Rozdział 6

Programowanie sieciowe

Metody programowania sieciowego są to techniki planowania złożonych przedsięwzięć organizacyjnych stosowane w celu zapewnienia sprawnego przebiegu ich realizacji. Metody wykorzystujące sieci czynności zaczęto stosować w latach 40. XX wieku w związku z realizacją przedsięwzięć o zastosowaniach głównie militarnych. W połowie lat 50. powstały najbardziej znane algorytmy CPM (ang. *Critical Path Method*) oraz PERT (ang. *Program Evaluation and Review Technique*) stosowane w programowaniu sieciowym [19].

Programowanie sieciowe stosuje sie jako narzędzie wspomagające planowanie przedsięwzięć w takich dziedzinach, jak:
– produkcja oprogramowania,
– wdrażanie systemów informatycznych,
– procesy technicznego przygotowania produkcji,
– przedsięwzięcia badawczo-rozwojowe,
– modernizacja zakładów przemysłowych,
– duże przedsięwzięcia inwestycyjne,
– produkcja złożonych wyrobów na zamówienie.

Do oceny projektów stosuje się zwykle jedno lub kilka z następującego zbioru kryteriów:
– całkowity czas realizacji,
– całkowity koszt realizacji,
– ryzyko,
– NPV (ang. *Net Present Value*) – zaktualizowana wartość netto.

Całkowity czas realizacji jest podstawowym kryterium oceny projektu, gdyż niedotrzymanie terminów zwykle skutkuje wysokimi karami. Najczęściej stosowaną metodą wyznaczania minimalnego czasu trwania projektu jest metoda ścieżki krytycznej (CPM), którą omówimy w punkcie 6.1. Zwykle projekt charakteryzuje się nie tylko umownym terminem zakończenia, ale również określonym budżetem, którego przekroczenie powoduje, że zyski wykonawcy są mniejsze od spodziewanych, a nawet może on przynieść straty. Ponadto w pewnych sytuacjach można skrócić czas trwania poszczególnych czynności, ponosząc dodatkowe koszty (np. na zatrudnienie dodatkowych pracowników). Analiza czasowo-kosztowa (CPM/MCX), omówiona w punkcie 6.2, pozwala ustalić, które czynności i o ile warto skrócić, aby najlepiej wykorzystać środki przeznaczone na skrócenie czasu realizacji projektu. Jednym z największych problemów pojawiających się podczas stosowania metod sieciowych jest określenie czasów trwania poszczególnych czynności. Metody te dotyczą przedsięwzięć o niskiej powtarzalności, a zatem możliwości wykorzystania danych historycznych są niewielkie. Dlatego zwykle oszacowania czasów trwania czynności są obarczone dosyć dużym błędem, niosąc ze sobą wysokie ryzyko niedotrzymania terminu realizacji. Minimalizacja ryzyka jest jednym z celów planowania. Do oceny ryzyka związanego z czasem wykonania projektu wykorzystuje się metodę PERT, którą przedstawimy w punkcie 6.3. Najbardziej zaawansowaną miarą jakości projektu, ważną zwłaszcza w wypadku projektów trwających bardzo długo, jest zaktualizowana wartość netto, która pozwala wyrazić koszty realizacji na poszczególnych etapach realizacji projektu z uwzględnieniem kosztów zamrożenia i skutków inflacji.

6.1. Metoda ścieżki krytycznej

Przedsięwzięcia składające się z dużej liczby wzajemnie powiązanych czynności nazywa się często *projektami.* Projekt jest to jednorazowe niepow- tarzalne przedsięwzięcie wieloczynnościowe o nietypowej strukturze i przebiegu, którego realizacja wymaga zwykle czasu oraz ograniczonych zasobów.

6.1.1. Przykład

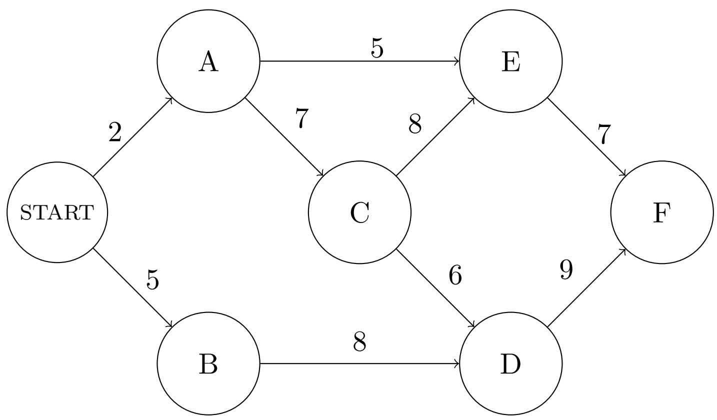
Załóżmy, że grupa studentów zainteresowanych pewnym problemem wykraczającym poza ramy programu studiów planuje zorganizować seminarium poświęcone temu zagadnieniu z udziałem kilku wybitnych wykładowców z różnych uczelni. Studenci planują pozyskać sponsorów i wydrukować streszczenia prezentowanych wykładów. Osobną sprawą jest wybór miejsca przeprowadzenia seminarium. Organizatorzy biorą pod uwagę sale na uczelni lub poza nią. Ostateczny wybór będzie zależał od dostępności sal w ustalonym terminie oraz kosztów ich wynajęcia. Należy też zadbać o rozpowszechnienie informacji o seminarium wśród kolegów. W tym celu zostaną wydrukowane plakaty i ulotki. Listę czynności, jakie należy przeprowadzić, aby zrealizować plan, przedstawiono w tablicy 6.1. Ustalono również kolejność wykonywania poszczególnych czynności i przewidywany czas ich wykonania. Dane te również przedstawiono w tablicy. Ile dni przed planowanym terminem seminarium należy rozpocząć jego przygotowywanie, aby ulotki i materiały seminaryjne zostały na czas wydrukowane?

Tablica 6.1. Lista czynności związanych z organizacją seminarium

Czynność	Opis	Czynności poprzedzające	Czas trwania
1	Ustalenie listy wykładowców		2
2	Ustalenie listy możliwych lokalizacji		5
3	Pozyskanie sponsorów	1	5
4	Nadsyłanie streszczeń wykładów	1	7
5	Ustalenie lokalizacji	2	8
6	Ustalenie listy wystąpień	4	6
7	Opracowanie materiałów	4	8
8	Opracowanie i rozesłanie ulotek	5, 6	9
9	Druk materiałów	3, 7	7

6.1.2. Analiza sytuacji decyzyjnej

Zauważmy, że pewne czynności mogą być wykonywane równolegle, co powinno skrócić czas przygotowania seminarium. Zależności kolejnościowe między czynnościami wynikające z tablicy 6.1. można przedstawić za pomocą grafu. Przyjmiemy, że łuki w grafie reprezentują poszczególne czynności, natomiast węzły nazwiemy zdarzeniami. *Zdarzenie* jest punktem w czasie oznaczającym moment rozpoczęcia lub zakończenia jakiejś czynności. W dalszym ciągu będziemy oznaczać *czynność* jako parę $\langle i, j \rangle$, gdzie i oznacza zdarzenie rozpoczynające czynność, a j oznacza zdarzenie kończące czynność. Graf czynności w rozważanym przykładzie przedstawia rysunek 6.1. Zdarzenia oznaczono literami alfabetu.



Rys. 6.1. Sieć czynności

6.1.3. Model matematyczny

Jak wspomniano, grafy są wygodnym narzędziem do modelowania projektów. Przyjmijmy, że dane są:
- dyskretny i skończony zbiór czynności (zadań),
- zbiór ograniczeń kolejnościowych,
- dyskretny i skończony zbiór atrybutów opisujących każdą czynność, takich jak:
  - czas realizacji,
  - koszt realizacji,
  - zapotrzebowanie na zasoby.

Zbiór czynności wynika bezpośrednio z zakresu projektu. Ustalenie listy czynności jest zadaniem bardzo ważnym, a przy tym wymagającym doświadczenia i wyobraźni. Niekiedy wprowadza się tzw. *czynności pozorne*, których czas realizacji oraz zapotrzebowania zasobowe są zerowe. Wprowadzenie tych czynności jest konieczne w celu reprezentacji ograniczeń kolejnościowych między zdarzeniami, między którymi nie występują zwykłe czynności (jest to związane z reprezentacją czynności na łukach grafu).

Kolejność czynności wynika z ograniczeń modelowanego projektu. Mogą to być ograniczenia:
- technologiczne,
- o charakterze czasowym,
- wynikające z niepodzielności i niesubstytucyjności zasobów,
- o charakterze bilansowym.

Ograniczenia technologiczne wynikają z charakteru samego projektu i przyjętego sposobu realizacji. W naszym przykładzie ulotki można wydrukować dopiero, gdy znane jest miejsce przeprowadzenia seminarium i lista referatów. Ograniczenia o charakterze czasowym występują na przykład, gdy jakaś czynność nie może się rozpocząć przed ustalonym terminem, niezwiązanym z zakończeniem żadnej innej czynności. Przykładem takiego ograniczenia może być data rozpoczęcia inwestycji związana z datą obowiązywania określonych przepisów. Jeżeli wykonawca projektu dysponuje np. jedną koparką, to pomiędzy czynnościami wymagającymi użycia koparki można ustalić ograniczenia kolejnościowe w celu uniknięcia konfliktu zasobowego. W ogólności ograniczenia zasobowe modeluje się jednak niezależnie od kolejnościowych. Mamy wówczas do czynienia z problemami *rozdziału zasobów w systemach typu kompleks operacji*, które należą do najtrudniejszych problemów kombinatorycznych. Omawianie tych problemów wykracza poza zakres niniejszego skryptu.

Określenie wartości atrybutów też na ogół sprawia sporo trudności. Ustalenie czasu trwania czy kosztu realizacji czynności jest możliwe tylko w pewnym przybliżeniu.

Możliwe są dwa sposoby konstruowania grafu ograniczeń kolejnościowych:

– czynności występują na łukach,
– czynności występują w węzłach.

Zwykle w zadaniach programowania sieciowego stosuje się ten pierwszy sposób. Węzły grafu odpowiadają wtedy zdarzeniom (momentom rozpoczęcia lub zakończenia czynności). Etykiety na łukach mogą zawierać informację o wartościach atrybutów związanych z czynnością (czas, koszt, zapotrzebowanie na zasoby). Na rysunku 6.1. etykiety na łukach oznaczają czas wykonania poszczególnych czynności. Przyjęta konwencja zapewnia, że otrzymany graf, nazywany *siecią czynności*, posiada następujące własności:

– jest grafem prostym (między dowolną parą wierzchołków występuje co najwyżej jeden łuk i nie występują pętle),
– jest grafem spójnym,
– jest grafem skierowanym,
– nie zawiera dróg cyklicznych,
– ma jedno zdarzenie początkowe i jedno zdarzenie końcowe.

6.1.4. Metoda ścieżki krytycznej

Z punktu widzenia teorii grafów rozwiązanie zadania polega na znalezieniu najdłuższej ścieżki w grafie. Metoda pełnego przeglądu, polegająca na obliczeniu długości wszystkich ścieżek, a następnie wyborze najdłuższej z nich, jest nieefektywna obliczeniowo. Znana jest jednak znacznie sprawniejsza metoda, nazywana metodą ścieżki krytycznej, którą przedstawimy poniżej. Jest to pierwsza metoda analizy sieciowej, która została opracowana około roku 1956. Długość najdłuższej ścieżki w grafie, którą znajduje się za pomocą metody CPM, wyznacza najkrótszy możliwy czas realizacji projektu. W metodzie tej zakłada się, że sieć jest w postaci kanonicznej, czyli zarówno struktura sieci, jak i czasy trwania czynności są deterministyczne.

Wygodnym sposobem reprezentacji grafu jest *macierz sąsiedztwa*, czyli kwadratowa macierz, w której a_{ij} oznacza liczbę krawędzi pomiędzy wierzchołkami i oraz j. W przypadku grafów prostych macierz sąsiedztwa jest macierzą zerojedynkową z zerami na głównej przekątnej.

Macierz sąsiedztwa grafu z rysunku 6.1. przedstawia tablica 6.2.

Zaczniemy od ponumerowania wierzchołków w grafie tak, aby zdarzenie oznaczające początek czynności miało niższy numer niż zdarzenie oznaczające koniec tej czynności. W tym celu zastosujemy algorytm porządkowania warstwowego.

Algorytm porządkowania warstwowego

Krok 1. Zbuduj binarną macierz przejść dla sieci czynności; $k := 0$.

Krok 2. Do warstwy w_k zalicz zdarzenia odpowiadające zerowym kolumnom aktualnej macierzy przejść; $k := k + 1$.

Tablica 6.2. Macierz sąsiedztwa grafu z rysunku 6.1

i \ j	START	A	B	C	D	E	F
START	0	1	1	0	0	0	0
A	0	0	0	1	0	1	0
B	0	0	0	0	1	0	0
C	0	0	0	0	1	1	0
D	0	0	0	0	0	0	1
E	0	0	0	0	0	0	1
F	0	0	0	0	0	0	0

Krok 3. Wykreśl z macierzy przejść zerowe kolumny oraz wiersze o tych samych numerach.

Krok 4. Jeżeli są jeszcze niewykreślone kolumny, to wróć do kroku 2, w przeciwnym razie zakończ.

W sieci z rysunku 6.1. do warstwy w_0 zaliczymy jedynie wierzchołek START. Po wykreśleniu pierwszego wiersza i kolumny w macierzy sąsiedztwa zerowe kolumny odpowiadają zdarzeniom A i B, a zatem $w_1 = \{A, B\}$. Po kolejnych skreśleniach otrzymujemy $w_2 = \{C\}$, $w_3 = \{D, E\}$ oraz $w_4 = \{F\}$. Wierzchołek START w warstwie w_0 otrzymuje numer 1. Następne numery (kolejne liczby naturalne) przydzielamy wierzchołkom wg kolejności warstw. Wierzchołkom należącym do tej samej warstwy przydzielamy numery w dowolnej kolejności. Numeracja wierzchołków w grafie z rysunku 6.1. została zastosowana na rysunku 6.2.

Z każdym zdarzeniem wiążemy najwcześniejszy możliwy termin wystąpienia tego zdarzenia oraz najpóźniejszy dopuszczalny termin wystąpienia tego zdarzenia. Jeżeli przyjmiemy jakiś termin rozpoczęcia projektu T_0^w, to najwcześniejszy możliwy termin T_i^w wystąpienia zdarzenia $i, i = 1, \ldots, n$, jest to najwcześniejszy moment, w którym wszystkie czynności, dla których i jest zdarzeniem końcowym, zostaną wykonane. Jeżeli założymy jakiś termin zakończenia całego projektu T_n^p, to najpóźniejszy dopuszczalny termin T_i^p wystąpienia zdarzenia $i, i = 1, \ldots, n-1$ jest to najpóźniejszy moment, dla którego wszystkie czynności wymagające do swego rozpoczęcia wystąpienia zdarzenia i zostaną zakończone nie później niż w T_n^p.

Metodę ścieżki krytycznej przedstawimy przy założeniu, że graf sieci spełnia następujące warunki:
- zawiera jedno zdarzenie początkowe,
- zawiera jedno zdarzenie końcowe,
- zdarzenia są ponumerowane zgodnie z ich następstwem w czasie,
- $T_1^w = 0$,
- $T_n^p = T_n^w$.

Powyższe założenia nie zmniejszają ogólności przedstawionego algorytmu, gdyż każdą sieć czynności można łatwo sprowadzić do wymaganej postaci. Niech $z_1 \dots, z_k$ będzie zbiorem zdarzeń początkowych (końcowych) w grafie. Dodając fikcyjne zdarzenie początkowe z_0 (końcowe z_{n+1}) oraz czynności pozorne $\langle z_0, z_i\rangle, i = 1, \dots, k$ ($\langle z_i, z_{n+1}\rangle, i = 1, \dots, k$), otrzymujemy graf równoważny z punktu widzenia metody CPM. Odpowiednie ponumerowanie wierzchołków wyznaczamy za pomocą algorytmu porządkowania warstwowego, a ostatnie dwa warunki traktujemy jako warunki początkowe.

Dodatkowo przyjmiemy następujące oznaczenia:
- $G(V, E)$ graf o zbiorze wierzchołków V i zbiorze łuków E,
- $\Gamma_i = \{j : \langle i, j\rangle \in E\}$ – zbiór następników zdarzenia i,
- $\Gamma_j^{-1} = \{i : \langle i, j\rangle \in E\}$ – zbiór poprzedników zdarzenia i,
- t_{ij} – czas trwania czynności $\langle i, j\rangle$,
- $L_i = T_i^p - T_i^w$ – luz zdarzenia,
- $Z_{ij}^c = T_j^p - T_i^w - t_{ij}$ – całkowity zapas czasu dla czynności $\langle i, j\rangle$.

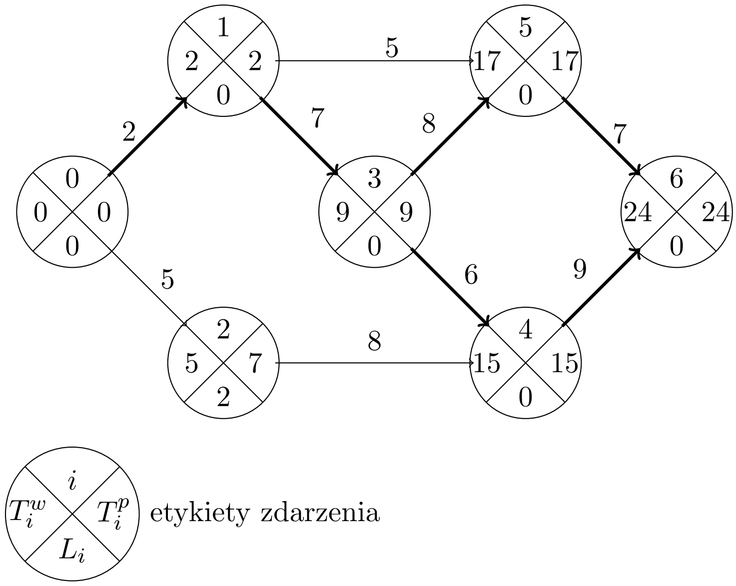
Jeżeli $L_i = 0$, to zdarzenie i nazywamy *zdarzeniem krytycznym*, natomiast jeżeli $Z_{ij}^c = 0$, to czynność $\langle i, j\rangle$ jest *czynnością krytyczną*.

Metoda ścieżki krytycznej

Krok 1. $T_1^w := 0$.
Krok 2. $i := i + 1$.
Krok 3. Wyznacz najwcześniejszy termin wystąpienia zdarzenia i:
$T_i^w = \max_{j\in\Gamma_i^{-1}}\{T_j^w + t_{ij}\}$.
Krok 4. Jeżeli $i < n$, to wróć do kroku 2.
Krok 5. $T_n^p := T_n^w$.
Krok 6. $i := i - 1$.
Krok 7. Wyznacz najpóźniejszy termin wystąpienia zdarzenia i:
$T_i^p = \min_{j\in\Gamma_i}\{T_j^p - t_{ij}\}$.
Krok 8. Jeżeli $i > 1$, to wróć do kroku 6.
Krok 9. Dla każdej czynności $\langle i, j\rangle$ oblicz $Z_{ij}^c = T_j^p - T_i^w - t_{ij}$.

Czynności krytyczne wyznaczają *ścieżkę krytyczną*, czyli taką, dla której suma czasów wykonania czynności krytycznych jest największa. Wartość tej sumy (długość ścieżki krytycznej) wynosi T_n^w i ogranicza od dołu czas realizacji projektu. Inaczej mówiąc, ścieżka krytyczna jest to taka ścieżka w grafie czynności, która prowadzi od zdarzenia początkowego do zdarzenia końcowego i zawiera jedynie czynności krytyczne. Wynik działania algorytmu dla projektu zdefiniowanego w tablicy 6.1. przedstawiono na rysunku 6.2.

Obliczenie zapasu czasu dla czynności przedstawiono w tablicy 6.3.



Rys. 6.2. Ścieżki krytyczne

6.1.5. Analiza rozwiązania

W sieci czynności może istnieć więcej niż jedna ścieżka krytyczna i tak jest w rozważanym przykładzie. Jedna ścieżka krytyczna to $\langle 0,1\rangle$, $\langle 1,3\rangle$, $\langle 3,4\rangle$, $\langle 4,6\rangle$, a druga to $\langle 0,1\rangle$, $\langle 1,3\rangle$, $\langle 3,5\rangle$, $\langle 5,6\rangle$. Oczywiście obie ścieżki krytyczne mają tę sama długość, czyli 24. Oznacza to, że przygotowania do seminarium należy rozpocząć najpóźniej 24 dni przed planowanym terminem jego rozpoczęcia.

Wyniki obliczeń przedstawione w tablicy 6.3. pozwalają na bardziej szczegółową analizę projektu. Poza całkowitym zapasem każdej czynności, obliczono także wartości zapasów: *niezależnego*: $T_j^w - T_i^p - t_{ij}$ oraz *swobodnego*: $T_j^w - T_i^w - t_{ij}$. Łatwo zauważyć, że zachodzi następująca zależność: $Z_{ij}^n \leqslant Z_{ij}^s \leqslant Z_{ij}^c$, a zatem dla czynności krytycznych wszystkie zapasy czasu są równe zero.

W analizowanym projekcie jedynie trzy czynności mają niezerowy zapas czasu. Są to dwie czynności związane z ustaleniem miejsca przeprowadzenia seminarium oraz pozyskanie sponsorów. Sporządzanie listy możliwych lokalizacji (czynność $\langle 0,2\rangle$) można przedłużyć maksymalnie o dwa dni, czyli tyle, ile wynosi zapas całkowity. Zapas niezależny i swobodny tej czynności są równe zero. Z definicji zapasów wynika, że wydłużenie tej czynności o 2 dni jest możliwe tylko wtedy, gdy rozpocznie się ona w najwcześniejszym możliwym terminie i spowoduje, że zdarzenie 2 wystąpi w najpóźniejszym możliwym terminie. W wypadku czynności $\langle 2,4\rangle$ występuje zapas swobodny, więc czynność tę można wydłużyć o dwa dni, ale tylko wtedy, gdy rozpocznie się ona

Tablica 6.3. Obliczenie zapasu czasu dla czynności w sieci z rysunku 6.2

$\langle i,j \rangle$	t_{ij}	T_i^w	T_i^p	T_j^w	T_j^p	Z_{ij}^c	Z_{ij}^s	Z_{ij}^n
$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	2	0	0	2	2	0	0	0
$\langle 0, 2 \rangle$	5	0	0	5	7	2	0	0
$\langle \mathbf{1}, \mathbf{3} \rangle$	7	2	2	9	9	0	0	0
$\langle 1, 5 \rangle$	5	2	2	17	17	10	10	10
$\langle 2, 4 \rangle$	8	5	7	15	15	2	2	0
$\langle \mathbf{3}, \mathbf{4} \rangle$	6	9	9	15	15	0	0	0
$\langle \mathbf{3}, \mathbf{5} \rangle$	8	9	9	17	17	0	0	0
$\langle \mathbf{4}, \mathbf{6} \rangle$	9	15	15	24	24	0	0	0
$\langle \mathbf{5}, \mathbf{6} \rangle$	7	17	17	24	24	0	0	0

Czynności krytyczne oznaczono pogrubiona czcionką

w najwcześniejszym możliwym terminie, gdyż zapas niezależny jest równy zero. Pozyskiwanie sponsorów (czynność $\langle 1, 5 \rangle$) można wydłużyć o 10 dni, nawet jeżeli rozpocznie się ono w najpóźniejszym dopuszczalnym terminie, nie opóźniając zdarzenia 5, gdyż zapas niezależny tej czynności wynosi 10. Spóźnienie jakiejkolwiek czynności krytycznej spowoduje opóźnienie całego projektu.

Zwróćmy uwagę na jeszcze jedną kwestię, mianowicie, że zdarzenia krytyczne nie wyznaczają jednoznacznie ścieżki krytycznej. Zauważmy, że zdarzenia 1, 3 i 5 są krytyczne i wyznaczają dwie ścieżki: $\langle 1, 5 \rangle$ oraz $\langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 5 \rangle$, z których tylko ta druga jest krytyczna. Dlatego jednoznaczne wyznaczenie ścieżki krytycznej wymaga obliczenia całkowitego zapasu czasu dla czynności.

6.2. Analiza czasowo-kosztowa

W niektórych sytuacjach czasy trwania pewnych czynności można skrócić, przeznaczając do ich wykonania dodatkowe zasoby (np. zatrudniając więcej osób). Takie rozwiązanie powoduje jednak wzrost kosztów realizacji projektu. W metodzie CPM nie bierze się pod uwagę kosztów, ale w praktyce stanowią one na równi z dotrzymaniem terminów istotne kryterium oceny jakości projektu. W tym punkcie przedstawimy metodę pozwalającą analizować projekt z punktu widzenia zarówno czasu, jak i kosztów jego realizacji. Przedstawiona poniżej metoda analizy czasowo-kosztowej nazywa się niekiedy metodą CPM/MCX (ang. *Cirtical Path Method/Minimum Cost Expediting*). W metodzie tej zakłada się, że zachodzi liniowa zależność między czasem trwania czynności a jej kosztem. Czas trwania czynności $\langle i, j \rangle$ nie może być krótszy niż pewien *czas graniczny* t_{ij}^g i nie jest dłuższy niż czas *normalny* t_{ij}^n. Koszt K_{ij}^n realizacji czynności w czasie normalnym nazywamy *kosztem normalnym*, a w czasie granicznym – *kosztem granicznym* K_{ij}^n. Naturalne są zależności: $t_{ij}^g \leqslant t_{ij} \leqslant t_{ij}^n$ oraz $K_{ij}^n \leqslant K_{ij} \leqslant K_{ij}^g$, gdzie t_{ij}, K_{ij} są odpowiednio rzeczywistym czasem i kosztem wykonania czynności. Przyrost kosztów przy skróceniu czasu wykonania czynności o jednostkę obliczamy jako

$$a_{ij} = \frac{K_{ij}^g - K_{ij}^n}{K_{ij}^n - K_{ij}^g} \tag{6.1}$$

i nazywamy *średnim gradientem kosztu.*

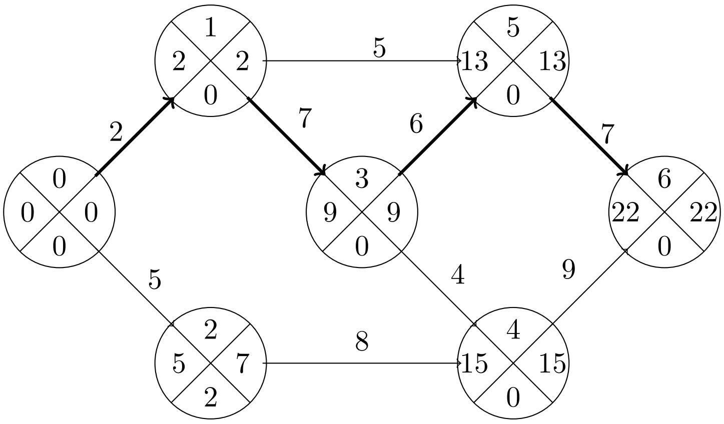
Załóżmy, że przy organizacji seminarium można zatrudnić dodatkową osobę. Wtedy czynność związaną z opracowaniem materiałów można skrócić o 2 dni, ale dodatkowy koszt wyniesie 100 zł. Podobnie opracowanie ulotek można skrócić o 3 dni, ale to zwiększy koszt o 240 zł. Ustalenie listy wystąpień można wykonać najkrócej w ciągu 4 dni za dodatkowe 150 zł. Ponadto listę możliwych lokalizacji można opracować w ciągu 3 dni za dodatkowe 120 zł. Czas trwania pozostałych czynności nie zależy od liczby osób zaangażowanych w ich realizację, więc nie można ich skrócić. Na podstawie powyższych informacji można wyliczyć średni gradient kosztu dla każdej czynności. Wyniki zebrano w tablicy 6.4.

Tablica 6.4. Koszty skrócenia czynności związanych z organizacją seminarium

$\langle i,j\rangle$	t_{ij}^n	t_{ij}^g	K_{ij}^n	K_{ij}^g	a_{ij}
$\langle 0,1\rangle$	2	2	100	100	–
$\langle 0,2\rangle$	5	3	250	370	60
$\langle 1,3\rangle$	7	7	400	400	–
$\langle 1,5\rangle$	5	5	30	30	–
$\langle 2,4\rangle$	8	8	60	60	–
$\langle 3,4\rangle$	6	4	300	450	75
$\langle 3,5\rangle$	8	6	800	900	50
$\langle 4,6\rangle$	9	6	600	840	80
$\langle 5,6\rangle$	7	7	1500	1500	–

Interesujące jest, o ile można maksymalnie skrócić czas przygotowania seminarium i jakie będą związane z tym koszty. Inna kwestia to, o ile można skrócić czas przygotowań, jeżeli koszt można zwiększyć co najwyżej o 100 zł.

Zauważmy, że skrócenie czynności, która nie jest krytyczna (np. $\langle 0,2\rangle$), nie spowoduje skrócenia czasu trwania projektu. Wybierzmy zatem czynność krytyczną, której skrócenie o jednostkę kosztuje najmniej, czyli taką, dla której a_{ij} ma najmniejszą wartość. Jest to czynność $\langle 3,5\rangle$. Zauważmy, że skrócenie tej czynności również nie przyniesie skrócenia czasu trwania projektu, jeżeli nie skrócimy ścieżki $\langle 3,4\rangle, \langle 4,6\rangle$. Ponieważ $a_{34} < a_{46}$, wybierzmy czynność $\langle 3,4\rangle$ i skróćmy równocześnie czynności $\langle 3,5\rangle$ i $\langle 3,4\rangle$ o $\min\{t_{35}^n - t_{35}^g, t_{34}^n - t_{34}^g\} = 2$. Dodatkowy koszt z tym związany wyniesie $50+75 = 125$ zł. W tej sytuacji, jak widać na rysunku 6.3, skrócenie czynności $\langle 4,6\rangle$ nie ma sensu. Zatem można skrócić czas przygotowań co najwyżej o dwa dni. Co do drugiego pytania, to możemy skrócić te same czynności (a co za tym idzie cały projekt) o 1 dzień za kwotę 62,50 zł. Organizatorzy seminarium mogą zdecydować, który wariant jest dla nich najbardziej korzystny.



Rys. 6.3. Ścieżka krytyczna po skróceniu czynności

Ogólny sposób postępowania w analizie czasowo-kosztowej nosi nazwę *Algorytmu kompresji* i przebiega w sposób następujący [17].

Algorytm kompresji

Krok 1. Znaleźć ścieżkę krytyczną dla zadania z normalnymi czasami wykonania czynności.

Krok 2. Zestawić czynności krytyczne, podać ich gradienty kosztów a_{ij} oraz czasy graniczne t_i^g.

Krok 3. Wyeliminować z zestawienia te czynności, dla których $t_i^g = t_i^n$.

Krok 4. Proces skracania rozpocząć od czynności krytycznej o najniższym gradiencie kosztów a_{ij}.

Krok 5. Należy starać się skrócić czas trwania czynności o jak największą liczbę jednostek, respektując dwa ograniczenia:
- czas graniczny danej czynności t_i^g,
- pojawienie się nowej ścieżki krytycznej.

Krok 6. W wypadku gdy istnieją dwie lub więcej ścieżki krytyczne w sieci, należy skracać czas o tę samą wielkość na wszystkich równoległych ścieżkach krytycznych.

Krok 7. Najkrótszy termin wykonania programu uzyskuje się, gdy wszystkie czynności na którejkolwiek ścieżce krytycznej osiągną czasy graniczne.

Krok 8. Koszty przyspieszenia czynności oblicza się, mnożąc liczbę jednostek czasu, o które czynność została skrócona przez jej gradient kosztów.

Krok 9. Całkowity koszt skrócenia czasu realizacji projektu obliczamy jako sumę kosztów poniesionych na poszczególnych etapach.

6.3. Metoda PERT

Trudności związane z precyzyjnym określeniem czasów trwania czynności spowodowały, że zaczęto poszukiwać metody uwzględniającej niepewność związaną z realizacją projektu. Zastosowanie klasycznej analizy statystycznej nie jest możliwe ze względu na małą powtarzalność przedsięwzięć. Jedną z pierwszych metod analizy przedsięwzięć uwzględniającą niepewność czasów trwania czynności jest metoda PERT. W metodzie tej przyjmuje się arbitralnie, że rozkład czasu trwania czynności jest rozkładem beta. Jest to rozkład ciągły o gęstości wyrażonej wzorem 6.2:

$$f(t) = H(t-a)^{p-1}(b-t)^{q-1} \text{ dla } a < t < b \tag{6.2}$$

gdzie a, b, p, q są parametrami rozkładu, a H jest stałą zależną od parametrów. Parametry te w metodzie PERT zastępuje się trzema wartościami, które są stosunkowo łatwe do ustalenia: optymistycznym czasem trwania czynności (a), pesymistycznym czasem trwania czynności (b) oraz najbardziej prawdopodobnym czasem trwania czynności (m), gdzie $a \leqslant m \leqslant b$. Na podstawie tych wartości można oszacować wartość średnią t i wariancję σ czasu trwania czynności:

$$t^e = \frac{a+4m+b}{6} \tag{6.3}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{36} \tag{6.4}$$

Celem analizy wg metody PERT jest oszacowanie prawdopodobieństw wystąpienia ujemnych luzów zdarzeń (6.5):

$$P\{L_i < 0\} = P\{T_i^p - T_i^w < 0\} \tag{6.5}$$

Prawdopodobieństwa te można wyznaczyć, znając rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej $L_i = T_i^p - T_i^w$ i korzystając z twierdzenia granicznego Lapunowa (zob. [10]). Przy dość ogólnych założeniach suma zmiennych losowych wyrażających czasy trwania czynności ma rozkład asymptotycznie normalny $N(\bar{T}_i^w, \sigma_{T_i^w})$, gdzie

$$\bar{T}_i^w = \max_{j \in \Gamma_i^{-1}} \{\bar{T}_j^w + t_{ij}^e\} \tag{6.6}$$

$$\sigma_{T_i^w} = \sqrt{\sigma^2_{\bar{T}_k^w} + \sigma^2_{t_{ik}^e}} \tag{6.7}$$

gdzie k jest indeksem zdarzenia, dla którego $\bar{T}_i^w = \bar{T}_k^w + t_{ik}^e$. Podobnie obliczamy wartość średnią i wariancję rozkładu zmiennej $\bar{T}_i^p$. W konsekwencji rozkład zmiennej losowej L_i jest w przybliżeniu normalny:

$$N\left(\bar{T}_i^p - \bar{T}_i^w, \sqrt{\sigma^2_{T_i^w} + \sigma^2_{T_i^p}}\right)$$

Prawdopodobieństwa ujemnych luzów zdarzeń obliczamy zatem jako:

$$P\{L_i < 0\} = \Phi\left(-\frac{\bar{T}_i^p - \bar{T}_i^w}{\sqrt{\sigma^2_{T_i^w} + \sigma^2_{T_i^p}}}\right) \tag{6.8}$$

gdzie $\Phi(x)$ jest dystrybuantą rozkładu normalnego $N(0,1)$. Pamiętamy przy tym, że dystrybuanta rozkładu normalnego $N(0,1)$ jest symetryczna, a zatem $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Metoda PERT polega zatem na wykorzystaniu metody CPM do wyznaczenia wartości oczekiwanych oraz wariancji terminów $\bar{T}_i^w$ i $\bar{T}_i^p$. Pojęcie ścieżki krytycznej traci sens ze względu na to, że czasy trwania czynności są zmiennymi losowymi. Prawdopodobieństwo ujemnego luzu zdarzenia pozwala ocenić szanse na dotrzymanie terminów pośrednich realizacji projektu. Gdy prawdopodobieństwo przekroczenia terminu jest duże (np. 0,8), to uważa się, że termin jest obarczony znacznym ryzykiem.

Można założyć, że studenci organizujący seminarium nie potrafią dokładnie określić czasów trwania poszczególnych czynności, łatwiej im podać wartości optymistyczne, pesymistyczne i najbardziej prawdopodobne. Wartości te zebrano w tablicy 6.5.

Tablica 6.5. Czas trwania czynności związanych z organizacją seminarium

Czynność	t_{ij}			t^e_{ij}	σ^2_{ij}
	a	m	b		
$\langle 0,1\rangle$	1	4	5	3,67	0,44
$\langle 0,2\rangle$	3	5	7	5,00	0,44
$\langle 1,3\rangle$	2	5	10	5,33	1,78
$\langle 1,5\rangle$	5	7	14	7,83	2,25
$\langle 2,4\rangle$	1	8	9	7,00	1,28
$\langle 3,4\rangle$	3	9	12	8,50	2,25
$\langle 3,5\rangle$	5	8	14	8,50	2,25
$\langle 4,6\rangle$	5	7	10	7,17	0,69
$\langle 5,6\rangle$	5	5	10	5,83	0,69

Przypuśćmy, że na realizację projektu przewidziano 26 dni. Wyznaczamy najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy wystąpienia zdarzeń, a w końcu prawdopodobieństwo ujemnego luzu zgodnie ze wzorami (6.6)-(6.8). Wyniki obliczeń zestawiono w tablicy 6.6.

Wartości w ostatniej kolumnie tablicy 6.6. oznaczają prawdopodobieństwo ujemnych luzów poszczególnych zdarzeń. Prawdopodobieństwo, że projekt nie zostanie zrealizowany w terminie 26 dni, wynosi 0,281.

Tablica 6.6. Obliczenie prawdopodobieństw ujemnych luzów zdarzeń

i	$\bar{T}_i^w$	$\sigma^2_{T_i^w}$	$\bar{T}_i^p$	$\sigma^2_{T_i^w}$	$\bar{T}_i^p - \bar{T}_i^w$	$u_i = \frac{\bar{T}_i^p - \bar{T}_i^w}{\sqrt{\sigma^2_{T_i^p} + \sigma^2_{T_i^w}}}$	$\Phi(-u_i)$
1	3,67	0,44	5,00	4,72	1,33	0,5865	0,281
2	5,00	0,44	11,83	2,47	6,83	4,0011	0,000
3	9,00	2,22	10,33	2,94	1,33	0,5865	0,281
4	17,50	4,47	18,83	0,69	1,33	0,5865	0,281
5	17,50	4,47	20,17	0,69	2,67	0,1731	0,121
6	24,67	5,17	26,00	0,00	1,33	0,5865	0,281

6.4. Zadania

Zadanie 6.1.
Opracowano listę czynności składających się na pewien projekt budowlany (tab. 6.7).

Tablica 6.7. Lista czynności projektu

Lp.	Czynność	Czas trwania czynności
1	$\langle 1, 2\rangle$	2
2	$\langle 1, 3\rangle$	5
3	$\langle 1, 4\rangle$	4
4	$\langle 2, 5\rangle$	3
5	$\langle 2, 6\rangle$	5
6.	$\langle 2, 7\rangle$	6
7	$\langle 3, 7\rangle$	2
8	$\langle 4, 8\rangle$	4
9	$\langle 4, 11\rangle$	10
10	$\langle 5, 9\rangle$	7
11	$\langle 6, 9\rangle$	8
12	$\langle 6, 10\rangle$	2
13	$\langle 7, 11\rangle$	6
14	$\langle 8, 14\rangle$	5
15	$\langle 9, 12\rangle$	3
16	$\langle 10, 12\rangle$	8
17	$\langle 11, 13\rangle$	2
18	$\langle 12, 15\rangle$	6
19	$\langle 13, 15\rangle$	5
20	$\langle 14, 15\rangle$	3

a) Jaki jest minimalny czas potrzebny na wykonanie całego projektu?
b) Które czynności mogą zostać spóźnione i o ile, aby zapewnić terminową realizację projektu?
c) O ile skróci się czas wykonania projektu, jeżeli czas trwania czynności $\langle 6, 9\rangle$ zmaleje o 2 jednostki?

Zadanie 6.2.
Pewien projekt składa się z 15 czynności, których czas trwania i zbiory poprzedników podano w tablicy 6.8. Należy narysować sieć czynności tego projektu oraz wyznaczyć ścieżkę krytyczną i podać najkrótszy możliwy czas realizacji tego projektu.

Tablica 6.8. Lista czynności projektu

Czynność	Czynności poprzedzające	Czas trwania czynności
1	-	6
2	1	4
3	1	8
4	2	6
5	2	9
6.	2	9
7	3,4	11
8	3.4	9
9	6,7	6
10	6,7	7
11	6,7	9
12	5,8,9	4
13	6,7	4
14	11,13	4
15	10,12	4

Zadanie 6.3.
Pewien projekt informatyczny wymaga wykonania 11 czynności, dla których znane są normalne i graniczne czasy wykonania oraz odpowiadające im koszty. Dane te zestawiono w tablicy 6.9.

Tablica 6.9. Koszty skrócenia czynności w projekcie informatycznym

Lp.	Czynność	t_{ij}^n	t_{ij}^g	K_{ij}^n	K_{ij}^g
1	$\langle 1,2 \rangle$	15	10	500	600
2	$\langle 1,3 \rangle$	6	6	400	400
3	$\langle 1,4 \rangle$	7	5	200	400
4	$\langle 2,5 \rangle$	15	13	250	370
5	$\langle 2,6 \rangle$	10	8	740	820
6.	$\langle 3,6 \rangle$	8	2	300	1500
7	$\langle 4,6 \rangle$	12	15	510	525
8	$\langle 4,7 \rangle$	25	20	500	625
9	$\langle 5,8 \rangle$	20	17	380	446
10	$\langle 6,8 \rangle$	22	20	200	500
11	$\langle 7,8 \rangle$	16	15	700	950

a) Narysować sieć czynności tego projektu.
b) Jaki jest najkrótszy możliwy czas realizacji tego projektu? Jaki jest koszt tego skrócenia?

c) O ile maksymalnie można skrócić projekt, nie zwiększając jego kosztów o więcej niż 300 zł?
d) Jakie czynności i o ile należy skrócić, aby czas trwania całego projektu skrócić o 3 dni przy możliwie najmniejszym koszcie? Ile wynosi koszt tego skrócenia?

Zadanie 6.4.
Pewien projekt informatyczny można wykonać przy zastosowaniu dwóch technologii. Charakterystyki czynności występujących w obu projektach podano w tablicach 6.10. oraz 6.11. Który z wariantów daje większą szansę zakończenia projektu przed terminem, który upływa za 27 dni?

Tablica 6.10. Szacowane czasy trwania czynności w wariancie I

Czynność	Czas trwania czynności		
	a	m	b
$\langle 1,2\rangle$	9	10	10
$\langle 1,3\rangle$	7	7	7
$\langle 1,4\rangle$	1	3	8
$\langle 2,5\rangle$	1	5	6
$\langle 3,6\rangle$	9	9	13
$\langle 3,7\rangle$	8	8	8
$\langle 4,7\rangle$	1	3	7
$\langle 5,8\rangle$	9	10	14
$\langle 6,8\rangle$	7	8	11
$\langle 7,8\rangle$	9	12	12

Tablica 6.11. Szacowane czasy trwania czynności w wariancie II

Czynność	Czas trwania czynności		
	a	m	b
$\langle 1,2\rangle$	7	7	8
$\langle 1,3\rangle$	3	5	8
$\langle 1,4\rangle$	4	5	10
$\langle 2,3\rangle$	1	1	1
$\langle 2,5\rangle$	5	5	5
$\langle 3,6\rangle$	10	11	11
$\langle 3,7\rangle$	2	8	8
$\langle 4,7\rangle$	3	10	12
$\langle 5,8\rangle$	3	4	6
$\langle 6,8\rangle$	6	6	6
$\langle 7,8\rangle$	9	9	15

Zadanie 6.5.
Oszacowano optymistyczny, pesymistyczny i najbardziej prawdopodobny czas trwania każdej czynności w procesie montażu silnika okrętowego i zestawiono

je w tablicy 6.12. Należy podać prawdopodobieństwo dotrzymania terminu wynikającego z umowy, który upływa za 50 dni.

Tablica 6.12. Szacowane czasy trwania czynności w procesie naprawy silnika okrętowego

Czynność	Czas trwania czynności		
	a	m	b
$\langle 1,2\rangle$	3	7	11
$\langle 1,3\rangle$	3	6	21
$\langle 2,4\rangle$	7	8	15
$\langle 2,5\rangle$	4	6	8
$\langle 3,4\rangle$	6	8	10
$\langle 3,6\rangle$	7	12	17
$\langle 4,5\rangle$	4	7	10
$\langle 4,6\rangle$	1	2	3
$\langle 4,8\rangle$	3	7	11
$\langle 5,8\rangle$	5	7	27
$\langle 5,9\rangle$	5	8	11
$\langle 6,7\rangle$	4	8	12
$\langle 7,8\rangle$	6	8	10
$\langle 7,10\rangle$	2	5	14
$\langle 7,11\rangle$	4	8	12
$\langle 8,10\rangle$	3	10	17
$\langle 9,10\rangle$	4	5	6
$\langle 9,12\rangle$	7	9	17
$\langle 10,13\rangle$	3	6	9
$\langle 11,13\rangle$	4	7	10
$\langle 12,13\rangle$	7	10	13