Programowanie nieliniowe

Badania operacyjne

Wykład 3

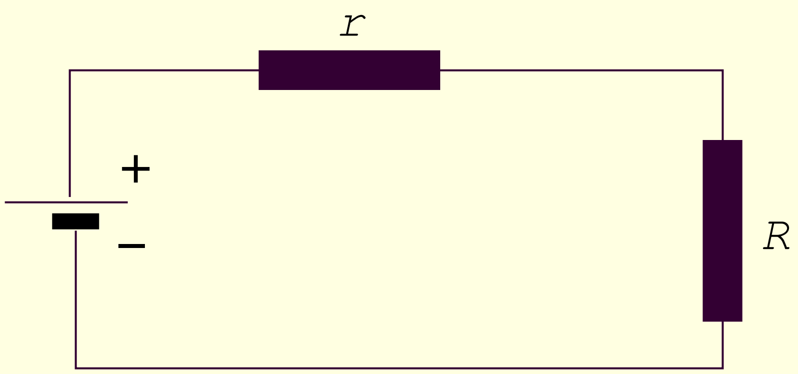
Metoda Lagrange'a

Plan wykładu

- Przykład problemu z nieliniową funkcją celu
- Sformułowanie problemu programowania matematycznego
- Podstawowe definicje
- Problem z ograniczeniami w postaci równości
- Twierdzenie Lagrange'a
- Metoda Lagrange'a
- Przykład

Nieliniowa funkcja celu

Na schemacie v oznacza napięcie źródła, r opór wewnętrzny źródła, a R opór odbiornika. Znaleźć taką wartość R, aby strata mocy była maksymalna, jeżeli dopuszczalny spadek napięcia na oporniku wynosi E?

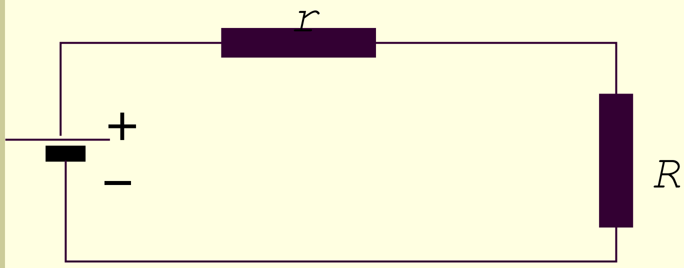


$$P = i^2 R$$

$$i = \frac{v}{r+R}$$

$$E = iR$$

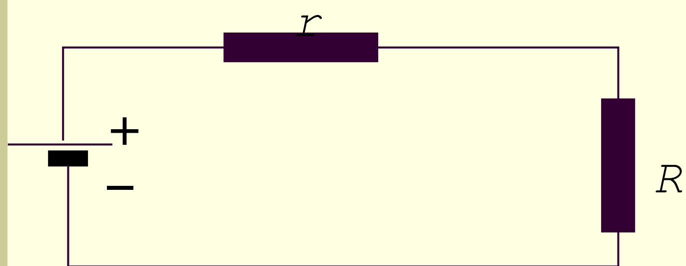
Nieliniowa funkcja celu i ograniczenia



zmaksymalizować $P = \left(\frac{V}{r+R}\right)^2 R$

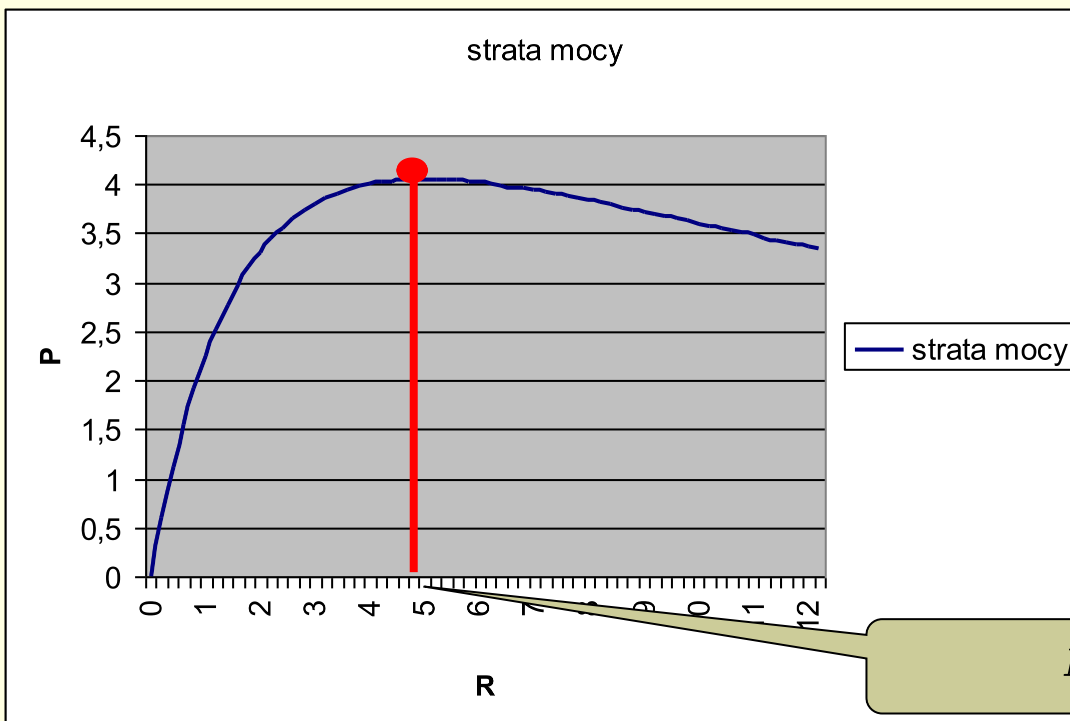
przy ograniczeniach: $\frac{VR}{r+R} < E$

Nieliniowa funkcja celu



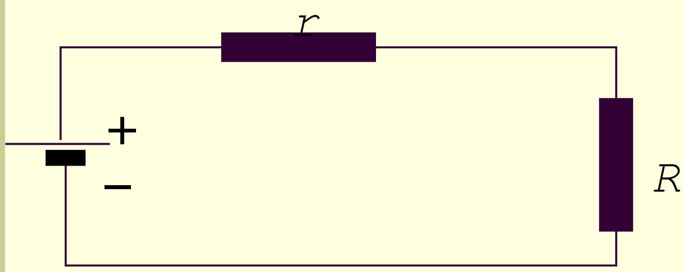
zmaksymalizować $P = \left(\dfrac{v}{r+R} \right)^2 R$

$$\frac{dP}{dR} = \frac{v^2 (r+R)^2 - 2(r+R) v^2 R}{(r+R)^4}$$



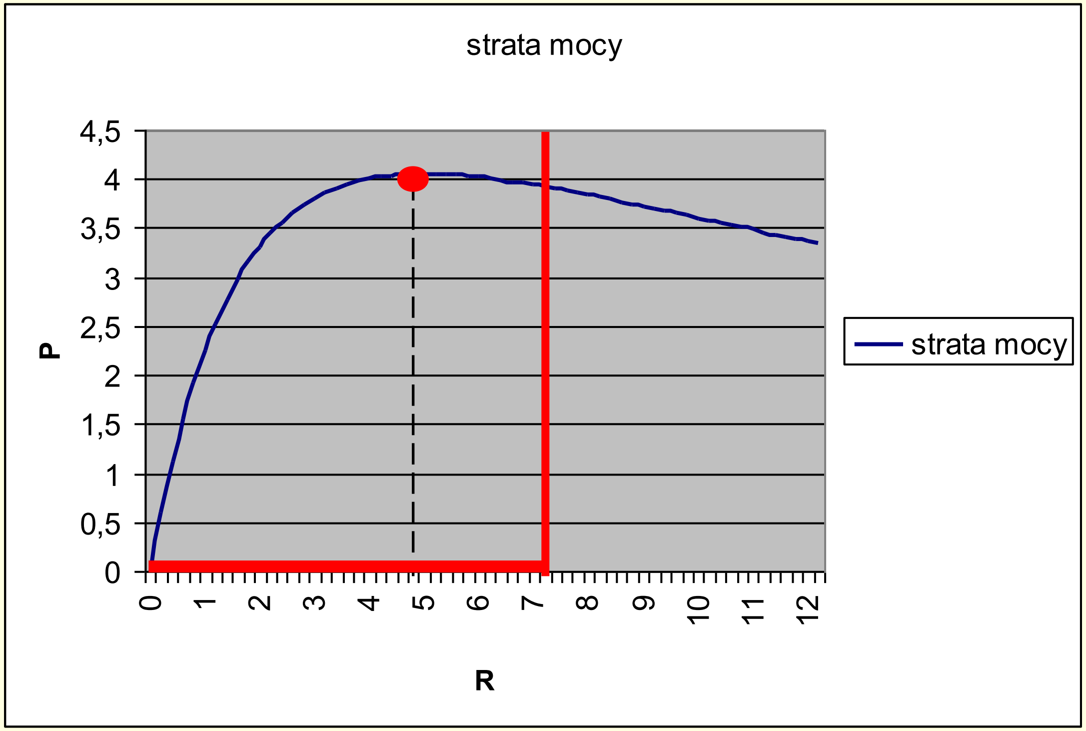
$R = r$

Nieliniowa funkcja celu i ograniczenia

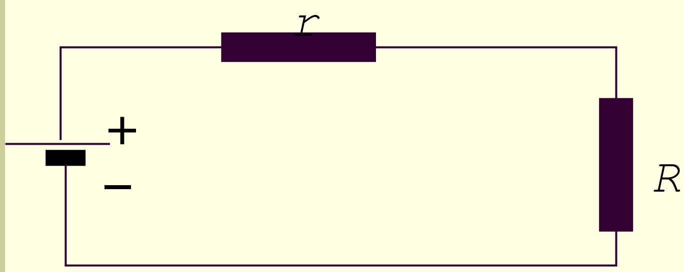


zmaksymalizować $P = \left(\frac{v}{r+R}\right)^2 \mathrm{R}$

przy ograniczeniach : $R < \frac{Er}{v-e}$

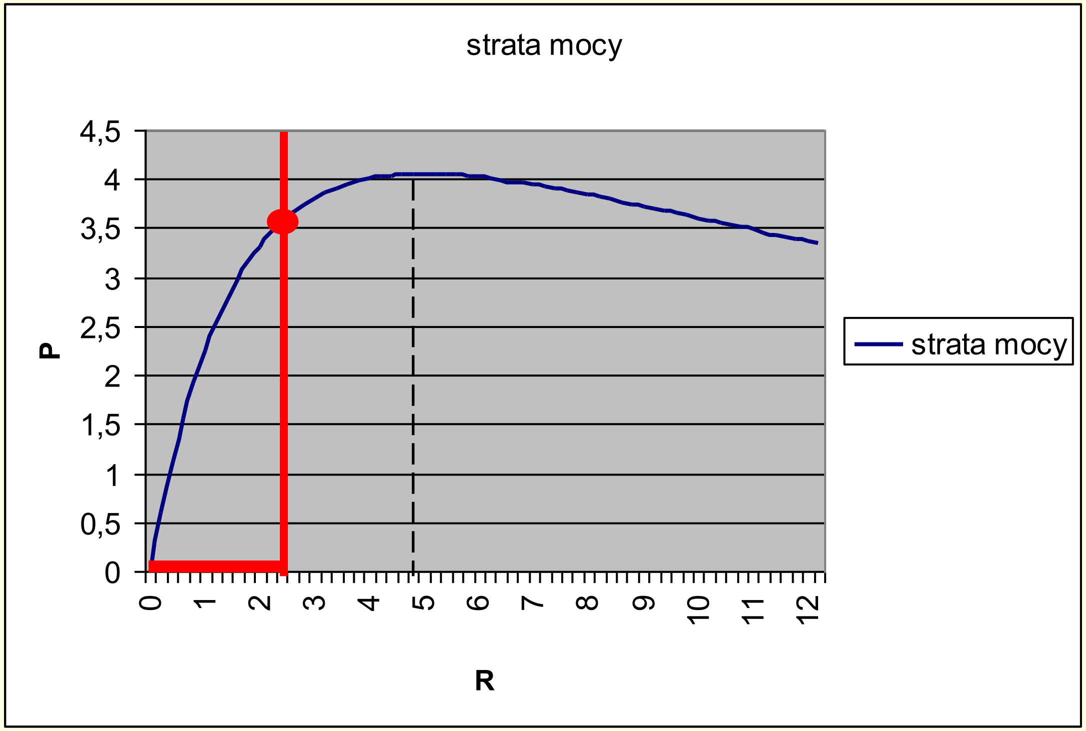


Nieliniowa funkcja celu i ograniczenia



zmaksymalizować $P = \left(\frac{v}{r+R}\right)^2 \mathrm{R}$

przy ograniczeniach : $R < \frac{Er}{v-e}$



Sformułowanie problemu programowania matematycznego

zminimalizować (zmaksymalizować)	$z = f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
przy ograniczeniach	$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$
	$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$
	....
	$f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$

Sformułowanie problemu programowania matematycznego

zminimalizować (zmaksymalizować)	$z = f_0(\mathbf{x})$	
przy ograniczeniach:	$f_i(\mathbf{x}) \leq 0,$	$i = 1, \ldots, m$
	$\mathbf{x} \in \Re^{\mathbf{n}}$	

Sformułowanie problemu programowania matematycznego

zminimalizować (zmaksymalizować) $z = f_0(\mathbf{x})$

przy ograniczeniach: $f_i(\mathbf{x}) \leq 0,$ $i = 1, \ldots, m$

$\mathbf{x} \in \Re^{\mathbf{n}}$

Problem programowania liniowego jest szczególnym przypadkiem problemu programowania matematycznego

zminimalizować (zmaksymalizować) $z = f_0(\mathbf{x}) = \mathbf{cx}$

przy ograniczeniach: $f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_i\mathbf{x} - b_i \leq 0, i = 1, \ldots, m$

$\mathbf{x} \in \Re^{n+}$

Klasyfikacja problemów NLP

- Problemy bez ograniczeń
- Problemy z ograniczeniami
  - Ograniczenia w postaci równań
  - Ograniczenia w postaci nierówności

Ekstremum funkcji

Niech:

- $S = \{\mathbf{x}: f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ - *zbiór rozwiązań dopuszczalnych*
- $\Delta = \{\mathbf{x}: 0 < \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\| < \delta\}$
- $E = S \cap \Delta$

Funkcja f_0 ma w punkcie $\mathbf{x}^*$ słabe minimum (maksimum) lokalne, jeśli istnieje $\delta>0$ takie, że dla każdego $\mathbf{x} \in E$

$$f_0(\mathbf{x}^*) \leq f_0(\mathbf{x}),\ (f_0(\mathbf{x}^*) \geq f_0(\mathbf{x}))$$

Ekstremum funkcji

Niech:

- $S = \{\mathbf{x}: f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ - *zbiór rozwiązań dopuszczalnych*
- $\Delta = \{\mathbf{x}: 0 < \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}\| < \delta \}$
- $E = S \cap \Delta$

Funkcja f_0 ma w punkcie $\mathbf{x}^*$ właściwe minimum (maksimum) lokalne, jeśli istnieje $\delta>0$ takie, że dla każdego $\mathbf{x} \in E$

$$f_0(\mathbf{x}^*) < f_0(\mathbf{x}),\ (f_0(\mathbf{x}^*) > f_0(\mathbf{x}))$$

Ekstremum funkcji

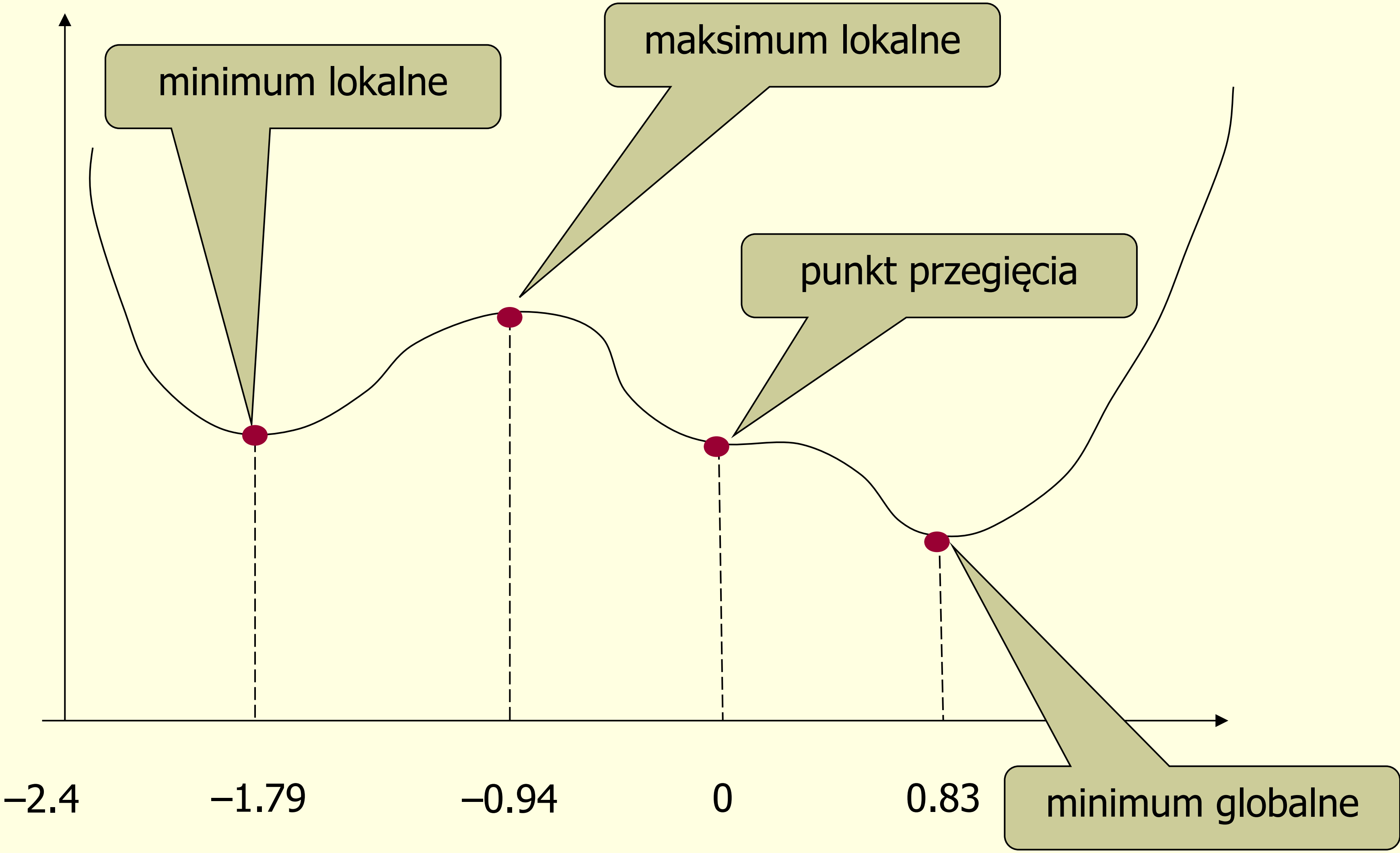
Niech:

- $S = \{\mathbf{x}: f_i(\mathbf{x}) \le 0, i = 1, ..., m\}$ - *zbiór rozwiązań dopuszczalnych*
- $\Delta = \{\mathbf{x}: 0 < ||\mathbf{x}^* - \mathbf{x}|| < \delta \}$
- $E = S \cap \Delta$

Funkcja f_0 ma w punkcie $\mathbf{x}^*$ właściwe minimum (maksimum) globalne, jeśli dla każdego $\mathbf{x} \in S$

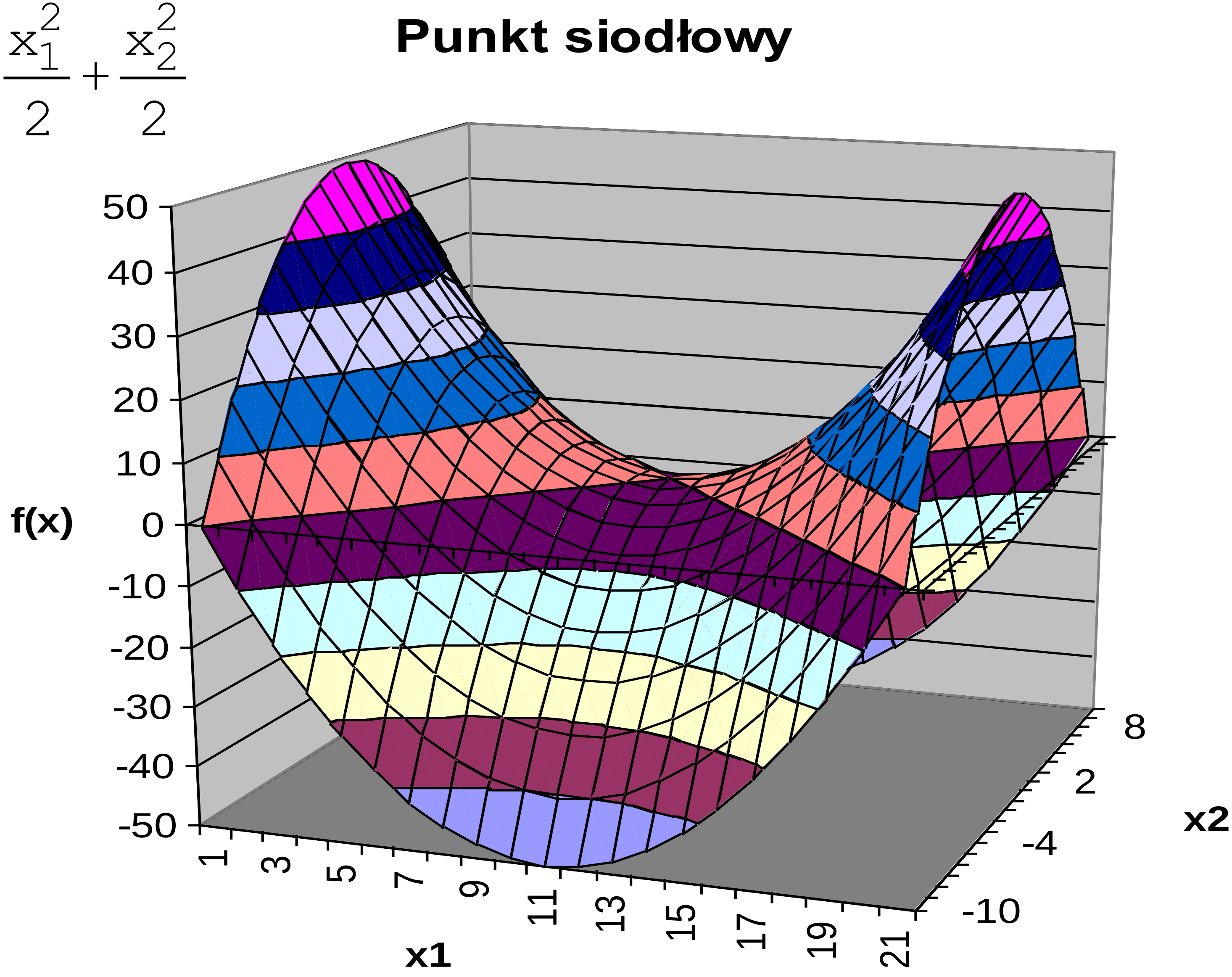
$$f_0(\mathbf{x}^*) < f_0(\mathbf{x}), \ (f_0(\mathbf{x}^*) > f_0(\mathbf{x}))$$

Ekstremum funkcji



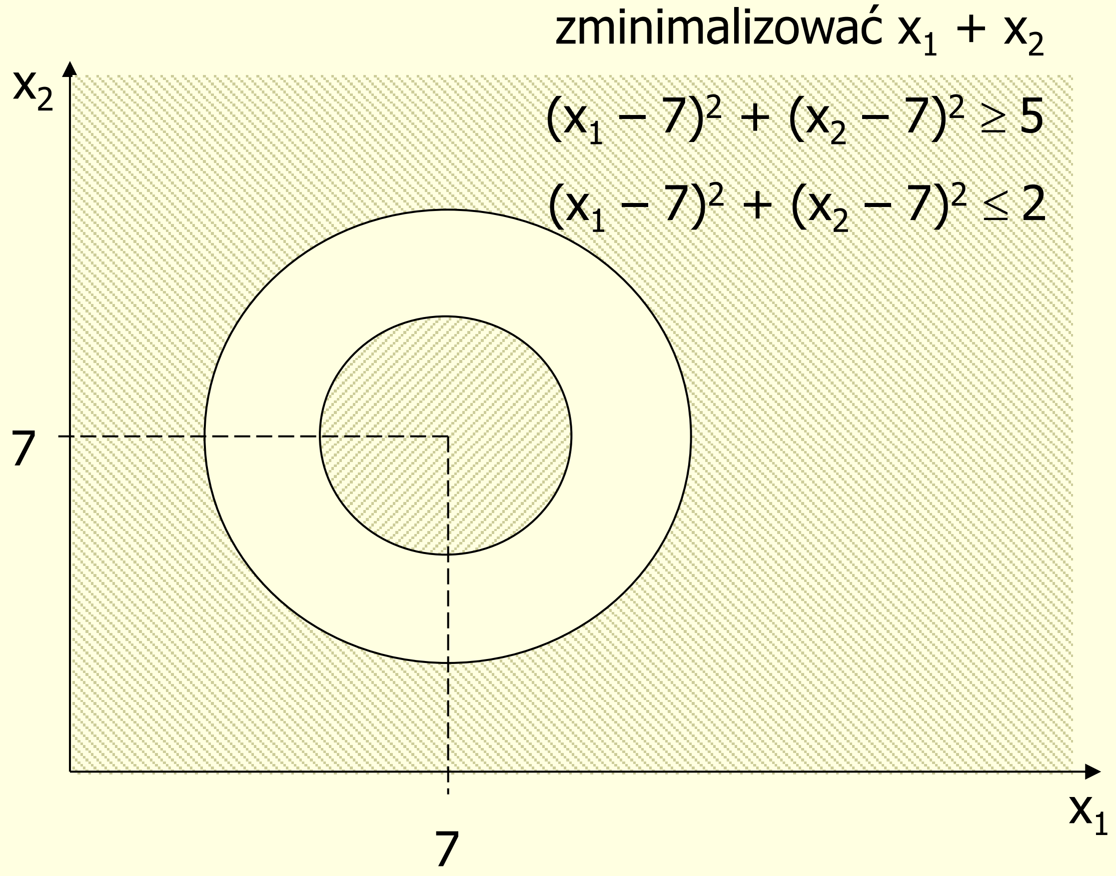
Funkcje wielu zmiennych

$$f(\mathbf{x}) = -\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$$



Poszukiwanie ekstremum funkcji nieliniowej

- $S = \varnothing$



Brak rozwiązań dopuszczalnych a zatem brak rozwiązań optymalnych!

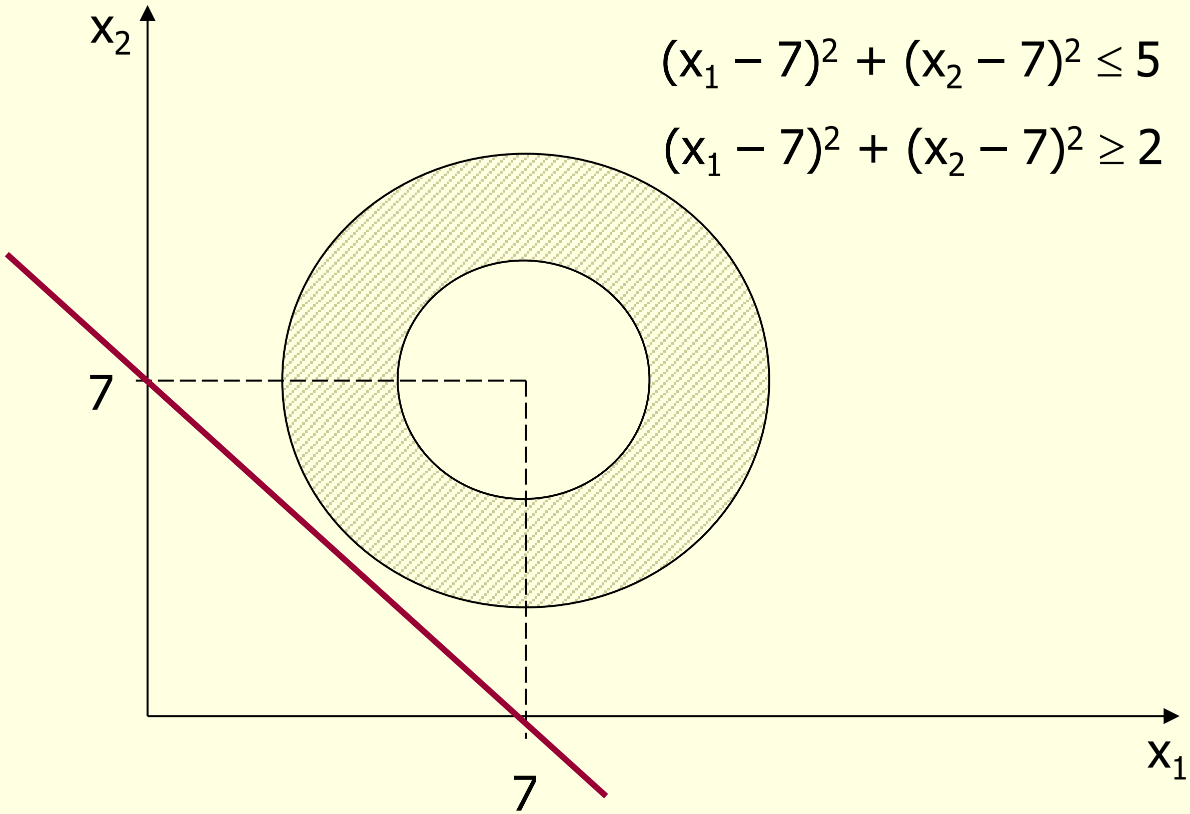
Poszukiwanie ekstremum funkcji nieliniowej

- $S = \varnothing$
- $S \neq \varnothing$

zminimalizować $x_1 + x_2$

$(x_1 - 7)^2 + (x_2 - 7)^2 \leq 5$

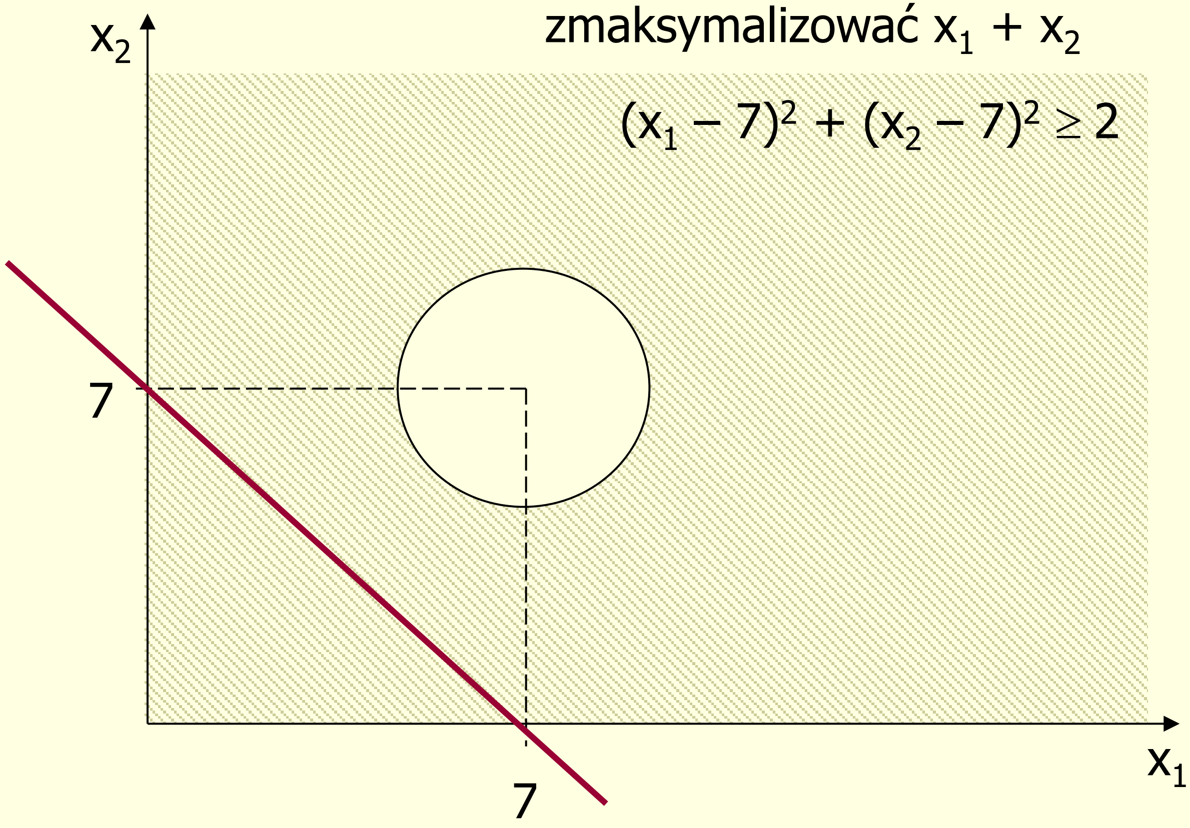
$(x_1 - 7)^2 + (x_2 - 7)^2 \geq 2$



Rozwiązanie optymalne ograniczone!

Poszukiwanie ekstremum funkcji nieliniowej

- $S = \varnothing$
- $S \neq \varnothing$



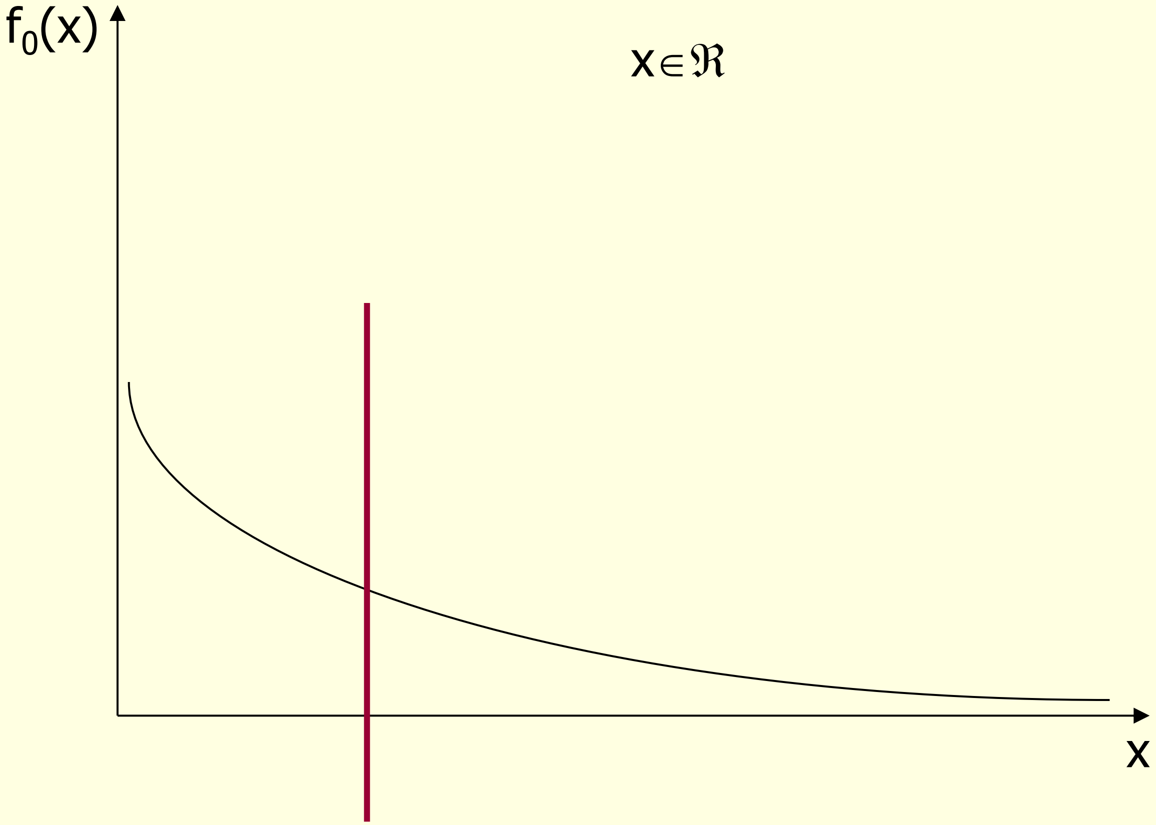
Rozwiązanie optymalne nieograniczone!

Poszukiwanie ekstremum funkcji nieliniowej

- $S = \varnothing$
- $S \neq \varnothing$

zminimalizować x^{-1}

$x \in \Re$



Rozwiązanie optymalne ograniczone, ale nieosiągalne!

Poszukiwanie ekstremum funkcji nieliniowej

- $S = \emptyset$
- $S \neq \emptyset$
  - optimum ograniczone
  - wartość funkcji nieograniczona
  - wartość funkcji ograniczona, ale optimum nieosiągalne

Gradient funkcji wielu zmiennych

Wektor pochodnych cząstkowych funkcji

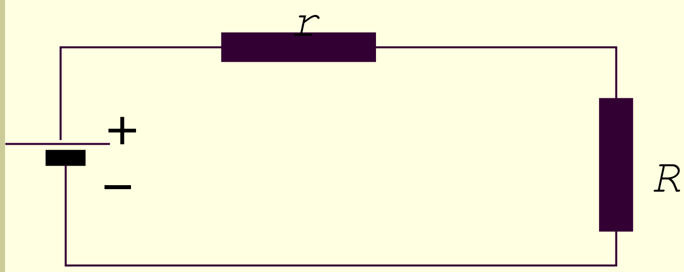
$$f(\mathbf{x}): \Re^n \rightarrow \Re$$

ze względu na $x_1, ..., x_n$ nazywa się **gradientem funkcji** $f(\mathbf{x})$ i oznacza się go przez $\nabla f(\mathbf{x})$.

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}$ jest punktem stacjonarnym funkcji $f(\mathbf{x})$ wtw $\nabla f(\mathbf{x})=0$.

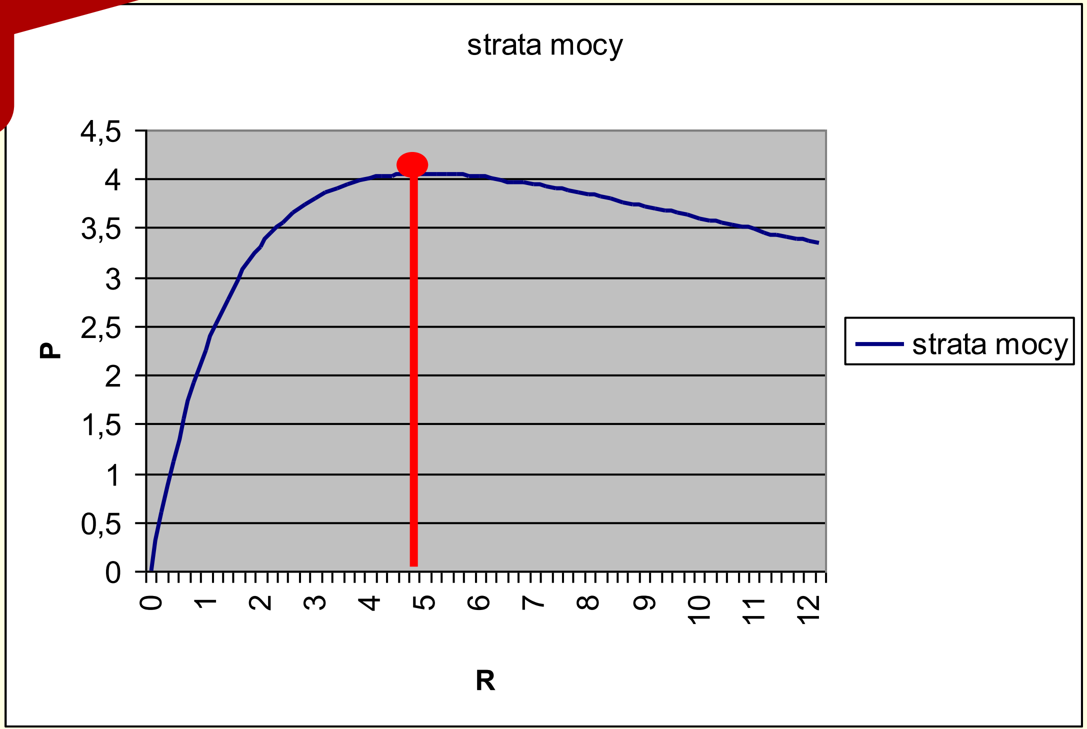
Nieliniowa funkcja celu



zmaksymalizować $P = \left(\frac{v}{r+R}\right)^2 R$

$$\frac{dP}{dR} = \frac{v^2(r+R)^2 - 2(r+R)v^2R}{(r+R)^4}$$

Czy w punkcie R = r jest maksimum?



$$\frac{\partial_2 P}{\partial R^2} = \frac{-2rv^2}{(r+R)^5} < 0$$

Hesjan funkcji f($\mathbf{x}$)

$$H(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial 2f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial 2f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \dfrac{\partial 2f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial 2f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \dfrac{\partial 2f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \dfrac{\partial 2f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Zakładamy, że

$$\frac{\partial 2f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial 2f}{\partial x_2 \partial x_1}$$

Określoność macierzy

Dla dowolnej macierzy **M** o wymiarach n x n i wektora **z** o długości n

$$\text{M jest} \left\{ \begin{array}{l} \text{dodatnnio określona} \\ \text{dodatnio półokreślona} \\ \text{ujemnie określona} \\ \text{ujemnie pólokreślona} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \mathbf{z}^{T}\mathbf{M}\mathbf{z} \text{ jest} \left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ \geq 0 \\ < 0 \\ \leq 0 \end{array} \right\} \text{dla dowolnego } \mathbf{z} \neq 0$$

W pozostałych przypadkach **M** jest nieokreślona.

Twierdzenie

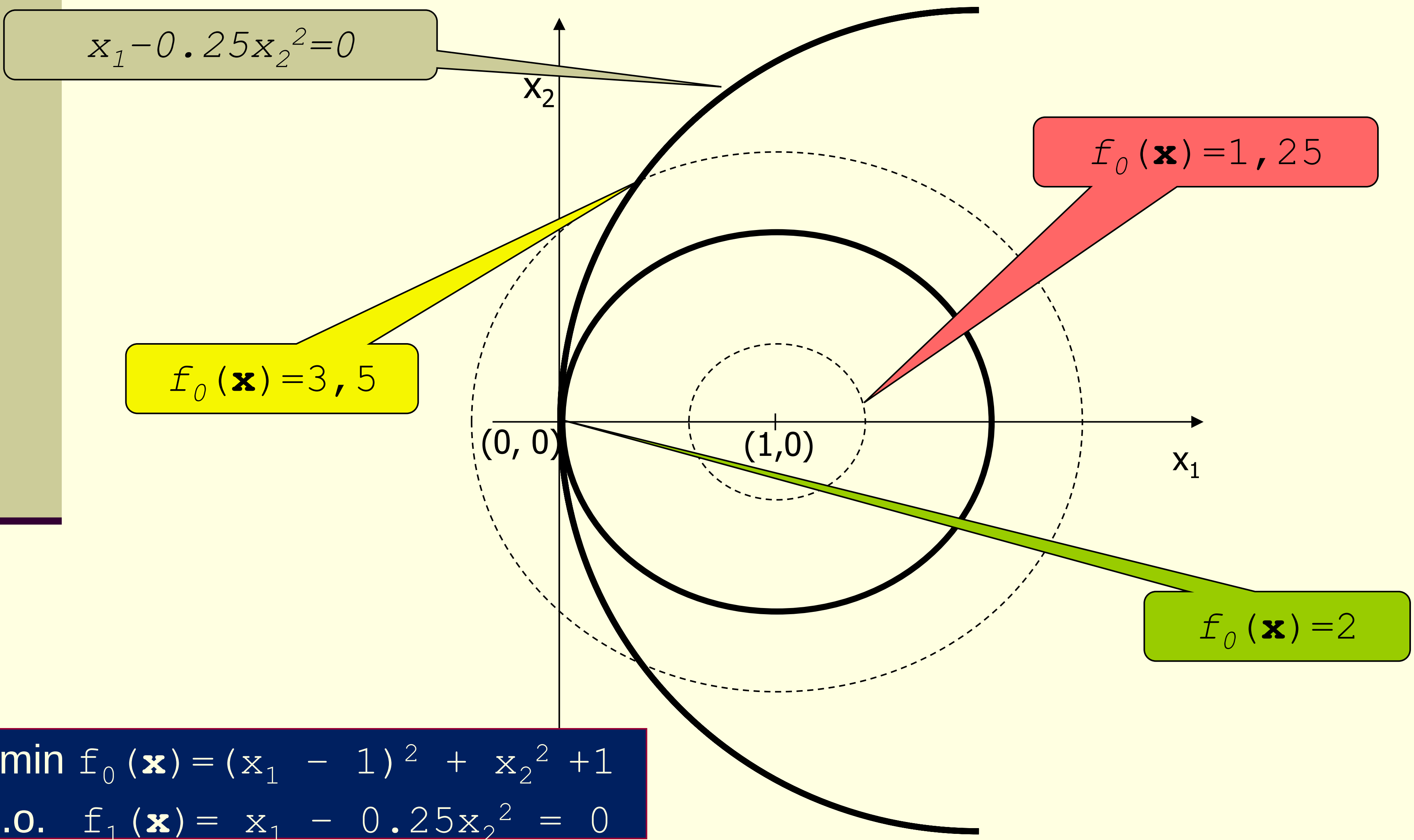
H(**x***) jest dodatnio określona	$\Rightarrow$	**x*** jest właściwym minimum lokalnym
H(**x**) jest dodatnio określona dla wszystkich wartości **x** w pewnym otoczeniu **x***	$\Rightarrow$	**x*** jest minimum lokalnym
x* jest minimum lokalnym	$\Rightarrow$	H(**x***) jest dodatnio półokreślona

Problem z ograniczeniami w postaci równań

zminimalizować $f_0(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + 1$

przy ograniczeniach: $f_1(\mathbf{x}) = x_1 - 0.25x_2^2 = 0$

Metoda graficzna



zmin $f_0(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + 1$

p.o. $f_1(\mathbf{x}) = x_1 - 0.25x_2^2 = 0$

Podstawienie

zminimalizować $f_0(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + 1$

przy ograniczeniach: $f_1(\mathbf{x}) = x_1 - 0.25x_2^2 = 0$

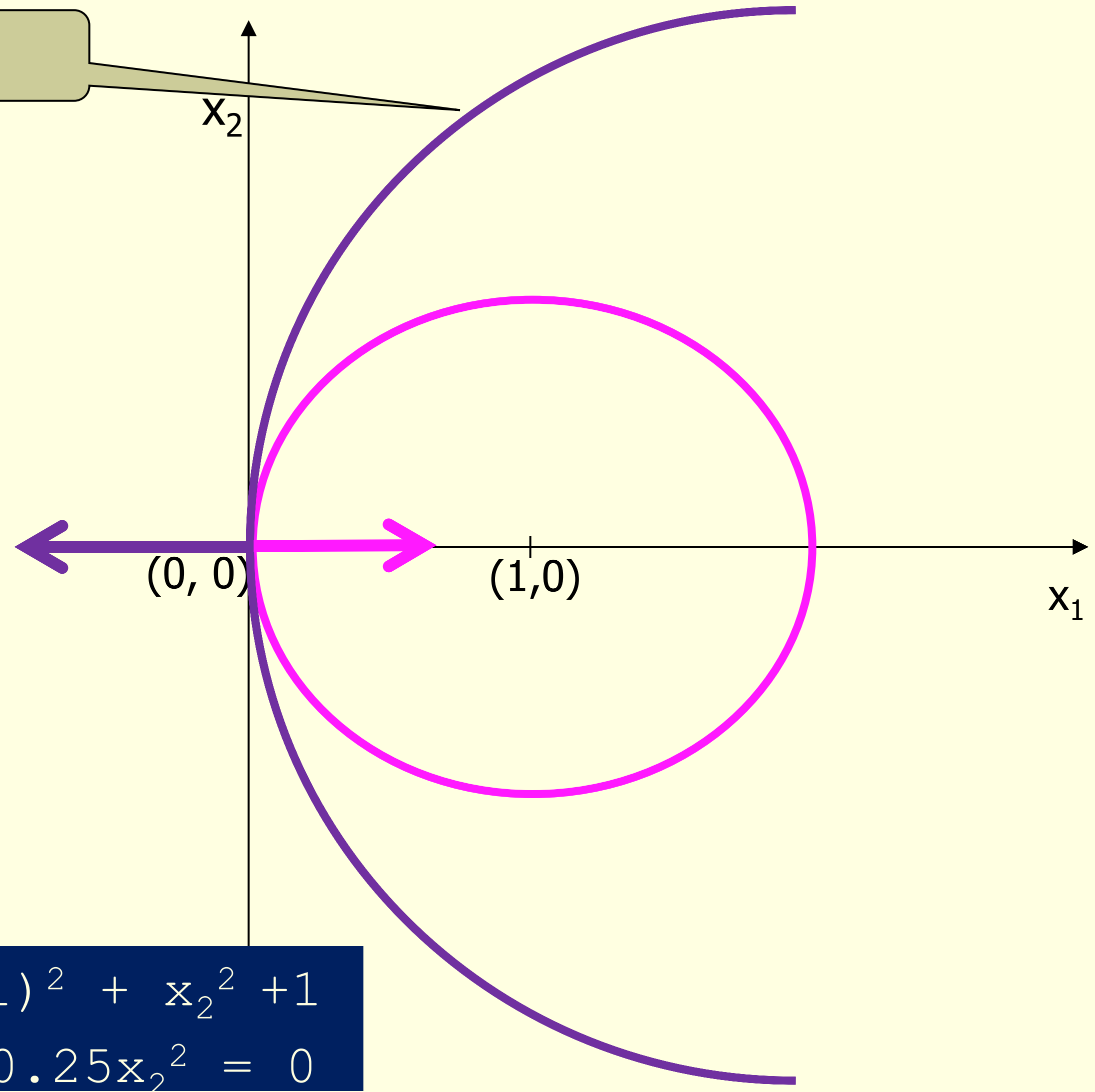
Otrzymujemy problem z jedną zmienną bez ograniczeń.

$$x_1 = 0.25\, x_2^2$$

zminimalizować $f_0(\mathbf{x}) = (0.25x_2^2 - 1)^2 + x_2^2 + 1$

Metoda graficzna

$x_1 - 0.25x_2^2 = 0$



zmin $f_0(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + 1$

p.o. $f_1(\mathbf{x}) = x_1 - 0.25x_2^2 = 0$

Twierdzenie Lagrange'a

Niech dany będzie następujący problem nieliniowego programowania matematycznego

zminimalizować	$z = f_0(x_1, \ldots, x_n)$		(1)
przy ograniczeniach:	$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 0,$	$i = 1, \ldots, m$	(2)

Jeżeli:

- $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ jest lokalnym optimum problemu (1)-(2)
- $n>m$
- f_i mają ciągłe pierwsze pochodne ze względu na x_j
- $\nabla f_i\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right)$ są wektorami liniowo niezależnymi

to istnieje wektor $\mathbf{u} = [u_1, \ldots, u_m]^T$ taki, że

$$\nabla f_0\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla f_i\left(x_1^*, \ldots, x_n^*\right) = 0$$

Metoda Lagrange'a

1. Sprawdzić, że n>m i każda funkcja f_i ma ciągłe pochodne cząstkowe.
2. Zbudować funkcję Lagrange'a

$$L(\mathbf{x},\mathbf{u}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x})$$

3. Znaleźć wszystkie rozwiązania następującego układu równań nieliniowych

$$\nabla L(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \nabla f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial u_i} = f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1,\ldots,m$$

4. Sprawdzić każde rozwiązanie (**x***, **u***) aby stwierdzić, czy jest minimum lokalnym.

Metoda Lagrange'a

1. Sprawdzić, że n>m i każda funkcja f_i ma ciągłe pochodne cząstkowe.
2. Zbudować funkcję Lagrange'a

$$L(\mathbf{x},\mathbf{u}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x})$$

3. Znaleźć wszystkie rozwiązania następującego układu równań nieliniowych

$$\nabla L(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \nabla f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

n równań

$$\frac{\partial L(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial u_i} = f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1,\ldots,m$$

m równań

4. Sprawdzić każde rozwiązanie (**x***, **u***) aby stwierdzić, czy jest minimum lokalnym.

Metoda Lagrange'a

1. Sprawdzić, że n>m i każda funkcja f_i ma ciągłe pochodne cząstkowe.
2. Zbudować funkcję Lagrange'a

$$L(\mathbf{x},\mathbf{u}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x})$$

3. Znaleźć wszystkie rozwiązania następującego układu równań nieliniowych

Warunki Lagrange'a

$$\nabla L(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \nabla f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial u_i} = f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1,\ldots,m$$

4. Sprawdzić każde rozwiązanie (**x***, **u***) aby stwierdzić, czy jest minimum lokalnym.

Metoda Lagrange'a

1. Sprawdzić, że n>m i każda funkcja f_i ma ciągłe pochodne cząstkowe.
2. Zbudować funkcję Lagrange'a

$$L(\mathbf{x},\mathbf{u}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x})$$

3. Znaleźć wszystkie rozwiązania następującego układu równań nieliniowych

$$\nabla L(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \nabla f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial u_i} = f_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1,\ldots,m$$

Punkty Lagrange'a

4. Sprawdzić każde rozwiązanie **($\mathbf{x}^*$, $\mathbf{u}^*$)** aby stwierdzić, czy jest minimum lokalnym.

Przykład

zminimalizować $f_0(\mathbf{x}) = (x_1 - 1)^2 + x_2^2 + 1$

przy ograniczeniach: $f_1(\mathbf{x}) = x_1 - 0.25x_2^2 = 0$

Przykład – znajdowanie punktów Lagrange'a

<u>Rozwiązanie:</u>

$x_1 = x_2 = 0$

$u_1 = 2$

Sprawdzanie punktów Lagrange'a

Jeżeli

(**x***, **u***) jest jedynym punktem Lagrange'a

i wiadomo, że funkcja osiąga minimum,

to

x* jest minimum lokalnym.

Twierdzenie zachodzi dla naszego przykładu. Zatem punkt (0,0) jest minimum.

Przykład

Sprawdzanie punktów Lagrange'a

Jeżeli

($\mathbf{x^*}$, $\mathbf{u^*}$) jest punktem Lagrange'a

i hesjan $H_L(\mathbf{x^*})$ funkcji Lagrange'a w punkcie $\mathbf{x^*}$ dla $\mathbf{u} = \mathbf{u^*}$ spełnia warunek:

$$\mathbf{x}^T H_L(\mathbf{x^*})\mathbf{x} > 0$$

dla wszystkich $\mathbf{x}$ takich, że $\mathbf{x}^T \nabla f_i(\mathbf{x})=0,\ i=1,\dots,m$,

to

$\mathbf{x}$* jest minimum lokalnym.

Sprawdzanie punktów Lagrange'a

Jeżeli założenia twierdzenia Lagrange'a są spełnione i nie istnieje **u** takie, że

$$\nabla f_0(\mathbf{x^*}) + u_i \nabla f_i(\mathbf{x^*}) = 0$$

w punkcie **x***, to w tym punkcie na pewno nie występuje minimum.

Przykład

zminimalizować $f_0(\mathbf{x}) = x_1^2 + (x_2 - 2)^2 + x_3^2$

przy ograniczeniach

$$f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + 0.25x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$
$$f_2(\mathbf{x}) = -x_2 + 2x_3 = 0$$

w punkcie:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$