Elementy teorii gier

Badania operacyjne

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Plan

- Przykład
- Definicja gry dwuosobowej o sumie zerowej
- Macierz gry
- Strategie zdominowane
- Mieszane rozszerzenie gry
- Strategie mieszane
- Rozwiązywanie gier macierzowych
- Zastosowania teorii gier w podejmowaniu decyzji biznesowych

Przykład 1 (strategie zdominowane)

Dwóch panów Jacek i Wojtek nudziło się nieco w barze i dla urozmaicenia sobie czasu umówili się, że zagrają w następująca grę: będą mówić liczby od 1 do 6 (Jacek 1, 3 lub 5, a Wojtek 2, 4 lub 6). Jeżeli suma będzie większa od 7, to sumę otrzymuje od Jacka Wojtek, a gdy mniejsza – odpowiednio sumę wypłaci Wojtek Jackowi. Gdy suma jest równa 7, to nikt nie wygrywa.

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Analiza

		STRATEGIE WOJTKA		
STRATEGIE JACKA		2	4	6
	1	3	5	7
	3	5	7	9
	5	7	9	11

Wygrywa Jacek

Wygrywa Wojtek – przegrywa Jacek

Gra wg Jacka

		STRATEGIE WOJTKA		
STRATEGIE JACKA		2	4	6
	1	3	5	0
	3	5	0	-9
	5	0	-9	-11

Wygrywa Jacek

Wygrywa Wojtek – przegrywa Jacek

Gra dwuosobowa o sumie zerowej

		STRATEGIE WOJTKA = GRACZA B		
STRATEGIE JACKA = GRACZA A		2	4	6
	1	3	5	0
	3	5	0	-9
	5	0	-9	-11

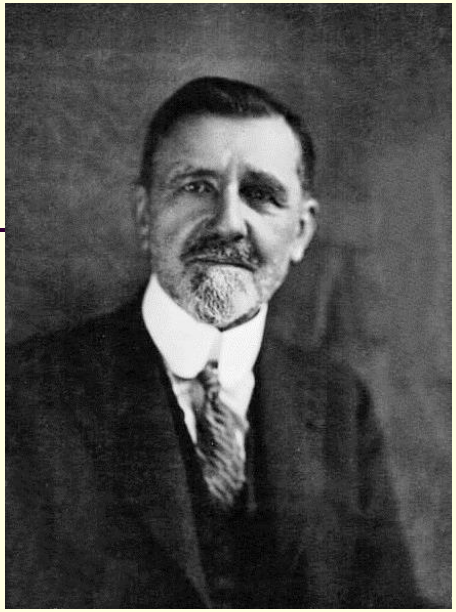
wygrana Jacka =
WYPŁATA =
przegrana Wojtka

MACIERZ GRY

Suma wygranych obu graczy = 0

Teoria gier strategicznych

- **Emil Borel (1921)**
  pierwsza próba opracowania matematycznej teorii gier
- **John von Neumann (1928)**
  twierdzenie minimaksowe
- **John von Neumann, Oscar Morgenstern (1944)**
  „Theory of Games and Economic Behavior"



Emil Borel
(1871-1956)

John von Neumann
(1903-1957)

Gra macierzowa

Grą dwuosobową o sumie zero nazywamy trójkę $G=\langle S,T,W\rangle$, w której S i T są odpowiednio zbiorami strategii czystych gracza A i B, a W(s, t) jest funkcją wypłat (wygraną gracza A = przegraną gracza B) przyjmującą skończone wartości liczbowe i określoną na iloczynie kartezjańskim S x T zbiorów strategii obu graczy.

Gdy zbiory S i T są skończone, macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, gdzie $a_{ij} = W(s_i, t_j)$, $s_i \in S$ $t_j \in T$, nazywamy macierzą wypłat lub macierzą gry, a grę $G=\langle S,T,\mathbf{A}\rangle$ grą macierzową.

Strategia maksyminowa

		STRATEGIE GRACZA B		
STRATEGIE GRACZA A		2	4	6
	1	3	5	0
	3	5	0	-9
	5	0	-9	-11

Dolną wartością gry G=⟨S,T,W⟩ nazywamy liczbę:

$$v_1 = \max_{s \in S} \min_{t \in T} W(s,t)$$

Strategia s_0 odpowiadająca dolnej wartości gry nazywa się strategią maksyminową.

Jest to strategia gwarantująca graczowi A, że wygra co najmniej v_1.

Strategia minimaksowa

		STRATEGIE GRACZA B		
		2	4	6
STRATEGIE GRACZA A	1	3	5	0
	3	5	0	-9
	5	0	-9	-11

Górną wartością gry G=⟨S,T,W⟩ nazywamy liczbę:

$$v_2 = \min_{t\in T}\max_{s\in S} W(s,t)$$

Strategia t_0 odpowiadająca górnej wartości gry nazywa się strategią minimaksową.

Jest to strategia gwarantująca graczowi B, że przegra co najwyżej v_2.

Strategia zdominowana

		STRATEGIE GRACZA B		
STRATEGIE GRACZA A		2	4	6
	1	3	5	0
	3	5	0	-9
	5	~~0~~	~~-9~~	~~-11~~

Jeżeli w grze macierzowej G=⟨S,T,**A**⟩ każdy element pewnego wiersza macierzy wypłat odpowiadającego strategii $s_k \in S$ gracza A jest mniejszy lub równy od odpowiedniego elementu innego wiersza, to strategia s_k nosi nazwę **strategii zdominowanej gracza A**.

Strategia zdominowana

		STRATEGIE GRACZA B		
STRATEGIE GRACZA A		2	4	6
	1	3	5	0
	3	5	0	-9
	5	0	-9	-11

Jeżeli w grze macierzowej $G=\langle S,T,\mathbf{A}\rangle$ każdy element pewnej kolumny macierzy wypłat odpowiadającej strategii $t_l \in T$ gracza B jest większy lub równy od odpowiedniego elementu innej kolumny, to strategia t_l nosi nazwę **strategii zdominowanej gracza B**.

Definicja punktu siodłowego macierzy

		STRATEGIE GRACZA B		
STRATEGIE GRACZA A		2	4	6
	1	3	5	0
	3	5	0	-9
	5	0	-9	-11

Punktem siodłowym macierzy **A** = $[a_{ij}]$, (i = 1, 2, ...,m, j = 1, 2, ..., n), jeżeli taki istnieje nazywamy element $\mathbf{a_{rk}}$, który spełnia warunek:

$$a_{ik} \le \mathbf{a_{rk}} \le a_{rj}.$$

Macierz **A** ma punkt siodłowy wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$v_1 = \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v_2$$

Przykład 2 (gry mieszane)

Wyobraź sobie, że jesteś w bibliotece i do Twojego stolika przysiada się nieznajoma proponując następującą grę:

Na sygnał każde z nas położy na stole monetę (na przykład złotówkę). Jeżeli obie monety będą leżały orzełkiem do góry, to płacę 3 złote, a jeżeli obie będą leżały reszką do góry, to płacę złotówkę. Natomiast jeżeli będą różne wskazania, to Ty płacisz dwa złote.

Gra jest cicha, więc można zagrać w bibliotece, ale czy warto?

Wartość oczekiwana

- Gdyby gra była losowa, to łatwo obliczyć, że
  - Prawdopodobieństwo dwóch orzełków P(oo)=0,25
  - Prawdopodobieństwo dwóch reszek P(rr)=0,25
  - Prawdopodobieństwo orzełka i reszki P(or)=P(ro)=0,5
- Zatem wartość oczekiwana wygranej
  - V = 3*0,25 + 1*0,25 = 1
  - VN = 2*0,5 = 1
  - jest taka sama dla nieznajomej i dla czytelnika.

Wartość oczekiwana

- Gdyby nieznajoma grała dwa razy częściej reszkę niż orzełka, a czytelnik nadal grał losowo, to
  - Prawdopodobieństwo dwóch orzełków

    P(oo) = 2/6*3/6 = 1/6
  - Prawdopodobieństwo dwóch reszek

    P(rr) = 4/6*3/6 = 1/3
  - Prawdopodobieństwo orzełka i reszki

    P(or) = P(ro) = (1 – 1/3 – 1/6) = 1/2
- Zatem wartość oczekiwana gry:
  - EV = 2*1/2 – 3*1/6 – 1*1/3 = 1/6
  - Na każde 6 rozgrywek nieznajoma wygrywa 1 zł.

Dobra strategia

Czy istnieje strategia, która w dłuższym okresie pozwoli czytelnikowi wygrać z nieznajomą?

Macierz gry

Strategie nieznajomej	Strategie czytelnika	
	t_1 = O	t_2 = R
s_1 = O	– 3	2
s_2 = R	2	– 1

Należy zaplanować z jakim prawdopodobieństwem grać orzełka, np. 1/3, od razu widać, że reszka będzie grana z prawdopodobieństwem 1 – 1/3 = 2/3.

Strategia mieszana

Strategią mieszaną (lub zrandomizowaną) gracza A nazywamy skokowy rozkład prawdopodobieństwa określony na zbiorze S strategii czystych tego gracza, tzn. jest to wektor $x^T = [x_1, x_2, ..., x_m]$, taki że:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, ..., m)$$

Strategią mieszaną (lub zrandomizowaną) gracza B nazywamy skokowy rozkład prawdopodobieństwa określony na zbiorze T strategii czystych tego gracza, tzn. jest to wektor $y = [y_1, y_2, ..., y_n]$, taki że:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \geq 0 \ (j = 1, 2, ..., n)$$

Mieszane rozszerzenie gry

Mieszanym rozszerzeniem gry macierzowej $G=\langle S,T,\mathbf{A}\rangle$ nazywamy trójkę $\Gamma=\langle X,Y,\varphi(X,Y)\rangle$, w której zbiór

$$X = \{x\colon \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ (i = 1,2,\dots, m)\}$$

jest zbiorem strategii mieszanych gracza A, a zbiór

$$Y=\{y\colon \sum_{i=1}^{n} y_i = 1,\ y_j \ge 0,\ (j = 1,2,\dots, n)\}$$ - gracza B.

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = x^T \mathbf{A} y$$

jest wartością oczekiwaną wygranej gracza A.

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Dolna i górna wartość gry Γ

Dolną wartością gry Γ nazywamy liczbę:

$$k_1 = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T \mathbf{A} y$$

a górną wartością gry Γ liczbę:

$$k_2 = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T \mathbf{A} y$$

Własność: $v_1 \le k_1 \le k_2 \le v_2$

Jeżeli $v_1 = v_2$, to $k_1 = k_2$.

Punkt siodłowy

Strategie nieznajomej	Strategie czytelnika	
	O (t_1)	R(t_2)
O(s_1)	– 3	2
R(s_2)	2	– 1

Jeżeli Γ, jest mieszanym rozszerzeniem gry G= $\langle$S,T,**A**$\rangle$ i macierz **A** posiada punkt siodłowy a_{rk} ($v_1 = k_1 = k_2 = v_2$), to strategiami optymalnymi gry Γ jest para strategii czystych:

$$\{x_r = 1,\ \ x_i = 0 \text{ dla } i \neq r\}$$

oraz

$$\{y_k = 1,\ \ y_j = 0 \text{ dla } j \neq k\},$$

A wartość tej gry wynosi a_{rk}.

Tak było w przypadku gry Jacka i Wojtka

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Wartość oczekiwana mieszanego rozszerzenia gry

Strategie nieznajomej	Strategie czytelnika	
	O (t_1)	R(t_2)
O(s_1)	– 3	2
R(s_2)	2	– 1

Niech x oznacza prawdopodobieństwo, z jakim nieznajoma gra orzełka. Wtedy nieznajoma gra reszkę z prawdopodobieństwem (1 – x). Oznaczmy przez V wartość oczekiwaną wypłaty dla nieznajomej. Jeżeli chce ona osiągnąć wygraną co najmniej V, to jej strategie powinny spełniać następujący układ nierówności:

$-3x + 2(1 - x) \geq V$ (1) gdy czytelnik gra orzełka

$2x - (1 - x) \geq V$ (2) gdy czytelnik gra reszkę

Wartość oczekiwana mieszanego rozszerzenia gry

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Strategie nieznajomej	Strategie czytelnika	
	O (t_1)	R(t_2)
O(s_1)	– 3	2
R(s_2)	2	– 1

$$-3x + 2(1 - x) \geq V \qquad (1)$$

$$2x - (1 - x) \geq V \qquad (2)$$

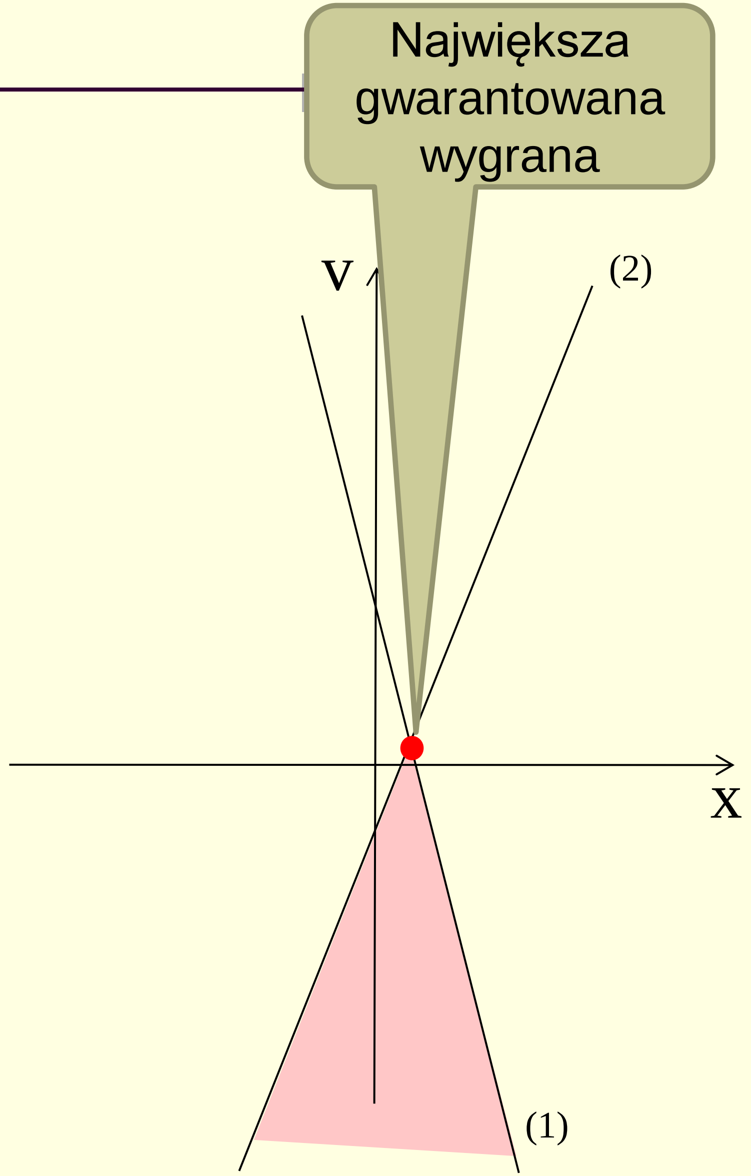
$$-3x + 2(1 - x) = 2x - (1 - x)$$

$$-3x + 2 - 2x = 2x - 1 + x$$

$$3 = 8x$$

$$x = 3/8$$

$$V = -3 * 3/8 + 2 * 5/8 = 1/8$$



prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Wartość oczekiwana mieszanego rozszerzenia gry

Strategie nieznajomej	Strategie czytelnika	
	O (t_1)	R(t_2)
O(s_1)	– 3	2
R(s_2)	2	– 1

Podobnie dla czytelnika, niech y oznacza prawdopodobieństwo, z jakim czytelnik gra orzełka, a (1 – y) prawdopodobieństwo zagrania przez niego reszki. Czytelnik chce osiągnąć przegraną co najwyżej V, więc jego strategie powinny spełniać następujący układ nierówności:

$$-3y + 2(1-y) \le V \qquad (1)$$
$$2y - (1-y) \le V \qquad (2)$$

Wartość oczekiwana mieszanego rozszerzenia gry

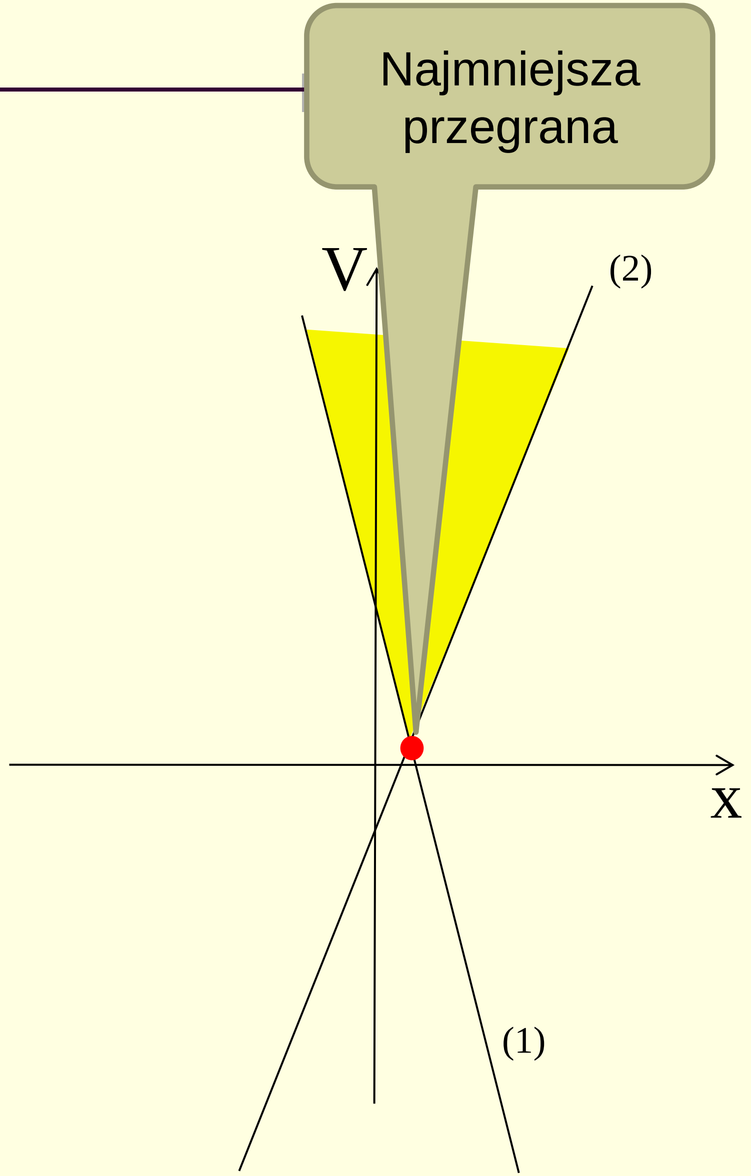
Strategie nieznajomej	Strategie czytelnika	
	O (t_1)	R(t_2)
O(s_1)	– 3	2
R(s_2)	2	– 1

$V = 1/8$

$-3y + 2(1 - y) \le V \quad (1)$

$2y - (1 - y) \le V \quad (2)$

$y = 3/8$



Wartość oczekiwana mieszanego rozszerzenia gry

Strategie nieznajomej	Strategie czytelnika	
	O (t_1)	R(t_2)
O(s_1)	– 3	2
R(s_2)	2	– 1

V* = 1/8

x* = 3/8

y* = 3/8

- Rozwiązanie to oznacza, że jeżeli zarówno czytelnik, jak i nieznajoma będą na każde osiem gier trzy razy wybierać orzełka, to nieznajoma wygra 1 zł na każde osiem rozgrywek.
- Jest to dla niej wygrana gwarantowana, czyli grając orzełka w 3 na 8 gier wygra co najmniej 1 zł na każde osiem gier.
- Dla czytelnika jest to strategia gwarantująca, że nie przegra więcej niż 1 zł na każde 8 gier.

Strategie optymalne

Parę strategii $x^* \in X$ i $y^* \in Y$ nazywamy strategiami optymalnymi gracza A i B odpowiednio, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ i $y \in Y$ zachodzi:

$$x^T \mathbf{A} y^* \leq x^{*T} \mathbf{A} y^* \leq x^{*T} \mathbf{A} y$$

a liczbę $v = x^{*T} \mathbf{A} y^*$ nazywamy wartością gry.

Parę strategii optymalnych nazywa się punktem siodłowym gry.

Strategie optymalne

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby para strategii $x^* \in X$ i $y^* \in Y$ była parą strategii optymalnych jest równość $k_1 = k_2$, czyli równość dolnej i górnej wartości gry. Wtedy wartość gry $v^* = k_1 = k_2$.

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Twierdzenie minimaksowe

Przez rozwiązanie gry będziemy rozumieć znalezienie strategii optymalnych (x^*, y^*) oraz wartości gry v^*.

Każda gra Γ będąca mieszanym rozszerzeniem gry macierzowej $G = \langle S, T, \mathbf{A} \rangle$ ma rozwiązanie.

Uwaga: Gra wyjściowa G może, ale nie musi mieć rozwiązania.

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Własności strategii optymalnych

Jeżeli istnieje więcej niż jedna strategia optymalna dla danego gracza, to każda wypukła kombinacja liniowa tych strategii jest strategią optymalną tego gracza.

$$x^* = \alpha x_1^* + (1-\alpha)x_2^*$$

Uwaga: Zbiór strategii optymalnych danego gracza jest zbiorem wypukłym.

Rozwiązywanie gier mieszanych

1. Eliminujemy z macierzy A strategie zdominowane obu graczy. Odpowiednie współrzędne wektorów x i y przyjmą wartość 0.
2. Badamy, czy macierz A ma punkt siodłowy. Jeżeli a_{rk} jest punktem siodłowym macierzy A, to rozwiązaniem jest para strategii czystych: (x_r, y_k).
3. Przypadek, gdy A ma postać 2 x n:
   a. rozwiązujemy graficznie układ nierówności:

   $$g_j(x) = (a_{1j} - a_{2j})x + a_{2j} \geq v, \; j = 1, 2, ..., n$$

   b. znajdujemy punkt (x*, v*) i usuwamy ze zbioru T strategie, dla których

   $$a_{1k}x^* + a_{2k}(1 - x^*) > v^*$$

   c. znajdujemy strategie optymalne gracza B rozwiązując problem z macierzą postaci m x 2.

Rozwiązywanie gier mieszanych

4. Przypadek, gdy A ma postać m x 2:
   a. rozwiązujemy graficznie układ nierówności:

   $$h_j(y) = (a_{i1} - a_{i2})y + a_{i2} \leq v, \ i = 1, 2, ..., m$$

   b. znajdujemy punkt (y^*, v^*) i usuwamy ze zbioru T strategie, dla których

   $$a_{r1}y^* + a_{r2}(1 - y^*) < v^*.$$

Przykład

$$g_j(x) = (a_{1j} - a_{2j})x + a_{2j} \geq v,\ j = 1, 2, ..., n$$

Brak punktu siodłowego

Rozważmy grę mieszaną o nast jącej macierzy wypłat:

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	0	~~2~~	4	3
s_2	1	~~4~~	-5	-1
s_3	~~0~~	~~1~~	~~2~~	~~1~~

$$x^*_3 = 0$$

$$y^*_2 = 0$$

$$\begin{cases} g_1(x) = (0 - 1)x + 1 \geq v \\ g_2(x) = (4 + 5)x - 5 \geq v \\ g_3(x) = (3 + 1)x - 1 \geq v \end{cases}$$

Przykład

$g_j(x) = (a_{1j} - a_{2j})x + a_{2j} \geq v,\ j = 1, 2, ..., n$

Brak punktu siodłowego

Rozważmy grę mieszaną o następującej macierzy wypłat:

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	0	~~2~~	4	3
s_2	1	~~4~~	-5	-1
s_3	~~0~~	~~1~~	~~2~~	~~1~~

$x^*_3 = 0$

$y^*_2 = 0$

$$\begin{cases} g_1(x) = (0 - 1)x + 1 \geq v \\ g_2(x) = (4 + 5)x - 5 \geq v \\ g_3(x) = (3 + 1)x - 1 \geq v \end{cases}$$

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Przykład

	t_1	t_3	t_4
s_1	0	4	3
s_2	1	-5	-1

$$\begin{cases} g_1(x) = -x + 1 \geq v \\ g_2(x) = 9x - 5 \geq v \\ g_3(x) = 4x - 1 \geq v \end{cases}$$

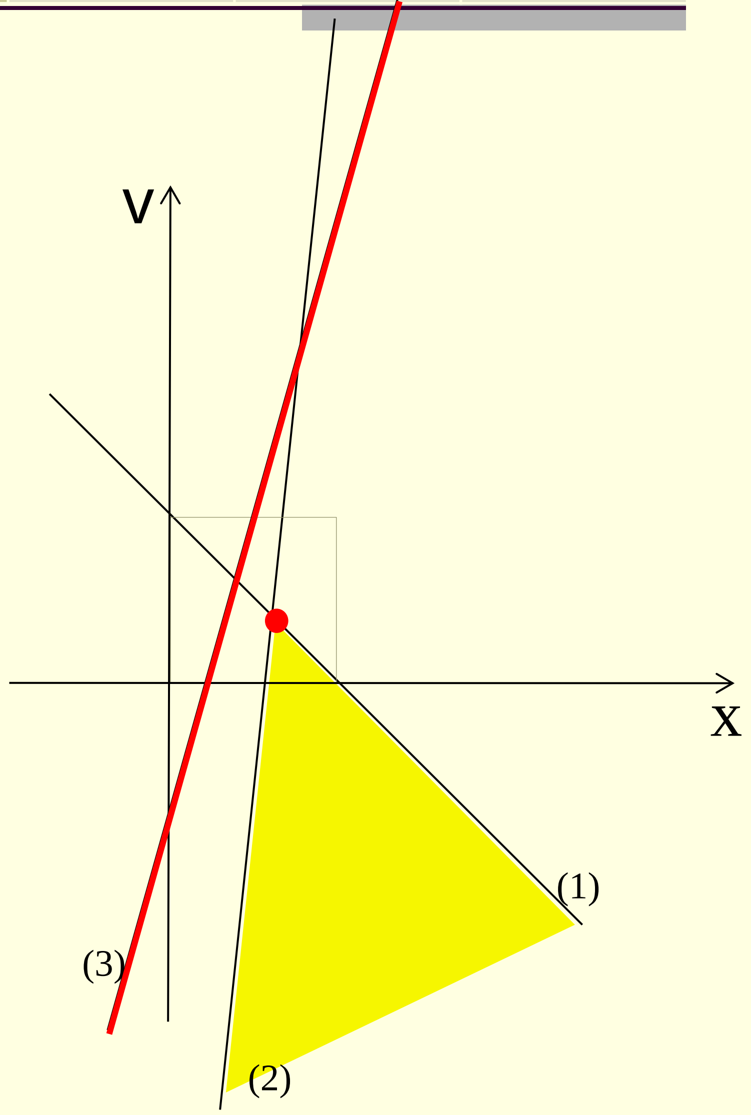
$x^*_1 = 0{,}6$

$x^*_2 = 0{,}4$

$v^* = 0{,}4$

$g_3(x) = 4x - 1 > v^*$

$y^*_4 = 0$



Przykład

	t_1	t_3
s_1	0	4
s_2	1	– 5

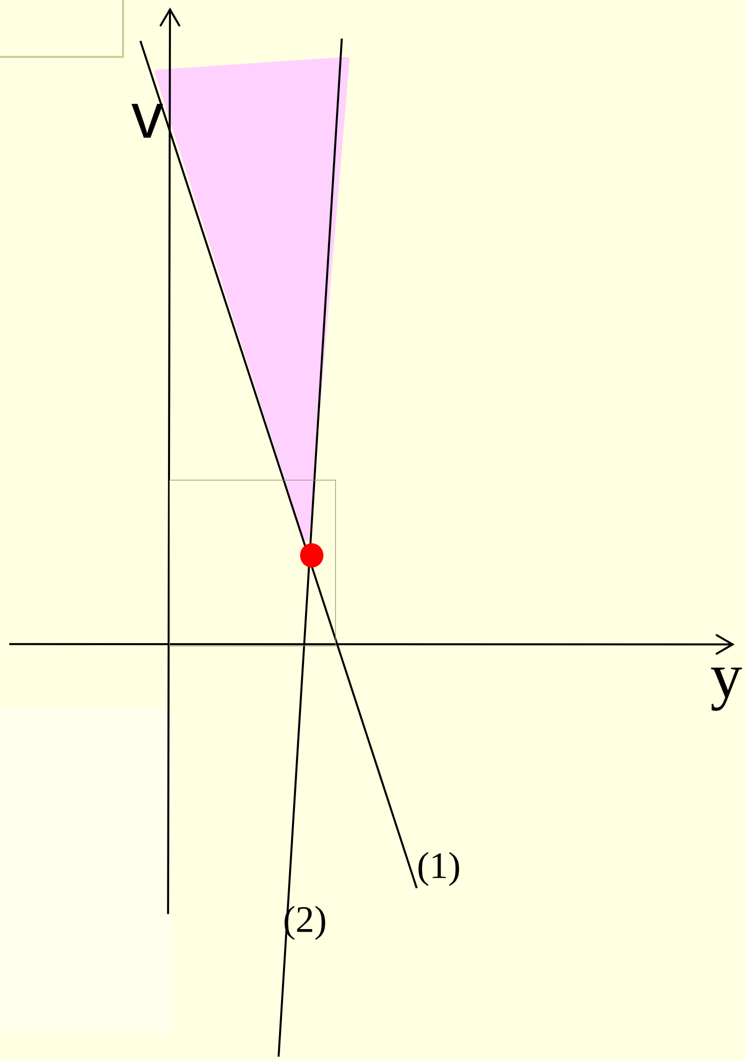
$h_j(y) = (a_{i1} - a_{i2})y + a_{i2} \leq v, \; i = 1, 2, ..., m$

$$\begin{cases} h_1(x) = (0 - 4)y + 4 = -4y + 4 \leq v \\ h_2(x) = (1 + 5)y - 5 = \quad 6y - 5 \leq v \end{cases}$$

$y^*_1 = 0{,}9$

$y^*_3 = 0{,}1$

$v^* = 0{,}4$



Rozwiązanie gry

	t_1	t_2	t_3	t_4
s_1	0	2	4	3
s_2	1	4	-5	-1
s_3	0	1	2	1

$$x^* = [0,6 \; ; \; 0,4 \; ; \; 0]$$

$$y^* = [0,9 \; ; \; 0 \; ; \; 0,1 \; ; \; 0]$$

$$v^* = 0,4$$

Przykład – gra Morra

Każdy partner pokazuje 1, 2 lub 3 palce i jednocześnie mówi, ile palców wg jego przypuszczenia pokaże w tym czasie przeciwnik.

Jeżeli tylko jeden partner odgadnie prawidłowo sumę pokazanych palców, to otrzymuje wygraną równą tej sumie.

W przeciwnym razie jest remis.

Przykład – gra Morra

		t_1	t_2	t_3	T_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
		(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
s_1	(1,1)	0	2	2	-3	0	0	-4	0	0
s_2	(1,2)	-2	0	0	0	3	3	-4	0	0
s_3	(1,3)	-2	0	0	-3	0	0	0	4	4
s_4	(2,1)	3	0	3	0	-4	0	0	-5	0
s_5	(2,2)	0	-3	0	4	0	4	0	-5	0
s_6	(2,3)	0	-3	0	0	-4	0	5	0	5
s_7	(3,1)	4	4	0	0	0	-5	0	0	-6
s_8	(3,2)	0	0	-4	5	5	0	0	0	-6
s_9	(3,3)	0	0	-4	0	0	-5	6	6	0

f. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Przykład

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
(1,1)	0	2	2	-3	0	0	-4	0	0
(1,2)	-2	0	0	0	3	3	-4	0	0
(1,3)	-2	0	0	-3	0	0	0	4	4
(2,1)	3	0	3	0	-4	0	0	-5	0
(2,2)	0	-3	0	4	0	4	0	-5	0
(2,3)	0	-3	0	0	-4	0	5	0	5
(3,1)	4	4	0	0	0	-5	0	0	-6
(3,2)	0	0	-4	5	5	0	0	0	-6
(3,3)	0	0	-4	0	0	-5	6	6	0

$$g_j(x) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v,\ j = 1,\dots,n$$

zmaksymalizować v

przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned}
0x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 0x_5 + 0x_6 - 4x_7 + 0x_8 + 0x_9 &\geq v \\
-2x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 3x_5 + 3x_6 - 4x_7 + 0x_8 + 0x_9 &\geq v \\
-2x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 3x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 4x_8 + 4x_9 &\geq v \\
3x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 0x_4 - 4x_5 + 0x_6 + 0x_7 - 5x_8 + 0x_9 &\geq v \\
0x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 4x_6 + 0x_7 - 5x_8 + 0x_9 &\geq v \\
0x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 4x_5 + 0x_6 + 5x_7 + 0x_8 + 5x_9 &\geq v \\
4x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 5x_6 + 0x_7 + 0x_8 - 6x_9 &\geq v \\
0x_1 + 0x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 - 6x_9 &\geq v \\
0x_1 + 0x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 5x_6 + 6x_7 + 6x_8 + 0x_9 &\geq v \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 &= 1
\end{aligned}$$

f. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Przykład

$$g_j(x) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq v,\ j = 1, \ldots, n$$

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
(1,1)	0	2	2	-3	0	0	-4	0	0
(1,2)	-2	0	0	0	3	3	-4	0	0
(1,3)	-2	0	0	-3	0	0	0	4	4
(2,1)	3	0	3	0	-4	0	0	-5	0
(2,2)	0	-3	0	4	0	4	0	-5	0
(2,3)	0	-3	0	0	-4	0	5	0	5
(3,1)	4	4	0	0	0	-5	0	0	-6
(3,2)	0	0	-4	5	5	0	0	0	-6
(3,3)	0	0	-4	0	0	-5	6	6	0

zmaksymalizować v

przy ograniczeniach:

$$0x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 0x_5 + 0x_6 - 4x_7 + 0x_8 + 0x_9 \geq v$$

$$-2x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 3x_5 + 3x_6 - 4x_7 + 0x_8 + 0x_9 \geq v$$

$$-2x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 3x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 4x_8 + 4x_9 \geq v$$

Rozwiązujemy metodą sympleks, np. narzędziem ExploreLP.

$$0x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 4x_4 + 0x_5 + 4x_6 + 0x_7 - 5x_8 + 0x_9 \geq v$$

$$0x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 - 4x_5 + 0x_6 + 5x_7 + 0x_8 + 5x_9 \geq v$$

$$4x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 5x_6 + 0x_7 + 0x_8 - 6x_9 \geq v$$

$$0x_1 + 0x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8 - 6x_9 \geq v$$

$$0x_1 + 0x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 0x_5 - 5x_6 + 6x_7 + 6x_8 + 0x_9 \geq v$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 = 1$$

Rozwiązanie gry

		t_1	t_2	t_3	T_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
		(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
s_1	(1,1)	0	2	2	-3	0	0	-4	0	0
s_2	(1,2)	-2	0	0	0	3	3	-4	0	0
s_3	(1,3)	-2	0	0	-3	0	0	0	4	4
s_4	(2,1)	3	0	3	0	-4	0	0	-5	0
s_5	(2,2)	0	-3	0	4	0	4	0	-5	0
s_6	(2,3)	0	-3	0	0	-4	0	5	0	5
s_7	(3,1)	4	4	0	0	0	-5	0	0	-6
s_8	(3,2)	0	0	-4	5	5	0	0	0	-6
s_9	(3,3)	0	0	-4	0	0	-5	6	6	0

$$x^* = [0\ \ 0\ \ 20/47\ \ 0\ \ 15/47\ \ 0\ \ 12/47\ \ 0\ \ 0]$$

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Rozwiązanie gry

		t_1	t_2	t_3	T_4	t_5	t_6	t_7	t_8	t_9
		(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(3,1)	(3,2)	(3,3)
s_1	(1,1)	0	2	2	-3	0	0	-4	0	0
s_2	(1,2)	-2	0	0	0	3	3	-4	0	0
s_3	(1,3)	-2	0	0	-3	0	0	0	4	4
s_4	(2,1)	3	0	3	0	-4	0	0	-5	0
s_5	(2,2)	0	-3	0	4	0	4	0	-5	0
s_6	(2,3)	0	-3	0	0	-4	0	5	0	5
s_7	(3,1)	4	4	0	0	0	-5	0	0	-6
s_8	(3,2)	0	0	-4	5	5	0	0	0	-6
s_9	(3,3)	0	0	-4	0	0	-5	6	6	0

$$x^* = [0 \;\; 0 \;\; 20/47 \;\; 0 \;\; 15/47 \;\; 0 \;\; 12/47 \;\; 0 \;\; 0]$$

$$y^* = [0 \;\; 0 \;\; 20/47 \;\; 0 \;\; 15/47 \;\; 0 \;\; 12/47 \;\; 0 \;\; 0]$$

$$v^* = 0$$

Przykład

Rozwiązać następującą grę:

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
s_1	1	2	3	3	6
s_2	2	6	1	3	3
s_3	3	1	3	6	2
s_4	3	3	6	2	1

http://levine.sscnet.ucla.edu/workshops/zerosum.htm

Przykład

$$g_j(x)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \geq v,\ j=1,\ldots,n$$

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
s_1	1	2	3	3	6
s_2	2	6	1	3	3
s_3	3	1	3	6	2
s_4	3	3	6	2	1

zmaksymalizować v

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 &\geq v\\
2x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 &\geq v\\
3x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 &\geq v\\
3x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 2x_4 &\geq v\\
6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &\geq v\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1
\end{aligned}$$

Rozwiązujemy metodą sympleks, np. narzędziem ExploreLP.

Sformułowanie problemu LP

Formulated Problem

Names	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**v**	**Rel**	**RHS**
Row1	1	2	3	3	-1	>	0
Row2	2	6	1	3	-1	>	0
Row3	3	1	3	6	-1	>	0
Row4	3	3	6	2	-1	>	0
Row5	6	3	2	4	-1	>	0
Row6	1	1	1	1	0	=	1
Obj	0	0	0	0	1	=	0

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Rozwiązanie

Current Solution

Symbol	Variable	Status	Value	
X1	x1	Basic	2/25	0,08
X2	x2	Basic	7/25	0,28
X3	x3	Basic	3/5	0,60
X4	x4	Basic	1/25	0,04
X5	v	Basic	64/25	2,56
OBJ	Obj	Basic	-64/25	**2, 56**

x* = [0,08 ; 0,28 ; 0,60 ; 0,04]
v* = 2,56

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Rozwiązanie

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
s_1	1	2	3	3	6
s_2	2	6	1	3	3
s_3	3	1	3	6	2
s_4	3	3	6	2	1

$$h_i(y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq v, i = 1,\dots, m$$

zminimalizować v

przy ograniczeniach

$$\begin{aligned}
y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 3y_4 + 6y_5 - v &\leq 0 \\
2y_1 + 6y_2 + y_3 + 3y_4 + 3y_5 - v &\leq 0 \\
3y_1 + y_2 + 3y_3 + 6y_4 + 2y_5 - v &\leq 0 \\
3y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 2y_4 + y_5 - v &\leq 0 \\
y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 &= 1
\end{aligned}$$

x* = [0,08 ; 0,28 ; 0,60 ; 0,04]
y* = [0,6 ; 0,08 ; 0,04 ; 0 ; 0,28]
v* = 2,56

Gry z naturą

- Przeciwnik nie podejmuje decyzji w sposób racjonalny.
- Przeciwnik nie jest zainteresowany wynikiem gry.
- Stany natury mogą występować:
  - z jednakowym prawdopodobieństwem,
  - z różnymi prawdopodobieństwami.

Kryterium Walda (pesymistyczne)

- Wybiera maksymalną wygraną przy założeniu, że natura zachowa się najbardziej niekorzystnie.
- Postępowanie:
  - Wybieramy minimalną wartość w każdym z wierszy – zakładamy, że zajdą warunki najbardziej niekorzystne dla gracza;
  - Z uzyskanych wyników wybieramy wartość największą.
  - Uzyskana wartość stanowi gwarantowaną wygraną w najgorszym wypadku.

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Kryterium Walda (pesymistyczne)

Rolnik ma wybrać jeden z 3 możliwych terminów siewu (1.03, 10.03 lub 15.03). Plony z hektara w zależności od przyszłego możliwego stanu pogody A, B, C i D oraz terminu siewu podaje tablica:

Terminy siewu	A	B	C	D	
1.03	21	15	32	16	15
10.03	28	20	10	20	10
15.03	13	27	25	15	13

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Kryterium Hurwicza

- Gotowość do podjęcia ryzyka wyraża tzw. współczynnik ostrożności.
- Postępowanie:
  - Ustala się arbitralnie tzw. współczynnik ostrożności γ $(0 \le \gamma \le 1)$
  - Dla każdej strategii i gracza stosujemy wzór:

$$v_i = \gamma \min_j a_{ij} + (1-\gamma)\max_j a_{ij}$$

  - Ostatecznie wybieramy strategię, dla której v_i ma największą wartość.
- Dla $\gamma = 1$ Kryterium Hurwicza jest tożsame z kryterium Walda.

Kryterium Hurwicza $\gamma = 0,4$

Rolnik ma wybrać jeden z 3 możliwych terminów siewu (1.03, 10.03 lub 15.03). Plony z hektara w zależności od przyszłego możliwego stanu pogody A, B, C i D oraz terminu siewu podaje tablica:

Terminy siewu	A	B	C	D	
1.03	21	15	32	16	25,2
10.03	28	20	10	20	20,8
15.03	13	27	25	15	21,4

Kryterium Savage'a

- Spełnia postulat minimalizacji oczekiwanych strat wynikłych z podjęcia decyzji gorszej niż najlepsza możliwa dla danego stanu natury
- Postępowanie:
  - Wyznacza się macierz strat relatywnych:

    Strata jest różnicą między największą możliwą wygraną dla danego stanu natury i wygraną odpowiadającą decyzji gracza.
  - Dla każdej strategii znajduje się maksymalną stratę i wybiera się strategię odpowiadającą najmniejszej z nich.

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Kryterium Savage'a

Macierz gry

Terminy siewu	A	B	C	D
1.03	21	15	32	16
10.03	28	20	10	20
15.03	13	27	25	15

Macierz strat

Terminy siewu	A	B	C	D	
1.03	7	12	0	4	12
10.03	0	7	22	0	22
15.03	15	0	7	5	15

Kryterium Bayesa

- Uwzględnia prawdopodobieństwo wystąpienia każdego stanu natury.
- Postępowanie:
  - Ustala się wartość oczekiwaną wygranej dla każdego stanu natury.
  - Wybiera się strategię, dla której oczekiwana wartość gry jest największa.
- Najczęściej zakłada się równe prawdopodobieństwo wystąpienia wszystkich stanów.

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Kryterium Bayesa – równe prawdopodobieństwo stanów natury

Rolnik ma wybrać jeden z 3 możliwych terminów siewu (1.03, 10.03 lub 15.03). Plony z hektara w zależności od przyszłego możliwego stanu pogody A, B, C i D oraz terminu siewu podaje tablica:

Terminy siewu	A	B	C	D	
1.03	21	15	32	16	21
10.03	28	20	10	20	19,5
15.03	13	27	25	15	20