Metody probabilistyczne

2. Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki PP
http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/

10.10.2017

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω
- Zdarzenia $A \subseteq \Omega$ to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω
- Zdarzenia $A \subseteq \Omega$ to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Ograniczenia definicji klasycznej:

- Każde zdarzenie elementarne ma to samo prawdopodobieństwo $\frac{1}{|\Omega|}$
  - Rzut nieuczciwą monetą lub kostką
  - Niejednoznaczność przestrzeni zdarzeń (np. rzut 2 kośćmi)

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω
- Zdarzenia $A \subseteq \Omega$ to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Ograniczenia definicji klasycznej:

- Każde zdarzenie elementarne ma to samo prawdopodobieństwo $\frac{1}{|\Omega|}$
  - Rzut nieuczciwą monetą lub kostką
  - Niejednoznaczność przestrzeni zdarzeń (np. rzut 2 kośćmi)
- Aby definicja miała sens, Ω musi być zbiorem skończonym
  - Rzucanie monetą aż do pojawienia się orła
  - Czas życia dysku twardego

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω
- Zdarzenia $A \subseteq \Omega$ to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Ograniczenia definicji klasycznej:

- Każde zdarzenie elementarne ma to samo prawdopodobieństwo $\frac{1}{|\Omega|}$
  - Rzut nieuczciwą monetą lub kostką
  - Niejednoznaczność przestrzeni zdarzeń (np. rzut 2 kośćmi)
- Aby definicja miała sens, Ω musi być zbiorem skończonym
  - Rzucanie monetą aż do pojawienia się orła
  - Czas życia dysku twardego

Potrzebna ogólniejsza definicja prawdopodobieństwa

Przestrzeń probabilistyczna

$$(\ \Omega,\ \mathcal{F},\ P\ )$$

przestrzeń zdarzeń elementarnych

σ-ciało zdarzeń

miara prawdopodobieństwa

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przykłady:

- Wynik rzutu kostką:

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przykłady:

- Wynik rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przykłady:

- Wynik rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Liczba rzutów monetą do pojawienia się orła:

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przykłady:

- Wynik rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Liczba rzutów monetą do pojawienia się orła: $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przykłady:

- Wynik rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Liczba rzutów monetą do pojawienia się orła: $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Wartość napięcia w sieci:

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przykłady:

- Wynik rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Liczba rzutów monetą do pojawienia się orła: $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Wartość napięcia w sieci: $\Omega = \mathbb{R}$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przykłady:

- Wynik rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Liczba rzutów monetą do pojawienia się orła: $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Wartość napięcia w sieci: $\Omega = \mathbb{R}$
- Czas życia dysku twardego:

Przestrzeń zdarzeń elementarnych

- Zdarzenie elementarne ω: pojedynczy wynik doświadczenia losowego
- Przestrzeń probabilistyczna Ω: zbiór wszystkich możliwych wyników (zdarzeń elementarnych)
- Zbiór Ω może być nieskończony, a nawet nieprzeliczalny

Przykłady:

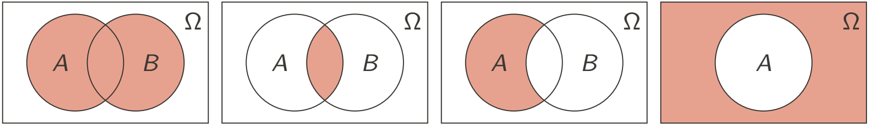
- Wynik rzutu kostką: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Liczba rzutów monetą do pojawienia się orła: $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Wartość napięcia w sieci: $\Omega = \mathbb{R}$
- Czas życia dysku twardego: $\Omega = [0, \infty)$

Zdarzenia

Zdarzenia to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω

Zdarzenia

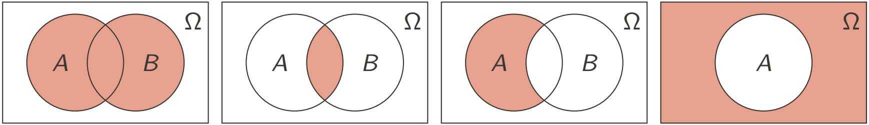
Zdarzenia to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω



suma $A \cup B$ | iloczyn $A \cap B$ | różnica $A \setminus B$ | dopełnienie A'

Zdarzenia

Zdarzenia to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω

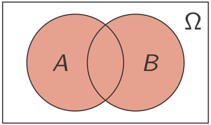


suma $A \cup B$ iloczyn $A \cap B$ różnica $A \setminus B$ dopełnienie A'

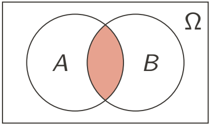
- Mówimy, że zaszło zdarzenie A, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$

Zdarzenia

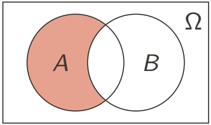
Zdarzenia to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω



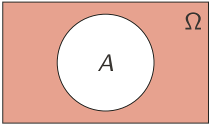
suma $A \cup B$



iloczyn $A \cap B$



różnica $A \setminus B$

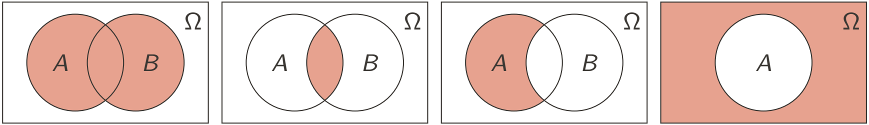


dopełnienie A'

- Mówimy, że zaszło zdarzenie A, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$
- Zdarzenie $A = \Omega$ nazywamy zdarzeniem pewnym

Zdarzenia

Zdarzenia to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω

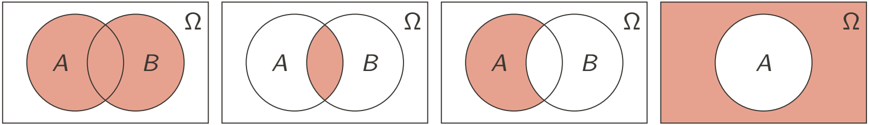


suma $A \cup B$ — iloczyn $A \cap B$ — różnica $A \setminus B$ — dopełnienie A'

- Mówimy, że zaszło zdarzenie A, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$
- Zdarzenie $A = \Omega$ nazywamy zdarzeniem pewnym
- Zdarzenie $A = \emptyset$ nazywamy zdarzeniem niemożliwym

Zdarzenia

Zdarzenia to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω

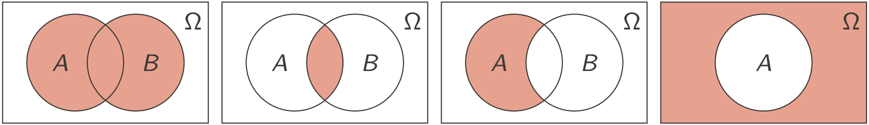


suma $A \cup B$ | iloczyn $A \cap B$ | różnica $A \setminus B$ | dopełnienie A'

- Mówimy, że zaszło zdarzenie A, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$
- Zdarzenie $A = \Omega$ nazywamy zdarzeniem pewnym
- Zdarzenie $A = \emptyset$ nazywamy zdarzeniem niemożliwym
- Zdarzenie przeciwne do A to A'

Zdarzenia

Zdarzenia to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω

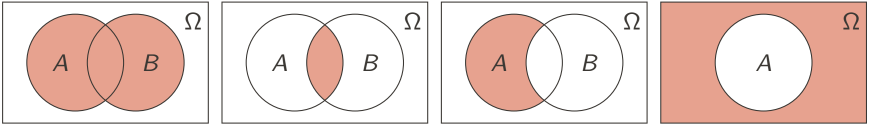


suma $A \cup B$ iloczyn $A \cap B$ różnica $A \setminus B$ dopełnienie A'

- Mówimy, że zaszło zdarzenie A, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$
- Zdarzenie $A = \Omega$ nazywamy zdarzeniem pewnym
- Zdarzenie $A = \emptyset$ nazywamy zdarzeniem niemożliwym
- Zdarzenie przeciwne do A to A'
- Zdarzenia A i B są rozłączne (wykluczające się) jeśli $A \cap B = \emptyset$

Zdarzenia

Zdarzenia to podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω



suma $A \cup B$ | iloczyn $A \cap B$ | różnica $A \setminus B$ | dopełnienie A'

- Mówimy, że zaszło zdarzenie A, jeśli wynik doświadczenia $\omega \in A$
- Zdarzenie $A = \Omega$ nazywamy zdarzeniem pewnym
- Zdarzenie $A = \emptyset$ nazywamy zdarzeniem niemożliwym
- Zdarzenie przeciwne do A to A'
- Zdarzenia A i B są rozłączne (wykluczające się) jeśli $A \cap B = \emptyset$
- Ogólniej: zdarzenia $A_1, A_2, \ldots$ są parami rozłączne jeśli $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla wszystkich $i \neq j$

Rodzina zdarzeń

Rodziną zdarzeń $\mathcal{F}$ nazywamy interesującą nas rodzinę podzbiorów Ω

Czyli $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ (2^{Ω} to zbiór potęgowy, tj. zbiór wszystkich podzbiorów Ω)

Rodzina zdarzeń

Rodziną zdarzeń $\mathcal{F}$ nazywamy interesującą nas rodzinę podzbiorów Ω
Czyli $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ (2^Ω to zbiór potęgowy, tj. zbiór wszystkich podzbiorów Ω)

Jakie własności powinna co najmniej spełniać rodzina zdarzeń $\mathcal{F}$?

Rodzina zdarzeń

Rodziną zdarzeń $\mathcal{F}$ nazywamy interesującą nas rodzinę podzbiorów Ω
Czyli $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ (2^{Ω} to zbiór potęgowy, tj. zbiór wszystkich podzbiorów Ω)

Jakie własności powinna co najmniej spełniać rodzina zdarzeń $\mathcal{F}$?

1. Zdarzenie pewne Ω powinno należeć do $\mathcal{F}$

Rodzina zdarzeń

Rodziną zdarzeń $\mathcal{F}$ nazywamy interesującą nas rodzinę podzbiorów Ω
Czyli $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ (2^{Ω} to zbiór potęgowy, tj. zbiór wszystkich podzbiorów Ω)

Jakie własności powinna co najmniej spełniać rodzina zdarzeń $\mathcal{F}$?

1. Zdarzenie pewne Ω powinno należeć do $\mathcal{F}$
2. Jeśli A należy do $\mathcal{F}$ to również należy zdarzenie „nie zaszło A"

Rodzina zdarzeń

Rodziną zdarzeń $\mathcal{F}$ nazywamy interesującą nas rodzinę podzbiorów Ω
Czyli $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ (2^{Ω} to zbiór potęgowy, tj. zbiór wszystkich podzbiorów Ω)

Jakie własności powinna co najmniej spełniać rodzina zdarzeń $\mathcal{F}$?

1. Zdarzenie pewne Ω powinno należeć do $\mathcal{F}$
2. Jeśli A należy do $\mathcal{F}$ to również należy zdarzenie „nie zaszło A"
3. Jeśli A i B należą do $\mathcal{F}$ to również należy zdarzenie „zaszło A lub B"

σ-ciało zbiorów

Rodzinę podzbiorów $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ nazywamy σ-ciałem (σ-algebrą), gdy:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Jeśli $A \in \mathcal{F}$ to $A' \in \mathcal{F}$
3. Jeśli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ to $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in \mathcal{F}$

Uwaga: własność 3 zachodzi dla dowolnych przeliczalnych sum zdarzeń.

Własności σ-ciała zdarzeń

$\boxed{\text{Fakt: Zdarzenie puste należy do } \mathcal{F}\text{: } \emptyset \in \mathcal{F}}$

Własności σ-ciała zdarzeń

$\boxed{\text{Fakt: Zdarzenie puste należy do } \mathcal{F}\text{: } \emptyset \in \mathcal{F}}$

Dowód: Ponieważ $\Omega \in \mathcal{F}$, a $\Omega' = \emptyset$, to z własności 2 mamy $\emptyset \in \mathcal{F}$.

Własności σ-ciała zdarzeń

$\boxed{\text{Fakt: Jeśli } A, B \in \mathcal{F} \text{ to również: } A \cap B \in \mathcal{F}}$

Własności σ-ciała zdarzeń

Fakt: Jeśli $A, B \in \mathcal{F}$ to również: $A \cap B \in \mathcal{F}$

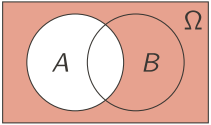
Dowód:

(a) Z własności 2 zachodzi: $A' \in \mathcal{F}$ oraz $B' \in \mathcal{F}$

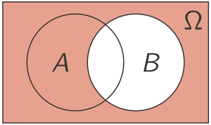
(b) Z własności 3 zachodzi: $C = A' \cup B' \in \mathcal{F}$

(c) Z własności 2 zachodzi: $C' \in \mathcal{F}$

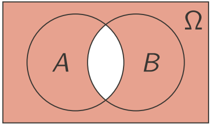
(d) Ale z prawa De Morgana* wynika, że $C' = A \cap B$



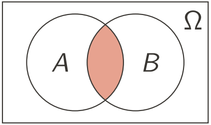
A'



B'



$C = A' \cup B'$



$C' = A \cap B$

*Prawo de Morgana: $(E \cap F)' = E' \cup F'$

Własności σ-ciała zdarzeń

Zadanie 1

Udowodnij, że jeśli $A, B \in \mathcal{F}$ to również $A \setminus B \in \mathcal{F}$

Wniosek: σ-ciało jest zamknięte ze względu na wszystkie operacje na zbiorach typu: suma, iloczyn, różnica, dopełnienie, itp.

Przykłady σ-ciał: zbiór potęgowy

Jeśli Ω jest przeliczalny, możemy wziąć $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, tzn. wszystkie podzbiory przestrzeni zdarzeń elementarnych są zdarzeniami

Przykłady σ-ciał: zbiory borelowskie

Jeśli $\Omega = \mathbb{R}$ (nieprzeliczalny), nie możemy przyjąć $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, gdyż nie da się na nim określić miary prawdopodobieństwa (zbiory niemierzalne).

Przykłady σ-ciał: zbiory borelowskie

Jeśli $\Omega = \mathbb{R}$ (nieprzeliczalny), nie możemy przyjąć $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, gdyż nie da się na nim określić miary prawdopodobieństwa (zbiory niemierzalne).

Zakładamy, że $\mathcal{F}$ musi zawierać zdarzenia przynajmniej postaci: „wynik był mniejszy od a", „wynik był pomiędzy a i b" ($a, b \in \mathbb{R}$), itp.

Czyli $\mathcal{F}$ zawiera wszystkie możliwe przedziały otwarte i zamknięte, skończone lub nie, np. $[a, b)$, (a, b), $(-\infty, a]$, (b, ∞), itp.

Przykłady σ-ciał: zbiory borelowskie

Jeśli $\Omega = \mathbb{R}$ (nieprzeliczalny), nie możemy przyjąć $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, gdyż nie da się na nim określić miary prawdopodobieństwa (zbiory niemierzalne).

Zakładamy, że $\mathcal{F}$ musi zawierać zdarzenia przynajmniej postaci: „wynik był mniejszy od a”, „wynik był pomiędzy a i b” $(a, b \in \mathbb{R})$, itp.

Czyli $\mathcal{F}$ zawiera wszystkie możliwe przedziały otwarte i zamknięte, skończone lub nie, np. $[a, b)$, (a, b), $(-\infty, a]$, (b, ∞), itp.

Z własności σ-ciała, $\mathcal{F}$ zawiera również przeliczalne sumy i iloczyny przedziałów (w tym pojedyncze punkty) .

Taką rodzinę zdarzeń nazywa się σ-ciałem zbiorów borelowskich. Rodzina ta zawiera wszystkie „praktyczne” podzbiory $\mathbb{R}$ (a nawet tak dziwne zbiory jak zbiór Cantora czy zbiór liczby wymiernych).

Biorąc iloczyny kartezjańskie podzbiorów, można tę rodzinę uogólnić na przestrzeń $\mathbb{R}^2$ (płaszczyznę), $\mathbb{R}^3$ (przestrzeń 3D), itp.

Miara prawdopodobieństwa

Aksjomaty Kołmogorowa (1933):

Prawdopodobieństwem nazywamy dowolną funkcję P o wartościach rzeczywistych zdefiniowanej na σ-ciale zdarzeń $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$, spełniającą warunki:

1. Nieujemność: $P(A) \geqslant 0$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$
2. Normalizacja: $P(\Omega) = 1$
3. Addytywność: Dla dowolnego ciągu parami rozłącznych* zdarzeń $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Andriej Kołmogorow (1903-1987)

Uwaga: symbol $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ oznacza sumę $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$

*Przypomnijmy: $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla wszystkich $i \neq j$

Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest zerem: $P(\emptyset) = 0$

Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest zerem: $P(\emptyset) = 0$

Dowód: Bierzemy $A_1 = A_2 = \ldots = \emptyset$. Wtedy $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$.

Z własności 3 mamy $P(\emptyset) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset)$, co jest tylko możliwe gdy $P(\emptyset) = 0$.

Własności prawdopodobieństwa

Fakt (skończona addytywność): Dla dowolnych rozłącznych zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$ mamy $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

Własności prawdopodobieństwa

Fakt (skończona addytywność): Dla dowolnych rozłącznych zdarzeń $A_1, \ldots, A_n$ mamy $P\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$

Dowód: Bierzemy nieskończony ciąg zdarzeń $A_1, A_2, \ldots$, w którym $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \emptyset$.

Wszystkie zdarzenia są rozłączne, bo $A_i \cap \emptyset = \emptyset$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Dodatkowo $\bigcup_{i=1}^\infty A_i = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

Mamy więc:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i),$$

gdzie w $(*)$ skorzystaliśmy z $P(\emptyset) = 0$.

Własności prawdopodobieństwa

Fakt: $P(A') = 1 - P(A)$

Własności prawdopodobieństwa

$\boxed{\text{Fakt: } P(A') = 1 - P(A)}$

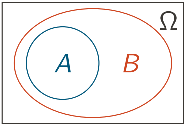
Dowód: Ponieważ $A \cup A' = \Omega$, oraz A i A' są rozłączne:

$$P(\Omega) = P(A) + P(A') = 1.$$

Czyli $P(A) = 1 - P(A')$.

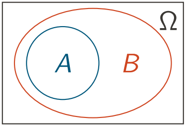
Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Jeśli $A \subseteq B$ to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
Tym samym zachodzi też $P(B) \geqslant P(A)$.



Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Jeśli $A \subseteq B$ to $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
Tym samym zachodzi też $P(B) \geqslant P(A)$.



Dowód: Można zapisać B jako rozłączną sumę $B = A \cup (B \setminus A)$.

Tym samym $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$, z czego wynikają oba stwierdzenia.

Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Dla dowolnych A i B zachodzi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

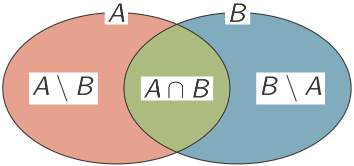
Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Dla dowolnych A i B zachodzi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dowód: Dzielimy zbiory A, B i $A \cup B$ na rozłączne części:

$$\begin{aligned} A &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \\ B &= (B \setminus A) \cup (A \cap B) \\ A \cup B &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$

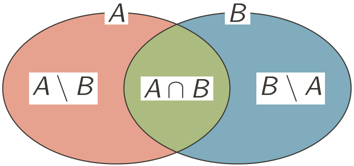


Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Dla dowolnych A i B zachodzi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dowód: Dzielimy zbiory A, B i $A \cup B$ na rozłączne części:



$$\begin{aligned} A &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \\ B &= (B \setminus A) \cup (A \cap B) \\ A \cup B &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$

Z addytywności (aksjomat 3):

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \setminus B) + P(A \cap B) \\ P(B) &= P(B \setminus A) + P(A \cap B) \\ P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(A \cap B) \cup P(B \setminus A) \end{aligned}$$

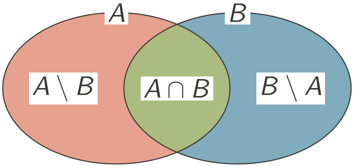
Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Dla dowolnych A i B zachodzi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Dowód: Dzielimy zbiory A, B i $A \cup B$ na rozłączne części:

$$\begin{aligned} A &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \\ B &= (B \setminus A) \cup (A \cap B) \\ A \cup B &= (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \end{aligned}$$



Z addytywności (aksjomat 3):

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \setminus B) + P(A \cap B) \\ P(B) &= P(B \setminus A) + P(A \cap B) \\ P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(A \cap B) \cup P(B \setminus A) \end{aligned}$$

Podstawiając pierwsze i drugie równanie do trzeciego kończymy dowód.

Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Dla dowolnych A i B zachodzi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Wniosek: Dla dowolnych A i B mamy:

$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$$

Własności prawdopodobieństwa

Fakt: Dla dowolnych A i B zachodzi:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Wniosek: Dla dowolnych A i B mamy:

$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$$

Zadanie 2

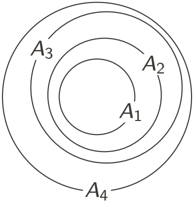
Pokaż, że dla dowolnych $A_1, \ldots, A_n$ mamy:

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \leqslant P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

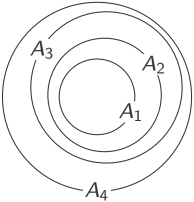
Własności prawdopodobieństwa

Ciąg zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nazywamy wstępującym, jeśli:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$



Własności prawdopodobieństwa



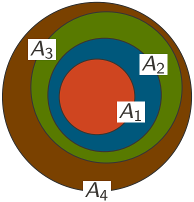
Ciąg zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nazywamy wstępującym, jeśli:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$

Fakt (o ciągłości): Jeśli $A_1, A_2, \ldots$ jest wstępujący i $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ to:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Własności prawdopodobieństwa



Ciąg zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nazywamy wstępującym, jeśli:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$

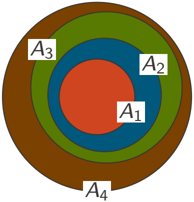
Fakt (o ciągłości): Jeśli $A_1, A_2, \ldots$ jest wstępujący i $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ to:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Dowód: Definiujemy rozłączne zdarzenia:

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2$, $B_4 = A_4 \setminus A_3, \ldots$

Własności prawdopodobieństwa



Ciąg zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nazywamy wstępującym, jeśli:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$

Fakt (o ciągłości): Jeśli $A_1, A_2, \ldots$ jest wstępujący i $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ to:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Dowód: Definiujemy rozłączne zdarzenia:

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2$, $B_4 = A_4 \setminus A_3, \ldots$

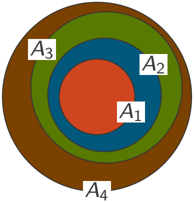
Można zapisać A_n jako rozłączną sumę: $A_n = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$

Podobnie, $A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots$

Własności prawdopodobieństwa

Ciąg zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nazywamy wstępującym, jeśli:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$



Fakt (o ciągłości): Jeśli $A_1, A_2, \ldots$ jest wstępujący i $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ to:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Dowód: Definiujemy rozłączne zdarzenia:

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2$, $B_4 = A_4 \setminus A_3, \ldots$

Można zapisać A_n jako rozłączną sumę: $A_n = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$

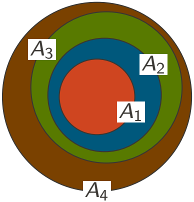
Podobnie, $A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots$

$$P(A) \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$$

Własności prawdopodobieństwa

Ciąg zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nazywamy wstępującym, jeśli:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$



Fakt (o ciągłości): Jeśli $A_1, A_2, \ldots$ jest wstępujący i $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ to:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Dowód: Definiujemy rozłączne zdarzenia:

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2$, $B_4 = A_4 \setminus A_3, \ldots$

Można zapisać A_n jako rozłączną sumę: $A_n = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$

Podobnie, $A = B_1 \cup B_2 \cup \ldots$

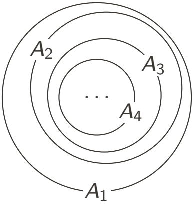
$$P(A) \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$$

$$\overset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} P(B_1 \cup \ldots \cup B_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Własności prawdopodobieństwa

Ciąg zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nazywamy zstępującym, jeśli:

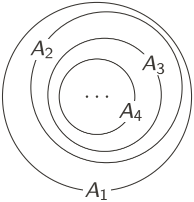
$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$



Własności prawdopodobieństwa

Ciąg zdarzeń $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nazywamy zstępującym, jeśli:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$



Zadanie 3

Pokaż, że jeśli $A_1, A_2, \ldots$ jest zstępujący i $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ to:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

Prawdopodobieństwo klasyczne spełnia aksjomaty Kołmogorowa

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Prawdopodobieństwo klasyczne spełnia aksjomaty Kołmogorowa

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Własność 1. Oczywista

Prawdopodobieństwo klasyczne spełnia aksjomaty Kołmogorowa

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Własność 1. Oczywista

Własność 2. $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$

Prawdopodobieństwo klasyczne spełnia aksjomaty Kołmogorowa

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Własność 1. Oczywista

Własność 2. $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$

Własność 3. Ponieważ Ω jest skończony, rozważamy tylko skończone ciągi. Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ – rozłączne, to:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| \; = \; |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|.$$

Więc:

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \; = \; \frac{\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|}{|\Omega|} \; = \; \sum_{i=1}^{n} \frac{|A_i|}{|\Omega|} \; = \; \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Prawdopodobieństwo na przestrzeni przeliczalnej

Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ będzie zbiorem przeliczalnym i $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$.

Każdemu ω_i przypisujemy liczbę rzeczywistą $p_i \geqslant 0$, taką, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subseteq \Omega$ definiujemy jako sumę liczb p_i po wszystkich $\omega_i \in A$:

$$P(A) \; = \; \sum_{i \,:\, \omega_i \in A} p_i ,$$

Tym samym $p_i = P(\{\omega_i\})$ jest prawdopodobieństwem zdarzenia elementarnego ω_i.

Oczywiście, zachodzi to również dla skończonego zbioru Ω.

Prawdopodobieństwo na przestrzeni przeliczalnej

Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ będzie zbiorem przeliczalnym i $\mathcal{F} = 2^\Omega$.

Każdemu ω_i przypisujemy liczbę rzeczywistą $p_i \geqslant 0$, taką, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia $A \subseteq \Omega$ definiujemy jako sumę liczb p_i po wszystkich $\omega_i \in A$:

$$P(A) \ = \ \sum_{i\,:\,\omega_i \in A} p_i,$$

Tym samym $p_i = P(\{\omega_i\})$ jest prawdopodobieństwem zdarzenia elementarnego ω_i.

Oczywiście, zachodzi to również dla skończonego zbioru Ω.

Zadanie 4

Pokaż, że to prawdopodobieństwo spełnia aksjomaty Kołmogorowa

Przykład: rzut dwoma kośćmi

Interesuje nas wyłącznie sumaryczny wynik na obu kościach

Przykład: rzut dwoma kośćmi

Interesuje nas wyłącznie sumaryczny wynik na obu kościach

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{12}\}$:

Przykład: rzut dwoma kośćmi

Interesuje nas wyłącznie sumaryczny wynik na obu kościach

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{12}\}$:
- Prawdopodobieństwa zdarzeń elementarnych:

ω_i	p_i	ω_i	p_i	ω_i	p_i
ω_2	$^1/_{36}$	ω_6	$^5/_{36}$	ω_{10}	$^3/_{36}$
ω_3	$^2/_{36}$	ω_7	$^6/_{36}$	ω_{11}	$^2/_{36}$
ω_4	$^3/_{36}$	ω_8	$^5/_{36}$	ω_{12}	$^1/_{36}$
ω_5	$^4/_{36}$	ω_9	$^4/_{36}$		

Przykład: rzut dwoma kośćmi

Interesuje nas wyłącznie sumaryczny wynik na obu kościach

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{12}\}$:
- Prawdopodobieństwa zdarzeń elementarnych:

ω_i	p_i	ω_i	p_i	ω_i	p_i
ω_2	$^1/_{36}$	ω_6	$^5/_{36}$	ω_{10}	$^3/_{36}$
ω_3	$^2/_{36}$	ω_7	$^6/_{36}$	ω_{11}	$^2/_{36}$
ω_4	$^3/_{36}$	ω_8	$^5/_{36}$	ω_{12}	$^1/_{36}$
ω_5	$^4/_{36}$	ω_9	$^4/_{36}$		

- Prawdopodobieństwo zdarzeń:
  - „Wypadła siódemka”:
    $A = \{\omega_7\}$, $P(A) = \frac{6}{36}$
  - „Wypadła co najmniej dziesiątka”:
    $A = \{\omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{12}\}$, $P(A) = \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$

Przykład: rzucamy monetą aż do wyrzucenia orła

Interesuje nas wyłącznie liczba rzutów

Przykład: rzucamy monetą aż do wyrzucenia orła

Interesuje nas wyłącznie liczba rzutów

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$
  (gdzie ω_i oznacza „orzeł wypadł w *i*-tym rzucie")

Przykład: rzucamy monetą aż do wyrzucenia orła

Interesuje nas wyłącznie liczba rzutów

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$
  (gdzie ω_i oznacza „orzeł wypadł w *i*-tym rzucie")
- Prawdopodobieństwo zdarzenia elementarnego ω_i:

Przykład: rzucamy monetą aż do wyrzucenia orła

Interesuje nas wyłącznie liczba rzutów

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ (gdzie ω_i oznacza „orzeł wypadł w i-tym rzucie")
- Prawdopodobieństwo zdarzenia elementarnego ω_i: $p_i = \frac{1}{2^i}$

Przykład: rzucamy monetą aż do wyrzucenia orła

Interesuje nas wyłącznie liczba rzutów

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ (gdzie ω_i oznacza „orzeł wypadł w i-tym rzucie")
- Prawdopodobieństwo zdarzenia elementarnego ω_i: $p_i = \frac{1}{2^i}$
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A „więcej niż 5 rzutów":

Przykład: rzucamy monetą aż do wyrzucenia orła

Interesuje nas wyłącznie liczba rzutów

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ (gdzie ω_i oznacza „orzeł wypadł w i-tym rzucie")
- Prawdopodobieństwo zdarzenia elementarnego ω_i: $p_i = \frac{1}{2^i}$
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A „więcej niż 5 rzutów":

$$\begin{aligned} A &= \{\omega_6, \omega_7, \ldots\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}' \\ P(A) &= 1 - \sum_{i=1}^{5} p_i = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{1}{32} \end{aligned}$$

Przykład: rzucamy monetą aż do wyrzucenia orła

Interesuje nas wyłącznie liczba rzutów

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ (gdzie ω_i oznacza „orzeł wypadł w i-tym rzucie")
- Prawdopodobieństwo zdarzenia elementarnego ω_i: $p_i = \frac{1}{2^i}$
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A „więcej niż 5 rzutów":

$$
\begin{aligned}
A &= \{\omega_6, \omega_7, \ldots\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}' \\
P(A) &= 1 - \sum_{i=1}^{5} p_i = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{1}{32}
\end{aligned}
$$

- Prawdopodobieństwo zdarzenia B „parzysta liczba rzutów":

Przykład: rzucamy monetą aż do wyrzucenia orła

Interesuje nas wyłącznie liczba rzutów

- Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ (gdzie ω_i oznacza „orzeł wypadł w i-tym rzucie")
- Prawdopodobieństwo zdarzenia elementarnego ω_i: $p_i = \frac{1}{2^i}$
- Prawdopodobieństwo zdarzenia A „więcej niż 5 rzutów":

$$\begin{aligned} A &= \{\omega_6, \omega_7, \ldots\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}' \\ P(A) &= 1 - \sum_{i=1}^{5} p_i = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{1}{32} \end{aligned}$$

- Prawdopodobieństwo zdarzenia B „parzysta liczba rzutów":

$$\begin{aligned} B &= \{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \ldots\} \\ P(B) &= \sum_{i=1}^{\infty} p_{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo geometryczne

Przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
($\mathbb{R}^1$ – prosta, $\mathbb{R}^2$ – płaszczyzna, $\mathbb{R}^3$ – przestrzeń 3D, itp.)

Rodzina zdarzeń $\mathcal{F}$ – σ-algebra zbiorów borelowskich na $\mathbb{R}^n$.

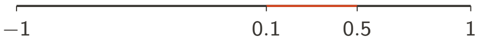
Prawdopodobieństwo zdarzenia A:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|},$$

gdzie przez $|A|$ oznaczamy długość ($n = 1$), pole powierzchni ($n = 2$), objętość ($n = 3$), itp.

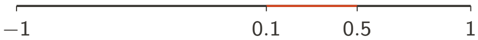
Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Wybieramy losowo punkt z odcinka $[-1, 1]$. Jaka jest szansa, że punkt znajdzie się w przedziale $[0.1, 0.5]$?



Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Wybieramy losowo punkt z odcinka $[-1,1]$. Jaka jest szansa, że punkt znajdzie się w przedziale $[0.1, 0.5]$?



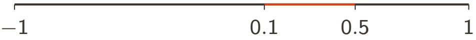
Odpowiedź:

$\Omega = [-1,1]$, $A = [0.1, 0.5]$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{0.4}{2} = 0.2$$

Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Wybieramy losowo punkt z odcinka $[-1, 1]$. Jaka jest szansa, że punkt znajdzie się w przedziale $[0.1, 0.5]$?

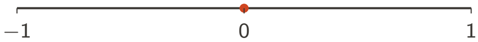


Odpowiedź:

$\Omega = [-1, 1]$, $A = [0.1, 0.5]$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{0.4}{2} = 0.2$$

Jakie jest prawdopodobieństwo, że trafimy w punkt zero?



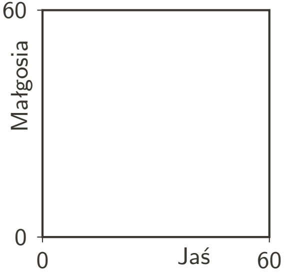
$A = \{0\}, \quad P(A) = \frac{0}{2} = 0$

Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Jaś i Małgosia umówili na randkę. Pierwsza z osób, która przyjdzie czeka na drugą tylko 20 minut. Jaka jest szansa, że się spotkają, zakładając, że przybędą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00?

Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Jaś i Małgosia umówili na randkę. Pierwsza z osób, która przyjdzie czeka na drugą tylko 20 minut. Jaka jest szansa, że się spotkają, zakładając, że przybędą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00?

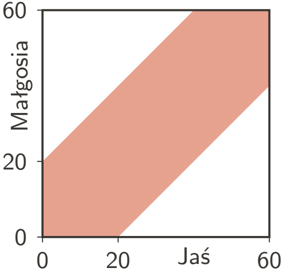


Oznaczmy przez $x, y \in [0, 60]$ czas przybycia (w min) na spotkanie Jasia i Małgosi licząc od 10:00.

$\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$

Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Jaś i Małgosia umówili na randkę. Pierwsza z osób, która przyjdzie czeka na drugą tylko 20 minut. Jaka jest szansa, że się spotkają, zakładając, że przybędą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00?



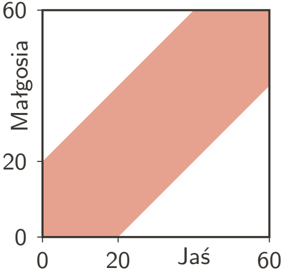
Oznaczmy przez $x, y \in [0, 60]$ czas przybycia (w min) na spotkanie Jasia i Małgosi licząc od 10:00.

$\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$

$A = \{(x, y) \in \Omega \colon |x - y| \leqslant 20\}$ (kolorowy obszar)

Prawdopodobieństwo geometryczne: przykład

Jaś i Małgosia umówili na randkę. Pierwsza z osób, która przyjdzie czeka na drugą tylko 20 minut. Jaka jest szansa, że się spotkają, zakładając, że przybędą na spotkanie w losowym czasie między 10:00 a 11:00?



Oznaczmy przez $x, y \in [0, 60]$ czas przybycia (w min) na spotkanie Jasia i Małgosi licząc od 10:00.

$\Omega = [0, 60] \times [0, 60]$

$A = \{(x, y) \in \Omega \colon |x - y| \leqslant 20\}$ (kolorowy obszar)

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{|A'|}{|\Omega|} = 1 - \frac{40 \times 40}{60 \times 60} = \frac{5}{9}.$$

Prawdopodobieństwo geometryczne spełnia aksjomaty Kołmogorowa

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Prawdopodobieństwo geometryczne spełnia aksjomaty Kołmogorowa

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Własność 1. Oczywista

Prawdopodobieństwo geometryczne spełnia aksjomaty Kołmogorowa

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Własność 1. Oczywista

Własność 2. $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$

Prawdopodobieństwo geometryczne spełnia aksjomaty Kołmogorowa

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Własność 1. Oczywista

Własność 2. $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$

Własność 3. Jeśli $A_1, A_2, \ldots$ – rozłączne, to:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots\right| \ = \ |A_1| + |A_2| + \ldots$$

(długości/pola/objętości rozłącznych podzbiorów sumują się)
Więc:

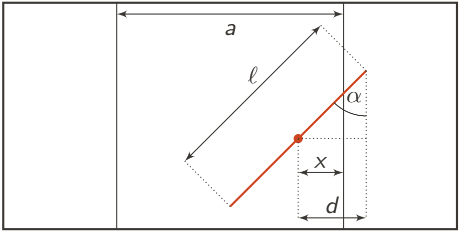
$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \ = \ \frac{|\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|}{|\Omega|} \ = \ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|A_i|}{|\Omega|} \ = \ \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Prawdopodobieństwo geometryczne: igła Buffona

Igłę o długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \geqslant \ell$. Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?

Prawdopodobieństwo geometryczne: igła Buffona

Igłę o długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \geqslant \ell$. Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?



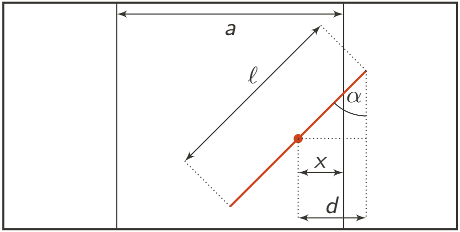
Zdarzenie elementarne to para (x, α):

x – odległość środka igły od najbliższej krawędzi, $x \in [0, a/2]$

α – kąt (ostry) igły z krawędzią, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Prawdopodobieństwo geometryczne: igła Buffona

Igłę o długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \geqslant \ell$. Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?



Zdarzenie elementarne to para (x, α):

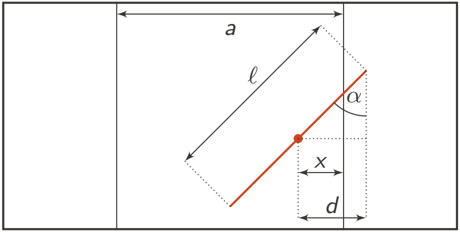
x – odległość środka igły od najbliższej krawędzi, $x \in [0, a/2]$

α – kąt (ostry) igły z krawędzią, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Omega = [0, a/2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, $|\Omega| = \frac{a\pi}{4}$

Prawdopodobieństwo geometryczne: igła Buffona

Igłę o długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \geqslant \ell$. Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?



Zdarzenie elementarne to para (x, α):

x – odległość środka igły od najbliższej krawędzi, $x \in [0, a/2]$

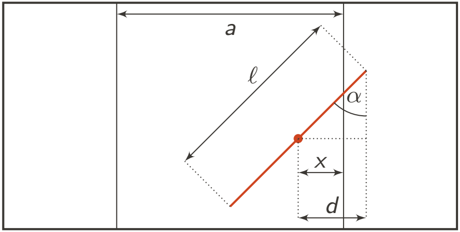
α – kąt (ostry) igły z krawędzią, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Omega = [0, a/2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, $|\Omega| = \frac{a\pi}{4}$

Igła przetnie krawędź, jeśli $x \leqslant d = \frac{\ell}{2} \sin \alpha$ (zdarzenie A)

Prawdopodobieństwo geometryczne: igła Buffona

Igłę o długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \geqslant \ell$. Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?



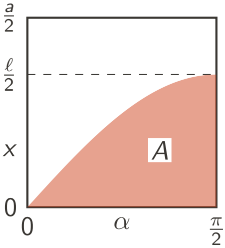
Zdarzenie elementarne to para (x, α):

x – odległość środka igły od najbliższej krawędzi, $x \in [0, a/2]$

α – kąt (ostry) igły z krawędzią, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

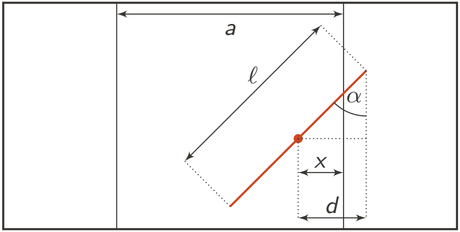
$\Omega = [0, a/2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, $|\Omega| = \frac{a\pi}{4}$

Igła przetnie krawędź, jeśli $x \leqslant d = \frac{\ell}{2} \sin \alpha$ (zdarzenie A)



Prawdopodobieństwo geometryczne: igła Buffona

Igłę o długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \geqslant \ell$. Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?



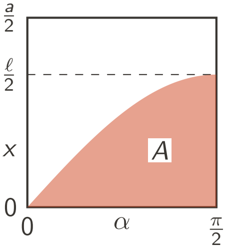
Zdarzenie elementarne to para (x, α):

x – odległość środka igły od najbliższej krawędzi, $x \in [0, a/2]$

α – kąt (ostry) igły z krawędzią, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Omega = [0, a/2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, $|\Omega| = \frac{a\pi}{4}$

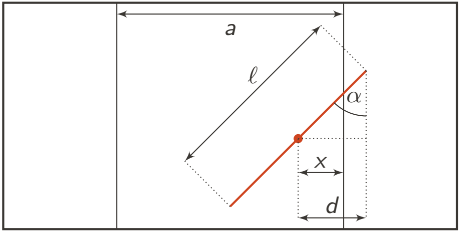
Igła przetnie krawędź, jeśli $x \leqslant d = \frac{\ell}{2} \sin\alpha$ (zdarzenie A)



$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{a\pi}\frac{\ell}{2}\underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin\alpha \, \mathrm{d}\alpha}_{=1} = \frac{2\ell}{a\pi}$$

Prawdopodobieństwo geometryczne: igła Buffona

Igłę o długości ℓ rzucono na podłogę z desek o szerokości $a \geqslant \ell$. Jaka jest szansa, że igła przetnie krawędź deski?



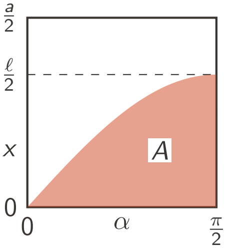
Zdarzenie elementarne to para (x, α):

x – odległość środka igły od najbliższej krawędzi, $x \in [0, a/2]$

α – kąt (ostry) igły z krawędzią, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\Omega = [0, a/2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$, $|\Omega| = \frac{a\pi}{4}$

Igła przetnie krawędź, jeśli $x \leqslant d = \frac{\ell}{2} \sin\alpha$ (zdarzenie A)



$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{4}{a\pi}\frac{\ell}{2}\underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin\alpha \, \mathrm{d}\alpha}_{=1} = \frac{2\ell}{a\pi}$$

Jeśli $\ell = \frac{a}{2}$, $P(A) = \frac{1}{\pi}$. Może posłużyć do eksperymentalnego wyznaczenia liczby π!

Prawdopodobieństwo geometryczne: paradoks Bertranda

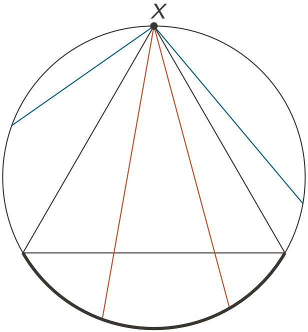
Na okręgu o promieniu 1 wybrano losowo cięciwę. Jaka jest szansa, że będzie ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg?

Prawdopodobieństwo geometryczne: paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu 1 wybrano losowo cięciwę. Jaka jest szansa, że będzie ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg?

A – zdarzenie „cięciwa jest dłuższa od boku trójkąta"

Cięciwy z A oznaczona na czerwono, spoza A na niebiesko



Rozważmy cięciwy rozpoczynające się w X.

Zdarzenia elementarne: drugi koniec cięciwy określa kąt na okręgu w $[0, 2\pi]$.

$\Omega = [0, 2\pi)$

Cięciwy z A odpowiadają pogrubionemu łukowi: $A = (\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi)$

$$P(A) = \frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi} = \frac{1}{3}$$

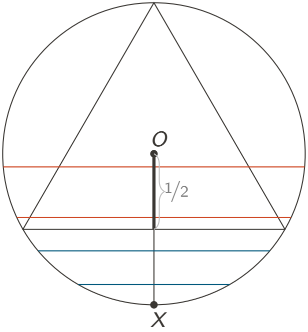
To prawdopodobieństwo nie zależy od wyboru punktu X.

Prawdopodobieństwo geometryczne: paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu 1 wybrano losowo cięciwę. Jaka jest szansa, że będzie ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg?

A – zdarzenie „cięciwa jest dłuższa od boku trójkąta"

Cięciwy z A oznaczona na czerwono, spoza A na niebiesko



Rozważmy cięciwy przecinające promień OX pod kątem prostym.

Zdarzenia elementarne: położenie cięciwy określa odległość od środka w $[0, 1]$.

$\Omega = [0, 1]$

Cięciwy z A odpowiadają pogrubionemu odcinkowi: $A = [0, \frac{1}{2}]$

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

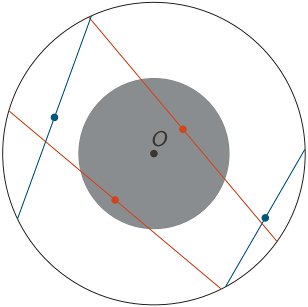
To prawdopodobieństwo nie zależy od wyboru promienia OX.

Prawdopodobieństwo geometryczne: paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu 1 wybrano losowo cięciwę. Jaka jest szansa, że będzie ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg?

A – zdarzenie „cięciwa jest dłuższa od boku trójkąta"

Cięciwy z A oznaczona na czerwono, spoza A na niebiesko



Każda cięciwa jest jednoznacznie zdefiniowana przez położenie jej środka.

Zdarzenia elementarne: punkty wewnątrz koła.

$\Omega = K(O, 1)$ (koło o środku O i promieniu 1)

Cięciwy z A to punkty w szarym kole: $A = K(O, \frac{1}{2})$

$$P(A) = \frac{\frac{1}{4}\pi}{\pi} = \frac{1}{4}$$

Prawdopodobieństwo geometryczne: paradoks Bertranda

Na okręgu o promieniu 1 wybrano losowo cięciwę. Jaka jest szansa, że będzie ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg?

Skąd ten paradoks?

W każdym przypadku użyliśmy innego modelu probabilistycznego dotyczącego innego doświadczenia losowego:

1. $\Omega = [0, 2\pi)$ (kąt)
2. $\Omega = [0, 1]$ (odległość)
3. $\Omega = K(O, 1)$ (punkt)

Interpretacja prawdopodobieństwa

Aksjomaty Kołmogorowa określają własności jakie spełnia miara prawdopodobieństwa, ale nic nie mówią skąd tą miarę wziąć?

Jaka jest interpretacja wartości prawdopodobieństwa?

Interpretacja prawdopodobieństwa

Aksjomaty Kołmogorowa określają własności jakie spełnia miara prawdopodobieństwa, ale nic nie mówią skąd tą miarę wziąć?

Jaka jest interpretacja wartości prawdopodobieństwa?

- Klasyczna (Laplace'a): wszystkie zdarzenia równo prawdopodobne ✗
- Częstościowa: prawdopodobieństwo jako granica częstości ✓
- Subiektywna: prawdopodobieństwa jako miara przekonań ✓

Interpretacja częstościowa

Dotyczy powtarzalnych doświadczeń losowych.

Powtórzmy N razy doświadczenie losowe.

Dla dowolnego zdarzenia A, niech N_A oznacza liczbę doświadczeń w których A zaszło.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest graniczną wartością częstości:

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}.$$