

Metody probabilistyczne

Rozwiązania zadań

6. Momenty zmiennych losowych

07.11.2017

Zadanie 1. Pokaż, że jeśli X ma rozkład $NB(r, p)$ to $EX = \frac{rp}{1-p}$

Odpowiedź: Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ma rozkład ujemny dwumianowy $NB(r, p)$ jeśli:

$$P(X = k) = \binom{r+k-1}{r-1} (1-p)^r p^k.$$

Liczymy wartość oczekiwaną:

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \binom{r+k-1}{r-1} (1-p)^r p^k, \quad (1)$$

gdzie opuściliśmy składnik sumy dla $k = 0$ (równy zero). Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} k \binom{r+k-1}{r-1} &= k \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!(r+k-1-(r-1))!} = k \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!k!} \\ &= \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!(k-1)!} = r \frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} \\ &= r \frac{(r+k-1)!}{r!(r+k-1-r)!} = r \binom{r+k-1}{r}. \end{aligned}$$

Wracając do (1), mamy:

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{k=1}^{\infty} r \binom{r+k-1}{r} (1-p)^r p^k \\ &= r \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{r+k-1}{r} (1-p)^{r+1} p^{k-1} \\ &= r \frac{p}{1-p} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k}{r} (1-p)^{r+1} p^k, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie ostatnia równość wynika ze zmiany indeksu sumowania z k na $k-1$. Czym jest suma otrzymana w ostatnim wyrażeniu? Aby odpowiedzieć na to pytanie zauważmy, że Y ma rozkład $NB(r+1, p)$ jeśli:

$$P(Y = k) = \binom{(r+1)+k-1}{(r+1)-1} (1-p)^{r+1} p^k = \binom{r+k}{r} (1-p)^{r+1} p^k.$$

A więc ostatnia suma w (2) jest po prostu równa:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(Y = k) = 1$$

Czyli $EX = \frac{rp}{1-p}$, co należało dowieść.

Zadanie 2. Pokaż, że jeśli X ma rozkład $\text{Pois}(\lambda)$ to $EX = \lambda$

Odpowiedź: Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ma rozkład Poissona $\text{Pois}(\lambda)$, jeśli:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Liczmy wartość oczekiwaną:

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k) \stackrel{(a)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\ &\stackrel{(b)}{=} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)}_{=1} = \lambda, \end{aligned}$$

gdzie w (a) opuściliśmy składnik sumy dla $k = 0$ (równy zero), w (b) zmieniliśmy indeks sumowania z k na $k - 1$, a ostatnia suma wynosi 1, ponieważ jest to suma prawdopodobieństw wszystkich możliwych wyników zmiennej losowej X .

Zadanie 3. Pokaż, że dla rozkładu geometrycznego:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \dots$$

wariancja wynosi $D^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Odpowiedź: Jeden sposób został pokazany na wykładzie. Tutaj rozważymy inny sposób, w którym bezpośrednio będziemy próbowali policzyć nieskończone sumy wykorzystując wiedzę z matematyki dyskretniej. Wiemy, że wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym wynosi $EX = \frac{1}{p}$. Wykorzystując wzór skróconego mnożenia dla wariancji:

$$D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2 = E(X^2) - \frac{1}{p^2}, \quad (3)$$

Musimy tylko policzyć $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1 - p)^{k-1} p$$

Rozważmy funkcję $g(p)$ określoną wyrażeniem:

$$g(p) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k+1} \quad (4)$$

Możemy wyznaczyć wartość $g(p)$ jako sumę nieskończonego szeregu geometrycznego $a + ar + ar^2 + \dots$ o wyrazie początkowym $a = (1 - p)^2$ i ilorazie $r = (1 - p)$:

$$g(p) = \frac{a}{1 - r} = \frac{(1 - p)^2}{1 - (1 - p)} = \frac{(1 - p)^2}{p} \quad (5)$$

Policzmy pierwszą i drugą pochodną $g(p)$. Możemy wykorzystać wyrażenie (4):

$$\begin{aligned} g'(p) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1 - p)^{k+1} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} ((1 - p)^{k+1})' = - \sum_{k=1}^{\infty} (k + 1)(1 - p)^k \\ g''(p) &= \left(- \sum_{k=1}^{\infty} (k + 1)(1 - p)^k \right)' = - \sum_{k=1}^{\infty} (k + 1) ((1 - p)^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} (k + 1)k(1 - p)^{k-1} \end{aligned}$$

Teraz zauważmy, że:

$$pg''(p) = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)k(1-p)^{k-1}p = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1}p}_{=E(X^2)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p}_{=EX},$$

a więc:

$$pg''(p) = E(X^2) + \frac{1}{p} \implies E(X^2) = pg''(p) - \frac{1}{p}.$$

Z drugiej strony, korzystając z wyrażenia (5), mamy:

$$\begin{aligned} g'(p) &= \left(\frac{(1-p)^2}{p} \right)' = \left(\frac{1-2p+p^2}{p} \right)' = \left(\frac{1}{p} \right)' - (2)' + (p)' = -\frac{1}{p^2} + 1 \\ g''(p) &= \left(-\frac{1}{p^2} + 1 \right)' = \frac{2}{p^3} \end{aligned}$$

Tym samym:

$$E(X^2) = pg''(p) - \frac{1}{p} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p},$$

a więc z (3):

$$D^2(X) = E(X^2) - \frac{1}{p^2} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$$

Zadanie 4. Pokaż, że dla rozkładu dwumianowego:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

wariancja wynosi $D^2(X) = np(1-p)$

Odpowiedź: Wiemy, że wartość oczekiwana w rozkładzie dwumianowym wynosi $EX = np$. Wykorzystując wzór skróconego mnożenia dla wariancji:

$$D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2 = E(X^2) - n^2 p^2, \quad (6)$$

musimy tylko policzyć $E(X^2)$:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^n kP(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^n \underbrace{(k(k-1) + k)}_{=k^2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \underbrace{\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{=EX=np} \\
&= \sum_{k=2}^n k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + np \\
&= \sum_{k=2}^n \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + np \\
&= n(n-1) \sum_{k=2}^n \underbrace{\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}}_{=\binom{n-2}{k-2}} p^k (1-p)^{n-k} + np \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-k} + np \\
&= n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k}}_{=1} + np \\
&= n(n-1)p^2 + np = n^2p^2 - np^2 + np,
\end{aligned}$$

gdzie ostatnia z sum równa jest jeden, ponieważ jest to suma prawdopodobieństw wszystkich możliwych wyników zmiennej o rozkładzie dwumianowym $B(n-2, p)$. Używając (6) otrzymujemy:

$$D^2(X) = E(X^2) - n^2p^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p).$$