Metody probabilistyczne

5. Zmienne losowe: wprowadzenie

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki PP
http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/

31.10.2017

Motywacja

Często bardziej niż same zdarzenia losowe interesują nas pewne wartości liczbowe z nimi związane:

- Rzucamy n razy monetą, ale interesuje nas tylko liczba wyrzuconych orłów
- Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki; interesuje nas liczba wykonanych rzutów
- Strzelamy do tarczy na strzelnicy; interesuje nas nie tyle dokładna pozycja lotki na tarczy, co liczba zdobytych punktów
- Jaś i Małgosia umawiają się na spotkanie; interesuje nas czas oczekiwana na siebie

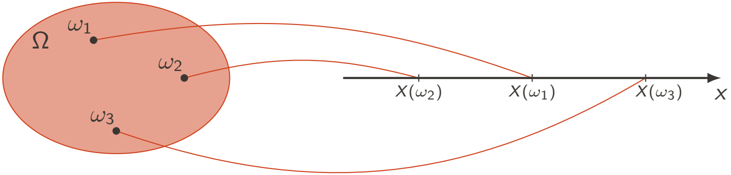
Interesuje więc nas nie tyle przestrzeń Ω, co pewne wartości z $\mathbb{R}$ przypisane zdarzeniom elementarnym

Zmienne losowe

Zmienne losowe to funkcje z Ω do $\mathbb{R}$, przyporządkowujące zdarzeniom elementarnym liczby.

W probabilistyce zmienne losowe oznacza się dużymi literami, np. X, Y, Z.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

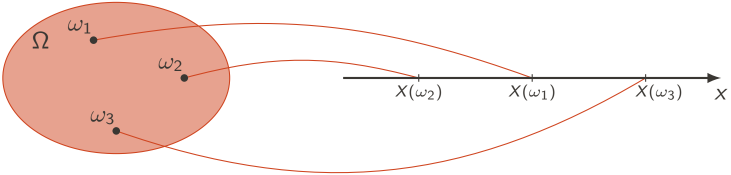


Zmienne losowe

Zmienne losowe to funkcje z Ω do $\mathbb{R}$, przyporządkowujące zdarzeniom elementarnym liczby.

W probabilistyce zmienne losowe oznacza się dużymi literami, np. X, Y, Z.

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$



Interesują nas tylko wartości przyjmowane przez X oraz ich prawdopodobieństwa

Przykład

Rzucamy 3 monetami, ale interesuje nas tylko liczba orłów:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$

Przykład

Rzucamy 3 monetami, ale interesuje nas tylko liczba orłów:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$

$$X : \Omega \to \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\begin{array}{llll} X(OOO) = 3, & X(OOR) = 2, & X(ORO) = 2, & X(ORR) = 1, \\ X(ROO) = 2, & X(ROR) = 1, & X(RRO) = 1, & X(RRR) = 0 \end{array}$$

Przykład

Rzucamy 3 monetami, ale interesuje nas tylko liczba orłów:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$

$$X \colon \Omega \to \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\begin{array}{cccc} X(OOO) = 3, & X(OOR) = 2, & X(ORO) = 2, & X(ORR) = 1, \\ X(ROO) = 2, & X(ROR) = 1, & X(RRO) = 1, & X(RRR) = 0 \end{array}$$

Każdy wynik $X = 0, 1, 2, 3$ jest związany z pewnym zdarzeniem w Ω:

- $\{\omega \colon X(\omega) = 3\} = \{OOO\}$
- $\{\omega \colon X(\omega) = 2\} = \{OOR, ORO, ROO\}$
- $\{\omega \colon X(\omega) = 1\} = \{ORR, ROR, RRO\}$
- $\{\omega \colon X(\omega) = 0\} = \{RRR\}$

Przykład

Rzucamy 3 monetami, ale interesuje nas tylko liczba orłów:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$

$$X \colon \Omega \to \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\begin{array}{llll} X(OOO) = 3, & X(OOR) = 2, & X(ORO) = 2, & X(ORR) = 1, \\ X(ROO) = 2, & X(ROR) = 1, & X(RRO) = 1, & X(RRR) = 0 \end{array}$$

Każdy wynik $X = 0, 1, 2, 3$ jest związany z pewnym zdarzeniem w Ω:

- $\{\omega \colon X(\omega) = 3\} = \{OOO\}$
- $\{\omega \colon X(\omega) = 2\} = \{OOR, ORO, ROO\}$
- $\{\omega \colon X(\omega) = 1\} = \{ORR, ROR, RRO\}$
- $\{\omega \colon X(\omega) = 0\} = \{RRR\}$

Możemy zatem zapytać o prawdopodobieństwo uzyskania danego wyniku.

$$\text{np.} \quad P(\{\omega \colon X(\omega) = 2\}) \; = \; \frac{3}{8}$$

Przykład

Rzucamy 3 monetami, ale interesuje nas tylko liczba orłów:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$

$$X\colon \Omega \to \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\begin{array}{llll} X(OOO) = 3, & X(OOR) = 2, & X(ORO) = 2, & X(ORR) = 1, \\ X(ROO) = 2, & X(ROR) = 1, & X(RRO) = 1, & X(RRR) = 0 \end{array}$$

Każdy wynik $X = 0, 1, 2, 3$ jest związany z pewnym zdarzeniem w Ω:

- $\{\omega\colon X(\omega) = 3\} = \{OOO\}$
- $\{\omega\colon X(\omega) = 2\} = \{OOR, ORO, ROO\}$
- $\{\omega\colon X(\omega) = 1\} = \{ORR, ROR, RRO\}$
- $\{\omega\colon X(\omega) = 0\} = \{RRR\}$

używamy skróconego zapisu $P(X = 2)$

Możemy zatem zapytać o prawdopodobieństwo uzyskania danego wyniku.

$$\text{np.}\quad P(\{\omega\colon X(\omega) = 2\}) = \frac{3}{8}$$

Przykład

Rzucamy 3 monetami, ale interesuje nas tylko liczba orłów:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$

$$X\colon \Omega \to \{0,1,2,3\}$$

$$\begin{array}{llll} X(OOO) = 3, & X(OOR) = 2, & X(ORO) = 2, & X(ORR) = 1, \\ X(ROO) = 2, & X(ROR) = 1, & X(RRO) = 1, & X(RRR) = 0 \end{array}$$

Każdy wynik $X = 0, 1, 2, 3$ jest związany z pewnym zdarzeniem w Ω:

- $\{\omega\colon X(\omega) = 3\} = \{OOO\}$
- $\{\omega\colon X(\omega) = 2\} = \{OOR, ORO, ROO\}$
- $\{\omega\colon X(\omega) = 1\} = \{ORR, ROR, RRO\}$
- $\{\omega\colon X(\omega) = 0\} = \{RRR\}$

używamy skróconego zapisu $P(X = 2)$

Możemy zatem zapytać o prawdopodobieństwo uzyskania danego wyniku.

$$\text{np.}\quad P(\{\omega\colon X(\omega) = 2\}) \;=\; \frac{3}{8}$$

Podobnie możemy spytać o dowolny podzbiór wyników, np:

$$P(X \leqslant 1) \;=\; P(\{RRR, ORR, ROR, RRO\}) \;=\; \frac{4}{8}$$

Przykład

Rzucamy 2 kostkami, interesuje nas suma oczek

$$\Omega = \{(i,j)\colon i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\} = \{(1,1),(1,2),\dots,(6,5),(6,6)\}$$

Przykład

Rzucamy 2 kostkami, interesuje nas suma oczek

$$\Omega \;=\; \{(i,j)\colon i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\} \;=\; \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$$

$$X\colon \Omega \to \{2,3,\ldots,12\}$$

$$X(i,j) \;=\; i+j$$

Przykład

Rzucamy 2 kostkami, interesuje nas suma oczek

$$\Omega \; = \; \{(i,j)\colon i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\} \; = \; \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$$

$$X\colon \Omega \to \{2,3,\ldots,12\}$$

$$X(i,j) \; = \; i+j$$

- $P(X=3) = P(\{\omega\colon X(\omega)=3\}) = P(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36}$

Przykład

Rzucamy 2 kostkami, interesuje nas suma oczek

$$\Omega \;=\; \{(i,j)\colon i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\} \;=\; \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$$

$$X\colon \Omega \to \{2,3,\ldots,12\}$$

$$X(i,j) \;=\; i+j$$

- $P(X=3) = P(\{\omega\colon X(\omega)=3\}) = P(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36}$
- $P(9 \leqslant X \leqslant 11) = \underbrace{P(X=9) + P(X=10) + P(X=11)}_{\text{zdarzenia rozłączne}} = \frac{4+3+2}{36}$

Przykład

Rzucamy 2 kostkami, interesuje nas suma oczek

$$\Omega \ = \ \{(i,j)\colon i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\} \ = \ \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$$

$$X\colon \Omega \to \{2,3,\ldots,12\}$$

$$X(i,j) \ = \ i+j$$

- $P(X=3) = P(\{\omega\colon X(\omega)=3\}) = P(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36}$
- $P(9 \leqslant X \leqslant 11) = \underbrace{P(X=9)+P(X=10)+P(X=11)}_{\text{zdarzenia rozłączne}} = \frac{4+3+2}{36}$
- $P(X<5) = P(X=2)+P(X=3)+P(X=4) = \frac{1+2+3}{36}$

Przykład

Rzucamy n nieuczciwymi monetami, w których orzeł wypada z prawd. p, a reszka z praw. $1 - p$; interesuje nas tylko liczba orłów

Dla uproszczenia kodujemy orły jako jedynki i reszki jako zera

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_n) \colon b_i \in \{0, 1\}\}$$

$$X \colon \Omega \to \{0, 1, \ldots, n\}$$

Przykład

Rzucamy n nieuczciwymi monetami, w których orzeł wypada z prawd. p, a reszka z praw. $1 - p$; interesuje nas tylko liczba orłów

Dla uproszczenia kodujemy orły jako jedynki i reszki jako zera

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_n) \colon b_i \in \{0, 1\}\}$$

$$X \colon \Omega \to \{0, 1, \ldots, n\}$$

$$X((b_1, \ldots, b_n)) =$$

Przykład

Rzucamy n nieuczciwymi monetami, w których orzeł wypada z prawd. p, a reszka z praw. $1 - p$; interesuje nas tylko liczba orłów

Dla uproszczenia kodujemy orły jako jedynki i reszki jako zera

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_n) \colon b_i \in \{0, 1\}\}$$

$$X \colon \Omega \to \{0, 1, \ldots, n\}$$

$$X((b_1, \ldots, b_n)) \;=\; b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

Przykład

Rzucamy n nieuczciwymi monetami, w których orzeł wypada z prawd. p, a reszka z praw. $1 - p$; interesuje nas tylko liczba orłów

Dla uproszczenia kodujemy orły jako jedynki i reszki jako zera

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_n) \colon b_i \in \{0, 1\}\}$$

$$X \colon \Omega \to \{0, 1, \ldots, n\}$$

$$X\big((b_1, \ldots, b_n)\big) \; = \; b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

$$P(X = k) \; =$$

Przykład

Rzucamy n nieuczciwymi monetami, w których orzeł wypada z prawd. p, a reszka z praw. $1-p$; interesuje nas tylko liczba orłów

Dla uproszczenia kodujemy orły jako jedynki i reszki jako zera

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_n) \colon b_i \in \{0,1\}\}$$

$$X \colon \Omega \to \{0, 1, \ldots, n\}$$

$$X((b_1, \ldots, b_n)) \;=\; b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

$$P(X = k) \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko liczba rzutów

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \ldots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1,6),\ (4,2,6),\ (5,5,2,4,3,6)\ ,\ldots$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko liczba rzutów

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \ldots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1, 6),\ (4, 2, 6),\ (5, 5, 2, 4, 3, 6)\ , \ldots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_k) \colon b_i \in \{1, \ldots, 5\} \text{ dla } i < k,\ b_k = 6,\ k = 1, 2, \ldots\}$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko liczba rzutów

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \dots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1,6),\ (4,2,6),\ (5,5,2,4,3,6)\ , \dots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \dots, b_k) \colon b_i \in \{1, \dots, 5\} \text{ dla } i < k,\ b_k = 6,\ k = 1, 2, \dots\}$$

$$X \colon \Omega \to \{1, 2, \dots\}$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko liczba rzutów

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \ldots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1,6),\ (4,2,6),\ (5,5,2,4,3,6)\ , \ldots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_k) \colon b_i \in \{1, \ldots, 5\} \text{ dla } i < k,\ b_k = 6,\ k = 1, 2, \ldots\}$$

$$X \colon \Omega \to \{1, 2, \ldots\}$$

$$X(b_1, \ldots, b_k) \ =$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko liczba rzutów

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \ldots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1,6),\ (4,2,6),\ (5,5,2,4,3,6)\ , \ldots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_k)\colon\ b_i \in \{1, \ldots, 5\} \text{ dla } i < k,\ \ b_k = 6,\ \ k = 1, 2, \ldots\}$$

$$X \colon \Omega \to \{1, 2, \ldots\}$$

$$X(b_1, \ldots, b_k) \ = \ k$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko liczba rzutów

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \ldots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1,6),\ (4,2,6),\ (5,5,2,4,3,6)\ , \ldots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_k) \colon b_i \in \{1, \ldots, 5\} \text{ dla } i < k,\ b_k = 6,\ k = 1, 2, \ldots\}$$

$$X \colon \Omega \to \{1, 2, \ldots\}$$

$$X(b_1, \ldots, b_k) \ = \ k$$

$$P(X = 1) \ =$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko liczba rzutów

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \ldots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1, 6),\ (4, 2, 6),\ (5, 5, 2, 4, 3, 6)\ , \ldots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_k) \colon b_i \in \{1, \ldots, 5\} \text{ dla } i < k,\ b_k = 6,\ k = 1, 2, \ldots\}$$

$$X \colon \Omega \to \{1, 2, \ldots\}$$

$$X(b_1, \ldots, b_k) \ = \ k$$

$$P(X = 1) \ = \ \frac{1}{6},$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko liczba rzutów

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \ldots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1,6),\ (4,2,6),\ (5,5,2,4,3,6)\ , \ldots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_k) \colon b_i \in \{1, \ldots, 5\} \text{ dla } i < k,\ b_k = 6,\ k = 1, 2, \ldots\}$$

$$X \colon \Omega \to \{1, 2, \ldots\}$$

$$X(b_1, \ldots, b_k) \ = \ k$$

$$P(X = 1) \ = \ \frac{1}{6}, \qquad P(X = 2) \ =$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko liczba rzutów

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \ldots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1,6),\ (4,2,6),\ (5,5,2,4,3,6)\ , \ldots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_k) \colon b_i \in \{1, \ldots, 5\} \text{ dla } i < k,\ b_k = 6,\ k = 1, 2, \ldots\}$$

$$X \colon \Omega \to \{1, 2, \ldots\}$$

$$X(b_1, \ldots, b_k) \ = \ k$$

$$P(X = 1) \ = \ \frac{1}{6}, \qquad P(X = 2) \ = \ \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6},$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko liczba rzutów

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \ldots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1,6),\ (4,2,6),\ (5,5,2,4,3,6)\ , \ldots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_k) \colon b_i \in \{1, \ldots, 5\} \text{ dla } i < k,\ b_k = 6,\ k = 1, 2, \ldots\}$$

$$X \colon \Omega \to \{1, 2, \ldots\}$$

$$X(b_1, \ldots, b_k) \ = \ k$$

$$P(X=1) \ = \ \frac{1}{6}, \qquad P(X=2) \ = \ \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}, \qquad P(X=3) \ =$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko liczba rzutów

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \ldots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1,6),\ (4,2,6),\ (5,5,2,4,3,6)\ ,\ldots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_k) \colon b_i \in \{1, \ldots, 5\} \text{ dla } i < k,\ b_k = 6,\ k = 1, 2, \ldots\}$$

$$X \colon \Omega \to \{1, 2, \ldots\}$$

$$X(b_1, \ldots, b_k) \ = \ k$$

$$P(X = 1) \ = \ \frac{1}{6}, \qquad P(X = 2) \ = \ \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}, \qquad P(X = 3) \ = \ \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

Przykład

Rzucamy kostką aż do wyrzucenia szóstki, interesuje nas tylko liczba rzutów

Zdarzenia elementarne: ciągi liczb z $\{1, \ldots, 5\}$ zakończone 6:

$$(1,6),\ (4,2,6),\ (5,5,2,4,3,6)\ , \ldots$$

$$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_k) \colon b_i \in \{1, \ldots, 5\} \text{ dla } i < k,\ b_k = 6,\ k = 1, 2, \ldots\}$$

$$X \colon \Omega \to \{1, 2, \ldots\}$$

$$X(b_1, \ldots, b_k) \ = \ k$$

$$P(X = 1) \ = \ \frac{1}{6}, \qquad P(X = 2) \ = \ \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}, \qquad P(X = 3) \ = \ \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}$$

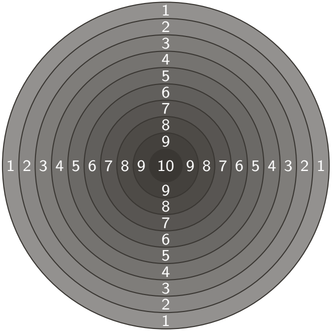
$$P(X = k) \ = \ \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$$

Przykład

Rzucamy lotką do tarczy, ale interesuje nas tylko liczba zdobytych punktów

Zakładamy model prawdopodobieństwa geometrycznego

- $\Omega = K(0, 10) = \{(x, y) \colon \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 10\}$

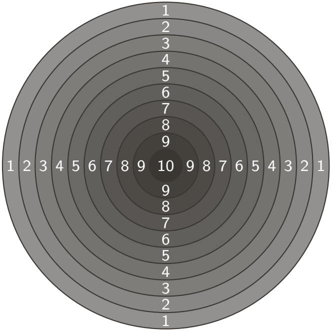


Przykład

Rzucamy lotką do tarczy, ale interesuje nas tylko liczba zdobytych punktów

Zakładamy model prawdopodobieństwa geometrycznego

- $\Omega = K(0, 10) = \{(x, y) \colon \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 10\}$
- $X \colon \Omega \to \{1, 2, \ldots, 10\}$

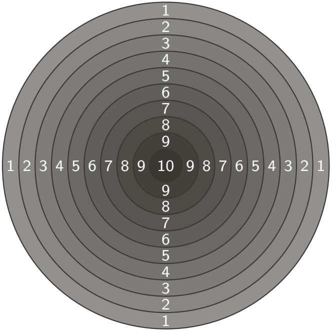


Przykład

Rzucamy lotką do tarczy, ale interesuje nas tylko liczba zdobytych punktów

Zakładamy model prawdopodobieństwa geometrycznego

- $\Omega = K(0, 10) = \{(x, y) \colon \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 10\}$
- $X \colon \Omega \to \{1, 2, \ldots, 10\}$
- $X(x, y) = 1$ jeśli $9 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 10$

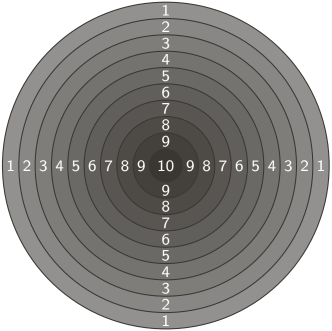


Przykład

Rzucamy lotką do tarczy, ale interesuje nas tylko liczba zdobytych punktów

Zakładamy model prawdopodobieństwa geometrycznego

- $\Omega = K(0, 10) = \{(x, y) \colon \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 10\}$
- $X \colon \Omega \to \{1, 2, \ldots, 10\}$
- $X(x, y) = 1$ jeśli $9 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 10$
- $X(x, y) = 2$ jeśli $8 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 9$

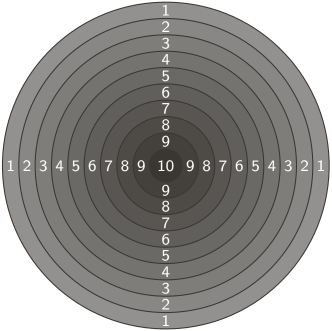


Przykład

Rzucamy lotką do tarczy, ale interesuje nas tylko liczba zdobytych punktów

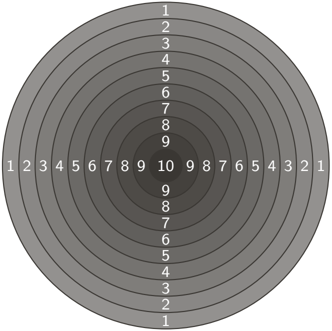
Zakładamy model prawdopodobieństwa geometrycznego

- $\Omega = K(0, 10) = \{(x, y)\colon \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 10\}$
- $X\colon \Omega \to \{1, 2, \ldots, 10\}$
- $X(x, y) = 1$ jeśli $9 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 10$
- $X(x, y) = 2$ jeśli $8 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 9$
- $X(x, y) = k$ jeśli $10-k \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 11-k$



Przykład

Rzucamy lotką do tarczy, ale interesuje nas tylko liczba zdobytych punktów



Zakładamy model prawdopodobieństwa geometrycznego

- $\Omega = K(0,10) = \{(x,y)\colon \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 10\}$
- $X\colon \Omega \to \{1,2,\ldots,10\}$
- $X(x,y) = 1$ jeśli $9 \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 10$
- $X(x,y) = 2$ jeśli $8 \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 9$
- $X(x,y) = k$ jeśli $10-k \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 11-k$

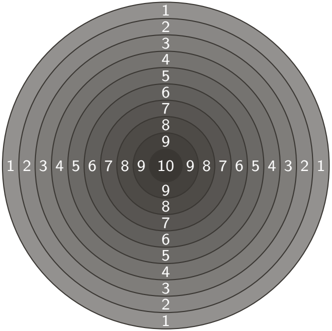
$$P(X=k) \quad = \quad \frac{|K(0,11-k)| - |K(0,10-k)|}{|K(0,10)|}$$

Przykład

Rzucamy lotką do tarczy, ale interesuje nas tylko liczba zdobytych punktów

Zakładamy model prawdopodobieństwa geometrycznego

- $\Omega = K(0,10) = \{(x,y) \colon \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 10\}$
- $X \colon \Omega \to \{1,2,\ldots,10\}$
- $X(x,y) = 1$ jeśli $9 \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 10$
- $X(x,y) = 2$ jeśli $8 \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 9$
- $X(x,y) = k$ jeśli $10-k \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 11-k$



$$\begin{aligned} P(X=k) &= \frac{|K(0,11-k)| - |K(0,10-k)|}{|K(0,10)|} \\ &= \frac{\pi(11-k)^2 - \pi(10-k)^2}{100\pi} = \frac{21-2k}{100} \end{aligned}$$

Przykład

Jaś i Małgosia przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00. Interesuje nas tylko czas oczekiwania na siebie.

Zdarzenia elementarne: pary (j, m) określające czas przybycia Jasia i Małgosi licząc od 10:00; $\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$

Przykład

Jaś i Małgosia przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00. Interesuje nas tylko czas oczekiwania na siebie.

Zdarzenia elementarne: pary (j, m) określające czas przybycia Jasia i Małgosi licząc od 10:00; $\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$

$$X(j, m) \ = \ |j - m|$$

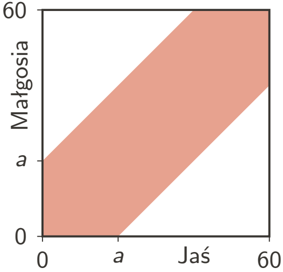
Przykład

Jaś i Małgosia przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00. Interesuje nas tylko czas oczekiwania na siebie.

Zdarzenia elementarne: pary (j, m) określające czas przybycia Jasia i Małgosi licząc od 10:00; $\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$

$$X(j, m) = |j - m|$$

Wyznaczmy $P(X < a)$ dla dowolnego $a \in [0, 60]$



Zdarzenie $\{X < a\} = \{(j, m) \in \Omega \colon |j - m| < a\}$ oznaczone kolorem czerwonym

$$\begin{aligned} P(X < a) &= 1 - P(X \geqslant a) \\ &= 1 - \frac{(60 - a) \cdot (60 - a)}{60 \cdot 60} \\ &= \frac{a}{30} - \left(\frac{a}{60}\right)^2 \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo a przeciwobraz

$$P(X \in A) \;=\; P\big(\{\omega\colon X(\omega) \in A\}\big)$$

Prawdopodobieństwo a przeciwobraz

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia w Ω,
składającego się ze zdarzeń elementarnych $\omega \in \Omega$,
dla których $X(\omega) \in A$, $A \subseteq \mathbb{R}$

$$P(X \in A) \;=\; P\big(\{\omega \colon X(\omega) \in A\}\big)$$

Prawdopodobieństwo a przeciwobraz

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia w Ω, składającego się ze zdarzeń elementarnych $\omega \in \Omega$, dla których $X(\omega) \in A$, $A \subseteq \mathbb{R}$

przeciwobraz

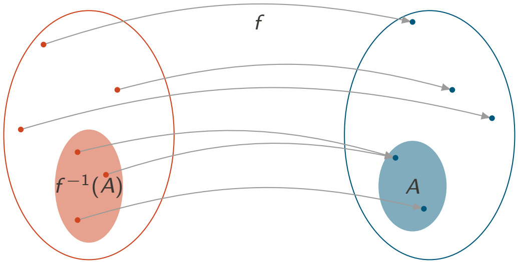
$$\boxed{P(X \in A) \;=\; P\big(\{\omega\colon X(\omega) \in A\}\big) \;=\; P\big(X^{-1}(A)\big)}$$

Prawdopodobieństwo a przeciwobraz

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia w Ω, składającego się ze zdarzeń elementarnych $\omega \in \Omega$, dla których $X(\omega) \in A$, $A \subseteq \mathbb{R}$

przeciwobraz

$$\boxed{P(X \in A) \;=\; P\big(\{\omega\colon X(\omega) \in A\}\big) \;=\; P\big(X^{-1}(A)\big)}$$



Mierzalność zmiennej losowej

$$P(X \in A) \;=\; P\big(X^{-1}(A)\big)$$

Aby uniknąć zbiorów niemierzalnych, wyznaczamy $P(X \in A)$ tylko dla podzbiorów $A \in \mathcal{B}$, gdzie $\mathcal{B}$ jest σ-ciałem zbiorów borelowskich na $\mathbb{R}$

Mierzalność zmiennej losowej

$$P(X \in A) \ = \ P\big(X^{-1}(A)\big)$$

Aby uniknąć zbiorów niemierzalnych, wyznaczamy $P(X \in A)$ tylko dla podzbiorów $A \in \mathcal{B}$, gdzie $\mathcal{B}$ jest σ-ciałem zbiorów borelowskich na $\mathbb{R}$

Nadal może się jednak zdarzyć, że przeciwobraz $X^{-1}(A) \subseteq \Omega$ nie jest zdarzeniem, tzn. $X^{-1}(A) \notin \mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F}$ to σ-ciało zdarzeń w Ω

Mierzalność zmiennej losowej

$$P(X \in A) = P\big(X^{-1}(A)\big)$$

Aby uniknąć zbiorów niemierzalnych, wyznaczamy $P(X \in A)$ tylko dla podzbiorów $A \in \mathcal{B}$, gdzie $\mathcal{B}$ jest σ-ciałem zbiorów borelowskich na $\mathbb{R}$

Nadal może się jednak zdarzyć, że przeciwobraz $X^{-1}(A) \subseteq \Omega$ nie jest zdarzeniem, tzn. $X^{-1}(A) \notin \mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F}$ to σ-ciało zdarzeń w Ω

Aby temu zapobiec, zakładamy, że jeśli $A \in \mathcal{B}$ (A jest zbiorem borelowskim), to $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Mierzalność zmiennej losowej

$$P(X \in A) \;=\; P\big(X^{-1}(A)\big)$$

Aby uniknąć zbiorów niemierzalnych, wyznaczamy $P(X \in A)$ tylko dla podzbiorów $A \in \mathcal{B}$, gdzie $\mathcal{B}$ jest σ-ciałem zbiorów borelowskich na $\mathbb{R}$

Nadal może się jednak zdarzyć, że przeciwobraz $X^{-1}(A) \subseteq \Omega$ nie jest zdarzeniem, tzn. $X^{-1}(A) \notin \mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F}$ to σ-ciało zdarzeń w Ω

Aby temu zapobiec, zakładamy, że jeśli $A \in \mathcal{B}$ (A jest zbiorem borelowskim), to $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Funkcje spełniające ten warunek nazywamy mierzalnymi.

Mierzalność zmiennej losowej

$$P(X \in A) \ = \ P\big(X^{-1}(A)\big)$$

Aby uniknąć zbiorów niemierzalnych, wyznaczamy $P(X \in A)$ tylko dla podzbiorów $A \in \mathcal{B}$, gdzie $\mathcal{B}$ jest σ-ciałem zbiorów borelowskich na $\mathbb{R}$

Nadal może się jednak zdarzyć, że przeciwobraz $X^{-1}(A) \subseteq \Omega$ nie jest zdarzeniem, tzn. $X^{-1}(A) \notin \mathcal{F}$, gdzie $\mathcal{F}$ to σ-ciało zdarzeń w Ω

Aby temu zapobiec, zakładamy, że jeśli $A \in \mathcal{B}$ (A jest zbiorem borelowskim), to $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

Funkcje spełniające ten warunek nazywamy mierzalnymi.

Z własności σ-ciała wynika, że wystarczającym warunkiem mierzalności jest, aby dla dowolnego przedziału $(-\infty, a]$ zachodziło $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$.

Definicja zmiennej losowej

Definicja

Zmienną losową nazywamy dowolną mierzalną funkcję $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$

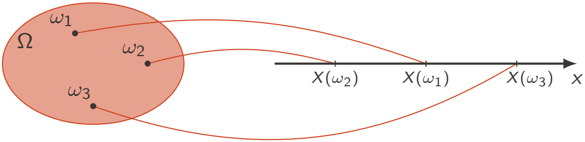
Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej X nazywamy miarę prawdopodobieństwa P_X zdefiniowaną jako:

$$P_X(A) \;=\; P(X \in A) \;=\; P\big(X^{-1}(A)\big)$$

dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \in \mathcal{B}$

Zmienne losowe a odwzorowanie przestrzeni probabilistycznej

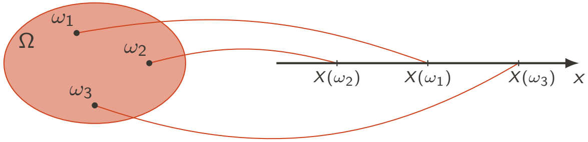
$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$



$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \xrightarrow[X]{} (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$$

Zmienne losowe a odwzorowanie przestrzeni probabilistycznej

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$



$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\xrightarrow{X}$ $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$

Mierzalność X gwarantuje, że każde zdarzenie w przestrzeni probabilistycznej $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ jest przeciwobrazem pewnego zdarzenia w przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Dwie równoważne notacje

$$
\begin{aligned}
P_X(A) \quad &\iff \quad P(X \in A) \\
P_X(\{a\}) \quad &\iff \quad P(X = a) \\
P_X((-\infty, a]) \quad &\iff \quad P(X \leqslant a) \\
P_X([a, b)) \quad &\iff \quad P(a \leqslant X < b) \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

- Notacja niebieska dotyczy przestrzeni probabilistycznej $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ indukowanej przez zmienną losową X
- Skrótowa notacja czerwona odwołuje się do bazowej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; jest dużo wygodniejsza, stąd prawie zawsze będziemy jej używać

P_X spełnia aksjomaty Kołmogorowa

$$P_X(A) \ = \ P\big(X^{-1}(A)\big)$$

P_X spełnia aksjomaty Kołmogorowa

$$P_X(A) \;=\; P\big(X^{-1}(A)\big)$$

Własność 1. $P_X(A) = P\big(X^{-1}(A)\big) \geqslant 0$
(wynika ze spełnialności własności 1 przez miarę P)

P_X spełnia aksjomaty Kołmogorowa

$$P_X(A) \;=\; P\big(X^{-1}(A)\big)$$

Własność 1. $P_X(A) = P\big(X^{-1}(A)\big) \geqslant 0$
(wynika ze spełnialności własności 1 przez miarę P)

Własność 2. $P_X(\mathbb{R}) = P\big(X^{-1}(\mathbb{R})\big) = P(\Omega) = 1$

P_X spełnia aksjomaty Kołmogorowa

$$P_X(A) \; = \; P(X^{-1}(A))$$

Własność 1. $P_X(A) = P(X^{-1}(A)) \geqslant 0$
(wynika ze spełnialności własności 1 przez miarę P)

Własność 2. $P_X(\mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1$

Własność 3. Dla dowolnego ciągu $A_1, A_2, \ldots$ zdarzeń parami rozłącznych przeciwobrazy $X^{-1}(A_1), X^{-1}(A_2), \ldots$ są również parami rozłączne, zatem:

$$\begin{aligned} P_X(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \; &= \; P\Big(X^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots)\Big) \\ &\overset{(*)}{=} \; P(X^{-1}(A_1)) + P(X^{-1}(A_2)) + \ldots \\ &= \; P_X(A_1) + P_X(A_2) + \ldots, \end{aligned}$$

gdzie $(*)$ wynika ze spełnialności własności 3 przez miarę P.

Dystrybuanta zmiennej losowej

Definicja

Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną jako:

$$F(x) \;=\; P_X((-\infty, x]) \;=\; P(X \leqslant x)$$

Dystrybuanta zmiennej losowej

Definicja

Dystrybuantą zmiennej losowej X nazywamy funkcję $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną jako:

$$F(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \leqslant x)$$

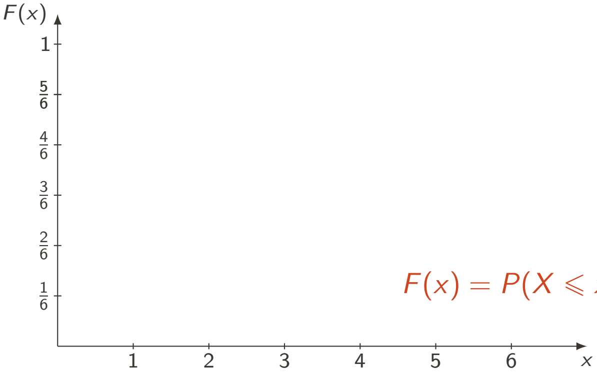
- Dystrybuanta jest funkcją niemalejącą
- Mamy $P(X \in (a, b]) = F(b) - F(a)$
- $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$
- $F(\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$
- $F(x)$ jest prawostronnie ciągła

Przykład: rzut kostką

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Przykład: rzut kostką

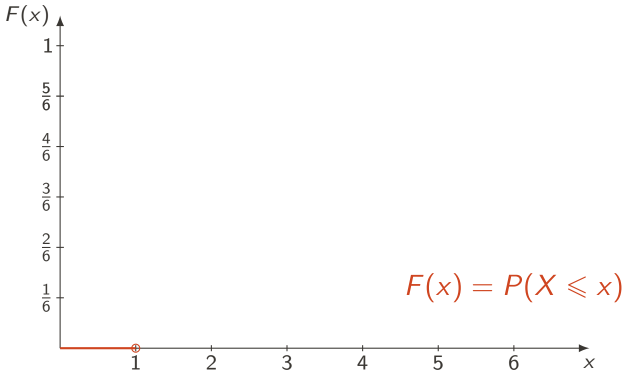
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

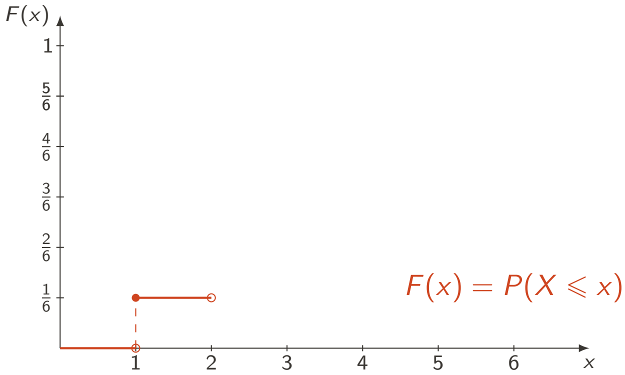
Przykład: rzut kostką

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



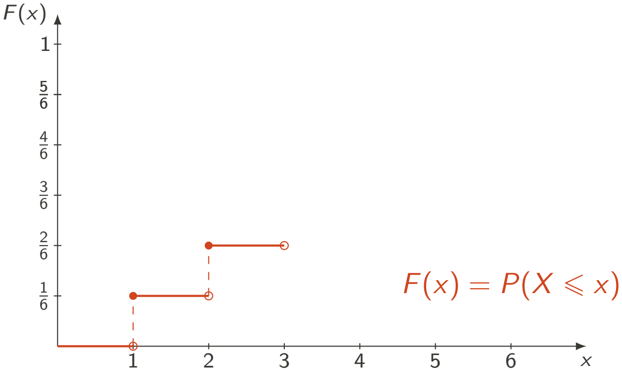
Przykład: rzut kostką

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



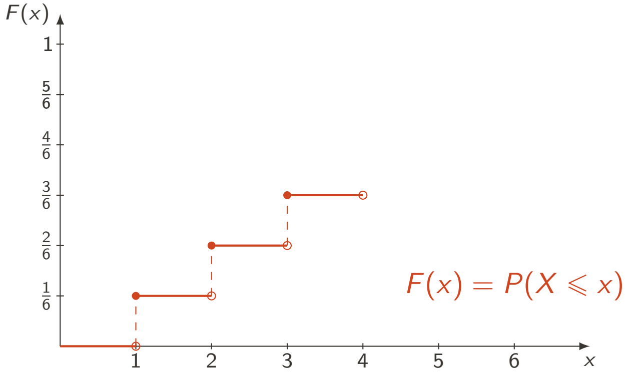
Przykład: rzut kostką

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



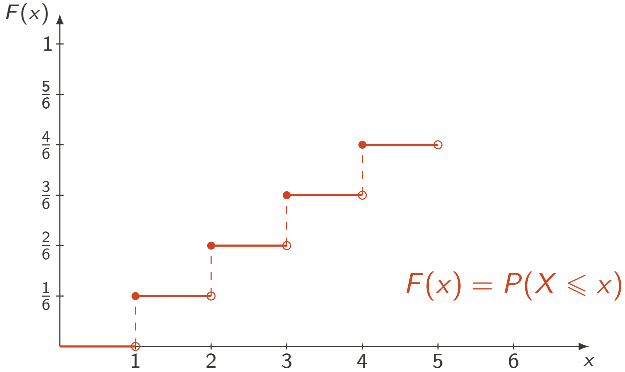
Przykład: rzut kostką

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



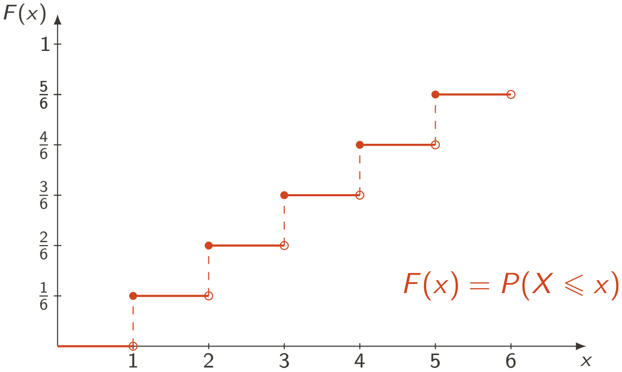
Przykład: rzut kostką

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



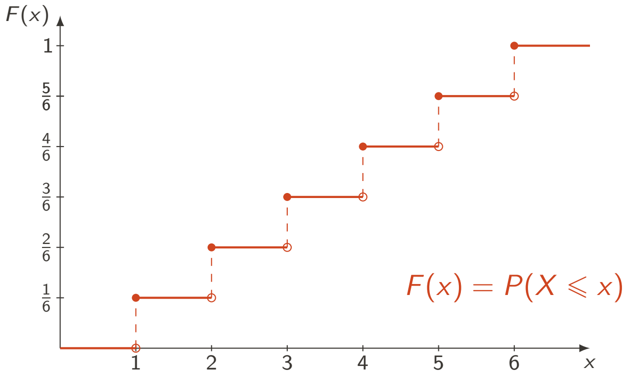
Przykład: rzut kostką

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



Przykład: rzut kostką

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



Przykład: losowanie punktu z odcinka

Zmienna losowa $X \in [0,1]$ jest zadana rozkładem prawdopodobieństwa:

$$P(X \in A) \;=\; |A|, \qquad \text{dla} \;\; A \subseteq [0,1]$$

gdzie $|A|$ jest długością A (np. $P(X \in [a,b]) = b - a$)

Przykład: losowanie punktu z odcinka

Zmienna losowa $X \in [0,1]$ jest zadana rozkładem prawdopodobieństwa:

$$P(X \in A) \;=\; |A|, \qquad \text{dla} \;\; A \subseteq [0,1]$$

gdzie $|A|$ jest długością A (np. $P(X \in [a,b]) = b - a$)

- Jeśli $x < 0$ to $F(x) = P(X \leqslant x) = 0$

Przykład: losowanie punktu z odcinka

Zmienna losowa $X \in [0, 1]$ jest zadana rozkładem prawdopodobieństwa:

$$P(X \in A) \;=\; |A|, \qquad \text{dla} \;\; A \subseteq [0, 1]$$

gdzie $|A|$ jest długością A (np. $P(X \in [a, b]) = b - a$)

- Jeśli $x < 0$ to $F(x) = P(X \leqslant x) = 0$
- Jeśli $x \in [0, 1]$ to $F(x) = \underbrace{P(X < 0)}_{=0} + \underbrace{P(X \in [0, x])}_{=x} = x$

Przykład: losowanie punktu z odcinka

Zmienna losowa $X \in [0,1]$ jest zadana rozkładem prawdopodobieństwa:

$$P(X \in A) \;=\; |A|, \qquad \text{dla} \;\; A \subseteq [0,1]$$

gdzie $|A|$ jest długością A (np. $P(X \in [a,b]) = b - a$)

- Jeśli $x < 0$ to $F(x) = P(X \leqslant x) = 0$
- Jeśli $x \in [0,1]$ to $F(x) = \underbrace{P(X < 0)}_{=0} + \underbrace{P(X \in [0,x])}_{=x} = x$
- Jeśli $x > 1$ to $F(x) = \underbrace{P(X \leqslant 1)}_{=1} + \underbrace{P(X \in (1,x])}_{=0} = 1$

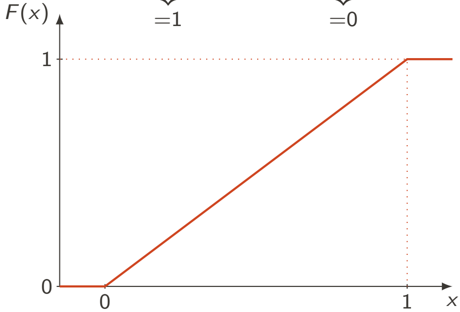
Przykład: losowanie punktu z odcinka

Zmienna losowa $X \in [0,1]$ jest zadana rozkładem prawdopodobieństwa:

$$P(X \in A) \; = \; |A|, \qquad \text{dla} \;\; A \subseteq [0,1]$$

gdzie $|A|$ jest długością A (np. $P(X \in [a,b]) = b - a$)

- Jeśli $x < 0$ to $F(x) = P(X \leqslant x) = 0$
- Jeśli $x \in [0,1]$ to $F(x) = \underbrace{P(X < 0)}_{=0} + \underbrace{P(X \in [0,x])}_{=x} = x$
- Jeśli $x > 1$ to $F(x) = \underbrace{P(X \leqslant 1)}_{=1} + \underbrace{P(X \in (1,x])}_{=0} = 1$



Zmienna losowa dyskretna (typu skokowego)

Zmienną losową X przyjmującą co najwyżej przeliczalną liczbę możliwych wartości $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ nazywamy zmienną dyskretną (typu skokowego)

Dla dowolnego $A \in \mathcal{B}$ zachodzi:

$$P_X(A) = P\big(X^{-1}(A)\big) = \sum_{i:\ x_i \in A} P\big(X^{-1}(x_i)\big) = \sum_{i:\ x_i \in A} P_X(\{x_i\})$$

Zmienna losowa dyskretna (typu skokowego)

Zmienną losową X przyjmującą co najwyżej przeliczalną liczbę możliwych wartości $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ nazywamy zmienną dyskretną (typu skokowego)

Dla dowolnego $A \in \mathcal{B}$ zachodzi:

$$P_X(A) = P(X^{-1}(A)) = \sum_{i\colon x_i \in A} P(X^{-1}(x_i)) = \sum_{i\colon x_i \in A} P_X(\{x_i\})$$

lub w uproszczonej notacji:

$$P(X \in A) = \sum_{i\colon x_i \in A} P(X = x_i)$$

Zmienna losowa dyskretna (typu skokowego)

Troszkę ogólniejsza definicja:

Mówimy, że zmienna losowa X jest dyskretna (typu skokowego) jeśli istnieje zbiór przeliczalny $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ taki, że $P(X \in \mathcal{X}) = 1$

Czyli prawdopodobieństwo przyjęcia wartości spoza $\mathcal{X}$ wynosi zero.

Zmienna losowa dyskretna (typu skokowego)

Troszkę ogólniejsza definicja:

Mówimy, że zmienna losowa X jest dyskretna (typu skokowego) jeśli istnieje zbiór przeliczalny $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ taki, że $P(X \in \mathcal{X}) = 1$

Czyli prawdopodobieństwo przyjęcia wartości spoza $\mathcal{X}$ wynosi zero.

Przykład: Zmienna X przyjmująca dowolne wartości z $\mathbb{R}$ taka, że:

$$P(X \in A) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } 0 \in A \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Czyli $P(X = 0) = 1$.

Rozkład jednopunktowy

Zmienna X ma rozkład jednopunktowy, jeśli istnieje taki $x \in \mathbb{R}$, że $P(X = x) = 1$

Cały rozkład zmiennej X jest skoncentrowany w jednym punkcie

Taka zmienna losowa to efektywnie stała

Rozkład jednostajny

Zmienna X ma rozkład jednostajny, jeśli $X \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ oraz:

$$P(X = x_i) \; = \; \frac{1}{n}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Rozkład jednostajny

Zmienna X ma rozkład jednostajny, jeśli $X \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ oraz:

$$P(X = x_i) \;=\; \frac{1}{n}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Przykład: wynik rzutu kostką, $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$$P(X = i) \;=\; \frac{1}{6}, \qquad i = 1, \ldots, 6$$

Rozkład dwupunktowy

Zmienna X ma rozkład dwupunktowy jeśli $X \in \{x_0, x_1\}$

Oznaczamy:

$$p = P(X = x_1), \qquad \text{a więc} \;\; P(X = x_0) = 1 - p$$

Zwykle przyjmuje się $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$, wtedy $p = P(X = 1)$ jest prawdopodobieństwem sukcesu

Rozkład dwupunktowy oznaczamy przez $B(p)$

Rozkład dwupunktowy

Zmienna X ma rozkład dwupunktowy jeśli $X \in \{x_0, x_1\}$

Oznaczamy:

$$p = P(X = x_1), \qquad \text{a więc} \;\; P(X = x_0) = 1 - p$$

Zwykle przyjmuje się $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$, wtedy $p = P(X = 1)$ jest prawdopodobieństwem sukcesu

Rozkład dwupunktowy oznaczamy przez $B(p)$

Przykład: wynik rzutu nieuczciwą monetą dla której orzeł $(X = 1)$ wypada z prawdopodobieństwem p, a reszka $(X = 0)$ z prawd. $1 - p$.

Uwaga: jeśli $p = 0$ lub $p = 1$, to X ma rozkład jednopunktowy

Rozkład dwumianowy

Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ma rozkład dwumianowy z parametrem p jeśli:

$$P(X = k) \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Rozkład dwumianowy

Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ma rozkład dwumianowy z parametrem p jeśli:

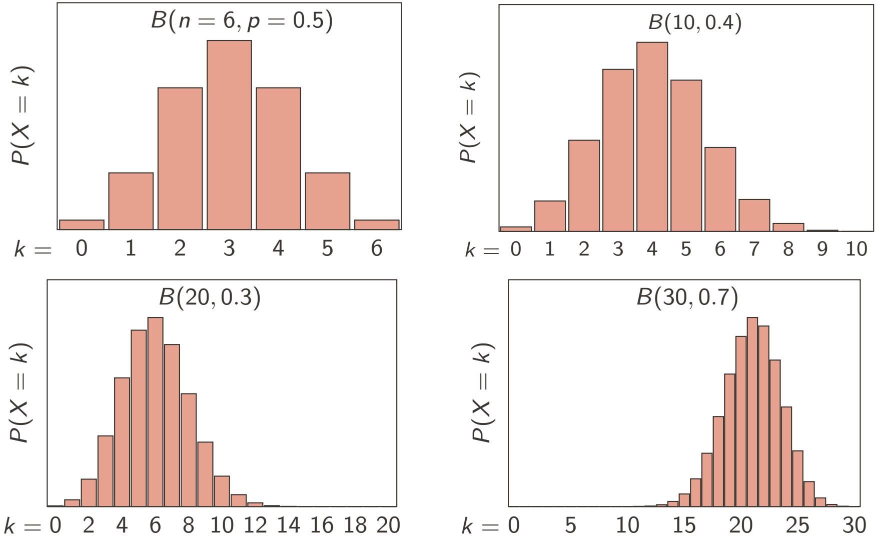
$$P(X = k) \ = \ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Zmienna X określa więc liczbę sukcesów w n próbach, jeśli prawdopodobieństwo sukcesu wynosi p (schemat Bernoulliego).

Rozkład dwumianowy oznaczamy przez $B(n, p)$

Uwaga: jeśli $n = 1$, to X ma rozkład dwupunktowy

Rozkład dwumianowy



Rozkład dwumianowy – przykład

Zadanie 1

Mamy urnę z 10 białymi i 20 czarnymi kulami. Wybieramy losowo ze zwracaniem 9 kul. Niech X określa liczbę wylosowanych białych kul. Jaki rozkład ma X?

Rozkład geometryczny

Zmienna $X \in \{1, 2, \ldots\}$ ma rozkład geometryczny z parametrem p jeśli:

$$P(X = k) \; = \; (1 - p)^{k-1} p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Rozkład geometryczny

Zmienna $X \in \{1, 2, \ldots\}$ ma rozkład geometryczny z parametrem p jeśli:

$$P(X = k) \; = \; (1 - p)^{k-1} p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Zmienna X określa więc liczbę prób do uzyskania pierwszego sukcesu w nieskończonym ciągu Bernoulliego, jeśli prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu wynosi p.

Rozkład geometryczny

Zmienna $X \in \{1, 2, \ldots\}$ ma rozkład geometryczny z parametrem p jeśli:

$$P(X = k) \; = \; (1 - p)^{k-1} p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Zmienna X określa więc liczbę prób do uzyskania pierwszego sukcesu w nieskończonym ciągu Bernoulliego, jeśli prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu wynosi p.

Rozkład geometryczny oznaczamy przez $G_1(p)$

Rozkład geometryczny

Zmienna $X \in \{1, 2, \ldots\}$ ma rozkład geometryczny z parametrem p jeśli:

$$P(X = k) \; = \; (1 - p)^{k-1} p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Zmienna X określa więc liczbę prób do uzyskania pierwszego sukcesu w nieskończonym ciągu Bernoulliego, jeśli prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu wynosi p.

Rozkład geometryczny oznaczamy przez $G_1(p)$

Przykład: rzucamy kostką aż do uzyskania szóstki. Liczba rzutów X ma rozkład $G_1(p = \frac{1}{6})$

Rozkład geometryczny

Zmienna $X \in \{1, 2, \ldots\}$ ma rozkład geometryczny z parametrem p jeśli:

$$P(X = k) \; = \; (1 - p)^{k-1} p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Zmienna X określa więc liczbę prób do uzyskania pierwszego sukcesu w nieskończonym ciągu Bernoulliego, jeśli prawdopodobieństwo pojedynczego sukcesu wynosi p.

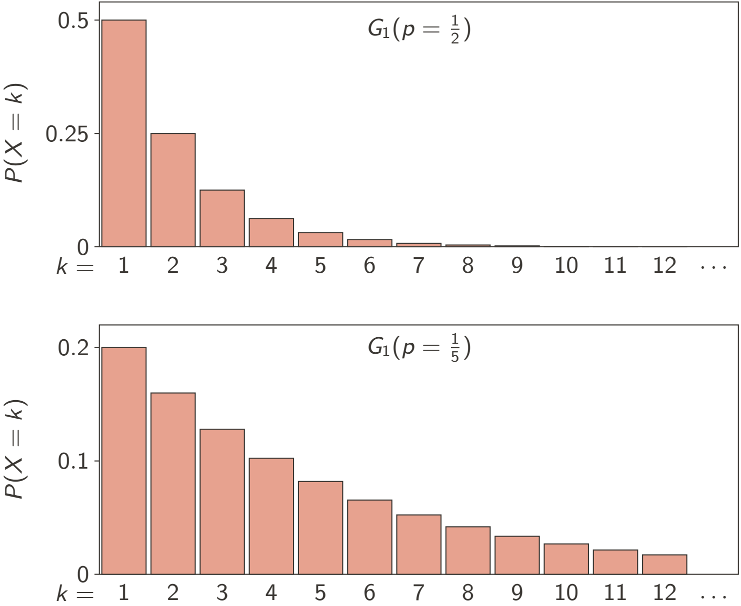
Rozkład geometryczny oznaczamy przez $G_1(p)$

Przykład: rzucamy kostką aż do uzyskania szóstki. Liczba rzutów X ma rozkład $G_1(p = \frac{1}{6})$

Uwaga: Istnieje wersja rozkładu geometrycznego $G_0(p)$ określająca liczbę porażek do uzyskania pierwszego sukcesu:

$$P(X = k) \; = \; (1 - p)^{k} p, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Rozkład geometryczny



Rozkład geometryczny – przykłady

Kupujemy losy na loterii, dopóki nie wygramy. Szansa wygrania wynosi $p = 1/1000$. Niech X określa liczbę kupionych losów na loterii: X ma rozkład $G_1(p)$.

Rozkład geometryczny – przykłady

Kupujemy losy na loterii, dopóki nie wygramy. Szansa wygrania wynosi $p = 1/1000$. Niech X określa liczbę kupionych losów na loterii: X ma rozkład $G_1(p)$.

Na lotnisku próbujemy złapać wolną taksówkę, ale 9 na 10 taksówek przyjeżdża już zarezerwowana/zajęta. Niech X określa liczbę zajętych taksówek, które zaobserwujemy; X ma rozkład $G_0(1/10)$.

Przykład

Jaka jest szansa, że potrzeba więcej niż k prób do uzyskania pierwszego sukcesu, jeśli w pojedynczej próbie sukces uzyskujemy z prawdopodobieństwem p?

Przykład

Jaka jest szansa, że potrzeba więcej niż k prób do uzyskania pierwszego sukcesu, jeśli w pojedynczej próbie sukces uzyskujemy z prawdopodobieństwem p?

$$X \text{ ma rozkład } G_1(p)$$

$$P(X > k) = P(X = k+1) + P(X = k+2) + \dots$$

Przykład

Jaka jest szansa, że potrzeba więcej niż k prób do uzyskania pierwszego sukcesu, jeśli w pojedynczej próbie sukces uzyskujemy z prawdopodobieństwem p?

$$X \quad \text{ma rozkład} \quad G_1(p)$$

$$\begin{aligned} P(X > k) &= P(X = k+1) + P(X = k+2) + \dots \\ &= \sum_{i=k+1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p \end{aligned}$$

Przykład

Jaka jest szansa, że potrzeba więcej niż k prób do uzyskania pierwszego sukcesu, jeśli w pojedynczej próbie sukces uzyskujemy z prawdopodobieństwem p?

$$X \quad \text{ma rozkład} \quad G_1(p)$$

$$\begin{aligned} P(X > k) &= P(X = k+1) + P(X = k+2) + \ldots \\ &= \sum_{i=k+1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p \\ &= (1-p)^k p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \end{aligned}$$

Przykład

Jaka jest szansa, że potrzeba więcej niż k prób do uzyskania pierwszego sukcesu, jeśli w pojedynczej próbie sukces uzyskujemy z prawdopodobieństwem p?

$$X \quad \text{ma rozkład} \quad G_1(p)$$

$$\begin{aligned}
P(X > k) &= P(X = k+1) + P(X = k+2) + \dots \\
&= \sum_{i=k+1}^{\infty} (1-p)^{i-1} p \\
&= (1-p)^k p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i \\
&= (1-p)^k p \frac{1}{p} \; = \; (1-p)^k
\end{aligned}$$

Własność braku pamięci

Niech X ma rozkład $G_1(p)$. Oblicz $P(X > k + \ell | X > k)$
(„pierwszy sukces pojawił się po więcej niż $k + \ell$ próbach, jeśli nie pojawił się w pierwszych k próbach")

Własność braku pamięci

Niech X ma rozkład $G_1(p)$. Oblicz $P(X > k + \ell | X > k)$
(„pierwszy sukces pojawił się po więcej niż $k + \ell$ próbach, jeśli nie pojawił się w pierwszych k próbach")

$$P(X > k + \ell | X > k) \quad = \quad \frac{P(\{X > k + \ell\} \cap \{X > k\})}{P(\{X > k\})}$$

Własność braku pamięci

Niech X ma rozkład $G_1(p)$. Oblicz $P(X > k + \ell | X > k)$ („pierwszy sukces pojawił się po więcej niż $k+\ell$ próbach, jeśli nie pojawił się w pierwszych k próbach")

$$
\begin{aligned}
P(X > k + \ell | X > k) &= \frac{P(\{X > k + \ell\} \cap \{X > k\})}{P(\{X > k\})} \\
&= \frac{P(\{X > k + \ell\})}{P(\{X > k\})}
\end{aligned}
$$

Własność braku pamięci

Niech X ma rozkład $G_1(p)$. Oblicz $P(X > k + \ell | X > k)$ („pierwszy sukces pojawił się po więcej niż $k+\ell$ próbach, jeśli nie pojawił się w pierwszych k próbach")

$$
\begin{aligned}
P(X > k + \ell | X > k) &= \frac{P(\{X > k + \ell\} \cap \{X > k\})}{P(\{X > k\})} \\
&= \frac{P(\{X > k + \ell\})}{P(\{X > k\})} \\
&= \frac{(1-p)^{k+\ell}}{(1-p)^k} = (1-p)^\ell = P(X > \ell)
\end{aligned}
$$

Własność braku pamięci

Niech X ma rozkład $G_1(p)$. Oblicz $P(X > k + \ell | X > k)$
(„pierwszy sukces pojawił się po więcej niż $k+\ell$ próbach, jeśli nie pojawił się w pierwszych k próbach")

$$
\begin{aligned}
P(X > k + \ell | X > k) &= \frac{P(\{X > k + \ell\} \cap \{X > k\})}{P(\{X > k\})} \\
&= \frac{P(\{X > k + \ell\})}{P(\{X > k\})} \\
&= \frac{(1-p)^{k+\ell}}{(1-p)^k} = (1-p)^\ell = P(X > \ell)
\end{aligned}
$$

Brak pamięci: jeśli sukces nie pojawił się w pierwszych k próbach, możemy zapomnieć o przeszłości i wyznaczyć prawdopodobieństwa jakbyśmy dopiero zaczynali losować

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Rozważmy nieskończony ciąg prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p. Losujemy, dopóki nie uzyskamy r porażek. Jakie jest szansa zaobserwowania do tego momentu k sukcesów?

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Rozważmy nieskończony ciąg prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p. Losujemy, dopóki nie uzyskamy r porażek. Jakie jest szansa zaobserwowania do tego momentu k sukcesów?

Zdarzenia elementarne: ciągi binarne $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, zawierające r zer, przy czym $b_n = 0$. Liczba sukcesów to $k = n - r$.

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Rozważmy nieskończony ciąg prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p. Losujemy, dopóki nie uzyskamy r porażek. Jakie jest szansa zaobserwowania do tego momentu k sukcesów?

Zdarzenia elementarne: ciągi binarne $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, zawierające r zer, przy czym $b_n = 0$. Liczba sukcesów to $k = n - r$.

$$P(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (1-p)^r p^{n-r}$$

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Rozważmy nieskończony ciąg prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p. Losujemy, dopóki nie uzyskamy r porażek. Jakie jest szansa zaobserwowania do tego momentu k sukcesów?

Zdarzenia elementarne: ciągi binarne $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, zawierające r zer, przy czym $b_n = 0$. Liczba sukcesów to $k = n - r$.

$$P(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (1 - p)^r p^{n-r}$$

Ile jest takich ciągów o długości n?

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Rozważmy nieskończony ciąg prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p. Losujemy, dopóki nie uzyskamy r porażek. Jakie jest szansa zaobserwowania do tego momentu k sukcesów?

Zdarzenia elementarne: ciągi binarne $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, zawierające r zer, przy czym $b_n = 0$. Liczba sukcesów to $k = n - r$.

$$P(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (1-p)^r p^{n-r}$$

Ile jest takich ciągów o długości n? $\binom{n-1}{r-1}$

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Rozważmy nieskończony ciąg prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p. Losujemy, dopóki nie uzyskamy r porażek. Jakie jest szansa zaobserwowania do tego momentu k sukcesów?

Zdarzenia elementarne: ciągi binarne $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, zawierające r zer, przy czym $b_n = 0$. Liczba sukcesów to $k = n - r$.

$$P(b_1, b_2, \ldots, b_n) = (1-p)^r p^{n-r}$$

Ile jest takich ciągów o długości n? $\binom{n-1}{r-1}$

Stąd prawdopodobieństwo uzyskania k sukcesów do momentu uzyskania r porażek:

$$\binom{n-1}{r-1}(1-p)^r p^{n-r} \;=\; \binom{r+k-1}{r-1}(1-p)^r p^k$$

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Zmienna $X \in \{0, 1, \ldots\}$ ma rozkład ujemny dwumianowy z parametrami r i p jeśli:

$$P(X = k) \ = \ \binom{r + k - 1}{r - 1}(1 - p)^r p^k$$

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Zmienna $X \in \{0, 1, \ldots\}$ ma rozkład ujemny dwumianowy z parametrami r i p jeśli:

$$P(X = k) \;=\; \binom{r+k-1}{r-1}(1-p)^r p^k$$

Rozkład ujemny dwumianowy oznaczamy przez $NB(r, p)$

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Zmienna $X \in \{0, 1, \ldots\}$ ma rozkład ujemny dwumianowy z parametrami r i p jeśli:

$$P(X = k) \ = \ \binom{r+k-1}{r-1}(1-p)^r p^k$$

Rozkład ujemny dwumianowy oznaczamy przez $NB(r, p)$

Przykład: Bezzałogowy samolot wraca z misji rozpoznawczej z prawdopodobieństwem p. Ile misji uda się nam wykonać mając do dyspozycji r samolotów?

Podsumowanie

- Rozkład dwupunktowy modeluje prawdopodobieństwo sukcesu w pojedynczej próbie
- Rozkład dwumianowy modeluje prawdopodobieństwo k sukcesów w n próbach
- Rozkład geometryczny modeluje prawdopodobieństwo k prób do uzyskania pierwszego sukcesu
- Rozkład ujemny dwumianowy modeluje prawdopodobieństwo k sukcesów przed uzyskaniem r porażek

Rozkład Poissona

Rozważmy ciąg n prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p, gdzie:

- n jest bardzo duże,
- p jest bardzo małe (bliskie zeru) ...
- ... ale $n \cdot p$ jest umiarkowane (ani małe, ani duże)

Rozkład Poissona

Rozważmy ciąg n prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p, gdzie:

- n jest bardzo duże,
- p jest bardzo małe (bliskie zeru) ...
- ... ale $n \cdot p$ jest umiarkowane (ani małe, ani duże)

Przykłady

- Szansa rozpadu atomu promieniotwórczego w ciągu sekundy wynosi $p = 10^{-14}$. Mając $n = 10^{15}$ atomów wyznacz rozkład prawdopodobieństwa liczby rozpadów w danej sekundzie.

Rozkład Poissona

Rozważmy ciąg n prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p, gdzie:

- n jest bardzo duże,
- p jest bardzo małe (bliskie zeru) ...
- ... ale $n \cdot p$ jest umiarkowane (ani małe, ani duże)

Przykłady

- Szansa rozpadu atomu promieniotwórczego w ciągu sekundy wynosi $p = 10^{-14}$. Mając $n = 10^{15}$ atomów wyznacz rozkład prawdopodobieństwa liczby rozpadów w danej sekundzie.
- Mamy artykuł z $n = 8\ 000$ słów. Szansa literówki w danym słowie to $p = 1/1000$. Znaleźć rozkład liczby literówek.

Rozkład Poissona

Rozważmy ciąg n prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p, gdzie:

- n jest bardzo duże,
- p jest bardzo małe (bliskie zeru) ...
- ...ale $n \cdot p$ jest umiarkowane (ani małe, ani duże)

Przykłady

- Szansa rozpadu atomu promieniotwórczego w ciągu sekundy wynosi $p = 10^{-14}$. Mając $n = 10^{15}$ atomów wyznacz rozkład prawdopodobieństwa liczby rozpadów w danej sekundzie.
- Mamy artykuł z $n = 8\,000$ słów. Szansa literówki w danym słowie to $p = 1/1000$. Znaleźć rozkład liczby literówek.
- DNA człowieka składa się z $n = 6.4 \times 10^9$ par zasad (w pojedynczej komórce). Szansa mutacji na parę zasad na rok wynosi $p = 0.5 \times 10^{-9}$. Wyznacz rozkład liczby mutacji w ciągu roku.

Rozkład Poissona

Rozważmy ciąg n prób Bernoulliego z prawd. sukcesu p, gdzie:

- n jest bardzo duże,
- p jest bardzo małe (bliskie zeru) ...
- ... ale $n \cdot p$ jest umiarkowane (ani małe, ani duże)

Przykłady

- Szansa rozpadu atomu promieniotwórczego w ciągu sekundy wynosi $p = 10^{-14}$. Mając $n = 10^{15}$ atomów wyznacz rozkład prawdopodobieństwa liczby rozpadów w danej sekundzie.
- Mamy artykuł z $n = 8\,000$ słów. Szansa literówki w danym słowie to $p = 1/1000$. Znaleźć rozkład liczby literówek.
- DNA człowieka składa się z $n = 6.4 \times 10^9$ par zasad (w pojedynczej komórce). Szansa mutacji na parę zasad na rok wynosi $p = 0.5 \times 10^{-9}$. Wyznacz rozkład liczby mutacji w ciągu roku.
- Szansa katastrofy lotniczej wynosi 1 na 11 mln lotów (rocznie). Wyznacz rozkład liczby katastrof na rok, jeśli w ciągu roku odbywa się $n = 16$ mln lotów.

Rozkład Poissona jako granica rozkładu dwumianowego

$$P(X = k) \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Rozkład Poissona jako granica rozkładu dwumianowego

$$P(X = k) \; = \; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \; = \; \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bierzemy granicę $n \to \infty$ równocześnie zakładając $np = \lambda$ dla pewnej stałej $\lambda \in \mathbb{R}$ (co oznacza $p = \lambda/n \to 0$)

Rozkład Poissona jako granica rozkładu dwumianowego

$$P(X = k) \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bierzemy granicę $n \to \infty$ równocześnie zakładając $np = \lambda$ dla pewnej stałej $\lambda \in \mathbb{R}$ (co oznacza $p = \lambda/n \to 0$)

$$\lim_{n\to\infty} P(X = k) \;=\; \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}}_{\binom{n}{k}} \underbrace{\frac{\lambda^k}{n^k}}_{p^k} \underbrace{\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}}_{(1-p)^{n-k}}$$

Rozkład Poissona jako granica rozkładu dwumianowego

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bierzemy granicę $n \to \infty$ równocześnie zakładając $np = \lambda$ dla pewnej stałej $\lambda \in \mathbb{R}$ (co oznacza $p = \lambda/n \to 0$)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X = k) &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}}_{\binom{n}{k}} \underbrace{\frac{\lambda^k}{n^k}}_{p^k} \underbrace{\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}}_{(1-p)^{n-k}} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}
\end{aligned}$$

Rozkład Poissona jako granica rozkładu dwumianowego

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bierzemy granicę $n \to \infty$ równocześnie zakładając $np = \lambda$ dla pewnej stałej $\lambda \in \mathbb{R}$ (co oznacza $p = \lambda/n \to 0$)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X=k) &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}}_{\binom{n}{k}} \underbrace{\frac{\lambda^k}{n^k}}_{p^k} \underbrace{\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}}_{(1-p)^{n-k}} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\tfrac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\tfrac{k-1}{n}\right) \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}
\end{aligned}$$

Rozkład Poissona jako granica rozkładu dwumianowego

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bierzemy granicę $n \to \infty$ równocześnie zakładając $np = \lambda$ dla pewnej stałej $\lambda \in \mathbb{R}$ (co oznacza $p = \lambda/n \to 0$)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X = k) &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}}_{\binom{n}{k}} \underbrace{\frac{\lambda^k}{n^k}}_{p^k} \underbrace{\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}}_{(1-p)^{n-k}} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \Big(1 - \underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1 - \underbrace{\tfrac{k-1}{n}}_{\to 0}\Big) \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\underbrace{\lambda/n}_{\to 0})^k}
\end{aligned}$$

Rozkład Poissona jako granica rozkładu dwumianowego

$$P(X=k) \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bierzemy granicę $n \to \infty$ równocześnie zakładając $np = \lambda$ dla pewnej stałej $\lambda \in \mathbb{R}$ (co oznacza $p = \lambda/n \to 0$)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X=k) \;&=\; \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}}_{\binom{n}{k}} \underbrace{\frac{\lambda^k}{n^k}}_{p^k} \underbrace{\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}}_{(1-p)^{n-k}} \\
&=\; \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \\
&=\; \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{0}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\underbrace{\tfrac{k-1}{n}}_{0}\right) \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\underbrace{\lambda/n}_{0})^k} \\
&=\; \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n
\end{aligned}$$

Rozkład Poissona jako granica rozkładu dwumianowego

$$P(X=k) \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \;=\; \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bierzemy granicę $n \to \infty$ równocześnie zakładając $np = \lambda$ dla pewnej stałej $\lambda \in \mathbb{R}$ (co oznacza $p = \lambda/n \to 0$)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X=k) &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}}_{\binom{n}{k}} \underbrace{\frac{\lambda^k}{n^k}}_{p^k} \underbrace{\frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}}_{(1-p)^{n-k}} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \Big(1-\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1-\underbrace{\tfrac{k-1}{n}}_{\to 0}\Big) \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\underbrace{\lambda/n}_{\to 0})^k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \;=\; \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Rozkład Poissona

Zmienna $X \in \{0, 1, \ldots\}$ ma rozkład Poissona z parametrem λ jeśli:

$$P(X = k) \;=\; \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Rozkład Poissona

Zmienna $X \in \{0, 1, \ldots\}$ ma rozkład Poissona z parametrem λ jeśli:

$$P(X = k) \; = \; \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Rozkład Poissona oznaczamy przez $\mathrm{Pois}(\lambda)$

Rozkład Poissona

Zmienna $X \in \{0, 1, \ldots\}$ ma rozkład Poissona z parametrem λ jeśli:

$$P(X = k) \ = \ \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Rozkład Poissona oznaczamy przez $\mathrm{Pois}(\lambda)$

Sprawdzamy, czy rozkład poprawnie się normalizuje:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) \ = \ e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \ = \ e^{-\lambda} e^{\lambda} \ = \ 1$$

Rozkład Poissona

Zmienna $X \in \{0, 1, \ldots\}$ ma rozkład Poissona z parametrem λ jeśli:

$$P(X = k) \; = \; \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Rozkład Poissona oznaczamy przez $\mathrm{Pois}(\lambda)$

Sprawdzamy, czy rozkład poprawnie się normalizuje:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) \; = \; e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \; = \; e^{-\lambda} e^{\lambda} \; = \; 1$$

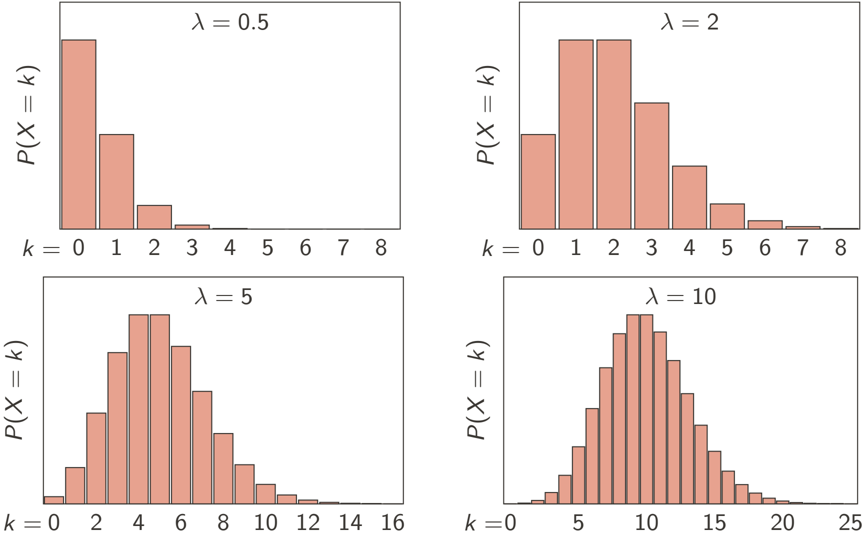
Zadanie 2

Odszukaj dlaczego $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

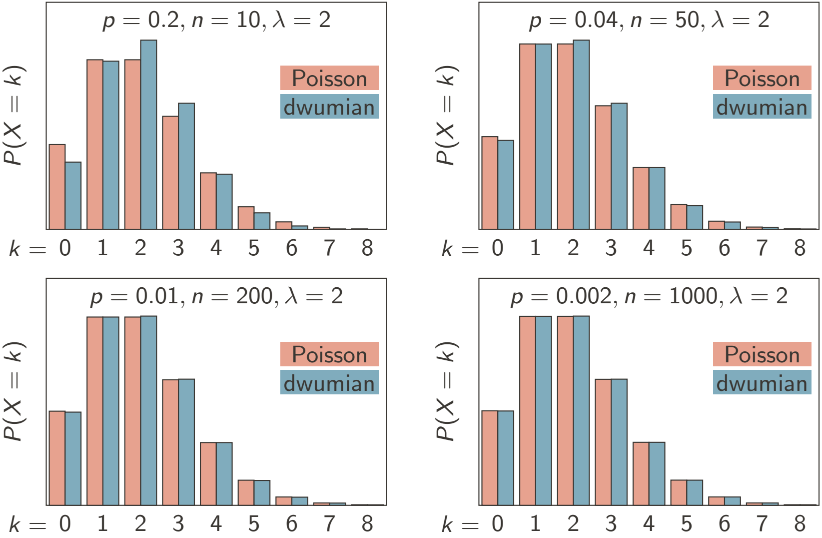
Zadanie 3

Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa dla wszystkich wymienionych poprzednio przykładów. Oblicz kilka pierwszych prawdopodobieństw.

Rozkład Poissona



Rozkład Poissona a dwumianowy



Rozkład Poissona a dwumianowy