# Metody probabilistyczne

## 1. Prawdopodobieństwo klasyczne

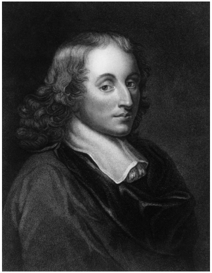
Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki PP
http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/

03.10.2017

# Rys historyczny

- Francja, XVII w.: gry hazardowe stały się bardzo popularne i robią się coraz bardziej skomplikowane
- 1654: znany hazardzista kawaler de Méré konsultuje z Blaisem Pascalem szanse wygranej w pewnych wariantach gry kośćmi
- Pascal zaczyna korespondować z Pierrem de Fermatem i wspólne formułują matematyczne podstawy prawdopodobieństwa



Blaise Pascal (1623-1662)

Pierre de Fermat (1601-1665)

# Rys historyczny

- Pomysły Pascala i Fermata rozwijane w kolejnych wiekach (m.in.: de Moivre, Bernoulli)
- W 1814 Pierre Laplace formułuje w książce *Théorie analytique des probabilités* matematyczną teorię prawdopodobieństwa
- Teoria Laplace'a znana jest obecnie pod nazwą prawdopodobieństwa klasycznego

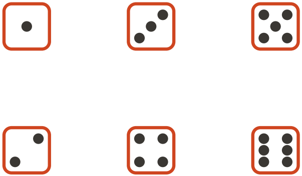
Pierre Simon de Laplace
(1749-1827)

# Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem $\omega$

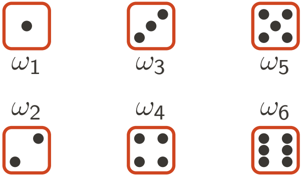
# Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem $\omega$
  - Przykład: rzut kostką



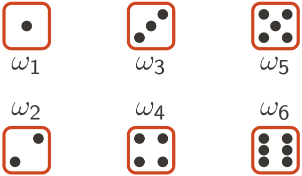
# Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem $\omega$
  - Przykład: rzut kostką



# Przestrzeń zdarzeń elementarnych

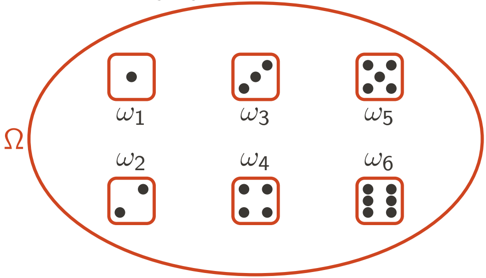
- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem $\omega$
  - Przykład: rzut kostką




- Zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych) $\Omega$ nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych

# Przestrzeń zdarzeń elementarnych

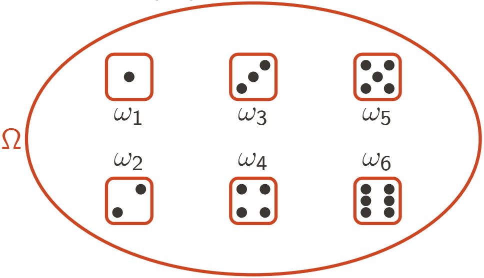
- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem $\omega$




- Zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych) $\Omega$ nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych
  - Przykład: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

# Przestrzeń zdarzeń elementarnych

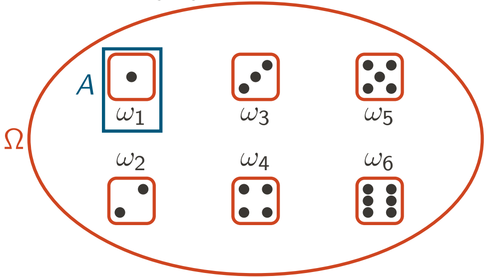
- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem $\omega$




- Zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych) $\Omega$ nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych
  - Przykład: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.
- Zdarzenia losowe to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych $\Omega$. Mówimy, że zaszło zdarzenie $A$, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$

# Przestrzeń zdarzeń elementarnych

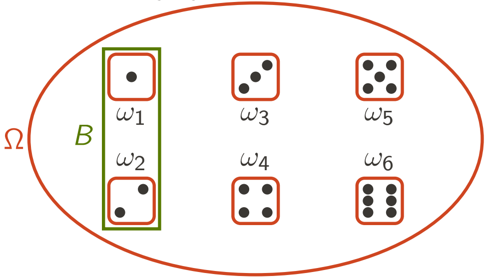
- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem $\omega$




- Zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych) $\Omega$ nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych
  - Przykład: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.
- Zdarzenia losowe to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych $\Omega$. Mówimy, że zaszło zdarzenie $A$, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$
  - Przykład: zdarzenie „wypadło jedno oczko”: $A = \{\omega_1\}$

# Przestrzeń zdarzeń elementarnych

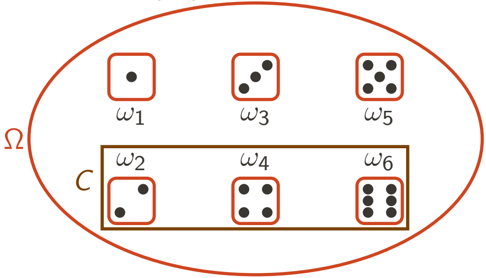
- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem $\omega$




- Zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych) $\Omega$ nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych
  - Przykład: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.
- Zdarzenia losowe to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych $\Omega$. Mówimy, że zaszło zdarzenie $A$, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$
  - Przykład: zdarzenie „wypadło jedno oczko”: $A = \{\omega_1\}$
  - Przykład: zdarzenie „wypadło co najwyżej dwa oczka”: $B = \{\omega_1, \omega_2\}$

# Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Pojedynczy wynik doświadczenia losowego nazywamy zdarzeniem elementarnym i oznaczamy symbolem $\omega$




- Zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych) $\Omega$ nazywamy przestrzenią zdarzeń elementarnych
  - Przykład: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.
- Zdarzenia losowe to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych $\Omega$. Mówimy, że zaszło zdarzenie $A$, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$
  - Przykład: zdarzenie „wypadło jedno oczko": $A = \{\omega_1\}$
  - Przykład: zdarzenie „wypadło co najwyżej dwa oczka": $B = \{\omega_1, \omega_2\}$
  - Przykład: zdarzenie „wypadła parzysta liczba oczek": $C = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$

# Prawdopodobieństwo klasyczne

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$
- Zdarzenia $A \subseteq \Omega$ to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych
- Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

# Prawdopodobieństwo klasyczne

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$
- Zdarzenia $A \subseteq \Omega$ to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych
- Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

liczba zdarzeń elementarnych w $A$

całkowita liczba zdarzeń elementarnych

# Prawdopodobieństwo klasyczne

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega$
- Zdarzenia $A \subseteq \Omega$ to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych
- Prawdopodobieństwo zdarzenia $A$:

liczba zdarzeń elementarnych w $A$

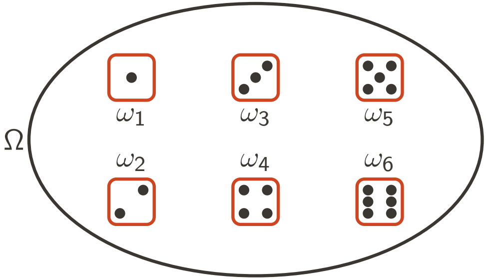
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

całkowita liczba zdarzeń elementarnych

- Zachodzi:

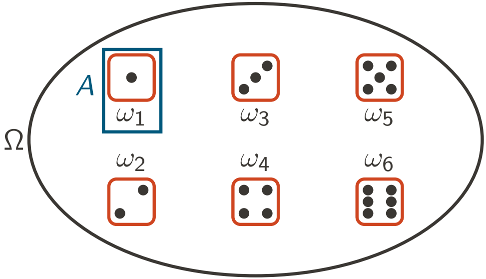
$$P(\emptyset) = 0$$
$$P(\Omega) = 1$$
$$P(A) \in [0, 1]$$

# Przykład – rzut kostką



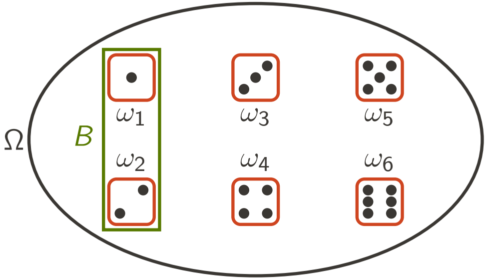

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych
  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \qquad |\Omega| = 6$

# Przykład – rzut kostką



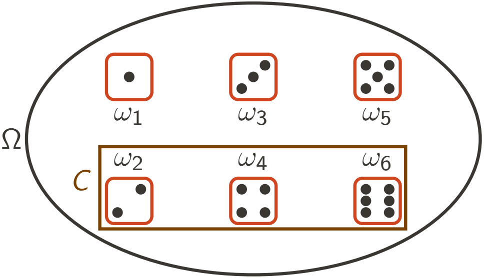

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych
  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \qquad |\Omega| = 6$
- Zdarzenie „wypadło jedno oczko":
  $A = \{\omega_1\}, \qquad |A| = 1, \qquad P(A) = \frac{1}{6}$

# Przykład – rzut kostką




- Przestrzeń zdarzeń elementarnych
  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \qquad |\Omega| = 6$
- Zdarzenie „wypadło jedno oczko”:
  $A = \{\omega_1\}, \qquad |A| = 1, \qquad P(A) = \frac{1}{6}$
- Zdarzenie „wypadło co najwyżej dwa oczka”:
  $B = \{\omega_1, \omega_2\}, \qquad |B| = 2, \qquad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

# Przykład – rzut kostką




- Przestrzeń zdarzeń elementarnych
  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \qquad |\Omega| = 6$
- Zdarzenie „wypadło jedno oczko”:
  $A = \{\omega_1\}, \qquad |A| = 1, \qquad P(A) = \frac{1}{6}$
- Zdarzenie „wypadło co najwyżej dwa oczka”:
  $B = \{\omega_1, \omega_2\}, \qquad |B| = 2, \qquad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- Zdarzenie „wypadła parzysta liczba oczek”:
  $C = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}, \qquad |C| = 3, \qquad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

# Przykład – rzut trzema monetami

O

R

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych:

- Zdarzenie „wypadły trzy orły”:

- Zdarzenie „wypadły dwa orły”:

# Przykład – rzut trzema monetami


O


R

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$

$$|\Omega| = 8$$

- Zdarzenie „wypadły trzy orły”:

- Zdarzenie „wypadły dwa orły”:

# Przykład – rzut trzema monetami

O

R

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$

$$|\Omega| = 8$$

- Zdarzenie „wypadły trzy orły":

$$A = \{OOO\}, \qquad |A| = 1, \qquad P(A) = \frac{1}{8}$$

- Zdarzenie „wypadły dwa orły":

# Przykład – rzut trzema monetami

O

R

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$$\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$$

$$|\Omega| = 8$$

- Zdarzenie „wypadły trzy orły”:

$$A = \{OOO\}, \qquad |A| = 1, \qquad P(A) = \frac{1}{8}$$

- Zdarzenie „wypadły dwa orły”:

$$B = \{OOR, ORO, ROO\}, \qquad |B| = 3, \qquad P(B) = \frac{3}{8}$$

## Przykład – rzut dwoma kośćmi

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych:

# Przykład – rzut dwoma kośćmi

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych ($|\Omega| = 36$):

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$$

# Przykład – rzut dwoma kośćmi

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych ($|\Omega| = 36$):

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$$

- Zdarzenia: „suma oczek równa się $S$"

| $S$ | Zdarzenie | Prawdopodobieństwo |
|---|---|---|
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |
| 6 | | |
| 7 | | |
| 8 | | |
| 9 | | |
| 10 | | |
| 11 | | |
| 12 | | |

# Przykład – rzut dwoma kośćmi

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych ($|\Omega| = 36$):

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$$

- Zdarzenia: „suma oczek równa się $S$"

| $S$ | Zdarzenie | Prawdopodobieństwo |
|---|---|---|
| 2 | $A_2 = \{(1,1)\}$ | |
| 3 | $A_3 = \{(1,2),(2,1)\}$ | |
| 4 | $A_4 = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ | |
| 5 | $A_5 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$ | |
| 6 | $A_6 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$ | |
| 7 | $A_7 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ | |
| 8 | $A_8 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$ | |
| 9 | $A_9 = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$ | |
| 10 | $A_{10} = \{(4,6,(5,5),(6,4)\}$ | |
| 11 | $A_{11} = \{(5,6),(6,5)\}$ | |
| 12 | $A_{12} = \{(6,6)\}$ | |

# Przykład – rzut dwoma kośćmi

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych ($|\Omega| = 36$):

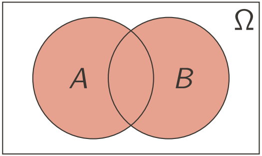
$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$$

- Zdarzenia: „suma oczek równa się $S$"

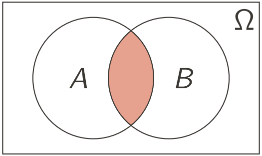
| $S$ | Zdarzenie | Prawdopodobieństwo |
|---|---|---|
| 2 | $A_2 = \{(1,1)\}$ | $P(A_2) = 1/36$ |
| 3 | $A_3 = \{(1,2),(2,1)\}$ | $P(A_3) = 2/36$ |
| 4 | $A_4 = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ | $P(A_4) = 3/36$ |
| 5 | $A_5 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$ | $P(A_5) = 4/36$ |
| 6 | $A_6 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$ | $P(A_6) = 5/36$ |
| 7 | $A_7 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$ | $P(A_7) = 6/36$ |
| 8 | $A_8 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$ | $P(A_8) = 5/36$ |
| 9 | $A_9 = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$ | $P(A_9) = 4/36$ |
| 10 | $A_{10} = \{(4,6,(5,5),(6,4)\}$ | $P(A_{10}) = 3/36$ |
| 11 | $A_{11} = \{(5,6),(6,5)\}$ | $P(A_{11}) = 2/36$ |
| 12 | $A_{12} = \{(6,6)\}$ | $P(A_{12}) = 1/36$ |

# Operacje na zdarzeniach

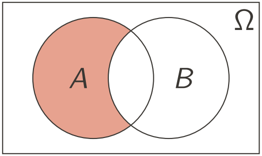
**Zdarzenia są zbiorami!**



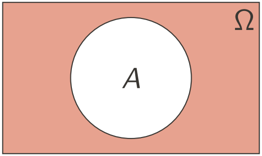

suma $A \cup B$
„zaszło $A$ lub $B$"




iloczyn $A \cap B$
„zaszło $A$ i $B$"

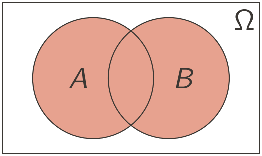



różnica $A \setminus B$
„zaszło $A$ ale nie $B$"

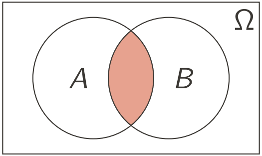



dopełnienie $A'$
„nie zaszło $A$"

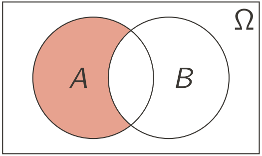
# Operacje na zdarzeniach



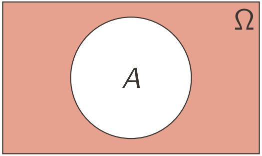

$A \cup B$




$A \cap B$



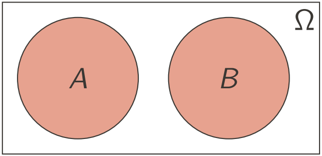

$A \setminus B$




$A'$

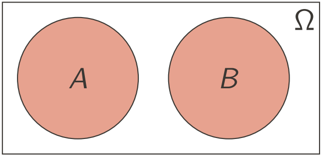
$$
\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
P(A \setminus B) &= P(A) - P(A \cap B) \\
P(A') &= 1 - P(A) \quad (\text{ponieważ } P(\Omega) = 1)
\end{aligned}
$$

# Zdarzenia rozłączne




- Jeśli $A \cap B = \emptyset$ to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

# Zdarzenia rozłączne




- Jeśli $A \cap B = \emptyset$ to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Ogólniej: jeśli $A_1, \ldots, A_n$ są parami rozłączne, $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

# Kombinatoryka: wariacje z powtórzeniami

Jeśli doświadczenie składa się z $k$ niezależnych etapów, a w każdym etapie jest $n$ możliwych wyników, to całkowita liczba możliwych wyników wynosi $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$.

Na tyle sposobów można wybrać ze zwracaniem $k$ elementów ze zbioru $n$-elementowego (kolejność elementów jest istotna)

# Kombinatoryka: wariacje z powtórzeniami

Jeśli doświadczenie składa się z $k$ niezależnych etapów, a w każdym etapie jest $n$ możliwych wyników, to całkowita liczba możliwych wyników wynosi $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$.

Na tyle sposobów można wybrać ze zwracaniem $k$ elementów ze zbioru $n$-elementowego (kolejność elementów jest istotna)

- Ile jest możliwych wyników rzutów 4 kostkami?

# Kombinatoryka: wariacje z powtórzeniami

Jeśli doświadczenie składa się z $k$ niezależnych etapów, a w każdym etapie jest $n$ możliwych wyników, to całkowita liczba możliwych wyników wynosi $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$.

Na tyle sposobów można wybrać ze zwracaniem $k$ elementów ze zbioru $n$-elementowego (kolejność elementów jest istotna)

- Ile jest możliwych wyników rzutów 4 kostkami? $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$

# Kombinatoryka: wariacje z powtórzeniami

Jeśli doświadczenie składa się z $k$ niezależnych etapów, a w każdym etapie jest $n$ możliwych wyników, to całkowita liczba możliwych wyników wynosi $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$.

Na tyle sposobów można wybrać ze zwracaniem $k$ elementów ze zbioru $n$-elementowego (kolejność elementów jest istotna)

- Ile jest możliwych wyników rzutów 4 kostkami? $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$
- Ile jest możliwych wyników rzutów 10 monetami?

# Kombinatoryka: wariacje z powtórzeniami

Jeśli doświadczenie składa się z $k$ niezależnych etapów, a w każdym etapie jest $n$ możliwych wyników, to całkowita liczba możliwych wyników wynosi $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$.

Na tyle sposobów można wybrać ze zwracaniem $k$ elementów ze zbioru $n$-elementowego (kolejność elementów jest istotna)

- Ile jest możliwych wyników rzutów 4 kostkami? $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$
- Ile jest możliwych wyników rzutów 10 monetami? $2^{10} = 1024$

# Kombinatoryka: wariacje z powtórzeniami

Jeśli doświadczenie składa się z $k$ niezależnych etapów, a w każdym etapie jest $n$ możliwych wyników, to całkowita liczba możliwych wyników wynosi $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$.

Na tyle sposobów można wybrać ze zwracaniem $k$ elementów ze zbioru $n$-elementowego (kolejność elementów jest istotna)

- Ile jest możliwych wyników rzutów 4 kostkami? $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$
- Ile jest możliwych wyników rzutów 10 monetami? $2^{10} = 1024$
- Ile jest binarnych ciągów o długości $n$?

# Kombinatoryka: wariacje z powtórzeniami

Jeśli doświadczenie składa się z $k$ niezależnych etapów, a w każdym etapie jest $n$ możliwych wyników, to całkowita liczba możliwych wyników wynosi $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$.

Na tyle sposobów można wybrać ze zwracaniem $k$ elementów ze zbioru $n$-elementowego (kolejność elementów jest istotna)

- Ile jest możliwych wyników rzutów 4 kostkami? $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$
- Ile jest możliwych wyników rzutów 10 monetami? $2^{10} = 1024$
- Ile jest binarnych ciągów o długości $n$? $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$

# Kombinatoryka: wariacje z powtórzeniami

Jeśli doświadczenie składa się z $k$ niezależnych etapów, a w każdym etapie jest $n$ możliwych wyników, to całkowita liczba możliwych wyników wynosi $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$.

Na tyle sposobów można wybrać ze zwracaniem $k$ elementów ze zbioru $n$-elementowego (kolejność elementów jest istotna)

- Ile jest możliwych wyników rzutów 4 kostkami? $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$
- Ile jest możliwych wyników rzutów 10 monetami? $2^{10} = 1024$
- Ile jest binarnych ciągów o długości $n$? $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$
- Ile 5-literowych słów można utworzyć z 26 liter łacińskich?

# Kombinatoryka: wariacje z powtórzeniami

Jeśli doświadczenie składa się z $k$ niezależnych etapów, a w każdym etapie jest $n$ możliwych wyników, to całkowita liczba możliwych wyników wynosi $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$.

Na tyle sposobów można wybrać ze zwracaniem $k$ elementów ze zbioru $n$-elementowego (kolejność elementów jest istotna)

- Ile jest możliwych wyników rzutów 4 kostkami? $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$
- Ile jest możliwych wyników rzutów 10 monetami? $2^{10} = 1024$
- Ile jest binarnych ciągów o długości $n$? $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$
- Ile 5-literowych słów można utworzyć z 26 liter łacińskich? $26^5$

# Kombinatoryka: wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów na jakie można wybrać bez zwracania $k$ elementów ze zbioru $n$-elementowego (kolejność elementów jest istotna) wynosi
$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
Jest to również liczba $k$-elementowych ciągów o wyrazach ze zbioru $n$-elementowego, w których elementy nie powtarzają się.

# Kombinatoryka: wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów na jakie można wybrać bez zwracania $k$ elementów ze zbioru $n$-elementowego (kolejność elementów jest istotna) wynosi
$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
Jest to również liczba $k$-elementowych ciągów o wyrazach ze zbioru $n$-elementowego, w których elementy nie powtarzają się.

- Na ile sposobów można wylosować (bez zwracania) 5 kart z talii 52 kart (kolejność kart jest istotna)?

# Kombinatoryka: wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów na jakie można wybrać bez zwracania $k$ elementów ze zbioru $n$-elementowego (kolejność elementów jest istotna) wynosi
$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
Jest to również liczba $k$-elementowych ciągów o wyrazach ze zbioru $n$-elementowego, w których elementy nie powtarzają się.

- Na ile sposobów można wylosować (bez zwracania) 5 kart z talii 52 kart (kolejność kart jest istotna)? $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$

# Kombinatoryka: wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów na jakie można wybrać bez zwracania $k$ elementów ze zbioru $n$-elementowego (kolejność elementów jest istotna) wynosi $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
Jest to również liczba $k$-elementowych ciągów o wyrazach ze zbioru $n$-elementowego, w których elementy nie powtarzają się.

- Na ile sposobów można wylosować (bez zwracania) 5 kart z talii 52 kart (kolejność kart jest istotna)? $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$
- Ile jest możliwych wyników rzutów 3 kośćmi, dla których na wszystkich kostkach jest inna wartość?

# Kombinatoryka: wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów na jakie można wybrać bez zwracania $k$ elementów ze zbioru $n$-elementowego (kolejność elementów jest istotna) wynosi
$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
Jest to również liczba $k$-elementowych ciągów o wyrazach ze zbioru $n$-elementowego, w których elementy nie powtarzają się.

- Na ile sposobów można wylosować (bez zwracania) 5 kart z talii 52 kart (kolejność kart jest istotna)? $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$
- Ile jest możliwych wyników rzutów 3 kośćmi, dla których na wszystkich kostkach jest inna wartość? $6 \cdot 5 \cdot 4$

# Kombinatoryka: wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów na jakie można wybrać bez zwracania $k$ elementów ze zbioru $n$-elementowego (kolejność elementów jest istotna) wynosi
$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
Jest to również liczba $k$-elementowych ciągów o wyrazach ze zbioru $n$-elementowego, w których elementy nie powtarzają się.

- Na ile sposobów można wylosować (bez zwracania) 5 kart z talii 52 kart (kolejność kart jest istotna)? $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$
- Ile jest możliwych wyników rzutów 3 kośćmi, dla których na wszystkich kostkach jest inna wartość? $6 \cdot 5 \cdot 4$
- Ile 5-literowych słów bez powtarzających się liter można utworzyć z 26 liter łacińskich?

# Kombinatoryka: wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów na jakie można wybrać bez zwracania $k$ elementów ze zbioru $n$-elementowego (kolejność elementów jest istotna) wynosi
$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.
Jest to również liczba $k$-elementowych ciągów o wyrazach ze zbioru $n$-elementowego, w których elementy nie powtarzają się.

- Na ile sposobów można wylosować (bez zwracania) 5 kart z talii 52 kart (kolejność kart jest istotna)? $52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48$
- Ile jest możliwych wyników rzutów 3 kośćmi, dla których na wszystkich kostkach jest inna wartość? $6 \cdot 5 \cdot 4$
- Ile 5-literowych słów bez powtarzających się liter można utworzyć z 26 liter łacińskich? $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$

# Kombinatoryka: permutacje

Liczba sposobów na jakie można uporządkować $n$ elementów wynosi:
$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

# Kombinatoryka: permutacje

Liczba sposobów na jakie można uporządkować $n$ elementów wynosi:
$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

- Na ile sposobów można ustawić 5 osób w kolejce?

# Kombinatoryka: permutacje

Liczba sposobów na jakie można uporządkować $n$ elementów wynosi:
$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

- Na ile sposobów można ustawić 5 osób w kolejce? $5! = 120$

# Kombinatoryka: permutacje

Liczba sposobów na jakie można uporządkować $n$ elementów wynosi:
$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

- Na ile sposobów można ustawić 5 osób w kolejce? $5! = 120$
- Ile jest możliwych przetasowań talii kart?

# Kombinatoryka: permutacje

Liczba sposobów na jakie można uporządkować $n$ elementów wynosi:
$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

- Na ile sposobów można ustawić 5 osób w kolejce? $5! = 120$
- Ile jest możliwych przetasowań talii kart? $52!$

# Kombinatoryka: kombinacje

Liczba sposobów na jakie można wybrać $k$-elementowy podzbiór (kolejność elementów nieistotna) z $n$-elementowego zbioru wynosi:
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

# Kombinatoryka: kombinacje

Liczba sposobów na jakie można wybrać $k$-elementowy podzbiór (kolejność elementów nieistotna) z $n$-elementowego zbioru wynosi:
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Na ile sposobów można wybrać spośród 5 osób 3-osobową grupę?

# Kombinatoryka: kombinacje

Liczba sposobów na jakie można wybrać $k$-elementowy podzbiór (kolejność elementów nieistotna) z $n$-elementowego zbioru wynosi:
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Na ile sposobów można wybrać spośród 5 osób 3-osobową grupę?
  $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$

# Kombinatoryka: kombinacje

Liczba sposobów na jakie można wybrać $k$-elementowy podzbiór (kolejność elementów nieistotna) z $n$-elementowego zbioru wynosi:
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Na ile sposobów można wybrać spośród 5 osób 3-osobową grupę?
  $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$
- 10 drużyn gra w systemie ligowym („każdy z każdym"). Ile odbędzie się meczy?

# Kombinatoryka: kombinacje

Liczba sposobów na jakie można wybrać $k$-elementowy podzbiór (kolejność elementów nieistotna) z $n$-elementowego zbioru wynosi:
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Na ile sposobów można wybrać spośród 5 osób 3-osobową grupę? $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$
- 10 drużyn gra w systemie ligowym („każdy z każdym"). Ile odbędzie się meczy? $\binom{10}{2} = \frac{10!}{8!2!} = 45$

# Kombinatoryka: kombinacje

Liczba sposobów na jakie można wybrać $k$-elementowy podzbiór (kolejność elementów nieistotna) z $n$-elementowego zbioru wynosi:
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Na ile sposobów można wybrać spośród 5 osób 3-osobową grupę? $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$
- 10 drużyn gra w systemie ligowym („każdy z każdym"). Ile odbędzie się meczy? $\binom{10}{2} = \frac{10!}{8!2!} = 45$
- Ile jest binarnych ciągów o długości 8 mających dokładnie 3 jedynki?

# Kombinatoryka: kombinacje

Liczba sposobów na jakie można wybrać $k$-elementowy podzbiór (kolejność elementów nieistotna) z $n$-elementowego zbioru wynosi:
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Na ile sposobów można wybrać spośród 5 osób 3-osobową grupę? $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$
- 10 drużyn gra w systemie ligowym („każdy z każdym"). Ile odbędzie się meczy? $\binom{10}{2} = \frac{10!}{8!2!} = 45$
- Ile jest binarnych ciągów o długości 8 mających dokładnie 3 jedynki? $\binom{8}{3} = \frac{8!}{5!3!} = 56$

  (wskazówka: można utożsamić ciągi binarne z podzbiorami zbioru $n$-elementowego)

# Zadanie

Losujemy 5 kart z talii. Jaka jest szansa wylosowania karety (czterech kart o tej samej wartości)?

# Zadanie

Losujemy 5 kart z talii. Jaka jest szansa wylosowania karety (czterech kart o tej samej wartości)?

$\Omega$ – zbiór wszystkich 5-elementowych pozdbiorów 52-elementowej talii.

$$|\Omega| = \binom{52}{5}$$

# Zadanie

Losujemy 5 kart z talii. Jaka jest szansa wylosowania karety (czterech kart o tej samej wartości)?

$\Omega$ – zbiór wszystkich 5-elementowych pozdbiorów 52-elementowej talii.

$$|\Omega| = \binom{52}{5}$$

Zdarzenie $A$ – „wylosowano karetę”

# Zadanie

Losujemy 5 kart z talii. Jaka jest szansa wylosowania karety (czterech kart o tej samej wartości)?

$\Omega$ – zbiór wszystkich 5-elementowych pozdbiorów 52-elementowej talii.

$$|\Omega| = \binom{52}{5}$$

Zdarzenie $A$ – „wylosowano karetę"

$$|A| = 13 \times 48$$

# Zadanie

Losujemy 5 kart z talii. Jaka jest szansa wylosowania karety (czterech kart o tej samej wartości)?

$\Omega$ – zbiór wszystkich 5-elementowych pozdbiorów 52-elementowej talii.

$$|\Omega| = \binom{52}{5}$$

Zdarzenie $A$ – „wylosowano karetę”

$$|A| = 13 \times 48$$

$$P(A) = \frac{13 \cdot 48}{\binom{52}{5}} \simeq 0.00024$$

# Zadanie

Jaka jest szansa, że w 20 rzutach monetą wypadnie dokładnie 10 orłów?

# Zadanie

Jaka jest szansa, że w 20 rzutach monetą wypadnie dokładnie 10 orłów?

$\Omega$ – zbiór wszystkich wyników rzutów 20 monetami.

$$|\Omega| = 2^{20}$$

# Zadanie

$\boxed{\text{Jaka jest szansa, że w 20 rzutach monetą wypadnie dokładnie 10 orłów?}}$

$\Omega$ – zbiór wszystkich wyników rzutów 20 monetami.

$$|\Omega| = 2^{20}$$

Zdarzenie $A$ – „wypadło dokładnie 10 orłów"

# Zadanie

$\boxed{\text{Jaka jest szansa, że w 20 rzutach monetą wypadnie dokładnie 10 orłów?}}$

$\Omega$ – zbiór wszystkich wyników rzutów 20 monetami.

$$|\Omega| = 2^{20}$$

Zdarzenie $A$ – „wypadło dokładnie 10 orłów"

$$|A| = \binom{20}{10}$$

# Zadanie

Jaka jest szansa, że w 20 rzutach monetą wypadnie dokładnie 10 orłów?

$\Omega$ – zbiór wszystkich wyników rzutów 20 monetami.

$$|\Omega| = 2^{20}$$

Zdarzenie $A$ – „wypadło dokładnie 10 orłów"

$$|A| = \binom{20}{10}$$

$$P(A) = \frac{\binom{20}{10}}{2^{20}} \simeq 0.176$$

# Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

# Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Rozumowanie kawalera de Méré:

- Szansa podwójnej jedynki (1/36) jest sześciokrotnie mniejsza niż pojedynczej jedynki (1/6)
- Aby skompensować tę różnice, trzeba więc rzucić dwoma kośćmi sześciokrotnie więcej razy niż pojedynczą kością
- Wniosek: oba powyższe zdarzenia są równo prawdopodobne

# Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Rozumowanie kawalera de Méré:

- Szansa podwójnej jedynki ($1/36$) jest sześciokrotnie mniejsza niż pojedynczej jedynki ($1/6$)
- Aby skompensować tę różnice, trzeba więc rzucić dwoma kośćmi sześciokrotnie więcej razy niż pojedynczą kością
- Wniosek: oba powyższe zdarzenia są równo prawdopodobne

Powyższe rozumowanie okazuje się jednak błędne!!!

# Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Doświadczenie 1:

# Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Doświadczenie 1:

- $\Omega$: wszystkie możliwe wyniki rzutów 4 kośćmi:
  $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$

# Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Doświadczenie 1:

- $\Omega$: wszystkie możliwe wyniki rzutów 4 kośćmi:
  $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$
- $A$: „co najmniej jedna jedynka"

# Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Doświadczenie 1:

- $\Omega$: wszystkie możliwe wyniki rzutów 4 kośćmi: $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$
- $A$: „co najmniej jedna jedynka”
- $A'$: „nie wypadła żadna jedynka”

# Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Doświadczenie 1:

- $\Omega$: wszystkie możliwe wyniki rzutów 4 kośćmi: $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$
- $A$: „co najmniej jedna jedynka"
- $A'$: „nie wypadła żadna jedynka" $|A'| = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4, \qquad P(A') = \frac{5^4}{6^4}$

# Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Doświadczenie 1:

- $\Omega$: wszystkie możliwe wyniki rzutów 4 kośćmi: $|\Omega| = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$
- $A$: „co najmniej jedna jedynka”
- $A'$: „nie wypadła żadna jedynka” $|A'| = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4, \qquad P(A') = \frac{5^4}{6^4}$
- Stąd:

$$P(A) \;=\; 1 - P(A') \;=\; 1 - \frac{5^4}{6^4} \;\simeq\; 0.5177$$

# Pytanie kawalera de Méré

Co jest bardziej prawdopodobne?

1. Otrzymanie co najmniej jednej jedynki w 4 rzutach kośćmi
2. Otrzymanie co najmniej jednej podwójnej jedynki w 24 rzutach dwoma kośćmi

Doświadczenie 2:

- $\Omega$: wszystkie możliwe wyniki 24 rzutów dwoma kośćmi: $|\Omega| = 36^{24}$
- $A$: „co najmniej jedna podwójna jedynka"
- $A'$: „nie wypadła żadna podwójna jedynka" $|A'| = 35^{24}$, $\qquad P(A') = \frac{35^{24}}{36^{24}}$
- Stąd:

$$P(A) \;=\; 1 - P(A') \;=\; 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \;\simeq\; 0.4914$$

# Kombinatoryka: zadania

**Zadanie 1**

Ile słów można utworzyć ze słowa BARBARA zmieniając kolejność liter?

# Kombinatoryka: zadania

**Zadanie 2**

Jaka jest szansa trafienia „szóstki” w totolotka? (wybieramy 6 z 49 liczb, maszyna również losuje 6 z 49 liczb i musimy trafić wszystkie)
Jaka jest szansa trafienia „piątki”? „czwórki”? „trójki”?

# Kombinatoryka: zadania

**Zadanie 3**

Paradoks urodzin: Jaka jest szansa, że w grupie 23 osób są przynajmniej dwie osoby mające urodziny tego samego dnia? (dla uproszczenia załóż, że nikt nie urodził się 29 lutego!)