Rozdział 3

Programowanie liniowe

Programowanie liniowe jest najczęściej stosowanym modelem optymalizacji ze względu na istnienie sprawnych algorytmów znajdowania rozwiązania optymalnego, a także intuicyjność liniowych zależności występujących w modelu. Pewne ogólne własności modeli liniowych omówiono w rozdziale 2.

3.1. Przykład

Mała firma South American Coffee Ltd. (SAC Ltd.) produkuje na rynek polski cztery mieszanki kawy: *Northwest Passage Blend*, *Sunrise Blend*, *Harbormaster* oraz *French Expedition*. Każda mieszanka zawiera trzy podstawowe składniki: kawę brazylijska, kolumbijską i peruwiańską. Firma posiada ograniczone zapasy poszczególnych gatunków kawy. Popyt na każdą z mieszanek jest większy niż możliwości produkcyjne firmy SAC Ltd. Jak zaplanować produkcję poszczególnych mieszanek, aby uzyskać maksymalny zysk z ich sprzedaży?

3.1.1. Analiza sytuacji decyzyjnej

Tablica 3.1 przedstawia skład (w kg surowca na 10 kg mieszanki) każdej z mieszanek, zysk w [zł/kg] z ich sprzedaży oraz posiadane przez firmę zapasy kawy poszczególnych gatunków.

Tablica 3.1. Skład mieszanek kawy

Mieszanka	Kawa brazylijska [kg]	Kawa kolumbijska [kg]	Kawa peruwiańska [kg]	zysk [zł/kg]
Northwest Passage	2	4	4	80
Sunrise Blend	4	5	1	60
Harbormaster	3	3	4	40
French Expedition	7	2	1	50
zapas [kg]	800	640	600	

Ile kilogramów każdej z mieszanek należy wyprodukować z posiadanych zapasów surowca, aby całkowity zysk ze sprzedaży był maksymalny?

3.1.2. Budowa modelu matematycznego

Oznaczmy przez x_1 ilość (w kilogramach) mieszanki Northwest Passage Blend planowaną do produkcji, x_2 - ilość mieszanki Sunrise Blend, x_3 - ilość mieszanki Harbormaste i przez x_4 ilość mieszanki French Expedition. Skoro zysk ze sprzedaży 1 kg kawy Northwest Passage Blend wynosi 80 zł, to łatwo obliczyć, że zysk ze sprzedaży wyprodukowanej ilosci wynosi $80x_1$ zł. Podobnie przeliczamy zysk dla pozostałych mieszanek. Całkowity zysk ze sprzedaży tych mieszanek obliczamy jako sumę zysków ze sprzedaży każdej mieszanki $z = 80x_1 + 60x_2 + 30x_3 + 50x_4$. Zysk ten jest funkcją zmiennych decyzyjnych $x_i, i = 1, \ldots, 4$. Szukamy maksymalnej wartości tej funkcji, co zapisujemy następująco:

$$\text{zmaksymalizować} \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 80x_1 + 60x_2 + 30x_3 + 50x_4 \tag{3.1}$$

Wartość zysku, który firma SAC Ltd. może uzyskać jest jednak ograniczona od góry ze względu na ograniczone zapasy kawy. Ograniczenia te formułujemy osobno dla każdego gatunku kawy. Ilość kawy brazylijskiej we wszystkich mieszankach nie może przekroczyć 80 kg.

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_x + 7x_4 \leqslant 800 \tag{3.2}$$

Podobnie budujemy ograniczenia dla pozostałych gatunków kawy: kolumbijskiej (3.3) i peruwiańskiej (3.4).

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_x + 2x_4 \leqslant 640 \tag{3.3}$$

$$4x_1 + x_2 + 4x_x + x_4 \leqslant 600 \tag{3.4}$$

Ponadto, logiczne jest założenie, że zmienne $x_i, i = 1, \ldots, 4$ przyjmują wartości nieujemne:

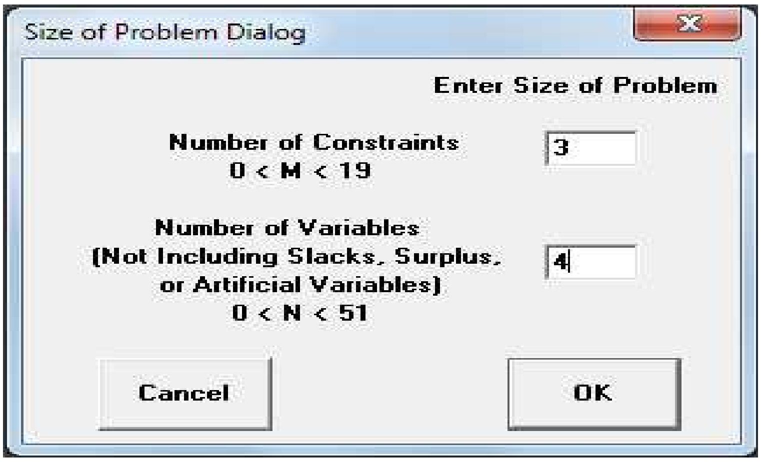
$$x_i \geqslant 0, i = 1, 2, 3, 4 \tag{3.5}$$

Zmienne x_i to *zmienne decyzyjne*, funkcja (3.1) jest *funkcją celu*, a nierówności (3.2)-(3.5) - *ograniczeniami*. Łatwo zauważyć, że zarówno funkcja celu, jak i lewe strony ograniczeń są funkcjami liniowymi.

Sformułowane zadanie jest zatem *zadaniem programowania liniowego*.

3.1.3. Rozwiązanie zadania decyzyjnego

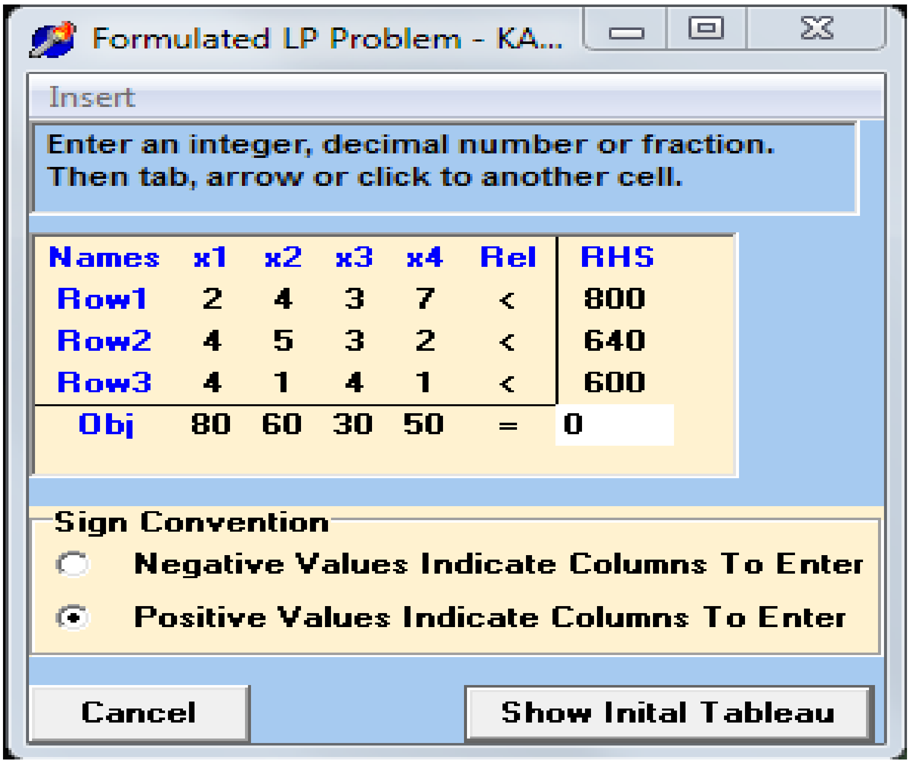
Zanim przejdziemy do omówienia metod rozwiązywania zadań programowania liniowego, rozwiążemy nasze zadanie korzystając z solwera, np. oprogramowania ExploreLP. Program uruchamiamy z wiersza poleceń. W pierwszym kroku podajemy liczbę ograniczeń (bez ograniczeń (3.5)) oraz liczbę zmiennych decyzyjnych. W naszym przykładzie mamy 4 zmienne i 3 ograniczenia (Rys. 3.1).



Rysunek 3.1. Wprowadzanie liczby zmiennych i ograniczeń w programie ExploreLP.

Na rysunku 3.2 przedstawiono ekran programu podczas wprowadzania danych. Wprowadzamy współczynniki przy zmiennych w ograniczeniach oraz funkcji celu (ostatni wiersz), kierunek oraz prawe strony ograniczeń. Ponieważ szukamy maksimum funkcji, ustawiamy przycisk `Positive values indicate column to enter`, a następnie wybieramy polecenie `Show initial tableau`. Teraz należy zapisać plik z danymi.

W kolejnym kroku w zakładce `Compute` wybieramy opcję `Find optimal solution`, a po wykonaniu obliczeń rozwiązanie możemy odczytać wybierając w zakładce `View` opcję `Solution`. Wygląd ekranu na tym etapie przedstawia Rys. 3.3



Rysunek 3.2. Wprowadzanie danych w programie ExploreLP.

Odczytujemy wartości zmiennych w rozwiązaniu optymalnym: $x_1 = 120$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 80$ oraz wartość zysku $z = 13600$.

3.1.4. Ocena poprawności i realności uzyskanych rozwiązań oraz ewentualna korekta modelu

Optymalny plan produkcji wynikający z rozwiązania zadania programowania liniowego to 120 kg mieszanki *Northwest Passage Blend* oraz 80 kg mieszanki *French Expedition*, co pozwala osiągnąć zysk 13600 zł. Rozwiązanie to jest możliwe do przyjęcia, a zatem można je zaproponować do realizacji. Metoda programowania liniowego pozwala na znacznie głębszą analizę tego rozwiązania, będziemy ją kontynuować w kolejnych rozdziałach. Przedtem jednak zapoznamy się z metodą sympleks, aby lepiej wykorzystać możliwości dostępnego oprogramowania.

Rysunek 3.3. Odczytywanie rozwiązania w programie ExploreLP.

3.2. Metoda sympleks

Istnieje kilka metod rozwiązywania zadań programowania liniowego. Najprostszą jest metoda graficzna, jednak jej praktyczne zastosowanie ogranicza się do zadań z dwiema zmiennymi decyzyjnymi. Drugą, najczęściej stosowaną metodą jest metoda *sympleks*, zaproponowana w roku 1947 przez Amerykanina George'a Dantziga. Metoda ta bazuje na własnościach zbiorów rozwiązań dopuszczalnych i wynikach algebry liniowej. Jej nazwa pochodzi od sympleksu, czyli figury liniowo wypukłej, jaką jest zbiór rozwiązań dopuszczalnych problemu programowania liniowego. Wadą metody sympleks jest wysoka złożoność obliczeniowa w najgorszym wypadku. W większości zastosowań praktycznych jednak metoda ta pozwala znaleźć rozwiązanie zadania programowania liniowego w stosunkowo krótkim czasie (liniowo zależnym od rozmiaru zadania), dzięki czemu jest zastosowana w większości popularnych solwerów. Pod koniec lat siedemdziesiątych dwudziestego wieku zaproponowano pierwszą metodę o złożoności wielomianowej, tzw. metodę elipsoidalną. Autorem tej metody był matematyk ormiańskiego pochodzenia Leonid Chaczijan (Khachiyan). Dzisiaj jej znaczenie jest głównie teoretyczne, gdyż szacuje się, że przewaga metody elipsoidalnej nad sympleksową ujawnia się dopiero przy 1000 ograniczeniach i 50 000 zmiennych [10]. W roku 1984 informatyk hinduski Narendra Karmarkar opracował kolejny algorytm wielomianowy, tzw. metodę punktu wewnętrznego. Jest to obecnie najszybszy asymptotycznie algorytm rozwiązywania zadań programowania liniowego, ale jego przewagę nad algorytmem sympleks można również zauważyć dopiero przy dużej liczbie zmiennych i ograniczeń. W roku 2000 metodę sympleksową uznano za jeden z 10 czołowych algorytmów ubiegłego stulecia [10].

3.2.1. Ogólne sformułowanie problemu programowania liniowego

Sformułowanie problemu rozważanego w punkcie 3.1 można uogólnić na n zmiennych i m ograniczeń następująco:

zmaksymalizować (zminimalizować)

$$z = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.6}$$

przy ograniczeniach

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \qquad i = 1, \dots, m \tag{3.7}$$

Współczynniki $c_j, b_i, a_{ij}, j = 1, \dots, n, i = 1, \dots, m$ są parametrami problemu, a $x_j, j = 1, \dots, n$, zmiennymi decyzyjnymi.

Algorytm sympleks wymaga sprowadzenia zadania programowania liniowego do postaci standardowej, w której ograniczenia mają postać równań, wszystkie zmienne są nieujemne, a także prawe strony ograniczeń są liczbami nieujemnymi. Założymy ponadto, że w postaci standardowej funkcja celu jest maksymalizowana.

Ogólne sformułowanie zadania programowania liniowego w postaci standardowej przedstawiono poniżej:

$$\text{zmaksymalizować} \quad z = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.8}$$

$$\text{przy ograniczeniach} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m \tag{3.9}$$

$$x_1, \ldots, x_n \geqslant 0 \tag{3.10}$$

gdzie $b_i \geqslant 0, i = 1, \ldots, m$. Każde zadanie programowania liniowego można sprowadzić do równoważnej postaci standardowej. W tym celu w nierównościach wprowadzamy tzw. *zmienne uzupełniające*. Zależnie od kierunku nierówności zmienne te dodajemy bądź odejmujemy od lewej strony ograniczeń. Zmienne uzupełniające w funkcji celu mają współczynniki równe zero. Następnie, jeżeli po prawej stronie występują liczby ujemne, to odpowiednią równość mnożymy obustronnie przez (-1). W sytuacji, gdy zmienne decyzyjne mogą przyjmować wartości ujemne, zastępujemy każdą zmienną x_j parą zmiennych $x_j^+ \geqslant 0, x_j^- \geqslant 0$ dodając ograniczenie $x_j = x_j^+ - x_j^-$.

Zadanie z przykładu 3.1 sprowadzamy do postaci standardowej wprowadzając zmienne s_1, s_2 i s_3, odpowiednio w ograniczeniach (3.2)-(3.4). Zadanie w postaci standardowej przedstawiają równania (3.11)-(3.16).

$$\text{zmaksymalizować} \quad 80x_1 + 60x_2 + 30x_3 + 50x_4 \tag{3.11}$$

przy ograniczeniach:

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_x + 7x_4 + s_1 = 800 \tag{3.12}$$

$$4x_1 + 5x_2 + 3x_x + 2x_4 + s_2 = 640 \tag{3.13}$$

$$4x_1 + x_2 + 4x_x + x_4 + s_3 = 600 \tag{3.14}$$

$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{3.15}$$

$$s_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, 3 \tag{3.16}$$

3.2.2. Własności rozwiązań optymalnych

Oznaczymy zbiór punktów n-wymiarowej przestrzeni $\Re^n$ spełniających równania (3.9) jako $\mathcal{X}$. Zbiór punktów wielościanu $\mathcal{X}$ spełniających nierówności (3.10) nazywamy zbiorem rozwiązań dopuszczalnych zadania programowania liniowego. Zbiór $\mathcal{X}$ (podobnie jak zbiór rozwiązań dopuszczalnych) jest liniowo wypukły, co oznacza, że jeżeli punkty $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ należą do $\mathcal{X}$, to każda kombinacja wypukła tych punktów: $\alpha\mathbf{x} + (1-\alpha)\mathbf{y}$, gdzie $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, również należy do $\mathcal{X}$.

Z twierdzenia Kroneckera-Capellego w algebrze liniowej wynika, że jeżeli liczba zmiennych jest mniejsza lub równa od liczby ograniczeń (dla równań wzajemnie niezależnych), to układ równań (3.9) ma co najwyżej jedno rozwiązanie. W takim wypadku albo zbiór $\mathcal{X}$ jest zbiorem pustym albo jednoelementowym i znalezienie optimum jest trywialne. W sytuacji, gdy $n > m$, rozwiązanie układu równań powstałego przez przyrównanie do zera $(n - m)$ zmiennych nazywa się *rozwiązaniem bazowym* i odpowiada wierzchołkowi wielościanu $\mathcal{X}$. O m zmiennych, których wartości wyznaczamy rozwiązując powyższy układ mówimy, że są to *zmienne bazowe*. Jeżeli wszystkie zmienne bazowe są nieujemne, to baza jest *bazą dopuszczalną*. Jeżeli w bazie są zmienne o wartości zero, to bazę nazywamy *zdegenerowaną*. Zadanie programowania liniowego z dowolną liczbą zmiennych można zatem rozwiązać, wyznaczając wszystkie wierzchołkowe punkty wielościanu $\mathcal{X}$, a następnie porównując wartości funkcji w punktach wierzchołkowych. Liczba wierzchołków wielościanu jest rzędu m^n, a zatem byłby to sposób bardzo pracochłonny. Istota metody sympleksowej sprowadza się do tego, że jeżeli znany jest jakikolwiek punkt wierzchołkowy odpowiadający rozwiązaniu dopuszczalnemu i wartość funkcji celu w tym punkcie, to w kolejnym kroku przechodzimy do innego wierzchołka dopuszczalnego, znajdującego się na jednej krawędzi z odnalezionym już punktem, w którym funkcja celu osiąga nie gorszą wartość. Algorytm kończy się, gdy kolejny przeglądany punkt wierzchołkowy jest najlepszy pod względem odpowiednich wartości funkcji celu.

Zaobserwujmy następujące własności wynikające bezpośrednio z liniowej wypukłości zbioru $\mathcal{X}$:
— Jeżeli $\mathcal{X}$ jest zbiorem pustym, to zadanie programowania liniowego nie ma rozwiązań.
— Jeżeli $\mathcal{X}$ jest wielościanem wypukłym (sympleksem), to zadanie ma rozwiązanie optymalne i wartość funkcji celu jest ograniczona.
— Jeżeli zbiór $\mathcal{X}$ jest nieograniczony, to zadanie ma rozwiązania dopuszczalne, ale wartość funkcji celu może być nieograniczona.
— Jeżeli zadanie ma więcej niż jedno rozwiązanie optymalne, to ma ich nieskończenie wiele.

3.2.3. Tablica sympleks

Obliczenia związane z kolejnymi krokami algorytmu sympleks wygodnie jest prowadzić w tablicy, nazywanej tablicą sympleks. Tablica sympleks reprezentuje bazowe rozwiązanie dopuszczalne problemu w postaci standardowej i zawiera $(m + 1)$ wierszy i n kolumn, gdzie m jest liczbą ograniczeń, a n liczbą zmiennych (łącznie ze zmiennymi uzupełniającymi) w rozwiązywanym problemie. Kolumny odpowiadają zmiennym decyzyjnym. Wiersze $1 \div m$ odpowiadają zmiennym bazowym. Element znajdujący się w i-tym wierszu i j-te kolumnie tablicy oznaczamy x_{ij}. Jest to wartość elementu (i, j) macierzy współczynników w rozwiązaniu bazowym reprezentowanym w tablicy. Ostatni, $(m+1)$-wszy wiersz nazywa się wierszem wskaźnikowym i zawiera wartość wyrażenia $c_j - z_j = c_j - \sum_{i \in B} c_i x_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$. Dla wygody w tablicy sympleks dodajemy kolumny zawierajace numer wiersza (kolumna i), nazwy zmiennych tworzących bazę (kolumna B), współczynniki w funkcji celu przy zmiennych bazowych (kolumna c^B) oraz wartości prawych stron ograniczeń (kolumna RHS).

Tablica 3.2 przedstawia początkową tablicę sympleks dla zadania z przykładu 3.1

Tablica 3.2. Początkowa tablica sympleks dla zadania z przykładu 3.1

i	B	c^B	8	6	3	5	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	**2**	4	3	7	1	0	0	800
2	s_2	0	**4**	5	3	2	0	1	0	640
3	s_3	0	**4**	1	4	1	0	0	1	600
4			**80**	60	30	50	0	0	0	0

3.2.4. Algorytm sympleks

Załóżmy, że znamy początkowe rozwiązanie bazowe problemu w postaci standardowej. Istnieje kilka sposobów znajdowania początkowego rozwiązania bazowego. Jeden z nich, metodę sztucznej bazy, omówimy w punkcie 3.2.5. Algorytm sympleks przedstawiono poniżej.

Algorytm sympleks

Krok 1. zbudować początkową tablicę sympleks;

Krok 2. wybrać największy element wiersza wskaźnikowego $(x_{m+1,k})$;

Krok 3. jeżeli $x_{m+1,k} \leqslant 0$, to bieżące rozwiązanie jest optymalne: STOP; w przeciwnym razie

Krok 4. jeżeli istnieje j takie, że $x_{m+1,j} > 0$ oraz dla każdego $i \in B$ zachodzi $x_{ij} \leqslant 0$, to zadanie nie ma ograniczonego rozwiązania: STOP; w przeciwnym razie

a) wyznaczyć element x_{lk} o najmniejszym ilorazie b_{ik}/x_{ik} dla $x_{ik} > 0$, $i \in B$;

b) usunąć z bazy wektor l; wprowadzić do bazy wektor k; przekształcić tablicę sympleks przyjmując element x_{lk} za element centralny przekształcenia i stosując następujące wzory:

$$x_{lj} := \frac{x_{lj}}{x_{lk}}; \quad x_{ij} := x_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} x_{lj} \text{ (dla } i \neq l\text{)}, \ j = 1, \ldots, n;$$

Krok 5. wrócić do kroku 2.

Tablica 3.2 przedstawia początkową tablicę sympleks dla zadania z przykładu 3.1.

Tablica 3.3. Tablica sympleks dla zadania z przykładu 3.1 po pierwszej iteracji

i	B	c^B	8	6	3	5	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	0	**7/2**	1	13/2	1	0	−1/2	500
2	s_2	0	0	**4**	−1	1	0	1	−1	40
3	x_1	80	1	**1/4**	1	1 /4	0	0	1/4	150
4			0	**40**	−50	30	0	0	−20	−12000

Znajdujemy największy element w wierszu wskaźnikowym (x_{42}) oraz *element centralny* przekształcenia (x_{22}), zgodnie z krokiem 4a algorytmu. Stosując odpowiednio wzory z kroku 4b algorytmu otrzymujemy tablicę 3.3. Tablice 3.2-3.6 przedstawiają kolejne etapy rozwiązania problemu (3.11)-(3.16). W każdej tablicy zaznaczono element centralny przekształcenia x_{lk}.

Tablica 3.4. Tablica sympleks dla zadania z przykładu 3.1 po drugiej iteracji

i	B	c^B	8	6	3	5	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	0	0	15/8	**45/8**	1	−7/8	3/8	465
2	x_2	60	0	1	−1/4	**1/4**	0	1/4	−1/4	10
3	x_1	80	1	0	17/16	**3/16**	0	−1/16	5/16	295/2
4			0	0	−40	**20**	0	−10	−10	−12400

Tablica 3.5. Tablica sympleks dla zadania z przykładu 3.1 po trzeciej iteracji

i	B	c^B	8	6	3	5	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	0	−45/2	15/2	0	1	−13/2	**6**	240
2	x_4	50	0	4	−1	1	0	1	−1	40
3	x_1	80	1	−3/4	5/4	0	0	−1/4	**1/2**	140
4			0	−80	−20	0	0	−30	**10**	−13200

Tablica 3.6. Końcowa tablica sympleks dla zadania z przykładu 3.1

i	B	c^B	8	6	3	5	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	
1	s_3	0	0	$-15/4$	$5/4$	0	$1/6$	$-13/12$	1	40
2	x_4	50	0	$1/4$	$1/4$	1	$1/6$	$-1/12$	0	80
3	x_1	80	1	$9/8$	$5/8$	0	$-1/12$	$7/24$	0	120
4			0	$-85/2$	$-65/2$	0	$-5/3$	$-115/6$	0	-13600

Końcowa tablica sympleks to tablica 3.6. Jak widać, jest to ta sama tablica, którą otrzymaliśmy za pomocą programu ExploreXP (rys. 3.3). Wartości zmiennych decyzyjnych odczytujemy w ostatniej kolumnie, w wierszach odpowiadających zmiennym bazowym: $s_3 = 40, x_4 = 80, x_1 = 120$, a wartość funkcji celu wynosi 13600 (zauważmy, że w tablicy sympleks występuje wartość przeciwna -13600, gdyż $c_0 - z_0 = 0 - \sum_{i \in B} c_i x_i$). Zmienne niebazowe przyjmują wartości równe zero: $x_2 = x_3 = s_1 = s_2 = 0$.

3.2.5. Metoda sztucznej bazy

Nie zawsze znalezienie dopuszczalnego rozwiązania początkowego jest tak łatwe, jak w przykładzie 3.1.1. Rozważmy przykład (3.17) -(3.21).

$$\text{zminimalizować} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 \tag{3.17}$$
$$\text{przy ograniczeniach} \quad x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 3 \tag{3.18}$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 5 \tag{3.19}$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geqslant 2 \tag{3.20}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \tag{3.21}$$

Po sprowadzeniu do postaci standardowej otrzymujemy:

$$\text{zmaksymalizować} \quad -2x_1 - x_2 - x_3 \tag{3.22}$$
$$\text{przy ograniczeniach} \quad x_1 + 3x_2 + x_3 - s_1 = 3 \tag{3.23}$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 5 \tag{3.24}$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - s_3 = 2 \tag{3.25}$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geqslant 0 \tag{3.26}$$

Metoda sztucznej bazy polega na wprowadzeniu do bazy zmiennych sztucznych odpowiadających wierszom, w których zmienne uzupełniające nie należą do bazy. Zmienne te można wyeliminować z bazy na dwa sposoby: stosując tzw. metodę dwufazową lub metodę dużego M. Omówimy tu tę drugą metodę. Przyjmujemy, że zmienne sztuczne mają w funkcji celu ujemne współczynniki o bardzo dużej wartości bezwzględnej oznaczanej M. Otrzymaną w ten sposób tablicę początkową przekształcamy zgodnie z algorytmem sympleks. Jeżeli zadanie ma rozwiązanie dopuszczalne, to zmienne sztuczne opuszczą bazę, w przeciwnym razie co najmniej jedna zmienna sztuczna pozostanie w bazie. Szczegółowo algorytm sztucznej bazy przedstawiamy poniżej.

Metoda sztucznej bazy

Krok 1. Wprowadzamy $k \leqslant m$ zmiennych sztucznych. Zmienne te są nieujemne, a ich współczynniki w funkcji celu przyjmują wartość $(-M)$, gdzie M jest dużą liczbą dodatnią.

Krok 2. Tablicę sympleks ze sztucznymi wektorami przekształcamy jak zwykłą tablicę, dopóki:

a) wszystkie sztuczne wektory zostaną wyeliminowane z bazy, tj. mamy bazę dopuszczalną pierwotnego zagadnienia;

b) brak dodatnich współczynników przy M w wierszu wskaźnikowym
   - jeżeli sztuczna część funkcji celu jest dodatnia, to zagadnienie nie ma rozwiązania dopuszczalnego;
   - jeśli sztuczna część funkcji celu jest równa zero, to mamy zdegenerowane rozwiązanie dopuszczalne pierwotnego zagadnienia, które zawiera co najwyżej jeden sztuczny wektor. Przekształcamy tablicę sympleks wprowadzając do bazy wektor, który odpowiada największemu dodatniemu elementowi wiersza wskaźnikowego przy zerowej wartości współczynnika przy M.

Krok 3. Po otrzymaniu bazy dopuszczalnej zagadnienia pierwotnego kontynuujemy realizację algorytmu sympleks aż do otrzymania rozwiązania problemu pierwotnego.

W zadaniu (3.17)-(3.26) dodajemy zmienne sztuczne a_1 i a_3 (indeksy wskazują, w których ograniczeniach pojawią się zmienne sztuczne).

$$\text{zmaksymalizować} \quad -2x_1 - x_2 - x_3 - Ma_1 - Ma_2 \tag{3.27}$$

$$\text{przy ograniczeniach} \quad x_1 + 3x_2 + x_3 - s_1 + a_1 = 3 \tag{3.28}$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 5 \tag{3.29}$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - s_3 + a_3 = 2 \tag{3.30}$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geqslant 0 \tag{3.31}$$

Początkową tablicę sympleks dla tego zadania przedstawia tablica 3.7.

Tablica 3.7. Początkowa tablica sympleks ze zmiennymi sztucznymi

i	B	c^B	-2	-1	-1	0	0	0	$-M$	$-M$	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1	a_3	
1	a_1	$-M$	1	3	1	-1	0	0	1	0	3
2	s_2	0	2	1	2	0	1	0	0	0	5
3	a_3	$-M$	2	2	1	0	0	-1	0	1	2
4			$3M-2$	$5M-1$	$2M-1$	$-M$	0	$-M$	0	0	5M

Po wyeliminowaniu z bazy zmiennych sztucznych otrzymujemy tablicę 3.8.

Tablica 3.8. Tablica sympleks po wyeliminowaniu z bazy zmiennych sztucznych

i	B	c^B	-2	-1	-1	0	0	0	$-M$	$-M$	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1	a_3	
1	x_2	-1	0	1	$1/4$	$-1/2$	0	$1/4$	$1/2$	$-1/4$	1
2	s_2	0	0	0	$5/4$	$-1/2$	1	$5/4$	$1/2$	$-5/4$	4
3	x_1	-2	1	0	$1/4$	$1/2$	0	$-3/4$	$-1/2$	$3/4$	0
4			0	0	$-1/4$	$1/2$	0	$-5/4$	$-1/2-M$	$5/4-M$	1

Jest to rozwiązanie dopuszczalne. Kolumny odpowiadające zmiennym sztucznym można usunąć z tablicy i kontynuować obliczenia stosując algorytm sympleks.

W programie ExploreLP można wprowadzić zmienne sztuczne poleceniem `Compute` → `Enter Artificial Variables`. Jeżeli nie wybierzemy tej opcji, to zadanie zostanie rozwiązane bez ujawniania zmiennych sztucznych.

3.3. Zagadnienie dualne

Wróćmy do firmy South American Coffee Ltd. i przypuśćmy, że firma Warehouses Inc. (WI) chce odkupić zasoby firmy SAC, czyli zapasy kawy kolumbijskiej, brazylijskiej i peruwiańskiej. Oczywiście WI chce zminimalizować całkowite koszty transakcji, jednak SAC stawia warunek, że na transakcji musi zarobić co najmniej tyle, ile na produkcji każdej z mieszanek. W tym zadaniu decyzja polega na ustaleniu cen sprzedaży poszczególnych surowców.

3.3.1. Model matematyczny

Oznaczmy, przez y_1, y_2, y_3 odpowiednio ceny 1 dag kawy brazylijskiej, kolumbijskiej i peruwiańskiej. Całkowity koszt zakupu wynosi wtedy: $800y_1 + 640y_2 + 600y_3$. Ograniczenia możemy sformułować jako żądanie, aby zysk ze sprzedaży surowca do produkcji 1 kg każdej mieszanki był nie mniejszy niż zysk ze sprzedaży 1 kg odpowiedniej mieszanki. Sformułowanie problemu przedstawiono poniżej.

$$\text{zminimalizować} \quad 800y_1 + 640y_2 + 600y_3 \tag{3.32}$$

$$\text{przy ograniczeniach} \quad 2y_1 + 4y_2 + 4y_3 \geqslant 80 \tag{3.33}$$

$$4y_1 + 5y_2 + y_3 \geqslant 60 \tag{3.34}$$

$$3y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geqslant 30 \tag{3.35}$$

$$7y_1 + 2y_2 + 1y_3 \geqslant 50 \tag{3.36}$$

$$y_1, y_2, y_3 \geqslant 0 \tag{3.37}$$

Zadanie (3.32) - (3.37) nazywa się zadaniem *dualnym* do zadania (3.1) - (3.5). Zadanie (3.1) - (3.5) nazywa się wtedy *pierwotnym* albo *prymalnym*. Zadanie dualne można rozwiązać za pomocą algorytmu sympleks, ale jego rozwiązanie optymalne można również odczytać z końcowej tablicy sympleks zadania prymalnego, korzystając z pewnych własności pary zadań dualnych. Własności te podamy w kolejnym podrozdziale.

W rozwiązaniu optymalnym zadania dualnego $y_1 = 5/3$, $y_2 = 115/6$, $y_3 = 0$, a wartość funkcji celu wynosi $z^* = 13600$. Wartość ta nieprzypadkowo jest równa wartości optymalnej funkcji celu zadania prymalnego. Rozwiązanie zadania dualnego można również interpretować jako cenę, którą SAC jest gotowa zapłacić za dodatkową jednostkę każdego zasobu. Zauważmy, że w wypadku kawy peruwiańskiej, dodatkowa ilość surowca nie ma dla ACE żadnej wartości ($y_3 = 0$). Jest to uzasadnione, gdyż w optymalnym planie produkcji zasób kawy peruwiańskiej nie zostanie zużyty w całości ($s_3 = 40$). Ewentualna dodatkowa ilość tego zasobu nie spowoduje zwiększenia zysku. Natomiast w wypadku np. kawy brazylijskiej cena, jaką warto zapłacić za dodatkowe 1 kg surowca wynosi 5/3. Jeżeli zwiększymy zapas tego surowca do 801 kg, to zysk wyniesie $40805/3 = 13601\frac{2}{3}$, czyli wzrośnie o 5/3 zł. Stąd cena jaką warto zapłacić za dodatkową jednostkę kawy brazylijskiej wynosi 5/3 zł. Zmienną dualną y_i nazywa się niekiedy *ceną ukrytą* zasobu i.

3.3.2. Własności zagadnień dualnych

Zacznijmy od zdefiniowania ogólnej postaci zadania dualnego. Niech zadania pierwotne ma postać (3.8) - (3.10). Zadanie dualne ma postać:

$$\text{zminimalizować} \quad w(y_1, \ldots, y_m) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{3.38}$$

$$\text{przy ograniczeniach} \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, j = 1, \ldots, n \tag{3.39}$$

$$y_1, \ldots, y_m \geqslant 0 \tag{3.40}$$

Zachodzą następujące własności:

Własność 3.1
Zadanie pierwotne jest zadaniem dualnym do swojego zadania dualnego.

Ze względu na własność 3.1 mówimy zwykle o parze zadań dualnych lub *sprzężonych*. Zadania dualne względem siebie nazywamy *symetrycznymi zadaniami dualnymi*.

Własność 3.2
Jeżeli $(x_1, \ldots, x_n)$ i $(y_1, \ldots, y_m)$ są dowolnymi rozwiązaniami dopuszczalnymi, odpowiednio zadania pierwotnego i dualnego, to wartości funkcji celu w tych zadaniach spełniają nierówność: $z(x_1, \ldots, x_n) \leqslant w(y_1, \ldots y_m)$.

Rozwiązanie optymalne zadania dualnego można wyznaczyć na podstawie znajomości rozwiązania optymalnego zadania pierwotnego.

Własność 3.3
Dla optymalnych rozwiązań zadań pierwotnego i dualnego zachodzą następujące związki:

$$y_i^*(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^*) = 0, i = 1, \ldots, m \tag{3.41}$$

$$x_j^*(c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^*) = 0, j = 1, \ldots, n \tag{3.42}$$

Praktycznym wnioskiem z własności 3.3 jest fakt, że rozwiązanie optymalne zadania dualnego można odczytać z końcowej tablicy sympleks zadania pierwotnego w wierszu wskaźnikowym. Wartości zmiennych dualnych są równe wartościom różnic dopełniających w odpowiednich ograniczeniach. Rozwiązanie optymalne zadania (3.38)-(3.40) z końcowej tablicy sympleks zadania pierwotnego (3.1)-(3.5): $y_1 = 5/3, y_2 = 115/6, y_3 = 0$, a wartość funkcji celu wynosi oczywiście 13600.

Własność 3.4
Jeżeli jedno z zadań dualnych ma ograniczone rozwiązanie optymalne, to drugie z zadań również ma ograniczone rozwiązanie optymalne oraz $z(x_1^*, \ldots, x_n^*) = w(y_1^*, \ldots y_m^*)$.

Własność 3.5
Jeżeli jedno z zadań dualnych nie ma ograniczonego rozwiązania optymalnego, to drugie z zadań nie ma rozwiązań dopuszczalnych.

Własność odwrotna do własności 3.5 nie jest prawdziwa. Jeżeli jedno z zadań jest sprzeczne, to zachodzi kolejna własność.

Własność 3.6
Jeżeli jedno z zadań dualnych jest sprzeczne, to drugie z zadań jest albo sprzeczne, albo nie ma ograniczonego rozwiązania optymalnego.

Podsumowując własności (3.1)-(3.6) w parze zadań wzajemnie dualnych może wystąpić jedna z następujących sytuacji:
— obydwa zadania mają ograniczone rozwiązania optymalne i $z(x_1^*, \ldots, x_n^*) = w(y_1^*, \ldots y_m^*)$,
— obydwa zadania są sprzeczne (nie mają rozwiązań dopuszczalnych),
— jedno z zadań jest sprzeczne, a drugie ma nieograniczone rozwiązanie optymalne.

W przypadku, gdy w jednym z zadań występują ograniczenia w postaci równości, to zmienne dualne związane z tym ograniczeniem mogą przyjmować wartości dowolne co do znaku (nie muszą być nieujemne). Zatem zadania dualne przyjmują następującą postać:

zmaksymalizować $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
przy ograniczeniach
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \ldots, m$
$x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$

zminimalizować $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
przy ograniczeniach
$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, j = 1, \ldots, n$
$y_1, \ldots, y_m \in \Re$

W tym wypadku mówimy o *niesymetrycznych* zadaniach dualnych.

3.4. Zadania

Zadanie 3.1
Dane są 4 maszyny, których fundusz efektywny czasu pracy podano w Tablicy 3.9. Za pomocą tych maszyn należy zrealizować zadany program produkcji pięciu wyrobów podany również w Tablicy 3.9. Koszt godziny pracy maszyny j na rzecz wyrobu i podano w Tablicy 3.10. Produkcja każdego wyrobu może być podzielona w dowolny sposób pomiędzy maszyny. Wydajność godzinowa maszyn zależy od tego który wyrób jest produkowany na danej maszynie. Poszczególne wartości podano w Tablicy 3.9. Należy przydzielić zadania produkcyjne do maszyn tak, aby łączny koszt realizacji programu produkcyjnego był minimalny.

Tablica 3.9. Wydajność poszczególnych maszyn zależnie od wyrobów [szt/godz.]

Wyroby	Maszyny				Planowana produkcja
	M 1	M 2	M 3	M 4	[szt./mc]
1	200	200	500	300	20000
2	700	250	300	200	25000
3	450	300	400	400	18000
4	400	300	200	300	15000
5	100	400	600	200	20000
Fundusz czasu pracy maszyny [godz./mc]	30	90	60	90	

Zadanie 3.2
Żeliwo maszynowe (przeznaczone na odlewy) wytwarzane z trzech stopów powinno zawierać: nie więcej niż 1,4% węgla (C), nie więcej niż 0,8% krzemu (Si), nie mniej niż 2,5% manganu (Mn) i nie mniej niż 1,2% fosforu (P). Zawartości procentowe poszczególnych pierwiastków w stopach oraz ceny

Tablica 3.10. Koszt jednostkowy pracy maszyny j na rzecz wyrobu i [zł/godz].

Wyroby	Maszyny			
	M 1	M 2	M 3	M 4
1	10	25	10	40
2	10	30	35	25
3	10	30	10	10
4	30	15	15	25
5	25	30	50	10

zakupu każdego z nich podano Tablicy 3.11. Należy zminimalizować koszt wytworzenia 500 ton żeliwa maszynowego.

Tablica 3.11. Zawartość pierwiastków w 1 kg stopu

Stopy	C [g]	Si [g]	Mn [g]	P [g]	Cena [zł/kg]
I	28	10	30	10	10
II	14	12	20	10	15
III	10	6	30	15	20

Zadanie 3.3

W pewnym zakładzie produkcyjnym z arkusza blachy o standardowych wymiarach wycina się trzy rodzaje elementów A, B, C. Można stosować pięć sposobów rozkroju jednego arkusza blachy. Powierzchnia arkusza wynosi 3,2 m^2.W Tablicy 3.12 podano liczbę elementów uzyskanych przy zastosowaniu poszczególnych sposobów rozkroju oraz zużycie blachy na każdy element. Ile razy zastosować możliwe sposoby rozkroju, aby otrzymać nie mniej niż 200 elementów A, 100 elementów typu B i 800 elementów C zużywając przy tym możliwie najmniej arkuszy blachy.

Tablica 3.12. Sposoby rozkroju.

Elementy	Sposoby rozkroju 1 arkusza					Zużycie blachy na 1 element
	I	II	III	IV	V	[m^2]
A	1	1	0	0	0	0,7
B	2	0	2	1	0	0,4
C	0	4	2	5	8	1,1

Zadanie 3.4

Dieta pewnego egzotycznego zwierzęcia powinna zawierać co najmniej 520 g białka, 100 g cukru, 60 g tłuszczu, 317 g węglowodanów i 3 g soli mineralnych dziennie. Zwierzę można karmić czterema produktami, Zawartość składników odżywczych i cenę 1 kg każdego produktu podano w Tablicy 3.13. Wyznaczyć skład diety zwierzęcia minimalizującej koszt.

Tablica 3.13. Zawartość składników odżywczych w produktach [g/kg].

	Produkt			
Składnik	Produkt 1	Produkt 2	Produkt 3	Produkt 4
Białko	600	800	700	300
Cukier	150	80	100	200
Tłuszcz	60	100	50	70
Węglowodany	189	18	146	428
Sole mineralne	1	2	4	2
Cena [zł/kg]	100	150	120	85

Zadanie 3.5

Właściciel ciężarówki może przewieźć z miejscowości A do B cukier, mąkę, kaszę, ryż i chipsy. W ciężarówce mieści się towar o objętości co najwyżej 7000 litrów i wadze co najwyżej 5 ton. 1 kg cukru zajmuje objętość 0,8 litra, 1 kg mąki – 1,5 litra, kaszy – 1,6 litra, ryżu – 2 litry, natomiast 1 kg chipsów zajmuje objętość 4 litrów. Zysk od przewozu poszczególnych towarów jest następujący: za 1 kg cukru 0,1 zł, za 1 kg mąki 0,4 zł, za 1 kg kaszy 0,2 zł, za 1 kg ryżu 0,5 zł, za 1 kg chipsów 0,3 zł. Jakie ilości poszczególnych towarów powinien załadować właściciel ciężarówki aby zmaksymalizować swój zysk?