Rozdział 1

Przedmiot badań operacyjnych i teoria optymalizacji

Badania operacyjne są nauką systemową, czyli nauką o sterowaniu złożonymi systemami, które mogą być fragmentami rzeczywistości fizycznej i/lub ich modelami. Sterowanie w tym kontekście rozumie się, jako wymuszenie pożądanego zachowania systemu. Do nauk systemowych należą również, m. in. teoria systemów, teoria regulacji, cybernetyka, czy teoria sterowania. Ich zadaniem jest rozwijanie interdyscyplinarnych metod, które mogą być zastosowane w różnych dziedzinach takich jak technika, biologia, medycyna i nauki społeczne [11].

Badania operacyjne, jako naukę systemową definiuje się przez określenie klasy systemów, którymi się ona zajmuje. Są to systemy typu *kompleks operacji* (zadań), nazywane również systemami zasobowo-zadaniowymi, czyli systemy składające się z operacji, z których każda wymaga do swego wykonania pewnych zasobów (zwykle ograniczonych). Ponadto między operacjami mogą występować ograniczenia kolejnościowe. Do tego znane są kryteria (jedno lub wiele) pozwalające porównywać efekty sterowania między sobą. Sterowanie polega tutaj na rozdziale zasobów w czasie w taki sposób, aby zoptymalizować kryteria [2].

Rozdział zasobów w czasie tak, aby zoptymalizować wartość kryterium jest na ogół nietrywialny. Zatem do rozwiązania tego problemu stosuje się wiele metod, głównie matematycznych. Mimo, że historycznie wiele z tych metod powstało w związku z poszukiwaniem rozwiązań problemów badań operacyjnych, to dziś traktujemy je, jako metody matematyczne, należące do teorii optymalizacji.

Podsumowując, badania operacyjne to zastosowanie metod nauki do złożonych problemów powstających w kierowaniu i zarządzaniu złożonymi systemami ludzi, maszyn, materiałów i pieniędzy, w przemyśle, biznesie, administracji i obronie.

1.1. Rys historyczny

Trudno dokładnie określić, od kiedy metody ilościowe są stosowane we wspomaganiu decyzji. Podstawy matematyczne badań operacyjnych mają długą historię, której początki wyznaczają m. in. metoda wyznaczania minimum funkcji podana przez I. Newtona (1665), czy rozwiązanie problemu mostów w Królewcu przez L. Eulera (1736). Niewątpliwie jednak, te zastosowania przez długi czas nie były uogólniane, czy systematyzowane. Istotna część dorobku zaliczanego dziś do badań operacyjnych powstała w latach dwudziestych i trzydziestych dwudziestego wieku. Należą do nich głównie prace w zakresie programowania liniowego i teorii kolejek. Za moment powstania tej dyscypliny uważa się jednak początek drugiej wojny światowej.

1.1.1. Cyrk Blacketta

Termin *badania operacyjne* (BrE: *operational research*, AmE: *operations research*) pojawił się po raz pierwszy w Wielkiej Brytanii i był związany z działalnością interdyscyplinarnego zespołu specjalistów, nazywanego później "cyrkiem Blacketta" (P.M. Blackett (1897-1974), laureat nagrody Nobla z fizyki w roku 1948). Zespół składał się z matematyków, ekonomistów, fizyków, statystyków i biologów. Ich zadaniem było opracowanie i porównanie różnych wariantów przeciwdziałania na wypadek ataku powietrznego państw osi na Wielką Brytanię [13]. Skuteczność opracowanych rozwiązań została wkrótce potwierdzona podczas bitwy o Anglię. W krótkim czasie badania operacyjne zostały również zastosowane w armii USA, m. in. do planowania amerykańskich konwojów morskich gwarantującego maksymalną ochronę przed niemieckimi łodziami podwodnymi, czy opracowania niewielkiej zmiany w sposobie zrzucania bomb głębinowych, które okazały się druzgocące dla floty przeciwnika.

Po zakończeniu wojny badania operacyjne znalazły zastosowanie w różnych działach gospodarki. Rozwój technik komputerowych zwiastował możliwość pokonania bariery złożonych obliczeń i dalszy rozwój tej dyscypliny. Wiele najbardziej znaczących modeli i metod badań operacyjnych powstało w ciągu kilkunastu lat po zakończeniu wojny. Należą do nich: sformułowanie i rozwiązanie problemu transportowego (F. Hitchcock, 1941), opracowanie metody sympleks rozwiązywania problemu programowania liniowego (G.B. Danzig, 1947), opracowanie metody programowania dynamicznego (R. Bellman. 1950), podanie warunków optymalności problemu programowania nieliniowego z ograniczeniami (H. Kuhn i A. Tucker, 1951), opracowanie metody węgierskiej rozwiązywania problemu transportowego (H. Kuhn i E. Egervary, 1955), opracowanie metody PERT/CPM (1956), opracowanie me-

tody programowania całkowitoliczbowego (R. Gomory, 1958), opracowanie metody podziału i ograniczeń (1960) i inne.

Duże zainteresowanie nową dyscypliną, zarówno wśród teoretyków, jak i praktyków zaowocowało powstaniem towarzystw *Operational Research Club of Great Britain* w 1948 roku oraz *Operations Research Society of America - ORSA* w roku 1952. Operational Research Club of Great Britain przekształcił się wkrótce w *Operational Research Society*, a ORSA połączyła się w roku 1995 z *Institute of Management Sciences*. W wyniku tej fuzji powstał *Institute for Operations Research and the Management Sciences (INFORMS)*. Obie organizacje pozostają nadal bardzo aktywne, wydając czasopisma, organizując konferencje i działając na rzecz popularyzacji i kształcenia w zakresie badań operacyjnych.

1.1.2. Kłopoty ze złożonością

W połowie lat sześćdziesiątych pojawiły się pierwsze wyniki dotyczące złożoności obliczeniowej problemów kombinatorycznych wraz z pojęciem NP-zupełności problemów kombinatorycznych (J. Edmonds i R. Karp, 1965). Okazało się, że konstrukcja efektywnych czasowo algorytmów rozwiązywania wielu zadań optymalizacyjnych (zwłaszcza optymalizacji dyskretnej) jest mało prawdopodobna. Stawiało to pod znakiem zapytania możliwość zastosowania metod badań operacyjnych do rozwiązywania praktycznych problemów, gdzie liczba zmiennych i ograniczeń jest na ogół duża. Przez długi czas problem złożoności problemu programowania liniowego był otwarty, znano jedynie algorytm sympleks, którego złożoność obliczeniowa w najgorszym wypadku była wykładnicza. W roku 1979 Chaczijan, a w roku 1984 Karmarkar zaproponowali algorytmy rozwiązujące dowolne zadanie programowania linowego w czasie wielomianowo zależnym od rozmiaru zadania. Praktyczne znaczenie tych algorytmów jest niewielkie, ale rozstrzygają one kwestię złożoności obliczeniowej problemu programowania liniowego.

Wobec trudności w znalezieniu sprawnych algorytmów dokładnych dla wielu problemów optymalizacyjnych większą uwagę zaczęto przywiązywać do konstrukcji sprawnych algorytmów przybliżonych. Znaczącą klasę takich algorytmów stanowią tak zwane metaheurystyki, algorytmy o ogólnej strukturze niezależnej od specyfiki problemu. Należą tu metoda przeszukiwania tabu, symulowane wyżarzanie, szeroka klasa algorytmów ewolucyjnych, algorytmy mrówkowe i wiele hybrydowych kombinacji tych podejść. Co prawda metody te wymagają na ogół dosyć dużych nakładów obliczeniowych, jednak szybki rozwój mocy obliczeniowych komputerów rekompensuje te

wymagania. Lata dziewięćdziesiąte dwudziestego wieku przyniosły dynamiczny rozwój tych podejść.

1.1.3. Badania operacyjne w XXI wieku

Zainteresowanie metodami badań operacyjnych jest nadal aktualne. Rozwój techniki, komunikacji i towarzyszące im zjawiska społeczne powodują, że badania operacyjne znajdują ciągle nowe zastosowania, co sprzyja rozwojowi nowych modeli i metod optymalizacji.

1.2. Metoda badań operacyjnych

Rozwiązanie problemu decyzyjnego metodą badań operacyjnych polega na zbudowaniu i analizie modelu matematycznego sytuacji decyzyjnej, rozwiązaniu odpowiedniego zadania optymalizacyjnego i interpretacji otrzymanych wyników. Zwykle proces ten formułuje się w postaci następujących kroków [13]:

1. rozpoznanie sytuacji decyzyjnej i wynikającego z niej problemu decyzyjnego,
2. budowa modelu matematycznego,
3. rozwiązanie zadania decyzyjnego,
4. ocena poprawności i realności uzyskanych rozwiązań i ewentualna korekta modelu,
5. przedstawienie rozwiązań decydentowi i ostateczne przygotowanie decyzji.

1.2.1. Analiza sytuacji decyzyjnej

Pierwszą trudnością w procesie podejmowania decyzji jest wskazanie celu, który decydent chce osiągnąć oraz rozpoznanie ograniczeń, które wpływają na zbiór decyzji dopuszczalnych. Ważne jest ustalenie, w jaki sposób można opisać sytuację decyzyjną. Newell i Simon wyróżnili trzy podstawowe klasy sytuacji decyzyjnych:

— *O dobrze określonej strukturze* - są to sytuacje, w opisie których przeważają elementy i zależności ilościowe. Zależności te można odwzorować za pomocą modelu matematycznego.
— *O nieokreślonej strukturze* - są to sytuacje, które można opisać prawie wyłącznie za pomocą cech i zależności o charakterze jakościowym i są one niemierzalne.

— *O słabo określonej strukturze* - są to sytuacje mieszane, w których pewne zależności można wyrazić za pomocą modelu matematycznego, ale opis ten musi być uzupełniony przez niemierzalne cechy i zależności jakościowe.

Badania operacyjne zajmują się modelowaniem sytuacji pierwszego typu, niekiedy mogą wspomagać podejmowanie decyzji w sytuacjach o słabo określonej strukturze.

1.2.2. Budowa modelu

Budowa modelu jest najtrudniejszym etapem w procesie podejmowania decyzji metodą badań operacyjnych i w znacznym stopniu decyduje o jego powodzeniu. Z jednej strony ważne jest, aby uwzględnić zasadnicze cechy sytuacji decyzyjnej, których rozpoznanie bywa bardzo trudne. Z drugiej strony zbyt złożony model może spowodować trudności na etapie znajdowania rozwiązania optymalnego. Ponadto często tę samą sytuację decyzyjną można odwzorować za pomocą wielu modeli. Wybór najbardziej odpowiedniego modelu wymaga doświadczenia i znajomości zarówno modeli, jak i metod rozwiązywania problemów optymalizacyjnych. Pewne zasady budowy modeli decyzyjnych wprowadzono w rozdziale 2. Niestety nie można podać uniwersalnej skutecznej procedury budowy modeli decyzyjnych. W kolejnych rozdziałach ten krok w rozwiązywaniu problemów metodą badań operacyjnych będzie ilustrowany przykładami.

1.2.3. Poszukiwanie rozwiązania optymalnego

Na ogół poszukiwanie rozwiązania optymalnego polega na rozwiązaniu odpowiedniego zadania optymalizacyjnego, będącego modelem analizowanej sytuacji decyzyjnej. Badaniem metod optymalizacji zajmuje się teoria optymalizacji, którą scharakteryzujemy w punkcie 1.3. Wiele metod optymalizacji powstało przy okazji rozwiązywania problemów decyzyjnych metodami badań operacyjnych, więc niekiedy zalicza się je do dorobku badań operacyjnych. Z metodycznego punktu widzenia bardziej klarowne jest jednak uznanie metod optymalizacji za przedmiot teorii optymalizacji, która ma zresztą znacznie dłuższą tradycję niż badania operacyjne. Mimo tej długiej tradycji i ogromnego dorobku nie zawsze znalezienie rozwiązania analizowanego modelu za pomocą istniejących metod jest możliwe. Wtedy poza sformułowaniem modelu należy zaproponować dedykowaną metodę znalezienia rozwiązania optymalnego.

1.2.4. Interpretacja rozwiązania

Ostatnim etapem w rozwiązywaniu problemów decyzyjnych metodą badan operacyjnych jest interpretacja rozwiązania optymalnego wyznaczonego dla zbudowanego modelu. Ostateczna decyzja nie musi być identyczna z decyzją wynikającą z rozwiązania zadania decyzyjnego. Często analiza modelu i jego wariantów pozwala lepiej zrozumieć zależności występujące w sytuacji decyzyjnej. Może się również zdarzyć, że otrzymane rozwiązanie jest niedopuszczalne. Zazwyczaj ma to miejsce wtedy, gdy w modelu nie uwzględniono istotnych ograniczeń. W takim wypadku należy powtórzyć proces od etapu budowy modelu.

Jak widać przygotowanie decyzji za pomocą badań operacyjnych jest procesem złożonym i wymaga współpracy specjalistów z wielu dziedzin. Badania operacyjne można, zatem określić, jako naukę systemową wykorzystującą wyniki różnych nauk podstawowych do rozwiązywania zadań decyzyjnych.

1.3. Teoria optymalizacji

Teoria optymalizacji zajmuje się badaniem metod optymalizacji rozumianej, jako wyznaczenie spośród dopuszczalnych rozwiązań danego problemu rozwiązania najlepszego ze względu na przyjęte kryterium (wskaźnik jakości, np. koszt, zysk, niezawodność). Rozwiązania (decyzje) optymalne wyznacza się na podstawie modelu matematycznego. Można zatem powiedzieć, że teoria optymalizacji dostarcza narzędzi wspomagających realizację drugiego i trzeciego kroku w procedurze rozwiązywania problemów metodą badań operacyjnych. Ze względu na fakt, że są to podstawowe kroki w tej procedurze, niekiedy badania operacyjne utożsamia się z teorią optymalizacji. Warto jednak zauważyć, że metody teorii optymalizacji można rozwijać niezależnie od konkretnej sytuacji decyzyjnej, podczas gdy dla badań operacyjnych stanowi ona zasadniczy element kształtujący sposób postępowania. Podczas gdy badania operacyjne są dziedziną interdyscyplinarną, teoria optymalizacji jest działem matematyki stosowanej.

1.3.1. Rys historyczny

W roku 1997, w rocznicę postawienia przez Johanna Bernoulliego problemu brachistochrony [1] Zagadnienie brachistochrony było jednym z pierw-

[1] Brachistochrona to krzywa, po której czas staczania się masy punktowej od punktu A do punktu B pod wpływem stałej siły (siły ciężkości) jest najkrótszy. Nazwa pochodzi

szych, do rozwiązania którego wykorzystano rachunek wariacyjny. Problem znalezienia krzywej najszybszego spadku został rozwiązany niezależnie przez Leibniza, Newtona, Bernoulliego oraz de L'Hospitala. Okazało się, że brachistochroną jest fragment cykloidy.

Problemy optymalizacji można spotkać w źródłach historycznych znacznie wcześniej. Na przykład Wergiliusz (poeta rzymski 70 - 19 p.n.e.) w I księdze poematu Eneida, pisząc o historii założenia Kartaginy (ok. 814 p.n.e.) wspomina o problemie znalezienia na płaszczyźnie krzywej zamkniętej o danej długości, która zawiera maksymalną powierzchnię.

Wyraźny postęp w teorii optymalizacji wiąże się jednak z powstaniem rachunku wariacyjnego i pracami Lagrange'a (1736-1813), Hamiltona (1805-1865), Weierstrassa (1815-1897) oraz Pontriagina (1908-1988). Rozwój tych metod był inspirowany głównie problemami z dziedziny fizyki i techniki. Od drugiej wojny światowej teorię optymalizacji zaczęto stosować również do rozwiązywania problemów związanych z zarządzaniem. W tym okresie powstały m. in. algorytmy programowania liniowego Dantziga, oraz metody programowania nieliniowego Kuhna, Tuckera i Geoffriona. W roku 1957 została opublikowana metoda programowania dynamicznego Bellmana. Bellman zastosował programowanie dynamiczne do sterowania optymalnego układami dyskretnymi.

Kolejną ważną zmianę w podejściu do optymalizacji spowodował rozwój obliczeń komputerowych. Duże zainteresowanie wywołały metody numeryczne rozwiązywania problemów optymalizacyjnych, np. algorytmy Powella, Rosena, czy Fletchera. Duże znaczenie zyskały metody przybliżone wykorzystujące rosnące możliwości obliczeniowe komputerów.

Dalszy rozwój techniki i coraz większa złożoność decyzji ekonomicznych spowodowały kolejny przełom w teorii optymalizacji, którym jest wykorzystanie w optymalizacji metod tzw. *soft computing*. Jako przełomową uważa się pracę Hollanda *Adaptation in Natural and Artificial Systems* z roku 1975 [7]. Zalicza się tu sieci neuronowe, systemy rozmyte, algorytmy ewolucyjne itp. Równoległą tendencją jest zastosaowanie metod deklaratywnych

1.3.2. Optymalizacja statyczna i dynamiczna

W teorii optymalizacji wyróżniamy dwie klasy problemów: problemy optymalizacji statycznej i problemy optymalizacji dynamicznej.

Optymalizacja statyczna zajmuje się poszukiwaniem optymalnego punktu pracy, czyli takiego, w którym wartość funkcji celu jest najlepsza. Rozwią-

---

od złożenia greckich słów brachistos ($\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau\o\varsigma$) - "najkrótszy" i chronos ($\chi\rho\o\nu\o\varsigma$) - "czas".

zanie zadania optymalizacji statycznej sprowadza się do znalezienia ekstremum funkcji (minimum lub maksimum). Poszukiwanie ekstremum może się odbywać w pewnym ograniczonym obszarze, nazywanym zbiorem rozwiązań dopuszczalnych. Wyróżnia się ekstrema lokalne (największa lub najmniejsza wartość w pewnym otoczeniu punktu) i globalne (największa lub najmniejsza wartość w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych). W praktyce interesuje nas na ogół optimum globalne, podczas gdy większość metod to algorytmy poszukiwania ekstremum lokalnego.

Typowe zagadnienie optymalizacji dynamicznej polega na poszukiwaniu takiego ciągu decyzji w danym przedziale czasu, który zapewni ekstremum pewnego wskaźnika jakości, zależącego od przebiegu zmian tej decyzji. Wskaźnik jakości jest funkcjonałem[2] decyzji określanym na danym przedziale czasu. Rozwiązanie zadania optymalizacji dynamicznej sprowadza się zatem do poszukiwania ekstremum funkcjonału.

1.3.3. Metody optymalizacji

Wśród metod optymalizacji statycznej wyróżnia się dwie zasadnicze grupy: programowanie liniowe i programowanie nieliniowe. Programowanie liniowe polega na poszukiwaniu ekstremum liniowej funkcji celu przy ograniczeniach będących również funkcjami liniowymi. W zagadnieniach programowania liniowego ekstremum jest zawsze globalne w danym obszarze poszukiwań. Programowanie nieliniowe polega na poszukiwaniu ekstremum funkcji celu dowolnej postaci, przy ograniczeniach będących również wyrażonymi przez dowolne funkcje.

Do innych matematycznych metod optymalizacji należą: programowanie dynamiczne, programowanie sieciowe, stochastyczne (polegające na wyborze decyzji *przeciętnie optymalnej*), teoria gier, teoria kolejek, rachunek wariacyjny, metody analizy funkcjonalnej i inne.

[2] Funkcjonał – odwzorowanie określone na pewnej przestrzeni (przestrzeni funkcji, przestrzeni liniowej) o wartościach w ciele liczbowym. Pojęcie funkcjonału pierwotnie pojawiło się w rachunku wariacyjnym.