Metody probabilistyczne

4. Niezależność

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki PP
http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/

24.10.2017

Zdarzenia niezależne

Definicja

Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi, gdy:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Oznaczenie: $A \perp B$

Zdarzenia niezależne

Definicja

Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi, gdy:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Oznaczenie: $A \perp B$

Uwaga: Jeśli $P(B) > 0$ to

$$P(A \,|\, B) \;=\; \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \;=\; \frac{P(A)P(B)}{P(B)} \;=\; P(A)$$

Podobnie, jeśli $P(A) > 0$, to $P(B|A) = P(B)$.

Czyli zajście jednego ze zdarzeń nie ma wpływu na prawdopodobieństwo zajścia drugiego ze zdarzeń.

Relacja niezależności jest symetryczna.

Zdarzenia niezależne – przykłady

Zdarzenia niezależne – przykłady

- Rzut dwoma monetami: $\Omega = \{OO, OR, RO, RR\}$
  A_1 – „orzeł na pierwszej monecie": $A_1 = \{OO, OR\}$, $P(A_1) = \frac{1}{2}$

Zdarzenia niezależne – przykłady

- Rzut dwoma monetami: $\Omega = \{OO, OR, RO, RR\}$

  A_1 – „orzeł na pierwszej monecie”: $A_1 = \{OO, OR\}$, $P(A_1) = \frac{1}{2}$

  A_2 – „orzeł na drugiej monecie”: $A_2 = \{OO, RO\}$, $P(A_2) = \frac{1}{2}$

Zdarzenia niezależne – przykłady

- Rzut dwoma monetami: $\Omega = \{OO, OR, RO, RR\}$

  A_1 – „orzeł na pierwszej monecie": $A_1 = \{OO, OR\}$, $P(A_1) = \frac{1}{2}$

  A_2 – „orzeł na drugiej monecie": $A_2 = \{OO, RO\}$, $P(A_2) = \frac{1}{2}$

  $A_1 \cap A_2 = \{OO\}$, $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2) \quad \Rightarrow A_1 \perp A_2$.

  Podobnie można pokazać, że dowolny wynik w pierwszym rzucie jest niezależny od dowolnego wyniku w drugim rzucie.

Zdarzenia niezależne – przykłady

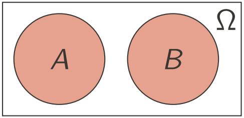
- Rzut dwoma monetami: $\Omega = \{OO, OR, RO, RR\}$
  A_1 – „orzeł na pierwszej monecie": $A_1 = \{OO, OR\}$, $P(A_1) = \frac{1}{2}$
  A_2 – „orzeł na drugiej monecie": $A_2 = \{OO, RO\}$, $P(A_2) = \frac{1}{2}$
  $A_1 \cap A_2 = \{OO\}$, $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{4} = P(A_1)P(A_2) \quad \Rightarrow A_1 \perp A_2$.
  Podobnie można pokazać, że dowolny wynik w pierwszym rzucie jest niezależny od dowolnego wyniku w drugim rzucie.
- Rzut dwoma kostkami

Zadanie 1

Pokaż, że dowolne zdarzenie na pierwszej kostce jest niezależne od dowolnego zdarzenia na drugiej kostce

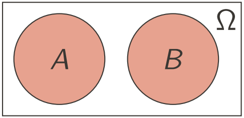
Zdarzenia niezależne – przykłady

Czy zdarzenia rozłączne mogą być niezależne?



Zdarzenia niezależne – przykłady

Czy zdarzenia rozłączne mogą być niezależne?

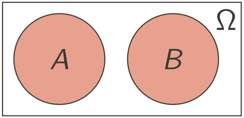


Odpowiedź: Aby zaszło $A \perp B$ przy $A \cap B = \emptyset$ musimy mieć:

$$P(A)P(B) \;=\; P(A \cap B) \;=\; P(\emptyset) \;=\; 0$$

Zdarzenia niezależne – przykłady

Czy zdarzenia rozłączne mogą być niezależne?



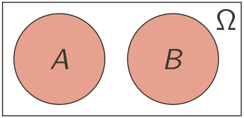
Odpowiedź: Aby zaszło $A \perp B$ przy $A \cap B = \emptyset$ musimy mieć:

$$P(A)P(B) \;=\; P(A \cap B) \;=\; P(\emptyset) \;=\; 0$$

Czyli tylko wtedy, gdy $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$

Zdarzenia niezależne – przykłady

Czy zdarzenia rozłączne mogą być niezależne?



Odpowiedź: Aby zaszło $A \perp B$ przy $A \cap B = \emptyset$ musimy mieć:

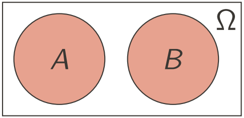
$$P(A)P(B) = P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$$

Czyli tylko wtedy, gdy $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$

Kiedy zachodzi $A \perp A$?

Zdarzenia niezależne – przykłady

Czy zdarzenia rozłączne mogą być niezależne?



Odpowiedź: Aby zaszło $A \perp B$ przy $A \cap B = \emptyset$ musimy mieć:

$$P(A)P(B) \; = \; P(A \cap B) \; = \; P(\emptyset) \; = \; 0$$

Czyli tylko wtedy, gdy $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$

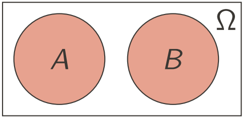
Kiedy zachodzi $A \perp A$?

Odpowiedź: Aby dla zdarzenia A zaszło $A \perp A$, musimy mieć:

$$P(A)P(A) \; = \; P(A \cap A) \; = \; P(A)$$

Zdarzenia niezależne – przykłady

Czy zdarzenia rozłączne mogą być niezależne?



Odpowiedź: Aby zaszło $A \perp B$ przy $A \cap B = \emptyset$ musimy mieć:

$$P(A)P(B) \;=\; P(A \cap B) \;=\; P(\emptyset) \;=\; 0$$

Czyli tylko wtedy, gdy $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$

Kiedy zachodzi $A \perp A$?

Odpowiedź: Aby dla zdarzenia A zaszło $A \perp A$, musimy mieć:

$$P(A)P(A) \;=\; P(A \cap A) \;=\; P(A) \qquad \Longrightarrow P(A) = 1 \;\text{ lub }\; P(A) = 0$$

Zadanie

Z 52 kart ciągniemy jedną. Czy niezależne są zdarzenia:

(a) A – „wyciągnęliśmy asa”, B – „wyciągnęliśmy pika”

(b) C – „wyciągnęliśmy kiera”, D – „wyciągnęliśmy czerwoną figurę”

Zadanie

Z 52 kart ciągniemy jedną. Czy niezależne są zdarzenia:

(a) A – „wyciągnęliśmy asa”, B – „wyciągnęliśmy pika”

(b) C – „wyciągnęliśmy kiera”, D – „wyciągnęliśmy czerwoną figurę”

(a) $A = \{A\heartsuit, A\diamondsuit, A\clubsuit, A\spadesuit\}$, $|A| = 4$

$B = \{2\spadesuit, 3\spadesuit, \ldots, 10\spadesuit, W\spadesuit, D\spadesuit, K\spadesuit, A\spadesuit\}$, $|B| = 13$

$A \cap B = \{A\spadesuit\}$, $|A \cap B| = 1$

Zadanie

Z 52 kart ciągniemy jedną. Czy niezależne są zdarzenia:

(a) A – „wyciągnęliśmy asa”, B – „wyciągnęliśmy pika”

(b) C – „wyciągnęliśmy kiera”, D – „wyciągnęliśmy czerwoną figurę”

(a) $A = \{A\heartsuit, A\diamondsuit, A\clubsuit, A\spadesuit\}$, $|A| = 4$

$B = \{2\spadesuit, 3\spadesuit, \ldots, 10\spadesuit, W\spadesuit, D\spadesuit, K\spadesuit, A\spadesuit\}$, $|B| = 13$

$A \cap B = \{A\spadesuit\}$, $|A \cap B| = 1$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}, \qquad P(A)P(B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{52} \qquad A \perp B$$

Zadanie

Z 52 kart ciągniemy jedną. Czy niezależne są zdarzenia:

(a) A – „wyciągnęliśmy asa", B – „wyciągnęliśmy pika"

(b) C – „wyciągnęliśmy kiera", D – „wyciągnęliśmy czerwoną figurę"

(a) $A = \{A\heartsuit, A\diamondsuit, A\clubsuit, A\spadesuit\}$, $|A| = 4$

$B = \{2\spadesuit, 3\spadesuit, \ldots, 10\spadesuit, W\spadesuit, D\spadesuit, K\spadesuit, A\spadesuit\}$, $|B| = 13$

$A \cap B = \{A\spadesuit\}$, $|A \cap B| = 1$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}, \qquad P(A)P(B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{52} \qquad A \perp B$$

(b) $C = \{2\heartsuit, 3\heartsuit, \ldots, 10\heartsuit, W\heartsuit, D\heartsuit, K\heartsuit, A\heartsuit\}$, $|C| = 13$

$D = \{W\heartsuit, D\heartsuit, K\heartsuit, A\heartsuit, W\diamondsuit, D\diamondsuit, K\diamondsuit, A\diamondsuit\}$, $|D| = 8$

$C \cap D = \{W\heartsuit, D\heartsuit, K\heartsuit, A\heartsuit\}$ $|C \cap D| = 4$

Zadanie

Z 52 kart ciągniemy jedną. Czy niezależne są zdarzenia:

(a) A – „wyciągnęliśmy asa”, B – „wyciągnęliśmy pika”

(b) C – „wyciągnęliśmy kiera”, D – „wyciągnęliśmy czerwoną figurę”

(a) $A = \{A\heartsuit, A\diamondsuit, A\clubsuit, A\spadesuit\}$, $|A| = 4$

$B = \{2\spadesuit, 3\spadesuit, \ldots, 10\spadesuit, W\spadesuit, D\spadesuit, K\spadesuit, A\spadesuit\}$, $|B| = 13$

$A \cap B = \{A\spadesuit\}$, $|A \cap B| = 1$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}, \qquad P(A)P(B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{52} \qquad A \perp B$$

(b) $C = \{2\heartsuit, 3\heartsuit, \ldots, 10\heartsuit, W\heartsuit, D\heartsuit, K\heartsuit, A\heartsuit\}$, $|C| = 13$

$D = \{W\heartsuit, D\heartsuit, K\heartsuit, A\heartsuit, W\diamondsuit, D\diamondsuit, K\diamondsuit, A\diamondsuit\}$, $|D| = 8$

$C \cap D = \{W\heartsuit, D\heartsuit, K\heartsuit, A\heartsuit\}$ $|C \cap D| = 4$

$$P(C \cap D) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \qquad P(C)P(D) = \frac{13}{52} \cdot \frac{8}{52} = \frac{2}{52} = \frac{1}{26} \qquad C \not\perp D$$

Zdarzenia niezależne – własności

Fakt: Dowolne zdarzenie A jest niezależne ze zdarzeniami Ω i $\emptyset$

Zdarzenia niezależne – własności

Fakt: Dowolne zdarzenie A jest niezależne ze zdarzeniami Ω i $\emptyset$

Dowód: $P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \cdot \underbrace{P(\Omega)}_{=1}$.

Zdarzenia niezależne – własności

Fakt: Dowolne zdarzenie A jest niezależne ze zdarzeniami Ω i $\emptyset$

Dowód: $P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \cdot \underbrace{P(\Omega)}_{=1}$.

Podobnie: $P(A \cap \emptyset) = P(\emptyset) = 0 = P(A) \cdot 0 = P(A) \cdot \underbrace{P(\emptyset)}_{=0}$

Zdarzenia niezależne – własności

Fakt: Jeśli $A \perp B$ to także: (a) $A' \perp B$; (b) $A \perp B'$; (c) $A' \perp B'$

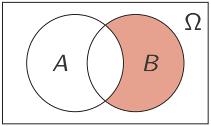
Zdarzenia niezależne – własności

Fakt: Jeśli $A \perp B$ to także: (a) $A' \perp B$; (b) $A \perp B'$; (c) $A' \perp B'$

Dowód:

(a) Mamy:

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$



$A' \cap B$

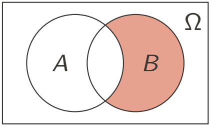
Zdarzenia niezależne – własności

Fakt: Jeśli $A \perp B$ to także: (a) $A' \perp B$; (b) $A \perp B'$; (c) $A' \perp B'$

Dowód:

(a) Mamy:

$$\begin{aligned} P(A' \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &\overset{(*)}{=} P(B) - P(A)P(B) \end{aligned}$$



$A' \cap B$

gdzie w $(*)$ korzystamy z niezależności A i B

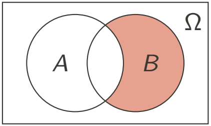
Zdarzenia niezależne – własności

Fakt: Jeśli $A \perp B$ to także: (a) $A' \perp B$; (b) $A \perp B'$; (c) $A' \perp B'$

Dowód:

(a) Mamy:

$$\begin{aligned} P(A' \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &\stackrel{(*)}{=} P(B) - P(A)P(B) \\ &= P(B)(1 - P(A)) \;=\; P(B)P(A'), \end{aligned}$$



$A' \cap B$

gdzie w $(*)$ korzystamy z niezależności A i B

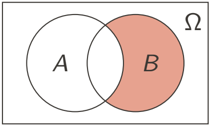
Zdarzenia niezależne – własności

Fakt: Jeśli $A \perp B$ to także: (a) $A' \perp B$; (b) $A \perp B'$; (c) $A' \perp B'$

Dowód:

(a) Mamy:

$$\begin{aligned} P(A' \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &\overset{(*)}{=} P(B) - P(A)P(B) \\ &= P(B)(1 - P(A)) \; = \; P(B)P(A'), \end{aligned}$$



$A' \cap B$

gdzie w $(*)$ korzystamy z niezależności A i B

(b) Na mocy symetrii mamy $P(A \cap B') = P(A)P(B')$

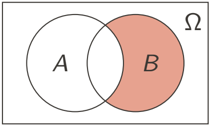
Zdarzenia niezależne – własności

Fakt: Jeśli $A \perp B$ to także: (a) $A' \perp B$; (b) $A \perp B'$; (c) $A' \perp B'$

Dowód:

(a) Mamy:

$$\begin{aligned} P(A' \cap B) &= P(B) - P(A \cap B) \\ &\overset{(*)}{=} P(B) - P(A)P(B) \\ &= P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(A'), \end{aligned}$$



$A' \cap B$

gdzie w $(*)$ korzystamy z niezależności A i B

(b) Na mocy symetrii mamy $P(A \cap B') = P(A)P(B')$

(c) Skoro pokazaliśmy w (a), że $A' \perp B$, stosujemy punkt (b) do tych zdarzeń i dostajemy: $P(A' \cap B') = P(A')P(B')$

Wiele zdarzeń niezależnych

Rozważmy trzy zdarzenia A_1, A_2, A_3, dla których:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Czy zachodzi wtedy $A_1 \perp A_2$, $A_1 \perp A_3$, $A_2 \perp A_3$?

Wiele zdarzeń niezależnych

Rozważmy trzy zdarzenia A_1, A_2, A_3, dla których:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Czy zachodzi wtedy $A_1 \perp A_2$, $A_1 \perp A_3$, $A_2 \perp A_3$?

Rzut 3 monetami: $\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$

- $A_1 = \{OOO, ORO, OOR, ORR\}$ („orzeł na 1. monecie”), $P(A_1) = \frac{1}{2}$
- $A_2 = \{RRR, RRO, ROR, ORR\}$ („co najwyżej 1 orzeł”), $P(A_2) = \frac{1}{2}$
- $A_3 = A_2$, $P(A_3) = \frac{1}{2}$

Wiele zdarzeń niezależnych

Rozważmy trzy zdarzenia A_1, A_2, A_3, dla których:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Czy zachodzi wtedy $A_1 \perp A_2$, $A_1 \perp A_3$, $A_2 \perp A_3$?

Rzut 3 monetami: $\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$

- $A_1 = \{OOO, ORO, OOR, ORR\}$ („orzeł na 1. monecie"), $P(A_1) = \frac{1}{2}$
- $A_2 = \{RRR, RRO, ROR, ORR\}$ („co najwyżej 1 orzeł"), $P(A_2) = \frac{1}{2}$
- $A_3 = A_2$, $P(A_3) = \frac{1}{2}$

Mamy $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_2 = \{ORR\}$.

Więc $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

Wiele zdarzeń niezależnych

Rozważmy trzy zdarzenia A_1, A_2, A_3, dla których:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Czy zachodzi wtedy $A_1 \perp A_2$, $A_1 \perp A_3$, $A_2 \perp A_3$?

Rzut 3 monetami: $\Omega = \{OOO, OOR, ORO, ORR, ROO, ROR, RRO, RRR\}$

- $A_1 = \{OOO, ORO, OOR, ORR\}$ („orzeł na 1. monecie”), $P(A_1) = \frac{1}{2}$
- $A_2 = \{RRR, RRO, ROR, ORR\}$ („co najwyżej 1 orzeł”), $P(A_2) = \frac{1}{2}$
- $A_3 = A_2$, $P(A_3) = \frac{1}{2}$

Mamy $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_2 = \{ORR\}$.

Więc $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

Ale zdarzenia A_2 i A_3 nie są niezależne:

$$P(A_2 \cap A_3) \; = \; P(A_2) \; \neq \; P(A_2)P(A_3).$$

Wiele zdarzeń niezależnych

Czy jeśli $A_1 \perp A_2$, $A_1 \perp A_3$, $A_2 \perp A_3$ (niezależność parami), to zajdzie:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)?$$

Wiele zdarzeń niezależnych

Czy jeśli $A_1 \perp A_2$, $A_1 \perp A_3$, $A_2 \perp A_3$ (niezależność parami), to zajdzie:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)?$$

Rzut 2 monetami: $\Omega = \{OO, OR, RO, RR\}$

- A_1 – „orzeł na pierwszej monecie", $A_1 = \{OO, OR\}$, $\quad P(A_1) = \frac{1}{2}$
- A_2 – „orzeł na drugiej monecie", $A_2 = \{OO, RO\}$, $\quad P(A_2) = \frac{1}{2}$
- A_3 – „to samo na obu monetach", $A_3 = \{OO, RR\}$, $\quad P(A_3) = \frac{1}{2}$

Wiele zdarzeń niezależnych

Czy jeśli $A_1 \perp A_2$, $A_1 \perp A_3$, $A_2 \perp A_3$ (niezależność parami), to zajdzie:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)?$$

Rzut 2 monetami: $\Omega = \{OO, OR, RO, RR\}$

- A_1 – „orzeł na pierwszej monecie", $A_1 = \{OO, OR\}$, $\quad P(A_1) = \frac{1}{2}$
- A_2 – „orzeł na drugiej monecie", $A_2 = \{OO, RO\}$, $\quad P(A_2) = \frac{1}{2}$
- A_3 – „to samo na obu monetach", $A_3 = \{OO, RR\}$, $\quad P(A_3) = \frac{1}{2}$

Mamy $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \{OO\}$.
Więc $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$.
Zdarzenia są niezależne parami, bo $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, itp.

Wiele zdarzeń niezależnych

Czy jeśli $A_1 \perp A_2$, $A_1 \perp A_3$, $A_2 \perp A_3$ (niezależność parami), to zajdzie:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)?$$

Rzut 2 monetami: $\Omega = \{OO, OR, RO, RR\}$

- A_1 – „orzeł na pierwszej monecie", $A_1 = \{OO, OR\}$, $\quad P(A_1) = \frac{1}{2}$
- A_2 – „orzeł na drugiej monecie", $A_2 = \{OO, RO\}$, $\quad P(A_2) = \frac{1}{2}$
- A_3 – „to samo na obu monetach", $A_3 = \{OO, RR\}$, $\quad P(A_3) = \frac{1}{2}$

Mamy $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \{OO\}$.
Więc $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$.
Zdarzenia są niezależne parami, bo $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$, itp.

Ale postulowana własność nie zachodzi:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \; = \; P(\{OO\}) \; = \; \frac{1}{4} \; \neq \; \frac{1}{8} \; = \; P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Wiele zdarzeń niezależnych

Definicja

Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nazywamy niezależnymi, gdy dla dowolnego podzbioru indeksów $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$

$$P\Big(\bigcap_{i \in S} A_i\Big) = \prod_{i \in S} P(A_i)$$

Wiele zdarzeń niezależnych

Definicja

Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nazywamy niezależnymi, gdy dla dowolnego podzbioru indeksów $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$

$$P\Big(\bigcap_{i \in S} A_i\Big) = \prod_{i \in S} P(A_i)$$

Przykład: Zdarzenia A_1, A_2, A_3 są niezależne, jeśli

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Wiele zdarzeń niezależnych

Definicja

Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nazywamy niezależnymi, gdy dla dowolnego podzbioru indeksów $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$

$$P\Big(\bigcap_{i \in S} A_i\Big) = \prod_{i \in S} P(A_i)$$

Przykład: Zdarzenia A_1, A_2, A_3 są niezależne, jeśli

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

W ogólnym przypadku, trzeba sprawdzić te równości dla wszystkich możliwych podzbiorów indeksów zdarzeń.

Wiele zdarzeń niezależnych

Pokazaliśmy, że jeśli $A \perp B$, to również $A \perp B'$, $A' \perp B$ oraz $A' \perp B'$

Wiele zdarzeń niezależnych

Pokazaliśmy, że jeśli $A \perp B$, to również $A \perp B'$, $A' \perp B$ oraz $A' \perp B'$

Zadanie 2

Pokaż, że jeśli zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne, to również są niezależne zdarzenia $B_1, \ldots, B_n$, gdzie $B_i = A_i$ lub $B_i = A_i'$ $(i = 1, \ldots, n)$

Suma zdarzeń niezależnych

Załóżmy, że zdarzenia A_1, A_2 i A_3 są niezależne i:

$$P(A_1) = p_1, \qquad P(A_2) = p_2 \qquad P(A_3) = p_3$$

Oblicz $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

Suma zdarzeń niezależnych

Załóżmy, że zdarzenia A_1, A_2 i A_3 są niezależne i:

$$P(A_1) = p_1, \qquad P(A_2) = p_2 \qquad P(A_3) = p_3$$

Oblicz $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

Odpowiedź: Z prawa De Morgana:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \; = \; (A_1' \cap A_2' \cap A_3')'$$

Suma zdarzeń niezależnych

Załóżmy, że zdarzenia A_1, A_2 i A_3 są niezależne i:

$$P(A_1) = p_1, \qquad P(A_2) = p_2 \qquad P(A_3) = p_3$$

Oblicz $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

Odpowiedź: Z prawa De Morgana:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ = \ (A_1' \cap A_2' \cap A_3')'$$

Jeśli A_1, A_2, A_3 – niezależne, to również A_1', A_2', A_3'.

Suma zdarzeń niezależnych

Załóżmy, że zdarzenia A_1, A_2 i A_3 są niezależne i:

$$P(A_1) = p_1, \qquad P(A_2) = p_2 \qquad P(A_3) = p_3$$

Oblicz $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

Odpowiedź: Z prawa De Morgana:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ = \ (A_1' \cap A_2' \cap A_3')'$$

Jeśli A_1, A_2, A_3 – niezależne, to również A_1', A_2', A_3'.

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \quad = \quad P\big((A_1' \cap A_2' \cap A_3')'\big)$$

Suma zdarzeń niezależnych

Załóżmy, że zdarzenia A_1, A_2 i A_3 są niezależne i:

$$P(A_1) = p_1, \qquad P(A_2) = p_2 \qquad P(A_3) = p_3$$

Oblicz $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

Odpowiedź: Z prawa De Morgana:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \;=\; (A_1' \cap A_2' \cap A_3')'$$

Jeśli A_1, A_2, A_3 – niezależne, to również A_1', A_2', A_3'.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P\big((A_1' \cap A_2' \cap A_3')'\big) \\ &= 1 - P(A_1' \cap A_2' \cap A_3') \end{aligned}$$

Suma zdarzeń niezależnych

Załóżmy, że zdarzenia A_1, A_2 i A_3 są niezależne i:

$$P(A_1) = p_1, \qquad P(A_2) = p_2 \qquad P(A_3) = p_3$$

Oblicz $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

Odpowiedź: Z prawa De Morgana:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \; = \; (A_1' \cap A_2' \cap A_3')'$$

Jeśli A_1, A_2, A_3 – niezależne, to również A_1', A_2', A_3'.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P\big((A_1' \cap A_2' \cap A_3')'\big) \\ &= 1 - P(A_1' \cap A_2' \cap A_3') \\ &= 1 - P(A_1')P(A_2')P(A_3') \end{aligned}$$

Suma zdarzeń niezależnych

Załóżmy, że zdarzenia A_1, A_2 i A_3 są niezależne i:

$$P(A_1) = p_1, \qquad P(A_2) = p_2 \qquad P(A_3) = p_3$$

Oblicz $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

Odpowiedź: Z prawa De Morgana:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \; = \; (A_1' \cap A_2' \cap A_3')'$$

Jeśli A_1, A_2, A_3 – niezależne, to również A_1', A_2', A_3'.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P\big((A_1' \cap A_2' \cap A_3')'\big) \\ &= 1 - P(A_1' \cap A_2' \cap A_3') \\ &= 1 - P(A_1')P(A_2')P(A_3') \\ &= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2)(1 - p_3) \end{aligned}$$

Zadanie

Rzucamy 6 razy kostką. Jaka jest szansa, że wyrzucimy przynajmniej jedną „szóstkę”?

Zadanie

Rzucamy 6 razy kostką. Jaka jest szansa, że wyrzucimy przynajmniej jedną „szóstkę”?

Odpowiedź: A_i – „szóstka na i-tej kostce” $(i = 1, \ldots, 6)$

B – „co najmniej jednak szóstka”, $B = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6$

Zadanie

Rzucamy 6 razy kostką. Jaka jest szansa, że wyrzucimy przynajmniej jedną „szóstkę”?

Odpowiedź: A_i – „szóstka na i-tej kostce” $(i = 1, \ldots, 6)$

B – „co najmniej jednak szóstka”, $B = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6$

Analogicznie do poprzedniego slajdu:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1 \cup \ldots \cup A_6) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_6)) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \simeq 0.665 \end{aligned}$$

Zadanie

Uogólniamy: Rzucamy n razy kostką n-ścienną. Jaka jest szansa, że wyrzucimy przynajmniej jedną jedynkę?

Zadanie

Uogólniamy: Rzucamy n razy kostką n-ścienną. Jaka jest szansa, że wyrzucimy przynajmniej jedną jedynkę?

Odpowiedź: B_n – „co najmniej jedna jedynka"

$$P(B_n) \;=\; 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Zadanie

Uogólniamy: Rzucamy n razy kostką n-ścienną. Jaka jest szansa, że wyrzucimy przynajmniej jedną jedynkę?

Odpowiedź: B_n – „co najmniej jedna jedynka"

$$P(B_n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

n	$P(B_n)$	n	$P(B_n)$
2	0.75	6	0.665
3	0.704	7	0.66
4	0.683	8	0.656
5	0.672	9	0.653

Zadanie

Uogólniamy: Rzucamy n razy kostką n-ścienną. Jaka jest szansa, że wyrzucimy przynajmniej jedną jedynkę?

Odpowiedź: B_n – „co najmniej jedna jedynka"

$$P(B_n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

n	$P(B_n)$	n	$P(B_n)$
2	0.75	6	0.665
3	0.704	7	0.66
4	0.683	8	0.656
5	0.672	9	0.653

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}, \qquad \lim_{n\to\infty} P(B_n) = 1 - \frac{1}{e} \simeq 0.632$$

Warunkowa niezależność

Definicja

Zdarzenia A i B nazywamy warunkowo niezależnymi pod warunkiem zajścia zdarzenia C z $P(C) > 0$, gdy:

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C)P(B \mid C)$$

Oznaczenie: $A \perp B \mid C$

Warunkowa niezależność

Definicja

Zdarzenia A i B nazywamy warunkowo niezależnymi pod warunkiem zajścia zdarzenia C z $P(C) > 0$, gdy:

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C) P(B \mid C)$$

Oznaczenie: $A \perp B \mid C$

Uwaga: Jeśli $P(B \cap C) > 0$ to:

$$\begin{aligned} P(A \mid B \cap C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(A \cap B \mid C)\, P(C)}{P(B \mid C)\, P(C)} \\ &= \frac{P(A \cap B \mid C)}{P(B \mid C)} \overset{(*)}{=} \frac{P(A \mid C)\, P(B \mid C)}{P(B \mid C)} = P(A \mid C), \end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ skorzystaliśmy z warunkowej niezależności.

Podobnie, jeśli $P(A \cap C) > 0$, to $P(B \mid A \cap C) = P(B \mid C)$.

Warunkowa niezależność

Definicja

Zdarzenia A i B nazywamy warunkowo niezależnymi pod warunkiem zajścia zdarzenia C z $P(C) > 0$, gdy:

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C) P(B \mid C)$$

Oznaczenie: $A \perp B \mid C$

Uwaga: Jeśli $P(B \cap C) > 0$ to:

$$\begin{aligned} P(A \mid B \cap C) &= \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{P(A \cap B \mid C)\, P(C)}{P(B \mid C)\, P(C)} \\ &= \frac{P(A \cap B \mid C)}{P(B \mid C)} \stackrel{(*)}{=} \frac{P(A \mid C)\, P(B \mid C)}{P(B \mid C)} = P(A \mid C), \end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ skorzystaliśmy z warunkowej niezależności.

Podobnie, jeśli $P(A \cap C) > 0$, to $P(B \mid A \cap C) = P(B \mid C)$.

Czyli jeśli zaszło zdarzenie C, to zajście zdarzenia B (A) nie ma wpływu na prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A (B).

Czy warunkowa niezależność $\Longrightarrow$ niezależność?

Szansa zapadnięcia na pewną chorobę wynosi 10%. Dwa różne testy na obecność choroby wykrywają ją na 100% jeśli pacjent jest chory i mylą się (niezależnie) w 5% przypadków jeśli pacjent jest zdrowy. Czy wyniki pozytywne obu testów są niezależne?

Czy warunkowa niezależność $\Longrightarrow$ niezależność?

Szansa zapadnięcia na pewną chorobę wynosi 10%. Dwa różne testy na obecność choroby wykrywają ją na 100% jeśli pacjent jest chory i mylą się (niezależnie) w 5% przypadków jeśli pacjent jest zdrowy. Czy wyniki pozytywne obu testów są niezależne?

Z – „pacjent zdrowy", A_i – „pozytywny wynik testu i" $(i = 1, 2)$

Czy warunkowa niezależność $\Longrightarrow$ niezależność?

Szansa zapadnięcia na pewną chorobę wynosi 10%. Dwa różne testy na obecność choroby wykrywają ją na 100% jeśli pacjent jest chory i mylą się (niezależnie) w 5% przypadków jeśli pacjent jest zdrowy. Czy wyniki pozytywne obu testów są niezależne?

Z – „pacjent zdrowy”, A_i – „pozytywny wynik testu i” $(i = 1, 2)$

$$P(A_1 \cap A_2|Z) = P(A_1|Z)P(A_2|Z) = 0.05 \cdot 0.05 \quad (A_1 \perp A_2 \,|\, Z)$$

$$P(A_1 \cap A_2|Z') = 1$$

Czy warunkowa niezależność $\Longrightarrow$ niezależność?

Szansa zapadnięcia na pewną chorobę wynosi 10%. Dwa różne testy na obecność choroby wykrywają ją na 100% jeśli pacjent jest chory i mylą się (niezależnie) w 5% przypadków jeśli pacjent jest zdrowy. Czy wyniki pozytywne obu testów są niezależne?

Z – „pacjent zdrowy", A_i – „pozytywny wynik testu i" $(i = 1, 2)$

$$P(A_1 \cap A_2 | Z) = P(A_1|Z)P(A_2|Z) = 0.05 \cdot 0.05 \quad (A_1 \perp A_2 \,|\, Z)$$

$$P(A_1 \cap A_2 | Z') = 1$$

Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(A_i) = P(Z)P(A_i|Z) + P(Z')P(A_i|Z') = 0.9 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 1 = 0.145$$

Czy warunkowa niezależność $\Longrightarrow$ niezależność?

Szansa zapadnięcia na pewną chorobę wynosi 10%. Dwa różne testy na obecność choroby wykrywają ją na 100% jeśli pacjent jest chory i mylą się (niezależnie) w 5% przypadków jeśli pacjent jest zdrowy. Czy wyniki pozytywne obu testów są niezależne?

Z – „pacjent zdrowy", A_i – „pozytywny wynik testu i" $(i = 1, 2)$

$$P(A_1 \cap A_2 | Z) \; = \; P(A_1|Z)P(A_2|Z) \; = \; 0.05 \cdot 0.05 \quad (A_1 \perp A_2 \,|\, Z)$$

$$P(A_1 \cap A_2 | Z') \; = \; 1$$

Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(A_i) \; = \; P(Z)P(A_i|Z) + P(Z')P(A_i|Z') = 0.9 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 1 \; = \; 0.145$$

$$P(A_1)P(A_2) \; = \; 0.145 \cdot 0.145 \; = \; 0.021025$$

Czy warunkowa niezależność $\Longrightarrow$ niezależność?

Szansa zapadnięcia na pewną chorobę wynosi 10%. Dwa różne testy na obecność choroby wykrywają ją na 100% jeśli pacjent jest chory i mylą się (niezależnie) w 5% przypadków jeśli pacjent jest zdrowy. Czy wyniki pozytywne obu testów są niezależne?

Z – „pacjent zdrowy”, A_i – „pozytywny wynik testu i” $(i = 1, 2)$

$$P(A_1 \cap A_2|Z) = P(A_1|Z)P(A_2|Z) = 0.05 \cdot 0.05 \quad (A_1 \perp A_2 \,|\, Z)$$
$$P(A_1 \cap A_2|Z') = 1$$

Ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite:

$$P(A_i) = P(Z)P(A_i|Z) + P(Z')P(A_i|Z') = 0.9 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 1 = 0.145$$

$$P(A_1)P(A_2) = 0.145 \cdot 0.145 = 0.021025$$

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(Z)P(A_1 \cap A_2|Z) + P(Z')P(A_1 \cap A_2|Z') \\ &= 0.9 \cdot 0.05 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 1 = 0.10225 \neq P(A_1)P(A_2) \end{aligned}$$

Warunkowa niezależność nie implikuje niezależności

Czy niezależność $\implies$ warunkowa niezależność?

Czy zdarzenia „orzeł na pierwszej monecie" i „orzeł na drugiej monecie" są warunkowo niezależne pod warunkiem zdarzenia „wypadł co najmniej jeden orzeł"?

Czy niezależność $\Longrightarrow$ warunkowa niezależność?

Czy zdarzenia „orzeł na pierwszej monecie" i „orzeł na drugiej monecie" są warunkowo niezależne pod warunkiem zdarzenia „wypadł co najmniej jeden orzeł"?

A_i – „orzeł na i-tej monecie", $A_1 = \{OO, OR\}$, $A_2 = \{OO, RO\}$
C – „co najmniej jeden orzeł", $C = \{OO, OR, RO\}$.

Czy niezależność $\Longrightarrow$ warunkowa niezależność?

Czy zdarzenia „orzeł na pierwszej monecie” i „orzeł na drugiej monecie” są warunkowo niezależne pod warunkiem zdarzenia „wypadł co najmniej jeden orzeł”?

A_i – „orzeł na i-tej monecie”, $A_1 = \{OO, OR\}$, $A_2 = \{OO, RO\}$
C – „co najmniej jeden orzeł”, $C = \{OO, OR, RO\}$.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \quad (A_1 \perp A_2)$$

Czy niezależność $\Longrightarrow$ warunkowa niezależność?

Czy zdarzenia „orzeł na pierwszej monecie" i „orzeł na drugiej monecie" są warunkowo niezależne pod warunkiem zdarzenia „wypadł co najmniej jeden orzeł"?

A_i – „orzeł na i-tej monecie", $A_1 = \{OO, OR\}$, $A_2 = \{OO, RO\}$
C – „co najmniej jeden orzeł", $C = \{OO, OR, RO\}$.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \quad (A_1 \perp A_2)$$

$$P(A_1|C) = \frac{P(A_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\{OO, OR\})}{P(C)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3} = P(A_2|C)$$

Czy niezależność $\Longrightarrow$ warunkowa niezależność?

Czy zdarzenia „orzeł na pierwszej monecie” i „orzeł na drugiej monecie” są warunkowo niezależne pod warunkiem zdarzenia „wypadł co najmniej jeden orzeł”?

A_i – „orzeł na i-tej monecie”, $A_1 = \{OO, OR\}$, $A_2 = \{OO, RO\}$
C – „co najmniej jeden orzeł”, $C = \{OO, OR, RO\}$.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \quad (A_1 \perp A_2)$$

$$P(A_1|C) = \frac{P(A_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\{OO, OR\})}{P(C)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3} = P(A_2|C)$$

$$P(A_1 \cap A_2|C) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\{OO\})}{P(C)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Czy niezależność $\Longrightarrow$ warunkowa niezależność?

Czy zdarzenia „orzeł na pierwszej monecie” i „orzeł na drugiej monecie” są warunkowo niezależne pod warunkiem zdarzenia „wypadł co najmniej jeden orzeł”?

A_i – „orzeł na i-tej monecie”, $A_1 = \{OO, OR\}$, $A_2 = \{OO, RO\}$
C – „co najmniej jeden orzeł”, $C = \{OO, OR, RO\}$.

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) \quad (A_1 \perp A_2)$$

$$P(A_1|C) = \frac{P(A_1 \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\{OO, OR\})}{P(C)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3} = P(A_2|C)$$

$$P(A_1 \cap A_2|C) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap C)}{P(C)} = \frac{P(\{OO\})}{P(C)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_1 \cap A_2|C) \neq P(A_1|C)P(A_2|C)$$

Niezależność nie implikuje warunkowej niezależności

Niezależność a model probabilistyczny

Pokazaliśmy, że dwa zdarzenia opisujące wyniki na dwóch różnych monetach/kostkach są niezależne.

Podobny wynik łatwo uogólnić na n monet/kostek.

Niezależność a model probabilistyczny

Pokazaliśmy, że dwa zdarzenia opisujące wyniki na dwóch różnych monetach/kostkach są niezależne.

Podobny wynik łatwo uogólnić na n monet/kostek.

Skąd wynika niezależność? Jest w pewnym sensie wbudowana w wybrany przez nas model prawdopodobieństwa klasycznego:

	1 moneta	n monet
liczba wyników	2	$2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$
prawdopodobieństwo	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$

Niezależność a model probabilistyczny

Pokazaliśmy, że dwa zdarzenia opisujące wyniki na dwóch różnych monetach/kostkach są niezależne.

Podobny wynik łatwo uogólnić na n monet/kostek.

Skąd wynika niezależność? Jest w pewnym sensie wbudowana w wybrany przez nas model prawdopodobieństwa klasycznego:

	1 moneta	n monet
liczba wyników	2	$2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$
prawdopodobieństwo	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$

A jak modelować ciągi niezależnych eksperymentów losowych w przypadku ogólnych miar prawdopodobieństwa?

Przestrzenie produktowe

Rozważmy n przestrzeni probabilistycznych $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i = 1, \ldots, n$, dotyczących n niezależnych etapów doświadczenia losowego

- np. rzuty poszczególnymi monetami/kośćmi

Przestrzenie produktowe

Rozważmy n przestrzeni probabilistycznych $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, $i = 1, \ldots, n$, dotyczących n niezależnych etapów doświadczenia losowego

- np. rzuty poszczególnymi monetami/kośćmi

Przestrzenią produktową nazywamy przestrzeń $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie:

- $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \Omega_n$
- $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem zdarzeń wygenerowanym ze zdarzeń postaci $A_1 \times \ldots \times A_n$, $A_i \in \mathcal{F}_i$
- $P(A_1 \times \ldots \times A_n) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2) \cdot \ldots \cdot P_n(A_n)$.

Z definicji, zdarzenia dotyczące poszczególnych etapów doświadczenia, np. $A_1 \times \Omega \times \ldots \times \Omega$, są niezależne.

Przestrzenie produktowe – przykład

Rzucamy dwoma kostkami

$\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P_1 = P_2, \quad P_1(\{j\}) = \frac{1}{6}, j = 1, \ldots, 6$

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \quad \Omega = \{(i, j) \colon i, j = 1, \ldots, 6\}$

$P(\{i, j\}) = P_1(\{i\})P_2(\{j\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

Przestrzenie produktowe – przykład

Rzucamy dwoma kostkami

$\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P_1 = P_2, \quad P_1(\{j\}) = \frac{1}{6}, j = 1, \ldots, 6$

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \quad \Omega = \{(i, j) \colon i, j = 1, \ldots, 6\}$

$P(\{i, j\}) = P_1(\{i\}) P_2(\{j\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

Zdarzenie dotyczące pierwszej kostki: $A = A_1 \times \Omega_2$

Np. A – „wypadło 6 oczek na 1. kostce":
$A = \{6\} \times \Omega_2 = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

Zdarzenie dotyczące drugiej kostki $B = \Omega_1 \times A_2$

Przestrzenie produktowe – przykład

Rzucamy dwoma kostkami

$\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P_1 = P_2, \quad P_1(\{j\}) = \frac{1}{6}, j = 1, \dots, 6$

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \quad \Omega = \{(i, j) \colon i, j = 1, \dots, 6\}$

$P(\{i, j\}) = P_1(\{i\}) P_2(\{j\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

Zdarzenie dotyczące pierwszej kostki: $A = A_1 \times \Omega_2$

Np. A – „wypadło 6 oczek na 1. kostce":
$A = \{6\} \times \Omega_2 = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

Zdarzenie dotyczące drugiej kostki $B = \Omega_1 \times A_2$

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1 \times \Omega_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(\Omega_2) = P_1(A_1) \\
P(B) &= P(\Omega_1 \times A_2) = P_1(\Omega_1) \cdot P_2(A_2) = P_2(A_2) \\
P(A \cap B) &= P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2)
\end{aligned}
$$

Przestrzenie produktowe – przykład

Rzucamy dwoma kostkami

$\Omega_1 = \Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P_1 = P_2, \quad P_1(\{j\}) = \frac{1}{6}, j = 1, \dots, 6$

$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2, \quad \Omega = \{(i, j) \colon i, j = 1, \dots, 6\}$

$P(\{i, j\}) = P_1(\{i\}) P_2(\{j\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

Zdarzenie dotyczące pierwszej kostki: $A = A_1 \times \Omega_2$

Np. A – „wypadło 6 oczek na 1. kostce":

$A = \{6\} \times \Omega_2 = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

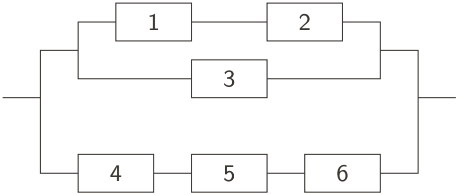
Zdarzenie dotyczące drugiej kostki $B = \Omega_1 \times A_2$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \times \Omega_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(\Omega_2) = P_1(A_1) \\ P(B) &= P(\Omega_1 \times A_2) = P_1(\Omega_1) \cdot P_2(A_2) = P_2(A_2) \\ P(A \cap B) &= P(A_1 \times A_2) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_2) \end{aligned}$$

A więc $P(A \cap B) = P(A)P(B) \Longrightarrow A \perp B$

Niezawodność systemów

Jeśli każdy z n niezależnych komponentów ulega awarii z prawdopodobieństwem p_i, $i = 1, \ldots, n$, to z jakim prawdopodobieństwem ulegnie awarii cały system?



Komponenty szeregowe

Komponenty szeregowe

System ulega awarii, jeśli choć jeden z komponentów ulega awarii.

Komponenty szeregowe

System ulega awarii, jeśli choć jeden z komponentów ulega awarii.

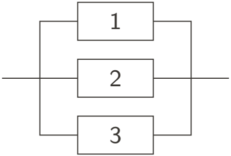
A_i – „i-ty komponent uległ awarii"

A – „system uległ awarii", $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$

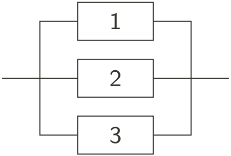
$$P(A) = 1 - (1 - p_1) \cdot \ldots \cdot (1 - p_n)$$

(z zadania o sumie zdarzeń niezależnych)

Komponenty równoległe

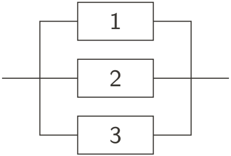


Komponenty równoległe



System ulega awarii, jeśli wszystkie komponenty ulegną awarii.

Komponenty równoległe



System ulega awarii, jeśli wszystkie komponenty ulegną awarii.

A_i – „i-ty komponent uległ awarii"

A – „system uległ awarii", $A = A_1 \cap \ldots \cap A_n$

$$P(A) = p_1 \cdot \ldots \cdot p_n$$

Zadanie

W macierzy RAID, składających się z n dysków, dane replikowane są na wszystkich dyskach. Oblicz szanse utraty danych, jeśli awaria pojedynczego dysku zdarza się z prawdopodobieństwem p i jest niezależna od awarii innych dysków.

Zadanie

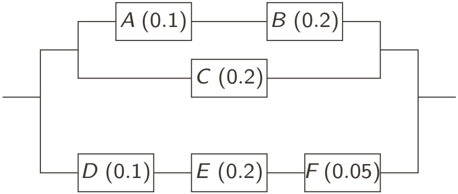
W macierzy RAID, składających się z n dysków, dane replikowane są na wszystkich dyskach. Oblicz szanse utraty danych, jeśli awaria pojedynczego dysku zdarza się z prawdopodobieństwem p i jest niezależna od awarii innych dysków.

Odpowiedź: Jest to system równoległy.

A_i – awaria i-tego dysku, B – utrata danych

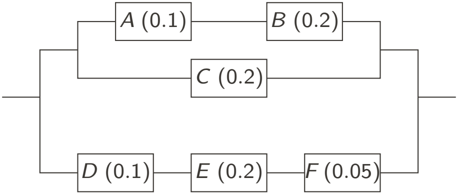
$$P(B) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n) = p^n$$

Złożone systemy



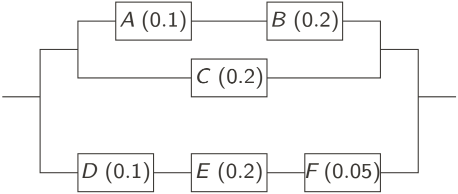
(w nawiasach podane prawdopodobieństwa awarii)

Złożone systemy

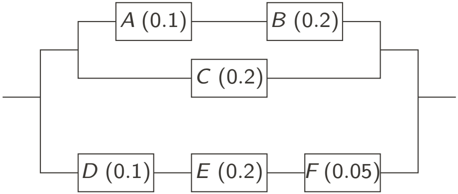


(w nawiasach podane prawdopodobieństwa awarii)

Rozwiązanie: upraszczamy system poprzez zamianę podsystemów szeregowych i równoległych na pojedyncze komponenty

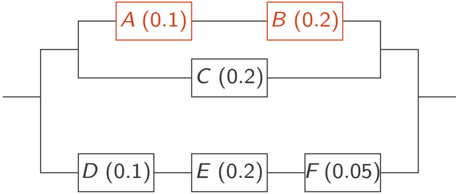


Złożone systemy

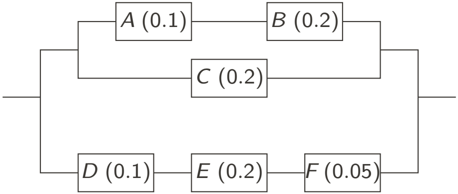


(w nawiasach podane prawdopodobieństwa awarii)

Rozwiązanie: upraszczamy system poprzez zamianę podsystemów szeregowych i równoległych na pojedyncze komponenty

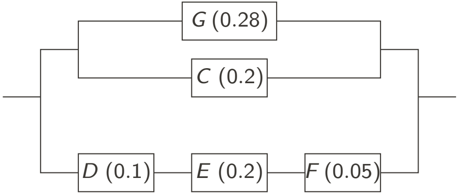


Złożone systemy



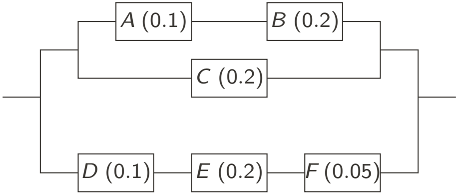
(w nawiasach podane prawdopodobieństwa awarii)

Rozwiązanie: upraszczamy system poprzez zamianę podsystemów szeregowych i równoległych na pojedyncze komponenty



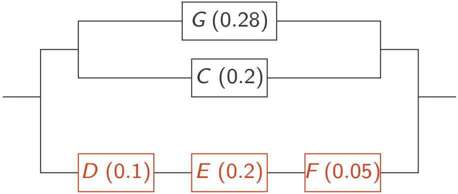
$$
\begin{aligned}
p_G &= 1 - (1 - 0.2)(1 - 0.1) \\
&= 0.28
\end{aligned}
$$

Złożone systemy

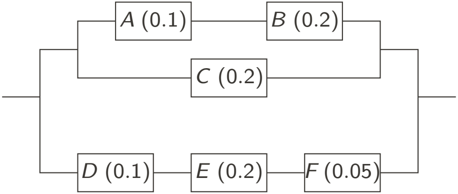


(w nawiasach podane prawdopodobieństwa awarii)

Rozwiązanie: upraszczamy system poprzez zamianę podsystemów szeregowych i równoległych na pojedyncze komponenty

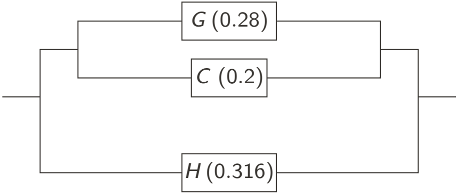


Złożone systemy



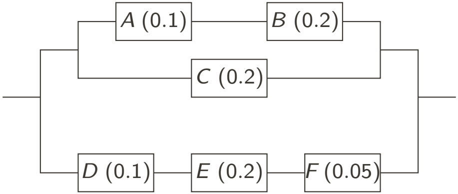
(w nawiasach podane prawdopodobieństwa awarii)

Rozwiązanie: upraszczamy system poprzez zamianę podsystemów szeregowych i równoległych na pojedyncze komponenty



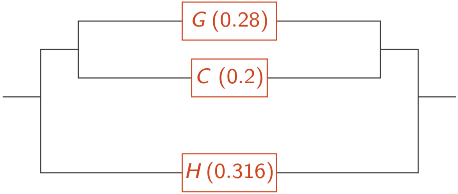
$$p_H = 1 - (1 - 0.2)(1 - 0.1) \times (1 - 0.05) = 0.316$$

Złożone systemy

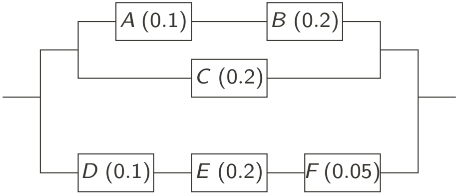


(w nawiasach podane prawdopodobieństwa awarii)

Rozwiązanie: upraszczamy system poprzez zamianę podsystemów szeregowych i równoległych na pojedyncze komponenty



Złożone systemy



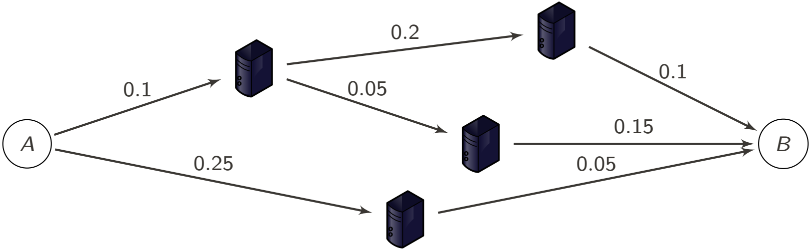
(w nawiasach podane prawdopodobieństwa awarii)

Rozwiązanie: upraszczamy system poprzez zamianę podsystemów szeregowych i równoległych na pojedyncze komponenty

$$p_I = 0.28 \cdot 0.2 \cdot 0.316$$
$$\simeq 0.018$$

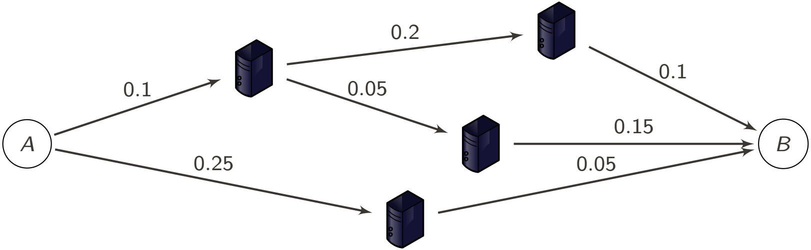
Zadanie

Jaka jest szansa, że uda się przesłać pakiet z punktu A do B w sieci komputerowej poniżej (liczby na krawędziach to prawd. awarii połączeń):

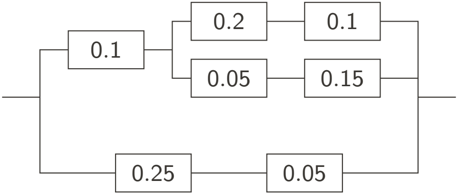


Zadanie

Jaka jest szansa, że uda się przesłać pakiet z punktu A do B w sieci komputerowej poniżej (liczby na krawędziach to prawd. awarii połączeń):

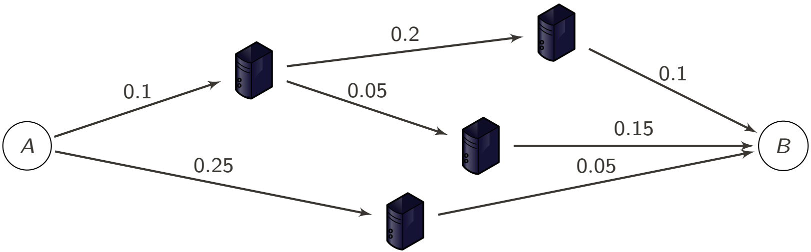


Rozwiązanie: zamieniamy na graf komponentów:

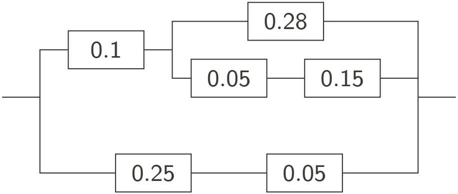


Zadanie

Jaka jest szansa, że uda się przesłać pakiet z punktu A do B w sieci komputerowej poniżej (liczby na krawędziach to prawd. awarii połączeń):

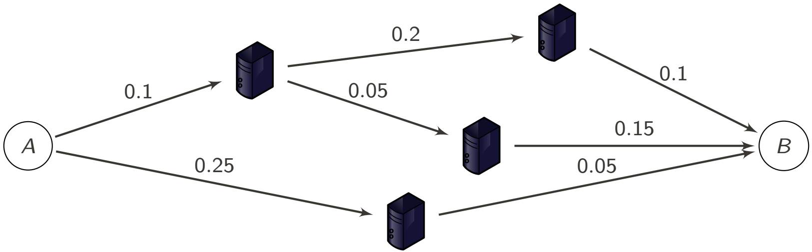


Rozwiązanie: zamieniamy na graf komponentów:

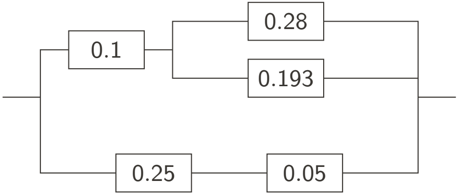


Zadanie

Jaka jest szansa, że uda się przesłać pakiet z punktu A do B w sieci komputerowej poniżej (liczby na krawędziach to prawd. awarii połączeń):

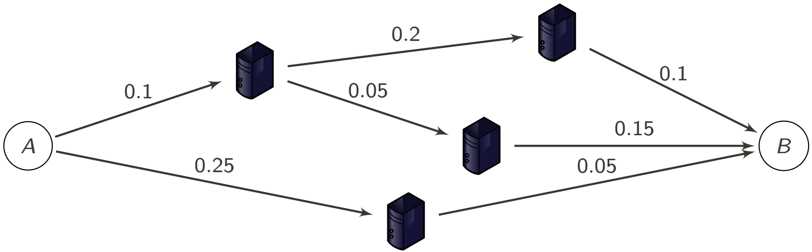


Rozwiązanie: zamieniamy na graf komponentów:

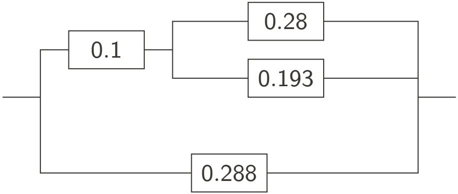


Zadanie

Jaka jest szansa, że uda się przesłać pakiet z punktu A do B w sieci komputerowej poniżej (liczby na krawędziach to prawd. awarii połączeń):

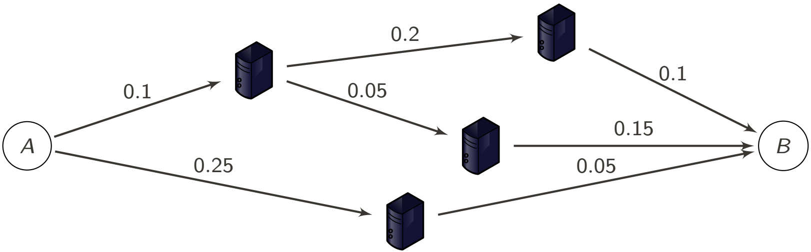


Rozwiązanie: zamieniamy na graf komponentów:

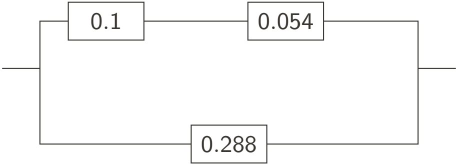


Zadanie

Jaka jest szansa, że uda się przesłać pakiet z punktu A do B w sieci komputerowej poniżej (liczby na krawędziach to prawd. awarii połączeń):

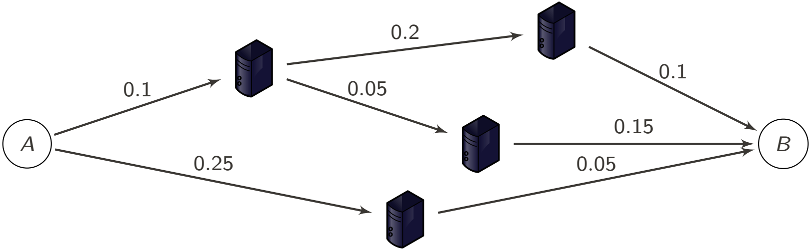


Rozwiązanie: zamieniamy na graf komponentów:

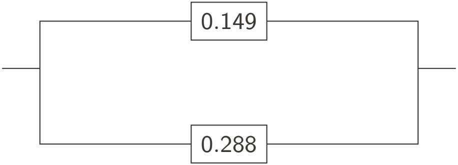


Zadanie

Jaka jest szansa, że uda się przesłać pakiet z punktu A do B w sieci komputerowej poniżej (liczby na krawędziach to prawd. awarii połączeń):

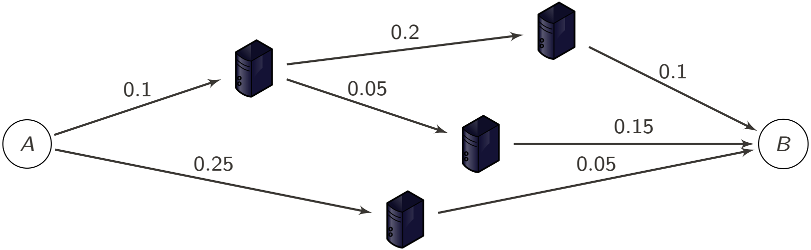


Rozwiązanie: zamieniamy na graf komponentów:



Zadanie

Jaka jest szansa, że uda się przesłać pakiet z punktu A do B w sieci komputerowej poniżej (liczby na krawędziach to prawd. awarii połączeń):



Rozwiązanie: zamieniamy na graf komponentów:

$$\boxed{0.043}$$

Prawdopodobieństwo, że uda się przesłać pakiet: $1 - 0.043 = 0.957$

Nieuczciwa moneta

Rzucamy 2 razy nieuczciwą monetą, dla której orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \in [0, 1]$, a reszka z prawdopodobieństwem $1 - p$. Przedstaw prawdopodobieństwa wszystkich zdarzeń elementarnych.

Nieuczciwa moneta

Rzucamy 2 razy nieuczciwą monetą, dla której orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \in [0, 1]$, a reszka z prawdopodobieństwem $1 - p$. Przedstaw prawdopodobieństwa wszystkich zdarzeń elementarnych.

$\Omega = \{OO, OR, RO, RR\}$

Z niezależności obu rzutów monetą prawdopodobieństwa przemnażają się:

ω	$P(\{\omega\})$
OO	$p \cdot p = p^2$
OR	$p \cdot (1 - p)$
RO	$(1 - p) \cdot p$
RR	$(1 - p) \cdot (1 - p) = (1 - p)^2$

Nieuczciwa moneta

Rzucamy 2 razy nieuczciwą monetą, dla której orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \in [0, 1]$, a reszka z prawdopodobieństwem $1 - p$. Przedstaw prawdopodobieństwa wszystkich zdarzeń elementarnych.

$\Omega = \{OO, OR, RO, RR\}$

Z niezależności obu rzutów monetą prawdopodobieństwa przemnażają się:

ω	$P(\{\omega\})$
OO	$p \cdot p = p^2$
OR	$p \cdot (1 - p)$
RO	$(1 - p) \cdot p$
RR	$(1 - p) \cdot (1 - p) = (1 - p)^2$

Jakie jest prawdopodobieństwo A_1 – „wypadł dokładnie jeden orzeł”?

$P(A_1) = P(\{OR, RO\}) = P(\{OR\}) + P(\{RO\}) = 2p(1 - p)$

Nieuczciwa moneta

Rzucamy 2 razy nieuczciwą monetą, dla której orzeł wypada z prawdopodobieństwem $p \in [0, 1]$, a reszka z prawdopodobieństwem $1 - p$. Przedstaw prawdopodobieństwa wszystkich zdarzeń elementarnych.

zdarzenie	opis	prawd.
„wypadły 2 orły"	$A_2 = \{OO\}$	p^2
„wypadł 1 orzeł"	$A_1 = \{OR, RO\}$	$2p(1 - p)$
„wypadło 0 orłów"	$A_0 = \{RR\}$	$(1 - p)^2$

Sumowanie i mnożenie prawdopodobieństw

1. Jeśli A i B są niezależne:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

2. Jeśli A i B są rozłączne:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Nieuczciwa moneta

Rzucamy 3 razy nieuczciwą monetą z prawdopodobieństwem orła p. Oblicz prawdopodobieństwa pojawienia się k orłów ($k = 0, 1, 2, 3$).

Nieuczciwa moneta

Rzucamy 3 razy nieuczciwą monetą z prawdopodobieństwem orła p. Oblicz prawdopodobieństwa pojawienia się k orłów ($k = 0, 1, 2, 3$).

zdarzenie	opis	prawd.
„3 orły”	$A_3 = \{OOO\}$	p^3
„2 orły”	$A_2 = \{OOR, ORO, ROO\}$	$3p^2(1-p)$
„1 orzeł”	$A_1 = \{ORR, ROR, RRO\}$	$3p(1-p)^2$
„brak orłów”	$A_0 = \{RRR\}$	$(1-p)^3$

Np.:

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(\{OOR\}) + P(\{ORO\}) + P(\{ROO\}) \\ &= p \cdot p \cdot (1-p) + p \cdot (1-p) \cdot p + (1-p) \cdot p \cdot p \\ &= 3p^2(1-p) \end{aligned}$$

Schemat Bernoulliego

Rzucamy n razy nieuczciwą monetą z prawdopodobieństwem orła p. Oblicz prawdopodobieństwo pojawienia się k orłów ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$).

Schemat Bernoulliego

Wykonujemy serię niezależnych prób (doświadczeń), każde z nich kończy się sukcesem z prawd. p i porażką z prawd. $1 - p$. Podaj prawdopodobieństwo k sukcesów w n próbach ($k = 0, 1, \ldots, n$).

Schemat Bernoulliego

Wykonujemy serię niezależnych prób (doświadczeń), każde z nich kończy się sukcesem z prawd. p i porażką z prawd. $1 - p$. Podaj prawdopodobieństwo k sukcesów w n próbach ($k = 0, 1, \ldots, n$).

Kodujemy sukcesy jako jedynki a porażki jako zera:

$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_n) \colon b_i \in \{0, 1\}\}$

Schemat Bernoulliego

Wykonujemy serię niezależnych prób (doświadczeń), każde z nich kończy się sukcesem z prawd. p i porażką z prawd. $1-p$. Podaj prawdopodobieństwo k sukcesów w n próbach $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

Kodujemy sukcesy jako jedynki a porażki jako zera:

$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_n) \colon b_i \in \{0, 1\}\}$

Jeśli $k = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ jest liczbą sukcesów, to:

$$P(\{(b_1, \ldots, b_n)\}) = \underbrace{p \cdot \ldots \cdot p}_{k} \cdot \underbrace{(1-p) \cdot \ldots \cdot (1-p)}_{n-k} = p^k (1-p)^{n-k}$$

Schemat Bernoulliego

Wykonujemy serię niezależnych prób (doświadczeń), każde z nich kończy się sukcesem z prawd. p i porażką z prawd. $1-p$. Podaj prawdopodobieństwo k sukcesów w n próbach ($k = 0, 1, \ldots, n$).

Kodujemy sukcesy jako jedynki a porażki jako zera:

$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_n) \colon b_i \in \{0, 1\}\}$

Jeśli $k = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ jest liczbą sukcesów, to:

$$P(\{(b_1, \ldots, b_n)\}) = \underbrace{p \cdot \ldots \cdot p}_{k} \cdot \underbrace{(1-p) \cdot \ldots \cdot (1-p)}_{n-k} = p^k (1-p)^{n-k}$$

Ile jest różnych ciągów binarnych o długości n z k jedynkami?

Schemat Bernoulliego

Wykonujemy serię niezależnych prób (doświadczeń), każde z nich kończy się sukcesem z prawd. p i porażką z prawd. $1-p$. Podaj prawdopodobieństwo k sukcesów w n próbach ($k = 0, 1, \ldots, n$).

Kodujemy sukcesy jako jedynki a porażki jako zera:

$\Omega = \big\{\omega = (b_1, \ldots, b_n) \colon b_i \in \{0, 1\}\big\}$

Jeśli $k = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ jest liczbą sukcesów, to:

$$P(\{(b_1, \ldots, b_n)\}) = \underbrace{p \cdot \ldots \cdot p}_{k} \cdot \underbrace{(1-p) \cdot \ldots \cdot (1-p)}_{n-k} = p^k (1-p)^{n-k}$$

Ile jest różnych ciągów binarnych o długości n z k jedynkami? $\binom{n}{k}$.

Schemat Bernoulliego

Wykonujemy serię niezależnych prób (doświadczeń), każde z nich kończy się sukcesem z prawd. p i porażką z prawd. $1-p$. Podaj prawdopodobieństwo k sukcesów w n próbach ($k = 0, 1, \ldots, n$).

Kodujemy sukcesy jako jedynki a porażki jako zera:

$\Omega = \{\omega = (b_1, \ldots, b_n) \colon b_i \in \{0, 1\}\}$

Jeśli $k = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ jest liczbą sukcesów, to:

$$P(\{(b_1, \ldots, b_n)\}) = \underbrace{p \cdot \ldots \cdot p}_{k} \cdot \underbrace{(1-p) \cdot \ldots \cdot (1-p)}_{n-k} = p^k (1-p)^{n-k}$$

Ile jest różnych ciągów binarnych o długości n z k jedynkami? $\binom{n}{k}$.

Jeśli A_k – „wypadło dokładnie k sukcesów w n próbach”, to:

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Schemat Bernoulliego

$$P(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$	
#sukc.	prawd.	#sukc.	prawd.	#sukc.	prawd.
0	$(1-p)^2$	0	$(1-p)^3$	0	$(1-p)^4$
1	$2p(1-p)$	1	$3p(1-p)^2$	1	$4p(1-p)^3$
2	p^2	2	$3p^2(1-p)$	2	$6p^2(1-p)^2$
		3	$(1-p)^3$	3	$4p^3(1-p)$
				4	p^4

Schemat Bernoulliego

Fakt: Dla dowolnego $p \in [0,1]$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \;=\; 1$$

W szczególności, jeśli $p = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \;=\; 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \;=\; 2^n$$

Schemat Bernoulliego

Fakt: Dla dowolnego $p \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \;=\; 1$$

W szczególności, jeśli $p = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \;=\; 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \;=\; 2^n$$

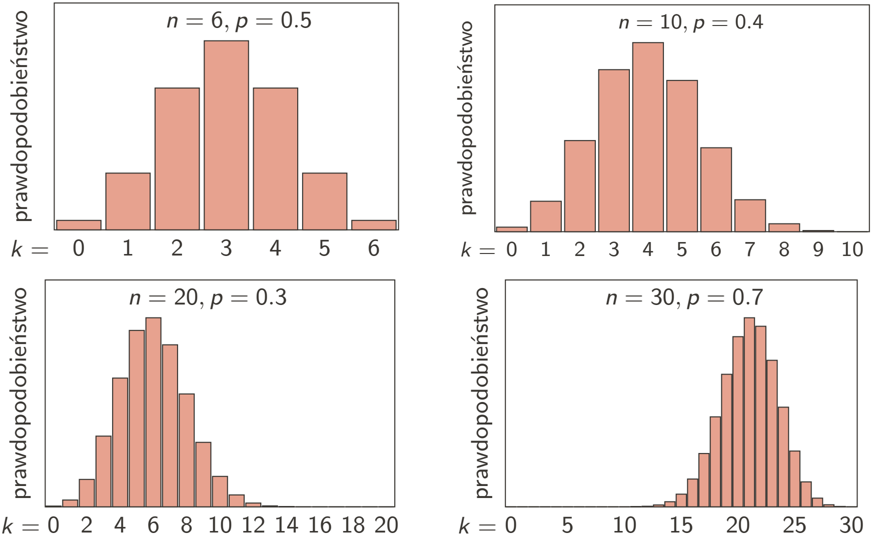
Dowód: Niech A_k – „wypadło dokładnie k sukcesów w n próbach”

$$\Omega \;=\; A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n$$

Ponieważ A_k są rozłączne ($k = 0, \ldots, n$):

$$1 \;=\; P(\Omega) \;=\; \sum_{k=0}^{n} P(A_k) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Schemat Bernoulliego



Dla dużych n, rozkład „koncentruje” się wokół wartości np.

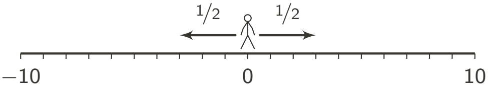
Nieskończony ciąg Bernoulliego

Czasem w schemacie Bernoulliego nie ma ograniczenia na liczbę prób n

Nieskończony ciąg Bernoulliego

Czasem w schemacie Bernoulliego nie ma ograniczenia na liczbę prób n

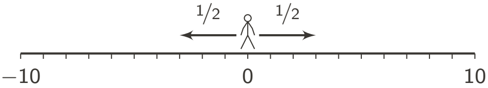
- Spacer losowy: idziemy krok w lewo („sukces”) lub w prawo („porażka”) z prawdopodobieństwem $1/2$. Jaka jest szansa, że kiedykolwiek oddalimy się o 10 kroków od punktu startowego?



Nieskończony ciąg Bernoulliego

Czasem w schemacie Bernoulliego nie ma ograniczenia na liczbę prób n

- Spacer losowy: idziemy krok w lewo („sukces") lub w prawo („porażka") z prawdopodobieństwem $1/2$. Jaka jest szansa, że kiedykolwiek oddalimy się o 10 kroków od punktu startowego?

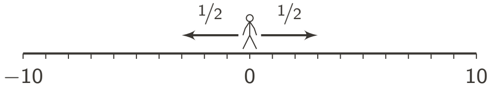


- Gry hazardowe: Gramy w ruletkę („czerwone/czarne"), za każdym razem obstawiając 1 zł. Zaczynając z 10 zł kończymy grę, jeśli albo stracimy wszystko, albo osiągniemy 20zł. Jaka jest szansa wygranej?

Nieskończony ciąg Bernoulliego

Czasem w schemacie Bernoulliego nie ma ograniczenia na liczbę prób n

- Spacer losowy: idziemy krok w lewo („sukces") lub w prawo („porażka") z prawdopodobieństwem $1/2$. Jaka jest szansa, że kiedykolwiek oddalimy się o 10 kroków od punktu startowego?

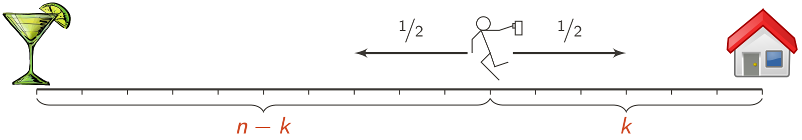


- Gry hazardowe: Gramy w ruletkę („czerwone/czarne"), za każdym razem obstawiając 1 zł. Zaczynając z 10 zł kończymy grę, jeśli albo stracimy wszystko, albo osiągniemy 20zł. Jaka jest szansa wygranej?

Prawdopodobieństwa zwykle uzyskujemy rozwiązując rekurencję.

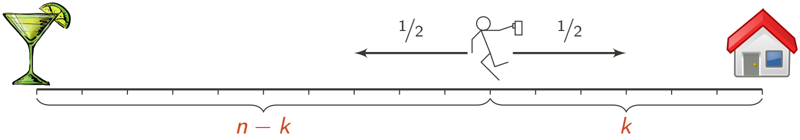
Przykład – student wraca do domu

Z baru do domu jest n kroków. Student jest k kroków od domu. Z prawdopodobieństwem $1/2$ student robi krok w kierunku domu lub baru. Jak wróci do baru, już z niego nie wyjdzie. Jaką ma szansę dojść do domu?



Przykład – student wraca do domu

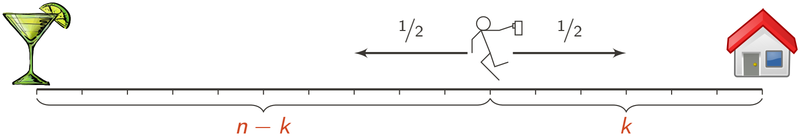
Z baru do domu jest n kroków. Student jest k kroków od domu. Z prawdopodobieństwem $1/2$ student robi krok w kierunku domu lub baru. Jak wróci do baru, już z niego nie wyjdzie. Jaką ma szansę dojść do domu?



- S_k – „student dojdzie do domu, jeśli jest k kroków od niego"
- H_+ – „pierwszy krok w kierunku domu"
- H_- – „pierwszy krok w kierunku przeciwnym"

Przykład – student wraca do domu

Z baru do domu jest n kroków. Student jest k kroków od domu. Z prawdopodobieństwem $1/2$ student robi krok w kierunku domu lub baru. Jak wróci do baru, już z niego nie wyjdzie. Jaką ma szansę dojść do domu?



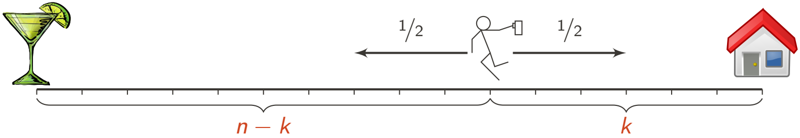
- S_k – „student dojdzie do domu, jeśli jest k kroków od niego"
- H_+ – „pierwszy krok w kierunku domu"
- H_- – „pierwszy krok w kierunku przeciwnym"

Ponieważ $H_+ \cup H_- = \Omega$ oraz $H_+ \cap H_- = \emptyset$,

$$P(S_k) \quad = \quad P(S_k|H_+)P(H_+) + P(S_k|H_-)P(H_-)$$

Przykład – student wraca do domu

Z baru do domu jest n kroków. Student jest k kroków od domu. Z prawdopodobieństwem $1/2$ student robi krok w kierunku domu lub baru. Jak wróci do baru, już z niego nie wyjdzie. Jaką ma szansę dojść do domu?



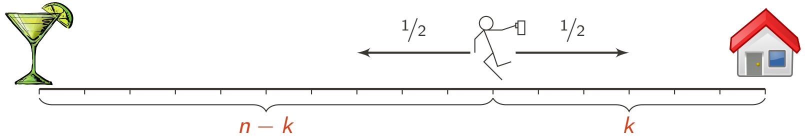
- S_k – „student dojdzie do domu, jeśli jest k kroków od niego"
- H_+ – „pierwszy krok w kierunku domu"
- H_- – „pierwszy krok w kierunku przeciwnym"

Ponieważ $H_+ \cup H_- = \Omega$ oraz $H_+ \cap H_- = \emptyset$,

$$P(S_k) = \underbrace{P(S_k|H_+)}_{P(S_{k-1})} P(H_+) + \underbrace{P(S_k|H_-)}_{P(S_{k+1})} P(H_-)$$

Przykład – student wraca do domu

Z baru do domu jest n kroków. Student jest k kroków od domu. Z prawdopodobieństwem $1/2$ student robi krok w kierunku domu lub baru. Jak wróci do baru, już z niego nie wyjdzie. Jaką ma szansę dojść do domu?

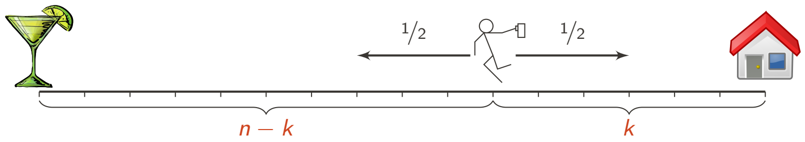


- S_k – „student dojdzie do domu, jeśli jest k kroków od niego"
- H_+ – „pierwszy krok w kierunku domu"
- H_- – „pierwszy krok w kierunku przeciwnym"

Ponieważ $H_+ \cup H_- = \Omega$ oraz $H_+ \cap H_- = \emptyset$,

$$\begin{aligned} P(S_k) &= \underbrace{P(S_k|H_+)}_{P(S_{k-1})} P(H_+) + \underbrace{P(S_k|H_-)}_{P(S_{k+1})} P(H_-) \\ &= \frac{1}{2} P(S_{k-1}) + \frac{1}{2} P(S_{k+1}) \end{aligned}$$

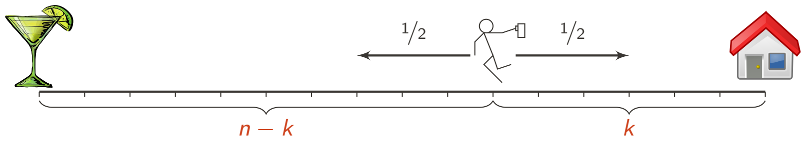
Przykład – student wraca do domu (c.d.)



Oznaczając $s_k = P(S_k)$ i mnożąc przez 2, otrzymujemy rekurencję

$$2s_k = s_{k-1} + s_{k+1}, \qquad \text{przy warunkach brzegowych } s_0 = 1, s_n = 0$$

Przykład – student wraca do domu (c.d.)

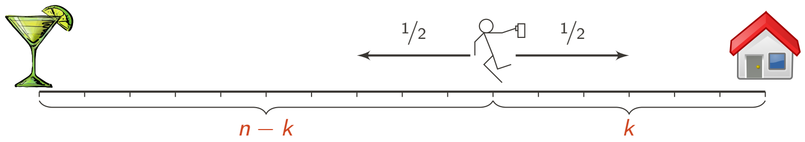


Oznaczając $s_k = P(S_k)$ i mnożąc przez 2, otrzymujemy rekurencję

$$2s_k = s_{k-1} + s_{k+1}, \qquad \text{przy warunkach brzegowych } s_0 = 1, s_n = 0$$

$$\text{Przekształcając:} \quad s_k - s_{k-1} = s_{k+1} - s_k$$

Przykład – student wraca do domu (c.d.)



Oznaczając $s_k = P(S_k)$ i mnożąc przez 2, otrzymujemy rekurencję

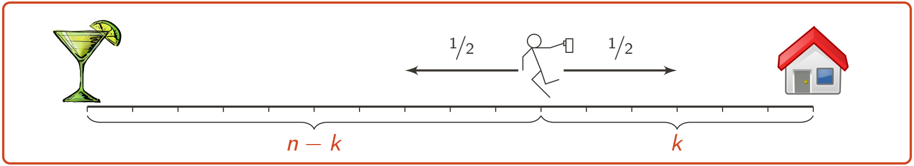
$$2s_k = s_{k-1} + s_{k+1}, \qquad \text{przy warunkach brzegowych } s_0 = 1, s_n = 0$$

$$\text{Przekształcając:} \quad s_k - s_{k-1} = s_{k+1} - s_k$$

Kolejne różnice $r = s_{k+1} - s_k$ są identyczne dla wszystkich k!

$$\begin{aligned} s_1 &= s_0 + s_1 - s_0 = s_0 + r \\ s_2 &= s_1 + s_2 - s_1 = s_1 + r = s_0 + 2r \\ s_n &= s_0 + nr \end{aligned}$$

Przykład – student wraca do domu (c.d.)



Oznaczając $s_k = P(S_k)$ i mnożąc przez 2, otrzymujemy rekurencję

$$2s_k = s_{k-1} + s_{k+1}, \qquad \text{przy warunkach brzegowych } s_0 = 1, s_n = 0$$

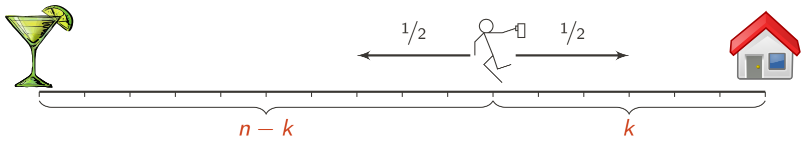
$$\text{Przekształcając:} \quad s_k - s_{k-1} = s_{k+1} - s_k$$

Kolejne różnice $r = s_{k+1} - s_k$ są identyczne dla wszystkich k!

$$\begin{aligned} s_1 &= s_0 + s_1 - s_0 = s_0 + r \\ s_2 &= s_1 + s_2 - s_1 = s_1 + r = s_0 + 2r \\ s_n &= s_0 + nr \end{aligned}$$

Ale skoro $s_n = 0$, $s_0 = 1$, to $r = -\frac{1}{n}$

Przykład – student wraca do domu (c.d.)



Oznaczając $s_k = P(S_k)$ i mnożąc przez 2, otrzymujemy rekurencję

$$2s_k = s_{k-1} + s_{k+1}, \qquad \text{przy warunkach brzegowych } s_0 = 1, s_n = 0$$

$$\text{Przekształcając:} \quad s_k - s_{k-1} = s_{k+1} - s_k$$

Kolejne różnice $r = s_{k+1} - s_k$ są identyczne dla wszystkich k!

$$\begin{aligned} s_1 &= s_0 + s_1 - s_0 = s_0 + r \\ s_2 &= s_1 + s_2 - s_1 = s_1 + r = s_0 + 2r \\ s_n &= s_0 + nr \end{aligned}$$

Ale skoro $s_n = 0$, $s_0 = 1$, to $r = -\frac{1}{n}$

Czyli $P(S_k) = s_k = 1 - \frac{k}{n} = \frac{n-k}{n}$

Przykład – student wraca do domu (c.d.)

A jaka jest szansa, że student wróci do baru, będąc k kroków od domu?

Przykład – student wraca do domu (c.d.)

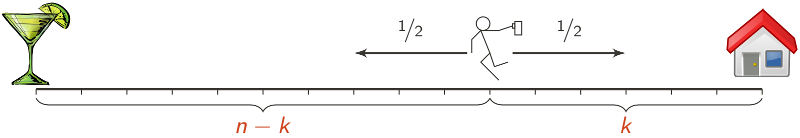
A jaka jest szansa, że student wróci do baru, będąc k kroków od domu?

B_k – „student dojdzie do baru, jeśli jest k kroków od domu"

Przykład – student wraca do domu (c.d.)

A jaka jest szansa, że student wróci do baru, będąc k kroków od domu?

B_k – „student dojdzie do baru, jeśli jest k kroków od domu"

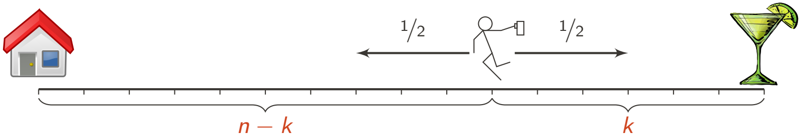


Wskazówka: „bar" i „dom" są tu umowne i symetryczne!
„k kroków od domu" to „$n-k$ kroków od baru"

Przykład – student wraca do domu (c.d.)

A jaka jest szansa, że student wróci do baru, będąc k kroków od domu?

B_k – „student dojdzie do baru, jeśli jest k kroków od domu"

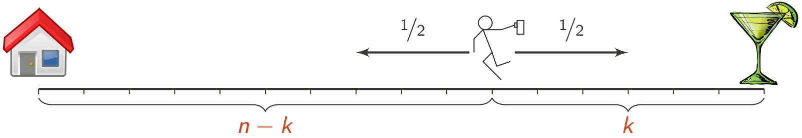


Wskazówka: „bar" i „dom" są tu umowne i symetryczne!
„k kroków od domu" to „$n-k$ kroków od baru"

Przykład – student wraca do domu (c.d.)

A jaka jest szansa, że student wróci do baru, będąc k kroków od domu?

B_k – „student dojdzie do baru, jeśli jest k kroków od domu”



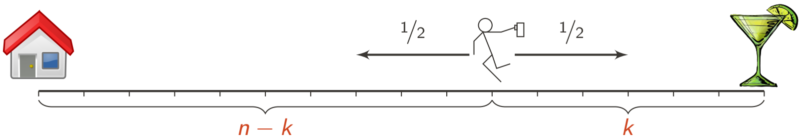
Wskazówka: „bar” i „dom” są tu umowne i symetryczne!
„k kroków od domu” to „$n-k$ kroków od baru”

$$P(B_k) = P(S_{n-k}) = \frac{n-(n-k)}{n} = \frac{k}{n}$$

Przykład – student wraca do domu (c.d.)

A jaka jest szansa, że student wróci do baru, będąc k kroków od domu?

B_k – „student dojdzie do baru, jeśli jest k kroków od domu"



Wskazówka: „bar" i „dom" są tu umowne i symetryczne!
„k kroków od domu" to „$n - k$ kroków od baru"

$$P(B_k) = P(S_{n-k}) = \frac{n-(n-k)}{n} = \frac{k}{n}$$

Ponieważ $P(B_k) + P(S_k) = 1$, prawdopodobieństwo, że student będzie krążył w nieskończoność jest równe 0.

Przykład – gra

Jaś i Małgosia rzucają monetą. Jeśli wypadnie orzeł – Jaś daje Małgosi złotówkę, jeśli reszka – Małgosia Jasiowi. Jaś zaczyna z kapitałem j zł, Małgosia – z m zł. Gra toczy się, dopóki któreś z nich nie przegra wszystkiego. Jaka jest szansa wygranej Jasia, a jaka Małgosi?

Przykład – gra

Jaś i Małgosia rzucają monetą. Jeśli wypadnie orzeł – Jaś daje Małgosi złotówkę, jeśli reszka – Małgosia Jasiowi. Jaś zaczyna z kapitałem j zł, Małgosia – z m zł. Gra toczy się, dopóki któreś z nich nie przegra wszystkiego. Jaka jest szansa wygranej Jasia, a jaka Małgosi?

Sprowadzamy problem do poprzedniego zadania:

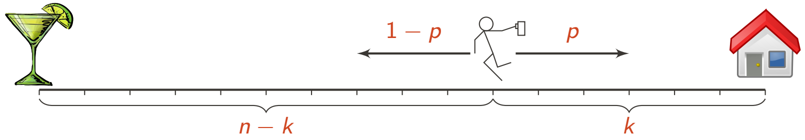
- Jaś = dom, Małgosia = bar
- Odległość dom-bar $n = m + j$
- Początkowa odległość od domu $k = m$

Jeśli J – „wygrywa Jaś”, M – „wygrywa Małgosia” to:

$$P(J) = 1 - \frac{k}{n} = \frac{j}{j+m}, \qquad P(M) = \frac{k}{n} = \frac{m}{j+m}$$

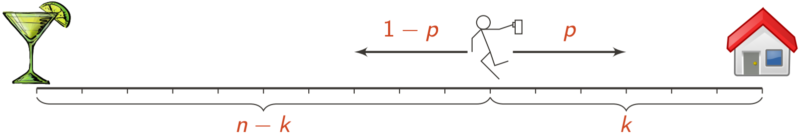
Przykład – wracamy do zadania z barem

Komplikujemy: student wykonuje krok w kierunku domu z prawdopodobieństwem $p \neq \frac{1}{2}$. Jaką ma szansę dojść do domu?



Przykład – wracamy do zadania z barem

Komplikujemy: student wykonuje krok w kierunku domu z prawdopodobieństwem $p \neq \frac{1}{2}$. Jaką ma szansę dojść do domu?



Wychodzimy z uprzednio otrzymanego równania:

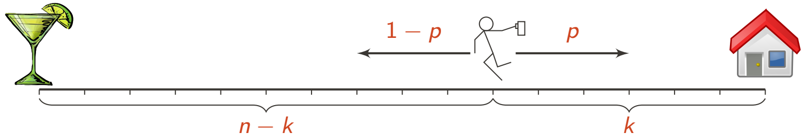
$$P(S_k) = P(S_{k-1})P(H_+) + P(S_{k+1})P(H_-) = pP(S_{k-1}) + (1-p)P(S_{k+1})$$

Oznaczając $s_k = P(S_k)$ dostajemy rekurencję:

$$s_k = ps_{k-1} + (1-p)s_{k+1}, \qquad \text{przy } s_0 = 1, s_n = 0.$$

Przykład – wracamy do zadania z barem

Komplikujemy: student wykonuje krok w kierunku domu z prawdopodobieństwem $p \neq \frac{1}{2}$. Jaką ma szansę dojść do domu?



Wychodzimy z uprzednio otrzymanego równania:

$$P(S_k) = P(S_{k-1})P(H_+) + P(S_{k+1})P(H_-) = pP(S_{k-1}) + (1-p)P(S_{k+1})$$

Oznaczając $s_k = P(S_k)$ dostajemy rekurencję:

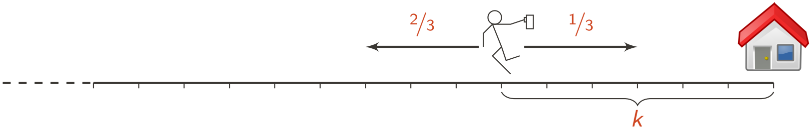
$$s_k \;=\; ps_{k-1} + (1-p)s_{k+1}, \qquad \text{przy } s_0 = 1, s_n = 0.$$

Zgadujemy rozwiązanie: dla $r = \frac{p}{1-p}$ mamy

$$P(S_k) \;=\; s_k \;=\; \frac{r^k - r^n}{1 - r^n}$$

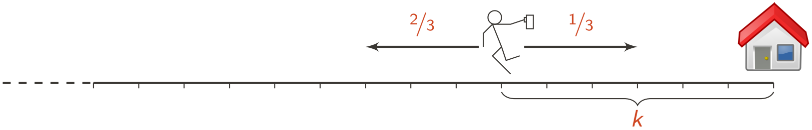
Przykład – brak baru

Student jest k kroków od domu. Z prawdopodobieństwem $1/3$ wykonuje krok w kierunku domu, $2/3$ – w kierunku przeciwnym. Jaką ma szansę dojść kiedykolwiek do domu?



Przykład – brak baru

Student jest k kroków od domu. Z prawdopodobieństwem $1/3$ wykonuje krok w kierunku domu, $2/3$ – w kierunku przeciwnym. Jaką ma szansę dojść kiedykolwiek do domu?

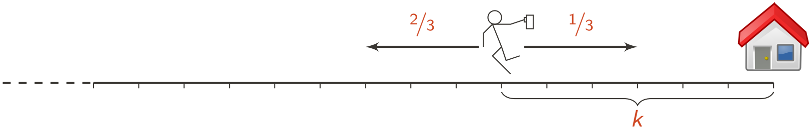


$$P(S_k) = s_k = \frac{r^k - r^n}{1 - r^n}, \qquad r = \frac{p}{1-p} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

Student może zawędrować dowolnie daleko w przeciwnym kierunku.

Przykład – brak baru

Student jest k kroków od domu. Z prawdopodobieństwem $1/3$ wykonuje krok w kierunku domu, $2/3$ – w kierunku przeciwnym. Jaką ma szansę dojść **kiedykolwiek** do domu?



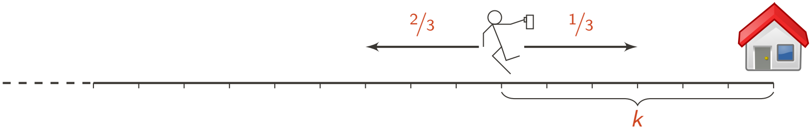
$$P(S_k) = s_k = \frac{r^k - r^n}{1 - r^n}, \qquad r = \frac{p}{1-p} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

Student może zawędrować dowolnie daleko w przeciwnym kierunku.

$\Longrightarrow$ bar jest **nieskończenie** daleko: $n \to \infty$

Przykład – brak baru

Student jest k kroków od domu. Z prawdopodobieństwem $1/3$ wykonuje krok w kierunku domu, $2/3$ – w kierunku przeciwnym. Jaką ma szansę dojść kiedykolwiek do domu?



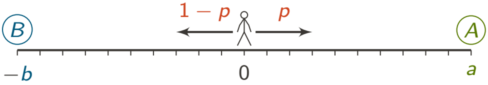
$$P(S_k) = s_k = \frac{r^k - r^n}{1 - r^n}, \qquad r = \frac{p}{1-p} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$$

Student może zawędrować dowolnie daleko w przeciwnym kierunku.
$\Longrightarrow$ bar jest nieskończenie daleko: $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} P(S_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\to 0}}{1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\to 0}} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Nieskończone ciągi Bernoulliego – podsumowanie

Spacer losowy:



- Prawdopodobieństwo osiągnięcia punktu A:

$$P(A) \;=\; \begin{cases} \frac{b}{a+b} & \text{jeśli} \quad p = \frac{1}{2} \\[2ex] \frac{\left(\frac{p}{1-p}\right)^{a} - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{a+b}}{1-\left(\frac{p}{1-p}\right)^{a+b}} & \text{jeśli} \quad p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Prawdopodobieństwo osiągnięcia punktu B:

$$P(B) \;=\; 1 - P(A)$$

- Możemy usunąć punkt B (lub A) przechodząc z b (lub a) do nieskończoności.