Rozdział 9

Elementy teorii gier

Decyzje gospodarcze są często podejmowane w warunkach niepewnej i niepełnej informacji. Zachowania konkurencji, zjawiska naturalne, reakcje rynku są trudne do przewidzenia, a ich wpływ na skuteczność decyzji bywa zwykle bardzo istotny. Możemy przewidzieć skutki pewnych decyzji, zależnie od stanów otoczenia, jednak nie wiadomo jaki stan wystąpi. Jest to sytuacja podobna do sytuacji gracza np. w wypadku gier hazardowych. Teoria gier jest działem matematyki, którego istotą jest wyznaczenie optymalnego, czyli przynoszącego najwięcej korzyści, zachowania jednostek, organizacji lub różnego rodzaju grup społecznych w przypadku konfliktu interesów [8]. Współcześnie znajduje zastosowanie w biologii (socjobiologii), samej socjologii, ekonomii oraz informatyce.

Za początek nowoczesnej teorii gier uważa się rok 1944, kiedy John von Neumann i Oskar Morgenstern opublikowali książkę "Teoria gier i zachowania w gospodarce". Obejmuje ona szeroki zarys problematyki dotyczącej sposobów modelowania sytuacji konfliktu lub kooperacji.

Badania w zakresie teorii gier i jej zastosowań wielokrotnie zostały wyróżnione Nagrodą Nobla. W 1978 roku tę nagrodę otrzymał Herbert Simon za wkład w rozwój ewolucyjnej teorii gier, w szczególności za koncepcję ograniczonej racjonalności. John Nash, Reinhard Selten i John Harsanyi zostali nagrodzeni w roku 1994 za rozwój teorii gier i jej zastosowania w ekonomii. Dwa lata później nagrodę za stworzenie modeli przetargów i badanie konfliktów z niesymetryczną informacją uczestników otrzymali William Vickrey i James Mirrlees. Thomas C. Schelling i Robert J. Aumann odebrali nagrodę Nobla w roku 2005 za zastosowanie teorii gier w naukach społecznych i mikroekonomii w zakresie zachowania jednostek i rozwiązywania konfliktów. W roku 2007 nagrodę Nobla za kolejne zastosowania teorii gier w ekonomii dostali Leonid Hurwicz, Eric S. Maskin, Roger B. Myerson.

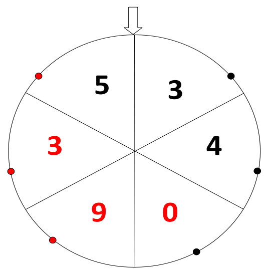
W tym rozdziale poznamy jedynie sposób rozwiązywania gier dwuosobowych o sumie zerowej oraz elementarne strategie stosowane w grach z naturą.

9.1. Gry dwuosobowe o sumie zero

Gry dwuosobowe o sumie zero znajdują zastosowanie do modelowania sytuacji konfliktowych, w których występują dwie antagonistyczne strony. Do najbardziej znanych przykładów tego typu sytuacji należą wybór strategii marketingowych przez konkurujące ze sobą firmy, wybór strategii postępowania przedwyborczego przez konkurujących ze sobą polityków, czy analiza strategicznych konfliktów międzynarodowych.

9.1.1. Przykład

Dwaj chłopcy Adam i Błażej dostali od rodziców po dwadzieścia cukierków. Adam wpadł na pomysł, aby powiększyć swój zapas słodyczy i zaproponował Błażejowi następująca grę. Narysowali na kartce papieru koło podzielone na 6 części i w każdej części wpisali liczbę, jak na rysunku 9.1. Punkt startowy jest oznaczony strzałką. W jednym kroku strzałka może się przesunąć o kąt 50° w lewo lub w prawo. Czarnymi kropkami zaznaczono punkty, w których strzałka pojawi sie przy obrotach w prawo, a czerwonym, przy obrotach w lewo. Gra polega na tym, że Adam wybiera kierunek ruchu strzałki, a Błażej liczbę kroków (od 1 do 3) o jaką ma się przesunąć strzałka. Swoje decyzje chłopcy zapisują na karteczkach w tajemnicy przed drugim graczem i pokazują jednocześnie. Wtedy strzałkę przesuwa się we wskazanym kierunku o określoną liczbę kroków. Czarna liczba wpisana w polu wskazanym przez strzałkę mówi ile cukierków dostanie Adam od Błażeja. Liczba czerwona informuje ile cukierków Błażej dostanie od Adama, gdy strzałka wskaże dane pole. Jakie decyzje powinien podjąć każdy z chłopców, aby uzbierać możliwie najwięcej cukierków?



Rysunek 9.1. Koło opisujące grę.

9.1.2. Analiza sytuacji decyzyjnej

Dopuszczalne decyzje graczy nazywamy *strategiami*. Możemy zatem powiedzieć, że zbiór strategii Adama (oznaczmy go przez S) zawiera dwie strategie dopuszczalne: ruch strzałki w lewo (strategia s_1) i w prawo (strategia s_2), a zbiór strategii Błażeja (oznaczmy go T) zawiera trzy dopuszczalne strategie: przesunięcie strzałki o 1 (strategia t_1), 2 (strategia t_2) lub 3 (strategia t_3) kroki. Dla każdej pary strategii wybranych przez graczy $(s_i, t_j), i = 1, \ldots 2, j = 1, \ldots 3$, określona jest *wypłata* (liczba cukierków) przysługująca każdemu z graczy. Zauważmy, że w rozważanej grze liczba cukierków, które dostaje jeden z graczy jest zawsze równa liczbie cukierków, które oddaje drugi z graczy. Grę, w której suma wygranych jest równa zero nazywamy *grą o sumie zerowej*. W takim wypadku wystarczy, że określimy wypłaty dla jednego z graczy, gdyż wygrana gracza A jest liczbą przeciwną do wygranej gracza B. Funkcja wypłat $W(s,t)$ jest więc określona na iloczynie kartezjańskim $S \times T$ zbiorów strategii obu graczy i przyjmuje skończone wartości rzeczywiste. Jeżeli zbiory strategii obu graczy są skończone, to wartości funkcji wypłat możemy przedstawić w macierzy, tzw. *macierzy wypłat*. Macierz wypłat dla gry Adama i Błażeja przedstawiono w tablicy 9.1.

Tablica 9.1. Macierz wypłat

Adam \ Błażej	t_1	t_2	t_3
s_1	3	4	0
s_2	5	-3	-9

Definicja 9.1
Grą dwuosobową o sumie zero nazywamy trójkę $G = \langle S, T, W \rangle$, w której S i T są odpowiednio zbiorami strategii czystych gracza A i B, a $W(s,t)$ jest funkcją wypłat przyjmującą skończone wartości liczbowe i określoną na iloczynie kartezjańskim $S \times T$ zbiorów strategii obu graczy.

9.1.3. Dolna i górna wartość gry

Adam analizując swoje szanse w grze ocenia, że wybierając strategię s_1 może w najgorszym razie uzyskać remis (gdy Błażej równocześnie wybierze strategię t_3), natomiast wybierając strategię s_2 w najgorszym razie przegrywa 9 cukierków. Zatem lepszy gwarantowany wynik gry uzyska wybierając strategię s_1. Minimalną gwarantowaną wypłatę gracza A nazywamy *dolną wartością gry*. Podobnie Błażej stwierdza, że wybierając strategię t_1 w najgorszym razie przegra 5, wybierając t_2 może przegrać 4, a wybierając strategię t_3 w najgorszym razie uzyska remis. Dla Błażeja najbezpieczniejszą strategią jest więc strategia t_3. Nieprzekraczalną przegraną gracza B nazywamy *górną wartością gry.*

Definicja 9.2
Dolną wartością gry $G = \langle S, T, W \rangle$ nazywamy liczbę:

$$v_1 = \max_{s_i \in S} \min_{t_j \in T} W(s_i, t_j) \tag{9.1}$$

Strategia s_0 odpowiadająca dolnej wartości gry nazywa się *strategią maksyminową.* Jest to strategia gwarantująca graczowi A, że jego wygrana wyniesie co najmniej v_1.
Górną wartością gry $G = \langle S, T, W \rangle$ nazywamy liczbę:

$$v_2 = \min_{t_j \in T} \max_{s_i \in S} W(s_i, t_j) \tag{9.2}$$

Strategia t_0 odpowiadająca dolnej wartości gry nazywa się *strategią minimaksową.* Jest to strategia gwarantująca graczowi B, że jego przegrana wyniesie co najwyżej v_2.

W grze Adama i Błażeja dolna i górna wartość gry są równe i wynoszą $v_1 = v_2 = 0$. Para strategii (s_1, t_3), odpowiadająca tym wartościom wyznacza rozwiązanie, w którym każdy z chłopców może zachować swój zapas cukierków. Rozwiązanie to oznacza, że Adam wybiera kierunek ruchu strzałki w lewo, a Błażej przesunięcie o trzy kroki.

9.1.4. Strategie zdominowane

Analizując macierz wypłat Błażej może ponadto zauważyć, że nie warto mu grać strategii t_1, gdyż dla każdej decyzji Adama, strategia t_3 gwarantuje mu mniejszą przegraną niż t_1. Odpowiednio gdy Adam wybierze s_1, to mamy $W(s_1, t_3) = 0 < W(s_1, t_1) = 3$, a gdy Adam wybierze s_2, to mamy $W(s_2, t_3) = -9 < W(s_2, t_1) = 5$. Strategię t_1 nazywamy *zdominowaną.* Podobnie strategia t_2 jest strategią zdominowaną przez t_3.

Definicja 9.3
Jeżeli w grze macierzowej $G = \langle S, T, \mathbf{A} \rangle$ każdy element pewnego wiersza macierzy wypłat odpowiadającego strategii $s_k \in S$ gracza A jest mniejszy lub równy od odpowiedniego elementu innego wiersza, to strategia s_k nosi nazwę *strategii zdominowanej gracza A.*

Jeżeli każdy element pewnej kolumny macierzy wypłat odpowiadającej strategii $t_l \in T$ gracza B jest większy lub równy od odpowiedniego elementu innej kolumny, to strategia t_l nosi nazwę *strategii zdominowanej gracza* B.

Ponieważ graczom nie warto grać strategii zdominowanych wiersze i kolumny odpowiadające strategiom zdominowanym można usunąć z macierzy wypłat i w ten sposób zmniejszyć rozmiar rozwiązywanego problemu.

9.2. Mieszane rozszerzenie gry

Mieszane rozszerzenie gry to model, w którym gra jest powtarzana wielokrotnie i w każdym powtórzeniu gracze mogą dowolnie zmieniać swoje strategie. Ostateczny wynik gry jest wtedy sumą wygranych poszczególnych graczy w kolejnych powtórzeniach. W grze Adama i Błażeja żadnemu z chłopców nie warto zmieniać strategii, gdyż dolna i górna wartość gry są równe, a więc gra szybko stanie się nudna. Nie zawsze jednak dolna i górna wartość gry są sobie równe. Rozważmy następujący przykład [17].

9.2.1. Przykład

Wyobraź sobie, że jesteś w bibliotece i do Twojego stolika przysiada się nieznajoma proponując następującą grę. Na sygnał każde z nas położy na stole monetę (na przykład złotówkę). Jeżeli obie monety będą leżały orzełkiem do góry, to płacę 3 złote, a jeżeli obie będą leżały reszką do góry, to płacę złotówkę. Natomiast jeżeli będą różne wskazania, to Ty płacisz dwa złote. Gra jest cicha, więc można zagrać w bibliotece, ale czy warto?

Gra wydaje się sprawiedliwa. W przypadku losowego wyboru strategii wartości oczekiwane wygranej: $0,25 * 3 + 0,25 * 1 = 1$ oraz porażki: $0,5 * 2 = 1$, są równe. Musimy jednak wziąć pod uwagę, że nieznajoma nie musi grać losowo, ale może zastosować na przykład strategię, w której będzie grała dwukrotnie częściej reszkę niż orzełka. Jeżeli wtedy przeciwnik pozostanie przy losowym wyborze orzełka lub reszki, to oczekiwana wygrana nieznajomej wyniesie 1 złoty na każde 6 rozgrywek. Czy jest lepsza strategia przeciwko nieznajomej?

Zacznijmy od ustalenia macierzy wypłat (tab. 9.2).

W tej grze nie ma strategii zdominowanych. Dolna wartość gry wynosi -1, a górna 2. W tej sytuacji każdy z graczy określa prawdopodobieństwo z jakim będzie wybierał poszczególne strategie w kolejnych rozgrywkach, gdy gra będzie wielokrotnie powtarzana.

Tablica 9.2. Macierz wypłat

Nieznajoma \ Czytelnik	t_1 = orzełek	t_2 = reszka
s_1 = orzełek	-3	2
s_2 = reszka	2	-1

9.2.2. Strategie mieszane

Niech x oznacza prawdopodobieństwo zagrania przez nieznajomą reszki. Wtedy nieznajoma gra orzełka z prawdopodobieńswem $(1-x)$. Uogólniając, rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze strategii danego gracza nazywamy *strategią mieszaną* tego gracza.

Definicja 9.4
Strategią mieszaną (lub zrandomizowaną) gracza A nazywamy skokowy rozkład prawdopodobieństwa określony na zbiorze S strategii czystych tego gracza, tzn. wektor $\mathbf{x}^T = [x_1, x_2, ..., x_m]$, taki że:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, m$$

Strategią mieszaną (lub zrandomizowaną) gracza B nazywamy skokowy rozkład prawdopodobieństwa określony na zbiorze T strategii czystych tego gracza, tzn. wektor $\mathbf{y} = [y_1, y_2, ..., y_n]$, taki że:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, n$$

W szczególnym wypadku, gdy gracz wybiera z prawdopodobieństwem 1 jedną z dopuszczalnych strategii (pozostałe zatem z prawdopodobieństwem 0), ta strategia nazywa się *strategią czystą* (lub *prostą).*

Definicja 9.5
Mieszanym rozszerzeniem gry macierzowej $G = \langle S, T, \mathbf{A} \rangle$ nazywamy trójkę $\Gamma = \langle X, Y, \varphi(X, Y) \rangle$, w której zbiór $X = \{\mathbf{x} : \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geqslant 0, i = 1, 2, ..., m\}$ jest zbiorem strategii mieszanych gracza A, a zbiór $Y = \{\mathbf{y} : \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \geqslant 0, j = 1, \ldots, n\}$ - zbiorem strategii mieszanych gracza B.

$$\varphi(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y} \tag{9.3}$$

jest wartością oczekiwaną wygranej gracza A.

9.2.3. Dolna i górna wartość gry

Dla mieszanego rozszerzenia gry również możemy zdefiniować dolną i górną wartość gry jako odpowiednie wartości oczekiwane.

Definicja 9.6
Dolną wartością gry Γ nazywamy liczbę:

$$k_1 = \max_{\mathbf{x}\in X} \min_{\mathbf{y}\in Y} \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{9.4}$$

a *górną wartością gry* Γ liczbę:

$$k_2 = \min_{\mathbf{y}\in Y} \max_{\mathbf{x}\in X} \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{y} \tag{9.5}$$

Własność 9.1

$$v_1 \leqslant k_1 \leqslant k_2 \leqslant v_2$$

Z własności 9.1 wynika, że jeżeli $v_1 = v_2$, to $k_1 = k_2$.

9.2.4. Strategie optymalne

Rozwiązanie gry mieszanej polega na znalezieniu pary strategii optymalnych $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ oraz wartości gry v^*.

Definicja 9.7
Parę strategii $\mathbf{x}^* \in X$ i $\mathbf{y}^* \in Y$ nazywamy *strategiami optymalnymi* gracza A i B odpowiednio, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathbf{x} \in X$ i $\mathbf{y} \in Y$ zachodzi:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{y}^* \leqslant \mathbf{x}^{*T} \mathbf{A}\mathbf{y}^* \leqslant \mathbf{x}^{*T} \mathbf{A}\mathbf{y}$$

a liczbę $v = \mathbf{x}^{*T}\mathbf{A}\mathbf{y}^*$ nazywamy *wartością gry*. Parę strategii optymalnych nazywa się *punktem siodłowym gry*, gdyż punkt $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ jest punktem siodłowym funkcji $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Ważnym rozstrzygnięciem jest tzw. *twierdzenie minimaksowe* gwarantujące istnienie rozwiązania gry mieszanej, niezależnie od tego, czy wyjściowa gra macierzowa ma rozwiązanie.

Twierdzenie 9.1 (Twierdzenie minimaksowe)
Każda gra Γ, będąca mieszanym rozszerzeniem gry macierzowej $G = \langle S, T, \mathbf{A} \rangle$ ma rozwiązanie.

Pozostaje znaleźć sposób wyznaczenia rozwiązania mieszanego rozszerzenia gry macierzowej. Wskazówką może być następujące twierdzenie podające warunek konieczny i dostateczny na to, aby para strategii była parą strategii optymalnych.

Twierdzenie 9.2
Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby para strategii $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ była parą strategii optymalnych jest równość $k_1 = k_2$, gdzie k_1 i k_2 są określone odpowiednio równaniami (9.4) i (9.5). Wartość gry jest wówczas równa $v = k_1 = k_2$

9.2.5. Strategie czyste

Rozwiązanie gry można łatwo znaleźć w szczególnym wypadku, gdy macierz wypłat $\mathbf{A}$ posiada punkt siodłowy.

Definicja 9.8
Punktem siodłowym macierzy $\mathbf{A} = [a_{ij}], i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$, jeżeli taki istnieje, nazywamy element a_{rk}, który dla $i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$, spełnia następujący warunek:

$$a_{ik} \leqslant a_{rk} \leqslant a_{rj}$$

Istnienie punktu siodłowego łatwo sprawdzić stosując następujące Twierdzenie 9.3.

Twierdzenie 9.3
Macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}], i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$, ma punkt siodłowy a_{rk} wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość:

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = a_{rk}.$$

Jeżeli istnieje punkt siodłowy macierzy wypłat, to rozwiązaniem gry jest para strategii czystych, co jest treścią kolejnego twierdzenia 9.4

Twierdzenie 9.4
Jeżeli macierz wypłat w grze $G = \langle S, T, \mathbf{A} \rangle$ ma punkt siodłowy a_{rk}, to strategiami optymalnymi gry Γ, będącej mieszanym rozszerzeniem gry G są strategie czyste:

1. $x_r = 1, x_i = 0$ dla $i \neq r$
2. $y_k = 1, y_j = 0$ dla $j \neq k$

a ponadto wartością tej gry jest $v = a_{rk}$.

Przypomnijmy, że w grze Adama i Błażeja dolna i górna wartość gry były równe (macierz wypłat posiadała punkt siodłowy $a_{13} = 0$), i co za tym idzie, rozwiązaniem tej gry była para strategii czystych: (s_1, t_3), a wartością gry $v = 0$. Macierz wypłat gry z nieznajomą nie posiada punktu siodłowego.

Kolejny krok w rozwiązywaniu mieszanego rozszerzenia gry polega na wyeliminowaniu strategii zdominowanych (def. 9.3). Sposób postępowania w tym wypadku podaje twierdzenie 9.5

Twierdzenie 9.5
Jeżeli w grze $G = \langle S, T, \mathbf{A} \rangle$ pewna strategia s_k gracza A (pewna strategia t_r gracza B) jest strategią zdominowaną, to w mieszanym rozszerzeniu k-ta składowa strategii optymalnej gracza A jest równa 0, to znaczy $x_k = 0$ (r-ta składowa strategii optymalnej gracza B jest równa zero, tzn. $y_r = 0$).

Na mocy twierdzenia 9.5 można zmniejszyć rozmiar macierzy $\mathbf{A}$ wykreślając wiersze (kolumny) odpowiadające strategiom zdominowanym. W grze z nieznajomą nie ma strategii dominowanych.

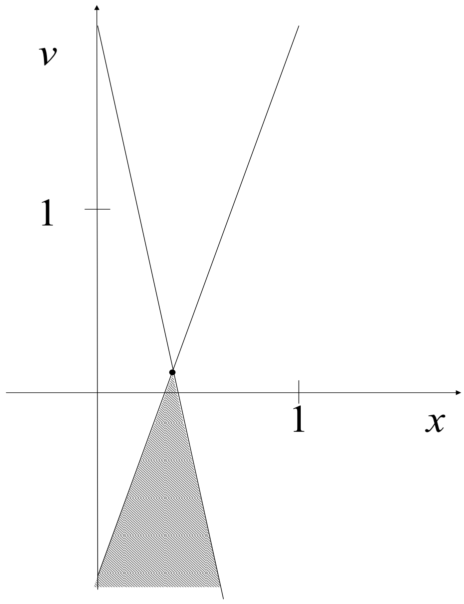
9.2.6. Rozwiązywanie gier mieszanych

Oczekiwana wartość wygranej nieznajomej wynosi $-3x + 2(1 - x)$, gdy czytelnik gra zawsze orzełka i $2x - (1 - x)$, gdy czytelnik gra tylko reszkę. Nieznajoma chce znaleźć taką strategię, przy której niezależnie od tego co zagra czytelnik jej wygrana będzie co najmniej równa v. Strategię tę można wyznaczyć graficzne (rys. 9.2) jako rozwiązanie układu nierówności liniowych (9.6)-(9.7) o największej wartości v:

$$-3x + 2(1 - x) \geqslant v \tag{9.6}$$

$$2x - (1 - x) \geqslant v \tag{9.7}$$

Najlepszy możliwy wynik $v = 1/8$ nieznajoma uzyska, gdy $x = 3/8$, czyli w trzech rozgrywkach na 8 zagra orzełka, a w pozostałych reszkę. Jak w tej sytuacji powinien zagrać nasz czytelnik? Oznaczmy przez y prawdopodobieństwo, że czytelnik zagra orzełka (reszkę gra zatem z prawdopodobieństwem $1 - y$). Czytelnik chce zminimalizować wartość gry, a zatem szuka rozwiązania układu nierówności (9.8)-(9.9) z najmniejszą wartością v.



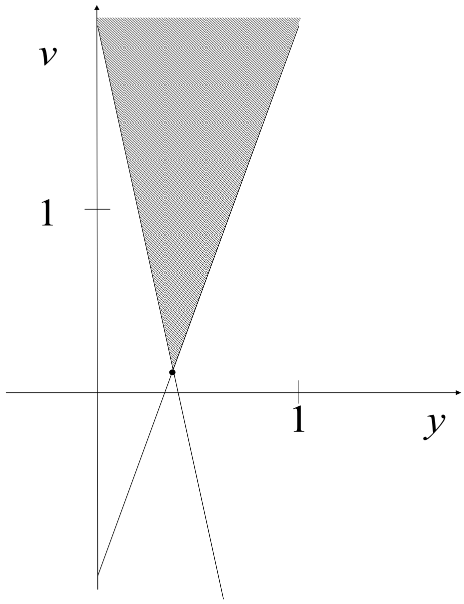
Rysunek 9.2. Graficzne rozwiązanie układu nierówności (9.6)-(9.7).

$$2x - (1 - x) \leqslant v \tag{9.8}$$

$$-3x + 2(1 - x) \leqslant v \tag{9.9}$$

Jeżeli czytelnik gra w 3 grach na 8 orzełka ($y = 3/8$), a w pozostałych reszkę, to oczekiwany wynik gry będzie wynosił co najwyżej $1/8$. Podsumowując, dla pary strategii mieszanych $(3/8, 3/8)$ nieznajoma wygra co najmniej 1 zł na każde osiem gier, a czytelnik nie przegra więcej niż 1 zł na każde osiem gier. Wynika z tego, że czytelnik nie powinien zgadzać sie na grę z nieznajomą.

Sposób postępowania pokazany na przykładzie gry z nieznajomą można uogólnić na większą liczbę strategii, choć w przypadku, gdy każdy z graczy ma więcej niż dwie strategie niezdominowane metoda graficzna nie jest wystarczająca do rozwiązania układu nierówności. Ogólne warunki dostateczne, aby strategie były optymalne podano w twierdzeniu 9.6.



Rysunek 9.3. Graficzne rozwiązanie układu nierówności (9.8)-(9.9).

Twierdzenie 9.6
Jeżeli v jest wartością gry oraz spełnione są warunki:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j^* \leqslant v, i = 1, \ldots, m \tag{9.10}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^* \geqslant v, j = 1, \ldots, n \tag{9.11}$$

to $\mathbf{x}^{*T} = [x_1^*, x_2^*, \ldots, x_m^*]$ oraz $\mathbf{y}^* = [y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*]$ są strategiami optymalnymi.

Wyznaczenie strategii optymalnej gracza A polega zatem na rozwiązaniu następującego problemu programowania liniowego.

$$\text{zmaksymalizować} \quad v \tag{9.12}$$

$$\text{przy ograniczeniach} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geqslant v, j = 1, \ldots, n \tag{9.13}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \tag{9.14}$$

Problem ten można rozwiązać metodą sympleks, stosując dowolny solwer, na przykład poznany wcześniej ExploreLP. Należy zwrócić uwagę, że w ogólności wartość funkcji celu v może być liczbą ujemną. Są dwa sposoby, aby poradzić sobie z taką sytuacją. Pierwszy sposób polega na sprowadzeniu problemu do postaci standardowej przez zastąpienie zmiennej v parą zmiennych nieujemnych (v^+, v^-), takich, że $v = v^+ - v^-$. Drugi sposób wynika z twierdzenia 9.7.

Twierdzenie 9.7
Jeżeli para strategii $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ jest parą optymalną w grze Γ będącej mieszanym rozszerzeniem gry $G = \langle S, T, \mathbf{A} \rangle$ z wartością gry v, to para ta jest również parą strategii optymalnych gry $\bar{\Gamma}$ będącej mieszanym rozszerzeniem gry $G = \langle S, T, \bar{\mathbf{A}} \rangle$, gdzie $\bar{\mathbf{A}} = \alpha\mathbf{A} + [\beta]$, $(\alpha > 0)$, gdzie $[\beta]$ jest macierzą o tych samych wymiarach, co $\mathbf{A}$ ze wszystkimi elementami równymi β. Wartość gry $\bar{\Gamma}$ wynosi $\bar{v} = \alpha v + \beta$.

Łatwo zauważyć, że przyjmując $\beta \geqslant |v_1|$ mamy pewność, że wartość gry $\bar{\Gamma}$ będzie nieujemna.

W teorii gier zaproponowano wiele metod o mniejszej złożoności obliczeniowej niż algorytm sympleks, pozwalających znaleźć rozwiązania szczególnych postaci gier. Ich szczegółowe omówienie, które można znaleźć m. in. w [14], wykracza poza ramy tego skryptu.

9.3. Gry z naturą

Firma JOWOSEL S.C. jest niewielką firmą na rynku nieruchomości. Firma rozważa możliwość zainwestowania w dwie nieruchomości wymagające podobnych nakładów. Możliwości finansowe firmy pozwalają zrealizować w obecnej chwili tylko jeden z zakupów. Należy zatem wybrać jedną z trzech możliwych decyzji: d_1 - zainwestować w obiekt A, d_2 - zainwestować w obiekt B oraz d_3 - nie inwestować.

Zwrot nakładów na inwestycje zależy od podjętej decyzji i sytuacji na rynku nieruchomości w ciągu następnych 6 miesięcy. W tym czasie ceny nieruchomości mogą wzrosnąć, zmaleć lub pozostać na podobnym poziomie, co obecnie. Na podstawie posiadanych informacji JOWOSEL oszacował wartość możliwych zwrotów z poszczególnych inwestycji. Wyniki tych szacunków przedstawiono w Tablicy 9.3.

Tablica 9.3. Zwrot nakładów na inwestycje [zł]

	Sytuacja na rynku nieruchomości		
Decyzja	wzrost cen	ceny stabilne	spadek cen
d_1	30000	20000	-50000
d_2	50000	-20000	-30000
d_3	0	0	0

Powyższą sytuację również można analizować jako grę dwuosobową o sumie zero, jednak przeciwnik nie działa racjonalnie. Stany natury takie jak pogoda, sytuacja rynkowa itp. nie są sterowane żadnymi racjonalnymi decyzjami i nie są "zainteresowane" wynikiem gry. Z punktu widzenia gracza są to zjawiska losowe. Mogą one występować z jednakowym prawdopodobieństwem lub reprezentować dowolny rozkład prawdopodobieństwa. Tego typu gry rozwiązujemy stosując reguły decyzyjne:

— kryterium Walda (strategia maksyminowa, pesymistyczna),
— kryterium Hurwicza,
— kryterium Bayesa (przeciętna wygrana),
— kryterium Savage'a (minimalizacja strat).

9.3.1. Kryterium Walda

W podejściu Walda firma bierze pod uwagę najgorszy scenariusz związany z każdą decyzją. W wypadku decyzji d_1 jest to strata 50 000 zł, decyzji d_2 - strata 30 000 zł, a w wypadku decyzji d_3 strata jest zerowa. W tej sytuacji najbezpieczniejsza jest strategia d_3, gdyż nawet w najgorszym razie nie powoduje strat finansowych.

Stosując kryterium Walda wybiera się minimum w każdym wierszu, a następnie największą z tych wartości. Łatwo zauważyć, że jest to strategia maksyminowa (def. 9.1), gwarantująca, że gracz nie przegra więcej niż wynosi dolna wartość gry.

9.3.2. Kryterium Hurwicza

Kryterium Hurwicza pozwala badać najlepszą decyzję zależnie od przyjętego *współczynnika ostrożności*. Dla każdej strategii gracza obliczamy wartość

$$v_i = \gamma \cdot \min_j \ a_{ij} + (1-\gamma) \cdot \max_j \ a_{ij} \tag{9.15}$$

gdzie γ $(0 \leqslant \gamma \leqslant 1)$ oznacza współczynnik ostrożności, a a_{ij} są elementami macierzy wypłat. Następnie wybieramy strategię, dla której v_i jest największe.

Przyjmijmy w naszym przykładzie $\gamma = 0,6$. Obliczamy:

$v_1 = 0,6 \cdot \min\{30000, 20000, -50000\} + 0,4 \cdot \max\{30000, 20000, -50000\} = -18000$,

$v_2 = 0,6 \cdot \min\{50000, -20000, -30000\} + 0,4 \cdot \max\{50000, -20000, -30000\} = 2000$,

$v_3 = 0,6 \cdot \min\{0,0,0\} + 0,4 \cdot \max\{0,0,0\} = 0$

i otrzymujemy ostatecznie, że najlepsza jest strategia s_2. Gdyby zwiększyć współczynnik ostrożności, np. do $0,7$, to lepsza okaże się strategia s_3. Warto zauważyć, że dla $\gamma = 1$ kryterium Hurwicza jest tożsame z kryterium Walda.

9.3.3. Kryterium Bayesa

Kryterium Bayesa to po prostu wartość oczekiwana gry. W wypadku, gdy wszystkie stany natury są równo prawdopodobne, polega na wyliczeniu średnich arytmetycznych wygranej dla każdej strategii gracza, a następnie wybraniu strategii odpowiadającej największej z tych wartości. Jeżeli znany jest rozkład prawdopodobieństwa wystąpienia poszczególnych stanów natury, kryterium to pozwala wykorzystać tę informację do wyboru najlepszej strategii.

W naszym przykładzie założyliśmy, że stany natury są równo prawdopodobne, a więc oczekiwane wartości gry wynoszą odpowiednio:

$v_1 = \frac{1}{3} \cdot (30000 + 20000 - 50000) = 0$,

$v_2 = \frac{1}{3} \cdot (50000 - 20000 - 30000) = 0$,

$v_3 = \frac{1}{3} \cdot (0 + 0 + 0) = 0$

Kryterium Bayesa nie pozwala rozstrzygnąć, która strategia jest najlepsza dla firmy JOWOSEL.

9.3.4. Kryterium Savage'a

Kryterium Savage'a realizuje postulat minimalizacji oczekiwanych strat z niewykorzystanych szans. Stratę oblicza się jako różnicę miedzy największą wygraną dla danego stanu natury a wygraną odpowiadającą decyzji gracza. Dla każdej strategii gracza wyznaczamy maksymalną stratę i wybieramy strategię odpowiadającą największej z nich.

W tablicy 9.4 obliczono straty dla poszczególnych strategii i stanów natury.

Tablica 9.4. Straty dla poszczególnych strategii

	Sytuacja na rynku nieruchomości		
Decyzja	wzrost cen	ceny stabilne	spadek cen
d_1	20000	0	50000
d_2	0	40000	30000
d_3	50000	20000	0

Największe straty dla poszczególnych strategii wynoszą: 50000 dla strategii d_1 i d_3 oraz 40000 dla strategii d_2. Zatem podejmując decyzję d_2 firma nie straci więcej niż 40000 zł w stosunku do maksymalnego zwrotu z inwestycji.

Podsumowując, jeżeli firma zamierza inwestować, to bezpieczniejszą strategią jest zainwestować w obiekt B.

9.4. Zadania

Zadanie 9.1

Rozwiązać graficznie grę mieszaną o macierzy wypłat podanej w tablicy 9.5.

Tablica 9.5. Macierz wypłat

	Gracz B					
Gracz A	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
s_1	1	0	2	4	3	-1
s_2	2	1	4	0	-1	2
s_3	1	0	1	2	1	-2

Zadanie 9.2

Rozwiązać grę mieszaną o macierzy wypłat podanej w tablicy 9.6.

Zadanie 9.3

Pułkownik Blotto ma 4 oddziały wojska, które może wysłać w celu zajęcia dwóch posterunków. Znany porucznik Kije ma 3 oddziały i chce zająć te same posterunki. Gra jest zdefiniowana następująco: armia, która wyśle więcej oddziałów do danego posterunku przejmuje ten posterunek i wszystkie oddziały przeciwnika, zdobywając punkt za każdy pojmany oddział. Jeżeli obie armie wyślą tę samą liczbę oddziałów, to obie sie wycofują bez strat. Narysować macierz gry i znaleźć jej rozwiązanie.

Tablica 9.6. Macierz wypłat

	Gracz B				
Gracz A	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
s_1	200	70	10	30	120
s_2	70	80	100	80	110
s_3	80	150	0	80	30
s_4	70	70	90	20	60

Zadanie 9.4

Gracz B wybiera liczbę $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, a gracz A próbuje zgadnąć tę liczbę. Jeżeli zgadnie, to wygrywa 2 zł od gracza B. Jeżeli poda liczbę większą niż gracz B, to przegrywa 1 zł na rzecz gracza B, ale jeżeli poda liczbę mniejszą, to jest remis. Narysować macierz wypłat i znaleźć rozwiązanie gry.

Zadanie 9.5

Rolnik ma wybrać jeden z trzech możliwych terminów siewów: A, B, C. Plony z 1 ha w zależności od przyszłego możliwego stanu pogody I, II, III, IV oraz terminu siewu podano w tablicy 9.7

Tablica 9.7. Macierz wypłat

	Pogoda			
Termin siewu	*I*	*II*	*III*	*IV*
A	21	15	32	16
B	13	27	25	15
C	28	20	10	20