Rozdział 1

Budowa modeli sytuacji decyzyjnych

Model matematyczny sytuacji decyzyjnej jest konstrukcją formalną [?] odwzorowującą istotne cechy sytuacji decyzyjnej. Budowa modelu jest jednym z najtrudniejszych etapów w metodzie badań operacyjnych. Wyróżnienie istotnych cech sytuacji decyzyjnej jest na ogół trudne i wymaga starannej analizy. Zwykle nie wystarcza ograniczenie się do opisu sytuacji przedstawionego przez decydenta. Ważne jest również, aby przy budowie modelu brać pod uwagę dostępność wymaganych danych liczbowych oraz możliwość rozwiązania problemu w rozsądnym czasie.

1.1. Ogólna postać problemu optymalizacyjnego

Ogólna postać matematyczna problemu optymalizacyjnego jest następująca:

zmaksymalizować (zminimalizować)

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.1}$$

przy ograniczeniach

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{1.2}$$

Funkcję (1.1) nazywa się *funkcją celu* lub *funkcją kryterium*. Wartość z jest miarą oceny podjętej decyzji. *Kierunek optymalizacji* wskazuje, czy poszukujemy maksimum, czy minimum funkcji celu. Zmienne $x_1, \ldots, x_n$ to *zmienne decyzyjne*. Każdy wektor $[x_i]$ wyznacza określoną decyzję. Warunki (1.2) nazywamy *warunkami ograniczającymi*. Zbiór $D = \{(x_1, \ldots, x_n) : g_i(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0, i = 1, \ldots, m\}$ nazywamy *zbiorem rozwiązań dopuszczalnych*.

Jeżeli w problemie optymalizacyjnym znane są wartości wszystkich parametrów, to takie sforułowanie nazwiemy *zadaniem* optymalizacyjnym. Rozwiązanie zadania optymalizacyjnego polega na znalezieniu takiego rozwiązania dopuszczalnego, dla którego wartość funkcji celu jest większa lub równa (mniejsza lub równa) od wartości funkcji celu każdego rozwiązania dopuszczalnego.

Rozwiązaniem optymalnym zadania polegającego na maksymalizacji (minimalizacji) funkcji celu jest $\mathbf{x}^* = [x_i^*] \in D$, takie, że $\forall \mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}^*) \geqslant f(\mathbf{x})$ $(\forall \mathbf{x} \in D : f(\mathbf{x}^*) \leqslant f(\mathbf{x}))$.

W szczególnych wypadkach zbiór ograniczeń może być zbiorem pustym. Wtedy każde rozwiązanie z dziedziny funkcji f jest rozwiązaniem dopuszczalnym. Możliwa jest również sytuacja, gdzie zbiór rozwiązań dopuszczalnych D jest zbiorem pustym (ograniczenia są sprzeczne). Wtedy nie istnieje rozwiązanie optymalne takiego zadania.

W sytuacjach gdy wyboru decyzji należy dokonać z punktu widzenia wielu różnych kryteriów (miar oceny), wprowadza się wiele funkcji celu, a model nazywa się *wielokryterialnym.*

Ważną klasą problemów optymalizacyjnych są *problemy programowania liniowego*, gdzie zarówno funkcja celu, jak i funkcje w ograniczeniach są funkcjami liniowymi. w modelu liniowym stałe przenosi się zwykle na prawą stronę nierówności. Zwrot nierówności jest kwestią umowną, gdyż po pomnożeniu dowolnej nierówności obustronnie przez (-1), otrzymujemy układ nierówności równoważny początkowemu. Model liniowy przyjmuje postać:

zmaksymalizować (zminimalizować)

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.3}$$

przy ograniczeniach

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \qquad i = 1, \ldots, m \tag{1.4}$$

Problemy programowania liniowego mają dwie ważne zalety: po pierwsze, istnieją sprawne pod względem obliczeniowym algorytmy znajdujące rozwiązania optymalne zadań programowania liniowego, po drugie, zależności liniowe są łatwe do sformułowania. Co prawda adekwatność modeli liniowych nie zawsze jest zadowalająca, ale zwykle stanowią one wystarczająco dobre przybliżenie sytuacji decyzyjnej. Następujące *aksjomaty liniowości* pomagają rozstrzygnąć, czy dany element sytuacji decyzyjnej może być modelowany za pomocą zależności liniowych [**?**]:

– *Aksjomat podzielności.* Ogólna wielkość każdego nakładu i odpowiadający mu efekt (zysk) są dokładnie proporcjonalne do poziomu nakładu. w konsekwencji zwiększenie nakładu skutkuje zawsze proporcjonalnym zwiększeniem efektu.

– *Aksjomat addytywności.* Przy danych poziomach działalności dla każdej ze zmniennych decyzyjnych ogólna wielkość każdego z nakładów oraz wynik ogółem są sumami nakładów i wyników dla każdego procesu indywidualnego.

Zauważmy, że efekt w postaci wielkości sprzedaży często jest mniej niż proporcjonalny do nakładów na promocję, zatem w takiej sytuacji aksjomat podzielności nie jest spełniony. Podobnie często spotykany efekt *synergii*[1] jest przykładem, gdzie nie jest spełniony aksjomat addytywności.

1.2. Klasyfikacja modeli

Ze względu na charakter parametrów występujących w modelu wyróżnia się zwykle cztery następujące klasy [**?**]:

– *modele deterministyczne*, gdzie wszystkie parametry traktowane są jako wielkości stałe, a ich wartości mogą być oszacowane lub ustalone w ramach sformułowanego modelu,
– *modele probabilistyczne*, gdzie występują również parametry będące zmiennymi losowymi o znanym rozkładzie prawdopodobieństwa,
– *modele statystyczne*, gdzie występuje co najmniej jeden parametr będący zmienną losową o nieznanym rozkładzie prawdopodobieństwa,
– *modele strategiczne*, gdzie występuje co najmniej jeden parametr, dla którego w momencie podejmowania decyzji znany jest jedynie zbiór wartości, jakie ten parametr może przyjąć.

Niekiedy wyróżnia się też *modele rozmyte*, ale zostały one pominięte, gdyż teoria zbiorów rozmytych wykracza poza ramy tego skryptu.

Charakter parametrów wpływa przede wszystkim na wybór metody rozwiązania problemu. Najczęściej stosuje się modele deterministyczne, zatem tym modelom poświęcono najbardziej obszerną, drugą część skryptu. Wybrane modele niedeterministyczne omówiono w części trzeciej. Część czwartą poświęcono wybranym zastosowaniom badań operacyjnych w podejmowaniu decyzji menedżerskich.

1.3. Przykłady modeli sytuacji decyzyjnych

W tym punkcie podamy kilka przykładowych modeli sytuacji decyzyjnych, omawiając szczegółowo interpretację zmiennych, ograniczeń i funkcji celu.

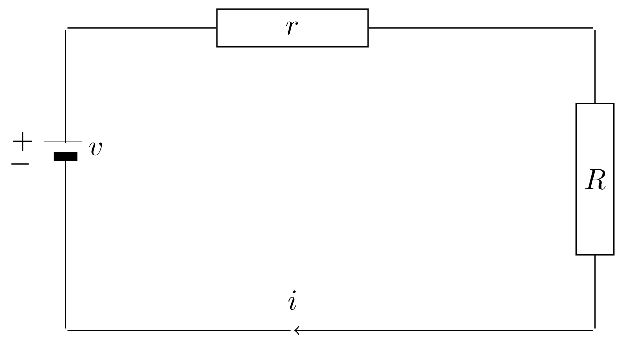
[1] Synergia – zjawisko polegające na tym, że współdziałające elementy dają wypadkowy wynik pod jakimś względem większy niż suma skutków wywołanych przez każdy z elementów z osobna.

1.3.1. Model nieliniowy

Opisana poniżej sytuacja będzie modelowana za pomocą deterministycznego modelu nieliniowego z jedną zmienną decyzyjną. Otrzymany problem optymalizacyjny jest problemem programowania nieliniowego.

Opis sytuacji decyzyjnej

Na schemacie (rys. 1.1) v oznacza napięcie źródła, r opór wewnętrzny źródła, a R opór odbiornika. Należy znaleźć taką wartość R, aby strata mocy była maksymalna, jeżeli dopuszczalny spadek napięcia na odbiorniku wynosi E.



Rysunek 1.1. Schemat obwodu

Zmienne decyzyjne

Zmienną decyzyjną w tym modelu jest opór odbiornika R.

Ograniczenia

Jedynym ograniczeniem jest, aby spadek napięcia na odbiorniku wynosił co najwyżej E. Spadek napięcia e na odbiorniku wyznaczamy z zależności $e = iR$, gdzie i oznacza natężenie prądu. Możemy je wyznaczyć na podstawie napięcia i oporu wewnętrznego źródła jako:

$$i = \frac{v}{r + R} \tag{1.5}$$

Zatem ograniczenie dotyczące maksymalnego spadku napięcia zapisujemy w postaci nierówności (1.6):

$$\frac{vR}{r + R} \leqslant E \tag{1.6}$$

Naturalnie opór nie może być ujemny, a zatem $R \geqslant 0$.

Funkcja celu

Strata mocy na odbiorniku jest opisana zależnością $P = i^2 R$. Podstawiając i, z równania (1.5) otrzymujemy:

$$f(R) = \left(\frac{v}{r+R}\right)^2 R \tag{1.7}$$

Model

Ostatecznie model matematyczny problemu przyjmuje postać:

$$\text{zmaksymalizować} \quad f(R) = \left(\frac{v}{r+R}\right)^2 R \tag{1.8}$$

$$\text{przy ograniczeniach} \quad \frac{vR}{r+R} \leqslant E \tag{1.9}$$

$$R \geqslant 0 \tag{1.10}$$

Jeżeli ustalimy wartości parametrów r, v oraz E, to otrzymane zadanie programowania matematycznego można rozwiązać graficznie.

1.3.2. Model liniowy

Omówimy tu jeden z klasycznych problemów programowania liniowego – tzw. problem produkcji z maksymalizacją zysku.

Opis sytuacji decyzyjnej

Zakład produkcyjny produkuje n różnych wyrobów. Należy określić, w jakich ilościach powinno się produkować poszczególne wyroby, biorąc pod uwagę, że w najbliższym okresie zapasy środków do produkcji są ograniczone. Dla każdego z m środków znana jest wielkość zapasu b_i, $i = 1, \dots, m$. Jednostkowy nakład i-tego środka do produkcji j-tego wyrobu wynosi a_{ij}, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Znany jest też jednostkowy zysk z produkcji j-tego wyrobu, który wynosi c_j, $j = 1, \dots, n$. Należy zaplanować produkcję zakładu w rozpatrywanym okresie tak, aby zmaksymalizować zysk.

Zmienne decyzyjne

Decyzja dotyczy wielkości produkcji poszczególnych wyrobów, a zatem w modelu występuje n zmiennych decyzyjnych, przy czym zmienna x_j oznacza ilość wyrobu j, $j = 1, \dots, n$, w planie produkcji.

Ograniczenia

Ograniczenia rozmiaru produkcji wynikają z dostępności środków do produkcji. Ilość środka i-tego potrzebna do wykonania planu produkcji wyrobu j wynosi $a_{ij}x_j$. Zatem nakład i-tego środka do produkcji wszystkich wyrobów obliczamy jako sumę nakładów po wszystkich wyrobach. Całkowity nakład środka i nie może być większy niż zapas tego środka b_i, $i = 1, \dots, m$, tzn.:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \tag{1.11}$$

Nierówność (1.11) musi zachodzić dla każdego i, $i = 1, \dots, m$. Ponadto zmienne x_j muszą być nieujemne.

Funkcja celu

Zysk z produkcji wyrobu j to c_jx_j. Całkowity zysk jest sumą zysków z produkcji wszystkich wyrobów i wynosi:

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \tag{1.12}$$

Model

Ostatecznie model matematyczny problemu przyjmuje postać:

$$\text{zmaksymalizować} \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \tag{1.13}$$

$$\text{przy ograniczeniach} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i \quad i = 1, \dots, m \tag{1.14}$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j = 1, \dots, n \tag{1.15}$$

1.3.3. Model dyskretny

Modele dyskretne to takie, w których zmienne decyzyjne mogą przyjmować tylko wartości całkowite. Przykładem jest tzw. problem przydziału, który będzie analizowany w rozdziale **??**.

Opis sytuacji decyzyjnej

Zespół N specjalistów ma wykonać N różnych zadań. Każdy ze specjalistów może być przydzielony tylko do jednego zadania i każde zadanie może być wykonywane tylko przez jednego specjalistę. Ze względu na doświadczenie specjalistów, koszt wykonania zadań przez każdego z nich jest różny: c_{ij} oznacza koszt wykonania zadania i przez specjalistę j, $i, j = 1, \ldots, N$. Należy przydzielić zadania poszczególnym specjalistom tak, aby zminimalizować łączne koszty wykonania wszystkich zadań.

Zmienne decyzyjne

Decyzja polega na przydzieleniu określonego zadania wybranemu specjaliście. Możemy ją zatem modelować za pomocą zmiennej dwuwartościowej x_{ij}, która będzie przyjmowała wartość 1, gdy zadanie i, $i = 1, \ldots, N$ jest przydzielone specjaliście j, $j = 1, \ldots, N$ i 0 w przeciwnym razie.

Ograniczenia

Ograniczeniem jest założenie, że każde zadanie może być przyporządkowane tylko do jednego specjalisty. Ograniczenie to zapisujemy za pomocą równania:

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1 \tag{1.16}$$

Równanie (1.16) musi być spełnione dla każdego zadania, czyli $i = 1, \ldots, N$.
Podobnie, założenie, że specjalista j może wykonywać tylko jedno zadanie, zapiszemy jako:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1 \tag{1.17}$$

Równanie (1.17) musi być spełnione dla każdego specjalisty, czyli $j = 1, \ldots, N$. Należy też zaznaczyć, że zmienne decyzyjne mogą przyjmować jedynie wartości ze zbioru dwuelementowego $\{0, 1\}$.

Funkcja celu

Celem jest oczywiście minimalizacja kosztów. Całkowity koszt wykonania zadań zgodnie z przydziałem $[x_{ij}]$, $i, j = 1, \ldots, N$ wynosi:

$$z = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_{ij} \tag{1.18}$$

Model

Ostatecznie model matematyczny problemu przyjmuje postać:

$$\text{zmaksymalizować} \quad z = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_{ij} \tag{1.19}$$

$$\text{przy ograniczeniach} \quad \sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, \ldots, N \tag{1.20}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \ldots, N \tag{1.21}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i, j = 1, \ldots, N \tag{1.22}$$

1.3.4. Model dynamiczny

Model dynamiczny uwzględnia aspekt czasu. Można przyjąć [?], że jeśli zadaniem optymalizacji jest znalezienie maksimum pewnej funkcji wielu zmiennych i zmienne te są ponumerowane w sposób przypadkowy, nieistotny dla rozwiązania zadania, to model jest statyczny. Tak jest w poprzednim przykładzie – nie ma znaczenia, jak ponumerujemy zadania i specjalistów. Jeżeli jednak w zadaniu maksymalizacji funkcji wielu zmiennych można w sposób naturalny określić ścisły porządek numeracji zmiennych, wynikający np. z kolejności działania poszczególnych ograniczeń problemu, to rozwiązanie dopuszczalne można interpretować nie tylko jako element przestrzeni wielowymiarowej, ale również jako funkcję czasu dyskretnego. Jeżeli przyjmiemy tę drugą interpretację, to możemy zastosować model dynamiczny, co często pozwala na łatwiejsze rozwiązanie zadania.

Opis sytuacji decyzyjnej

Problem polega na znalezieniu optymalnej polityki zaopatrzenia w kolejnych trzech miesiącach. Na początku pierwszego miesiąca w magazynie jest 1 szt. produktu. w ciągu miesiąca można dokupić co najwyżej 4 szt. Pojemność magazynu wynosi 4 szt., a miesięczne zapotrzebowanie 3 szt. Koszt uzupełnienia zapasów obejmuje koszty stałe w wysokości 8 zł, niezależnie od wielkości zamówienia, oraz koszty zmienne, proporcjonalne do wielkości zamówienia w wysokości 2 zł/szt. Jednostkowe koszty magazynowania wynoszą 3 zł/szt. i są naliczane wg stanu zapasu na koniec miesiąca. Decydent wymaga, aby na koniec ostatniego okresu stan magazynu wyniósł 0.

Zmienne decyzyjne

Zmienną decyzyjną x_k jest wielkość zamówienia złożonego w okresie k, $k = 1, 2, 3$. Zmienne te są zatem uporządkowane: x_1 oznacza wielkość zamówienia w pierwszym miesiącu, x_2 – w drugim miesiącu, a x_3 w trzecim miesiącu.

Ograniczenia

Wielkość zakupu nie może przekraczać 4 szt. produktu, czyli $x_k \leqslant 4, k = 1, 2, 3$.

Oznaczmy przez v_k pomocniczą zmienną oznaczającą stan magazynu na koniec okresu $k, k = 1, 2, 3$. Stan początkowy $v_0 = 1$. Ponadto w każdym okresie zapotrzebowanie musi być zaspokojone, co zapisujemy:

$$v_k \geqslant 3 \tag{1.23}$$

Kolejne ograniczenie decyduje o dynamicznym charakterze modelu. Ustala ono zależność między zmiennymi. Stan magazynu na koniec okresu k-tego jest równy sumie zapasu na koniec okresu $k-1$ powiększonego o wielkość dostawy x_k w okresie k oraz pomniejszonego o zużycie, co zapisujemy:

$$v_k = v_{k-1} + x_k - 3 \tag{1.24}$$

Ograniczenie musi być spełnione dla $k = 1, 2, 3$. Ponadto pojemność magazynu wynosi 4 szt., a zatem $v_k \leqslant 4, k = 1, 2, 3$. Dodatkowo, $v_3 = 0$, gdyż magazyn ma być pusty na koniec trzeciego miesiąca. Wielkość zamówienia musi być liczbą całkowitą, nieujemną, mniejszą lub równą 4, a zatem: $x_k \in \{1, 2, 3, 4\}, k = 1, 2, 3$.

Funkcja celu

Koszty zaopatrzenia w okresie $k, k = 1, 2, 3$ obejmują:

– koszty złożenia zamówienia:

$$k_k^a(x_k) = \begin{cases} 8 & \text{gdy} \quad x_k > 0 \\ 0 & \text{gdy} \quad x_k = 0 \end{cases}$$

– zmienne koszty zakupu:

$$k_k^b(x_k) = 2x_k$$

– koszty magazynowania:

$$k_k^c(x_k) = 3v_k = 3(v_{k-1} + x_k - 3)$$

Całkowity koszt zaopatrzenia w okresie k wynosi:

$$K_k(x_k) = k_k^a(x_k) + k_k^b(x_k) + k_k^c(x_k)$$

Model

Ostatecznie model matematyczny problemu przyjmuje postać:

$$\text{zminimalizować} \qquad z = \sum_{k=1}^{3} K_k(x_k) \tag{1.25}$$

$$\text{przy ograniczeniach} \quad v_k = v_{k-1} + x_k - 3 \quad k = 1, 2, 3 \tag{1.26}$$

$$3 \leqslant v_k \leqslant 4 \qquad k = 1, 2 \tag{1.27}$$
$$x_k \leqslant 4 \qquad k = 1, 2, 3 \tag{1.28}$$
$$x_k \in \{1, 2, 3, 4\} \qquad k = 1, 2, 3 \tag{1.29}$$

gdzie
$$v_0 = 1 \tag{1.30}$$
$$v_3 = 0 \tag{1.31}$$

W tym modelu kolejność zmiennych jest nieprzypadkowa. Rozwiązanie można interpretować jako ciąg decyzji, z których każda określa wielkość zamówienia w kolejnym miesiącu.

1.4. Zadania

Zadanie 1.1.
Problem minimalizacji kosztów produkcji. Danych jest m maszyn, których efektywny fundusz czasu pracy wynosi $F_i, i = 1, \ldots, m$. Na tych maszynach produkuje się n detali, których program produkcji wynosi odpowiednio $P_j, j = 1, \ldots, n$. Maszyna i produkuje w ciągu godziny a_{ij} sztuk wyrobu $j, i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Koszt pracy maszyny typu i na rzecz wyrobu j wynosi $c_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$. Należy zbudować model decyzyjny pozwalający ustalić, jak podzielić produkcję detali pomiędzy poszczególne maszyny, aby zminimalizować koszty produkcji.

Zadanie 1.2.
Problem diety. Z punktu widzenia poprawności żywienia ważny jest poziom m składników odżywczych w diecie, który dla i-tego składnika wynosi $b_i, i = 1, \ldots, m$. Do dyspozycji jest n produktów spożywczych, których ceny zakupu wynoszą $c_j, j = 1, \ldots, n$. Zawartość i-tego składnika w j-tym produkcie wynosi a_{ij}. Należy zbudować model decyzyjny pozwalający ustalić, które produkty i w jakich ilościach powinny wystąpić w diecie, aby zawierała ona wymagane ilości składników odżywczych przy najniższych kosztach.

Zadanie 1.3.
Problem alokacji. Danych jest n stanowisk produkcyjnych, które należy rozmieścić na n miejscach. Między tymi stanowiskami istnieją określone powiązania w procesie produkcyjnym zadane za pomocą macierzy $\mathbf{L} = [l_{ij}], i, j = 1, \ldots, n$. Wartość l_{ij} jest równa 1, jeżeli między stanowiskami i oraz j występuje powiązanie, natomiast gdy nie ma powiązania, wartość ta jest równa zero. Znana jest również macierz odległości między stanowiskami $\mathbf{C} = [c_{ij}], i, j = 1, \ldots, n$. Jeżeli między stanowiskami występuje powiązanie, to ponosimy koszty proporcjonalne do odległości między tymi stanowiskami. Należy zbudować model

decyzyjny pozwalający ustalić ustawienie maszyn optymalne ze względu na koszty.

Zadanie 1.4.
Wieloetapowy problem decyzyjny. Pewne przedsiębiorstwo budowlane realizuje równocześnie trzy inwestycje. Czas wykonania poszczególnych inwestycji zależy od liczby koparek skierowanych do każdej budowy. Firma posiada sześć koparek. Czas realizacji poszczególnych inwestycji zależnie od liczby koparek przedstawiono w tablicy 1.1. Należy zbudować model decyzyjny pozwalający ustalić, ile koparek należy skierować na poszczególne budowy, aby zminimalizować moment zakończenia wszystkich inwestycji.

Tabela 1.1. Czas trwania inwestycji

k	$t_1(k)$	$t_2(k)$	$t_3(k)$
0	100	200	500
1	80	170	450
2	75	150	400
3	75	100	350
4	75	80	300
5	75	80	200
6	70	80	100

Zadanie 1.5.
Problem rozkroju. Surowiec do produkcji jest dostarczany w postaci prętów o długości L. Pręty te należy pociąć na odcinki o długościach $l_i, i = 1, \ldots, m$. Wymagana liczba odcinków o długości l_i wynosi $b_i, i = 1, \ldots, m$. Należy zbudować model decyzyjny pozwalający ustalić, w jaki sposób należy ciąć pręty, aby zminimalizować całkowity odpad.

Zadanie 1.6.
Problem załadunku. Ładowność wózka wynosi b. Wózek może przewozić N różnych typów przedmiotów. Waga jednej sztuki przedmiotu typu $j, j = 1, \ldots, N$ wynosi w_j, natomiast jej wartość $c_j, j = 1, \ldots, N$. Należy określić ładunek rozpatrywanego środka transportowego o maksymalnej wartości.

Zadanie 1.7.
Problem transportowy. Danych jest m dostawców z zasobami $a_1, a_2, \ldots, a_m$ pewnego produktu oraz n odbiorców tego produktu, których zapotrzebowanie wynosi $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Znany jest jednostkowy koszt $c_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ transportu od i-tego dostawcy do j-tego odbiorcy. Należy określić plan przewozów między dostawcami i odbiorcami taki, aby uwzględniając dostępne zasoby zminimalizować łączne koszty transportu.

Zadanie 1.8.
Problem transportowy. Danych jest n maszyn. Każda z tych maszyn może

wytwarzać n różnych detali. Wydajność mierzona wartościowo i-tej maszyny przy wytwarzaniu j-tego detalu w ustalonym okresie czasu wynosi $w_{ij}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$. Należy dokonać przydziału każdego z detali do jednej z maszyn, na których będą one wytwarzane tak, aby łączna wydajność (mierzona wartościowo) w ustalonym okresie czasu była maksymalna.