lévy X *con valores en* $\mathbb{R}^d$*, existe una única tercia* (γ, A, Π) *tal que*

$$\mathbb{E}\left[\exp\{i\langle\lambda, X_t\rangle\}\right] = \exp\{-t\Psi(\lambda)\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^d,$$

con

$$\Psi(\lambda) = -i\langle\gamma, \lambda\rangle + \frac{1}{2}\langle\lambda, A\lambda\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - e^{i\langle\lambda, y\rangle} + i\langle\lambda, y\rangle 1_{\{|y|<1\}}\right)\Pi(dy),$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}^d$*,* A *es una matriz simétrica positiva definida y* Π *es una medida sobre* $\mathbb{R}^d$ *con* $\Pi(\{0\}) = 0$ *e* $\int_{\mathbb{R}^d} 1 \wedge |y|^2 \Pi(dy) < \infty$*.*

2.6. Definición

La tercia (γ, A, Π) recibe el nombre *tercia característica* de X. A Π se le conoce como *medida de Lévy* de X y a Ψ el *exponente característico* de X.

2.7. *Observación*

La medida Π no es necesariamente finita. No obstante, la condición de integrabilidad que satisface implica que Π es finita sobre cualquier conjunto que no contiene una vecindad no vacía del cero. En efecto, basta verificar que $\Pi(\{z \in \mathbb{R}^d : |z| > r\}) < \infty$, lo cual se sigue de

$$\Pi\left(\{z \in \mathbb{R}^d : |z| > r\}\right) \leqslant \left(1 + \frac{1}{r^2}\right) \int_{\mathbb{R}^d} 1 \wedge |z|^2 \Pi(dz).$$

2.8. *Observación*

Dado un proceso de Lévy, existe una única tercia (γ, A, Π) tal que

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda) = &- \langle\gamma, \lambda\rangle + \frac{1}{2}\langle\lambda, A\lambda\rangle + \int_{|z|\geqslant 1} \left(1 - e^{i\langle\lambda, z\rangle}\right)\Pi(dz) \\ &+ \int_{0<|z|<1} \left(1 - e^{i\langle\lambda, z\rangle} + i\langle\lambda, z\rangle\right)\Pi(dz).\end{aligned}$$

Nótese que los primeros términos corresponden a los ejemplos fundamentales, donde se tendría que $\beta = \Pi(\{z : |z| \geqslant 1\})$ y $F(dz) = \beta^{-1} 1_{\{|z|\geqslant 1\}}\Pi(dz)$.

Procesos estables

3

sea X un proceso de Lévy en $\mathbb{R}^d$. Diremos que es α-estable si $\alpha \in (0,2]$ y X es α^{-1}-autosimilar, es decir que para toda $c > 0$,

$$\left(c^{-1/\alpha} X_{tc}, t \geqslant 0\right) \text{ tiene la misma ley que } X.$$

De esta definición, vemos que la función característica de X satisface

$$\begin{aligned} e^{-t\Psi(\lambda)} &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{i\langle\lambda, X_t\rangle\right\}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{i\langle\lambda, c^{-1/\alpha} X_{tc}\rangle\right\}\right] \\ &= e^{-tc\Psi(c^{-1/\alpha}\lambda)} \end{aligned}$$

para cualesquiera $c > 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}^d$. Por consiguiente, $\Psi(\lambda) = c\Psi(c^{-1/\alpha}\lambda)$ y entonces $\Psi(c\lambda) = c^\alpha \Psi(\lambda)$. Es decir que Ψ es α-homogénea.

3.1. Teorema

Los procesos α-estables aparecen como límites de caminatas aleatorias renormalizadas. Esto es, para una caminata aleatoria S en $\mathbb{R}^d$, supongamos que existen $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ y $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tales que

$$\frac{S_{\lfloor nt \rfloor} - t a(n)}{b(n)} \Rightarrow Y_t, \text{ conforme } n \to \infty,$$

para cada $t > 0$ y Y no es degenerado. Entonces Y es α-estable para alguna $\alpha \in (0,2]$. Adicionalmente, $b(n) \sim n^{1/\alpha}\ell(n)$, con ℓ una función de variación lenta.

La demotración de este resultado, en el caso $d = 1$, se puede consultar en la sección 5 del capítulo XVII del libro de Feller (2009).

3.2. Definición

Decimos que X es isotrópico si su ley es invariante bajo rotaciones. En el caso $d = 1$ decimos que X es simétrico.

Una consecuencia inmediata de esta definición es que la función característica de un proceso de Lévy isotrópico X al tiempo t es real.

Ahora, observamos que la α-estabilidad implica que

$$\Psi(\lambda) = |\lambda|^\alpha \Psi\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\right),$$

de modo que en el caso isotrópico

$$\Psi(\lambda) = c_1 |\lambda|^\alpha$$

para alguna constante $c_1 > 0$ y para toda $\lambda \in \mathbb{R}^d$. TODO: Verificar como ejercicio

3.3. Lema

Sea X *es* α*-estable y simétrico con* $\alpha \in (0,2)$ *y* $d = 1$*. Entonces la medida de Lévy satisface*

$$\Pi(dx) = \begin{cases} \dfrac{c\alpha}{\Gamma(1-\alpha)\cos(\alpha\pi/2)} \dfrac{dx}{|x|^{1+\alpha}} & si\ \alpha \neq 1, \\ \dfrac{c}{\pi} \dfrac{dx}{|x|^2} & si\ \alpha = 1. \end{cases}$$

Demostración: La demostración queda como ejercicio. Como hint, hay que usar integración por partes considerando que

$$\int_0^\infty x^{b-1} e^{-\lambda x} dx = \Gamma(b)\lambda^{-b}.$$

■

En el libro de Sato (2013), Teorema 14.3, se puede consultar que en general, para $d \geqslant 1$, existe una medida σ en $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$ tal que

$$\Pi(B) = \int_{\theta \in \mathbb{S}^{d-1}} \sigma(d\theta) \int_0^\infty \frac{dx}{|x|^{1+\alpha}} 1_{\{x\theta \in B\}}.$$

Es decir que se tiene una descomposición polar de la medida de Lévy.

3.4. Lema

Si X *es simétrico, con* $\alpha \in (0,2)$*, entonces*

$$\mathbb{E}[|X_t|^\beta] < \infty \quad para\ \beta < \alpha,$$

mientras que

$$\mathbb{E}[|X_t|^\beta] = \infty \quad si\ \beta \geqslant \alpha.$$

Es decir que $|X_t|$ *tiene cola pesada. De hecho se tiene que*

$$\mathbb{P}(|X_t| > r) \sim r^{-\alpha} f(r),$$

donde f *es una función de variación lenta.*

Demostración: Iniciamos afirmando que para todo $\delta \in (0,2)$ existe c_δ tal que

$$|\lambda|^\delta c_\delta = \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(\lambda z)) \frac{dz}{|z|^{\alpha+1}}.$$

TODO: Demostrar de tarea, usando que coseno es una función par, $|1 - \cos x| \leqslant \tilde{c} x^2$ para $x \in (-1,1)$ y $|1 - \cos x| < 1$ si $x \notin (-1,1)$.

Dado lo anterior, consideremos $\beta \in (0, \alpha)$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[c_\beta |X_t|^\beta] &= \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(X_t z)) \frac{dz}{|z|^{1+\beta}}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} (1 - \cos(X_t z) - i \operatorname{sen}(X_t z)) \frac{dz}{|z|^{1+\beta}}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}} (1 - e^{iX_t z}) \frac{dz}{|z|^{1+\beta}}\Big] \\
&= \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{-|z|^\alpha t}) \frac{dz}{|z|^{1+\beta}} \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{-u^\alpha t}) \frac{du}{u^{1+\beta}}\,.
\end{aligned}$$

Al considerar el cambio de variable $r = u^\alpha t$ deducimos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[c_\beta |X_t|^\beta] &= \frac{2}{\alpha} t^{\beta/\alpha} \int_0^\infty (1 - e^{-r}) r^{-1-\beta/\alpha} dr \\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{\beta} t^{\beta/\alpha} \Gamma\Big(1 - \dfrac{\beta}{\alpha}\Big) & \text{si } \beta < \alpha, \\ \infty & \text{si } \beta \geq \alpha. \end{cases}
\end{aligned}$$

Esto finaliza la prueba. ■

3.5. Teorema (Principio de invarianza de Donsker)

Sea $(A_j, j \geq 1)$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $\mathbb{E}[A_i^2] < \infty$ y $\mathbb{E}[A_i] = 0$. Sea S la caminata aleatoria asociada, es decir $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^n A_k$, donde $S_0 \in \mathbb{R}$. Consideremos, para $n \geq 1$ y $t \geq 0$,

$$Y_t^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt \rfloor}\,.$$

Entonces, para cada $t \geq 0$, $Y_t^{(n)} \Rightarrow B_t$, donde B es un movimiento browniano. Adicionalmente, para toda $k \geq 1$ y cualesquiera $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \infty$,

$$(Y_{t_1}^{(n)}, \dots, Y_{t_k}^{(n)}) \Rightarrow (B_{t_1}, \dots, B_{t_k})\,.$$

También se cumple, para toda $T \geq 0$,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^{(n)} - B_t| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0\,.$$

Para cualquier funcional continuo $F : C[0,T] \to \mathbb{R}_+$, donde $C[0,T]$ se equipa con la topología dada por la norma del supremo, se satisface que

$$\mathbb{E}\big[F(\tilde{Y}_t^{(n)}, t \leq T)\big] \to \mathbb{E}\big[F(B_t, t \leq T)\big]\,,$$

where $(\tilde{Y}_t^{(n)}, t \geq 0)$ is an interpolation of $(Y_t^{(n)}, t \geq 0)$.

TODO: Simular un movimiento browniano y un proceso Poisson compuesto

El resultado anterior se puede encontrar en el libro de TODO: Citar el libro de Billingsley.

Existe una versión similar del principio de invarianza para procesos estables de índice $\alpha \in (0, 2)$. En el caso $\alpha > 1$ se pide que $\mathbb{E}[A_i] = 0$ además de

$$\mathbb{P}(A_1 > r) \sim c_+ r^{-\alpha} \ell(r) \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(A_1 < -r) \sim c_- r^{-\alpha} \ell(r)\,, \tag{3.1}$$

donde ℓ es uan función de variación lenta en ∞. En el caso $\alpha \leqslant 1$ se pide únicamente (3.1). En este caso se define

$$Y_t^{(\alpha,n)} = \frac{1}{n^{1/\alpha}} S_{\lfloor nt \rfloor},$$

y se puede verificar que $Y^{(\alpha,n)}$ converge a un proceso α-estable en el sentido de distribuciones finito dimensionales y en el espacio de Skorokhod.

TODO: Simular un proceso Poisson compuesto con distribución de saltos Pareto

4 Propiedad de Markov

Decimos que un proceso X tiene la propiedad de Markov si

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in dy \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_{t+s} \in dy \mid X_t).$$

Adicionalmente decimos que la propiedad de Markov es homogénea si

$$\mathbb{P}(X_{t+s} \in dy \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_s \in dy \mid X_0)|_{X_0=X_t}.$$

Se dice que X tiene la propiedad fuerte de Markov si el tiempo $t \geqslant 0$ se puede reemplazar por un tiempo de paro T.

4.1. Teorema

Los procesos de Lévy tienen la propiedad fuerte de Markov. Más aún, si X *es un proceso de Lévy con valores en* $\mathbb{R}^d$ *y* T *es un tiempo de paro tal que* $T < \infty$ *casi seguramente, entonces* $(X_u, u \leqslant T)$ *y* $(X_{T+v} - X_T, v \geqslant 0)$ *son independientes. En adición* $(X_{T+v} - X_T, v \geqslant 0)$ *tiene la misma ley que* X.

Demostración: De los incrementos independientes y estacionarios se sigue el resultado para tiempos de paro discretos. El caso general se sigue al tomar una sucesión decreciente de tiempos de paro discretos que converja a T. ■

4.2. Corolario

Sean $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *medible, positiva y acotada, y* $G : D[0, T] \to \mathbb{R}_+$, *entonces*

$$\mathbb{E}[f(X_{t+s})G(X_u, u \leqslant t)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_s + y)]|_{y=X_t} G(X_u, u \leqslant t)].$$

Dicho de otra manera,

$$\mathbb{E}[f(X_{t+s}) \mid \sigma(X_v, v \leqslant t)] = \mathbb{E}[f(y + X_s)]|_{y=X_t} = \mathbb{E}[f(X_{t+s}) \mid X_t].$$

De lo anterior también podemos observar que iniciar un proceso de Lévy de un punto $y \in \mathbb{R}^d$ es equivalente a considerar un proceso de Lévy iniciado en cero y trasladar su trayectoria por y.

Considerando la propiedad de Markov es posible definir un proceso de Lévy comenzado en $y \in \mathbb{R}^d$, pues ley se denotará por $\mathbb{E}_y$ y por $\mathbb{E}$ cuando $y = 0$, la propiedad de Markov implica que

$$\mathbb{E}_y[F(X)] = \mathbb{E}[F(X + y)].$$

De esta manera, para cada $t \geqslant 0$ podemos definir un operador sobre $C_b(\mathbb{R}^d)$ mediante

$$P_t f(x) := \mathbb{E}_x[f(X_t)].$$

Es posible verificar que $(P_t, t \geqslant 0)$ satisface las ecuaciones de Chapman–Kolmogorov y que es un semigrupo con la propiedad de Feller.

5 Subordinadores

5.1. Definición

Decimos que un proceso de Lévy es un *subordinador* si X tiene trayectorias positivas y no decrecientes.

De hecho, en la definición anterior basta pedir que $\mathbb{P}(X_t \geqslant 0) = 1$ para toda $t \geqslant 0$. Cuando X es un subordinador es posible trabajar con el exponente de Laplace,

$$\lambda \mapsto \mathbb{E}[e^{-\lambda X_t}], \lambda \geqslant 0,$$

el cual se encuentra bien definido por la positividad de X. Al exponente de Laplace lo denotaremos por ϕ.

5.2. Teorema (Descomposición Lévy–Khintchine–de Finetti)

Sea ϕ la exponente de Laplace de un subordinador X. Entonces existen constantes $a, \kappa \geqslant 0$ y una medida Π sobre $(0,\infty)$ que satisface $\int_{(0,\infty)} 1 \wedge x\Pi(dx)$ tales que

$$\phi(\lambda) = \kappa + a\lambda + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\lambda x})\Pi(dx). \tag{5.1}$$

La tercia (κ, a, Π) es única.
De manera recíproca, dada una función ϕ como (5.1), existe un subordinador X asociado.

La tripleta (κ, a, Π) se conoce como *tripleta característica*. De los términos, κ es conocido como la *tasa de muerte*, a es la *deriva* y Π es la *medida de Lévy* o *medida de saltos*.

Demostración: No demostraremos el recíproco aún debido a que se requieren conceptos de procesos puntuales de Poisson que no se han visto. Así, consideremos que X es un subordinador. Notemos que

$$e^{-t\phi(\lambda)} = \mathbb{E}[e^{-\lambda X_t}],$$

y entonces

$$\begin{aligned}\phi(\lambda) &= \lim_{n\to\infty} n\Big(1 - \exp\Big\{-\frac{1}{n}\phi(\lambda)\Big\}\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\big(1 - \mathbb{E}[e^{-\lambda X_{1/n}}]\big)\\ &= \lim_{n\to\infty} n\int_0^\infty \lambda\mathbb{P}(X_{1/n} \geqslant x)e^{-\lambda x}dx,\end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{\phi(\lambda)}{\lambda} = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty dx e^{-\lambda x}\overline{\Pi}_n(dx),$$

donde $\overline{\Pi}_n(x) = n\mathbb{P}(X_{1/n} \geqslant x)$. Por el teorema de continuidad para transformadas de Laplace se deduce que $\phi(\lambda)/\lambda$ es la transformada de Laplace de una medida μ_∞.

Más aún, de que $\overline{\Pi}_n$ sea decreciente, se cumple que

$$\mu_\infty(dx) = a\delta_0(dx) + dx\overline{\Pi}_\infty(x)\,,$$

y por ende

$$\frac{\phi(\lambda)}{\lambda} = a + \int_0^\infty dx\overline{\Pi}_\infty(x)e^{-\lambda x}\,.$$

Al realizar integración por partes deducimos que

$$\phi(\lambda) = a\lambda + \overline{\Pi}_\infty(\infty) - \int_0^\infty d\overline{\Pi}_\infty(x)(1 - e^{-\lambda x})\,.$$

El resultado se obtiene a considerar $\kappa = \overline{\Pi}_\infty(\infty)$ y $\Pi(dx) = -d\overline{\Pi}_\infty(x)$. ■

Una observación importante sobre κ es que se cumple

$$\mathbb{P}(X_t < \infty) = e^{-t\kappa}$$

para todo $t \geqslant 0$, lo que nos permite extender la noción de procesos de Lévy al espacio $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Se puede verificar que para un subordinador, las trayectorias $t \mapsto X_t(\omega)$ definen funciones crecientes de variación acotada, de modo que

$$X_t(\omega) = ta + \sum_{s \leqslant t} \Delta X_s(\omega)\,,$$

donde $\Delta X_s := X_s - X_{s-}$.

En lo que sigue supondremos que $\kappa = 0$ o, lo que es equivalente, que X toma valores reales.

Ahora, el nombre de subordinador se da porque estos procesos son buenos para construir otros procesos mediante cambios de tiempo. En efecto, si Z es un proceso de Lévy con valores en $\mathbb{R}^d$ y X es un subordinador independiente de Z, entonces podemos considerar

$$Y_t := Z_{X_t} \qquad \text{para toda } t \geqslant 0\,.$$

A este tipo de construcciones se le conoce como *subordinación*.

5.3. Teorema

Sea Z un proceso de Lévy con valores en $\mathbb{R}^d$ y sea X un subordinador independiente de Z. Si definimos $Y = Z \circ X$, entonces Y es un proceso de Lévy.

Demostración: Es evidente que $Y_0 = 0$ casi seguramente así como que las trayectorias de Y son càdlàg con probabilidad uno, de modo que solo demostraremos la propiedad de incrementos independientes y estacionarios. Sean $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ dados con $n \geqslant 1$. Consideremos además $H_1, \ldots, H_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ funciones medibles y acotadas. Observemos entonces que por la independencia de Z y X se cumplirá que

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^n H_j(Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}})\Big] = \mathbb{E}\big[G(X_{t_0}, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})\big]$$

con

$$G(s_0, s_1, \ldots, s_n) := \mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^n H_j(Z_{s_j} - Z_{s_{j-1}})\Big]$$

Ahora, por la propiedad de incrementos independientes y estacionarios de Z,

$$G(s_0, s_1, \cdots, s_n) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\big[H_j(Z_{s_j - s_{j-1}})\big],$$

de modo que

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{n} H_j(Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}})\Big] = \mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{n} G_j(X_{t_j} - X_{t_{j-1}})\Big] = \mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{n} G_j(X_{t_j - t_{j-1}})\Big],$$

donde $G_j(s) := \mathbb{E}[H_j(Z_s)]$. Ahora, por la propiedad de incrementos independientes y estacionarios de X junto a la definición de G_j nos permiten deducir que

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{j=1}^{n} H_j(Y_{t_j} - Y_{t_{j-1}})\Big] = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\big[H_j(Z_{X_{t_j - t_{j-1}}})\big].$$

En particular, si $n = 1$, hemos deducido que los incrementos son estacionarios, mientras que el caso n general nos da la independencia de los incrementos. ■

5.4. *Observación*

Recordemos que $\mathbb{E}[\exp\{i\langle\beta, X_t\rangle\}] = \exp\{-t\Psi(\beta)\}$, y si Z es un subordinador, entonces

$$\mathbb{E}\big[\exp\big\{i\langle\beta, X \circ Z(t)\rangle\big\}\big] = \mathbb{E}\big[\exp\big\{-Z_t \Psi(\beta)\big\}\big],$$

siempre y cuando el segundo término esté bien definido.

Para verificar que todo está bien definido, notemos que para $\lambda \geqslant 0$ y $\beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mathbb{E}\big[e^{-\lambda Z_t}\big] = e^{-t\phi(\lambda)} \quad \text{y} \quad \mathbb{E}\big[e^{i\beta Z_t}\big] = e^{-t\Psi_Z(\beta)},$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi_Z(\beta) &= -i\langle\beta, a\rangle + \frac{1}{2}\langle\beta, Q\beta\rangle + \int (1 - e^{-i\langle\beta, x\rangle} + i\langle\beta, x\rangle 1_{\{|x|\leqslant 1\}})\Pi(dx) \\ &= -i\Big(\langle\beta, a\rangle + \int \big(\operatorname{sen}(\langle\beta, x\rangle) - \langle\beta, x\rangle 1_{\{|x|\leqslant 1\}}\big)\Pi(dx)\Big) \\ &\quad + \frac{1}{2}\langle\beta, Q\beta\rangle + \int \big(1 - \cos(\langle\beta, x\rangle)\big)\Pi(dx). \end{aligned}$$

De lo anterior vemos que $\Psi \in \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geqslant 0\}$, de modo que será necesario extender analíticamente a ϕ a $\{z \in \mathbb{C} : \Re z \geqslant 0\}$, lo que es equivalente a considerar una extensión analítica de Ψ a $\{z \in \mathbb{C} : \Im x \geqslant 0\}$.

TODO: Ejercicio: Usar que la medida de Lévy Π tiene soporte en $(0, \infty)$ y que la integral $\int_0^\infty 1 \wedge x\Pi(dx)$ para demostrar que cualquiera de las extensiones es posible. Como hint: se pueden considerar ambos lados y verificar que son diferenciables en sus dominios, con la derivada continua en el interior.

Denotaremos por φ a la extensión de ϕ al semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \Re z \geqslant 0\}$, de modo que $\mathbb{E}\big[\exp\{-Z_t\Psi(\beta)\}\big]$ se encuentra bien definido y resulta ser igual a

$$\exp\big\{-t\varphi\big(\Psi(\beta)\big)\big\}.$$

Como consecuencia,

$$\Psi_Y = \varphi_Z \circ \Psi_X,$$

con lo que se ha demostrado la siguiente proposición.

5.5. Proposición

Dado un proceso de Lévy X *con valores en* $\mathbb{R}^d$ *y un subordinador* Z*, el exponente característico de* $Y = X \circ Z$ *está dado por*

$$\Psi_Y(\lambda) = \varphi_Z \circ \Psi_X(\lambda) = a_z \Psi_X(\lambda) + \int_{(0,\infty)} \left(1 - \exp\left\{-x\Psi_X(\lambda)\right\}\right) \Pi_Z(dx) .$$

Por ende, las trayectorias de Y *son discontinuas si* $\Pi \neq 0$.

5.1. *Ejemplo*

Un proceso de Lévy Z se dice *subordinador Gamma* de parámetros (a, b) si se cumple que Z es un subordinador y

$$\mathbb{P}(Z_t \in dy) = \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} y^{at-1} e^{-by} dy .$$

Su exponente de Laplace está dado por

$$\phi(\lambda) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda y}) a e^{-by} \frac{dy}{y} .$$

Demostración: Observemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{-\lambda Z_t}] &= \int_0^\infty \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} y^{at-1} e^{-(\lambda+b)y} \frac{dy}{y} \\
&= \left(\frac{b}{\lambda + b}\right)^{at} \\
&= \exp\left\{-at \log\left(\frac{b+\lambda}{b}\right)\right\} .
\end{aligned}$$

Usando la fórmula de Frullani, es decir

$$\log \frac{b+\lambda}{b} = \int_0^\infty \frac{ds}{s} \left(e^{-bs} - e^{-(b+\lambda)s}\right) ,$$

deducimos que

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda Z_t}] = \exp\left\{-t \int_0^\infty \frac{ds}{s} a e^{-bs} (1 - e^{-\lambda s})\right\} . \qquad \blacksquare$$

Demostración de la fórmula de Frullani: Notemos que para $x > y$,

$$e^{-sy} - e^{-sx} = \int_{sy}^{sx} e^{-u} du = \int_0^\infty e^{-u} 1_{\{sy \leq u \leq sx\}} du ,$$

y entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{ds}{s} (e^{-sy} - e^{sx}) &= \int_0^\infty \frac{ds}{s} \int_0^\infty du e^{-u} 1_{\{sy \leq u \leq sx\}} \\
&= \int_0^\infty du e^{-u} \int_0^\infty \frac{ds}{s} 1_{\{u/x \leq s \leq u/y\}} \\
&= \int_0^\infty du e^{-u} \log\left(\frac{x}{y}\right) \\
&= \log \frac{x}{y} .
\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

5.2. *Ejemplo*

Ahora consideraremos que Z es un subordinador α-estable con $\alpha \in (0,1)$, es decir que para todo $c \geqslant 0$,

$$(c^{-1/\alpha} Z_{tc}, t \geqslant 0) \stackrel{d}{=} (Z_t, t \geqslant 0).$$

En este caso

$$\phi(\lambda) = \int_0^\infty \frac{ds}{s^{1+\alpha}} c_\alpha (1 - e^{-\lambda s}).$$

Demostración: Notemos que por la propiedad de reescalamiento,

$$e^{-t\phi(\lambda)} = \mathbb{E}[e^{-\lambda Z_t}] = \mathbb{E}[e^{-\lambda t^{1/\alpha} Z_1}] = e^{-\phi(\lambda t^{1/\alpha})},$$

y entonces $t\phi(\lambda) = \phi(\lambda t^{1/\alpha})$. Tomando $t = \lambda^{-\alpha}$, $\phi(1) = \lambda^{-\alpha}\phi(\lambda)$, y como consecuencia $\phi(\lambda) = \lambda^\alpha \phi(1)$ para toda $\lambda > 0$. La forma específica de la medida de Lévy se sigue de Fubini. En efecto, notamos que

$$\int_0^\infty \frac{ds}{s^{1+\alpha}} (1 - e^{-\lambda s}) = \int_0^\infty \frac{ds}{s^{1+\alpha}} \int_0^s dv \lambda e^{-\lambda v} = \int_0^\infty dv \lambda e^{-\lambda v} v^{-\alpha} = \lambda^\alpha \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}.$$

Nótese que se usa ímplicitamente que $\alpha \in (0,1)$. ■

5.6. Teorema

Sea Z un subordinador con exponente de Laplace

$$\phi(\lambda) = a\lambda + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda z}) \Pi(dz),$$

con $a \geqslant 0$ *y* $\int_0^\infty \Pi(dz)(1 \wedge z) < \infty$. *Entonces*

$$\frac{Z_t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{\text{c.s.}} a \quad y \quad \frac{Z_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{c.s.}} a + \int_0^\infty \Pi(z,\infty) \frac{dz}{z}.$$

Demostración: Puesto que $Z_t = at + \sum_{s\leqslant t} \Delta Z_s$, basta demostrar que

$$\frac{1}{t} \sum_{s\leqslant t} \Delta Z_s \xrightarrow[t\to 0]{\text{c.s.}} 0.$$

Para la demostración notemos que

$$\frac{\phi(\lambda)}{\lambda} = a + \int_0^\infty e^{-\lambda y} \Pi((y,\infty)) dy,$$

de donde se puede deducir que

$$\frac{Z_t}{t} \xRightarrow[t\to 0]{} a \quad \text{y} \quad \frac{Z_t}{t} \xRightarrow[t\to\infty]{} a + \int_0^\infty \Pi(y,\infty) dy.$$

Puesto que las convergencias son a constantes se sigue que hay convergencia en probabilidad.

La convergencia cuando $t \to \infty$ se sigue de la ley fuerte de grandes números, mientras que cuando $t \to 0$ se deducirá si se demuestra que $M = (M_t, t > 0)$, donde $M_t = X_t/t$, es una martingala retrógrada positiva. En este último caso, notemos que podemos considerar que $a = 0$ sin pérdida de generalidad. Ahora, basta demostrar que

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{X_s}{s} - \frac{X_t}{t}\Big)e^{-\lambda X_t}\Big] = 0$$

para todo $\lambda > 0$ bajo el supuesto $\mathbb{E}[X_t] < \infty$ o que Π no tiene saltos más grandes que 1. Esto último se sigue de que el primer salto mayor que 1 aparece tras un tiempo exponencial. Bajo el supuesto dado se tiene la integrabilidad de la martingala. Así, basta notar que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{X_s}{s} - \frac{X_t}{t}\Big)e^{-\lambda X_t}\Big] &= \mathbb{E}\Big[\frac{X_s}{s}e^{-\lambda X_s}\Big]\mathbb{E}\big[e^{-\lambda X_{t-s}}\big] - \mathbb{E}\Big[\frac{X_t}{t}e^{-\lambda X_t}\Big] \\ &= -\frac{1}{s}\frac{d}{d\lambda}e^{-s\phi(\lambda)}e^{-(t-s)\phi(\lambda)} + \frac{1}{t}\frac{d}{d\lambda}e^{-t\phi(\lambda)} \\ &= \phi'(\lambda)e^{-s\phi(\lambda)-t\phi(\lambda)+s\phi(\lambda)} - \phi(\lambda)e^{-t\phi(\lambda)} \\ &= 0\,,\end{aligned}$$

lo que termina la demostración. ■

5.7. Corolario

Sean σ_1 y σ_2 subordinadores independientes con derivas a_1 y a_2 respectivamente. Si $X := \sigma_1 - \sigma_2$, entonces

$$\frac{X_t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{\text{c.s.}} a_1 - a_2\,,$$

lo cual no es cierto en general.

5.8. *Observación*

En el corolario anterior se cumple que X tiene variación acotada. De hecho, si X no tiene variación acotada entonces el límite de X_t/t conforme $t \to 0$ no existe.

Ahora definamos, para un subordinador σ el funcional

$$\mathcal{J}(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda s}d\sigma_s\,,$$

el cual está bien definido y es una variable aleatoria positiva. Buscamos determinar la ley de $\mathcal{J}(\lambda)$.

5.9. Teorema

El funcional $\mathcal{J}(\lambda)$ es una variable aleatoria infinitamente divisible y finita con probabilidad uno si y sólo si

$$\int_{(2,\infty)} \log \Pi(dx) < \infty\,.$$

En este caso, para cada $\alpha \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}[e^{-\alpha\mathcal{J}(\lambda)}] = \exp\Big\{-\frac{\alpha}{\lambda}a - \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty (1-e^{-\alpha x})\Pi(x,\infty)\frac{dx}{x}\Big\}.$$

Adicionalmente, $\mathcal{J}(\lambda)$ es una variable aleatoria autodescomponible; es decir que para todo

$c \in (0,1)$ existen Q_C y $\tilde{\mathcal{J}}$ independientes, $\tilde{\mathcal{J}}$ tiene la misma ley que $\mathcal{J}(\lambda)$ y

$$\mathcal{J} \stackrel{d}{=} Q_c + c\tilde{\mathcal{J}}\,.$$

Demostración: Sea σ un subordinador con par característico (a,Π). Notemos que

$$\mathcal{J}(\lambda) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda s} d\sigma_s = \lim_{t\to\infty} \lim_{P\uparrow[0,t]} \sum_{t_k\in P} e^{-t_k}(\sigma_{t_{k+1}} - \sigma_{t_k})\,,$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[e^{-\alpha\mathcal{J}(\lambda)}] &= \lim_{t\to\infty} \lim_{P\uparrow[0,t]} \mathbb{E}\Big[\exp\Big\{-\alpha \sum_{t_k\in P} e^{-\lambda t_k}(\sigma_{t_{k+1}} - \sigma_{t_k})\Big\}\Big] \\
&= \lim_{t\to\infty} \lim_{P\uparrow[0,t]} \prod_{t_k\in P} e^{-(t_{k+1}-t_k)\phi(\alpha e^{-\lambda t_k})} \\
&= \exp\Big\{-\int_0^\infty \phi(\alpha e^{-\lambda s})ds\Big\}.
\end{aligned}$$

Puesto así, considerando el cambio de variable $u = \alpha e^{-\lambda s}$, se cumple que

$$\mathbb{E}[e^{-\alpha\mathcal{J}(\lambda)}] = \exp\{-\int_0^\alpha \frac{1}{\lambda}\phi(u)\frac{du}{u}\}\,.$$

Puesto que $\phi(u)/u = a + \int_0^\infty e^{-ux}\Pi(x,\infty)dx$,

$$\int_0^\alpha \frac{1}{\lambda}\phi(u)\frac{du}{u} = \frac{a\alpha}{\lambda} + \int_0^\alpha du \int_0^\infty e^{-ux}\Pi(x,\infty)dx = \frac{a\alpha}{\lambda} + \int_0^\infty dx\Pi(x,\infty)\frac{1}{x}(1-e^{-\alpha x})\,.$$

Así, esta última expresión es finita si y sólo si $\int_0^\infty (1\wedge x)\Pi(x,\infty)dx/x < \infty$. Para ello notemos que

$$\int_0^1 (1\wedge x)\Pi(x,\infty)\frac{dx}{x} = \int_0^1 \Pi(x,\infty) < \infty$$

puesto que $\int_0^\infty (1\wedge x)\Pi(dx) < \infty$. Por otro lado,

$$\int_1^\infty \Pi(x,\infty)\frac{dx}{x} = \int_1^\infty \Pi(du)\int_1^u \frac{dx}{u} = \int_1^\infty \Pi(du)\log(u)\,.$$

Con ello vemos que se tiene la finitud si y sólo si $\int_1^\infty \log u\Pi(du) < \infty$. ■

5.10. *Observación*

Dado $\mathcal{J}$, se puede demostrar que existe un proceso Y tal que Y es càdlàg, tiene trayectorias crecientes y goza de incrementos independientes, y en adición $Y_1 \stackrel{d}{=} \mathcal{J}$. No es necesario que los incrementos sean estacionarios.

Medidas aleatorias de Poisson 6

6.1. Definición (Medida aleatoria de Poisson)

Sea $(\Theta, \mathcal{B}, \rho)$ un espacio de medida σ-finito. Diremos que la familia de variables aleatorias con valores en $\overline{\mathbb{Z}}_+ = \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$ indexada por $\mathcal{B}$ es una *medida aleatoria de Poisson* de intensidad ρ si se cumplen:

(i) $N(B) \sim \mathrm{Poisson}(\rho(B))$ con la convención de $N(B) = 0$ casi seguramente si $\rho(B) = 0$ y $N(B) = \infty$ casi seguramente si $\rho(B) = \infty$;
(ii) $(N(B_i), i \in [n])$ es una colección de variables aleatorias independientes siempre que $(B_i, i \in [n])$ son disjuntos;
(iii) para todo $\omega \in \Omega$, $N(\cdot)(\omega)$ es una medida en $(\Theta, \mathcal{B})$.

6.1. *Ejemplo*

Consideremos $(\Theta, \mathcal{B}, \rho) = (\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$ con λ la medida de Lebesgue. Dado un proceso Poisson M con intensidad $b > 0$, podemos definir

$$N(t, t+s] := M_{t+s} - M_t$$

para cualesquiera $s, t \geqslant 0$. Extendiendo a N a todo boreliano usando Carathéodory, N se convierte en una medida aleatoria de Poisson con $\rho = b\lambda$.

A continuación se presentará notación que se usará en lo subsecuente:

- Para una función f y una medida ρ,

$$\rho(f) := \int_\Theta f \, d\rho \,.$$

- Así, para una medida aleatoria N y una función f,

$$N(f)(\omega) = \int_\Theta f(x) N(dx(\omega)) \quad \text{o bien} \quad N(f) = \int_\Theta f \, dN \,.$$

Posteriormente se demostrará la exitencia de las medidas aleatorias de Poisson, primero considerando una medida finita y después considerando el caso general.

6.2. Teorema (Descomposición de Lévy–Itô)

Sea X *un proceso de Lévy con valores en* $\mathbb{R}^d$ *y tercia característica* (a, Q, Π). *Pongamos* $\tilde{\Pi} = \lambda \otimes \Pi$, *con* λ *la medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}_+$. *Definamos, para* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$,

$$\mathcal{J}(B) = \#\{s \geqslant 0 : (s, \Delta X_s) \in B\} \,.$$

Entonces $(\mathcal{J}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d))$ *es una medida aleatoria de Poisson sobre* $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ *de intensidad* $\tilde{\Pi}$. *Además, existe un conjunto* $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ *de probabilidad uno tal que*

$$X_t^1 := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\{\varepsilon < |x| \leqslant 1, s \leqslant t\}} x (J - \tilde{\Pi})(ds, dx)$$

existe para toda $t \geqslant 0$ *y define un proceso de Lévy con tercia característica* $(0, 0, \Pi|_{\{x \leqslant 1\}})$.

En adición existe otro conjunto de probabilidad uno $\Omega_1 \in \mathcal{F}$ *tal que*

$$X_t^2 = \int_{\{|x|<1, s\leq t\}} x J(ds, dx), \quad t \geqslant 0,$$

define un proceso de Lévy con tercia característica $(0, 0, \Pi|_{\{|x|>1\}})$. *Por último,* $X^3 = X - X^1 - X^2$ *es un proceso de Lévy con tercia característica* $(a, Q, 0)$ *y* X^1, X^2 *y* X^3 *son independientes.*

Para la demostración del resultado usaremos el siguiente lema.

6.3. Lema

Sea X *un proceso de Poisson compuesto con parámetros* (λ, F), *es decir que*

$$X_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j$$

con N *un proceso de Poisson de intensidad* λ *y* $(Y_j, j \geqslant 1)$ *una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución común* F. *Sea* $(T_j, j \geqslant 1)$ *la colección de tiempos de salto de* N_t. *Entonces, al definir*

$$J(B) := \sum_{j=1}^{\infty} 1_{\{(T_i, Y_i) \in B\}}$$

para $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, *obtenemos una medida aleatoria de Poisson con intensidad* $\lambda ds F(dy)$.

Demostración: Demostraremos que $(J(B_1), \ldots, J(B_n))$ es un vector de variables aleatorias independientes, cada una con distribución Poisson, si consideramos conjuntos disjuntos $B_1, \ldots, B_n$. Iniciaremos considerando que $B_i \in \mathcal{B}([0, t] \times \mathbb{R}^d)$. Recordando que condicional en $N_t = m$, $(T_1, \ldots, T_m)$ tiene la misma distribución que los estadísticos de orden de una muestra de variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $[0, T]$ se sigue que condicional en $N_t = m$,

$$\big((T_1, Y_1), \ldots, (T_n, Y_m)\big) \stackrel{d}{=} \big((U_{(1)}, Y_1), \ldots, U_{(n)}, Y_m\big).$$

De esta manera, condicional en $N_t = m$,

$$J(B_k) \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{m} 1_{\{(U_{(j)}, Y_j) \in B_k\}} \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{m} 1_{\{(U_j, Y_j) \in B_k\}}.$$

Como $\mathbb{P}\big((U_j, Y_j) \in B_k\big) = t^{-1} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} F(dy) 1_{\{(s,y) \in B_k\}} =: p_k$, para $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}^+$ con $k_1 + \cdots + k_n \leqslant m$, deducimos que

$$\mathbb{P}\big(J(B_1) = k_1, \ldots, J(B_k) = k_n \mid N_t = m\big) = \binom{n}{k_0, k_1, \ldots, k_n} \prod_{j=0}^{n} p_j,$$

donde $p_0 = 1 - \sum_{j=1}^{n} p_j$ y $k_0 = m - \sum_{j=1}^{n} k_j$, de modo que

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\big(J(B_1) = k_1, \ldots, J(B_k) = k_n \mid N_t = m\big) \\ &\qquad = \frac{n!}{t^m} \prod_{j=0}^{m} \frac{1}{k_j!} \Big(\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} F(dy) 1_{\{(s,y) \in B_k\}}\Big)^{k_j}, \end{aligned}$$

con $B_0 = ([0,t] \times \mathbb{R}^d) \setminus \bigcup_{j=1}^n B_j$. Como consecuencia de ello,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\big(J(B_1) = k_1, \dots, J(B_n) = k_n\big) \\
&\quad = \sum_{m \geq k_1 + \cdots k_n} \mathbb{P}\big(J(B_1) = k_1, \dots, J(B_k) = k_n \mid N_t = m\big)\mathbb{P}(N_t = m) \\
&\quad = e^{-\lambda t}\Big(\prod_{j=1}^n \frac{1}{k_j!}\Big(\lambda \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} F(dy) 1_{\{(s,y)\in B_k\}}\Big)^{k_j}\Big) \\
&\qquad \times \sum_{m \geq k_1 + \cdots k_n} \frac{1}{(m - k_1 - \cdots k_n)!}\Big(\lambda \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} F(dy) 1_{\{(s,y)\in B_0\}}\Big)^{m-k_1-\cdots k_n} \\
&\quad = \prod_{j=1}^n \frac{1}{k_j!}\Big(\lambda \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} F(dy) 1_{\{(s,y)\in B_k\}}\Big)^{k_j} \exp\Big\{-\lambda \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} F(dy) 1_{\{(s,y)\in B_k\}}\Big\}.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $J(B_1), \dots J(B_n)$ son variables aleatorias independientes con

$$J(B_k) \sim \mathsf{Poisson}\Big(\lambda \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} F(dy) 1_{\{(s,y)\in B_k\}}\Big).$$

El resultado se sigue al considerar $B_k \cap ([0,t] \times \mathbb{R}^d)$ y considerar el límite conforme $t \to \infty$. ■

6.4. Teorema

Dado un espacio medible $(\Theta, \mathcal{B})$ con una medida σ-finita ρ, existe una medida aleatoria de Poisson de parámetro ρ.

Demostración: Si $\rho(\Theta) < \infty$, entonces consideramos una colección $(Y_j, j \geq 0)$ de variables aleatorias independientes tales que

$$\mathbb{P}(Y_j \in B) = \frac{\rho(B)}{\rho(\Theta)},$$

y definimos $J(B) := \sum_{j=0}^N 1_{\{Y_j \in B\}}$, donde N es una variable aleatoria Poisson de parámetro 1. La demostración del lema anterior nos da que J es la medida aleatoria de Poisson deseada.

En el caso σ-finito tomamos una partición $(B_j, j \geq 1)$ de Θ tal que $\rho(B_j) < \infty$ para cada j, definimos $J^{(j)}$ como una medida aleatoria de Poisson sobre B_i y consideramos $J := \sum_{j\geq 1} J^{(j)}$. ■

Algunas propiedades del proceso Poisson se enuncian a continuación[1].

6.5. *Observación*

Notemos que si J es una medida aleatoria de Poisson, entonces con probabilidad uno tiene soporte contable. Es decir que $J = \sum_{j\geq 1} \delta_{Y_j}$. Entonces se puede considerar también como un conjunto aleatorio.

6.6. Lema (de disjunción)

Sean J_1 y J_2 medidas aleatorias de Poisson independientes sobre Θ con medidas ρ_1 y ρ_2 respectivamente. Si $A \in \mathcal{B}$ es un conjunto tal que $\rho_1(A) \vee \rho_2(A) < \infty$, entonces J_1 y J_2 son

[1] Revisar el capítulo 2 del libro de Kingman (1993).

disjuntas en A *con probabilidad uno, es decir*

$$\mathbb{P}(J_1 \cap J_2 \cap A = \emptyset) = 1\,.$$

6.7. Teorema (de superposición)

Sean $(J_k, k \geqslant 1)$ *medidas aleatorias de Poisson independientes, con* J_k *teniendo medida base* ρ_k. *Entonces* $\sum_{k\geqslant 1} J_k$ *es una medida aleatoria de Poisson con medida directriz* $\sum_{k\geqslant 1} \rho_k$.

6.8. Teorema (de restricción)

Sea J *una medida aleatoria de Poisson con medida media* ρ. *Entonces* $J_B := J(\cdot \cap B)$ *es una medida aleatoria de Poisson con intensidad* $\rho(\cdot \cap B)$.

6.9. Teorema (Fórmula de Campbell)

Sea J *una medida aleatoria de Poisson sobre* $(\Theta, \mathcal{B}, \rho)$ *con* ρ *una medida* σ*-finita. Supongamos que* $f : \Theta \to \mathbb{R}$ *es medible. Entonces*

$$X := J(f) = \int_\Theta f\, dJ$$

es absolutamente convergente con probabilidad uno, es decir que $\int_\Theta |f|\, dJ < \infty$ *casi seguramente, si y solo si*

$$\int_\Theta (1 \wedge |f|)\, d\rho < \infty\,.$$

En este caso

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda X}] = \exp\Big\{-\int_0^\infty (1 - e^{-i\lambda f(x)})\rho(dx)\Big\}\,.$$

Adicionalmente,

$$\mathbb{E}[|X|] < \infty \quad \textit{si, solo si,} \int_\Theta |f|\, d\rho < \infty\,,$$

en cuyo caso

$$\mathbb{E}[X] = \rho(f)\,.$$

Finalmente,

$$\mathbb{E}[X^2] < \infty \quad \textit{precisamente cuando} \quad \int_\Theta (|f| \wedge |f|^2)\, d\rho < \infty\,,$$

y en este caso

$$\mathbb{E}[X^2] = \rho(f^2) + \rho(f)^2\,.$$

Demostración: Comencemos con una función f simple y positiva, es decir

$$f = \sum_{j=1}^n a_j 1_{B_j}\,,$$

donde $B_j \in \mathcal{B}$ es tal que $\rho(B_j) < \infty$ y $a_j \geqslant 0$ para cada j. Además suponemos, sin pérdida de generalidad, que $B_1, \ldots, B_j$ son disjuntas. Entonces $J(f) = \sum_{j=1}^{n} a_j J(B_j)$ y para $\lambda \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{-\lambda J(f)}] &= \prod_{j=1}^{n} \exp\{-\rho(B_j)(1 - e^{-\lambda a_j})\} \\ &= \exp\Big\{-\sum_{j=1}^{n} \int (1 - \exp\{-\lambda a_j 1_{\{x \in B_j\}}\})\rho(dx)\Big\} \\ &= \exp\Big\{-\int (1 - e^{-\lambda f(x)})\rho(dx)\Big\}.\end{aligned}$$

Esto último también es cierto para $f \geqslant 0$ general debido al convergencia dominada y convergencia monótona, es decir

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda J(f)}] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[e^{-\lambda J(f_n)}] = \lim_{n\to\infty} \exp\Big\{-\int (1-e^{-\lambda f_n})d\rho\Big\} = \exp\Big\{-\int (1-e^{-\lambda f})d\rho\Big\},$$

con $(f_n, n \geqslant 1)$ una sucesión de funciones simples que crece a f. Notemos que

$$\int (1 - e^{-\lambda f})d\rho < \infty \quad \text{si y solo si} \int (1 \wedge f)d\rho < \infty,$$

de modo que $J(f) < \infty$ con probabilidad uno si y sólo si $\int (1 \wedge f)d\rho$ bajo el supuesto de $f \geqslant 0$. En el caso de f general basta considerar f_+ y f_- para obtener el resultado.

Para obtener la función característica, siguiendo los mismos pasos se puede verificar que para $f \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda J(f)}] = \exp\Big\{-\int (1 - e^{i\lambda f})d\rho\Big\}.$$

Entonces, como $J(f_+)$ y $J(f_-)$ son independientes se sigue que para f general,

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda J(f)}] = \exp\Big\{-\int (1 - e^{i\lambda f_+})d\rho - \int (1 - e^{-i\lambda f_+})d\rho\Big\} = \exp\Big\{-\int (1 - e^{i\lambda f})d\rho\Big\}.$$

El resultado de las esperanzas se deduce al derivar, primero la transformada de Laplace y luego la función característica. ■

6.10. Lema

Consideremos J una medida aleatoria de Poisson sobre $\Theta = \mathbb{R}_+ \times \tilde{\Theta}$ con medida de intensidad $dt \otimes d\tilde{\rho}$ se tiene que

$$\mathbb{P}(J(\{t\} \times \tilde{\Theta}) \geqslant 2 \textit{ para algún } t \in [0,1]) = 0.$$

Demostración: Supondremos primero que $\tilde{\rho}(\tilde{\Theta}) < \infty$. Sea $A_n^k = (2^{-n}k - 1, 2^{-n}k]$ para $k \in [2^n]$. Entonces

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(J(\{t\} \times \tilde{\Theta}) \geqslant 2 \text{ para algún } t \in [0,1]) \\ &\qquad = 2^n \mathbb{P}(J(A_n^1 \times \tilde{\Theta}) \geqslant 2) = 2^n o(2^{-2n}\tilde{\rho}(\tilde{\Theta})^2) = o(2^{-n}\rho(\tilde{\Theta})^2).\end{aligned}$$

El caso general se obtiene al considerar una sucesión creciente $\tilde{\Theta}_n$ tal que $2^{-n}\tilde{\rho}(\tilde{\Theta}_n)^2 \to 0$ conforme $n \to \infty$. ■

En particular si $\tilde{\Theta} = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ y $\tilde{\rho} = \Pi$ es una medida de Lévy, podremos escribir a J como

$$J = \sum_{t \geqslant 0} \delta_{(t, \Delta_t)}.$$

Al conjunto $((t,\Delta_t), t \geq 0)$ se le conoce como *proceso puntual de Poisson* sobre $(\Theta, \mathcal{B}, \rho)$. De esta manera podemos definir, para $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, la integral

$$J(f) = \sum_{t \geq 0} f(t, \Delta_t)\,.$$

6.11. Lema

Sea J *una medida aleatoria de Poisson sobre* $(\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^d \smallsetminus \{0\}), \mathcal{B}, dt \otimes d\Pi)$ *y sea* $B \in \mathbb{R}^d \smallsetminus \{0\}$ *medible con* $\Pi(B) < \infty$. *Para* $t \geq 0$ *sea*

$$X_t := \int_{(0,t]} \int_B y J(ds, dy) = \sum_{0 < s \leq t} \Delta_s 1_{\{\Delta_s \in B\}}\,.$$

Entonces $X = (X_t, t \geq 0)$ *es un proceso de Lévy sobre* $\mathbb{R}^d$ *con exponente característico*

$$\psi(\lambda) = -\Pi(B) \int_B (1 - e^{i\langle \lambda, x\rangle}) \frac{\Pi(dx)}{\Pi(B)}\,.$$

Es decir que X *es un proceso de Poisson compuesto con intensidad* $\Pi(B)$ *y distribución de saltos* $\Pi(\cdot \cap B)/\Pi(B)$.

6.12. Lema

Sea J *una medida aleatoria de Poisson sobre* $(\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^d \smallsetminus \{0\}), \mathcal{B}, dt \otimes d\Pi)$ *y sea* $B \in \mathbb{R}^d \smallsetminus \{0\}$ *medible con* $\int_B |x| \Pi(dx) < \infty$. *Para* $t \geq 0$ *sea*

$$X_t := \int_{(0,t]} \int_B y J(ds, dy) = \sum_{0 < s \leq t} \Delta_s 1_{\{\Delta_s \in B\}}\,.$$

Entonces $X = (X_t, t \geq 0)$ *es un proceso de Lévy sobre* $\mathbb{R}^d$ *con exponente característico*

$$\psi(\lambda) = -\Pi(B) \int_B (1 - e^{i\langle \lambda, x\rangle}) \frac{\Pi(dx)}{\Pi(B)}\,.$$

Definamos el proceso con deriva $M = (M_t, t \geq 0)$ *mediante*

$$M_t := X_t - t \int_B x \Pi(dx)$$

para cada $t \geq 0$. *Entonces* M *es una martingala con respecto a la filtración càd generada por* $((s, \Delta_s), s \geq 0)$. *Adicionalmente, si* $\int_B |x|^2 \Pi(dx) < \infty$, M *es una martingala cuadrado integrable con*

$$\mathbb{E}[|M_t|^2] = t \int_B |x|^2 \Pi(dx)\,.$$

Más aún

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq s \leq T} |M_s|^2] \leq 4T \int_B |x|^2 \Pi(dx)\,.$$

TODO: Probar que $M_t^2 - t \int_B x^2 \Pi(dx)$ define una martingala. Más aún, decimos que el proceso $Z_t = t \int_B x^2 \Pi(dx)$ es el *compensador* de M^2.

6.13. Definición

Sea $T > 0$ dado. Denotamos por $\mathcal{M}^2_T := \mathcal{M}^2_T(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t, 0 \leqslant t \leqslant T), \mathbb{P})$ el espacio de martingalas cuadrado-integrables con trayectorias càdlàg, con $(\mathcal{F}_t, t \leqslant T)$ càd.

6.14. *Observación*

El supuesto de continuidad por la derecha de la filtración es útil para demostrar que toda martingala cuadrado-integrable tiene una modificación que es càdlàg.

Definiremos un producto interio en $\mathcal{M}^2_T$ mediante la relación

$$\langle M, N\rangle := \mathbb{E}[M_T N_T]\,,$$

con $M, N \in \mathcal{M}^2_t$. Además se puede considerar una norma

$$\|M\| := \langle M, M\rangle^{1/2}\,.$$

Notemos que $\|M\| = 0$ implica que $M_T = 0$ casi seguramente y por la propiedad de martingala, $M_s = 0$ casi seguramente para toda $s \in [0, T]$.

6.15. Lema

El espacio $\mathcal{M}^2_T$ es un espacio de Hilbert; es decir que es completo.

Demostración: El resultado es una consecuencia de la cerradura de $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T)$ y la desigualdad L^2 de Doob. ■

6.16. Teorema

Sea $B_\varepsilon = (-1, -\varepsilon) \cup (\varepsilon, 1)$ para $\varepsilon > 0$. Definamos

$$M^\varepsilon_t = \int_0^t \int_{B_\varepsilon} y\tilde{J}(ds, dy) = \int_0^t \int_{B_\varepsilon} yJ(ds, dy) - t\int_{B_\varepsilon} y\Pi(dy)\,,$$

donde J es una medida aleatoria de Poisson sobre $\mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ con intensidad $dt \otimes d\Pi$ con Π una medida de Lévy. Entonces existe una martingala cuadrado-integrable M^0 con trayectorias càdlàg que satisface:

(i) *Se tiene la convergencia casi segura de M^ε a M^0 uniformemente en compactos.*
(ii) *Tiene una cantidad a lo más numerable de discontinuidades.*
(iii) *Es un proceso de Lévy con exponente característico*

$$\psi(\lambda) = \int_{0<|y|<1} (1 - e^{i\langle\lambda, y\rangle} + i\langle\lambda, y\rangle)\Pi(dy)\,.$$

Demostración: Debido al Lema 6.15 $M^{0,T} := (M^{0,T}_s, \leqslant T)$ existe para cada $T \geqslant 0$. Además se cumple que M^ε_T converge en L^2 a M^0_T, de modo que $(M^\varepsilon_s, s \leqslant T)$ converge en $(M^0_s, s \leqslant T)$ en $\mathcal{M}^2_T$. Adicionalmente se puede mostrar que se tiene convergencia casi segura. Para ver que el límite no depende de T, consideremos $T' \leqslant T$ y notemos que

$$\mathbb{E}[\sup_{s\leqslant T'}|M^{0,T'}_s - M^{0,T}_s|^2] \leqslant 2\mathbb{E}[\sup_{s\leqslant T'}|M^\varepsilon_s - M^{0,T'}_s|] + 2\mathbb{E}[\sup_{s\leqslant T}|M^\varepsilon_s - M^{0,T}_s|]$$

converge a 0 conforme $\varepsilon \to 0$. El resto de la demostración es clara por los resultados previamente presentados. ■

6.17. Teorema

Sean Q una forma cuadrática positiva definida, Π una medida de Lévy sobre $\mathbb{R}^d$ y $a \in \mathbb{R}^d$. Existe una única medida de probabilidad $\mathbb{P}$ sobre un espacio Ω tal que X es un proceso de Lévy con medida característica

$$\psi(\lambda) = -i\langle a, \lambda\rangle + \frac{1}{2}Q(\lambda) + \int_{\mathbb{R}^d}(1 - e^{i\langle\lambda,x\rangle} + i\langle\lambda, x\rangle 1_{\{|x|<1\}})\Pi(dx)\,.$$

Demostración: Sea B un movimiento browniano estándar en $\mathbb{R}^d$. Sea además J una medida aleatoria de Poisson sobre $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ con medida de intensidad $dt \otimes d\Pi$. Definamos G una matriz tal que $\langle G\lambda, G\lambda\rangle = Q(\lambda)$ y consideremos

$$X_t^{(1)} := at + GB_t\,.$$

Entonces $X^{(1)}$ es un movimiento browniano lineal con exponente característico

$$\psi^{(1)}(\lambda) = -i\langle a, \lambda\rangle + \frac{1}{2}Q(\lambda)\,.$$

Pongamos

$$X_t^{(2)} := \sum_{s\leqslant t} \Delta_s 1_{\{|\Delta_s|>1\}}$$

para $t \geqslant 0$. Puesto que

$$\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} \Pi(dx)(1 \wedge |x|)1_{\{|x|>1\}} = t\Pi(\{|x| > 1\}) < \infty\,,$$

el Lema TODO: referenciar el lema 11 implica que $X^{(2)}$ es un proceso Poisson compuesto con exponente característico

$$\psi^{(2)}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d}(1 - e^{i\langle\lambda,x\rangle})\Pi(dx)\,.$$

Finalmente consideremos

$$X_t^{(3,\varepsilon)} = \sum_{s\leqslant t} \Delta_s 1_{\{\varepsilon<|\Delta_s|\leqslant 1\}} - t\int_{\{\varepsilon<|x|\leqslant 1\}} x\Pi(dx)$$

para $t \geqslant 0$. Ahora el Lema TODO: 12 implica que $X^{(3,\varepsilon)}$ es un proceso de Lévy. En adición, el Teorema 16 implica la existencia de una sucesión (ε_k) que decrece a cero tal que se da la convergencia casi segura $X^{(3)} := \lim_{k\to\infty} X^{(3,\varepsilon_k)}$ uniformemente en compactos. Más aún, $X^{(3)}$ es nuevamente un proceso de Lévy con función característica

$$\psi^{(3)}(\lambda) = \int_{0<|x|\leqslant 1}(1 - e^{i\langle\lambda,x\rangle} + i\langle\lambda, x\rangle)\Pi(dx)\,.$$

Puesto que $X^{(2)}$ y $X^{(3,\varepsilon)}$ son independientes para todo $\varepsilon > 0$ (y son independientes de B), se sigue que $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ y $X^{(3)}$ son independientes. Por ende, el resultado se obtiene al definir $X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$. ■

6.18. Corolario

Un proceso de Lévy X tiene trayectorias de variación acotada si, sólo si, $Q \equiv 0$ y $\int(1 \wedge$

$|x|)\Pi(dx) < \infty$ *En este caso se cumple que*

$$X_t = bt + \int_{s \leqslant t} \Delta X_s$$

para $t \geqslant 0$. *Más aún, la variación total de* X *es un subordinador.*

La prueba de este resultado en el caso general se puede consultar en el Teorema 21.9 del libro de Sato (2013).

Demostración en el caso unidimensional: Cuando el proceso de Lévy tiene trayectorias en $\mathbb{R}$ el resultado se deduce al descomponer X en la diferencia de dos subordinadores independientes. ■

6.19. Proposición

Considerando $d = 1$ *se cumple que*

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \frac{\psi(\lambda)}{|\lambda|^2} = \frac{1}{2} Q.$$

Si en adición el proceso X *es de variación acotada, entonces*

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} = -ib.$$

Finalmente, X *es un proceso Poisson compuesto precisamente cuando* ψ *es acotada.*

TODO: La demostración queda como ejercicio al lector.

6.20. Definición

Un proceso de Lévy con valores en $\mathbb{R}$ es *espectralmente positivo* (resp. *negativo*) si $Pi((-\infty, 0)) = 0$ $(\Pi((0,\infty))$ resp.).

6.21. Proposición

Sea $((t, \Delta_t), t \geqslant 0)$ *un proceso Poisson puntual con intensidad* $dt \otimes d\mu$ *sobre* $(0, \infty) \times \mathbb{R}^d$. *Dada una función* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ *medible tenemos que* $((t, f(\Delta_t)), t \geqslant 0)$ *es un proceso Poisson puntual sobre* $(0,\infty) \times \mathbb{R}^m$ *con intensidad* $dt \otimes d(\mu \circ f^{-1})$.

TODO: Demostración como ejercicio

6.22. Proposición (Fórmula de compensación)

Sea $((t, \Delta_t), t \geqslant 0)$ *un proceso Poisson puntual sobre* $(0, \infty) \times E$ *con intensidad* $dt \otimes d\mu$, *donde* μ *es una medida sobre* $(E, \mathcal{E})$. *Sea* $H : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E \to \mathbb{R}_+$ *un proceso adaptado a la filtración* $\mathcal{F}_t := \sigma(N((0, s) \times C); s \leqslant t, C \in \mathcal{E})$ *que además sea continup por la izquierda. Entonces se cumple que*

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{s>0} H(s, \cdot, \Delta_s)\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty ds \int_E \mu(dy) H(s, \cdot, y)\Big].$$

6.2. *Ejemplo*

Consideremos un proceso de Lévy X con tercia característica $(0, 0, \Pi)$. Supongamos que $f : (0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ es una función tal que $f(0, 0, 0) = 0$, f es continua en las los primeras variables y f es medible. Entonces aplicando la fórmula de compensación a

$$H(s, \omega, \Delta_s) = f(s, X_{s-}(\omega), \Delta X_s(\omega))$$

obtenemos la primera igualdad en

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Big[\sum_{s\geqslant 0} f(s, X_{s-}, \Delta X_s)\Big] &= \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty ds \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \Pi(dy) f(s, X_{s-}, y)\Big] \\ &= \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty ds \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \Pi(dy) f(s, X_s, y)\Big], \end{aligned}$$

mientras que la segunda igualdad se da debido a que el conjunto de discontinuidades de $s \mapsto X_s(\omega)$ tiene medida cero bajo la medida de Lebuesgue por ser a lo más numerable casi dondequiera con respecto a ω.

Potenciales

7

Sea X un proceso de Lévy con valores en $\mathbb{R}^d$ con tercia característica (a, Q, Π) o, de manera equivalente, con exponente característico

$$\psi(\lambda) = -i\langle a, \lambda\rangle + \frac{1}{2}\langle \lambda, \mathrm{Q}\lambda\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{i\langle x,\lambda\rangle} + i\langle x, \lambda\rangle 1_{\{|x|\leqslant 1\}})\Pi(dx)\,.$$

7.1. Definición

Definimos el q-potencial o resolvente de X como la medida U^q dada por

$$\mathrm{U}^q(dy) = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty e^{-qt} 1_{\{\mathrm{X}_t \in dy\}} dt\Big],$$

de modo que para una función medible $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{U}^q(dy) f(y) = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty dt\, e^{-qt} f(\mathrm{X}_t) dt\Big].$$

7.2. Lema

Si $q > 0$ y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ es acotada, entonces

$$\mathrm{U}^q(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{U}^q(dy) f(y) \leqslant \frac{1}{q}\|f\|_\infty\,.$$

7.3. Lema

Para $q > 0$ se cumple, para $\lambda \in \mathbb{R}^d$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{U}^q(dy) e^{i\langle\lambda,y\rangle} = \frac{1}{q + \psi(\lambda)}\,.$$

Demostración: Por definición y teorema de Fubini tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{U}^q(dy) e^{i\langle\lambda,y\rangle} = \int_0^\infty dt\, e^{-qt}\mathbb{E}[e^{i\langle\lambda,\mathrm{X}_t\rangle}] = \int_0^\infty dt\, e^{-t(q+\psi(\lambda))}\,.$$

Resta recordar que $\Re\psi(\lambda) \geqslant 0$ para concluir. ■

7.1. Aplicación de la fórmula de compensación y potenciales para subordinadores

Sea X un subordinador. Para $q > 0$ sea U^q es q-resolvente de X y sea ϕ es exponente de Laplace de X.

7.4. Lema

Para $q \geqslant 0$, U^q es una medida σ-finita con transformada de Laplace finita dada por

$$\int_0^\infty U^q(dy)e^{-\lambda y} = \frac{1}{q+\psi(\lambda)}, \qquad \lambda > 0.$$

7.5. Teorema

Sea X un subordinador con exponente de Laplace ϕ y potencial $U := U^{(0)}$. Para cada $x > 0$ sea $T_x = \inf\{t \geqslant 0 : X_t > x\}$. Entonces la ley de (T_x, X_{T_x-}, X_{T_x}) queda determinada por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[f(T_x, X_{T_x-}, X_{T_x})1_{\{X_{T_x-}\neq X_{T_x}\}}\big] \\ = \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty dt\, 1_{\{X_t<x\}} \int_0^\infty \Pi(dy) 1_{\{y+X_t>x\}} f(t, X_t, X_t+y)\Big],\end{aligned}$$

con $f : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}_+$ medible, y

$$\mathbb{P}(X_{T_x-} = X_{T_x}) = a\nu(x),$$

donde a es la deriva de X y ν es la densidad de U, que existe cuando $a > 0$. Además, si $g : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$, entonces

$$\mathbb{E}\big[g(X_{T_x-}, X_{T_x})1_{\{X_{T_x-}\neq X_{T_x}\}}\big] = \int_0^x U(dy)\int_0^\infty \Pi(dz) g(y, y+z) 1_{\{y+z>x\}},$$

mientras que para $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ se tiene que

$$\mathbb{E}[h(T_x)1_{\{X_{T_x-}\neq X_{T_x}\}}] = \int_0^\infty h(t)\mathbb{E}[1_{\{X_t\leqslant x\}}\Pi(x - X_t, \infty)].$$

El caso en el que X rebase el nivel x de forma continua se conoce como *creeping*.

Demostración: Comencemos con el caso donde X rebasa el nivel x mediante un salto. Notemos que

$$f(T_x, X_{T_x-}, X_{T_x})1_{\{X_{T_x-}\neq X_{T_x}\}} = \sum_{s\geqslant 0} f(s, X_s, X_s + \Delta X_s)1_{\{X_{s-}<x\}}1_{\{\Delta X_s + X_{s-}>x\}},$$

con lo que la primera identidad es consecuencia de la fórmula de compensación. La penúltima afirmación se sigue al considerar $f(t,u,v) = g(u,v)$ y la definición del potencial U, y la última se da al tomar $f(t,u,v) = h(t)$.

Ahora consideraremos el caso continuo. Comenzamos observando que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\int_{T_x}^\infty dt\, g(X_t)\Big] &= \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty dt\, g\big((X_{T_x+t} - X_{T_x}) + X_{T_x}\big)\Big] \\ &= \int_x^\infty \mathbb{P}(X_{T_x} \in dz)\int_0^\infty U(dy) g(z+y),\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha usado la propiedad fuerte de Markov y la definición de potencial. Si en particular consideramos $g(y) = e^{-\lambda y}$, entonces

$$\mathbb{E}\Big[\int_{T_x}^\infty dt\, e^{-\lambda X_t}\Big] = \int_x^\infty \mathbb{P}(X_{T_x}\in dy)e^{-\lambda y}\int_0^\infty U(dz)e^{-\lambda z} = \frac{1}{\phi(\lambda)}\mathbb{E}[e^{-\lambda X_{T_x}}]$$

y por otra parte, usando $\{T_x < t\} = \{X_t > x\}$,

$$\mathbb{E}\Big[\int_{T_x}^\infty dt\, e^{-\lambda X_t}\Big] = \int_x^\infty U(dw)e^{-\lambda w}.$$

De lo anterior observamos que se cumple que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\phi(\lambda)}\int_0^\infty dx e^{-(q-\lambda)x}\mathbb{E}[e^{-\lambda X_{T_x}}] &= \int_0^\infty dx e^{-(q-\lambda)x}\int_x^\infty U(dw)e^{-\lambda w}\\ &= \int_0^\infty U(dw)e^{-\lambda dw}\int_0^w dx e^{-(q-\lambda)x}\\ &= \frac{1}{q-\lambda}\Big(\frac{1}{\phi(\lambda)}-\frac{1}{\phi(q)}\Big),\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\int_0^\infty dx e^{-qx}\mathbb{E}[e^{-\lambda(X_{T_x}-x)}] = \frac{\phi(\lambda)}{q-\lambda}\Big(\frac{1}{\phi(\lambda)}-\frac{1}{\phi(q)}\Big).$$

Es claro que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\infty e^{-qx}\mathbb{E}[e^{-\lambda(X_{T_x}-x)}] = \int_0^\infty e^{-qx}\mathbb{P}(X_{T_x}=x),$$

mientras que

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\phi(\lambda)}{q-\lambda}\Big(\frac{1}{\phi(\lambda)}-\frac{1}{\phi(q)}\Big) = \frac{a}{\phi(q)} = a\int_0^\infty U(dx)e^{-qx}.$$

Por ende, de la unicidad de la transformada de Laplace se cumple que

$$aU(dx) = \mathbb{P}(X_{T_x}=x)dx,$$

con lo que se deduce que $aU(dx) \ll dx$ y tiene densidad acotada dada por $x\mapsto \mathbb{P}(X_{T_x}=x)$ casi dondequiera.

Definamos $p(x) := \mathbb{P}(X_{T_x}=x)$. Probaremos que $|p(x+y)-p(x)| \leqslant 1-p(y)$. Por la propiedad de Markov y la igualdad

$$p(x+y) = \mathbb{P}(X_{T_{x+y}}=x+y, X_{T_y}=y) + \mathbb{P}(X_{T_{x+y}}=x+y, X_{T_y}>y)$$

se tiene que

$$p(x+y)\geqslant p(x)p(y) \quad \text{y} \quad p(x+y)\leqslant p(x)p(y)+1-p(y).$$

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned}p(x) &= 1-\mathbb{P}(X_{T_x-}<X_{T_x})\\ &= 1-\int_0^x dy\,\nu(y)\Pi(x-y,\infty)\\ &= 1-\int_0^x dy\frac{p(y)}{a}\Pi(x-y,\infty)\end{aligned}$$

$$\geqslant 1-\frac{1}{a}\int_0^x dy\,\Pi(y,\infty),$$

de modo que $p(x)\to 1$ conforme $x\to 0$. De esta manera se cumple que p es uniformemente continua. ■

7.6. *Observación*

Del teorema previo obtenemos que

$$t \mapsto \mathbb{E}[1_{\{X_t \leqslant x\}} \Pi(x - X_t, \infty)]$$

es una densidad para el primer tiempo de pasada sobre x en caso de que x sea rebasado por un salto.

7.1. *Ejemplo*

Tomemos X un subordinador α-estable. Con lo anterior es posible determinar la ley de $(x - X_{T_x-}, X_{T_x} - x)$, la ley del faltante y excedente[a]. En efecto, como la deriva es cero $p(x) = \mathbb{P}(X_{T_x-} = X_{T_x}) = 0$. Por otra parte, para $g : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ medible

$$\mathbb{E}[g(x - X_{T_x-}, X_{T_x} - x)] = \int_0^x U(dy) \int_0^\infty \Pi(dz) g(x - y, y + z - x) 1_{\{y+z>x\}} .$$

Puesto que $\phi(\lambda) = \lambda^\alpha c_\alpha$, se tiene que

$$\int_0^\infty U(dy) e^{-\lambda y} = \frac{1}{c_\alpha \lambda^\alpha} ,$$

de modo que $U(dy) = c_2 e^{-\lambda y} y^{\alpha-1} dy$, mientras que $\Pi(dz) = c_1 z^{-(1+\alpha)} dz$. Por ende,

$$\mathbb{E}[g(x - X_{T_x-}, X_{T_x} - x)] = c_3 \int_0^x dy y^{\alpha-1} \int_0^\infty dz z^{-(1+\alpha)} g(x - y, y + z - x) 1_{\{y+z>x\}} .$$

[a] También conocidos como *undershoot* y *overshoot*.

TODO: Verificar que la distribución de $x - T_{x-}$ es un reescalamiento de una distribución Beta y $X_{T_x} - x$ tiene distribución Pareto.

7.7. Proposición

Primero notemos que si definimos $\tau_x^+ = \inf\{t > 0 : X_t > x\}$, *entonces si* X *es un subordinador, tenemos que*

$$\{X_t \leqslant x\} = \{\tau_x^+ \geqslant t\}$$

y en consecuencia

$$U[0, x] = \mathbb{E}[\int_0^\infty 1_{\{X_t \leqslant x\}} dt] = \mathbb{E}[\tau_x^+] .$$

Adicionalmente se cumple que

$$U[0, a + b] \leqslant U[0, a] + U[0, b] ,$$

de modo que $x \mapsto U[0, x]$ *es subaditiva. Por lo anterior,* $U[0, a + b] - U[0, a] \leqslant U[0, b]$, *lo que nos dice que* $U\{a\} \leqslant U\{0\}$. *Adicionalmente, si* $a > 0$ *o* $\Pi(0, \infty) = \infty$, U *es no atómica.*

7.2. *Ejemplo*

Para un proceso Poisson compuesto N se cumple que $U\{0\} = 1/\lambda$ donde λ es la tasa de saltos. De hecho, en el caso que N sea Proceso Poisson se tiene que

$$\mathrm{U}(dy) = \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{\infty}\delta_j(dy)\,.$$

7.8. Corolario

Se cumple que

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_{\mathrm{T}_x -} < x = \mathrm{X}_{\mathrm{T}_x}) = 0$$

en el caso con deriva $a > 0$ *o de actividad infinita.*

Demostración: Se tiene que

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_{\mathrm{T}_x -} < x = \mathrm{X}_{\mathrm{T}_x}) = \int_0^x \mathrm{U}(dy)\int_0^\infty \Pi(dz)1_{\{z=x-y\}} = \int_0^x \mathrm{U}(dy)\Pi\{x-y\} = 0\,,$$

donde la última igualdad se da debido a que Π tiene a lo más una cantidad numerable de átomos y U es una medida difusa. ■

7.9. Lema

La medida U *es una medida de renovación con retraso, es decir que existe una función de distribución* F *sobre* $[0,\infty)$ *tal que*

$$\mathrm{U}(dy) = \sum_{n\geqslant 1}\mathrm{F}^{*n}(dy)\,.$$

Demostración: Consideremos

$$\mathrm{F}^{*n}(dy) = \mathbb{P}(\mathrm{X}_{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}_\lambda^{(k)}} \in dy)\,,$$

donde $((\mathrm{e}_\lambda^{(k)}), k \in \mathbb{N})$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, independientes de X, con distribución exponencial de parámetro λ. De lo anterior,

$$\mathrm{F}^{*n}(dy) = \int_0^\infty dt\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}\mathbb{P}(\mathrm{X}_t \in dy)\,,$$

de modo que

$$\sum_{n\geqslant 1}\mathrm{F}^{*n}(dy) = \int_0^\infty \mathbb{P}(\mathrm{X}_t \in dy) = \mathrm{U}(dy)\,.$$ ■

Con ello tenemos acceso a propiedades de medidas de renovación y funciones de renovación, como el teorema de renovación elemental, el teorema de renovación clave. TODO: Escribir un apéndice con tales propiedades.

De ahora en adelante nos concentraremos en el caso en el que X_1 es no aritmética.

7.10. Teorema (de renovación de Smith)

Si $f \in L^1$, *entonces*

$$\int_0^x U(dy) f(x-y) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{\mathbb{E}[X_1]} \int_0^\infty dy f(y).$$

Una pregunta que nos podemos hacer es sobre el comportamiento asintótico del vector aleatorio $(x - X_{T_x-}, X_{T_x} - x)$ conforme $x \to \infty$ o conforme $x \to 0$.

7.11. Proposición

Si $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ *es finito, entonces* $(x - X_{T_x-}, X_{T_x} - x)$ *tiene un límite en distribución conforme* $x \to \infty$ *y conforme* $x \to 0$.

Demostración: Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Entonces, por el Teorema TODO: referenciar teorema adecuado

$$\mathbb{E}[g(x - X_{T_x-}, X_{T_x} - x)] = g(0,0) a \nu(x) + \int_0^x U(dy) h(x-y),$$

donde

$$h(z) = \int_0^\infty \Pi(ds) g(z, s-z) 1_{\{s>z\}}.$$

Por el supuesto μ finito se tiene que Π tiene medida finita y en consecuencia $h \in L^1$.

$$\lim_{x\to\infty} \nu(x) = \frac{1}{\mu}.$$

Así, por el Teorema de renovación de Smith tendremos que

$$\mathbb{E}[g(x - X_{T_x-}, X_{T_x} - x)] \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{a}{\mu} g(0,0) + \int_0^\infty \frac{s\Pi(ds)}{\mu} \int_0^s \frac{dz}{s} g(z, s-z).$$

Por otra parte, por el teorema de convergencia acotada y que $\nu(x) \to 1/a$ cuando $x \to 0$ si $a > 0$,

$$\mathbb{E}[g(x - X_{T_x-}, X_{T_x} - x)] \xrightarrow[x\to 0]{} g(0,0).$$

Así, resta estudiar el caso cuando $a = 0$. ■

TODO: Verificar el argumento del caso de subordinadores α-estables (que el comportamiento límite es degenerado pero que se puede reescalar por x.)

Del resultado anterior se tiene lo siguiente.

7.12. Teorema

Sea X *un subordinador con* $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ *finito y estrictamente positivo con soporte no aritmético. Si* $T_x := \inf\{t > 0 : X_t > x\}$ *y* $f : \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}_+$ *es continua y acotada, entonces*

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{E}[f(X_{T_x} - X_{T_x-}, x - X_{T_x-}, X_{T_x} - x) 1_{\{X_{T_x-} \neq X_{T_x}\}}] = \int_0^\infty \frac{z\Pi(dz)}{\mu} \int_0^1 du f(z, zu, z(1-u)).$$

En particular

$$\mathbb{P}(X_{T_x-} < X_{T_x}) \xrightarrow[x\to\infty]{} 1 - \frac{a}{\mu} \quad \textit{o bien} \quad \mathbb{P}(X_{T_x} = x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{a}{\mu}.$$

Para lidiar con el caso en el que $\mu = \infty$ requeriremos de la noción de variación regular en infinito (o en cero).

7.13. Definición

Decimos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible es de *variación regular* en ∞ (0 respectivamente) si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para cualquier $c > 0$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(cx)}{f(x)} = c^\alpha \quad \Big(\lim_{x\to 0} \frac{f(cx)}{f(x)} = c^\alpha \text{ resp.}\Big).$$

Cuando $\alpha = 0$ se dice que la función f es de *variación lenta*.

7.14. Lema

Una función f es de variación regular en ∞ (0 resp.) si y solo si existen $\alpha, c \in \mathbb{R}$ y $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible con $\xi(u) \to 0$ conforme $u \to \infty$ ($u \to 0$ resp.) tales que

$$f(x) = x^\alpha \exp\Big\{\int_c^x \frac{\xi(u)}{u} du\Big\}.$$

7.3. *Ejemplo*

La función $f(x) = x^\alpha \log x$ es de variación regular con índice α en ∞.

7.15. Lema

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de variación regular de índice α, con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, entonces

$$g(x) = \frac{f(x)}{x^\alpha}$$

es de variación lenta.
Por lo tanto, las funciones de variación lenta son de la forma

$$\ell(x) = \tilde{c} \exp\Big\{\int_c^x \frac{\xi(u)}{u} du\Big\}$$

con ξ como en el lema anterior.

7.4. *Ejemplo*

El exponente de Laplace ϕ de un subordinador estable es de variación regular con el mismo índice que el de estabilidad.

TODO: Si ϕ es el exponente de Laplce de un subordinador y es de variación regular en ∞ (o en 0) entonces el índice de variación está en $[0, 1]$.

7.16. Teorema

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) *La variable aleatoria X_{T_x-}/x converge en distribución conforme $x \to \infty$ ($x \to 0$ resp.).*
(ii) *Se cumple que*

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{E}\Big[\frac{X_{T_x-}}{x}\Big] = \alpha \quad \Big(\lim_{x\to 0} \mathbb{E}\Big[\frac{X_{T_x}}{x}\Big] = \alpha \textit{ resp.}\Big)$$

con $\alpha \in [0,1]$.

(iii) *El exponente de Laplace de* X *es de variación regular con índice* α *en* 0 *(*∞ *resp.). En cualquier caso, se tiene que si* $\alpha \in (0,1)$ *entonces*

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_{T_x-}}{x} \in ds\right) \Rightarrow ds\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}s^{\alpha-1}(1-s)^{-\alpha}1_{\{s\in(0,1)\}} \tag{7.1}$$

conforme $x \to \infty$ *(*$x \to 0$ *resp.). Cuando* $\alpha \in \{0,1\}$*, la medida límite es la medida de Dirac en* 0 *o* 1 *de forma respectiva.*

En la demostración de este resultado usaremos un lema que probaremos después.

7.17. Lema

Se cumple que

$$\int_0^\infty dt e^{-qt}\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\lambda\frac{X_{T_{tx}-}}{x}\right\}\right] = \frac{\phi(q/x)}{q\phi((\lambda+q)/x)}$$

7.18. *Observación*

La condición (i) del teorema se satisface si y solo si $X_{T_{tx}-}/x$ tiene un límite en distribución para cualquier $t > 0$.

Demostración: Comencemos demostrando que la condición (i) implica el punto (iii). Dado que X_{T_x-}/x converge entonces su transformada de Laplace también converge, digamos a $\hat{v}$. Entonces

$$\int_0^\infty dt e^{-qt}\mathbb{E}[e^{-\lambda X_{T_{xt}-}/x}] \to \int_0^\infty dt e^{-qt}\hat{v}(t\lambda),$$

mientras que el Lema nos dice que el límite de

$$\frac{\phi(q/x)}{q\phi((q+\lambda)x)}$$

existe sin importar los valores de q y λ. Se puede verificar que el límite debe ser de la forma

$$\frac{q^\alpha}{q(q+\lambda)^\alpha},$$

de modo que obtenemos (iii).

De manera recíproca, es decir suponiendo que se cumple (iii) con $\alpha \in (0,1)$, se tiene que

$$\int_0^\infty dt e^{-qt}\mathbb{E}[e^{-\lambda X_{T_{tx}-}/x}] \to \frac{q^{\alpha-1}}{(q+\lambda)^\alpha} = \int_0^\infty dt e^{-qt}\int_0^t ds e^{-\lambda s}\frac{s^{\alpha-1}(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}.$$

De lo anterior, afirmamos que

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda X_{T_{tx}-}/x}] \to \int_0^t ds e^{-\lambda s}\frac{s^{\alpha-1}(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}.$$

Para ver que esto es cierto notemos que

$$t \mapsto f_t(x) = \mathbb{E}[e^{-\lambda X_{T_{tx}-}/x}]$$

es decreciente y además

$$\int_0^t dt e^{-qt} f_t(x) = \frac{1}{q} + \int_0^\infty d_t f_t(x) e^{-qt} = \frac{1}{1} - \int_0^\infty e^{-qt} d_t(1 - f_t(x)),$$

de modo que

$$\int_0^\infty e^{-qt} d_t(1 - \mathbb{E}[e^{-\lambda X_{T_{tx}-}/x}]) \to \int_0^\infty e^{-qt} d(1 - \int_0^t e^{-qs} \frac{s^{\alpha-1}(1-s)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} ds),$$

lo que implica que

$$1 - \mathbb{E}[e^{-\lambda X_{T_{tx}-}/x}] \to 1 - \int_0^t e^{-qs} \frac{s^{\alpha-1}(1-s)^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} ds$$

dándonos el resultado deseado.

Ahora demostraremos que (ii) implica (iii). Para ello observemos que $x \mapsto \mathbb{E}[X_{T_{tx}-}/x]$ se encuentra acotado por t y en adición $\int_0^\infty dt e^{-qt} t < \infty$. Por lo tanto,

$$\lim_x \int_0^\infty dt e^{-qt} \mathbb{E}[\frac{X_{T_{tx}-}}{x}] = \int_0^\infty dt e^{-qt} t\alpha .$$

Por otro lado

$$\int_0^\infty dt e^{-qt} \mathbb{E}[e^{-\lambda X_{T_{tx}-}/x}] = \frac{\phi(q/x)}{q\phi((q+\lambda)/x)} .$$

Derivando con respecto a λ y evaluando en cero, vemos que

$$\partial_\lambda \frac{\phi(q/x)}{q\phi((q+\lambda)/x)}\Big|_{\lambda=0} = -\frac{\phi(q/x)}{qx}\frac{\phi'(q/x)}{\phi(q/x)^2} = -\int_0^\infty dt e^{-qt}\mathbb{E}[\frac{X_{T_{tx}-}}{x}].$$

Al tomar el límite sobre x tenemos que

$$\frac{\alpha}{q^2} = \lim_x \frac{\phi'(q/x)}{qx\phi(q/x)} \quad \text{o bien} \quad \alpha = \lim_x \frac{\phi'(1/x)/x}{\phi(1/x)} = \lim_r r\phi'(r)\phi(r),$$

donde $r = 1/x$. Ahora, notemos que

$$\phi(r) = \phi(1)\exp\{\int_1^r \frac{s\phi'(s)}{\phi(s)}\frac{ds}{s}\},$$

de lo que se deduce que para $c > 0$,

$$\frac{\phi(rc)}{\phi(r)} = \exp\{\int_r^{rc} \frac{s\phi'(s)}{\phi(s)}\frac{ds}{s}\}.$$

Al tomar límite sobre r se tiene que

$$\lim_r \frac{\phi(rc)}{\phi(r)} = \exp\{\alpha\log(rc/r)\} = c^\alpha,$$

mostrando que ϕ es de variación regular de índice α.

Ahora mostremos que (iii) implica (ii). Puesto que sabemos que (i) y (iii) son equivalentes y sabemos que en este caso se tiene la convergencia (7.1) tenemos que

$$\mathbb{E}[\frac{X_{T_x-}}{x}] \to \int_0^1 ds \frac{s^\alpha(1-s)^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = \alpha . \qquad \blacksquare$$

7.19. *Observación*

Algunas observaciones de funciones de variación regular son:

(i) Si f es de variación regular de índice α en ∞ y $t \mapsto g(t) = f(1/t)$, entonces g es de variación regular de índice $-\alpha$ en 0.

(ii) Si ν es una función monótona y definimos, para $\lambda > 0$,

$$\hat{\nu}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} d\nu(x)\,,$$

entonces se tiene el Teorema Tauberiano.

(iii) Se cumple el teorema de densidad monótona.

7.20. Teorema (Tauberiano)

Para una función monótona ν son equivalentes:

(i) $\nu(x) \sim x^\rho \ell(x)/\Gamma(1+\rho)$ *conforme* $x \to 0$ *(*$x \to \infty$ *resp.);*

(ii) $\hat{\nu}(\lambda) \sim \lambda^{-\rho}\ell(1/\lambda)$ *conforme* $\lambda \to \infty$ *(*$\lambda \to 0$ *resp.)*

7.21. Teorema (de densidad Monótona)

Si para ν se cumple que $d\nu(x) = u(x)dx$, donde u es monótona en en una vecindad de $0+$ *(*∞ *resp.), y además existen $\rho \geqslant 0$ y ℓ de variación lenta tales que*

$$\nu(x) \sim x^\rho \ell(x) \text{ conforme } x \to 0 \ (x \to \infty \text{ resp.}),$$

entonces

$$u(x) \sim \rho x^{\rho-1}\ell(x) \text{conforme } x \to 0 \ (x \to \infty \text{ resp.})$$

7.22. Corolario

Si ϕ es de variación regular de variación $\alpha \in (0,1)$ en ∞ (0 resp.), entonces

$$\Gamma(1+\alpha)U(x) \sim \frac{1}{\phi(1/x)} \text{ conforme } x \to 0 \ (x \to \infty \text{ resp.})$$

y también, si $\alpha < 1$,

$$\Gamma(1-\alpha)\Pi(x,\infty) \sim \phi(1/x) \text{ conforme } x \to 0 \ (x \to \infty \text{ resp}).$$

8 Martingalas exponenciales

8.1. Teorema

Sea X un proceso de Lévy con valores en $\mathbb{R}$. Entonces se tiene que

$$\mathbb{E}[e^{\beta \mathrm{X}_t}] < \infty$$

para toda $t \geqslant 0$ precisamente cuando

$$\int_{\{|x|>1\}} e^{\beta x} \Pi(dx) < \infty .$$

Demostración: Debido a la descomposición de Itô podemos suponer sin pérdida de generalidad que X es un proceso Poisson compuesto con saltos mayores que uno en valor absoluto y en ese caso

$$\mathbb{E}[e^{\beta \mathrm{X}_t}] = \exp\{t \int_{\{|x|>1\}} (e^{\beta x} - 1)\}\Pi(dx) ,$$

de donde se sigue el resultado. Para ver como tratar la parte de martingala, revisar el Teorema 3.6 de Kyprianou (2014). ■

8.2. Definición

Decimos que una función medible $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ es submultiplicativa si existe una constante $c > 0$ tal que

$$g(x+y) \leqslant c g(x) g(y) .$$

8.3. Teorema

Para un proceso de Lévy X con valores en los reales y una función g submultiplicativa se cumple que $\mathbb{E}[g(\mathrm{X}_t)] < \infty$ para toda $t \geqslant 0$ si y solo si $\int_{\{|x|>1\}} g(x)\Pi(dx) < \infty$.

Para la demostración se puede usar el lema 25.5 de Sato (2013) que dice que para una función submultiplicativa g existe una constante $b > 0$ tal que

$$g(x) \leqslant e^{b|x|} \text{ para toda } x \in \mathbb{R} .$$

Adicionalmente se puede consultar el Teorema 3.8 de Kyprianou (2014).

8.4. Teorema

Supongamos que $\beta \in \mathbb{R}$ es tal que $\mathbb{E}[e^{\beta \mathrm{X}_t}] < \infty$ para toda $t \geqslant 0$. Entonces, si para $t \geqslant 0$ consideramos

$$\mathrm{M}_t^{(\beta)} = \frac{e^{\beta \mathrm{X}_t}}{\mathbb{E}[e^{\beta \mathrm{X}_t}]} ,$$

entonces $\mathrm{M}^{(\beta)}$ define una martingala.

Demostración: La demostración es elemental. ■

El resultado previo nos permite realizar un cambio de medida. En efecto, si $\beta \in \mathbb{R}$ es tal que $\int_{\{|x|>1\}} e^{\beta x}\Pi(dx) < \infty$, entonces podemos definir la medida de probabilidad $\mathbb{P}_t^{(\beta)}$ sobre $\mathcal{F}_t$ mediante

$$\mathbb{P}_t^{(\beta)}(A) := \mathbb{E}[M_t^{(\beta)} 1_A]$$

para $A \in \mathcal{F}_t$.

8.5. Lema

La familia $(\mathbb{P}_t^{(\beta)}, t > 0)$ *define una familia consistente; es decir que*

$$\mathbb{P}_{t+s}^{(\beta)}|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{P}_t^{(\beta)}.$$

La demostración se sigue inmediatamente de la propiedad de martingala de $M^{(\beta)}$, y en consecuencia el teorema de consistencia de Kolmogorov implica la existencia de una única medida de probabilidad $\mathbb{P}^{(\beta)}$ sobre $\mathcal{F}_\infty$ tal que

$$\mathbb{P}^{(\beta)}|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{P}_t^{(\beta)}$$

para toda $t \geqslant 0$.

8.6. Teorema

Si $\beta \in \mathbb{R}$ *es tal que* $\int_{\{|x|>1\}} e^{\beta x}\Pi(dx) < \infty$, *entonces bajo* $\mathbb{P}^\beta$ *el proceso* X *es de Lévy. En este caso su medida de Lévy es*

$$\Pi^\beta(dx) = e^{\beta x}\Pi(dx),$$

la parte gaussiana no cambia y la deriva se convierte en

$$a^{(\beta)} = a - \beta\sigma^2 + \int_{\{|x|<1\}} (1 - e^{\beta x})x\Pi(dx).$$

Más aún,

$$\Psi^{(\beta)}(\lambda) = \Psi(\lambda - i\beta) - \Psi(-i\beta).$$

Demostración: Durante la demostración supondremos sin pérdida de generalidad que $\beta > 0$ pues en caso contrario consideramos $-X$. Dicho lo anterior, notemos que para todo $\theta \in [0, \beta]$ se cumple que $\mathbb{E}[e^{\theta X_1}] < \infty$ debido a la desigualdad de Hölder. En efecto para $\theta < \beta$ se cumple que

$$\mathbb{E}[e^{\theta X_1}] \leqslant \mathbb{E}[e^{\beta X_1}]^{\theta/\beta} < \infty.$$

En adición, la misma desigualdad de Hölder nos da que $\lambda \mapsto \log \mathbb{E}[e^{\lambda X_1}]$ es convexa. Para verificar esta afirmación, tomemos cualesquiera $\theta_1, \theta_2 \in [0, \beta]$ y $\alpha \in (0, 1)$. Entonces, tomando $p = 1/\alpha$ y $q = 1/(1 - \alpha)$,

$$\mathbb{E}[e^{(\alpha\theta_1+(1-\alpha)\theta_2)X_1}] \leqslant \mathbb{E}[e^{\theta_1 X_1}]^\alpha \mathbb{E}[e^{\theta_2 X_1}]^{1-\alpha}.$$

Entonces $z \mapsto \mathbb{E}[e^{zX}]$ está bien definido para cualquier elemento en $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \in [0, \beta]\}$, de modo que Ψ se puede extender a ese dominio mediante la relación

$$\Psi(z) = -\Psi(-iz).$$

Sea A_T el evento donde las trayectorias del proceso son càdlàg en $[0,T]$ para $T>0$ dada. Se tiene que $\mathbb{P}(A_T^c)=0$ y $A_T\in\mathcal{F}_T$ de modo que $\mathbb{P}^\beta(A_T^c)=\mathbb{P}^\beta_T(A_T^c)=0$ y por lo tanto $\mathbb{P}^\beta(\bigcap_{T>0}A_T)=1$. De esta manera tenemos que $\mathbb{P}^\beta$ tiene soporte en las trayectorias càdlàg. Para verificar que X tiene incrementos independientes y estacionarios basta verificar la igualdad

$$\mathbb{E}^\beta[e^{i\lambda(X_{t+s}-X_t)}1_{A_t}]=\mathbb{E}^\beta[e^{i\lambda X_s}]\mathbb{E}^\beta[1_{A_t}]$$

para cualquier $\lambda\in\mathbb{R}$ y para todo $A_t\in\mathcal{F}_t$. Para ello basta notar que $e^{i\lambda(X_{t+s}-X_t)}1_{A_t}$ es $\mathcal{F}_{t+s}$-medible y usar los incrementos independientes y estacionarios de X bajo $\mathbb{P}$. Este mismo argumento nos da la relación entre exponentes característicos. ■

8.7. *Observación*

Supongamos que $\beta>0$ y que $\int_{\{|x|>1\}}e^{\beta x}\Pi(dx)<\infty$. Entonces bajo $\mathbb{P}^\beta$ el proceso de Lévy tiene medida de Lévy $\Pi^\beta(dx)=e^{\beta x}\Pi(dx)$, de modo que esto aumenta los saltos positivos y decrece los saltos negativos.

TODO: Suponer que $\int_{\{|x|>1\}}e^{\beta x}\Pi(dx)<\infty$. Calcular $\mathbb{E}^\beta[X_t]$ y $\mathrm{Var}_\beta(X_t)$.

El resultado anterior resulta útil en el caso de procesos de Lévy espectralmente positivos pues en este caso se cumple que $\mathbb{E}[e^{\beta X_t}]<\infty$ para toda elección de $t\geq 0$ y $\beta>0$. Más aún, se tiene el siguiente resultado.

8.8. Corolario

Si X *es espectralmente negativo entonce s, para cualquier* $\beta>0$, X *sigue siendo espectralmente negativo bajo* $\mathbb{P}^\beta$.

Ahora, sea $\phi(\lambda)=\log\mathbb{E}[e^{\lambda X_1}]$ para un proceso espectralmente negativo. Notemos que ϕ es estrictamente convexo con $\phi(0)=0$ y $\phi(\infty)=\infty$. De esta manera, para $q\geq 0$ podemos definir

$$\phi^{\leftarrow}(q)=\sup\{\lambda>0:\phi(\lambda)=q\},$$

el cual está bien definido.

8.9. Teorema

Sea X *un proceso de Lévy espectralmente negativo. Consideremos* $\tau_x^+=\inf\{t>0:X_t>x\}$ *para* $x\geq 0$. *Entonces* $(\tau_x^+,x\geq 0)$ *es un subordinador con*

$$\mathbb{E}[e^{-q\tau_x^+}]=e^{-x\phi^{\leftarrow}(q)}\quad y\quad \mathbb{P}(\tau_x^+<\infty)=e^{-x\phi^{\leftarrow}(0)}$$

para toda $x\geq 0$.

Demostración: La independencia y estacionariedad de los incrementos de τ^+ es consecuencia de la propiedad fuerte de Markov. En efecto, notemos que debido a que X repta por el nivel $x\geq 0$ por ser espectralmente negativo,

$$\tau_{x,y}^+=\tau_x^++\inf\{s>0:X_{s+\tau_x^+}-X_{\tau_x^+}>y\}.$$

Las trayectorias càdlàg se dan por construcción. Para obtener el exponente de Laplace usaremos la martingala $M^{(\beta)}$ y el teorema de paro óptimo, que nos asegura que $(M^{(\beta)}_{t\wedge\tau_x^+},t\geq 0)$ es una martingala. De esta manera,

$$1=\mathbb{E}[M^{(\beta)}_{t\wedge\tau_x^+}]=\mathbb{E}[\exp\{\beta X_{t\wedge\tau_x^+}-(\tau_x^+\wedge t)\phi(\beta)\}].$$

Por consiguiente, una aplicación del teorema de convergencia dominada implica que

$$1 = \mathbb{E}\left[e^{\beta x - \tau_x^{\ddagger}\phi(\beta)}\right],$$

de donde concluimos al tomar $\beta = \phi^{\leftarrow}(q)$. ■

8.1. Aplicación del cambio de medida a subordinadores

El siguiente resultado nos dice que la velocidad a la cual $\mathbb{P}(|X_t/t - \mu| > \varepsilon)$ converge a 0 conforme $t \to \infty$, mediante un resultado de grandes desviaciones.

8.10. Proposición

Supongamos que X *es un subordinador con exponente de Laplace* ϕ *y atl que* $\mathbb{E}[X_1] = \mu$*. Entonces para toda* $\varepsilon > 0$ *existen* $0 < c_\mu < C_\mu < \infty$ *(dependientes de* ε*) tales que*

$$c_\mu < \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_t}{t} - \mu\right| > \varepsilon\right) \leq \limsup_{t\to\infty} \log \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_t}{t} - \mu\right| > \varepsilon\right) < C_\mu .$$

Demostración: Observemos que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_t}{t} - \mu\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\big(X_t < t(\mu - \varepsilon)\big) + \mathbb{P}\big(X_t > t(\mu + \varepsilon)\big).$$

Primero analizamos el término $\mathbb{P}(X_t < t(\mu - \varepsilon))$, observando que

$$\mathbb{P}\big(X_t < t(\mu - \varepsilon)\big) = e^{\lambda t(\mu-\varepsilon)}\mathbb{E}\left[e^{-\lambda X_t}\right] = e^{-t\phi(\lambda) + t\lambda(\mu-\varepsilon)}$$

para toda $\lambda > 0$. En particular,

$$\mathbb{P}\big(X_t < t(\mu - \varepsilon)\big) \leq \inf_{\lambda \geq 0} e^{-t\phi(\lambda)+t\lambda(\mu-\varepsilon)} = \exp\left\{-t \sup_{\lambda\geq 0}\{\phi(\lambda) - \lambda(\mu - \varepsilon)\}\right\}.$$

Sea $f(\lambda) = \phi(\lambda) - \lambda(\mu - \varepsilon)$ para $\lambda \geq 0$, función que es diferenciable en $(0, \infty)$. Así, para $\lambda > 0$, $f'(\lambda) = \int_0^\infty x(e^{-\lambda x} - 1)\Pi(dx) + \varepsilon$ y $f''(\lambda) = -\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}\Pi(dx)$. De lo anterior vemos que f es cóncava de modo que tiene un supremo en $\lambda_{\mu-\varepsilon}$ y por consecuencia

$$\mathbb{P}(X_t < t(\mu - \varepsilon)) \leq \exp\{-t(\phi(\lambda_{\mu-\varepsilon}) - \lambda_{\mu-\varepsilon}\phi'(\mu - \varepsilon))\}$$

y entonces

$$-\frac{1}{t}\log \mathbb{P}(X_t < t(\mu - \varepsilon)) \geq \phi(\lambda_{\mu-\varepsilon}) - \lambda_{\mu-\varepsilon}\phi'(\mu - \varepsilon).$$

Para analizar $\mathbb{P}(X_t > t(\mu + \varepsilon))$ tenemos que

$$\mathbb{P}(X_t > t(\mu + \varepsilon)) = \mathbb{P}(1 - e^{-\lambda X_t} > 1 - e^{-\lambda t(\mu+\varepsilon)})$$

y así

$$\mathbb{P}(X_t > t(\mu + \varepsilon)) \leq \frac{1 - e^{-t\phi(\lambda)}}{1 - e^{-t(\mu+\varepsilon)}} = \frac{e^{-t\phi(\lambda)}}{e^{-t(\mu+\varepsilon)}}\,\frac{e^{t\phi(\lambda)} - 1}{e^{t(\mu+\varepsilon)} - 1}.$$

Esto nos permite obtener la cota inferior.

Para la cota superior consideramos la martingala $M^{(\lambda)}$ y la medida asociada $\mathbb{P}^{-\lambda}$. Entonces

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_t}{t} - \mu\right| > \varepsilon\right) \geq e^{-t\phi(\lambda)}\mathbb{P}^{\lambda}\left(\left|\frac{X_t}{t} - \mu\right| > \varepsilon\right).$$

TODO: Terminar la demostración ■

9 Modelos de inventarios y procesos de variación regular

En esta parte del curso modelaremos procesos de inventarios, tomando A como el trabajo entrante y B es el trabajo saliente. En cursos elementales se considera

$$A_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i \,,$$

donde ξ_i es la duración del i-ésimo servicio y N_t es el número de servicios que han llegado en el intervalo de tiempo $[0, t]$. En ellos es de interés en estudiar el proceso de carga del sistema

$$D := A - B\,,$$

que es de variación acotada. Notemos que en este caso D es un procesos de Lévy espectralmente positivo y de variación acotada.

Ahora estamos interesados en encontrar un proceso L tal que $W := D + L$ sea positivo, es decir que L crezca únicamente en el conjunto de ceros de W. Para verificar la existencia de este proceso, L, requeriremos de una generalización del lema de Skorokhd (ver Lema VI.2.2.1 en Revuz & Yor, 1999), que enunciamos a continuación.

9.1. Lema (de Skorokhod)

Sea $y = (y_t, t \geqslant 0)$ una función real y espectralmente positiva en $[0, \infty)$ tal que $y_0 = 0$. Entonces existe un único par de funciones (z, a) en $[0, \infty)$ satisfaciendo

(i) $z = y + a$;

(ii) $z \geqslant 0$;

(iii) a *es creciente con* $a_0 = 0$.

En adición, la medida da_s tiene soporte en el conjunto de zeros de z y puede darse explícitamente como

$$a_t = \sup_{s \leqslant t}(-y_s \vee 0) = -\inf_{s \leqslant t}(y_s \wedge 0)\,. \tag{9.1}$$

Demostración: La función a dada en la expresión (9.1) satisface las propiedades requeridas poniendo $z := a + y$. Así, basta demostrar la unicidad. Consideremos pues $(\tilde{z}, \tilde{a})$ otro par que satisfaga las mismas condiciones. Entonces $\tilde{z} - z = \tilde{a} - a$ en $[0, \infty)$ y $\tilde{z}_0 - z_0 = 0$. Por consiguiente,

$$0 \leqslant (\tilde{z}_t - z_t)^2 = 2\int_0^t (\tilde{z}_s - z_s) d(\tilde{a}_s - a_s) = -2\int_0^t \tilde{z}_s da_s - 2\int_0^t z_s d\tilde{a}_s\,,$$

donde en la segunda igualdad hemos usado que los soportes de a y $\tilde{a}$ se concentran en los conjuntos de ceros de z y $\tilde{z}$ de manera respectiva. Ahora, por la positividad de z y $\tilde{z}$ se sigue que $(\tilde{z}_t - z_t)^2 = 0$ y por ende $\tilde{z} = z$. En consecuencia también se deduce que $\tilde{a} = a$. ■

Regresando a nuestro problema de interés pondremos

$$L_t = -\inf_{s\leqslant t}(D_s \wedge 0) = \sup_{s\leqslant t}(-D_s \vee 0)\,,$$

con lo que podemos definir

$$W_t = \sup_{s\leqslant t}(-D_s \vee 0) - (-D_t)$$

para $t \geqslant 0$. De esta manera lo hemos reescrito con $X := -D$ que es un proceso de Lévy espectralmente negativo de variación acotada.

En lo subsecuente, hasta nuevo aviso, tomaremos

$$X_t = \delta t - S_t \quad \text{para } t \geqslant 0\,,$$

con $\delta \geqslant 0$ y S un subordinador con exponente de Laplace

$$\phi(\lambda) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x})\Pi_S(dx)\,,$$

de modo que

$$\varphi(\lambda) := \frac{1}{t}\log \mathbb{E}[e^{\lambda X_t}] = \delta - \phi(\lambda)\,.$$

De lo anterior tenemos, para $t \geqslant 0$,

$$W_t = \sup_{s\leqslant t}(X_t \vee 0) - X_t\,.$$

Nos interesa saber el comportamiento asintótico de W conforme $t \to \infty$. Puesto que cuando $\varphi'(0) < 0$, $X_t \to -\infty$ conforme $t \to \infty$ casi seguramente, entonces $W_t \to \infty$ casi seguramente conforme $t \to \infty$. En el caso $\varphi'(0) \geqslant 0$ se cumple que 0 se vuelve un estado recurrente. No obstante, hay una distinción en el comportamiento del proceso W acorde a si $\varphi'(0) = 0$ o si $\varphi'(0) > 0$. En el segundo caso, cuando $\varphi'(0) > 0$, puesto que $X_t \to \infty$ casi seguramente conforme $t \to \infty$ se tiene que W regresa rápidamente a 0, de modo que diremos que W es recurrente positivo. Mientras tanto, cuando $\varphi'(0) = 0$, W oscila entre 0 e ∞, de modo que volverá a 0 infinitamente seguido pero tardará más en hacerlo; por ello llamaremos a W recurrente nulo en este caso.

Antes de probar lo que se ha dicho en el párrafo anterior, demostraremos un teorema sobre el tiempo que el proceso W ha pasado en el estado 0.

9.2. Teorema (Tiempo inactivo)

Sean $\rho = 1 - \varphi'(0)/\delta$ *e* $I = \int_0^t 1_{\{W_t=0\}}dt$. *Entonces se cumple que*

$$\mathbb{P}(I \in dx \mid W_0 = w) = (1 - e^{-\phi(0)w})\delta_0(dx) + \delta\phi(0)e^{-\phi(0)\delta(w+x\delta)}dx\,.$$

Previo a realizar la demostración, notemos que en el enunciado anterior ρ toma valores en $(0,\infty)$, siendo $\rho < 1$ en el caso recurrente positivo, $\rho = 1$ en el caso recurrente nulo y $\rho > 1$ en el caso transitorio.

Demostración: Primero probaremos que si $w = 0$, entonces $\overline{X}_\infty = \delta I$ donde entendemos $\overline{X}_\infty \sup_{s\geqslant 0}(X_s \vee 0)$. Luego, considerando lo anterior, veremos que en el caso general $I \overset{=}{d} 1_{\{\overline{X}_\infty \geqslant w\}}I^*$, donde $I^* = \int_0^\infty 1_{\{W_s^*=0\}}ds$ para un proceso W^* que comience en cero.

Para ello, notemos que si $X_t = \sup_{s\leq t} X_s$ entonces

$$\overline{X}_t = \sup_{s\leq t} X_s = \delta \int_0^t 1_{\{\overline{X}_s = X_s\}} ds .$$

Si ahora consideramos

$$\tilde{X}_t = \int_0^t 1_{\{\overline{X}_t = X_t\}} d\overline{X}_s ,$$

entonces vemos que

$$\tilde{X}_t = \int_0^t 1_{\{\overline{X}_t = X_t\}} dX_s = \delta \int_0^t 1_{\{\overline{X}_s = X_s\}} ds ,$$

donde hemos usado que el soporte de S no se interseca con el conjunto $\{s : \overline{X}_s = X_s\}$.

TODO: Terminar la demostración ■

9.3. Teorema

Sea $f \in C^{1,1}([0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Entonces, suponiendo que X es de variación acotada, se cumple que

$$\begin{aligned} f(t,X_t) = f(0,X_0) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_{s-})ds + \delta \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(s,X_{s-})ds \\ &+ \int_{(0,t)} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (f(s,X_{s-}+x) - f(s,X_{s-}))N(ds,dx) , \end{aligned}$$

donde N es la medida de Poisson de X que tiene intensidad $ds\,\Pi(dy)$.

Hay una versión general de la fórmula de cambio de variable para procesos de Lévy que asemeja a la fórmula de Itô para el movimiento browniano.

9.4. Teorema

Sean $f \in C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ y X un proceso de Lévy general. Entonces

$$\begin{aligned} f(t,X_t) = f(0,X_0) &+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_{s-})ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(s,X_{s-})dX_s \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(s,X_{s-})ds \\ &+ \int_{(0,t]} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (f(s,X_{s-}+x) - f(s,X_{s-}) - (1\wedge x)\frac{\partial f}{\partial y}(s,X_{s-}))N(ds,dx) . \end{aligned}$$

Ahora procederemos a demostrar el teorema 9.3.

Demostración del teorema 9.3: Se puede comprobar que

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\lambda X_t} &= \delta\lambda \int_0^t e^{-\lambda X_s} ds + \sum_{s\leq t} (e^{-\lambda X_{s-}} - e^{-\lambda X_s}) \\ &= \delta\lambda \int_0^t e^{-\lambda X_s} ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{-\lambda X_{s-}} - e^{-\lambda(X_{s-}+y)})N(ds,dy) , \end{aligned}$$

con la última igualdad dándose por ser X un proceso de variación acotada. Tomando $f(s,X_s) = e^{-\lambda X_s}$ obtenemos el resultado deseado. Para extenderlo a funciones generales, que no dependan del tiempo, notemos que el conjunto de funciones en la que se satisface la igualdad deseada forma un álgebra y es cerrada bajo límites crecientes. Entonces, por teorema de clases monótonas, el resultado es cierto para funciones diferenciables en el espacio.

Para obtener el resultado general basta verificar que el resultado es cierto para funciones de la forma $f(s, X_s) = e^{-\beta s - \lambda X_s}$ y aplicar el mismo razonamiento que en el párrafo previo. ■

9.5. Corolario

Sea un X *un proceso de variación acotada tal que* $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$. *Entonces, para una función* $f \in C^{1,1}([0,\infty) \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *se tiene que*

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_{s-}) ds + \delta \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(s, X_s) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (f(s, X_{s-} + y) - f(s, X_{s-})) ds \Pi(dy) + M_t ,$$

con $M = (M_t, t \geq 0)$ *una martingala local dada por*

$$M_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (f(s, X_{s-} + y) - f(s, X_{s-})) \tilde{N}(ds, dy) .$$

Si además $|\partial f / \partial y| \leq K$ *para algún* $K \geq 0$, M *es una martingala.*

TODO: También se cumple que

$$f(\overline{X}_t, X_t) = f(X_0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\overline{X}_s, X_s) d\overline{X}_s + \delta \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(\overline{X}_s, X_s) ds + \int_{(0,t]} \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (f(\overline{X}_{s-}, X_{s-} + y) - f(\overline{X}_{s-}, X_{s-})) N(ds, dy) .$$

Además, es posible cambiar $\overline{X}_{s-}$ por $\overline{X}_s$ pues el supremo no salta cuando X es espectralmente negativo.

9.6. Teorema (Martingala de Kella–Whitt)

Sea X *un proceso espectralmente negativo (de variación acotada). Entonces el proceso* M, *dado por*

$$M_t := -\alpha \overline{X}_t + \psi(\alpha) \int_0^t e^{-\alpha(\overline{X}_s - X_s)} ds + 1 - e^{-\alpha(\overline{X}_t - X_t)}$$

para $t \geq 0$, *es una martingala con media cero.*

Demostración: Tomemos $f(x, y) = e^{-\alpha(x-y)}$. Por el TODO anterior y una fórmula de compensación se obtiene el resultado para tal f. La extensión se sigue como en el teorema 9.3. ■

9.7. Teorema

Sea X *un proceso de Lévy espectralmente negativo (de variación acotada) con exponente de Laplace* ϕ *y sea* e_q *una variable exponencial de parámetro* q *independiente de* X. *Entonces*

$$\mathbb{E}[e^{-\alpha(\overline{X}_{e_q} - X_{e_q})}] = \frac{q}{\phi^{\leftarrow}(q)} \frac{\alpha - \phi^{\leftarrow}(q)}{\phi(\alpha) - q} .$$

Demostración: Sea M la martingala con media cero dada en el teorema 9.6, dee modo que $\mathbb{E}[M_{e_q}] = 0$. Es decir,

$$\mathbb{E}\Big[\phi(\alpha)\int_0^{e_q} e^{-\alpha(\overline{X}_s - X_s)}ds + 1 - e^{-\alpha(\overline{X}_{e_q} - X_{e_q})} - \alpha\overline{X}_{e_q}\Big] = 0\,.$$

Ahora, Observamos que $\overline{X}_{e_q}$ tiene distribución exponencial de parámetro $\phi^{\leftarrow}(q)$. En efecto, para $x \geqslant 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\overline{X}_{e_q} > x) &= \int_{(0,\infty)} dsqe^{-qs}\mathbb{P}(\overline{X}_s > x) = \int_{(0,\infty)} dsqe^{-qs}\mathbb{P}(\tau_x^+ < s)\\
&= \int_{(0,\infty)} dsqe^{-qs}\int_{(0,s)}\mathbb{P}(\tau_x^+ \in dy) = \int_{(0,\infty)}\mathbb{P}(\tau_x^+ \in dy)e^{-qy}\\
&= e^{-x\phi^{\leftarrow}(q)}\,,
\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se ha usado $\{\overline{X}_s > x\} = \{\tau_x^+ < s\}$ y en la penúltima el teorema 8.9. Entonces

$$\alpha\mathbb{E}[\overline{X}_{e_q}] = \frac{\alpha}{\phi^{\leftarrow}(q)}\,.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\int_0^{e_q} e^{-\alpha(\overline{X}_s - X_s)}ds\Big] &= \int_0^\infty dtqe^{-qt}\int_0^t \mathbb{E}[e^{-\alpha(\overline{X}_s - X_s)}]ds\\
&= \frac{1}{q}\int_0^\infty dsqe^{-qs}\mathbb{E}[e^{-\alpha(\overline{X}_s - X_s)}]\\
&= \frac{1}{q}\mathbb{E}[e^{-\alpha(\overline{X}_{e_q} - X_{e_q})}]\,.
\end{aligned}$$

De esta manera,

$$0 = \Big(\frac{\phi(\alpha)}{q} - 1\Big)\mathbb{E}[e^{-\alpha(\overline{X}_{e_q} - X_{e_q})}] + 1 - \frac{\alpha}{\phi^{\leftarrow}(q)}\,.$$

Basta despejar el término

$$\mathbb{E}[e^{-\alpha(\overline{X}_{e_q} - X_{e_q})}]$$

en la expresión anterior para concluir. Ciertamente, al despejar se obtiene que

$$\mathbb{E}[e^{-\alpha(\overline{X}_{e_q} - X_{e_q})}] = \frac{q}{\phi(\alpha) - q}\,\frac{\alpha - \phi^{\leftarrow}(q)}{\phi^{\leftarrow}(q)}\,.$$

■

9.8. Corolario

Para toda $\alpha > 0$ se cumple:

$$\mathbb{E}[e^{\alpha \underline{X}_\infty}] = \mathbb{E}[e^{-\alpha(\overline{X}_\infty - X_\infty)}] = 0 \vee \phi'(0+)\frac{\alpha}{\phi(\alpha)}\,.$$

Demostración: Supongamos que $\phi(0) = 0$. Entonces, si $\phi'(0+) \geqslant 0$ se cumple que

$$\phi'(0+) = \lim_{q\to 0}\frac{\phi(q)}{q} = \lim_{q\to 0}\frac{q}{\phi^{\leftarrow}(q)}\,.$$

En caso que $\phi'(0) < 0$, $q/\phi^{\leftarrow}(q) \to 0$ conforme $q \to 0$. Por consiguiente,

$$\lim_{q\to 0} \frac{q}{\phi^{\leftarrow}(q)} = 0 \vee \phi'(0+).$$

Ahora bien, notemos que si $\phi'(0+) \geqslant 0$, entonces

$$\frac{\alpha - \phi^{\leftarrow}(q)}{\phi(\alpha) - q} \xrightarrow[q\to 0]{} \frac{\alpha}{\phi(\alpha)}.$$

En el otro caso, cuando $\phi'(0+) < 0$ se tiene que $(\alpha-\phi^{\leftarrow}(q))/\phi(\alpha) \to (\alpha-\phi^{\leftarrow}(q))/\phi(\alpha)$. Con ello se deduce la segunda igualdad.

Para demostrar la primera igualdad notemos que

$$\overline{X}_t - X_t = \sup_{u\leqslant t}(X_{(t-u)-} - X_t) = -\inf_{u\leqslant t}(X_t - X_{(t-u)-}).$$

Por dualidad de procesos de Lévy se sigue el resultado. ■

9.9. Teorema

Para cada $\alpha \geqslant 0$ *se cumple que*

$$\mathbb{E}[e^{-\alpha\overline{X}_{e_q}}] = \frac{\phi^{\leftarrow}(q)}{\phi^{\leftarrow}(q) + \alpha}.$$

Demostración: La demostración se hizo como parte de la prueba del teorema 9.7. ■

9.10. Teorema

Si $\phi'(0+) > 0$, *de modo que* $X_t \to 0$ *casi seguramente conforme* $t \to \infty$, *entonces para toda* $w \geqslant 0$, *la carga de trabajo tiene una distribución estacionaria. En efecto,*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(W_t \in dy \mid W_0 = w) = (1-\rho)\sum_{k\geqslant 0} \rho^k \eta^{*k}(dy),$$

con

$$\eta(dy) = \frac{1}{\delta\rho}\Pi(y,\infty)(dy) \quad y \quad \rho = \frac{\delta - \phi'(0)}{\delta} \in (0,1).$$

Demostración: Recordemos que $W_t = w\vee\overline{X}_t - X_t$ para $t \geqslant 0$, donde $W_0 = w$. Entonces

$$\mathbb{E}_w[e^{-\alpha W_t}] = \mathbb{E}_w[e^{-\alpha W_t}1_{\{t<T_0\}}] + \mathbb{E}_w[e^{-\alpha W_t}1_{\{t\geqslant T_0\}}],$$

donde $T_0 = \inf\{t : W_t = 0\}$. Al hacer tender $t \to \infty$ notamos que únicamente el primer término es importante. No obstante, al aplicar la propiedad de Markov,

$$\mathbb{E}_w[e^{-\alpha W_t}1_{\{t\geqslant T_0\}}] = \mathbb{E}_w[1_{\{t\geqslant T_0\}}\mathbb{E}_0[e^{-\alpha\tilde{W}_{t-T_0}}]],$$

por lo que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_w[e^{-\alpha W_t}] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_0[e^{-\alpha W_t}].$$

Basta notar que

$$\mathbb{E}_0[e^{-\alpha W_t}] = \mathbb{E}[e^{-\alpha(\overline{X}_t - X_t)}],$$

de donde deducimos que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_w[e^{-\alpha W_t}] = \lim_{q\to 0} \mathbb{E}[e^{-\alpha(\overline{X}_{e_q}-X_{e_q})}] = \phi'(0)\frac{\alpha}{\phi(\alpha)}\,.$$

Como

$$\frac{\phi(\alpha)}{\alpha} = \delta - \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty (1-e^{-\alpha x})\Pi(dx) = \delta\Big(1-\frac{1}{\delta}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\Pi(x,\infty)dx\Big)$$

y $\phi'(0+)/\delta = 1-\rho$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_w[e^{-\alpha W_t}] &= \frac{\phi'(0+)/\delta}{1-\int_0^\infty e^{-\alpha x}\Pi(x,\infty)dx/\delta}\\ &= \frac{1-\rho}{1-\rho\int_0^\infty e^{-\alpha x}\eta(dx)}\\ &= \sum_{k\geqslant 0}(1-\rho)\rho^k\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha x}\eta(dx)\Big)^k\,.\end{aligned}$$

Puesto que η es una medida de probabilidad, se sigue que

$$\Big(\int_0^\infty e^{-\alpha x}\eta(dx)\Big)^k = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\eta^{*k}(dx)\,,$$

y en consecuencia

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}_w[e^{-\alpha W_t}] = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\tilde{\eta}(dx)\,,$$

donde $\tilde{\eta} = \sum_{k\geqslant 0}(1-\rho)\rho^k\eta^{*k}$. Esto concluye la demostración. ∎

En contraste con el resultado recientemente demostrado, en el caso $\phi'(0+) < 0$ sabemos que $X_t \to -\infty$ casi seguramente conforme $t\to\infty$. En consecuencia

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(W_t > M \mid W_0 = w) &= \mathbb{P}(w \vee \overline{X}_t - X_t > M \mid X_0 = 0)\\ &\geqslant \mathbb{P}(\overline{X}_t - X_t > M \mid X_0 = 0) \xrightarrow[t\to\infty]{} 1\,.\end{aligned}$$

De esta manera W_t converge a ∞ en probabilidad conforme $t\to\infty$. Finalmente, si $\phi'(0+) = 0$ sabemos que

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[e^{-\lambda(\overline{X}_t - X_t)}] = 0\,,$$

con lo que deducimos que W_t converge, en distribución, a ∞.

10 Factorización de Wiener–Hopf

La idea de este capítulo es entender las fluctuaciones de un proceso de Lévy con valores en $\mathbb{R}$. En particular, estamos interesados en entender la ley del supremo $\overline{X}_t = \sup_{s\leq t} X_s \vee 0$ y del ínfimo $\underline{X}_t = \inf_{s\leq t} X_s \wedge 0$ en un tiempo exponencial e_q de parámetro q independiente de X. Notemos que $\hat{X} = -X$, el *dual* de X, también es un proceso de Lévy y el supremo de $\hat{X}$ es el negativo del ínfimo de X, de modo que nos enfocaremos en estudiar el supremo salvo que se estudie la ley conjunta de S e I.

Antes de enfocarnos en el objeto de estudio hablaremos de las excursiones. Para ello definiremos los tiempos

$$g_u = \sup\{s \leq u : \overline{X}_s - X_s = 0\} \quad \text{y} \quad d_u = \inf\{s > u : \overline{X}_s - X_s = 0\}.$$

Estas variables representan el ínfimo y supremo, respectivamente, de la excursión fuera del supremo del proceso X al tiempo s. Dado lo anterior, las variables aleatorias g_{e_q} y d_{e_q} resultan ser de suma importancia. En efecto, estaremos interesados en las variables aleatorias

$$\overline{X}_{g_{e_q}} \quad \text{y} \quad \overline{X}_{e_q} - X_{e_q}.$$

La factorización de Wiener–Hopf asegura que

$$(g_{e_q}, X_{g_{e_q}}) = (g_{e_q}, \overline{X}_{e_q}) \quad \text{y} \quad (e_q - g_{e_q}, \overline{X}_{e_q} - X_{e_q})$$

son independientes. Por ende (e_q, X_{e_q}) se puede escribir como suma de variables aleatorias independientes. Ciertamente, se tiene que

$$(e_q, X_{e_q}) = (g_{e_q}, \overline{X}_{e_q}) + (e_q - g_{e_q}, X_{e_q} - \overline{X}_{e_q}).$$

En adición por el Lema de dualidad, ver página 45 de Bertoin (1996), es posible verificar que $(e_q - g_{e_q}, \overline{X}_{e_q} - X_{e_q})$ y $(\hat{g}_{e_q}, -\underline{X}_{e_q})$ tienen la misma ley.

10.1. Teorema

Sean X un proceso de Lévy con valores en $\mathbb{R}$ y e_q una variable aleatoria exponencial de parámetro q independiente de X. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

(i) *Los vectores aleatorios $(g_{e_q}, \overline{X}_{e_q})$ y $(e_q - g_{e_q}, \overline{X}_{e_q} - X_{e_q})$ son independientes e infinitamente divisibles. En adición se tiene la factorización*

$$\frac{q}{q - i\lambda + \psi(\theta)} = \psi_q^+(\lambda,\theta)\psi_q^-(\lambda,\theta),$$

donde

$$\psi_q^+(\lambda,\theta) = \mathbb{E}[e^{i\lambda g_{e_q} + i\theta \overline{X}_{e_q}}] \quad y \quad \psi_q^-(\lambda,\theta) = \mathbb{E}[e^{i\lambda(e_q - g_{e_q}) - i\theta(\overline{X}_{e_q} - X_{e_q})}].$$

A ψ_q^+ y ψ_q^- se les conoce como los factores de Wiener–Hopf.

(ii) *Los factores de Wiener–Hopf también se pueden identificar mediante la transformada de Laplace mediante*

$$\mathbb{E}[e^{-\alpha g_{e_q}-\beta \overline{X}_{e_q}}] = \frac{\kappa(q,0)}{\kappa(q+\alpha,\beta)} \quad y \quad \mathbb{E}[e^{-\alpha(e_q-g_{e_q})-\beta(\overline{X}_{e_q}-X_{e_q})}] = \frac{\hat{\kappa}(q,0)}{\hat{\kappa}(q+\alpha,\beta)}.$$

(iii) *Los exponentes de Laplace se pueden determinar de la ley de* X *considerando:*

$$\kappa(\alpha,\beta) = c_+ \exp\Big\{\int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-\alpha t-\beta x})\mathbb{P}(X_t \in dx)1_{\{x>0\}}\frac{dt}{t}\Big\}$$

y

$$\hat{\kappa}(\alpha,\beta) = c_- \exp\Big\{\int_0^\infty \int_0^\infty (e^{-t} - e^{-\alpha t+\beta x})\mathbb{P}(X_t \in dx)1_{\{x<0\}}\frac{dt}{t}\Big\},$$

donde $\alpha,\beta \geqslant 0$ *y* c_+, c_- *son constantes.*

(iv) *El mapeo* $(\alpha,\beta) \mapsto \kappa(\alpha,\beta)$ *es el exponente de Laplace de un subordinador bivariado conocido como el proceso de escalera (ascendente). De manera similar,* $(\alpha,\beta) \mapsto \hat{\kappa}(\alpha,\beta)$ *es el exponente de Laplace de un subordinador bivariado conocido como el proceso de escalera (descendente).*

(v) *Se tiene que* $q = \kappa(q,0)\hat{\kappa}(q,0)$ *para toda* $q \geqslant 0$*, siendo esta la factorización de Wiener–Hopf temporal. Adicionalmente* $c_+c_-\psi(\theta) = \kappa(0,-i\theta)\hat{\kappa}(0,i\theta)$ *para toda* $\theta \in \mathbb{R}$*, siendo esta la factorización del exponente característico de* X.

Una vez enunciado el resultado principal del capítulo, abordaremos algunas cuestiones de excursiones para poder demostrarlo. Para ello también requeriremos de la noción de tiempo local.

10.2. Definición (Tiempo local continuo)

Un proceso $L = (L_t, t \geqslant 0)$ continuo, no decreciente, con valores en $[0,\infty)$ y adaptado a $(\mathcal{F}_t, t \geqslant 0)$ es el tiempo local en el supremo si

(i) El soporte de la medida dL_s está en $\{t > 0 : \overline{X}_t - X_t = 0\}$;

(ii) para todo tiempo de paro T tal que $\overline{X}_T - X_T = 0$ en $\{T < \infty\}$, el proceso

$$L \circ \theta_T := (L_{T+s} - L_T, s \geqslant 0)$$

es independiente de $\mathcal{F}_T$ y tiene la misma distribución que L.

10.1. *Ejemplo*

Sea X un proceso de Lévy espectralmente negativo con variación acotada con $X_0 = 0$. Sabemos que formalmente $\overline{X}_t = \delta \int_0^t 1_{\{\overline{X}_s - X_s = 0\}} ds$, de modo que $\overline{X}$ es un tiempo local para X en el supremo.

10.3. *Observación*

Si L es un tiempo local continuo de X en el supremo, entonces también lo es kL para cualquier $k > 0$.

10.4. *Observación*

Para un tiempo de paro T tal que $\mathrm{X_T} = \overline{\mathrm{X}}_\mathrm{T}$ se cumple que los procesos

$$\big((\mathrm{X}_{\mathrm{T}+s} - \mathrm{X_T}, \overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{T}+s} - \overline{\mathrm{X}}_\mathrm{T}, \mathrm{L}_{\mathrm{T}+s} - \mathrm{L_T}), t \geqslant 0\big) \quad \text{y} \quad \big((\mathrm{X}_s, \overline{\mathrm{X}}_s, \mathrm{L}_s), s \geqslant 0\big)$$

tienen la misma distribución bajo $\mathbb{P}_0$.

10.2. *Ejemplo*

En el caso de variación acotada se cumple que $\mathrm{L}_t = k \int_0^t 1_{\{\overline{\mathrm{X}}_s - \mathrm{X}_s = 0\}} ds$ para $t \geqslant 0$. Por otra parte, en el caso donde X es espectralmente negativo, entonces $\mathrm{L}_t = \mathrm{S}_t$ para $t \geqslant 0$.

10.5. Definición

Dado un proceso de Lévy X, dícese que un punto $x \in \mathbb{R}$ es *regular para un conjunto* B, abierto o cerrado, si $\mathbb{P}_x(\tau_\mathrm{B} = 0) = 1$, donde $\tau_\mathrm{B} = \text{ínf}\{t > 0 : \mathrm{X}_t \in \mathrm{B}\}$. En adición, dícese que x es irregular para B si $\mathbb{P}_x(\tau_\mathrm{B} = 0) < 1$.

En este último caso, la ley 0–1 de Blumenthal implica que $\mathbb{P}_x(\tau_\mathrm{B} = 0)$ si x es irregular para B.

10.6. Teorema (Rogozin, Shtatland, Bertoin)

Para un proceso de Lévy X*, el punto* 0 *es regular para* $(0,\infty)$ *si y solo si*

$$\int_0^1 \frac{dt}{t} \mathbb{P}(\mathrm{X}_t > 0) = \infty \,.$$

Esto último sucede si y solo si alguna de las siguientes condiciones se cumple:

(i) X *es de variación no acotada.*
(ii) X *es un proceso de variación acotada con deriva* $\delta > 0$.
(iii) X *es un proceso de variación acotada con deriva* $\delta = 0$ *y su medida de Lévy satisface*

$$\int_{(0,1)} \frac{x\Pi(dx)}{\int_0^x \Pi(-\infty, -y)dx} = \infty \,.$$

10.7. Teorema

Si X *es un proceso de Lévy tal que* 0 *es regular en* $(0,\infty)$*, entonces existe un tiempo local continuo en el supremo. En constraste, si* 0 *es irregular para* $(0,\infty)$*, entonces el proceso* $\mathrm{L} = (\mathrm{L}_t, t \geqslant 0)$ *definido por* $\mathrm{L}_t = \sum_{i=1}^{n_t} \mathrm{e}_i$*, con* $(\mathrm{e}_i, i \geqslant 0)$ *son variables aleatorias independientes con distribución común exponencial de parámetro* 1 *y* n_t *es el número de visitas de* $\overline{\mathrm{X}} - \mathrm{X}$ *a* 0 *en* $(0,t]$*, cumple con todas las propiedades de tiempo local salvo la continuidad. Por último, si* X *es tal que* 0 *es reulgar para* 0 *en* $(0,\infty)$*, entonces existe* $h : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *tal que*

$$\mathrm{L}_t = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{h(\varepsilon)} \int_0^t 1_{\{\overline{\mathrm{X}}_s - \mathrm{X}_s < \varepsilon\}} ds$$

con el límite siendo en el sentido L^2 *uniformemente en compactos.*

Cuando X es tal que 0 es irregular para $(0,\infty)$ se dice que X es *irregular hacia arriba*. Ahora, notemos que en este caso la primera visita a $(0,\infty)$ toma un tiempo estrictamente positivo casi seguramente.

10.8. Teorema

Sea X *un proceso de Lévy regular hacia arriba y consideremos una versión continua de su tiempo local en el supremo* L. *Entonces existe $a \geqslant 0$ tal que*

$$a\mathrm{L}_t = \int_0^t 1_{\{\overline{\mathrm{X}}_s - \mathrm{X}_s = 0\}} ds\,.$$

En particular $a > 0$ si y sólo si X *es de variación acotada y* 0 *es de irregular para* $(-\infty, 0)$.

Demostración: Se tiene que $\int_0^t 1_{\{\overline{\mathrm{X}}_s - \mathrm{X}_s = 0\}} ds > 0$ con probabilidad positiva para alguna $t > 0$ si y solo si $\mathbb{E}[\int_0^\infty 1_{\{\overline{\mathrm{X}}_s - \mathrm{X}_s = 0\}} ds] > 0$. Por el teorema de Tonelli y la propiedad de reversibilidad,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\int_0^\infty 1_{\{\overline{\mathrm{X}}_s - \mathrm{X}_s = 0\}} ds\Big] &= \int_0^\infty \mathbb{P}(\overline{\mathrm{X}}_s - \mathrm{X}_s = 0) ds \\
&= \int_0^\infty \mathbb{P}(\underline{\mathrm{X}}_s = 0) ds \\
&= \mathbb{E}\Big[\int_0^\infty 1_{\{\underline{\mathrm{X}}_s = 0\}} ds\Big].
\end{aligned}$$

De lo anterior se sigue que $a > 0$ precisamente cuando $\mathbb{E}[\int_0^\infty 1_{\{\underline{\mathrm{X}}_s = 0\}} ds] > 0$, lo cual es equivalente a $\mathbb{E}[\tau_{(-\infty,0)}] > 0$. El resultado se obtiene al notar que lo último es exactamente que 0 sea irregular para $(-\infty, 0)$. ■

Debido a que el tiempo local es no decreciente, es posible definir su inversa generalizada

$$\mathrm{L}_t^{-1} = \inf\{s > 0 : \mathrm{L}_s > t\} \quad \text{y} \quad \mathrm{L}_{t-}^{-1} = \inf\{s > 0 : \mathrm{L}_s \geqslant t\}\,,$$

la cual será de interés para nosotros.

10.9. Definición (Proceso de escalera ascendente)

Definimos al proceso $(\mathrm{L}^{-1}, \mathrm{H}) = ((\mathrm{L}_t, \mathrm{H}_t), t \geqslant 0)$ mediante la relación

$$(\mathrm{L}_t^{-1}, \mathrm{H}_t) = (\mathrm{L}_t^{-1}, \mathrm{X}_{\mathrm{L}_t^{-1}}) \text{ siempre que } \mathrm{L}_t^{-1} < \infty\,.$$

En caso que $\mathrm{L}_t^{-1} = \infty$ se toma $(\mathrm{L}_t^{-1}, \mathrm{H}_t) = (\infty, \infty)$.

En adición a lo anterior definimos L_∞ como el tiempo local total que el proceso ha estado en el supremo. Se puede ver que $\mathrm{L}_\infty < \infty$ casi seguramente si, sólo si, X diverge a $-\infty$ con probabilidad uno.

Para la demostración del siguiente teorema hará falta ver que L_t^{-1} es un tiempo de paro para la filtración de X, la cual consideramos satisface las *condiciones usuales*. En pos de verificarlo notemos que $\{\mathrm{L}_t^{-1} > s\} = \{\mathrm{L}_{s-} < t\}$ y este último conjunto es elemento de $\mathcal{F}_s$ pues L es adaptado. Además se puede verificar que L_{t-}^{-1} es también tiempo de paro pues en este caso

$$\{\mathrm{L}_{t-}^{-1} < s\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\mathrm{L}_{t-1/n}^{-1} < s\} \in \mathcal{F}_s\,.$$

Por último, nótese que en el caso que L sea continuo, la primera observación de la página 8 en Revuz y Yor (1999) implica que $\mathrm{L}_{\mathrm{L}_t^{-1}} = t$, que usaremos en la siguiente demostración.

10.10. Teorema

El proceso de escalera ascendente (L^{-1}, H) *es un subordinador con valores en* $\mathbb{R}^2 \cup \{(\infty, \infty)\}$ *en el sentido de que ambas coordenadas son no decrecientes. Además,*

$$\mathbb{E}\Big[\exp\{-\alpha L_t^{-1} - \beta H_t\} 1_{\{t<L_\infty\}}\Big] = \exp\{-t\kappa(\alpha,\beta)\},$$

con $\kappa : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ *el exponente de Laplace del proceso de escalera ascendente dada por*

$$\kappa(\alpha,\beta) = \kappa(0,0) + \langle d, (\alpha,\beta)\rangle + \iint_{\mathbb{R}_+^2} (1 - e^{-\alpha x_1 - \beta x_2}) \Pi_{L^{-1},H}(dx_1, dx_2).$$

Demostración: Sean $s, t \geqslant 0$ tales que $t + s < L_\infty$. Primero notemos que

$$\begin{aligned} L_{t+s}^{-1} &= \text{ínf}\{u > L_t^{-1} : L_u > t + s\} \\ &= L_t^{-1} + \text{ínf}\{v > 0 : L_{v+L_t^{-1}} > t + s\} \\ &= L_t^{-1} + \text{ínf}\{v > 0 : L_{v+L_t^{-1}} - L_{L_t^{-1}} > s\}, \end{aligned}$$

de modo que $(L_{s+L_t^{-1}} - L_t^{-1}, s \geqslant 0)$ tiene la misma ley que L^{-1} y es independiente de $\mathcal{F}_{L_t^{-1}}$. Ahora, recordamos que en $\{T < \infty\}$, $\big((X_{T+s} - X_T, \overline{X}_{T+s} - \overline{X}_T, L_{T+s} - L_T), s \geqslant 0\big)$ es una copia de $\big((X_s, \overline{X}_s, L_s), s \geqslant 0\big)$ siempre que T sea un tiempo de paro para el cual $\overline{X}_T - X_T = 0$. De lo anterior y que

$$X_{L_{t+s}^{-1}} = X_{L_{t+s}^{-1}} - X_{L_t^{-1}} + X_{L_{t+s}^{-1}} = (X_{L_t^{-1} + \text{ínf}\{v>0: L_{v+L_t^{-1}} - L_{L_t^{-1}} > s\}} - X_{L_t^{-1}}) + X_{L_t^{-1}},$$

se deduce que

$$\big((L_{t+s}^{-1} - L_t^{-1}, X_{L_{t+s}^{-1}} - X_{L_t}^{-1}), s \geqslant 0\big) \quad \text{y} \quad \big((L_s^{-1}, X_{L_s^{-1}}), s \geqslant 0\big)$$

tienen la misma distribución y además el primer proceso es independiente de $\mathcal{F}_{L_t^{-1}}$.

Prosiguiendo, sea $\mathcal{G}_{L_t^{-1}}$ un funcional medible y acotado de X hasta el tiempo L_t^{-1}. Puesto que $\{t + s < L_\infty\} = \{t < L_\infty\} \cap \{s < L_\infty - L_{L_t^{-1}}\}$ tenemos la segunda igualdad en

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\mathcal{G}_{L_t^{-1}} e^{-\alpha(L_{t+s}^{-1} - L_t^{-1}) - \beta(H_{t+s} - H_t)} 1_{\{t+s<L_\infty\}}] \\ &\quad = \mathbb{E}[\mathcal{G}_{L_t^{-1}} 1_{\{t<L_\infty\}} \mathbb{E}[e^{-\alpha(L_{t+s}^{-1} - L_t^{-1}) - \beta(H_{t+s} - H_t)} 1_{\{s<L_\infty - L_{L_t^{-1}}\}} \mid \mathcal{F}_{L_t^{-1}}]] \\ &\quad = \mathbb{E}[\mathcal{G}_{L_t^{-1}} 1_{\{t<L_\infty\}}] \mathbb{E}[e^{-\alpha L_s^{-1} - \beta H_s} 1_{\{s<L_\infty\}}], \end{aligned}$$

mientras que en la segunda igualdad se usó lo derivado en el párrafo previo. En particular, si $\mathcal{G}_{L_t^{-1}} = \exp\{-\alpha L_t^{-1} - \beta H_t\}$, obtenemos la factorización exponencial deseada.

Finalmente notemos que

$$\mathbb{P}(t + s < L_\infty) = \mathbb{P}(t < L_\infty)\mathbb{P}(s < L_\infty),$$

de modo que L_∞ es una variable aleatoria exponencial con parámetro $\kappa(0,0)$. ■

En la prueba que se acaba de presentar se consideró que el tiempo local es continuo. El resultado también es cierto cuando 0 es irregular hacia arriba, lo cual puedo consultarse en el libro de Kyprianou (2014).

Ahora consideremos el tiempo local L continuo. Debido a que existe una constate $a \geqslant 0$ tal que $a\mathrm{L}_t^{-1} = \int_0^t 1_{\{\overline{\mathrm{X}}_s - \mathrm{X}_s = 0\}} ds$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}_t^{-1} &= \int_0^{\mathrm{L}_t^{-1}} 1_{\{\overline{\mathrm{X}}_s = \mathrm{X}_s\}} ds + \int_0^{\mathrm{L}_t^{-1}} 1_{\{\overline{\mathrm{X}}_s \neq \mathrm{X}_s\}} ds = a\mathrm{L}_{\mathrm{L}_t^{-1}} + \sum_{s \leqslant t} (\mathrm{L}_s^{-1} - \mathrm{L}_{s-}^{-1}) \\
&= at + \sum_{s \leqslant t} (\mathrm{L}_s^{-1} - \mathrm{L}_{s-}^{-1}),
\end{aligned}$$

de modo que a es la deriva de L_t^{-1}.

Consideremos L el tiempo local en el supremo, L^{-1} el tiempo local inverso y definamos el proceso de excursiones,

$$\epsilon_t = \begin{cases} \overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{L}_{t-}^{-1}+u} - \mathrm{X}_{\mathrm{L}_{t-}^{-1}+u} & \text{para } u \in (0, \mathrm{L}_t^{-1} - \mathrm{L}_{t-}^{-1}] \text{ si } \mathrm{L}_t^{-1} - \mathrm{L}_{t-}^{-1} > 0, \\ \infty & \text{si } \mathrm{L}_t^{-1} - \mathrm{L}_{t-}^{-1} = 0, \end{cases}$$

donde ϵ_t es una trayectoria càdlàg con valores en $\mathbb{R}$ si $\mathrm{L}_t^{-1} - \mathrm{L}_{t-}^{-1} > 0$ y es un elemento arbitrario en otro caso.

Entonces, acorde a un Teorema de Itô (1972), $((t, \epsilon_t), t > 0)$ es un Proceso puntual de Poisson en $(0, \infty) \times \mathrm{D}((0, \infty), \mathbb{R})$, donde $\mathrm{D}((0, \infty), \mathbb{R})$ es el espacio de trayectorias càdlàg $(f(u), u \geqslant 0)$ convalores en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, tales que si $\zeta = \inf\{s > 0 : f(s) < 0\}$, entonces $(f(r), r \in (0, \zeta])$ es càdlàg y $f(u) = \infty$ para $u > \zeta$. La medida de intensidad de este proceso es $dt\mathsf{N}(d\omega)$, donde $\mathsf{N}(d\omega)$ es una medida en $\mathrm{D}((0, \infty), \mathbb{R})$ bajo la cual la trayectoria del proceso tiene la propiedad de Markov con semigrupo $(\hat{\mathrm{P}}_t^0, t \geqslant 0)$. En este caso $\hat{\mathrm{P}}$ es la medida de probabilidad asociada al proceso dual $\hat{\mathrm{X}} = -\mathrm{X}$ de un proceso de Lévy X y $\hat{\mathrm{P}}_t^0$ es la ley del proceso condicionado a ser positivo, es decir

$$\hat{\mathrm{P}}_t^0 f(x) = \hat{\mathbb{E}}_x[f(\mathrm{X}_t); t < \tau_0^-].$$

Con lo anterior, es posible verificar que para cualesquiera $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty$ se tiene que

$$\begin{aligned}
&\mathsf{N}(\epsilon_{t_1} \in dy_1, \epsilon_{t_2} \in dy_2, \dots, \epsilon_{t_n} \in dy_n) \\
&\quad = \mathrm{J}_{t_1}(dy_1)\hat{\mathrm{P}}^0_{t_2-t_1}(y_1, dy_2) \cdots \hat{\mathrm{P}}^0_{t_n-t_{n-1}}(y_{n-1}, dy_n) 1_{\{y_1>0,\dots,y_n>0\}}.
\end{aligned}$$

La familia $(\mathrm{J}_t, t \geqslant 0)$ es una *ley de entrada* para $(\hat{\mathrm{P}}_t^0, t \geqslant 0)$; es decir, que para cualquier elección de $s \geqslant 0$, $t > 0$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ medible,

$$\int_0^\infty \mathrm{J}_{t+s}(dy) f(y) = \int_0^\infty \mathrm{J}_t(dz_1) \int \hat{\mathrm{P}}_s^0(z_1, dz_2) f(z_2).$$

10.11. Lema (Chaumont & Doney)

Dada cualquier función medible $f \in \mathrm{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^\infty \hat{\mathrm{P}}_t^0(x, dy) f(y)}{\int_0^\infty \hat{\mathrm{P}}_t^0(x, dy) 1} = \frac{\int_0^\infty \mathrm{J}_t(dy) f(y)}{\int_0^\infty \mathrm{J}_t(dy) 1}.$$

Además existe $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\hat{\mathrm{P}}_t^0 f(x)}{h(x)} = \int_0^\infty \mathrm{J}_t(dy) f(y),$$

y es sabido que h es excesiva para $(\hat{\mathrm{P}}_t^0, t \geqslant 0)$, lo que quiere decir que $\hat{\mathrm{P}}_t^0 h \leqslant h$.

10.12. Lema

Si 0 *es regular para* $(0,\infty)$ *entonces* $J_t(1) \to \infty$ *conforme* $t \to 0^+$ *y en adición* $J_t 1 = \mathsf{N}(t < \zeta)$. *En caso que* 0 *sea irregular para arriba, entonces* N *coincide con la ley del proceso dual comenzado en* 0 *y matado al llegar a* 0.

El lema anterior implica que $\mathsf{N}(D) = \infty$.

Recordemos que en la factorización de Wiener–Hopf afirmamos que si e_q tiene distribución exponencial de parámetro $q > 0$, independiente de X, entonces

$$(g_{e_q}, \overline{X}_{e_q}) \quad \text{y} \quad (e_q - g_{e_q}, \overline{X}_{e_q} - X_{e_q})$$

son independientes. Probaremos esto pronto. Antes escribiremos un lema auxiliar.

10.13. Lema

Para toda $t \geqslant 0$ *se tienen las relaciones*

$$g_t = \sup\{s \leqslant t : \overline{X}_s - X_s\} = L^{-1}_{L_t -} \quad y \quad d_t = \inf\{s > t : \overline{X}_s - X_s\} = L^{-1}_{L_t}.$$

10.14. Proposición

Sea $\kappa(\cdot,\cdot)$ *el exponente de Laplace el proceso de escalera ascendente* (L^{-1}, H). *Entonces, para cada* $q > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\exp\{-\lambda \overline{X}_{e_q} - \beta(\overline{X}_{e_q} - X_{e_q})\}\big] &= \frac{\kappa^+(q,0)}{\kappa(q,\lambda)} \, \frac{qa + \mathsf{N}(\int_0^\infty ds q e^{-qs} e^{-\beta\epsilon(s)})}{\kappa(q,0)} \\ &= \mathbb{E}[e^{-\lambda \overline{X}_{e_q}}]\, \mathbb{E}[e^{-\beta(\overline{X}_{e_q} - X_{e_q})}].\end{aligned}$$

Además

$$\mathsf{N}\Big(\int_0^\zeta ds q e^{-qs} e^{-\beta\epsilon(s)}\Big) = \mathsf{N}(e^{-\beta\epsilon_{e_q}}; e_q < \zeta)$$

y

$$aq + \mathsf{N}(e_q < \zeta) = \kappa(q,0).$$

Demostración: Tenemos que

$$\mathbb{E}\big[\exp\{-\lambda \overline{X}_{e_q} - \beta(\overline{X}_{e_q} - X_{e_q})\}\big] = I_1 + I_2,$$

donde definimos

$$I_1 = \int_0^\infty dt q e^{-qt} \mathbb{E}[e^{-\lambda \overline{X}_{e_q} - \beta(\overline{X}_{e_q} - X_{e_q})} 1_{\{\overline{X}_t = X_t\}}],$$

y de forma similar

$$I_2 = \int_0^\infty dt q e^{-qt} \mathbb{E}[e^{-\lambda \overline{X}_{e_q} - \beta(\overline{X}_{e_q} - X_{e_q})} 1_{\{\overline{X}_t \neq X_t\}}].$$

Recordando que $aL_t = \int_0^t 1_{\{\overline{X}_s = X_s\}} ds$, entonces obtenemos la primera igualdad en

$$\begin{aligned}I_1 &= a\mathbb{E}\Big[\int_0^\infty dL_s q e^{-qs} e^{-\lambda \overline{X}_s}\Big] = a\mathbb{E}\Big[\int_0^\infty du q e^{-qL_u^{-1}} e^{-\lambda \overline{X}_{L_u^{-1}}}\Big] \\ &= a\int_0^\infty du\, q \mathbb{E}[e^{-qL_u^{-1} - \lambda H_u}],\end{aligned}$$

mientras que la segunda igualdad se dio por el cambio de variable $u = L_s$ y el tercero por Fubini. Ahora, usando el teorema 10.10 deducimos que

$$I_1 = qa\int_0^\infty du e^{-u\kappa(q,\lambda)} = \frac{qa}{\kappa(q,\lambda)}.$$

Por otra parte, usando las excursiones,

$$\begin{aligned}I_2 &= \mathbb{E}[\sum_{s>0}\int_{L_{s-}^{-1}}^{L_s^{-1}} dt q e^{-qt} e^{-\lambda \overline{X}_t - \beta(\overline{X}_t - X_t)}]\\ &= \mathbb{E}[\sum_{s>0} e^{-qL_{s-}^{-1} - \lambda \overline{X}_{L_{s-}^{-1}}} \int_0^{L_s^{-1}-L_{s-}^{-1}} du q e^{-qu} e^{-\beta(\overline{X}_{L_{s-}^{-1}+u} - X_{L_{s-}^{-1}+u})}].\end{aligned}$$

Así, por la fórmula de compensación para procesos Poisson puntuales,

$$I_2 = \mathbb{E}[\int_0^\infty ds e^{-qL_{s-}^{-1} - \lambda \overline{X}_{L_{s-}^{-1}}} \mathsf{N}(\int_0^\zeta dt q e^{-qt} e^{-\beta\epsilon(t)})],$$

mientras que por tratarse de la integral de Lebesgue, podemos cambiar $e^{-qL_{s-}^{-1} - \lambda \overline{X}_{L_{s-}^{-1}}}$ por $e^{-qL_s^{-1} - \lambda \overline{X}_{L_s^{-1}}}$ y entonces

$$I_2 = q\frac{\mathsf{N}(\int_0^\zeta dt q e^{-qt} e^{-\beta\epsilon(t)})}{\kappa(q,0)}.$$

De esta manera deducimos la primera expresión deseada.

En particular, si tomamos $\lambda = 0$ vemos que

$$\mathbb{E}[e^{-\beta(\overline{X}_{e_q} - X_{e_q})}] = \frac{qa + q\mathsf{N}(\int_0^\zeta dt q e^{-qt} e^{-\beta\epsilon(t)})}{\kappa(q,0)},$$

y con $\beta = 0$ deducimos

$$\mathbb{E}[e^{-\beta\overline{X}_{e_q}}] = \frac{\kappa(q,0)}{\kappa(q,\lambda)},$$

lo cual nos da la independencia establecida en el enunciado. ■

Parte II.

Apéndices y referencias

Divisibilidad infinita y representación de Lévy–Khintchine

A

A.1. Leyes infinitamente divisibles

En esta sección se introduce el concepto de una ley infinitamente divisible, siguiendo las ideas de la sección 7.5 de Ash y Doléans-Dade (2000), donde se trabaja sobre la recta real. Al final de la presente se menciona la *representación de Lévy–Khintchine* en este entorno, aunque la misma se estudia con mayor generalidad en la siguiente sección.

A.1. Definición

Diremos que una medida de probabilidad μ sobre la recta real es *infinitamente divisible* si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una medida de probabilidad μ_n sobre $\mathbb{R}$ tal que $\mu = \mu_n^{*n}$.

Observemos que la definición anterior es equivalente a que la función característica $\hat{\mu}$ asociada a μ tenga raíz n-ésima para toda $n \in \mathbb{N}$. Esto es, que para cada $n \in \mathbb{N}$ exista una función característica φ_n para la cual se tenga $\hat{\mu} = \varphi_n^n$. Esto nos da una parte del siguiente resultado. Al igual que para la medida, se dice que la función característica es infinitamente divisible.

A.2. Teorema

La medida de probabilidad μ es infinitamente divisible precisamente cuando existe una sucesión de funciones características $\{\varphi_n\}$ tales que $\varphi_n^n \to \hat{\mu}$.

Demostración: Por lo mencionado previamente, únicamente debemos demostrar la necesidad de la condición. Supongamos pues que existe una sucesión de funciones características $\{\varphi_n\}$ con la propiedad requerida. Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y definamos las funciones características $\phi_{n,m} := \varphi_{nm}^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Si $\nu_{n,m}$ es una medida de probabilidad cuya función característica sea $\phi_{n,m}$, entonces tenemos que $\nu_{n,m}^{*m} \Rightarrow \mu$ cuando $n \to \infty$ gracias al teorema de continuidad de Lévy. Por el teorema de Prokhorov, $\{\nu_{n,m}^{*m}\}_n$ es tensa, por lo cual, de las desigualdades

$$\nu_{n,m}((z,\infty)) \leqslant \left(\nu_{n,m}^{*m}((mz,\infty))\right)^{1/m} \quad \text{y} \quad \nu_{n,m}((-\infty,-z)) \leqslant \left(\nu_{n,m}^{*m}((-\infty,mz))\right)^{1/m},$$

ambas válidas para $z > 0$, se sigue que $\{\nu_{n,m}\}_n$ es tensa y por ende relativamente compacta. Por lo tanto existe una medida de probabilidad μ_m tal que $\nu_{n,m} \Rightarrow \mu_m$ y en consecuencia $\nu_{n,m}^{*m} \Rightarrow \mu_m^{*m}$. De la unicidad de los límites débiles, $\mu = \mu_m^{*m}$, con lo que concluimos pues $m \in \mathbb{N}$ fue arbitrario. ■

El siguiente teorema nos da algunas propiedades que satisfacen las funciones características infinitamente divisibles. La prueba se omite por ser trivial.

A.3. Teorema

Si μ y ν son leyes infinitamente divisibles con funciones características $\hat{\mu}$ y $\hat{\nu}$ de manera respectiva, entonces $\hat{\mu}\hat{\nu}$, $\overline{\hat{\mu}}$ y $|\hat{\mu}|^2$ son infinitamente divisibles.

El resultado que se enuncia a continuación esencialmente nos dice que las leyes infinitamente divisibles son cerradas bajo la convergencia débil de medidas.

A.4. Teorema

Si $\{\nu_n\}$ es una sucesión de medidas de probabilidad infinitamente divisibles y $\nu_n \Rightarrow \mu$ entonces μ es infinitamente divisible.

Demostración: Para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\nu_{m,n}$ una medida de probabilidad tal que $\nu_n = \nu_{m,n}^{*r}$. De manera similar al teorema A.2 se verifica que existe una medida de probabilidad μ_m tal que $\nu_{m,n}^r \Rightarrow \mu_m$ cuando $n \to \infty$, de donde se deduce inmediatamente el resultado. ■

A.5. Teorema

Si μ es infinitamente divisible entonces $\hat{\mu}(t) \neq 0$ para toda $t \in \mathbb{R}$.

Demostración: Debido a que $|\hat{\mu}|^n$ es también una función característica, podemos suponer que $\hat{\mu}$ es real y no negativa y lo mismo para sus raíces n-ésimas. Consecuentemente $\varphi_n = \hat{\mu}^{1/n} = \exp\{n^{-1}\log\hat{\mu}\}$ converge a 1 si $\hat{\mu}(t) > 0$ y a 0 en otro caso. Como $\hat{\mu}(0) = 1$, $\hat{\mu}(t) > 0$ en una vecindad del cero, por lo que $\varphi_n \to g$ con g continua en 0. Por el teorema de continuidad de Lévy g es otra función característica y por lo tanto continua. Como g únicamente puede tomar los valores 0 y 1, $g = 1$, por lo que vemos que debe ser el caso que $\hat{\mu}(t) \neq 0$ para cada $t \in \mathbb{R}$. ■

A.6. Corolario

Si μ es infinitamente divisible, entonces la medida μ_n para la cual se satisface $\mu = \mu_n^{*n}$, $n \in \mathbb{N}$, es única.

Demostración: Supongamos que μ_n y ν_n son tales que $\mu_n^{*n} = \mu = \nu_n^{*}$. Por lo resultado previamente demostrado, $(\hat{\mu}_n(t)/\hat{\nu}_n(t))^n = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, $\hat{\mu}_n/\hat{\nu}_n$ es un mapeo continuo de $\mathbb{R}$ a $\{\exp\{i2\pi k/n\}\}_k$, por lo que es conexo. Esto implica $\hat{\mu}_n = \hat{\nu}_n$ que a su vez nos da $\mu_n = \nu_n$. ■

Los resultados que se acaban de enunciar y demostrar nos permiten definir de alguna manera la potencia p de una medida de probabilidad infinitamente divisible, objeto de estudio del siguiente corolario.

A.7. Corolario

Si μ es infinitamente divisible, entonces μ^p es definible e infinitamente divisible para cada $p \in [0, \infty)$.

Demostración: Definimos $\mu^0 = \delta_0$. Para cada $q \in \mathbb{N}$ definimos $\mu^{1/q}$ como la raíz q-ésima de μ. Luego, sea $\mu^{p/q} = (\mu^{1/q})^{*p}$ para cualesquiera naturales p y q. Para $p > 0$ irracional sea $\{r_n\}$ una sucesión de racionales que converjan a p. Entonces $\hat{\mu}(t)^{r_n} \to \hat{\mu}(t)^p$ y esta última función es continua. Por el teorema de continuidad de

Lévy, $t \mapsto \widehat{\mu}(t)^p$ es una función característica y su medida asociada, que denotamos μ^p es infinitamente divisible. ■

A.8. Teorema

Una medida de probabilidad μ *es infinitamente divisible si, únicamente si, existe un arreglo triangular* $\{\mu_{n,k} : n \in \mathbb{N};\ 1 \leqslant k \leqslant r(n)\}$ *de leyes Poisson independientes tales que* $*_{k=1}^{r(n)} \mu_{n,k} \Rightarrow \mu$.

Demostración: La necesidad es evidente de que las leyes Poisson son infinitamente divisibles, cerradas bajo convolución y el teorema A.4. Para demostrar la suficiencia supongamos que μ es infinitamente divisible. Por el teorema A.5 $\widehat{\mu}$ tiene un logaritmo continuo, donde escogemos la rama principal, para la cual $\log \widehat{\mu}(0) = 0$. Si φ_n es la raíz n-ésima de $\widehat{\mu}$, entonces

$$\varphi_n^n = \exp\left\{\frac{1}{n}\log\widehat{\mu}\right\}^n,$$

y por consiguiente $\varphi_n = \exp\{n^{-1}\log\widehat{\mu}\}$. Al recordar que $e^z = 1 + z + o(z)$ cuando $z \to 0$, para $t \in \mathbb{R}$ se tendrá que

$$n\big(\varphi_n(t) - 1\big) = n\left(\exp\left\{\frac{1}{n}\log\widehat{\mu}(t)\right\} - 1\right) = n\left(\frac{1}{n}\log\widehat{\mu}(t) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \log\widehat{\mu}(t) + o(1).$$

Por lo tanto, si ν_n es la medida asociada a φ_n,

$$\log\widehat{\mu}(t) = \lim_{n\to\infty}\big(\varphi_n(t) - 1\big) = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}(e^{itx} - 1)\nu_n(dx).$$

Por el teorema de convergencia dominada, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $M_n > 0$ tal que para toda $t \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\left|\int_{\mathbb{R}}(e^{itx} - 1)\nu_n(dx) - \int_{-M_n}^{M_n}(e^{itx} - 1)\nu_n(dx)\right| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Claramente podemos suponer que $M_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Ahora, por continuidad, existe un entero $r(n)$ tal que para toda $t \in (-M_n, M_n)$,

$$\left|\int_{-M_n}^{M_n}(e^{itx} - 1)\nu_n(dx) - \sum_{k=1}^{r(n)}(e^{itx_{n,k}} - 1)\nu_n((x_{n,k-1}, x_{n,k}])\right| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

donde $x_{n,k} = -M_n + 2M_n k/r(n)$, $k = 0, \ldots, r(n)$. Consecuentemente, al definir las constantes $\lambda_{n,k} = n\nu_n((x_{n,k-1}, x_{n,k}])$ y $a_{n,k} = x_{n,k}$, tenemos que $\widehat{\mu}(t)$ es el límite puntual de funciones de la forma

$$t \mapsto \prod_{k=1}^{r(n)}\exp\big\{\lambda_{n,k}\big(e^{ia_{n,k}t} - 1\big)\big\}.$$ ■

Finalizamos la sección mencionando la representación de Lévy–Khintchine. Es sabido que μ es infinitamente divisible si y sólo si existen $\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geqslant 0$ y una medida finita ν en $\mathbb{R}$, con $\nu(\{0\}) = 0$ tales que

$$\widehat{\mu}(t) = \exp\left\{it\beta - \frac{t^2\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,\nu(dx).\right\}$$

En la siguiente sección se estudiará este mismo objeto pero en un entorno más general. Para ello, se dará una representación ligeramente distinta, dado que en la integral aparecerá una función distinta a $(1+x^2)/x^2$, aunque se conectará a la representación dada aquí.

A.2. Representación de Lévy–Khintchine

Al final de la sección anterior se introdujo la representación de Lévy–Khintchine para las leyes infinitamente divisibles sobre la recta real. No es difícil convencerse de que esta noción puede extenderse a $\mathbb{R}^d$ usando las mismas técnicas que antes. En este espacio también se tiene una representación de Lévy–Khintchine para las leyes infinitamente divisibles. El objetivo de esta sección es verificar que esta representación en efecto representa a una ley infinitamente divisible. Seguimos la sección 8 de Sato (2013). Como ya se anunció previamente la representación de Lévy–Khintchine, comenzamos enunciando el resultado principal. En lo que sigue, $\mathrm{D} := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leqslant 1\}$ es la bola unitaria cerrada en $\mathbb{R}^d$.

A.9. Teorema (Representación de Lévy–Khintchine)

Si μ es una medida de probabilidad sobre $\mathbb{R}^d$ infinitamente divisible si y sólo si existen una matriz A simétrica y no-negativa definida, $\gamma \in \mathbb{R}^d$ y una medida ν con

$$\nu(\{0\}) = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^d} 1 \wedge |x|^2 \, \nu(dx) < \infty,$$

tales que para toda $t \in \mathbb{R}^d$,

$$\text{(RLK)} \quad \hat{\mu}(t) = \exp\left\{ i\langle \gamma, t\rangle - \frac{1}{2}\langle t, \mathrm{A}t\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\langle t,x\rangle} - 1 - i\langle t, x\rangle 1_{\mathrm{D}}(x) \right) \nu(dx) \right\}.$$

Esta representación es única.

La demostración de este resultado se hará por partes, primero demostrando la parte de unicidad, luego la necesidad del resultado y finalmente la suficiencia de éste. Antes de las demostraciones haremos algunas observaciones y desarrollaremos maquinaria necesaria para estas.

A.10. Definición

La terna $(\mathrm{A}, \nu, \gamma)$ definida en el teorema A.9 es conocida como la *terna generadora* de μ. A A se le conoce como la *matriz de covarianzas gaussiana* y a ν como la *medida de Lévy de* μ. Cuando $\mathrm{A} = 0$, se dice que μ es *puramente no gaussiana*.

Nótese que para $t \in \mathbb{R}^d$ dada, la función $e^{i\langle t,x\rangle} - 1 - i\langle t, x\rangle 1_{\mathrm{D}}(x)$ es acotada fuera de una vecindad del cero que, conforme $|x| \to 0$,

$$e^{i\langle t,x\rangle} - 1 - i\langle t, x\rangle 1_{\mathrm{D}}(x) = \mathrm{O}(|x|^2),$$

lo cual implica que el lado derecho la la expresión (RLK) está bien definido. Otras maneras de que la expresión que se ve involucrada en la integral sea integrable es considerar una función $c : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ acotada y medible tal que $c(x) = 1 + \mathrm{o}(|x|)$ cuando $|x| \to 0$ y $c(x) = \mathrm{O}(|x|^{-1})$ cuando $|x| \to \infty$. Entonces podemos reescribir (RLK) como

$$\hat{\mu}(t) = \exp\left\{ i\langle \gamma_c, t\rangle - \frac{1}{2}\langle t, \mathrm{A}t\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\langle t,x\rangle} - 1 - i\langle t, x\rangle c(x) \right) \nu(dx) \right\},$$

donde $\gamma_c \in \mathbb{R}^d$ satisface la igualdad

$$\gamma_c = \gamma + \int_{\mathbb{R}^d} x\left(c(x) - 1_{\mathrm{D}}(x) \right) \nu(dx).$$

En particular esto se cumple cuando $c(x) = (1+|x|^2)^{-1}$, lo cual se comienza a parecer a la expresión dada en la sección anterior. Puede verificarse que tal representación se recupera con ν' en lugar de ν, donde

$$\nu'(A) := \int_A \frac{|x|^2}{1+|x|^2}\,\nu(dx),$$

es una medida finita. Algunas otras funciones que suelen usarse son:

$$c(x) = 1_{|x|\leqslant\varepsilon}(x), \qquad \varepsilon > 0,$$
$$c(x) = 1_{\{|x|\leqslant 1\}}(x) + (2-|x|)1_{\{1<|x|\leqslant 2\}}(x),$$

y cuando $d = 1$,

$$c(x) = 1_{[-1,1]}(x) + \frac{1}{x}\big(1_{(1,\infty)}(x) - 1_{(-\infty,-1)}(x)\big),$$
$$c(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Procediendo como antes, vemos que para cada c hay una terna $(A,\nu,\gamma)_c$ que nos da una representación de Lévy–Khintchine asociada.

Antes de demostrar la parte de la unicidad del teorema A.9, se enunciará y demostrará un lema analítico.

A.11. Lema

Para cualquier $t \in \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\theta \in \mathbb{C}$ con $|\theta| \leqslant 1$ tal que

$$e^{it} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} + \theta\frac{|t|^n}{n!}.$$

Demostración: Para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\int_0^t e^{ix}(t-x)^{n-1}dx = \frac{t^n}{n} + \frac{i}{n}\int_0^t e^{ix}(t-x)^n dx,$$

de donde se obtiene la igualdad

$$e^{it} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} + \frac{i^n}{(n-1)!}\int_0^t e^{ix}(t-x)^{n-1}dx.$$

El resultado es ahora claro. ■

Demostración de la unicidad del teorema A.9: Supongamos que $\hat{\mu}$ puede representarse mediante (RLK) con terna (A,ν,γ). Del lema A.11 y la desigualdad de Cauchy–Schwarz tendremos que

$$\left|e^{i\langle t,x\rangle} - 1 - i\langle t,x\rangle 1_D(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}|t|^2|x|^2 1_D(x) + 2 1_{\mathbb{R}^d\setminus D}(x) \tag{A.1}$$

De esta desigualdad y el teorema de convergencia dominada, la parte de la derecha en la ecuación (RLK) es continua en $t \in \mathbb{R}^d$. Por consiguiente, al considerar la rama principal del logaritmo, para $s \in \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}^d$,

$$\log\hat{\mu}(st) = -\frac{1}{2}s^2\langle t, At\rangle + is\langle\gamma,t\rangle + \int_{\mathbb{R}^d}\left(e^{i\langle st,x\rangle} - 1 - i\langle st,x\rangle 1_D(x)\right)\nu(dx).$$

De esta expresión, (A.1) y el teorema de convergencia dominada obtenemos, conforme $s \to \infty$,

$$\frac{\log \widehat{\mu}(st)}{s^2} \to -\frac{1}{2}\langle t, \mathrm{A}t\rangle,$$

de modo que A queda completamente determinada por μ.

Sean ahora $\eta(t) := \log \widehat{\mu}(t) + \langle t, \mathrm{A}t\rangle/2$ y $\mathrm{C} = [-1,1]^d$. Entonces tendremos que

$$\int_{\mathrm{C}} (\eta(t) - \eta(t+u))du = 2^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle}\left(1 - \prod_{k=1}^{d} \frac{\operatorname{sen} x_k}{x_k}\right)\nu(dx), \tag{A.2}$$

donde se entiende que $x_k^{-1} \operatorname{sen} x_k$ es uno cuando $x_k = 0$. En efecto, como se cumplen tanto

$$\eta(t) - \eta(t+u) = -i\langle \gamma, u\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\langle t,x\rangle} - e^{i\langle t+u,x\rangle} + i\langle u, x\rangle 1_{\mathrm{D}}(x)\right)\nu(dx)$$

como

$$\begin{aligned}\left|e^{i\langle t,x\rangle} - e^{i\langle t+u,x\rangle} + i\langle u,x\rangle\right| &\leqslant \left|1 - e^{i\langle u,x\rangle} + iu, x\right| + |\langle u,x\rangle|\left|1 - e^{i\langle t,x\rangle}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}|u|^2|x|^2 + |u||t||x|^2,\end{aligned}$$

el teorema de Fubini implica que

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{C}} (\eta(t) - \eta(t+u))du &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle} \int_{\mathrm{C}} (1 - e^{i\langle u,x\rangle}) du\,\nu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle}\left(2^d - 2^d \prod_{k=1}^{d} \int_0^1 \cos(u_k x_k)du_k\right)\nu(dx),\end{aligned}$$

de donde se obtiene la igualdad deseada. Como $x^{-1} \operatorname{sen} x = 1 - |x|^2/6 + \mathrm{O}(|x|^4)$ cuando $|x| \to 0$, se tiene que

$$\prod_{k=1}^{d} \frac{\operatorname{sen} x_k}{x_k} = 1 - \frac{1}{6}|x|^2 + \mathrm{O}(|x|^4) \quad \text{cuando} \quad |x| \to 0,$$

y en consecuencia la medida ρ definida por medio de

$$\rho(\mathrm{A}) = 2^d \int_{\mathrm{A}} \left(1 - \prod_{k=1}^{d} \frac{\operatorname{sen} x_k}{x_k}\right)\nu(dx)$$

es una medida finita. Notando que la función característica de ρ se da en (A.2), vemos que esta medida queda determinada por η y consecuentemente por μ. No es difícil ver que esto implica que ν también queda determinada por μ gracias a la condición $\nu(\{0\}) = 0$. Para concluir resta notar que γ queda determinada por μ, A y ν a través de (RLK), es decir por μ. ■

Demostración de la necesidad del teorema A.9: Dada la terna (A, ν, γ) definamos $\varphi(t)$ como el lado derecho de la expresión (RLK). Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos φ_n mediante

$$\varphi_n(t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle t, \mathrm{A}t\rangle + i\langle \gamma, t\rangle + \int_{\{|x|>1/n\}} \left(e^{i\langle t,x\rangle} - 1 - i\langle t,x\rangle 1_{\mathrm{D}}(x)\right)\nu(dx)\right\}.$$

Debido a que la medida ν restringida al conjunto $\{|x| > 1/n\}$ resulta ser finita, φ_n es la función característica de la convolución de una ley gaussiana con una ley Poisson y en consecuencia es infinitamente divisible. Por lo tanto, como φ es continua por (A.1) y $\varphi_n \to \varphi$, φ resulta ser la función característica de una ley infinitamente divisible, digamos μ. ■

Para demostrar la suficiencia del teorema A.9, se presenta previamente un resultado que incorporará parte de la demostración deseada. Para este enunciado definiremos la clase de funciones $C_\#(\mathbb{R}^d)$ como aquella de funciones continuas y acotadas que se anulan en una vecindad del cero.

A.12. Teorema

Sea $c \in C_b(\mathbb{R}^d)$ *una función que satisfaga* $c(x) = 1 + o(|x|)$ *cuando* $|x| \to 0$ *y* $c(x) = O(|x|^{-1})$ *cuando* $|x| \to \infty$. *Supongamos que* $\{\mu_n\}$ *es una sucesión de leyes infinitamente divisibles sobre* $\mathbb{R}^d$, *cada una de las cuales cumple que* $\widehat{\mu}_n$ *tiene representación dada de Lévy–Khintchine con terna generadora* $(A_n, \nu_n, \gamma_n)_c$. *Si* μ *es una medida de probabilidad, entonces se tiene que* $\mu_n \Rightarrow \mu$ *precisamente cuando* μ *es infinitamente divisible y* $\widehat{\mu}$ *tiene representación de Lévy–Khintchine con terna generadora* $(A, \nu, \gamma)_c$, *donde ésta satisface las siguientes condiciones:*

(i) *si* $f \in C_\#(\mathbb{R}^d)$ *entonces* $\langle \nu_n, f\rangle \to \langle \nu, f\rangle$;

(ii) *para toda* $t \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \limsup_{n\to\infty} |\langle t, A_{n,\varepsilon} t\rangle - \langle t, At\rangle| = 0,$$

donde $A_{n,\varepsilon}$ *se caracteriza por*

$$\langle t, A_{n,\varepsilon} t\rangle = \langle t, A_n t\rangle + \int_{\{|x|\le\varepsilon\}} \langle t, x\rangle^2 \, \nu(dx);$$

(iii) $\gamma_n \to \gamma$.

Demostración: Consideremos primero que $\mu_n \Rightarrow \mu$, de modo que μ es infinitamente divisible y $\widehat{\mu}(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}^d$. Luego, por el teorema de continuidad de Lévy,

$$\log \widehat{\mu}_n \to \log \widehat{\mu} \quad \text{uniformemente en compactos.} \tag{A.3}$$

Definamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, la medida $\rho_n(dx) = (|x|^2 \wedge 1)\, \nu_n(dx)$. Probaremos que $\{\rho_n\}$ es tensa, es decir que

$$\sup_n \rho_n(\mathbb{R}^d) < \infty \quad \text{y} \quad \lim_{K\to\infty} \sup_n \int_{\{|x|>K\}} \rho_n(dx) = 0.$$

Procedamos por el momento como si esto fuese cierto. Así, una generalización del teorema de Prokhorov implicaría que existen una subsucesión $\{\rho_{n_k}\}$ de $\{\rho_n\}$ y una medida finita ρ tales que $\rho_{n_k} \Rightarrow \rho$. Definimos entonces la medida ν a través de

$$\nu(A) := \int_{A\cap\{|x|>0\}} \frac{1}{|x|^2 \wedge 1} \rho_n(dx).$$

Al tomar $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ como

$$g(t,x) := e^{i\langle t,x\rangle} - 1 - i\langle t, x\rangle c(x),$$

vemos que esta función es acotada y continua en x para cada $t \in \mathbb{R}^d$. Si además ponemos

$$I_{n,\varepsilon}(t) = \int_{\{|x|\le\varepsilon\}} \frac{g(t,x) + \langle t,x\rangle^2/2}{|x|^2 \wedge 1} \rho_n(dx), \quad \text{y}$$

$$J_{n,\varepsilon}(t) = \int_{\{|x|>\varepsilon\}} \frac{g(t,x)}{|x|^2 \wedge 1} \rho_n(dx),$$

entonces tendremos que

$$\begin{aligned}\log \widehat{\mu}_n(t) &= -\frac{1}{2}\langle t, \mathrm{A}_n t\rangle + i\langle \gamma_n, t\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} g(t,x)\nu_n(dx)\\ &= -\frac{1}{2}\langle t, \mathrm{A}_{n,\varepsilon} t\rangle + i\langle \gamma_n, t\rangle + \mathrm{I}_{n,\varepsilon}(t) + \mathrm{J}_{n,\varepsilon}(t).\end{aligned}$$

Denotando

$$\mathrm{E} = \left\{\varepsilon > 0 : \int_{\{|x|=\varepsilon\}} \rho(dx) = 0\right\},$$

se sigue que para cada $\varepsilon \in \mathrm{E}$,

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{J}_{n_k,\varepsilon}(t) = \int_{\{|x|>\varepsilon\}} \frac{g(t,x)}{|x|^2 \wedge 1}\rho(dx) = \int_{\{|x|>\varepsilon\}} g(t,x)\,\nu(dx).$$

Por lo tanto, como E es denso,

$$\lim_{\mathrm{E}\ni\varepsilon\searrow 0}\lim_{k\to\infty} \mathrm{J}_{n_k,\varepsilon}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t,x)\,\nu(dx).$$

Ahora, de que las masas de las medidas ρ_n están uniformemente acotadas y que

$$\frac{g(t,x) + \langle t,x\rangle^2/2}{|x|^2 \wedge 1} \to 0$$

conforme $|x| \to 0$, se sigue que

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\sup_n |\mathrm{I}_n, \varepsilon(t)| = 0.$$

Por consiguiente, de (A.3) y lo previamente deducido se sigue que existe el límite de $\{\langle\gamma_{n_k}, t\rangle\}$ para cada t y además

$$\lim_{\mathrm{E}\ni\varepsilon\searrow 0}\limsup_{k\to\infty}\langle t, \mathrm{A}_{n_k,\varepsilon} t\rangle = \lim_{\mathrm{E}\ni\varepsilon\searrow 0}\liminf_{k\to\infty}\langle t, \mathrm{A}_{n_k,\varepsilon} t\rangle.$$

Por ende existen $\gamma \in \mathbb{R}^d$ y una forma cuadrática A no negativa definida, para los cuales $\gamma_{n_k} \to \gamma$ y

$$\langle t, \mathrm{A}t\rangle = \lim_{\mathrm{E}\ni\varepsilon\searrow 0}\limsup_{k\to\infty}\langle t, \mathrm{A}_{n_k,\varepsilon} t\rangle = \lim_{\mathrm{E}\ni\varepsilon\searrow 0}\liminf_{k\to\infty}\langle t, \mathrm{A}_{n_k,\varepsilon} t\rangle.$$

Luego, se tiene que $\widehat{\mu}$ tiene representación de Lévy–Khintchine con terna generadora $(\mathrm{A}, \nu, \gamma)_c$, la cual es única debido a la unicidad del teorema de Lévy–Khintchine. Debido a que es posible realizar esto para cualquier subsucesión de $\{\mu_n\}$, la unicidad de la terna nos implica las condiciones (i), (ii) y (iii). De esta manera, únicamente hay que demostrar la tensión de $\{\rho_n\}$. Definamos pues $\mathrm{C}(h) := [-h, h]^d$ y notemos que

$$\begin{aligned}-\int_{\mathrm{C}(h)} \log \widehat{\mu}_n(t)dt &= \frac{1}{2}\int_{\mathrm{C}(h)}\langle t, \mathrm{A}_n t\rangle dt - \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathrm{C}(h)} g(t,x)dt\nu_n(dx)\\ &\geqslant (2h)^d \int_{\mathbb{R}^d}\left(1 - \prod_{k=1}^d \frac{\operatorname{sen} hx_k}{hx_k}\right)\nu(dx).\end{aligned}$$

Como $-\int_{\mathrm{C}(1)} \log \widehat{\mu}_n(t)dt \to -\int_{\mathrm{C}(1)} \log \widehat{\mu}(t)dt$ y

$$\inf_x \left(1 - \sum_{k=1}^d \frac{\operatorname{sen} x_k}{x_k}\right)(|x|^2 \wedge 1)^{-1} > 0,$$

obtenemos que $\sup_n \rho_n(\mathbb{R}^d) < \infty$. Por otra parte, del teorema de diferenciación de Lebesgue,

$$\lim_{h \to \searrow} -\frac{1}{(2h)^d} \int_{C(h)} \log \widehat{\mu}(t)dt = 0,$$

y en consecuencia, para cada $\varepsilon > 0$ existen n_0 y h_0 tales que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - \prod_{k=1}^{d} \frac{\operatorname{sen} h_0 x_k}{x_k}\right) \nu(dx) < \varepsilon \quad \text{siempre que } n \geqslant n_0.$$

Si $|x| > 2\sqrt{d}/h_0$, $|x_{k_0}| > 2/h_0$ para algún k_0 y por consiguiente,

$$1 - \prod_{k=1}^{d} \frac{\operatorname{sen} h_0 x_k}{h_0 x_k} \geqslant 1 - \left|\frac{\operatorname{sen} h_0 x_{k_0}}{h_0 x_{k_0}}\right| \geqslant 1 - \frac{1}{h_0 |x_{k_0}|} > \frac{1}{2},$$

de modo que

$$\frac{1}{2} \int_{\{|x| > 2\sqrt{d}/h_0\}} \nu_n(dx) < \varepsilon \quad \text{siempre que } n \geqslant n_0,$$

lo cual es suficiente para obtener el resultado deseado.

Ahora probaremos el recíproco. Definamos las medidas $\rho_n(dx) = (|x|^2 \wedge 1)\nu_n(dx)$ y $\rho(dx) = (|x|^2 \wedge 1)\nu(dx)$. Al tomar E como antes, obtenemos

$$\lim_{E \ni \varepsilon \searrow 0} \lim_{k \to \infty} J_{n_k, \varepsilon}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t,x)\, \nu(dx)$$

gracias a la propiedad (i). De las propiedades (i) y (ii) obtenemos $\sup_n \rho_n(\mathbb{R}^d) < \infty$ y entonces

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \sup_n |I_n, \varepsilon(t)| = 0.$$

Finalmente, por (ii) y (iii) junto con lo ya mencionado

$$\lim_{n \to \infty} \log \widehat{\mu}_n(t) = -\frac{1}{2}\langle t, At\rangle + i\langle \gamma, t\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} g(t,x)\, \nu(dx) = \log \widehat{\mu}(t).$$

Por el teorema de continuidad de Lévy concluimos que $\mu_n \Rightarrow \mu$. ■

Demostración de la suficiencia del teorema A.9: Supongamos que μ es infinitamente divisible. Consideremos una sucesión $\{\varepsilon_n\}$ arbitraria que decrezca a cero. Si $\widehat{\mu}_n$ se define por

$$\widehat{\mu}_n(t) = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon_n}(\widehat{\mu}(t)^{\varepsilon_n} - 1)\right\} = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon_n} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} (e^{i\langle t,x\rangle} - 1)\mu^{\varepsilon_n}(dx)\right\},$$

esta es una función característica, cuya medida de probabilidad asociada, μ_n, es Poisson compuesta. Por su definición se tiene que

$$\widehat{\mu}_n(t) = \exp\{\log \widehat{\mu}(t) + O(\varepsilon_n)\},$$

de modo que $\widehat{\mu}_n(t) \to \widehat{\mu}(z)$. Concluimos por el teorema A.12. ■

Elementos de teoría de renovación

Sea $\{\xi_i\}_i$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, no negativas. Además definimos el n-ésimo tiempo de renovación mediante

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \qquad T(0) = 0.$$

B.1. *Ejemplo*

Si X es una cadena de Markov con valores en un espacio numerable. Vamos a suponer que $X_0 = x_0$ y vamos a denotar por $T(n) := \inf\{m > T(n-1) : X_m = x_0\}$ y $T(0) = 0$. Para ver que $T(n)$ es un n-ésimo tiempo de renovación usamos la propiedad de Markov.

B.1. Teorema de renovación

B.1. Definición

Un proceso de renovación $N = \{N_t : t \geqslant 0\}$ es un proceso aleatorio tal que

$$N_t = \text{máx}\{n \in \mathbb{N} : T(n) \leqslant t\}.$$

Vamos a definir a la función de renovación como $U_t := \mathbb{E}[N_t] + 1$.

Vamos a considerar a F como la función de distribución de ξ_1. Para $k \in \mathbb{N}$, F_k es la función de distribución del k-ésimo tiempo de renovación, T_k, y su ley satisface $dF_k = (dF)^{\otimes k}$. Por último, $F_0 := 1$.

B.2. Lema

Tenemos que $\mathbb{P}(N_t = k) = F_k(t) - F_{k+1}(t)$ *y* $U_t = \sum_{n\geqslant 0} F_n(t)$.

Demostración: De la igualdad $\{N_t = k\} = \{T(k) \leqslant t < T(k+1)\}$ obtenemos la primera afirmación. Por otra parte,

$$\mathbb{E}[N_t] = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(N_t = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k(F_k(t) - F_{k+1}(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t).$$ ■

B.3. Corolario (Ecuación de renovación)

La función de renovación U *satisface la ecuación*

$$U_t = 1 + \int_{[0,t]} U_{t-s} dF(s).$$

Demostración: Notemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k(t) = F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(t) = F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} F_n * F(t).$$ ■

TODO: Sea H una función positiva y acotada. Considere la siguiente ecuación:

$$(\star) \quad \mu(t) = H(t) + \int_{[0,t]} \mu(t-s)dF(s).$$

Probar que existe una única solución a la ecuación $(\star)$ dada por

$$\mu(t) = \int_{[0,t]} H(t-d)dU_s.$$

B.4. Definición

Decimos que F (o ξ o el proceso de renovación) es *aritmética* si existe $r > 0$ tal que $\mathbb{P}(\xi_1 \in r\mathbb{N}) = 1$. El máximo entero positivo r que cumple con esta propiedad es llamado el *paso* de F. En caso contrario diremos que F no es aritmética.

B.2. *Ejemplo*

Consideremos a la caminata aleatoria simétrica con valores en $\mathbb{Z}$ y que comienza en 0. Aquí $T(1), T(2), \ldots$ son los tiempos de retorno al 0 de la caminata.

B.5. Teorema (Blackwell)

Supongamos que $\mathbb{E}[\xi_1] = m < \infty$.

(i) *Si* F *no es aritmética, entonces para toda* $h > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} U_{x+h} - U_x = \frac{h}{m}.$$

(ii) *Si* F *es aritmética de paso* $r > 0$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} U_{n+r} - U_n = \frac{r}{m}.$$

Solo probaremos el caso aritmético, ya que el caso no aritmético resulta muy técnico. Definamos al *proceso exceso de vida*, $R = \{R_n : n \geqslant 0\}$, donde $R_n = T(N_n+1)-n$.

B.6. Lema

El proceso R *es una cadena de Markov con matriz de transición*

$$Q(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \geqslant 2, b = a-1, \\ 0 & \text{si } a \geqslant 2, b \neq a-1, \\ dF(b) & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

Demostración: Sea $\mathcal{G}_n = \sigma(T(0), \ldots, T(n))$. La familia $\mathcal{G}_n$ es una filtración y la variable aleatoria $N_n + 1$ es un tiempo de paro. En efecto, basta notar que

$$\{N_n = k-1\} = \{T(k-1) \leqslant n < T(k)\} \in \mathcal{G}_k.$$

Para toda $n \in \mathbb{N}$, vamos a denotar por $\mathcal{F}_n$ a la σ-álgebra $\mathcal{G}_{N_n+1}$. Ahora probemos que R es una cadena de Markov con respecto a $\{\mathcal{F}_n : n \geqslant 1\}$. Para ello basta calcular la matriz de transición via

$$(\star\star)\quad \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\Delta,N_n+1=k,R_n=a\}}f(R_{n+1})]$$

con $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ acotada y $\Delta \in \mathcal{F}_n$. Si $a > 1$ entonces los objetos dentro de $(\star\star)$ son iguales a $R_{n+1} = T(k) - (n+1)$ y $R_n = T(k) - a$, de modo que $R_{n+1} = a - 1$. En consecuencia

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\Delta,N_n+1=k,R_n=a\}}f(R_{n+1})] = f(b)\mathbb{1}_{\{b=a-1\}}\mathbb{P}(\Delta, N_n + 1 = k, R_n = 1)\,.$$

Finalmente, si $a = 1$, $R_{n+1} = \xi_{k+1} \perp\!\!\!\perp \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ y por lo tanto

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\Delta,N_n+1=k,R_n=a\}}f(R_{n+1})] = \mathbb{E}[f(\xi_{k+1})]\mathbb{P}(\Delta, N_n + 1 = k, R_n = 1)\,.$$

■

Demostración del Teorema B.5, parte (ii): Vamos a suponer que F es aritmética de paso 1. Vimos que R es una cadena de Markov que si parte de 1, el primer tiempo de retorno al nivel 1 tiene la misma ley que ξ_1 y por tanto tiene media finita. La cadena además es positiva-recurrente y aperiódica, gracias a la hipótesis de aritmeticidad de ξ_1. En conclusión, R_n tiene una distribución estacionaria γ, la cual es también límite. Entonces $\gamma(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma(i)Q(i,k)$. A partir de la fórmula de Q, obtenemos la recursión

$$\gamma(k) = \gamma(k+1) + \gamma(1)\mathbb{P}(\xi_1 = k)\,.$$

Por lo tanto, $\gamma(k) - \gamma(k+1) = \gamma(1)\mathbb{P}(\xi_1 = k)$. Al sumar, obtenemos que

$$\gamma(k) = \gamma(1)\mathbb{P}(\xi_1 \geqslant k) = \gamma(1)\overline{F}(k-1)\,.$$

Sumando sobre toda k obtenemos que

$$1 = \gamma(1)\sum_{k=1}^{\infty}\overline{F}(k-1) = \gamma(1)m\,,$$

de modo que $\gamma(1) = m^{-1}$.

Finalmente, vemos que

$$U_{n+1} - U_n = \mathbb{E}\left[\sum_{k\geqslant 1}\mathbb{1}_{\{T(k)=n+1\}}\right] = \mathbb{P}(R_n = 1)\,. \qquad N_n = \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{1}_{\{T(k)\leqslant n\}}\,.$$

Por la convergencia deducida previamente concluimos la prueba. ■

B.7. Corolario (Teorema de renovación clave)

Supongamos que F *no es aritmética y sea* $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *una función continua con soporte compacto. Entonces si* $m < \infty$,

$$\lim_{x\to\infty}\int_{[0,x]} g(x-s)\,dU_s = \frac{1}{m}\int_0^{\infty} g(t)\,dt\,.$$

Demostración: Primero observemos que

$$\int_{[0,x]} g(x-s)\,dU_s = \int_{[0,x]} g(s)\,d(U_x - U_{x-s})\,.$$

Del teorema de renovación se tiene que sobre todo conjunto compacto de la forma $[0,a]$, $U_x - U_{x-s} \to s/m$ para $s \in [0,a]$. De la convergencia vaga vemos que

$$\int_{[0,x]} g(s)\,d(U_x - U_{x-s}) \to \frac{1}{m}\int_0^{\infty} g(s)\,ds\,.$$

■

B.8. Teorema (Teorema de renovación elemental)

Supongamos que $m < \infty$. Entonces

$$\frac{U_t}{t} \to \frac{1}{m} \qquad \textit{conforme } t \to \infty.$$

Demostración: Para toda $t > 0$ se cumple que $T(N_t) \leqslant t < T(N_t + 1)$. Por el lema de Wald[1] tenemos que

$$t \leqslant \mathbb{E}[T(N_T + 1)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_t+1} \xi_i\right] = \mathbb{E}[\xi_1]\mathbb{E}[N_t + 1] = mU_t\,.$$

En consecuencia $U_t/t \geqslant 1/m$. Por otro lado, como $T(N_t) \leqslant t$, tenemos que

$$t \geqslant \mathbb{E}[T(N_t)] = \mathbb{E}[T(N_t + 1) - \xi_{N_t+1}] = mU_t - \mathbb{E}[\xi_{N_t+1}]\,.$$

Definamos $\xi_j^c = \xi_i \wedge c$, donde $c > 0$. Consideremos al proceso de renovación N^c asociado a $\{\xi_j^c\}_j$. En este caso $m^c = \mathbb{E}[\xi_1^c]$ y por un razonamiento similar al ya expuesto, $t \geqslant m^c\mathbb{E}[N_t^c + 1] - c$.

Como $\xi_j^c \leqslant \xi_j$ para toda $j \geqslant 1$, tendremos que $N_t^c \geqslant N_t$ para toda $t \geqslant 0$, de modo que $\mathbb{E}[N_t^c + 1] \geqslant U_t$. Por lo tanto

$$\frac{1}{m^c} + \frac{c}{tm^c} \geqslant \frac{U_t}{t}\,.$$

Al aplicar límite superior con respecto a t obtenemos que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{U_t}{t} \leqslant \frac{1}{m^c}\,,$$

y cuando hacemos tender $c \to \infty$ obtenemos $m^c \to m$ por convergencia monótona, y por consiguiente,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{U_t}{t} \leqslant \frac{1}{m}\,.$$ ■

TODO: Supongamos $m < \infty$, pruebe que

$$\frac{1}{t}N_t \to \frac{1}{m}\,,$$

casi seguramente, conforme $t \to \infty$.

Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ arbitraria, vamos a definir

$$I^\delta := \sum_{k=0}^{\infty} \delta \sup\big\{f(x) : x \in [k\delta, (k+1)\delta)\big\} \quad \text{y} \quad I_\delta := \sum_{k=0}^{\infty} \delta \inf\big\{f(x) : x \in [k\delta, (k+1)\delta)\big\}\,.$$

Estas sumas se conocen como *sumas superior e inferior de Riemann que aproximan a la integral de f en $\mathbb{R}_+$*.

B.9. Definición

Decimos que una función $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ es *directamente Riemann integrable* si I^δ e I_δ tienen el mismo límite I conforme $\delta \to 0$.

[1] Ver la sección 1.8.1 en Resnick, 1992, págs. 47–48.

TODO: Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ decreciente tal que $f(0) < \infty$ y $\int_0^\infty f(x)dx < \infty$. Probar que f es directamente Riemann integrable.

TODO: Sea $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continua. Probar que f es directamente Riemann integrable si y solamente si $\mathrm{I}^\delta < \infty$ para alguna $\delta > 0$.

TODO: Supongamos que F no es aritmética y sea $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dRI. Entonces si $m < \infty$,

$$\lim_{x\to\infty} \int_{[0,x]} g(x-s)\, d\mathrm{U}_s = \frac{1}{m}\int_0^\infty g(t)dt\,.$$

B.2. Edad y exceso de vida

El *proceso de edad* se define como

$$\mathrm{A}_t := t - \mathrm{T}(\mathrm{N}_t)$$

y el *proceso exceso de vida* como

$$\mathrm{R}_t := \mathrm{T}(\mathrm{N}_t + 1) - t\,.$$

Recordemos que $\mathrm{T}(k)$ es el k-ésimo tiempo de renovación, $\mathrm{N}_t = \max\{k : \mathrm{T}(k) \leqslant t\}$ y $\mathcal{G}_k = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_k)$.

B.10. Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una filtración es una familia $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ tales que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ siempre y cuando $s \leqslant t$. Al sistema

$$(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$$

se le llama *espacio de probabilidad filtrado*.

Sea $\{\mathrm{X}_t : t \geqslant 0\}$ un proceso aleatorio definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La *filtración canónica* asociada a dicho proceso está dada por $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathrm{X}_s : s \leqslant t)$. Vamos a denotar por

$$\mathcal{F}_{t-} := \bigvee_{s<t} \mathcal{F}_s \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$$

para todo $t \geqslant 0$. Es claro que $\mathcal{F}_{t-} \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+}$.

B.11. Definición

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado y $\{\mathrm{X}_t : t \geqslant 0\}$ un proceso aleatorio definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Se dice que el proceso es *adaptado* a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ si para toda $t \geqslant 0$ se tiene que la variable aleatoria X_t es $\mathcal{F}_t$-medible.

B.12. Definición

Una filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ se dice *continua por la derecha* si $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ para toda $t \geqslant 0$.

De esta última definición es fácil ver que $\{\mathcal{F}_{t+}\}_{t\geqslant 0}$ es continua por la derecha.

B.13. Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado. Una función $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ se llama *tiempo de paro* (con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$) si

(i) τ es medible con respecto a $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t\geqslant 0} \mathcal{F}_t$;
(ii) el conjunto $\{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \geqslant 0$;

TODO: Sea $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ una filtración continua por la derecha. Probar que τ es un tiempo de paro si, sólo si, el conjunto $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \geqslant 0$.

TODO: Sea τ un tiempo de paro con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ y $X_t := \mathbb{1}_{[0,\tau]}(t)$. Probemos que el proceso $\{X_t : t \geqslant 0\}$ es adaptado a dicha filtración.

B.14. Definición

Definamos al *tiempo de entrada en* A o la primera vez que el proceso $\{X_t : t \geqslant 0\}$ entra en el conjunto A como $T_A = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \in A\}$, con $\inf \emptyset = \infty$.

TODO: Sea $\{X_t : t \geqslant 0\}$ un proceso estocástico adaptado a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ y con espacio de estados $(E, \mathcal{E})$, donde E es un espacio métrico. Además consideremos $A \in \mathcal{E}$. Probar que

(i) si X y $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ con continuos por la derecha y A es abierto entonces T_A es un tiempo de paro con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$;
(ii) si X es continuo y A es cerrado entonces T_A es un tiempo de paro con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$.

B.15. Definición

Sea τ un tiempo de paro con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$. Denotamos por $\mathcal{F}_\tau$ a la colección de eventos $A \in \mathcal{F}$ tales que

$$A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t \qquad \text{para toda } t \geqslant 0.$$

Llamaremos a $\mathcal{F}_\tau$ la *σ-álgebra parada en* τ.

B.16. Proposición

Sea τ un tiempo de paro con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$. Entonces $\mathcal{F}_\tau$ es una σ-álgebra.

B.17. Proposición

Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado y $\{X_t : t \geqslant 0\}$ un proceso aleatorio càdlàg adaptado y con valores en un espacio métrico E. Además consideremos a τ un tiempo de paro con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$. Entonces $X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}$ es $\mathcal{F}_\tau$-medible. Además el proceso parado $X^\tau := \{X_{\tau \wedge t} : t \geqslant 0\}$ es adaptado.

Demostración: Primero notemos que Z es $\mathcal{F}_\tau$-medible si y sólo si $Z\mathbb{1}\{\tau \leqslant t\}$ es $\mathcal{F}_t$-medible para toda $t \geqslant 0$, ya que Z es aproximable por funciones de la forma $\sum_i a_i \mathbb{1}_{A_i}$ con $A_i \in \mathcal{F}_\tau$. Como τ es tiempo de paro, la variable aleatoria

$$\tau_n := 2^{-n}\lceil 2^n \tau \rceil$$

es también un tiempo y satisface que $\tau_n \geqslant \tau$. En efecto, que sea tiempo de paro se deduce de

$$\{\tau_n \leqslant t\} = \left\{\tau \leqslant 2^{-n}\lfloor 2^n \rfloor\right\} \in \mathcal{F}_t. \qquad (\lfloor x \rfloor \leqslant y \iff x \leqslant \lceil y \rceil)$$

Por construcción es claro que τ_n toma valores en

$$D_n = \{k2^{-n} : k \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{\infty\}$$

y que la sucesión $\{\tau_n\}$ decrece a τ.

Consideremos

$$X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}} \mathbb{1}_{\{\tau\leqslant t\}} = X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<t\}} + X_t \mathbb{1}_{\{\tau=t\}} = X_t \mathbb{1}_{\{\tau=t\}} + \lim_{n\to\infty} X_{\tau_n\wedge t} \mathbb{1}_{\{\tau<t\}} .$$

Notemos que $X_t \mathbb{1}_{\{\tau=t\}}$ y $X_{\tau_n\wedge t}\mathbb{1}_{\{\tau<t\}}$ son $\mathcal{F}_t$-medibles. Para la segunda parte de la suma veamos que

$$X_{\tau_n\wedge t} = \sum_{d\in D_n\cap[0,t]} X_d \mathbb{1}_{\{\tau_n=d\}} + X_t \mathbb{1}_{\{t<\tau_n\}}$$

es $\mathcal{F}_t$-medible. Esto nos da la $\mathcal{F}_t$-medibilidad de $X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\mathbb{1}_{\{\tau\leqslant t\}}$.

Con esto demostrado, basta notar que $\tau \wedge t$ es tiempo de paro y $X_{\tau\wedge t} \in \mathcal{F}_{\tau\wedge t} \subset \mathcal{F}_t$. ■

Recordemos que $N_t + 1$ es tiempo de paro con respecto a $\{\mathcal{G}_k\}$. Vamos a definir las filtraciones $\{\mathcal{F}_t\}$ y $\{\mathcal{H}_t\}$ mediante

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{G}_{N_t+1} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{H}_t := \sigma(N_s, s \leqslant t) .$$

Con ello obtenemos el siguiente resultado.

B.18. Lema

(i) *Los procesos de edad y exceso de vida, A y R, son continuos por la derecha, lineales por pedazos con pendientes +1 y −1 y con valores en $\mathbb{R}_+$ y $(0,\infty)$ respectivamente.*

(ii) *Las filtraciones $\{\mathcal{F}_t\}$ y $\{\mathcal{H}_t\}$ satisfacen*

$$\mathcal{H}_t \subset \mathcal{F}_t = \mathcal{H}_t \vee \sigma(T(N_t + 1)) .$$

Demostración: La parte (i) es clara por la definición de los procesos.

Para (ii) probemos primero que $\mathcal{H}_t \subset \mathcal{F}_t$. Como

$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T(i)\leqslant t\}} ,$$

bastará probar que $T(n)$ es tiempo de paro con respecto a $\mathcal{F}_t$, lo cual se hará mediante inducción. El caso base $n = 0$ es trivial. Supongamos que $T(n)$ es tiempo de paro para alguna $n \geqslant 0$. Como el proceso R es continuo por la derecha y $T(n)$ es tiempo de paro, por la proposición B.17, vemos que $R_{T(n)}$ es $\mathcal{F}_{T(n)}$-medible. Por otro lado se tiene que $T(n + 1) = T(n) = R_{T(n)}$, de modo que

$$\begin{aligned}\{T(n+1) > t\} &= \{0 < T(n) < t, T(n) + R_{T(n)} > t\} \cup \{T(n) \geqslant t, R_{T(n)} \geqslant 0\} \\ &= \bigcup_{r\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \{r < T(n) < t, R_{T(n)} > t - r\} \cup \{T(n) \geqslant t, R_{T(n)} \geqslant 0\}.\end{aligned}$$

De la última expresión se deduce que $\{T(n+1) > t\} \in \mathcal{F}_t$, probando la primera parte del resultado.

Finalmente demostremos que

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{H}_t \vee \sigma(T(N_t + 1)) ,$$

notando que $\mathcal{F}_t \supset \mathcal{H}_t \vee \sigma(T(N_t+1))$ en vista de que $\sigma(T(N_t+1)) \subset \mathcal{F}_t$. En cuanto a la contención inversa, primero notemos que $T(n)$ es tiempo de paro con respecto a $\{\mathcal{H}_t\}$. Eso es claro pues $\{T(n) \leqslant t\} = \{N_t \geqslant n\}$. Hecho esto, tomemos $s \leqslant t$ y $x \in (0, t-s]$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\{R_s \leqslant x\} = \{T(N_s+1) - s \leqslant x\} &= \bigcup_{n\geqslant 0}\{T(n+1) \leqslant x+s, N_s = n\}\\ &= \bigcup_{n\geqslant 0}\{T(n) \leqslant s < T(n+1) \leqslant x+s\} \in \mathcal{H}_{s+x} \subset \mathcal{H}_t\,.\end{aligned}$$

Si, en cambio, $x > t-s$, vemos que

$$\{t-s < R_s \leqslant x\} = \{R_s \leqslant t-s\}^c \cap \{T(N_s+1) \leqslant x+s\} \in \mathcal{H}_t \vee \sigma(T(N_t+1))\,.$$

Esto prueba que R_s es $\mathcal{H}_t \vee \sigma(T(N_t+1))$–medible para toda $s \leqslant t$, lo cual nos da el resultado deseado. ■

B.19. Definición (Propiedad de Markov)

Un proceso aleatorio $X = \{X_t : t \geqslant 0\}$ con valores en un espacio polaco E adaptado a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}$ y que inicia en $x \in E$ es un *proceso de Markov (con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$)* si para cualesquiera función $f : E \to \mathbb{R}$ medible y acotada y $s, t \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}_x[f(X_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{X_s}[f(X_{t+s})] \qquad \text{casi seguramente.}$$

B.20. Teorema

El proceso R (exceso de vida) satisface la propiedad de Markov con respecto a $\{\mathcal{F}_t\}$; i.e. para f boreliana, positiva y acotada y $s, t \geqslant 0$,

$$\mathbb{E}[f(R_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t] = \begin{cases} f(x-s) & \text{si } R_t = x > s, \quad (\star)\\ \displaystyle\int_{[0,s-x]} dU_v \int_{(s-x-v,\infty)} dF(y)\, f(y-s+x+v) & \text{si } R_t = x < s. \quad (\star\star)\end{cases}$$

Demostración de la ecuación $(\star)$ del teorema B.20: Sea $\Delta \in \mathcal{F}_t$. Como $N_t + 1$ es tiempo de paro con respecto a $\{\mathcal{G}_n\}$, el evento $\Delta \cap \{N_t+1 = k+1\} \in \mathcal{G}_{k+1}$. Supongamos que $s + t < T(k+1)$, de modo que

$$R_{t+s} = T(N_{t+s}+1) - (t+s) = R_t - s$$

y por ende

$$\mathbb{E}\big[f(R_{t+s})\mathbb{1}_{\Delta\cap\{N_t=k\}\cap\{s+t<T(K+1)\}}\big] = \mathbb{E}\big[f(R_t-s)\mathbb{1}_{\Delta\cap\{N_t=k\}\cap\{s+t<T(K+1)\}}\big]\,.$$

Consecuentemente,

$$\mathbb{E}[f(R_{t+s}) \mid \mathcal{F}_t] = f(R_t - s) \qquad \text{si } R_t > s.$$ ■

Demostración de la ecuación $(\star\star)$ del teorema B.20: Consideremos $\Lambda \in \mathcal{F}_t$. Recordemos que es importante que $N_t + 1$ es $\mathcal{G}_k$–tiempo de paro,

$$\Lambda \cap \{N_t+1 = k+1\} \in \mathcal{G}_{k+1} \quad \text{y} \quad R_t = T(N_t+1) - t\,.$$

Pediremos que $t+s>\mathrm{T}(k+1)$. Tomemos $\mathrm{T}'(j)=\xi_{k+2}+\ldots+\xi_{k+1+j}$ para $j\geqslant 1$. Asociado a estos tiempos consideramos el proceso de renovación N' y el proceso de exceso de vida R'. Notemos que $\mathrm{G}'\perp\!\!\!\perp\mathcal{G}_{k+1}$ y tiene la misma ley que R por construcción.

Buscaremos representar a R_{t+s} en términos de R_t y R', lo cual estará dado por

$$\mathrm{R}_{t+s}=\mathrm{R}'_{s+t-\mathrm{T}(k+1)}\mathrm{R}'_{s-\mathrm{R}_t}\,.$$

Al realizar algunos cálculos obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[f(\mathrm{R}_{t+s})\mathbb{1}_{\Lambda\cap\{\mathrm{N}_t=k\}\cap\{s+t>\mathrm{T}(k+1)\}}\big]&=\mathbb{E}\big[f(\mathrm{R}'_{s-\mathrm{R}_t})\mathbb{1}_{\Lambda\cap\{\mathrm{N}_t=k\}\cap\{s+t>\mathrm{T}(k+1)\}}\big]\\&=\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\Lambda\cap\{\mathrm{N}_t=k\}\cap\{s+t>\mathrm{T}(k+1)\}}g(\mathrm{R}_t)\big]\,,\end{aligned}$$

donde

$$g(x)=\mathbb{E}[f(\mathrm{R}_{s-x})],\qquad s>x\,.$$

Para concluir, calcularemos de forma explícita a g. Mediante cálculos usuales,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(\mathrm{R}_v)]&=\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{E}\big[f(\mathrm{T}(\mathrm{N}_v+1)-v)\mathbb{1}_{\{\mathrm{N}_v=k\}}\big]\\&=\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{E}\big[f(\xi_{k+1}+\mathrm{T}(k)-v)\mathbb{1}_{\{\mathrm{T}(k)\leqslant v\}\cap\{\xi_{k+1}>v-\mathrm{T}(k)\}}\big]\\&=\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{\mathrm{T}(k)\leqslant v\}}\int_{(v-\mathrm{T}(k),\infty)}d\mathrm{F}(y)\,f(\mathrm{T}(k)-v+y)\Big]\\&=\int_{[0,v]}d\mathrm{U}_r\int_{(v-r,\infty)}d\mathrm{F}(y)\,f(r-v+y)\,.\end{aligned}$$

Al tomar $v=s-x$ concluimos. ■

Para el proceso de edad, la propiedad de Markov es un poco distinta. El proceso sigue siendo de Markov pero no bajo $\{\mathcal{F}_t\}$ sino bajo $\{\mathcal{H}_t\}$. Para $s\geqslant x$ y f boreliana, positiva y acotada, definimos al operador

$$\mathrm{G}_s f(x):=\mathbb{E}[f(\mathrm{A}_{s-x})]\,.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{G}_s f(x)&=\mathbb{E}[f(s-x-\mathrm{T}(\mathrm{N}_{s-x}))]\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\big[f(s-x-\mathrm{T}(k))\mathbb{1}_{\{\mathrm{T}(k)\leqslant s-x\}\cap\{\xi_{k+1}>s-x-\mathrm{T}(k)\}}\big]\\&=\sum_{k\geqslant 0}\mathbb{E}\Big[f(s-x-\mathrm{T}(k))\mathbb{1}_{\{\mathrm{T}(k)\leqslant s-x\}}\overline{\mathrm{F}}(s-x-\mathrm{T}(k))\Big]\\&=\int_{[0,s-x]}d\mathrm{U}_y f(s-y-x)\overline{\mathrm{F}}(s-x-y)\,.\end{aligned}$$

B.21. Teorema

El proceso de edad A *verifica la propiedad de Markov con respecto a la filtración* $\{\mathcal{H}_t\}$*;* i.e. *para* f *boreliana, positiva y acotada y* $s,t\geqslant 0$,

$$\mathbb{E}[f(\mathrm{A}_{t+s})\mid\mathcal{H}_t]=\begin{cases}f(\mathrm{A}_t+s) & \textit{si } \{\mathrm{N}_t=\mathrm{N}_{t+s}\},\\ \dfrac{1}{\overline{\mathrm{F}}(\mathrm{A}_t)}\displaystyle\int\mathbb{1}_{\{\mathrm{A}_t<y\leqslant s+\mathrm{A}_t\}}\mathrm{G}_s f(y-\mathrm{A}_t)\,d\mathrm{F}(y) & \textit{en otro caso.}\end{cases}$$

Demostración: Sea $\Lambda \in \mathcal{H}_t$. Como todo conjunto $\mathcal{H}_t$-medible restringido al evento

$$\{N_t = n\}$$

es $\mathcal{G}_n$-medible, tenemos que $\Lambda \cap \{N_t = n\} \in \mathcal{G}_n$.

Primero supondremos que $s + t < T(n+1)$. En este caso se tiene la relación

$$A_{t+s} = A_t + s$$

y por ende

$$\mathbb{E}\left[f(A_{t+s})\mathbb{1}_{\Lambda\cap\{N_t=n\}\cap\{s+t<T(n+1)\}}\right] = \mathbb{E}\left[f(A_t + s)\mathbb{1}_{\Lambda\cap\{N_t=n\}\cap\{s+t<T(n+1)\}}\right],$$

de modo que

$$\mathbb{E}\left[f(A_{t_s}) \mid \mathcal{H}_t\right] = f(A_t + s) \qquad \text{si } \{N_t = N_{t+s}\}.$$

Supondremos ahora que $s+t \geqslant T(n+1)$. Definimos a $T'(j) = \xi_{n+2} + \cdots + \xi_{n+1+j}$ para $j \geqslant 1$. Consideremos además a A' y N' asociados a $\{T'(j)\}$. Nuevamente $A' \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_{n+1}$, con lo cual podemos realizar cálculos. Notando que

$$A_{t+s} = A'_{s+A_t-\xi_{n+1}}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[f(A_{t+s})\mathbb{1}_{\Lambda\cap\{N_t=n\}\cap\{s+t\geqslant T(n+1)\}}\right] \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[f(A'_{s+A_t-\xi_{n+1}})\mathbb{1}_{\Lambda\cap\{N_t=n\}\cap\{s+t\geqslant T(n+1)\}}\right] \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda\cap\{N_t=n\}\cap\{s+t\geqslant T(n)+\xi_{n+1}\}}G_s f(\xi_{n+1} - A_t)\right] \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda\cap\{T(n)\leqslant t\}}\mathbb{1}_{\{A_t<\xi_{n+1}\leqslant s+A_t\}}G_s f(\xi_{n+1} - t + T(n))\right] \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda\cap\{T(n)\leqslant t\}}\frac{\overline{F}(A_t)}{\overline{F}(A_t)}\int_{(A_t,s+A_t]} G_s f(y - A_t)\,dF(y)\right] \\
&\qquad = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda\cap\{A_t\geqslant 0\}}\overline{F}(A_t)H_s f(A_t)\right],
\end{aligned}$$

donde

$$H_s f(x) = \frac{1}{\overline{F}(x)}\int_{(x,x+s]} G_s f(y-x)dF(y).$$

De este modo,

$$\mathbb{E}\left[f(A_{t+s})\mathbb{1}_{\Lambda\cap\{N_t=n\}\cap\{s+t\geqslant T(n+1)\}}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\Lambda\cap\{N_t=n\}}H_s f(A_t)\right].$$

■

Ahora estudiaremos el comportamiento asintótico del par (A_t, R_t). Para ello sean U y Z dos variables aleatorias independientes, donde U es uniforme en $[0,1]$ y la ley de Z satisface que

$$\mathbb{P}(Z \in dz) = \frac{z}{m}dF(z), \qquad dF(z) = \mathbb{P}(\xi_1 \in dz),\, m = \mathbb{E}[\xi_1] < \infty.$$

B.22. Teorema

Supongamos que el proceso de renovación es no aritmético y que $m < \infty$. Entonces

$$(A_t, R_t) \Rightarrow_t (UZ, (1-U)Z).$$

Demostración: Consideremos $a, r \geqslant 0$. Veamos que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_t \leqslant a, R_t > r) &= \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{T(k)\leqslant t<T(k)+\xi_{k+1}\}}\mathbb{1}_{\{t-T(k)\leqslant a\}}\mathbb{1}_{\{\xi_{k+1}+T(k)-t>r\}}\Big] \\ &= \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{t-a\leqslant T(k)\leqslant t\}}\mathbb{1}_{\{\xi_{k+1}+T(k)>r+t\}}\Big] \\ &= \sum_{k\geqslant 0} \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{t-a\leqslant T(k)\leqslant t\}}\overline{F}(r+t-T(k))\Big] \\ &= \int_{\{t-x\leqslant a\}} \overline{F}(r+t-x)\, dU_x\,.\end{aligned}$$

Por último veamos que U es medida de renovación y notemos que

$$x \mapsto \mathbb{1}_{\{t-x\leqslant a\}}\overline{F}(t-x+r)$$

es dRI, ya que es positiva continua y decreciente, lo cual implica que

$$\mathbb{P}(A_t \leqslant a, R_t > r) \to \frac{1}{m}\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{x<a\}}\overline{F}(x+t)\, dx = \mathbb{P}(UZ \leqslant a, (1-U)Z > r)\,.$$ ■

B.3. Variación regular y teorema de Dynkin–Lamperti

El objetivo ahora es estudiar el comportamiento asintótico de los procesos de edad y de exceso de vida en el caso en que el proceso de renovación tiene media infinita; *i.e.* $\mathbb{E}[\xi_1] = \infty$.

B.23. Definición

Sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ una función medible. Decimos que f *varía regularmente* en $+\infty$ (respectivamente en 0^+) con índice α si para todo $\lambda > 0$,

$$\lim_{x\to\infty/0^+} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^\alpha\,.$$

Si $\alpha = 0$, decimos que f *varía lentamente*.

B.24. *Observación*

Si f varía regularmente con índice α, entonces $x \mapsto x^{-\alpha}f(x)$ varía lentamente. Recíprocamente si $\ell(x)$ varía lentamente entonces $x \mapsto x^\alpha \ell(x)$ varía regularmente con índice α.

TODO: Probar que si f tiene límite finito y positivo entonces f varía lentamente. Además probar que

$$f(x) = \log x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{1}{\log x}$$

varían lentamente.

TODO: Sean c y ϵ funciones medibles tales que $\lim_{x\to+\infty} c(x)$ existe en $(0,\infty)$ y $\lim_{x\to+\infty} \epsilon(x) = 0$. Definamos a

$$f(x) = c(x)\exp\left\{\int_1^x \frac{\epsilon(t)}{t}dt\right\}.$$

Probar que f varía lentamente en $+\infty$.

Es importante señalar que esta es la forma general de una función que varía lentamente.

B.25. Proposición (Convergencia uniforme)

Si f varía regularmente en $+\infty$ (respectivamente en 0^+) con índice α, entonces para todo compacto $K \subset (0,\infty)$,

$$\lim_{x\to+\infty/0^+} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lambda^\alpha, \quad \text{uniformemente en } K.$$

Antes de probar el teorema abeliano/tauberiano, vamos a recordar algunos conceptos y resultados. Sea μ una medida de proba en $[0,\infty)$, vamos a denotar por $\mathcal{L}\mu$ a la *transformada de Laplace de* μ; *i.e.*

$$\mathcal{L}\mu(\lambda) = \int_{[0,\infty)} e^{-\lambda x}\,\mu(dx)\,.$$

Recordemos que la función $\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ está definida por

$$\Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1}\,dt\,.$$

Sea $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de medidas de probabilidad en $[0,\infty)$. Decimos que $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$ *converge en distribución* hacia una probabilidad ρ si y solamente si $\{\mathcal{L}\rho_n\}_{n\geq 1}$ converge hacia $\mathcal{L}\rho$.

B.26. Teorema (de Lévy)

Sea $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de medidas de probabilidad en $[0,\infty)$. Si $\lim_n \mathcal{L}\rho_n = f$, donde $f(0) = 1$ y f es continua por la derecha en 0, entonces $f = \mathcal{L}\rho$ para alguna medida de probabilidad ρ en $[0,\infty)$.

Este resultado se puede extender de manera inmediata al caso en que las medidas ρ_n satisfacen $\rho_n([0,\infty)) = \infty$ para toda n. En este caso, trabajamos con

$$\frac{e^{-x}\rho_n(dx)}{\mathcal{L}\rho_n(1)}$$

y con su transformada de Laplace

$$\frac{\mathcal{L}\rho_n(\lambda+1)}{\mathcal{L}\rho_n(1)}, \qquad \lambda \geq 0\,.$$

B.27. Teorema (Tauberiano/Abeliano)

Sea μ una medida en $[0,\infty)$ con transformada de Laplace $\mathcal{L}_\mu$. Entonces son equivalentes

(i) $\mu(x) := \mu([0,x])$ *varía regularmente en $+\infty$ con índice α y*

(ii) $\mathcal{L}\mu$ *varía regularmente en 0^+ con índice $-\alpha$.*

En cualquier caso,

$$\mu(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\mathcal{L}\mu(1/x) \quad \text{conforme } x \to \infty.$$

Demostración: **Parte abeliana.** Supongamos que $\mu(\cdot)$ varía regularmente en $+\infty$ con índice α. Recordemos que para toda $y > 0$,

$$\mu_x(y) := \frac{\mu(xy)}{\mu(x)} \to y^\alpha\,,$$

uniformemente sobre todo compacto de $(0,\infty)$ y definamos la medida de probabilidad

$$\rho_x(dy) := \frac{e^{-y}\mu_x(dy)}{\int_{(0,\infty)} e^{-z}\mu_x(dz)}.$$

De la convergencia en distribución, tenemos

$$\rho_x(dy) \to \frac{e^{-y}y^{\alpha-1}dy}{\int_{(0,\infty)} e^{-z}z^{\alpha-1}dz}$$

conforme $x \to \infty$. En particular la transformada de Laplace de ρ_x satisface

$$(\star) \quad \int_{(0,\infty)} e^{-\lambda y}\rho_x(dy) = \frac{\mathcal{L}\mu_x(\lambda+1)}{\mathcal{L}\mu(1)} \to \frac{\alpha\int_0^\infty e^{-(\lambda+1)y}y^{\alpha-1}dy}{\alpha\int_0^\infty e^{-y}y^{\alpha-1}dy}.$$

Usando el cambio de variable $x = (\lambda+1)y$, vemos

$$\int_0^\infty e^{-(\lambda+1)y}y^{\alpha-1}dy = \frac{\Gamma(\alpha)}{(1+\lambda)^\alpha}.$$

Por otro lado

$$\int_0^\infty e^{-(\lambda+1)y}d\mu(xy) = \int_0^\infty e^{-(\lambda+1)t/x}d\mu(t) = \mathcal{L}\mu((\lambda+1)/x).$$

Por lo tanto, de $(\star)$ y los cálculos anteriores vemos

$$\frac{\mathcal{L}\mu((\lambda+1)/x)}{\mathcal{L}\mu(1/x)} \to \frac{1}{(\lambda+1)^\alpha} \quad \text{conforme } x \to \infty.$$

Esto es, $\mathcal{L}\mu$ varía regularmente en 0^+ con índice $-\alpha$.

Parte tauberiana. Supongamos que $\mathcal{L}\mu$ varía regularmente en 0^+ con índice $-\alpha$. Veamos que la aplicación

$$\lambda \mapsto \frac{\mathcal{L}\mu(\lambda/x)}{\mathcal{L}\mu(1/x)}$$

es la transformada de Laplace de $\mu(xy)/\mathcal{L}\mu(1/x)$. En efecto,

$$\int_{[0,\infty)} e^{-\lambda y}d_y\frac{\mu(xy)}{\mathcal{L}\mu(1/x)} = \frac{1}{\mathcal{L}\mu(1/x)}\int_{[0,\infty)} e^{-\lambda t/x}d\mu(t) = \frac{\mathcal{L}\mu(\lambda/x)}{\mathcal{L}\mu(1/x)}.$$

Por hipótesis cuando $x \to \infty$, esta transformada de Laplace converge a

$$\Gamma(\alpha)\lambda^{-\alpha} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}t^{\alpha-1}dt.$$

De la convergencia vaga de medidas, tenemos

$$\frac{\mu(xy)}{\mathcal{L}(1/x)} \to \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^y t^{\alpha-1}dt = \frac{y^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} = \frac{y^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

conforme $x \to \infty$. Por tanto

$$\mu(x) \sim \frac{\mathcal{L}\mu(1/x)}{\Gamma(1+x)} \quad \text{conforme } x \to \infty,$$

y por ende para $c > 0$,

$$\frac{\mu(cx)}{\mu(x)} \sim \frac{\mathcal{L}\mu(1/cx)}{\mathcal{L}\mu(1/x)} \to c^\alpha, \quad \text{conforme } x \to \infty.$$

En otras palabras μ varía regularmente en $+\infty$ con índice α. ■

B.28. Lema (Densidades monótonas)

Supongamos que $d\mu(x) = g(x)dx$ *con* g *monótona. Si además suponemos que* μ *varía regularmente en* $+\infty$ *con índice* $\alpha > 0$, *entonces*

$$g(x) \sim \frac{\alpha\mu(x)}{x} \quad \text{conforme } x \to \infty.$$

En particular g *es de variación regular en* $+\infty$ *con índice* $\alpha - 1$.

Demostración: Supongamos que g es creciente. Por hipótesis,

$$\frac{\mu((1+\varepsilon)x)}{\mu(x)} \to (1+\varepsilon)^\alpha \quad \text{conforme } x \to \infty.$$

Entonces

$$\frac{\mu((1+\varepsilon)x) - \mu(x)}{\varepsilon\mu(x)} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{(1+\varepsilon)^\alpha - 1}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \alpha\,.$$

Pero

$$\mu((1+\varepsilon)x) - \mu(x) = \int_x^{(1+\varepsilon)x} g(y)dy \in [g(x)x\varepsilon, g((1+\varepsilon)x)x\varepsilon]\,.$$

De este modo

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{g(x)x}{\mu(x)} \leqslant \lim_{x\to\infty} \frac{\mu((1+\varepsilon)x) - \mu(x)}{\varepsilon\mu(x)} \leqslant \alpha\,.$$

De manera similar,

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{g((1+\varepsilon)x)}{\mu(x)} \geqslant \lim_{x\to\infty} \frac{\mu((1+\varepsilon)x) - \mu(x)}{\varepsilon\mu(x)} = \frac{(1+\varepsilon)^\alpha - 1}{\varepsilon}\,.$$

Al tomar ε suficientemente pequeño tenemos que

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{g(x)}{\mu(x)} \geqslant \alpha\,. \qquad \blacksquare$$

Pruebas mucho más completas y explicadas del teorema B.27 y el lema B.28 se pueden consultar en las páginas 37–39 de Bingham et al. (1989). De forma respectiva son el teorema 1.7.1 y teorema 1.7.2 de la referencia dada.

B.29. Teorema (de Dynkin–Lamperti)

Sean A *y* R *los procesos de edad y exceso de vida de un proceso de renovación con media infinita*, i.e. $\mathbb{E}[\xi_1] = \infty$. *Entonces son equivalentes:*

(i) *para alguna* $\alpha \in (0,1)$ *tenemos* $\mathbb{E}[A_t] \sim \alpha t$, $t \to \infty$;

(ii) A_t/t *tiene un límite en ley no degenerado conforme* $t \to \infty$;

(iii) $(A_t, R_t)/t$ *converge en ley, conforme* $t \to \infty$, *hacia la ley*

$$\frac{1-\alpha}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}(1-a)^{-\alpha}(a+r)^{\alpha-2}, \quad 0 < a < 1, \quad r > 0;$$

(iv) $\overline{F}(x)$ *varía regularmente en* $+\infty$ *con índice* $\alpha - 1$.

B.30. *Observación*

La primera marginal en (iii) es la ley arcoseno generalizada o Beta$(\alpha, 1-\alpha)$ que tiene densidad

$$\frac{\sin \pi\alpha}{\pi} a^{\alpha-1}(1-a)^{-\alpha}, \quad 0 < a < 1\,.$$

Demostración: Primero notemos que se satisfacen las siguientes implicaciones: (iii) + la observación implica (ii), la cual implica (i). Probemos pues que (i) implica (iv). Supongamos que $\mathbb{E}[A_t] \sim \alpha t$ e introduzcamos la notación,

$$\phi(q) := 1 - \int_{[0,\infty)} e^{-qx} dF(x)\,, \qquad q > 0\,.$$

Sea U la medida de renovación, la cual recordamos está dada por

$$U(x) = \sum_{n\geqslant 0} F^{*n}(x)\,.$$

Entonces la transformada de Laplace de U satisface

$$\mathcal{L}U(q) := \int_{[0,\infty)} e^{-qx} dU_x = \sum_{n\geqslant 0} \mathcal{L}F^{*n}(q) = \sum_{n\geqslant 0}(1-\varphi(q))^n = \frac{1}{\varphi(q)}\,.$$

También tenemos

$$\int_0^\infty e^{-qx}\overline{F}(x)dx = \int_0^\infty dx e^{-qx}\int_{(x,\infty)} dF(y) = \frac{1}{q}\int_{(0,\infty)} dF(y)(1-e^{-qy}) = \frac{\varphi(q)}{q}\,.$$

Ahora verifiquemos que para $f \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(A_t)] &= \int_{[0,t]} f(t-x)\overline{F}(t-x)dU_x = \mathbb{E}\Bigg[\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{1}_{\{T(n)\leqslant t<T(n)+\xi_{n+1}\}} f(t-T(n))\Bigg] \\ &= \mathbb{E}\Bigg[\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{1}_{\{T(n)\leqslant t\}} f(t-T(n))\overline{F}(t-T(n))\Bigg]\,.\end{aligned}$$

En particular, para $f(x) = x$ se tiene

$$\mathbb{E}[A_t] = \int_{[0,t]} (t-x)\overline{F}(t-x)dU_x\,.$$

Estamos interesados en la transformada de Laplace de $t \mapsto \mathbb{E}[A_t]$, la cual satisface

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-qt}\mathbb{E}[A_t]dt &= \int_0^\infty dt e^{-qt}\int_{[0,t]} (t-x)\overline{F}(t-x)dU_x \\ &= \int_{[0,\infty)} dU_x e^{-qx}\int_0^\infty dt e^{-q(t-x)}\mathbb{1}_{\{0\leqslant x\leqslant t\}}(t-x)\overline{F}(t-x) \qquad (\star) \\ &= \frac{1}{\varphi(q)}\int_0^\infty dy e^{-qy}\overline{F}(y)y\,.\end{aligned}$$

Calculemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dy y e^{-qy}\overline{F}(y) &= -\frac{d}{dq}\int_0^\infty e^{-qx}\overline{F}(x)dx \\ &= -\frac{\varphi'(q)}{q} + \frac{\varphi(q)}{q}\,,\end{aligned}$$

de modo que por $(\star)$,

$$\int_0^t e^{-qt}\mathbb{E}[\mathrm{A}_t]dt = \frac{1}{\varphi(q)}\left(-\frac{\varphi'(q)}{q}+\frac{\varphi(q)}{q}\right) = \frac{1}{q^2} - \frac{1}{q}\frac{\varphi'(q)}{\varphi(q)}.$$

Por hipótesis sabemos que $\mathbb{E}[\mathrm{A}_t] \sim \alpha t$ conforme $t \to \infty$. Por lo tanto

$$\int_0^t \mathbb{E}[\mathrm{A}_s]ds \sim \frac{\alpha t^2}{2}, \quad t \to \infty,$$

y por ende varía regularmente en $+\infty$ con índice 2. Del teorema B.27,

$$\int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{E}[\mathrm{A}_t]dt \sim \frac{2\alpha}{2}q^{-2}, \quad q \to 0^+.$$

Esto implica $\alpha/q^2 \sim q^{-2} - q^{-1}\varphi'(q)/\varphi(q)$, $q \to 0^+$, lo que a su vez implica que

$$\frac{\varphi'(q)}{\varphi(q)} \sim \frac{1-\alpha}{q}, \quad q \to 0^+.$$

Definamos

$$\frac{\epsilon(q)}{q} := \frac{\varphi'(q)}{\varphi(q)} - \frac{1-\alpha}{q} = o(1/q).$$

Entonces

$$\int_s^1 \frac{\epsilon(q)}{q}dq = \log\varphi(1) - \log\varphi(s) + 1 - \alpha\log s,$$

lo cual implica

$$\varphi(q) = q^{1-\alpha}\varphi(1)\exp\left\{-\int_q^1 \frac{\epsilon(u)}{u}du\right\}.$$

Por algún ejercicio, sabemos que

$$\ell(q) := \exp\left\{-\int_q^1 \frac{\epsilon(u)}{u}du\right\}$$

es de variación lenta en 0^+. Esto implica que $\varphi(q)$ varía regularmente con índice $\alpha - 1$ y por ende

$$\int_0^\infty e^{-qx}\overline{\mathrm{F}}(x)dx = \frac{\varphi(q)}{q}$$

varía regularmente en 0^+ con índice $-\alpha$. Del teorema B.27tenemos que la medida $\int_0^x \overline{\mathrm{F}}(y)dy$ varía regularmente en $+\infty$ con índice α y además,

$$\int_0^x \overline{\mathrm{F}}(y)dy \sim \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\frac{\varphi(1/x)}{1/x}, \quad x \to \infty.$$

Como $\overline{\mathrm{F}}$ es una función decreciente, entonces el lema B.28 implica

$$(\star\star)\quad \overline{\mathrm{F}}(x) \sim \frac{\alpha}{x}\frac{x}{\Gamma(1+\alpha)}\varphi(1/x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\varphi(1/x), \quad x \to \infty.$$

De manera recíproca, si (iv) se satisface, el teorema B.27 nos garantiza que $(\star\star)$ se cumple. Así, hemos probado la equivalencia entre (i) y (iv).

Para concluir mostremos que (i) implica (iii). Para ello consideremos $0 < a < a' < 1$ y $r > 1$, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(at \leqslant A_t < a't, R_t > rt) &= \mathbb{E}\left[\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{1}_{\{T(n)\leqslant t<T(n)+\xi_{n+1}\}}\mathbb{1}_{\{\xi_{n+1}>rt+t-T(n)\}}\mathbb{1}_{\{at\leqslant t-T(n)<a't\}}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{n\geqslant 0} \overline{F}((r+1)t - T(n))\mathbb{1}_{\{at\leqslant t-T(n)<a't\}}\right]\\ &= \int_{(1-a')t}^{(1-a)t} \frac{\overline{F}((r+1)t-x)}{\varphi(1/t)} d(U_x\varphi(1/t))\\ &= \int_{(1-a')t}^{(1-a)t} \frac{\overline{F}(r+1-t)t}{\varphi(1/t)} d(U_{ty}\varphi(1/t)).\end{aligned}$$

Por un lado recordemos que $\mathcal{L}U(q) = 1/\varphi(q)$ varía regularmente en 0^+ con índice $\alpha - 1$. Del teorema B.27 tenemos que U_t varía regularmente en $+\infty$ con índice $1-\alpha$ y además

$$U_t \sim \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{1}{\varphi(1/t)}, \qquad t\to\infty.$$

Como

$$\frac{U_{ty}}{U_t} \to y^{1-\alpha}, \qquad t\to\infty,$$

lo que implica que

$$U_{ty}\varphi(1/t) \sim \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} y^{1-\alpha}, \qquad t\to\infty.$$

De la misma manera, tenemos

$$\frac{\overline{F}((r+1-y)t)}{\overline{F}(t)} \to (r+1-y)^{\alpha-1}, \qquad t\to\infty,$$

de modo que, por $(\star\star)$

$$\overline{F}(t(r+1-y))\varphi(1/t) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(r+1-y)^{\alpha-1}, \qquad t\to\infty,$$

uniformemente en $y\in[1-a', 1-a]$. Esto implica la convergencia en distribución de la integral de arriba, es decir

$$\begin{aligned}\int_{1-a'}^{1-a} \frac{\overline{F}(t(r+1-y))}{\varphi(1/t)} d(U_{ty}\varphi(1/t)) &\to \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)}\int_{1-a'}^{1-a}(r+1-y)^{\alpha-1}y^{-\alpha}dy\\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_a^{a'}(r+x)(1-x)^{-\alpha}dx. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

B.4. Aplicaciones a las variables aleatorias estables en $\mathbb{R}_+$

El objetivo es extender la ley de los grandes números para sumas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media infinita. Tomemos $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con ley común dF y recordemos que

$$T(n) := \xi_1 + \cdots + \xi_n, \qquad \overline{F} = 1 - F \quad \text{y} \quad \mathcal{L}F(q) = \int_{[0,\infty)} e^{-qx} dF(x).$$

B.31. Teorema

Bajo las hipótesis del teorema de Dynkin–Lamperti tenemos:

(i) *Para* $\alpha \in (0,1)$, $\overline{F}$ *varía regularmente en* $+\infty$ *con índice* $-\alpha$ *si y solamente si* $1-\mathcal{L}F$ *varía regularmente en* 0 *con índice* α.

(ii) *Bajo las hipótesis de la parte (i), consideremos a* $a_n > 0$ *tal que* $1-\mathcal{L}F(1/a_n) = 1/n$. *Entonces* $a_n \nearrow \infty$ *(de hecho varía regularmente en* $+\infty$ *con índice* $1/\alpha$*) y*

$$\frac{T(n)}{a_n} \Rightarrow_n \sigma(\alpha),$$

donde $\sigma(\alpha)$ *es una variable aleatoria estable estándar de índice* α*;* i.e.

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda\sigma(\alpha)}] = e^{-\lambda^\alpha}.$$

Demostración: La parte (i) forma parte del enunciado del teorema de Dynkin–Lamperti. Recordemos que $\varphi(q) = 1 - \mathcal{L}F(q)$, la cual es una función continua y creciente ya que $\mathcal{L}F$ es transformada de Laplace. Entonces la función $\varphi : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ es una biyección, de aquí que exista una sucesión monótona $\{a_n\}_{n\geq 1}$ que satisface

$$\varphi(1/a_n) = 1/n.$$

Ahora es claro que

$$\mathbb{E}[e^{-qT(n)}] = \big(\mathcal{L}F(q)\big)^n,$$

lo cual implica

$$\mathbb{E}\big[e^{-qT(n)/a_n}\big] = \big(\mathcal{L}F(q/a_n)\big)^n = \big(1-\varphi(q/a_n)\big)^n.$$

Por otro lado, sabemos que φ varía regularmente en 0^+ con índice α, por lo tanto

$$\frac{\varphi(q/a_n)}{\varphi(1/a_n)} = n\varphi(q/a_n) \to q^\alpha, \quad n\to\infty.$$

Eso va a implicar

$$n\log(1-\varphi(q/a_n)) = n\varphi(q/a_n)\frac{\log(1-\varphi(q/a_n))}{\varphi(q/a_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} -q^\alpha.$$

Por ende,

$$\mathbb{E}\big[e^{-qT(n)/a_n}\big] \to e^{-q^\alpha}.$$

La función $q \mapsto e^{-q^\alpha}$ es continua en 0 y vale 1 en 0. Del teorema de Lévy, $T(n)/a_n$ converge débilmente a una variable aleatoria con transformada de Laplace e^{-q^α}. ■

Nota: El concepto de estabilidad se da por la igualdad en distribución

$$\sigma(\alpha) = a\tilde{\sigma}(\alpha) + b\sigma'(\alpha)$$

con a y b distintas de cero y $\tilde{\sigma}(\alpha), \sigma'(\alpha)$ son copias independientes de $\sigma(\alpha)$.

Referencias

Principales

Bertoin, J. (1996). *Lévy processes*. Cambridge university press.

Bertoin, J. (1999). Subordinators: Examples and Applications. En P. Bernard (Ed.), *Lectures on Probability Theory and Statistics* (pp. 1-91, Vol. 1717). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-48115-7_1

Khoshnevisan, D. (2011). *Topics in Probability: Lévy Processes* [Lecture Notes]. https://www.math.utah.edu/~davar/ps-pdf-files/Levy.pdf

Kingman, J. F. C. (1993). *Poisson processes*. Clarendon press.

Kyprianou, A. E. (2014). *Fluctuations of Lévy Processes with Applications: Introductory Lectures* (2.ª ed.). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-37632-0

Kyprianou, A. E., & Pardo, J. C. (2022). *Stable lévy Processes Via Lamperti-Type Representations* (1.ª ed.). Cambridge University Press.

Sato, K.-i. (2013). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions* (2.ª ed.). Cambridge University Press.

Schoutens, W. (2003, 25 de marzo). *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives* (1.ª ed.). Wiley. https://doi.org/10.1002/0470870230

Winkel, M. (2010). *Lévy Processes and Finance* [Lecture Notes]. https://www.stats.ox.ac.uk/~winkel/ms3b10.pdf

Suplementarias

Ash, R. B., & Doléans-Dade, C. (2000). *Probability and Measure Theory* (2.ª ed.). Harcourt/Academic Press.

Asmussen, S. (2003). *Applied Probability and Queues* (2nd ed). Springer New York.

Bingham, N. H., Goldie, C. M., & Teugels, J. L. (1989). *Regular variation* (1.ª ed.). Cambridge university press.

Feller, W. (2009). *An introduction to probability theory and its applications* (2.ª ed., Vol. 2). Wiley.

Resnick, S. I. (1992). *Adventures in Stochastic Processes*. Birkhäuser.

Resnick, S. I. (2008). *Extreme values, regular variation, and point processes* (1. soft cover ed). Springer.

Revuz, D., & Yor, M. (1999). *Continuous martingales and Brownian motion* (3.ª ed.). Springer.