Programowanie nieliniowe

Badania operacyjne

Metody numeryczne

Plan wykładu

- Ograniczenia metod analitycznych
- Przykłady metod numerycznych PNL
  - Metoda interpolacji liniowej
  - Metoda Newtona
  - Metoda najszybszego spadku
  - Metoda gradientu zredukowanego
- Klasyfikacja metod numerycznych PNL

Przykład

Otrzymanego układu nie można rozwiązać analitycznie!

- Sformułować warunki KKT dla następującego problemu PNL

zminimalizować $f_0(\underline{x}) = (x_1 - 20)^4 + (x_2 - 12)^4$

przy ograniczeniach

$f_1(\underline{x}) = 8 \exp((x_1 - 12)/9) - x_2 + 4 \leq 0$

$f_2(\underline{x}) = 6(x_1-12)^2 + 25x_2^2 - 600 \leq 0$

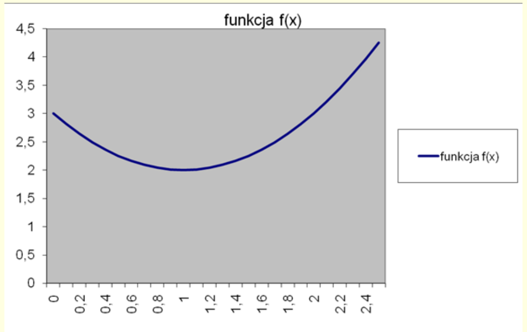
$f_3(\underline{x}) = -x_1 + 12 \leq 0$

Ograniczenia metod analitycznych

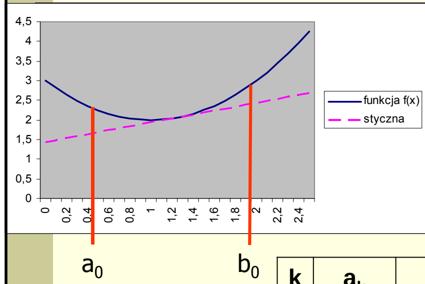
- Funkcja celu lub ograniczenia nie spełniają założeń twierdzenia KKT:
  - funkcje nie są wypukłe,
  - funkcje nie są różniczkowalne,
  - funkcje nie są ciągłe,
  - funkcje nie są podane w sposób jawny.
- Układu nierówności tworzących warunki KKT nie można rozwiązać analitycznie.

Metoda interpolacji liniowej

zminimalizować $f(x) = x^2 - 2x + 3$



Metoda interpolacji liniowej



Zbieżność liniowa

$$x_k = a_k + \frac{b_k - a_k}{2}$$

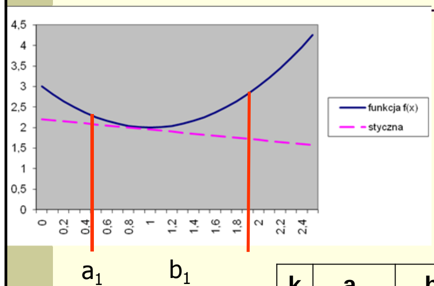
k	a_k	b_k	x_k	$f'(x_k)$	b_k-a_k
0	0,5	2	1,25	0,5	1,5

zmin: $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$f'(x) = 2x - 2$

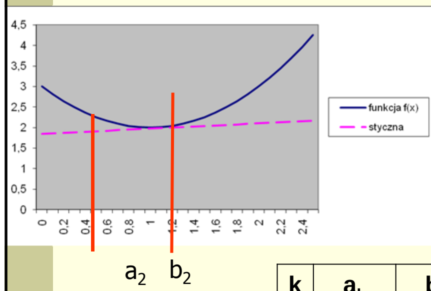
$f'(x_0) = f'(1,25) = 0,5$

Metoda interpolacji liniowej



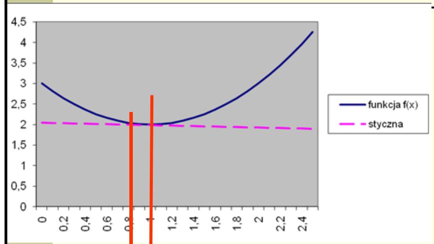
k	a_k	b_k	x_k	$f'(x_k)$	b_k-a_k
0	0,5	2	1,25	0,5	1,5
1	0,5	1,25	0,875	-0,25	0,75

Metoda interpolacji liniowej



k	a_k	b_k	x_k	$f'(x_k)$	b_k-a_k
0	0,5	2	1,25	0,5	1,5
1	0,5	1,25	0,875	-0,25	0,75
2	0,875	1,25	1,0625	0,125	0,375

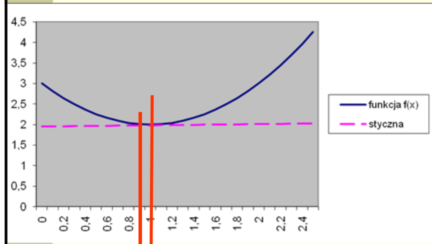
Metoda interpolacji liniowej



a_3 b_3

k	a_k	b_k	x_k	$f'(x_k)$	b_k-a_k
0	0,5	2	1,25	0,5	1,5
1	0,5	1,25	0,875	-0,25	0,75
2	0,875	1,25	1,0625	0,125	0,375
3	0,875	1,0625	0,96875	-0,0625	0,1875

Metoda interpolacji liniowej



a_4 b_4

k	a_k	b_k	x_k	$f'(x_k)$	b_k-a_k
0	0,5	2	1,25	0,5	1,5
1	0,5	1,25	0,875	-0,25	0,75
2	0,875	1,25	1,0625	0,125	0,375
3	0,875	1,0625	0,96875	-0,0625	0,1875
4	0,96875	1,0625	1,015625	0,03125	0,09375

Metody interpolacyjne

- dotyczą funkcji jednej zmiennej,
- są zbieżne do minimum lokalnego funkcji (jeżeli ono istnieje),
- mogą zawodzić ze względu na błędy zaokrągleń,
- mogą zawodzić ze względu na nieregularności funkcji (np. nieciągłość, nieróżniczkowalność).

Metoda Newtona

zminimalizować	$f(x)$, $f \in C^3$, $f'' \neq 0$
przy ograniczeniach	$x \in [d, w]$

z rozwinięcia Taylora wokół punktu x_0

$$f(x^*) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \tfrac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(x_0) + \cdots$$

po obustronnym zróżniczkowaniu:

$$f'(x^*) \\ = f'(x_0) + (x - x_0)f''(x_0) + f'(x_0) \\ + (x - x_0)^2 f''^{(x_0)} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f'''(x_0) + \cdots$$

Metoda Newtona

warunek konieczny istnienia minimum: $f'(x_0)=0$

$$2f'(x_0) + 2(x - x_0)f''(x_0) \approx 0$$

$$f'(x_k) + (x_{k+1} - x_k)f''(x_k) \approx 0$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

Metoda Newtona - przykład

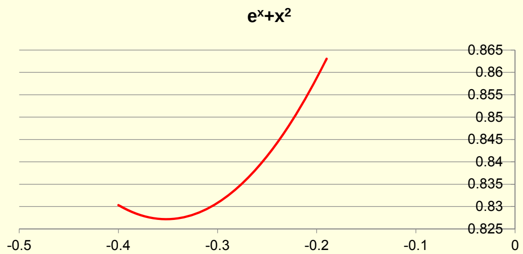
$$f_0(x) = e^x + x^2 \qquad x \in [-1, 1]$$

$$f_0'(x) = e^x + 2x \qquad f_0''(x) = e^x + 2 > 0$$

$x_0 = 0$	$f_0(x_0) = 1$
$x_1 = 0 - \frac{e^0 + 0}{e^0 + 2} = -\frac{1}{3} = -0{,}3333$	$f_0(x_1) = 0{,}827642588$
$x_2 = -0{,}35168$	$f_0(x_2) = 0{,}82718403$
$x_3 = -0{,}35173$	$f_0(x_3) = 0{,}827184026$

Metoda Newtona - przykład

$$f_0(x) = e^x + x^2 \qquad x \in [-1, 1]$$



$x_3 = -0{,}35173$	$f_0(x_3) = 0{,}827184026$

Wady metody Newtona

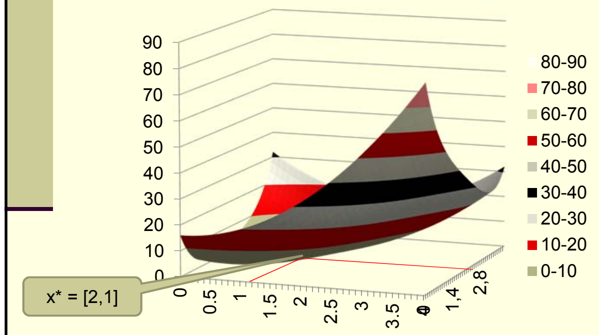
1. Nie ma pewności, że $x_{k+1} \in [d,w]$, np. jeżeli $f''(x_k) << f'(x_k)$
2. Może się zdarzyć, że $f''(x_k)=0$, wtedy $x_{k+1} = x_k - f'(x_k)$
3. Metoda może nie być zbieżna.

Metoda najszybszego spadku

- Dotyczy problemów bez ograniczeń.
- Dotyczy funkcji wielu zmiennych.

Metoda najszybszego spadku

- zminimalizować $f_0(\underline{x}) = (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$



Metoda najszybszego spadku

zminimalizować f(x)

1. k = 0
2. Wyznaczamy gradient

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

3. Obliczamy współrzędne następnego punktu:

$$x_1(k+1) = x_1(k) - \theta \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(k))$$

$$\dots$$

$$x_n(k+1) = x_n(k) - \theta \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_n(k))$$

4. Jeżeli k < *max_kroków*, to k := k + 1 i powróć do kroku 2; w przeciwnym razie zakończ algorytm.

Metoda najszybszego spadku - komplikacje

- Punkt, w którego otoczeniu funkcja jest stała, bądź też o bardzo małym nachyleniu. Wówczas x(k+1) ≅ x(k) i pozostajemy w miejscu.
- Funkcja posiada wiele minimów lokalnych. W takiej sytuacji algorytm po znalezieniu jednego z nich pozostanie w nim już na zawsze.
- Warunek wymagający różniczkowalności funkcji.

Metoda gradientu zredukowanego

- Ograniczenia będące funkcjami liniowymi łatwo wyeliminować, zmniejszając równocześnie liczbę zmiennych decyzyjnych.
- Co zrobić z ograniczeniami nieliniowymi ?
- Zastosować rozwinięcie w szereg Taylora.
- Jak to zrobić dla funkcji wielu zmiennych ?

Metoda gradientu zredukowanego

Rozwinięcie w szereg Taylora funkcji n zmiennych wokół punktu $\bar{x}$.

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^T H(\bar{x})(x - \bar{x})}{2!} + \cdots$$

Po ograniczeniu do składników liniowych:

$$f(x) \approx f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x})$$

Klasyfikacja metod numerycznych PNL

- Metody programowania nieliniowego
  - Bez ograniczeń
    - Metody poszukiwania optimum w kierunku
      - Metoda złotego podziału
      - Metoda interpolacji kwadratowej
      - Metoda interpolacji sześciennej
    - Metody bezgradientowe
      - Metoda Hooke'a-Jeevesa
      - Metoda Rosenbrocke'a
      - Metoda Seidela
      - Metoda Powella
    - Metody gradientowe
      - Metoda gradientu prostego
      - Metoda najszybszego spadku
      - Metoda gradientu sprzężonego
      - Metoda Newtona
      - Metoda Raphsona
  - Z ograniczeniami

Klasyfikacja metod numerycznych PNL

- Metody programowania nieliniowego
  - Bez ograniczeń
  - Z ograniczeniami
    - Metody transformacji zmiennych niezależnych
    - Metody funkcji kary
      - Metoda Schmita-Foxa
      - Metoda Rosenbrocke'a
      - Metoda Carolla
      - Metoda Powella
    - Metody z modyfikacją kierunku
      - Metoda Rosena
    - Metoda COMPLEX

Solvery

- Excel – GRG
- Matlab (Math Works)
- SAS
- LINGO
- Mathematica
- ………….