Metoda Karusha-Kuhna-Tuckera

Badania operacyjne i teoria optymalizacji

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Instytut Informatyki

Poznań, 2015/2016

Plan

Ograniczenia w postaci nierówności

Postać ograniczeń

$$f_i(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow f_i(\mathbf{x}) \leqslant 0 \text{ i } f_i(\mathbf{x}) \geqslant 0$$

lub

$$f_i(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow f_i(\mathbf{x}) \leqslant 0 \text{ i } -f_i(\mathbf{x}) \leqslant 0$$

Postać kanoniczna problemu programowania matematycznego

Sformułowanie problemu

$$[\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n]\text{zminimalizować } f_0(\mathbf{x})$$

$$\text{przy ograniczeniach } f_i(\mathbf{x}) \leqslant 0 \; , \; i = 1, \ldots, m$$

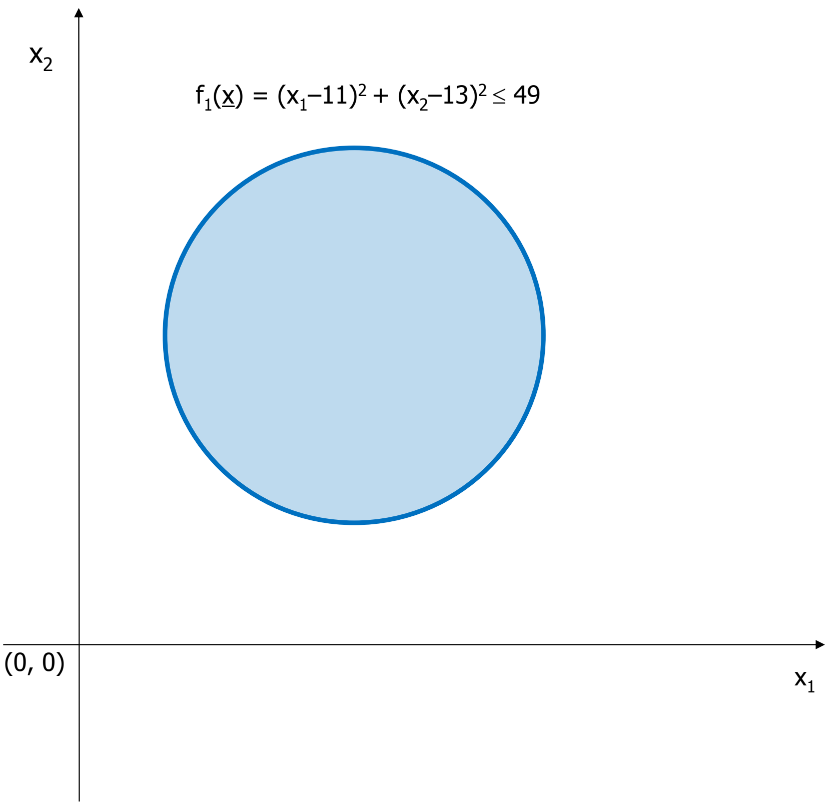
Przykład

$$[\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n]\text{zminimalizować } f_0(\mathbf{x}) = (x_1 - 14)^2 + (x_2 - 11)^2$$

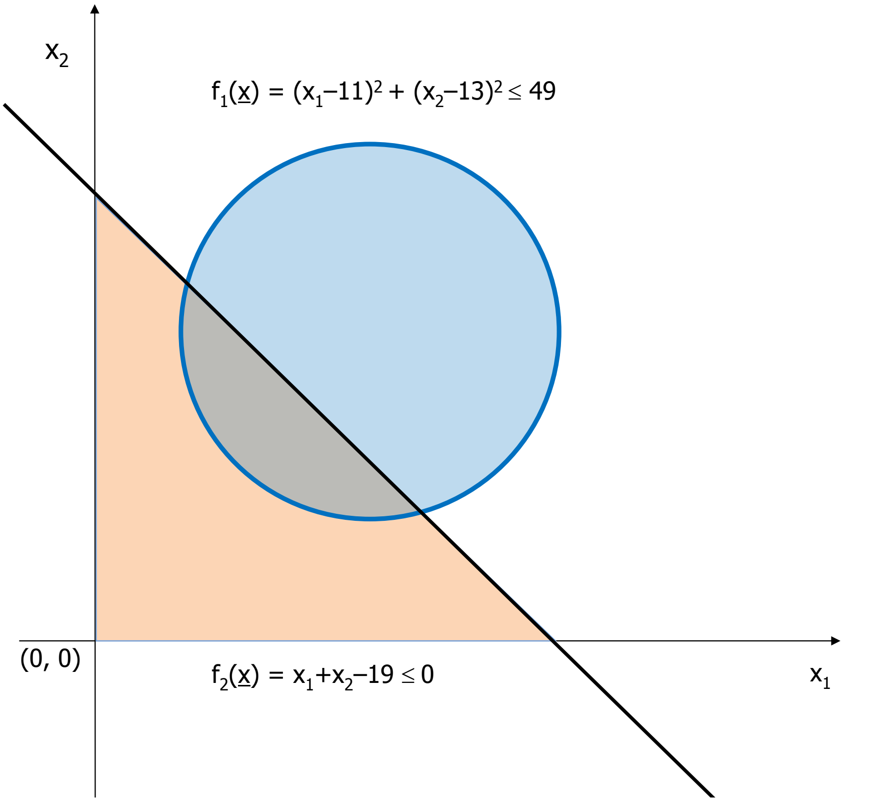
$$\text{przy ograniczeniach} \quad f_1(\mathbf{x}) = (x_1 - 11)^2 + (x_2 - 13)^2 - 49 \leqslant 0$$

$$f_2(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 19 \leqslant 0$$

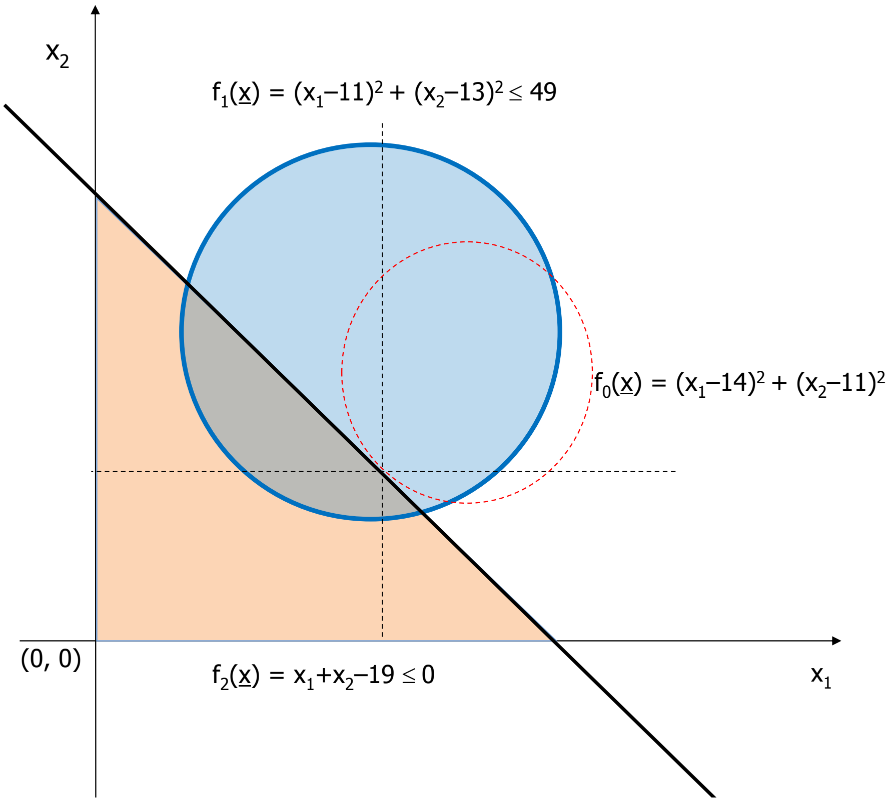
Przykład



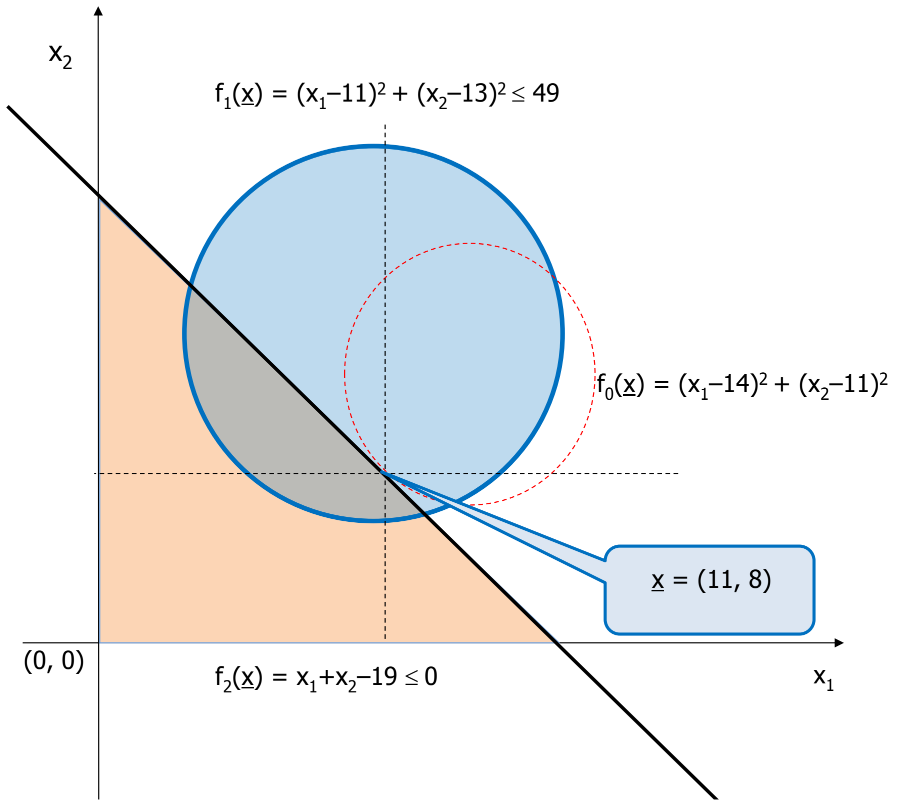
Przykład



Przykład

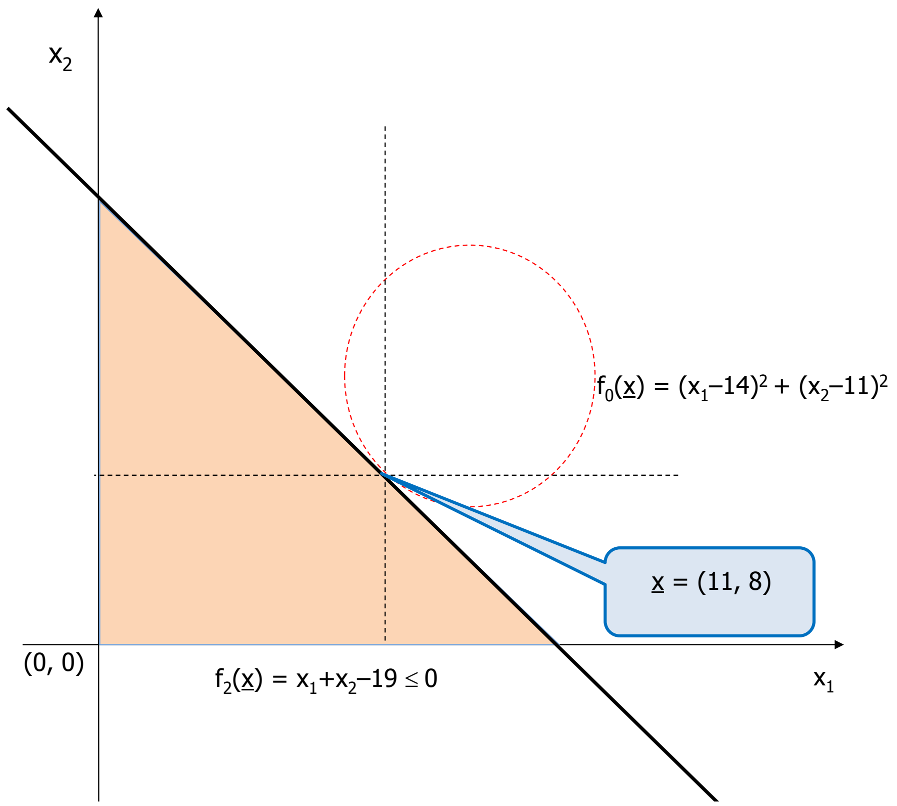


Przykład

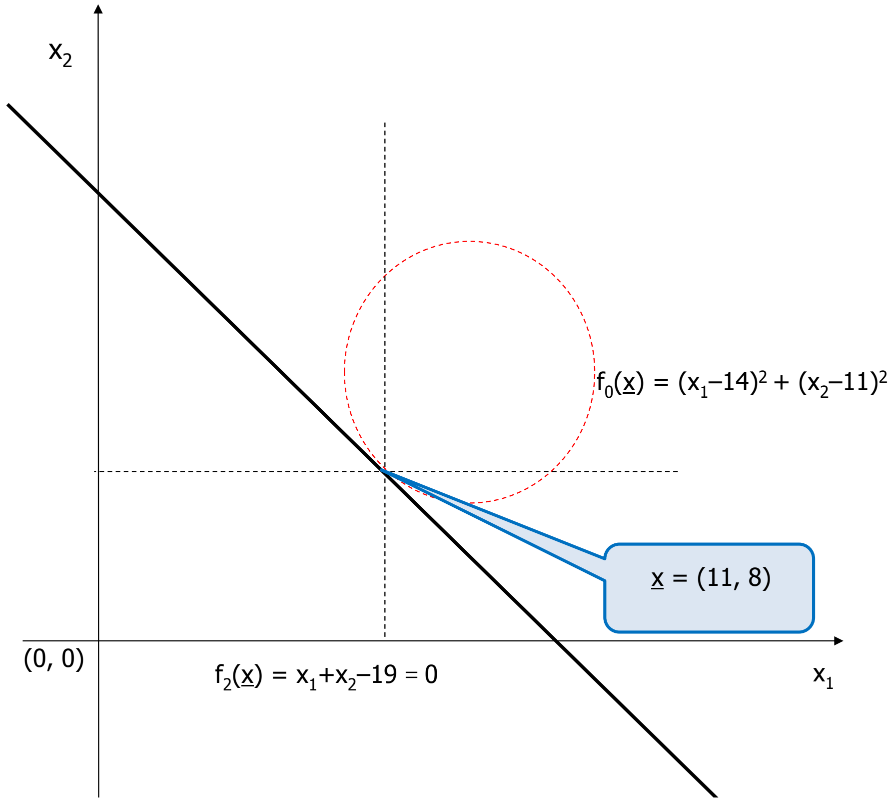


Sformułowanie Przykład Warunki ortogonalności Warunki KKT Twierdzenia KKT Metoda KKT Plan

Przykład



Ograniczenia aktywne



Przykład

$$[\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n]\text{zminimalizować } f_0(\mathbf{x}) = (x_1 - 14)^2 + (x_2 - 11)^2$$

przy ograniczeniach:

ograniczenie nieaktywne

$$f_1(\mathbf{x}) = (x_1 - 11)^2 + (x_2 - 13)^2 - 49 \leqslant 0$$

ograniczenie aktywne:

$$f_2(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 19 = 0$$

Można zastosować metodę Lagrange'a albo podstawienie.

Postępowanie gdy ograniczenia mają postać nierówności

1. **Ustalić, które ograniczenia są aktywne, a które nieaktywne.**
2. Usunąć ograniczenia nieaktywne i zamienić ograniczenia aktywne na równości.
3. Rozwiązać otrzymane zadanie metodą Lagrange'a.

Warunki ortogonalności

Funkcja Lagrange'a:

$$L(\mathbf{x}, u) = f_0(\mathbf{x}) + u_2 f_2(\mathbf{x})$$

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = f_0(\mathbf{x}) + u_1 f_1(\mathbf{x}) + u_2 f_2(\mathbf{x})$$

$$u_1 = 0$$

Warunki ortogonalności

Funkcja Lagrange'a:

$$L(\mathbf{x}, u) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x})$$

warunki ortogonalności

$$u_i f_i(\mathbf{x}) = 0, \ i = 1, \dots, m$$

Warunki Karusha-Kuhna-Tuckera (KKT)

[$\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$]zminimalizować $f_0(\mathbf{x})$

przy ograniczeniach $f_i(\mathbf{x}) \leqslant 0$, $i = 1, \dots, m$

$\nabla f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla f_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$	warunki gradientowe
$u_i f_i(\mathbf{x}) = 0, \ i = 1, \dots, m$	warunki ortogonalności
$f_i(\mathbf{x}) \leqslant 0, \ i = 1, \dots, m$	warunki dopuszczalności
$u_i \geqslant 0, \ i = 1, \dots, m$	warunki nieujemności

Twierdzenia Karusha-Kuhna-Tuckera

Dany jest problem programowania matematycznego:

[$\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$]zminimalizować $f_0(\mathbf{x})$

przy ograniczeniach $f_i(\mathbf{x}) \leqslant 0$, $i = 1, \dots, m$ $(*)$

warunki konieczne

jeżeli	f_i jest różniczkowalna, $i = 0, \dots, m$
i	$\mathbf{x}^*$ jest minimum lokalnym
i	spełnione są ograniczenia $(*)$
to	istnieje wektor $\mathbf{u}^*$ taki, że $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ spełnia warunki KKT;

warunki dostateczne

jeżeli	$(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ spełnia warunki KKT
i	f_i jest funkcją wypukłą, $i = 0, \dots, m$
to	$\mathbf{x}^*$ jest minimum globalnym.

Funkcja wypukła

Funkcja f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych punktów x oraz y zachodzi:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$

dla wszystkich λ takich, że $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Funkcja $f(x)$ jest wklęsła wtw gdy funkcja $(-f(x))$ jest wypukła.

Sprawdzanie wypukłości funkcji

1. Z definicji wypukłości
2. Z określoności Hesjanu
3. Z twierdzeń o minorach

Głównym minorem (wiodącym)

macierzy H nazywa się wyznacznik macierzy kwadratowej, którego główna przekątna zawiera się w głównej przekątnej H i zgodny jest element (1,1).

Jeżeli H jest symetryczna, to

- H jest dodatnio określona wtw każdy wiodący minor główny jest dodatni;
- H jest dodatnio półokreślona wtw wszystkie minory główne są nieujemne.

Hesjan a wypukłość funkcji

H(x) jest dodatnio półokreślona dla wszystkich wartości x	$\Leftrightarrow$	$f(x)$ jest funkcją wypukłą
H(x) jest dodatnio określona dla wszystkich wartości x	$\Leftrightarrow$	f(x) jest funkcją ściśle wypukłą

Wnioski

Jeżeli funkcja jest wypukła, to jej punkt stacjonarny jest z pewnością minimum.

Jeżeli funkcja celu i warunki ograniczające są wypukłe, to rozwiązanie warunków KKT odpowiada znalezieniu minimum globalnego.

Metoda Karusha-Kuhna-Tuckera

1. Sformułować funkcję Lagrange'a

$$L(\mathbf{x},\mathbf{u}) = f_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(\mathbf{x})$$

2. Znaleźć wszystkie rozwiązania $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ następujacego układu równań i nierówności:

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 & j = 1, \ldots, n \\ u_i f_i(\mathbf{x}) = 0 & i = 1, \ldots, m \\ f_i(\mathbf{x}) \leqslant 0 & i = 1, \ldots, m \\ u_i \geqslant 0 & i = 1, \ldots, m \end{array}$$

3. Jeżeli wszystkie funkcje f_i są ciągłe, to punkt $\mathbf{x}^*$ jest minimum globalnym. Wprzeciwnym razie należy zbadać każdy punkt $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ i określić, czy jest w nim osiągane optimum.

Przykład

zminimalizować $f_0(\mathbf{x}) = -3x_1 + \frac{1}{2}x_2$

przy ograniczeniach $f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leqslant 0$

$f_2(\mathbf{x}) = -x_1 \leqslant 0$

$f_3(\mathbf{x}) = -x_2 \leqslant 0$