Metody probabilistyczne

11. Twierdzenia graniczne

Wojciech Kotłowski

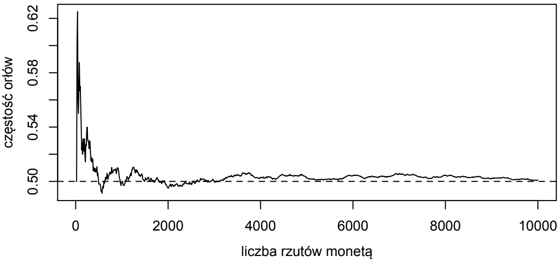
Instytut Informatyki PP
http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/

19.12.2017

Motywacja

Rzucamy wielokrotnie uczciwą monetą i zliczamy częstość orłów: $\frac{\#\text{orłów}}{\#\text{rzutów}}$.

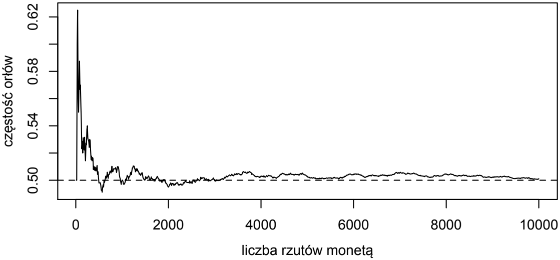
Obserwujemy zmiany tej częstości w miarę zwiększania liczby rzutów:



Motywacja

Rzucamy wielokrotnie uczciwą monetą i zliczamy częstość orłów: $\frac{\#\text{orłów}}{\#\text{rzutów}}$.

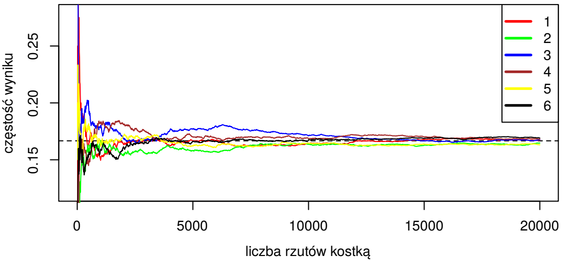
Obserwujemy zmiany tej częstości w miarę zwiększania liczby rzutów:



Wniosek: Częstość orłów zbiega do $\frac{1}{2}$, czyli prawdopodobieństwa wyrzucenia orła!

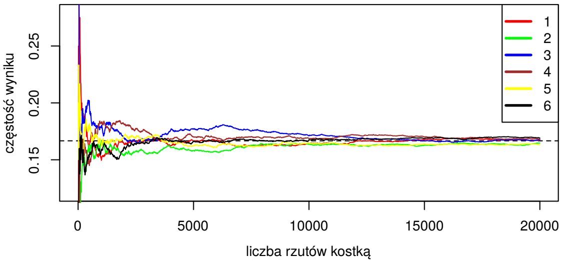
Motywacja

Podobna obserwacja dla wyników rzutu kostką (zliczamy częstość każdego wyniku $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)



Motywacja

Podobna obserwacja dla wyników rzutu kostką (zliczamy częstość każdego wyniku $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)



Częstość każdego wyniku zbiega do jego prawdopodobieństwa $\frac{1}{6} \simeq 0.167$.

Schemat Bernoulliego

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne o rozkładzie $B(p)$ ($X_i \in \{0, 1\}$)

- Rzuty monetą: X_i koduje reszkę/orła ($p = \frac{1}{2}$)
- Rzut kostką: X_i koduje „wypadło 6" / „nie wypadło 6" ($p = \frac{1}{6}$)

Schemat Bernoulliego

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne o rozkładzie $B(p)$ ($X_i \in \{0, 1\}$)

- Rzuty monetą: X_i koduje reszkę/orła ($p = \frac{1}{2}$)
- Rzut kostką: X_i koduje „wypadło 6” / „nie wypadło 6” ($p = \frac{1}{6}$)

Liczba sukcesów $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$

Schemat Bernoulliego

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne o rozkładzie $B(p)$ ($X_i \in \{0, 1\}$)

- Rzuty monetą: X_i koduje reszkę/orła ($p = \frac{1}{2}$)
- Rzut kostką: X_i koduje „wypadło 6" / „nie wypadło 6" ($p = \frac{1}{6}$)

Liczba sukcesów $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$

$$ES_n =$$

Schemat Bernoulliego

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne o rozkładzie $B(p)$ ($X_i \in \{0, 1\}$)

- Rzuty monetą: X_i koduje reszkę/orła ($p = \frac{1}{2}$)
- Rzut kostką: X_i koduje „wypadło 6" / „nie wypadło 6" ($p = \frac{1}{6}$)

Liczba sukcesów $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$

$$ES_n \;=\; np, \qquad D^2(S_n) \;=$$

Schemat Bernoulliego

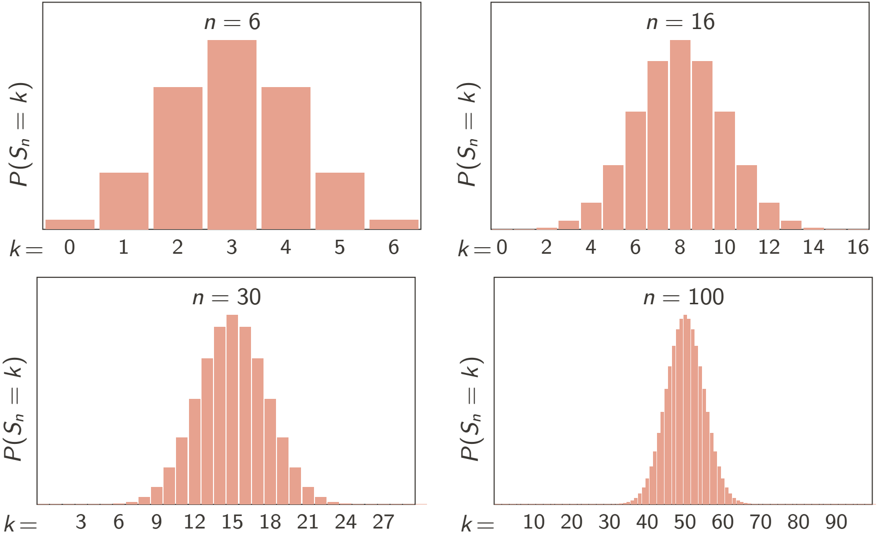
$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne o rozkładzie $B(p)$ ($X_i \in \{0, 1\}$)

- Rzuty monetą: X_i koduje reszkę/orła ($p = \frac{1}{2}$)
- Rzut kostką: X_i koduje „wypadło 6" / „nie wypadło 6" ($p = \frac{1}{6}$)

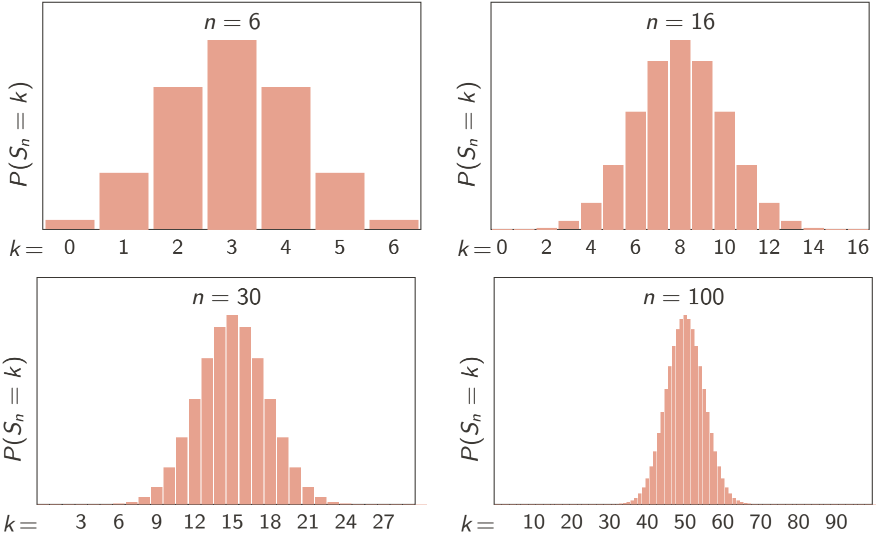
Liczba sukcesów $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$

$$ES_n = np, \qquad D^2(S_n) = np(1 - p)$$

Rozkład zmiennej S_n (dwumianowy) dla $p = \frac{1}{2}$



Rozkład zmiennej S_n (dwumianowy) dla $p = \frac{1}{2}$



Rozkład „koncentruje” się wokół $ES_n = \frac{1}{2}n$, ale ES_n i $D^2(S_n)$ rosną!

Częstość sukcesów

$$S_n \sim B(n,p) \qquad ES_n \;=\; np \qquad D^2(S_n) \;=\; np(1-p)$$

Zmieniamy skalę: częstość sukcesów (średnia arytmetyczna) $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$

$$E\overline{X}_n \quad =$$

Częstość sukcesów

$$S_n \sim B(n,p) \qquad ES_n \;=\; np \qquad D^2(S_n) \;=\; np(1-p)$$

Zmieniamy skalę: częstość sukcesów (średnia arytmetyczna) $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$

$$E\overline{X}_n \;=\; E\left(\frac{S_n}{n}\right) \;=\; \frac{ES_n}{n} \;=\; p$$

Częstość sukcesów

$$S_n \sim B(n,p) \qquad ES_n \;=\; np \qquad D^2(S_n) \;=\; np(1-p)$$

Zmieniamy skalę: częstość sukcesów (średnia arytmetyczna) $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$

$$E\overline{X}_n \;=\; E\left(\frac{S_n}{n}\right) \;=\; \frac{ES_n}{n} \;=\; p$$

$$D^2(\overline{X}_n) \;=\;$$

Częstość sukcesów

$$S_n \sim B(n, p) \qquad ES_n = np \qquad D^2(S_n) = np(1-p)$$

Zmieniamy skalę: częstość sukcesów (średnia arytmetyczna) $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$

$$E\overline{X}_n = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{ES_n}{n} = p$$

$$D^2(\overline{X}_n) = D^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{D^2(S_n)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

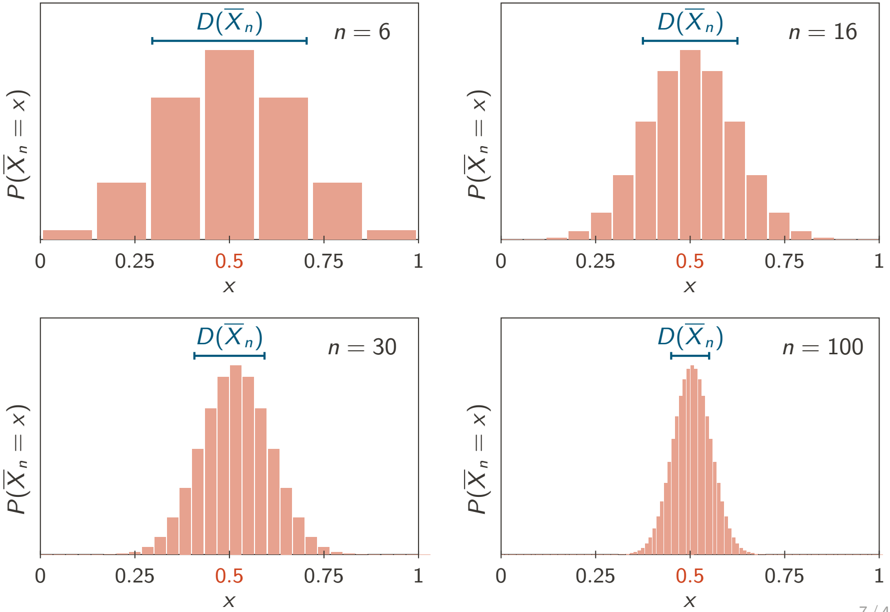
Częstość sukcesów

$$S_n \sim B(n, p) \qquad ES_n = np \qquad D^2(S_n) = np(1-p)$$

Zmieniamy skalę: częstość sukcesów (średnia arytmetyczna) $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$

$$\begin{aligned} E\overline{X}_n &= E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{ES_n}{n} = p \\ D^2(\overline{X}_n) &= D^2\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{D^2(S_n)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n} \\ D(\overline{X}_n) &= \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \end{aligned}$$

Rozkład zmiennej $\overline{X}_n$



Prawo wielkich liczb dla rozkładu dwupunktowego

Nierówność Czebyszewa – przypomnienie

Dla zmiennej losowej o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad P\big(|X - EX| > \epsilon\big) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Prawo wielkich liczb dla rozkładu dwupunktowego

Nierówność Czebyszewa – przypomnienie

Dla zmiennej losowej o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad P(|X - EX| > \epsilon) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Stosujemy twierdzenie do $\overline{X}_n$:

$$P(|\overline{X}_n - p| > \epsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

$E\overline{X}_n = p$

$D^2(\overline{X}_n) = \frac{p(1-p)}{n}$

Prawo wielkich liczb dla rozkładu dwupunktowego

Nierówność Czebyszewa – przypomnienie

Dla zmiennej losowej o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad P(|X - EX| > \epsilon) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Stosujemy twierdzenie do $\overline{X}_n$:

$$P(|\overline{X}_n - p| > \epsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

Szansa odchylenia się częstości o więcej niż ϵ od prawdopodobieństwa sukcesu maleje z n

Prawo wielkich liczb dla rozkładu dwupunktowego

Nierówność Czebyszewa – przypomnienie

Dla zmiennej losowej o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad P(|X - EX| > \epsilon) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Stosujemy twierdzenie do $\overline{X}_n$:

$$P(|\overline{X}_n - p| > \epsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \quad \Longrightarrow \quad P(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

Szansa odchylenia się częstości o co najwyżej ϵ od prawdopodobieństwa sukcesu rośnie z n

Prawo wielkich liczb dla rozkładu dwupunktowego

Nierówność Czebyszewa – przypomnienie

Dla zmiennej losowej o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad P(|X - EX| > \epsilon) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Stosujemy twierdzenie do $\overline{X}_n$:

$$P(|\overline{X}_n - p| > \epsilon) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \quad \Longrightarrow \quad P(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon) \geqslant 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}$$

Prawo wielkich liczb Bernoulliego

Dla dowolnego $\epsilon > 0$:

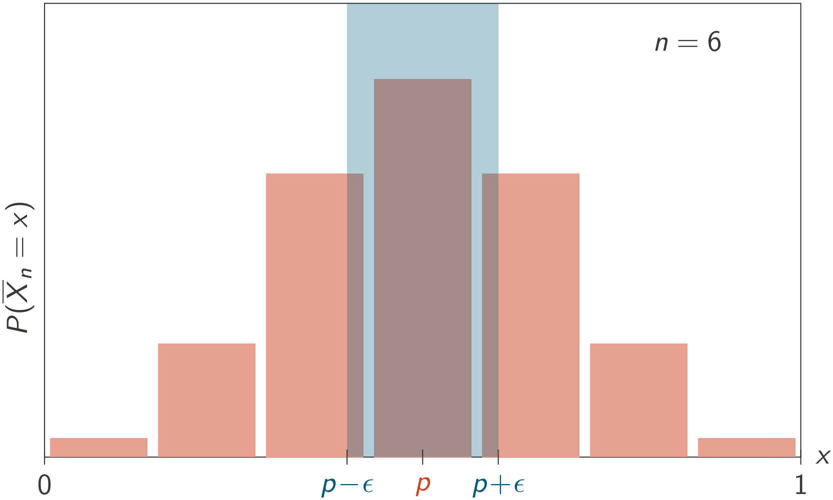
$$\lim_{n\to\infty} P(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon) \; = \; 1$$

Zmienna losowa $\overline{X}_n$ zbiega „według prawdopodobieństwa” do p.

Prawo wielkich liczb Bernoulliego ($p = \frac{1}{2}$)

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n \to \infty} P\big(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\big) = 1$$

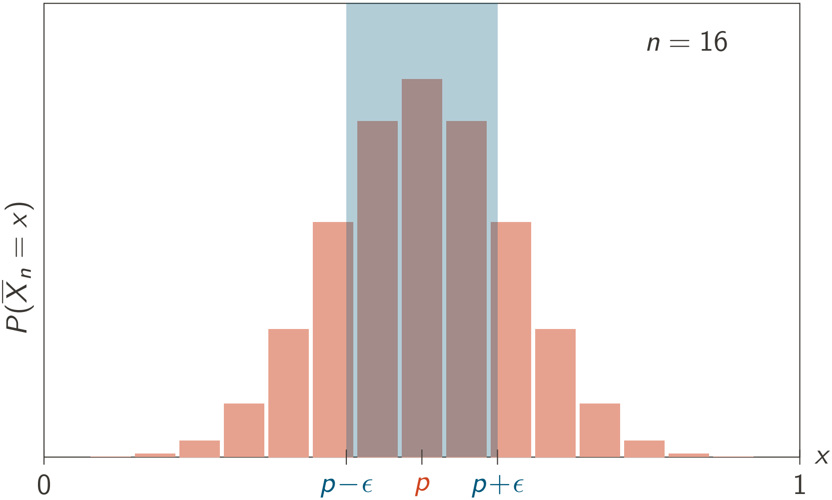
$$P\big(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\big) = P\big(p - \epsilon \leqslant \overline{X}_n \leqslant p + \epsilon\big)$$



Prawo wielkich liczb Bernoulliego ($p = \frac{1}{2}$)

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\big(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\big) \;=\; 1$$

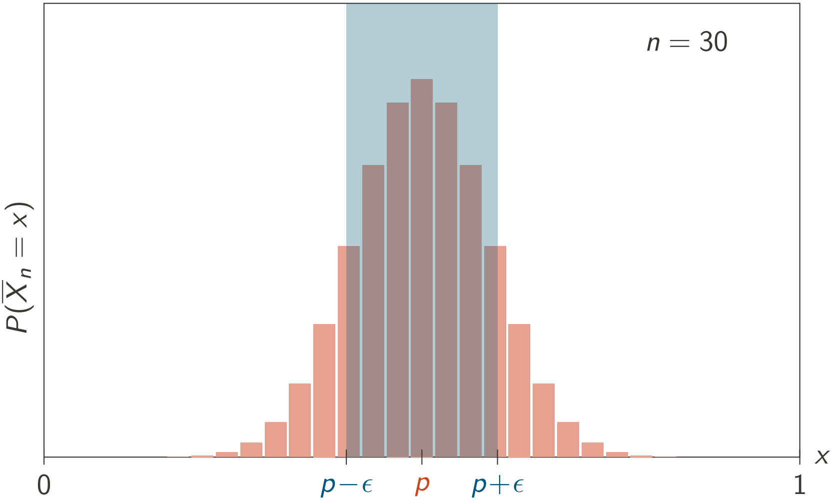
$$P\big(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\big) \;=\; P\big(p - \epsilon \leqslant \overline{X}_n \leqslant p + \epsilon\big)$$



Prawo wielkich liczb Bernoulliego ($p = \frac{1}{2}$)

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\right) \; = \; 1$$

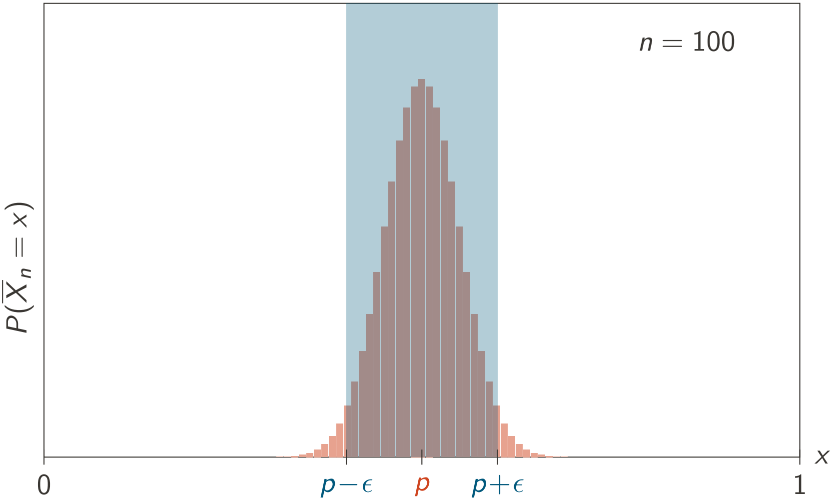
$$P\left(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\right) \; = \; P\left(p - \epsilon \leqslant \overline{X}_n \leqslant p + \epsilon\right)$$



Prawo wielkich liczb Bernoulliego ($p = \frac{1}{2}$)

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\right) = 1$$

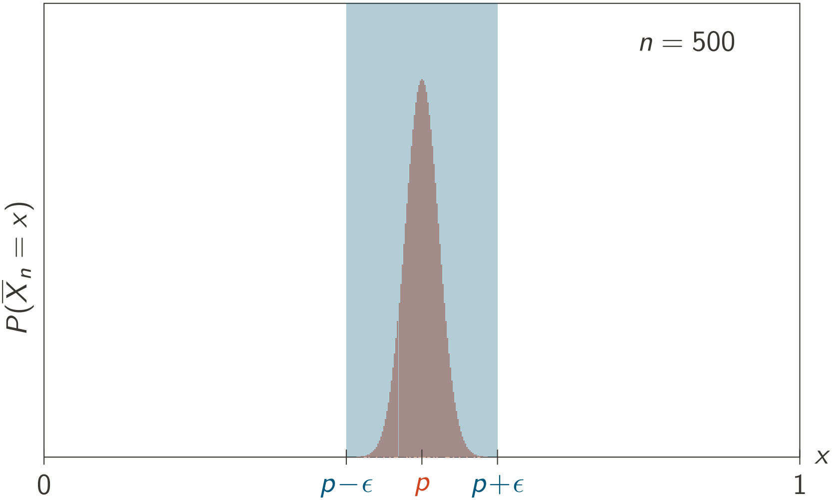
$$P\left(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\right) = P\left(p - \epsilon \leqslant \overline{X}_n \leqslant p + \epsilon\right)$$



Prawo wielkich liczb Bernoulliego ($p = \frac{1}{2}$)

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\right) \;=\; 1$$

$$P\left(|\overline{X}_n - p| \leqslant \epsilon\right) \;=\; P\left(p - \epsilon \leqslant \overline{X}_n \leqslant p + \epsilon\right)$$



Ciąg niezależnych zmiennych losowych

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, a więc tej samej wartości oczekiwanej $EX_i = \mu$ i wariancji $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Definiujemy: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Ciąg niezależnych zmiennych losowych

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, a więc tej samej wartości oczekiwanej $EX_i = \mu$ i wariancji $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Definiujemy: $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E\overline{X}_n =$$

Ciąg niezależnych zmiennych losowych

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, a więc tej samej wartości oczekiwanej $EX_i = \mu$ i wariancji $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Definiujemy: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E\overline{X}_n = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{EX_i}_{\mu} = \mu$$

Ciąg niezależnych zmiennych losowych

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, a więc tej samej wartości oczekiwanej $EX_i = \mu$ i wariancji $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Definiujemy: $\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E\overline{X}_n = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{EX_i}_{\mu} = \mu$$

$$D^2(\overline{X}_n) =$$

Ciąg niezależnych zmiennych losowych

$X_1, \dots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, a więc tej samej wartości oczekiwanej $EX_i = \mu$ i wariancji $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Definiujemy: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$
\begin{aligned}
E\overline{X}_n &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{EX_i}_{\mu} = \mu \\
D^2(\overline{X}_n) &= D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{D^2(X_i)}_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

Ciąg niezależnych zmiennych losowych

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, a więc tej samej wartości oczekiwanej $EX_i = \mu$ i wariancji $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Definiujemy: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$
\begin{aligned}
E\overline{X}_n &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{EX_i}_{\mu} = \mu \\
D^2(\overline{X}_n) &= D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{D^2(X_i)}_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

Stosujemy nierówność Czebyszewa:

$$
P\left(|\overline{X}_n - \mu| > \epsilon\right) \leqslant \frac{D^2(\overline{X}_n)}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}
$$

Ciąg niezależnych zmiennych losowych

$X_1, \ldots, X_n$ – niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie, a więc tej samej wartości oczekiwanej $EX_i = \mu$ i wariancji $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Definiujemy: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$E\overline{X}_n = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{EX_i}_{\mu} = \mu$$

$$D^2(\overline{X}_n) = D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{D^2(X_i)}_{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Stosujemy nierówność Czebyszewa:

$$P(|\overline{X}_n - \mu| > \epsilon) \leqslant \frac{D^2(\overline{X}_n)}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Prawo wielkich liczb

Słabe prawo wielkich liczb Chińczyna

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, mających wartość oczekiwaną μ i wariancję $\sigma^2 < \infty$. Wtedy dla dowolnego $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leqslant \epsilon\right) \; = \; 1$$

Prawo wielkich liczb

Słabe prawo wielkich liczb Chińczyna

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, mających wartość oczekiwaną μ i wariancję $\sigma^2 < \infty$. Wtedy dla dowolnego $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(|\overline{X}_n - \mu| \leqslant \epsilon\right) \ = \ 1$$

Prawo wielkich liczb Bernoulliego jest szczególnym przypadkiem tego twierdzenia, jeśli zmienne $X_1, X_2, \ldots$ mają rozkład dwupunktowy.

Zbieżność według prawdopodobieństwa

Niech $X_n = (X_1, X_2, \ldots)$ będzie ciągiem zmiennych losowych.

Mówimy, że ciąg X_n dąży do zmiennej losowej X według prawdopodobieństwa, jeśli dla dowolnego $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) \; = \; 0$$

Oznaczamy $X_n \xrightarrow{P} X$

Zbieżność według prawdopodobieństwa

Niech $X_n = (X_1, X_2, \ldots)$ będzie ciągiem zmiennych losowych.

Mówimy, że ciąg X_n dąży do zmiennej losowej X według prawdopodobieństwa, jeśli dla dowolnego $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) \; = \; 0$$

Oznaczamy $X_n \xrightarrow{P} X$

W szczególności, jeśli X ma rozkład jednopunktowy, tzn. $P(X = c) = 1$, zapisujemy $X_n \xrightarrow{P} c$.

Zbieżność według prawdopodobieństwa

Niech $X_n = (X_1, X_2, \ldots)$ będzie ciągiem zmiennych losowych.

Mówimy, że ciąg X_n dąży do zmiennej losowej X według prawdopodobieństwa, jeśli dla dowolnego $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n \to \infty} P(|X_n - X| > \epsilon) \;=\; 0$$

Oznaczamy $X_n \xrightarrow{P} X$

W szczególności, jeśli X ma rozkład jednopunktowy, tzn. $P(X = c) = 1$, zapisujemy $X_n \xrightarrow{P} c$.

Korzystając z powyższej równości możemy przepisać prawa wielkich liczb

Prawo wielkich liczb

Słabe prawo wielkich liczb Chińczyna

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, mających wartość oczekiwaną μ i wariancję $\sigma^2 < \infty$. Wtedy:

$$\overline{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

Prawo wielkich liczb

Słabe prawo wielkich liczb Czebyszewa

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych z wartościami oczekiwanymi $EX_i = \mu_i$ i wariancjami $D^2(X_i) = \sigma_i^2$, wspólnie ograniczonymi przez σ^2 (tzn. $\sigma_i^2 \leqslant \sigma^2$ dla wszystkich i). Niech $\overline{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu_i$. Wtedy

$$\overline{X}_n - \overline{\mu}_n \xrightarrow{P} 0$$

Prawo wielkich liczb

Słabe prawo wielkich liczb Czebyszewa

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych z wartościami oczekiwanymi $EX_i = \mu_i$ i wariancjami $D^2(X_i) = \sigma_i^2$, wspólnie ograniczonymi przez σ^2 (tzn. $\sigma_i^2 \leqslant \sigma^2$ dla wszystkich i). Niech $\overline{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu_i$. Wtedy

$$\overline{X}_n - \overline{\mu}_n \ \xrightarrow{P}\ 0$$

Zadanie 1

Udowodnij to twierdzenie

Zbieżność „z prawdopodobieństwem jeden”

Rozważmy wyrażenie:

$$\lim_{n \to \infty} X_n = X$$

Zbieżność „z prawdopodobieństwem jeden”

Rozważmy wyrażenie:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = X$$

Ta równość tyczy się zmiennych losowych,
powyższe wyrażenie jest więc zdarzeniem losowym!

Zbieżność „z prawdopodobieństwem jeden”

Rozważmy wyrażenie:

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) \;=\; X(\omega)$$

Zbieżność „z prawdopodobieństwem jeden”

Rozważmy wyrażenie:

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \lim_{n \to \infty} X_n(\omega) \; = \; X(\omega)$$

To stwierdzenie nazywa się zbieżnością „na pewno”: zbieżność zachodzi dla wszystkich $\omega \in \Omega$.

Zwykle zbyt silne, ponieważ musi zajść dla ω, dla których $P(\{\omega\}) = 0$ (np. dla schematu Bernoulliego może się zdarzyć (z prawd. 0), że zaobserwujemy same porażki)

Zbieżność „z prawdopodobieństwem jeden”

Rozważmy wyrażenie:

$$\forall \omega \in \Omega \qquad \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \;=\; X(\omega)$$

To stwierdzenie nazywa się zbieżnością „na pewno”: zbieżność zachodzi dla wszystkich $\omega \in \Omega$.

Zwykle zbyt silne, ponieważ musi zajść dla ω, dla których $P(\{\omega\}) = 0$ (np. dla schematu Bernoulliego może się zdarzyć (z prawd. 0), że zaobserwujemy same porażki)

Mówimy, że ciąg X_n dąży do zmiennej losowej X z prawdopodobieństwem jeden („prawie na pewno”) jeśli:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) \;=\; 1$$

Zapisujemy $X_n \xrightarrow{\text{z pr. 1}} X$

Zbieżność według prawdopodobieństwa a zbieżność z prawdopodobieństwem jeden

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1 \qquad \left(X_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X\right)$$

$$\forall\epsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0 \qquad \left(X_n \xrightarrow{P} X\right)$$

Zbieżność według prawdopodobieństwa a zbieżność z prawdopodobieństwem jeden

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1 \qquad \left(X_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X\right)$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0 \qquad \left(X_n \xrightarrow{P} X\right)$$

Zbieżność z prawdopodobieństwem jeden implikuje zbieżność według prawdopodobieństwa:

$$X_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X \qquad \Longrightarrow \qquad X_n \xrightarrow{P} X$$

Zbieżność według prawdopodobieństwa a zbieżność z prawdopodobieństwem jeden

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1 \qquad \left(X_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X\right)$$

$$\forall\epsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0 \qquad \left(X_n \xrightarrow{P} X\right)$$

Zbieżność z prawdopodobieństwem jeden implikuje zbieżność według prawdopodobieństwa:

$$X_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X \qquad \Longrightarrow \qquad X_n \xrightarrow{P} X$$

Zadanie 2

Udowodnij tę implikację

Zbieżność według prawdopodobieństwa a zbieżność z prawdopodobieństwem jeden

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1 \qquad \left(X_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X\right)$$

$$\forall\epsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0 \qquad \left(X_n \xrightarrow{P} X\right)$$

Zbieżność z prawdopodobieństwem jeden implikuje zbieżność według prawdopodobieństwa:

$$X_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X \qquad \Longrightarrow \qquad X_n \xrightarrow{P} X$$

Zadanie 2

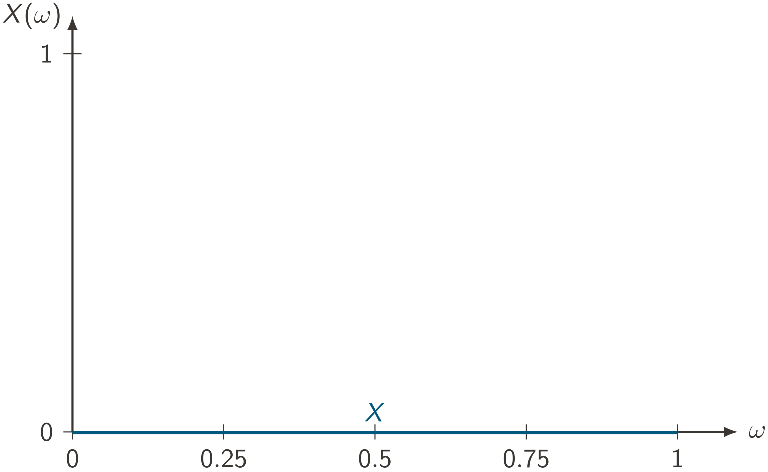
Udowodnij tę implikację

Pokażemy kontrprzykład, że implikacja w drugą stronę nie zachodzi

Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0, 1]$, P – rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

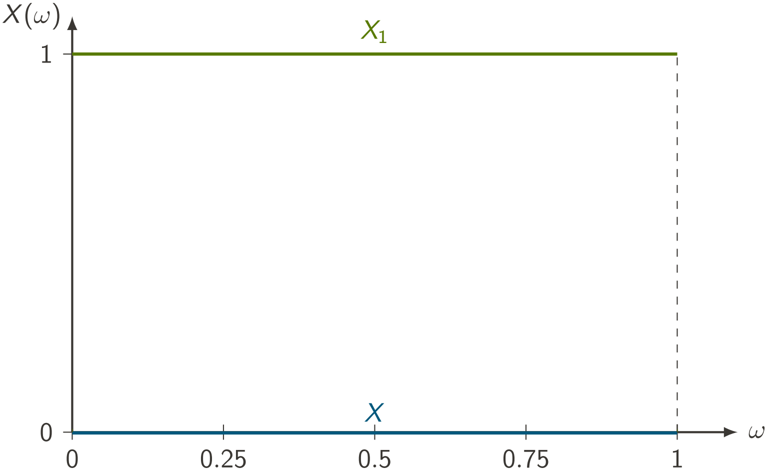
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \;\; \forall \omega \in [0, 1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0, 1]$, P – rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

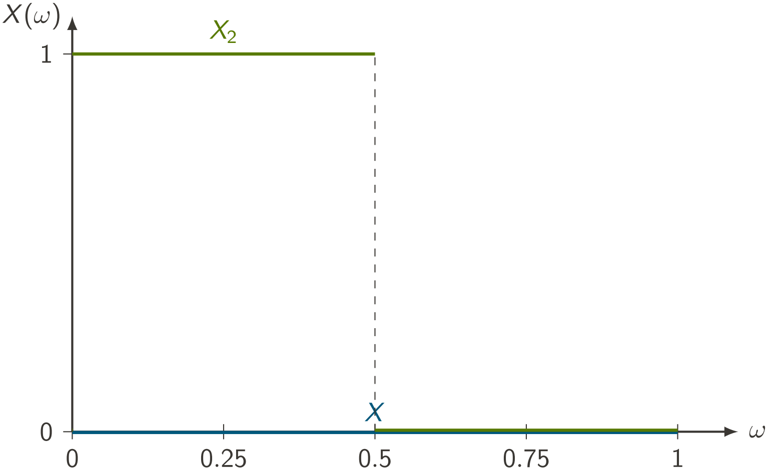
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \;\; \forall \omega \in [0, 1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0,1]$, P – rozkład jednostajny na $[0,1]$.

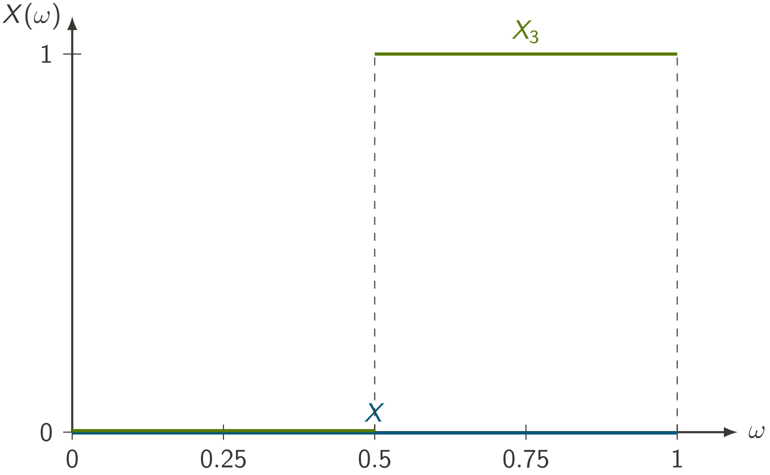
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \ \ \forall \omega \in [0,1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0, 1]$, P – rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

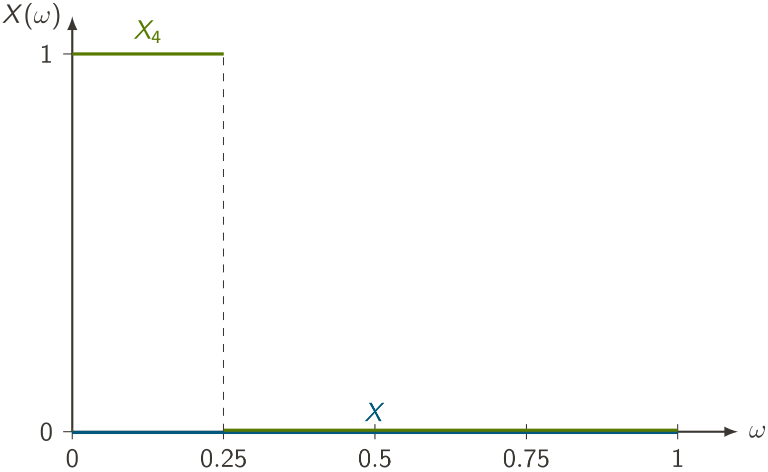
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \;\; \forall \omega \in [0, 1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0, 1]$, P – rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

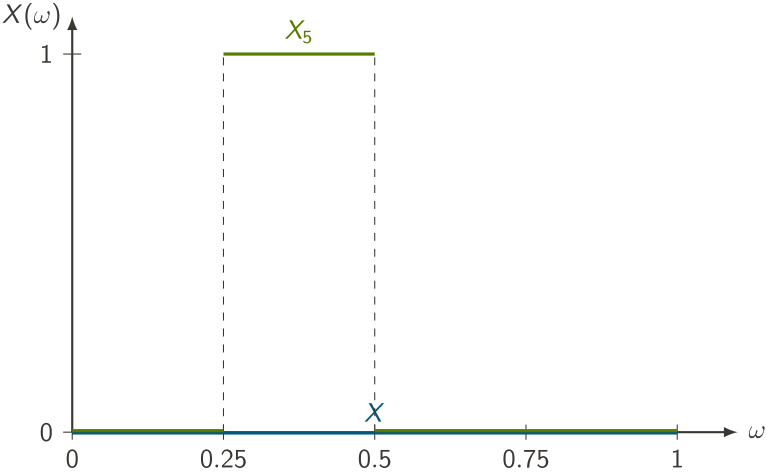
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \ \ \forall \omega \in [0, 1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0, 1]$, P – rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

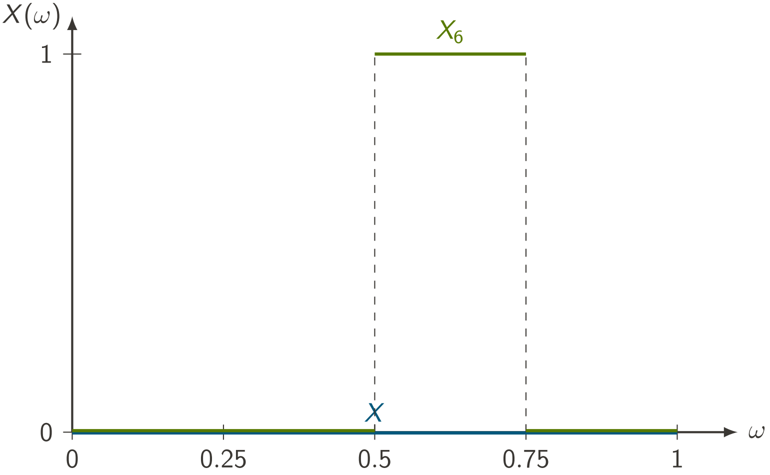
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \ \ \forall \omega \in [0, 1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0, 1]$, P – rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

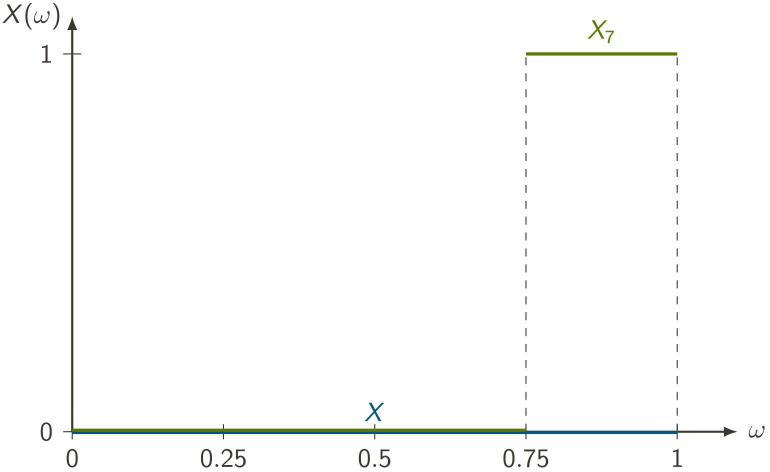
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \;\; \forall \omega \in [0, 1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0, 1]$, P – rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

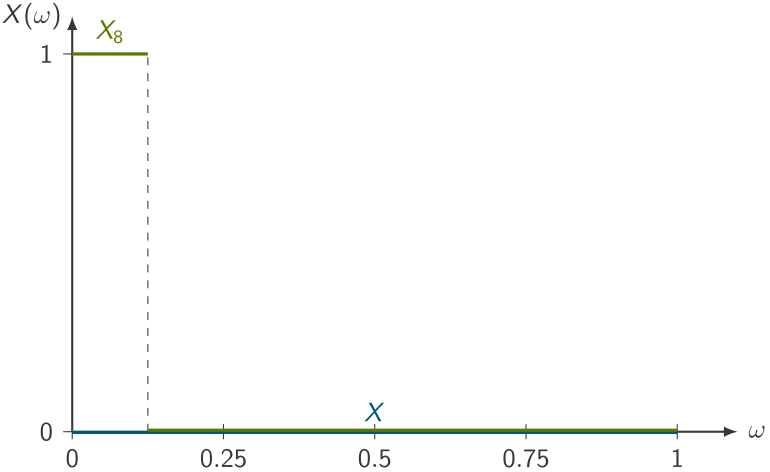
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \;\; \forall \omega \in [0, 1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0,1]$, P – rozkład jednostajny na $[0,1]$.

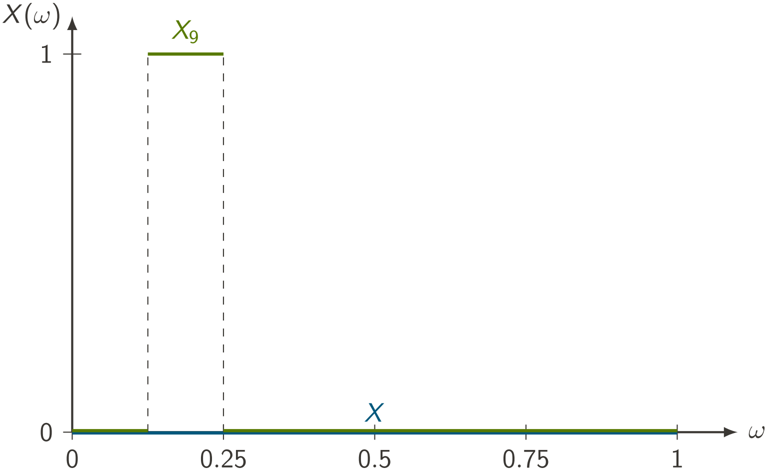
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \;\; \forall \omega \in [0,1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

$\Omega = [0, 1]$, P – rozkład jednostajny na $[0, 1]$.

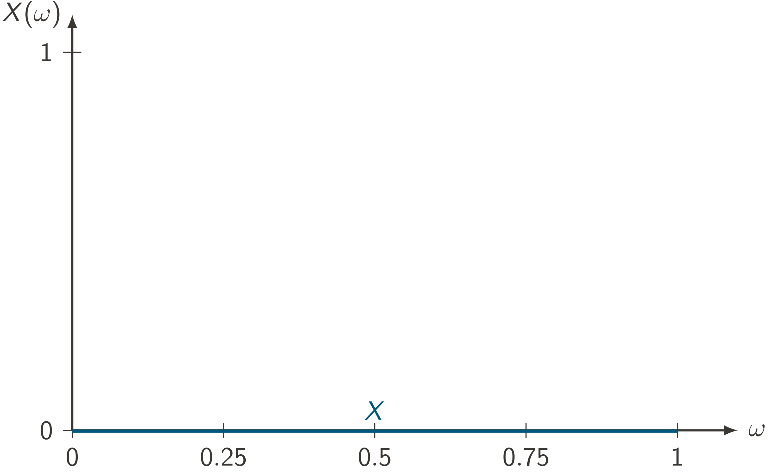
Badamy zbieżność ciągu $X_1, X_2, \ldots$ do zmiennej $X(\omega) = 0 \ \ \forall \omega \in [0, 1]$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0, 1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

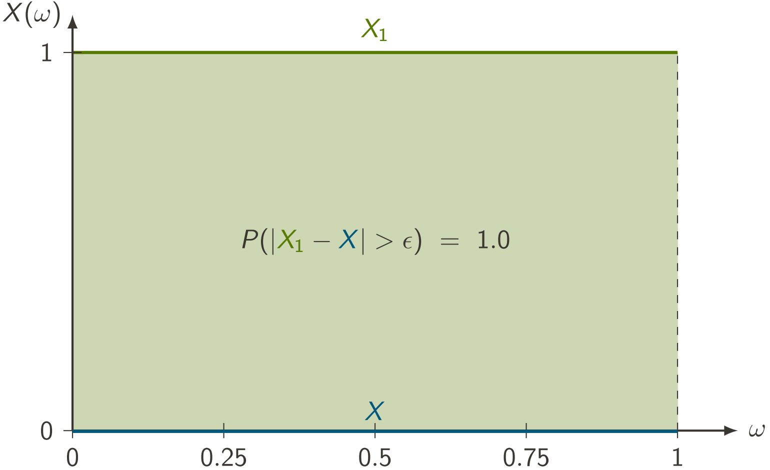
$$\forall \epsilon \in (0, 1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0, 1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

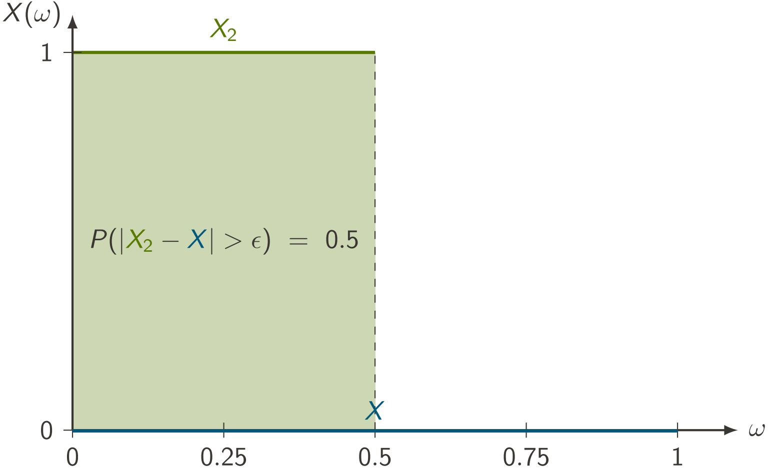
$$\forall \epsilon \in (0, 1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0,1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

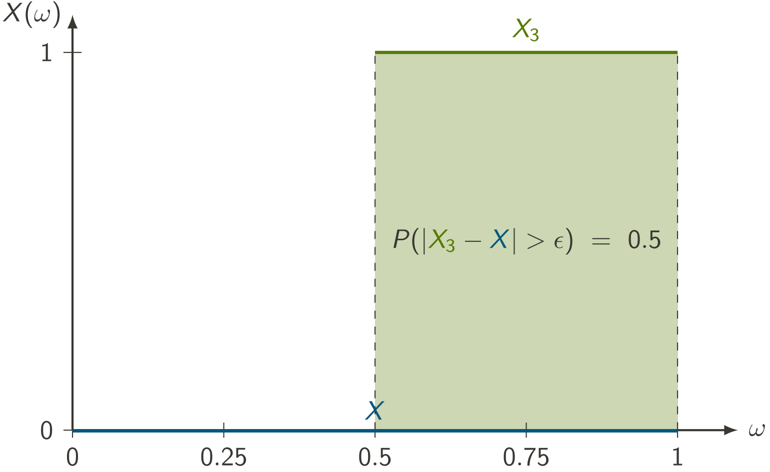
$$\forall \epsilon \in (0,1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0, 1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

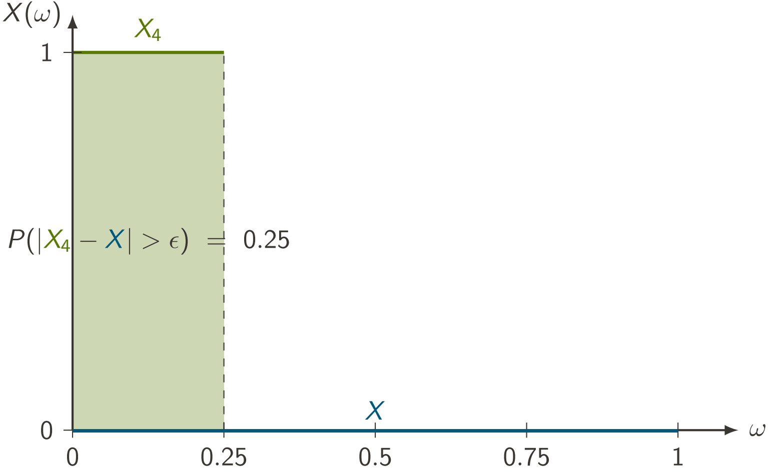
$$\forall \epsilon \in (0, 1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0, 1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

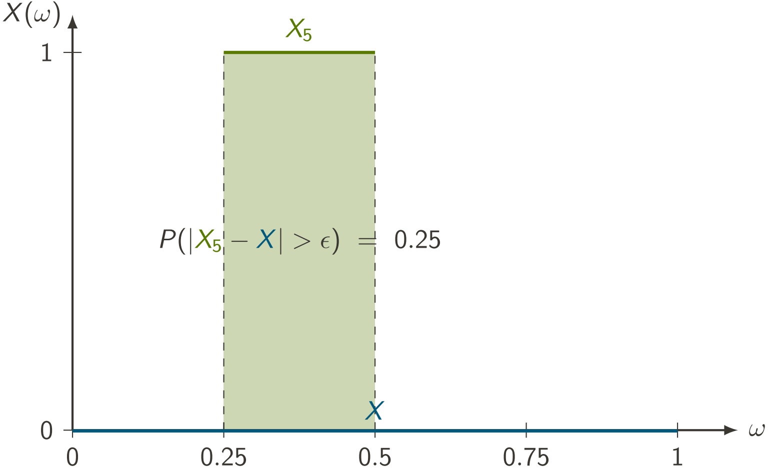
$$\forall \epsilon \in (0,1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0, 1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

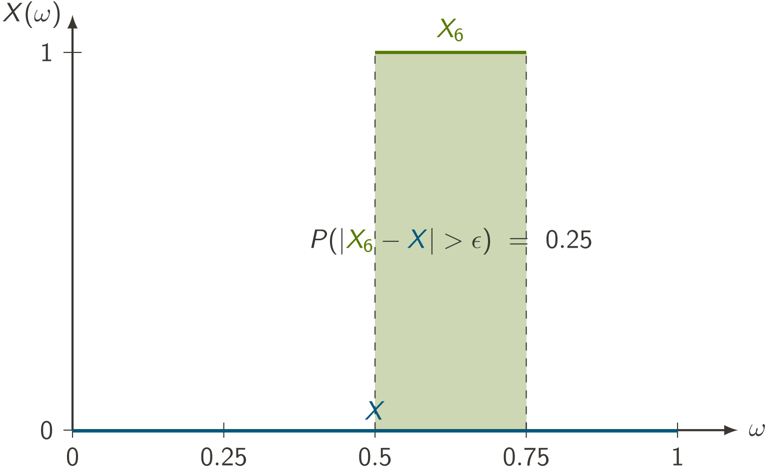
$$\forall \epsilon \in (0, 1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0, 1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

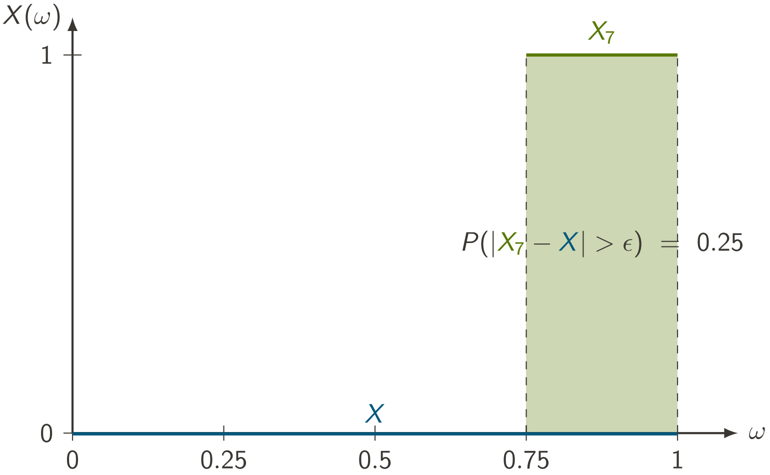
$$\forall \epsilon \in (0,1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0, 1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

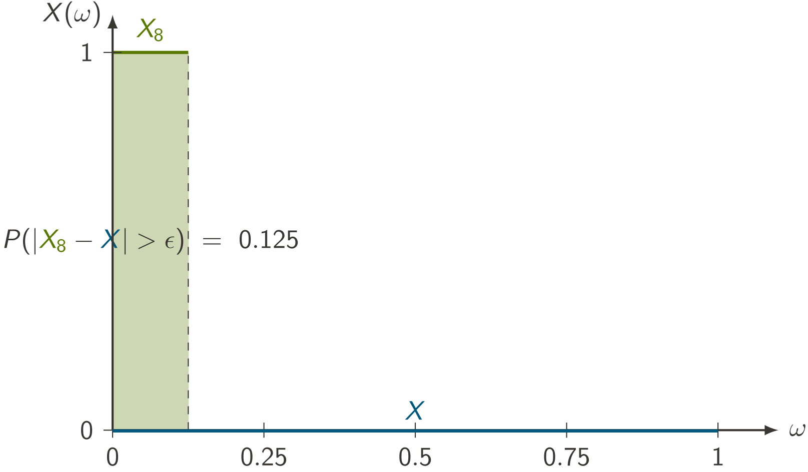
$$\forall \epsilon \in (0, 1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0, 1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

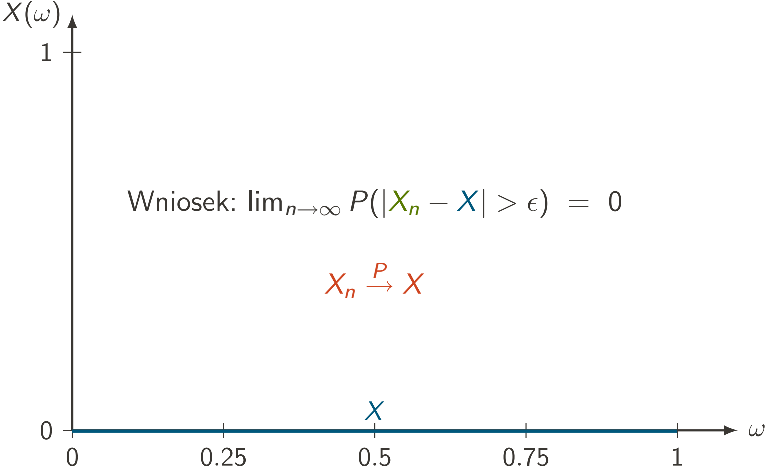
$$\forall \epsilon \in (0, 1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ponieważ $X_n \in \{0,1\}$ i $X \equiv 0$, mamy:

$$\forall \epsilon \in (0,1) \quad |X_n - X| > \epsilon \iff X_n = 1$$

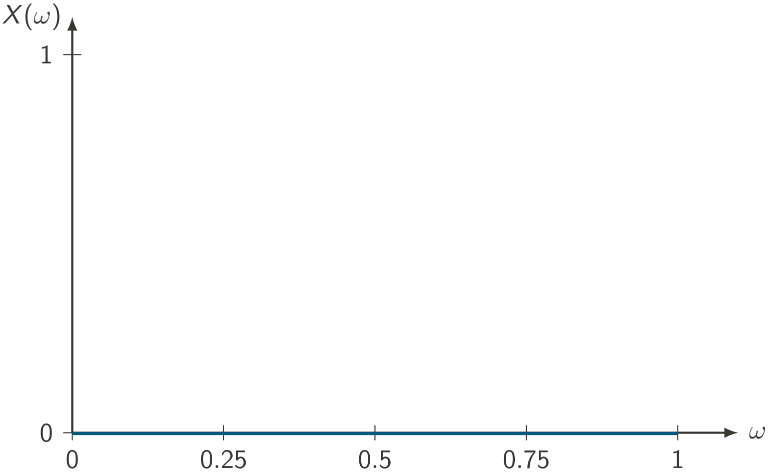


Wniosek: $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) \ = \ 0$

$$X_n \xrightarrow{P} X$$

Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

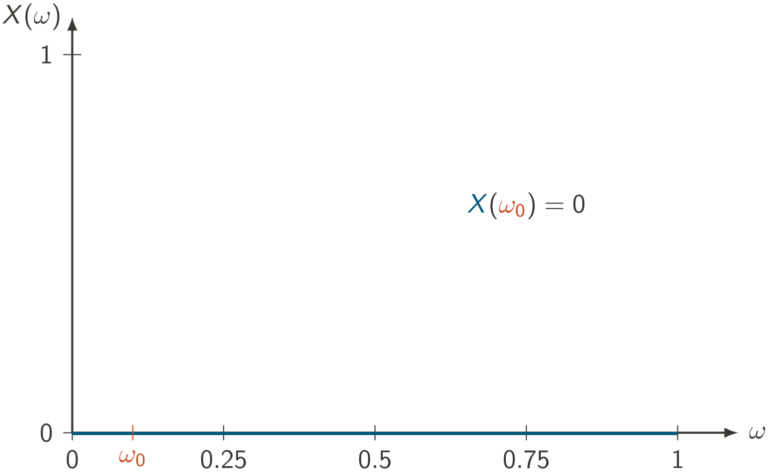
Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

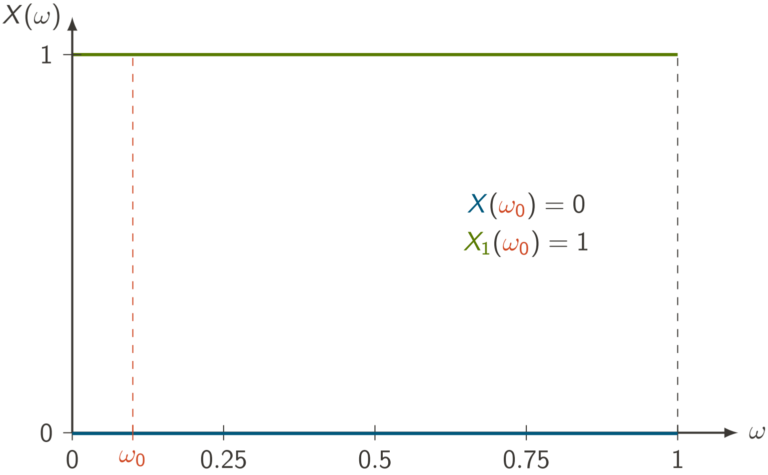
$X_n(\omega_0) =$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

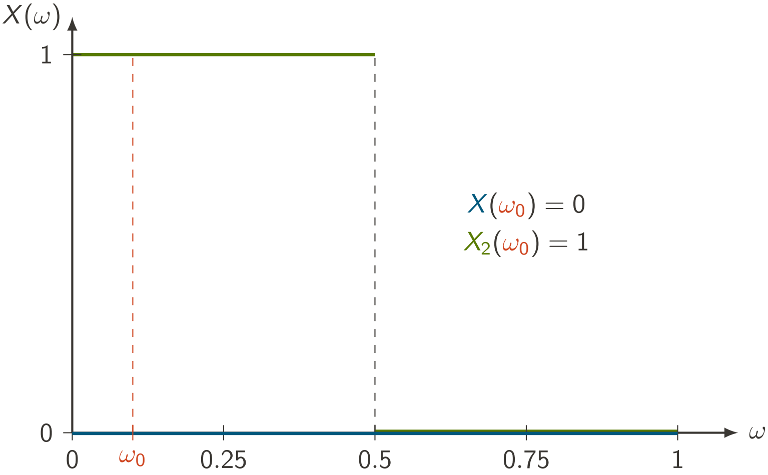
$$X_n(\omega_0) = 1,$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

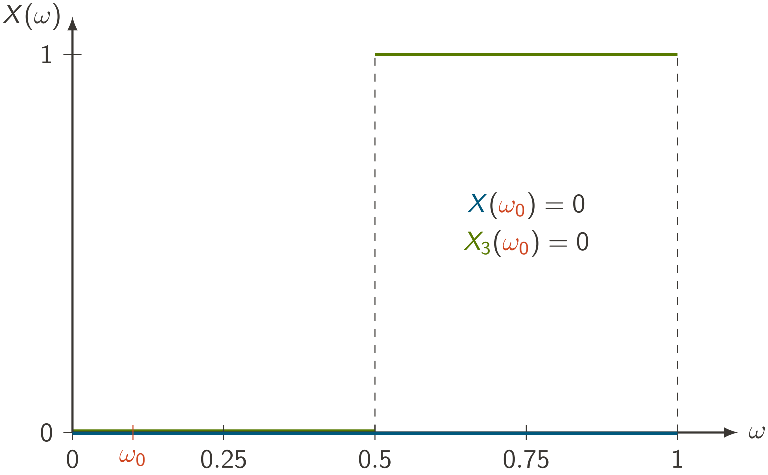
$$X_n(\omega_0) \;=\; 1, 1,$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

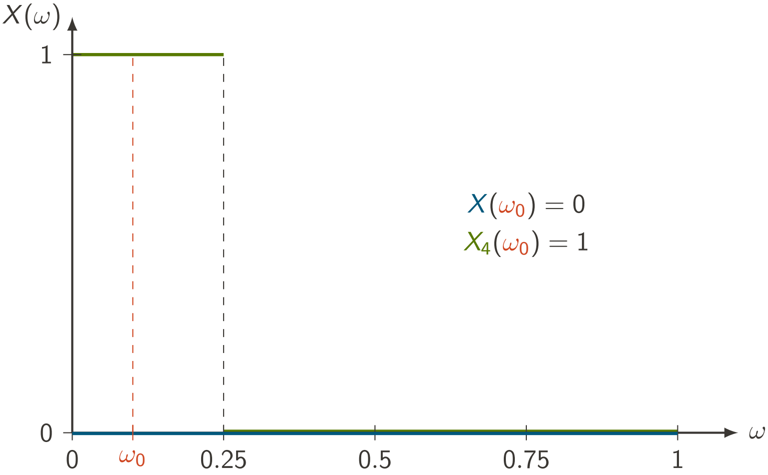
$$X_n(\omega_0) = 1, 1, 0,$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

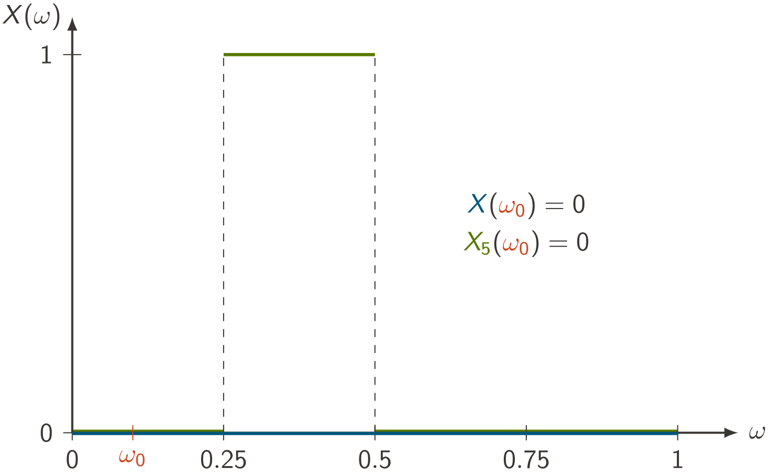
$$X_n(\omega_0) \;=\; 1, 1, 0, 1,$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

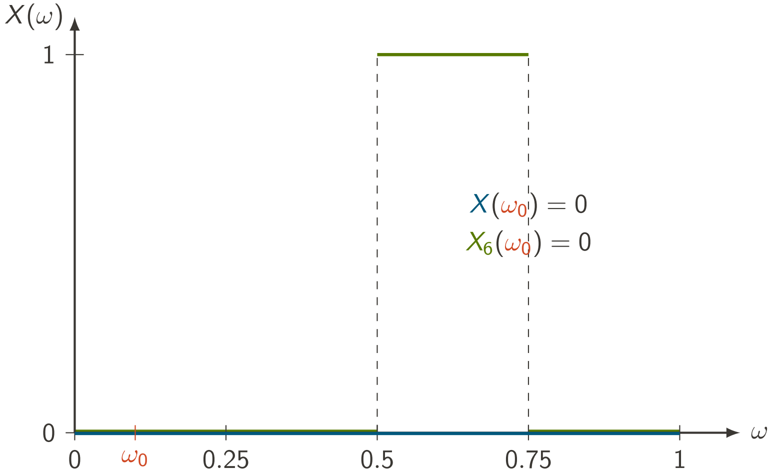
$$X_n(\omega_0) \; = \; 1, 1, 0, 1, 0,$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

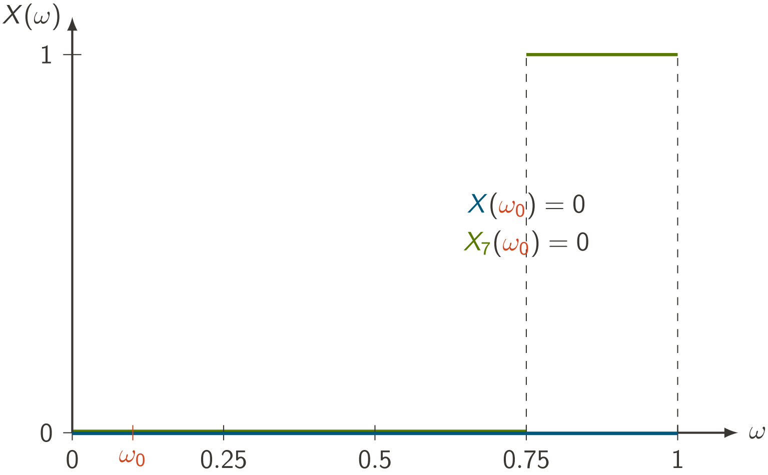
$$X_n(\omega_0) = 1, 1, 0, 1, 0, 0,$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

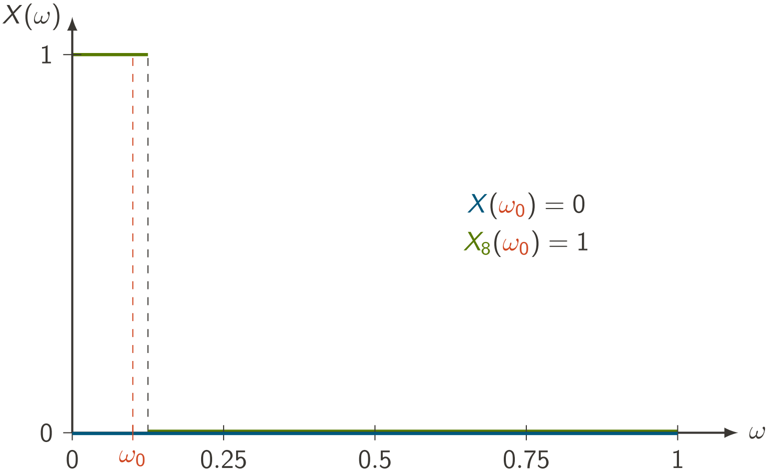
$$X_n(\omega_0) = 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0,$$



Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

$$X_n(\omega_0) \;=\; 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots$$

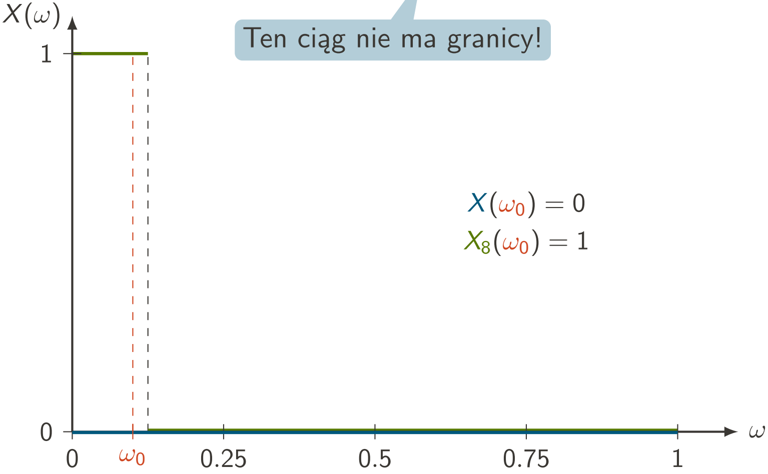


Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

$$X_n(\omega_0) = 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots$$

Ten ciąg nie ma granicy!

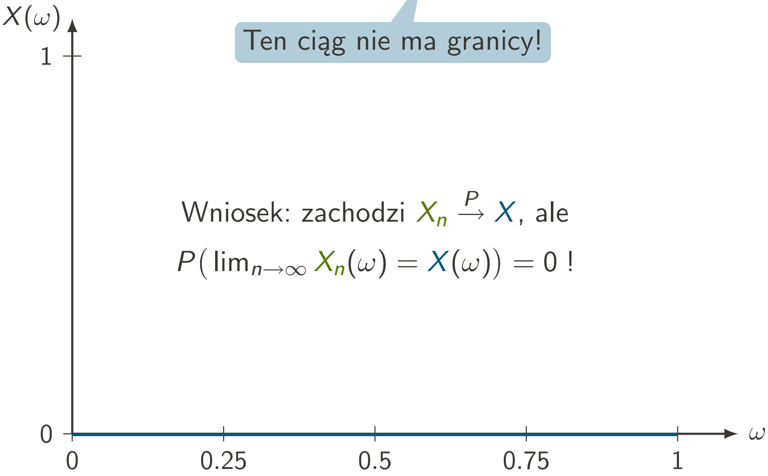


Kontrprzykład: losowanie punktów z odcinka

Ale: $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ nie zachodzi dla żadnego ω!

$$X_n(\omega_0) \;=\; 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots$$

Ten ciąg nie ma granicy!



Wniosek: zachodzi $X_n \xrightarrow{P} X$, ale

$P(\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 0$!

Mocne prawo wielkich liczb

Pokazaliśmy, że:

$$X_n \xrightarrow{P} X \qquad \not\Longrightarrow \qquad X_n \xrightarrow{\text{z pr. 1}} X$$

Mocne prawo wielkich liczb

Pokazaliśmy, że:

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \not\Longrightarrow \quad X_n \xrightarrow{\text{z pr. 1}} X$$

Mimo to prawa wielkich liczb można wzmocnić do warunku $X_n \xrightarrow{\text{z pr. 1}} X$

Mocne prawo wielkich liczb

Pokazaliśmy, że:

$$X_n \xrightarrow{P} X \qquad \not\Longrightarrow \qquad X_n \xrightarrow{\text{z pr. 1}} X$$

Mimo to prawa wielkich liczb można wzmocnić do warunku $X_n \xrightarrow{\text{z pr. 1}} X$

Silne prawo wielkich liczb Chińczyna

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, z wartość oczekiwaną μ i wariancją $\sigma^2 < \infty$. Wtedy:

$$\overline{X}_n \xrightarrow{\text{z pr. 1}} \mu$$

Silne prawo wielkich liczb Czebyszewa

Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych z$EX_i = \mu_i$ i wariancjami $D^2(X_i) = \sigma_i^2$, wspólnie ograniczonymi przez σ^2. Niech $\overline{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu_i$. Wtedy:

$$\overline{X}_n - \overline{\mu}_n \xrightarrow{\text{z pr. 1}} 0$$

Twierdzenia pozostawiamy bez dowodu.

Częstościowa interpretacja prawdopodobieństwa

Dotyczy powtarzalnych doświadczeń losowych.

Powtórzmy N razy doświadczenie losowe.

Dla dowolnego zdarzenia A, niech N_A oznacza liczbę doświadczeń w których A zaszło.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest graniczną wartością częstości:

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{N_A}{N}.$$

Częstościowa interpretacja prawdopodobieństwa

Dla dowolnego zdarzenia A, rozważmy zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_N$ dotyczące poszczególnych doświadczeń, określone jako:

$$X_i(\omega) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \;\; \omega \in A \\ 0 & \text{jeśli} \;\; \omega \notin A \end{cases}$$

Częstościowa interpretacja prawdopodobieństwa

Dla dowolnego zdarzenia A, rozważmy zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_N$ dotyczące poszczególnych doświadczeń, określone jako:

$$X_i(\omega) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \;\; \omega \in A \\ 0 & \text{jeśli} \;\; \omega \notin A \end{cases}$$

Zmienne te są niezależne i mają rozkład dwupunktowy $B(p)$ z parametrem $p = P(X_i = 1) = P(A)$.

Częstościowa interpretacja prawdopodobieństwa

Dla dowolnego zdarzenia A, rozważmy zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_N$ dotyczące poszczególnych doświadczeń, określone jako:

$$X_i(\omega) \; = \; \begin{cases} 1 & \text{jeśli} \;\; \omega \in A \\ 0 & \text{jeśli} \;\; \omega \notin A \end{cases}$$

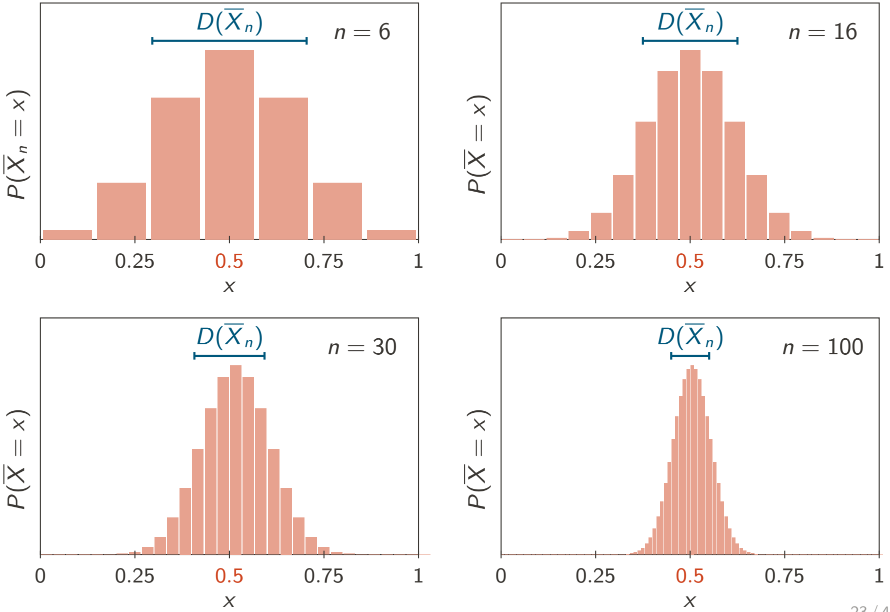
Zmienne te są niezależne i mają rozkład dwupunktowy $B(p)$ z parametrem $p = P(X_i = 1) = P(A)$.

Wtedy z mocnego prawa wielkich liczb:

$$\frac{N_A}{N} = \overline{X}_N \;\; \stackrel{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} \;\; P(A)$$

Uzasadnia to częstościową interpretację prawdopodobieństwa.

Schemat Bernoulliego ($p = \frac{1}{2}$): rozkład zmiennej $\overline{X}_n = \frac{S_n}{n}$



Standaryzacja zmiennej losowej

Zmienną X, dla której $EX = 0$ i $D^2(X) = 1$ nazywa się zmienną losową standaryzowaną

Standaryzacja zmiennej losowej

Zmienną X, dla której $EX = 0$ i $D^2(X) = 1$ nazywa się zmienną losową standaryzowaną

Standaryzacja zmiennej losowej:
Dla dowolnej zmiennej X, zmienna:

$$U = \frac{X - EX}{D(X)} \qquad \text{jest zmienną standaryzowaną}$$

Zadanie 3

Udowodnij to stwierdzenie korzystając ze znanych własności $E(aX+b) = aEX + b$ oraz $D^2(aX + b) = a^2 D^2(X)$

Schemat Bernoulliego $B(n, p)$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} X_i, & ES_n &= np, & D^2(S_n) &= np(1-p) \\
\overline{X}_n &= \frac{S_n}{n}, & E\overline{X}_n &= p, & D^2(\overline{X}_n) &= \frac{p(1-p)}{n}
\end{aligned}
$$

Schemat Bernoulliego $B(n,p)$

$$
\begin{array}{rclcrclcrcl}
S_n &=& \sum_{i=1}^{n} X_i, & & ES_n &=& np, & & D^2(S_n) &=& np(1-p) \\
\overline{X}_n &=& \frac{S_n}{n}, & & E\overline{X}_n &=& p, & & D^2(\overline{X}_n) &=& \frac{p(1-p)}{n}
\end{array}
$$

Jak zachowuje się ciąg S_n (lub $\overline{X}_n$) po standaryzacji?

$$
U_n = \frac{S_n - ES_n}{D(S_n)} = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{D(\overline{X}_n)} = \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}
$$

Schemat Bernoulliego $B(n, p)$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} X_i, & ES_n &= np, & D^2(S_n) &= np(1-p) \\
\overline{X}_n &= \frac{S_n}{n}, & E\overline{X}_n &= p, & D^2(\overline{X}_n) &= \frac{p(1-p)}{n}
\end{aligned}
$$

Jak zachowuje się ciąg S_n (lub $\overline{X}_n$) po standaryzacji?

$$U_n = \frac{S_n - ES_n}{D(S_n)} = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{D(\overline{X}_n)} = \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}$$

Interpretacja: patrzymy na S_n (lub $\overline{X}_n$) dobierając zawsze skalę i przesunięcie początku układu współrzędnych tak, aby wartość oczekiwana znajdowała się w punkcie 0, a odchylenie standardowe było jednostkowe.

Schemat Bernoulliego $B(n, p)$

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} X_i, & ES_n &= np, & D^2(S_n) &= np(1-p) \\
\overline{X}_n &= \frac{S_n}{n}, & E\overline{X}_n &= p, & D^2(\overline{X}_n) &= \frac{p(1-p)}{n}
\end{aligned}
$$

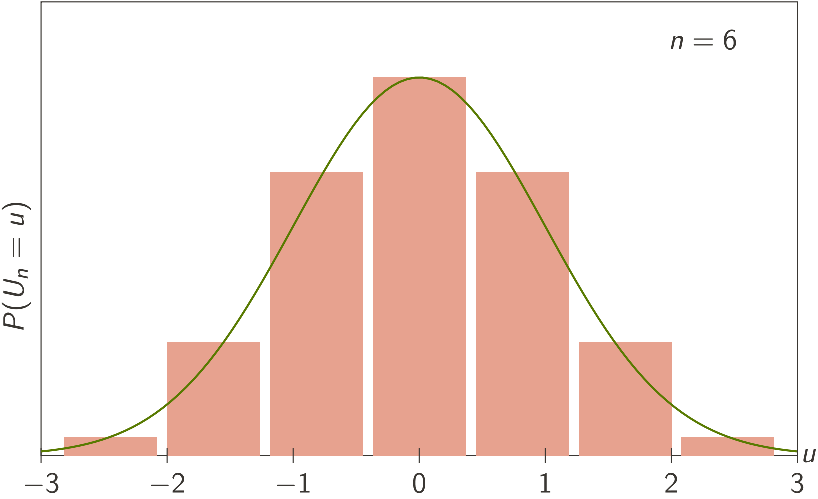
Jak zachowuje się ciąg S_n (lub $\overline{X}_n$) po standaryzacji?

$$
U_n = \frac{S_n - ES_n}{D(S_n)} = \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{D(\overline{X}_n)} = \frac{\overline{X}_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}
$$

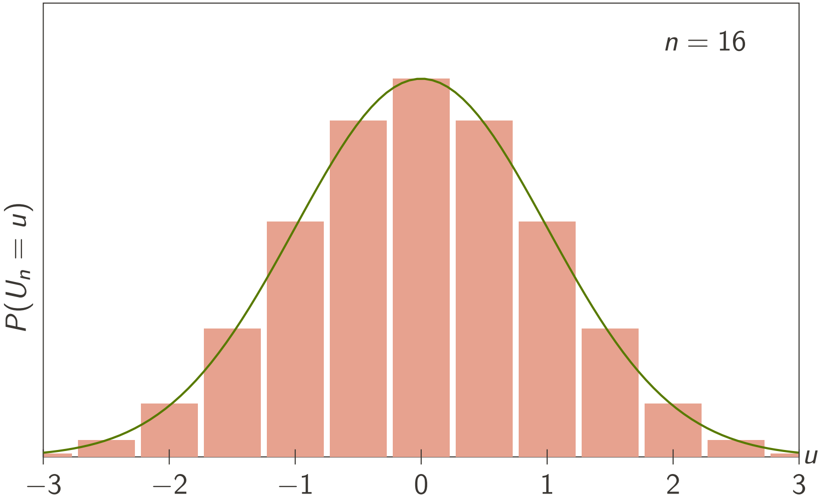
Interpretacja: patrzymy na S_n (lub $\overline{X}_n$) dobierając zawsze skalę i przesunięcie początku układu współrzędnych tak, aby wartość oczekiwana znajdowała się w punkcie 0, a odchylenie standardowe było jednostkowe.

Ciąg U_n nie zbiega teraz do liczby, ponieważ ma stale jednostkowe odchylenie standardowe!

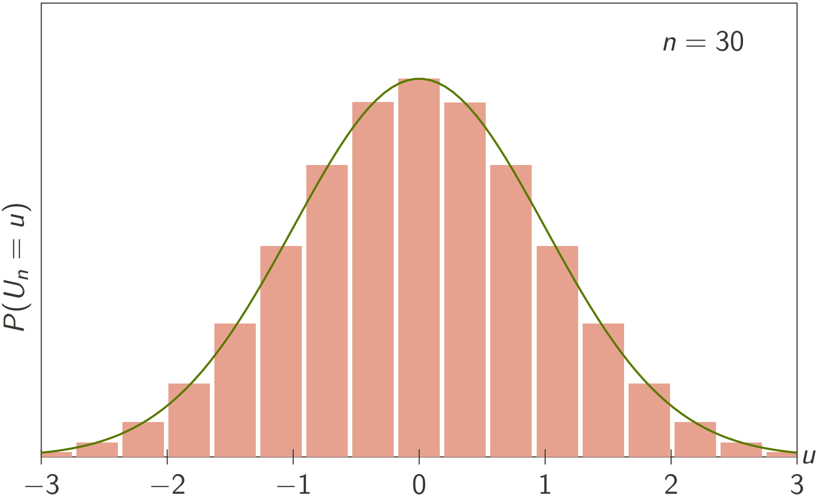
Rozkład zmiennej U_n ($p = \frac{1}{2}$)



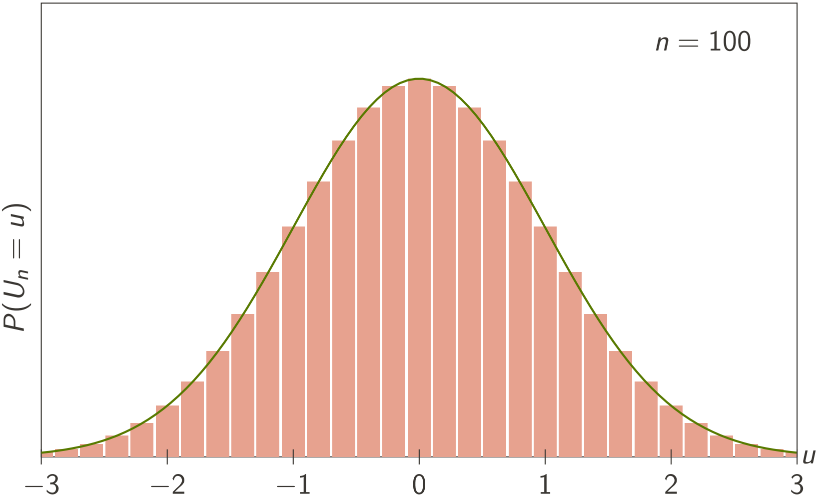
Rozkład zmiennej U_n ($p = \frac{1}{2}$)



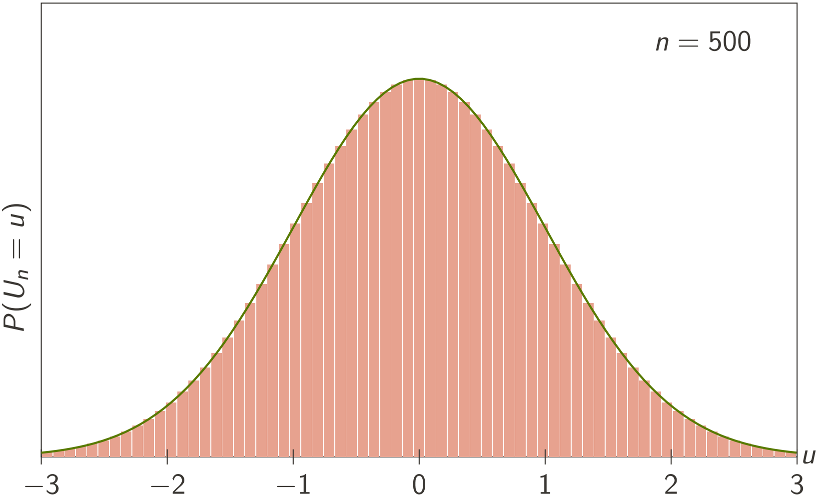
Rozkład zmiennej U_n ($p = \frac{1}{2}$)



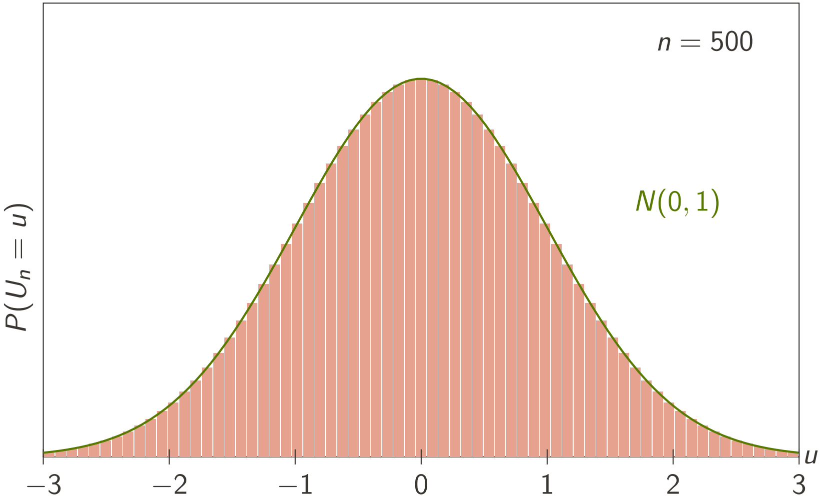
Rozkład zmiennej U_n ($p = \frac{1}{2}$)



Rozkład zmiennej U_n ($p = \frac{1}{2}$)



Rozkład zmiennej U_n ($p = \frac{1}{2}$)



Twierdzenie Moivre'a-Laplace'a

Rozważmy ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, X_3, \ldots$, gdzie $X_n \sim B(p)$ dla wszystkich n

$$S_n \; = \; \sum_{i=1}^{n} X_n \sim B(n, p), \qquad U_n \; = \; \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

Dystrybuanta zmiennej U_n zbiega do dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego:

$$\forall x \qquad \lim_{n \to \infty} F_{U_n}(x) \; = \; \Phi(x)$$

Wnioski z twierdzenia Moivre'a-Laplace'a

- Dla dużych n, rozkład zmiennej U_n można przybliżyć rozkładem normalnym $N(0,1)$:

$$U_n \;=\; \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \;\simeq\; X, \qquad \text{gdzie } X \sim N(0,1)$$

Wnioski z twierdzenia Moivre'a-Laplace'a

- Dla dużych n, rozkład zmiennej U_n można przybliżyć rozkładem normalnym $N(0,1)$:

$$U_n \;=\; \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \;\simeq\; X, \qquad \text{gdzie } X \sim N(0,1)$$

- Równoważnie, można przybliżyć rozkład zmiennej $S_n \sim B(n,p)$:

$$S_n \;\simeq\; \sqrt{np(1-p)}X + np \;\sim\; N\left(np, np(1-p)\right)$$

Wnioski z twierdzenia Moivre'a-Laplace'a

- Dla dużych n, rozkład zmiennej U_n można przybliżyć rozkładem normalnym $N(0,1)$:

$$U_n \; = \; \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \; \simeq \; X, \qquad \text{gdzie } X \sim N(0,1)$$

- Równoważnie, można przybliżyć rozkład zmiennej $S_n \sim B(n,p)$:

$$S_n \; \simeq \; \sqrt{np(1-p)}X + np \; \sim \; N\left(np, np(1-p)\right)$$

- Wniosek: dla dużych n, rozkład dwumianowy $B(n,p)$ można przybliżać rozkładem normalnym $N\left(np, np(1-p)\right)$

Wnioski z twierdzenia Moivre'a-Laplace'a

- Dla dużych n, rozkład zmiennej U_n można przybliżyć rozkładem normalnym $N(0,1)$:

$$U_n \; = \; \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \; \simeq \; X, \qquad \text{gdzie } X \sim N(0,1)$$

- Równoważnie, można przybliżyć rozkład zmiennej $S_n \sim B(n,p)$:

$$S_n \; \simeq \; \sqrt{np(1-p)}X + np \; \sim \; N\left(np, np(1-p)\right)$$

- Wniosek: dla dużych n, rozkład dwumianowy $B(n,p)$ można przybliżać rozkładem normalnym $N\left(np, np(1-p)\right)$
- Przybliżenie to można stosować już dla niewielkiego n: warunek stosowalności określa się zwykle na: $np \geqslant 5$ i $n(1-p) \geqslant 5$.

Przykład

Oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów S_n w rozkładzie dwumianowym $B(n = 30, p = \frac{1}{3})$ znajdzie się w zakresie $\{9, 10, 11, 12\}$.

Przykład

Oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów S_n w rozkładzie dwumianowym $B(n = 30, p = \frac{1}{3})$ znajdzie się w zakresie $\{9, 10, 11, 12\}$.

Odpowiedź dokładna:

$$P(9 \leqslant S_n \leqslant 12) \; = \; \sum_{k=9}^{12} \binom{30}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{30-k} \simeq 0.548$$

Przykład

Oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów S_n w rozkładzie dwumianowym $B(n = 30, p = \frac{1}{3})$ znajdzie się w zakresie $\{9, 10, 11, 12\}$.

Odpowiedź przybliżona:

Warunki przybliżenia spełnione: $np = 10 \geqslant 5$, $n(1-p) = 20 \geqslant 5$

$$P(a \leqslant S_n \leqslant b) \quad = \quad P\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \frac{b - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Przykład

Oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów S_n w rozkładzie dwumianowym $B(n = 30, p = \frac{1}{3})$ znajdzie się w zakresie $\{9, 10, 11, 12\}$.

Odpowiedź przybliżona:

Warunki przybliżenia spełnione: $np = 10 \geqslant 5$, $n(1-p) = 20 \geqslant 5$

$$P(a \leqslant S_n \leqslant b) \quad = \quad P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \underbrace{\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{U_n \simeq X \sim N(0,1)} \leqslant \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

Przykład

Oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów S_n w rozkładzie dwumianowym $B(n = 30, p = \frac{1}{3})$ znajdzie się w zakresie $\{9, 10, 11, 12\}$.

Odpowiedź przybliżona:

Warunki przybliżenia spełnione: $np = 10 \geqslant 5$, $n(1-p) = 20 \geqslant 5$

$$\begin{aligned} P(a \leqslant S_n \leqslant b) &= P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \underbrace{\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{U_n \,\simeq\, X \sim N(0,1)} \leqslant \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &\simeq P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant X \leqslant \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \quad (X \sim N(0,1)) \end{aligned}$$

Przykład

Oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów S_n w rozkładzie dwumianowym $B(n = 30, p = \frac{1}{3})$ znajdzie się w zakresie $\{9, 10, 11, 12\}$.

Odpowiedź przybliżona:

Warunki przybliżenia spełnione: $np = 10 \geqslant 5$, $n(1-p) = 20 \geqslant 5$

$$\begin{aligned}
P(a \leqslant S_n \leqslant b) &= P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \underbrace{\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{U_n \simeq X \sim N(0,1)} \leqslant \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&\simeq P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant X \leqslant \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \quad (X \sim N(0,1)) \\
&= \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)
\end{aligned}$$

Przykład

Oszacuj prawdopodobieństwo, że liczba sukcesów S_n w rozkładzie dwumianowym $B(n = 30, p = \frac{1}{3})$ znajdzie się w zakresie $\{9, 10, 11, 12\}$.

Odpowiedź przybliżona:

Warunki przybliżenia spełnione: $np = 10 \geqslant 5$, $n(1-p) = 20 \geqslant 5$

$$\begin{aligned}
P(a \leqslant S_n \leqslant b) &= P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant \underbrace{\frac{S_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}}_{U_n \,\simeq\, X \sim N(0,1)} \leqslant \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
&\simeq P\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant X \leqslant \frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \qquad (X \sim N(0,1)) \\
&= \Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)
\end{aligned}$$

Aby zwiększyć dokładność, bierzemy $b = 12.5$, $a = 8.5$:

$$P(8.5 \leqslant S_n \leqslant 12.5) \simeq \Phi(0.968) - \Phi(-0.581) \simeq 0.553$$

(odpowiedź dokładna: 0.548)

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

$$S_n \sim B(n,p), \qquad P(S_n = k) \;=\; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Pokażemy, że dla dużych n, S_n można przybliżyć zmienną o rozkładzie normalnym $X \sim N\left(np, np(1-p)\right)$:

$$P(S_n = k) \;\simeq\; P(X = k) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

$$S_n \sim B(n,p), \qquad P(S_n = k) \; = \; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Pokażemy, że dla dużych n, S_n można przybliżyć zmienną o rozkładzie normalnym $X \sim N\left(np, np(1-p)\right)$:

$$P(S_n = k) \; \simeq \; P(X = k) \; = \; \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}$$

Główne narzędzie: wzór Stirlinga

$$n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

Wzór Stirlinga: $$n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

Wzór Stirlinga: $\quad n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \simeq \sqrt{\frac{2\pi n}{(2\pi k)(2\pi(n-k))}} \frac{n^n e^{-n}}{k^k e^{-k}(n-k)^{n-k} e^{-(n-k)}}$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

$$\text{Wzór Stirlinga:} \quad n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \simeq \sqrt{\frac{\cancel{2\pi} n}{(\cancel{2\pi} k)(2\pi(n-k))}} \frac{n^n \cancel{e^{-n}}}{k^k \cancel{e^{-k}} (n-k)^{n-k} \cancel{e^{-(n-k)}}}$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

$$\text{Wzór Stirlinga:} \quad n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \simeq \sqrt{\frac{\cancel{2\pi} n}{(\cancel{2\pi} k)(2\pi(n-k))}} \frac{n^n \cancel{e^{-n}}}{k^k \cancel{e^{-k}} (n-k)^{n-k} \cancel{e^{-(n-k)}}} \\
&= \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \frac{n^k n^{n-k}}{k^k (n-k)^{n-k}}
\end{aligned}$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

Wzór Stirlinga: $n! \simeq \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \simeq \sqrt{\frac{\cancel{2\pi} n}{(\cancel{2\pi} k)(2\pi(n-k))}} \frac{n^n \cancel{e^{-n}}}{k^k \cancel{e^{-k}} (n-k)^{n-k} \cancel{e^{-(n-k)}}}$$
$$= \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \frac{n^k n^{n-k}}{k^k (n-k)^{n-k}}$$

Stąd:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \simeq \underbrace{\sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}}_{A} \underbrace{\frac{(np)^k((1-p)n)^{n-k}}{k^k(n-k)^{n-k}}}_{B}$$

Oszacujemy osobno wyrazy A i B

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

$$A = \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi n \frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)}}$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

$$A = \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi n \frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)}}$$

Z prawa wielkich liczb, $\frac{S_n}{n} \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} p$, stąd dla dużych n przybliżamy $\frac{k}{n}$ przez p, otrzymując:

$$A \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

$$B = \frac{(np)^k((1-p)n)^{n-k}}{k^k(n-k)^{n-k}} = \left(\frac{k}{np}\right)^{-k}\left(\frac{n-k}{n(1-p)}\right)^{n-k}$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

$$B \;=\; \frac{(np)^k((1-p)n)^{n-k}}{k^k(n-k)^{n-k}} \;=\; \left(\frac{k}{np}\right)^{-k}\left(\frac{n-k}{n(1-p)}\right)^{n-k}$$

Zdefiniujemy sobie $x_k = \frac{k}{n}$ i przepiszmy B:

$$B \;=\; \left(\frac{x_k}{p}\right)^{-nx_k}\left(\frac{1-x_k}{1-p}\right)^{-n(1-x_k)}$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

$$B = \frac{(np)^k((1-p)n)^{n-k}}{k^k(n-k)^{n-k}} = \left(\frac{k}{np}\right)^{-k}\left(\frac{n-k}{n(1-p)}\right)^{n-k}$$

Zdefiniujemy sobie $x_k = \frac{k}{n}$ i przepiszmy B:

$$B = \left(\frac{x_k}{p}\right)^{-nx_k}\left(\frac{1-x_k}{1-p}\right)^{-n(1-x_k)}$$

Bierzemy logarytm B:

$$\ln B = -n\Bigg(\underbrace{x_k \ln\frac{x_k}{p} + (1-x_k)\ln\frac{1-x_k}{1-p}}_{f(x_k)}\Bigg)$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

$$B = \frac{(np)^k((1-p)n)^{n-k}}{k^k(n-k)^{n-k}} = \left(\frac{k}{np}\right)^{-k}\left(\frac{n-k}{n(1-p)}\right)^{n-k}$$

Zdefiniujemy sobie $x_k = \frac{k}{n}$ i przepiszmy B:

$$B = \left(\frac{x_k}{p}\right)^{-nx_k}\left(\frac{1-x_k}{1-p}\right)^{-n(1-x_k)}$$

Bierzemy logarytm B:

$$\ln B = -n\underbrace{\left(x_k \ln\frac{x_k}{p} + (1-x_k)\ln\frac{1-x_k}{1-p}\right)}_{f(x_k)}$$

Rozwijamy funkcję $f(x_k)$ w punkcie $x_k = p$ wykorzystujmy przybliżenia Taylora do drugiego rzędu:

$$f(x_k) \simeq f(p) + f'(p)(x_k - p) + \frac{1}{2}f''(p)(x_k-p)^2$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

$$f(x_k) = x_k(\ln x_k - \ln p) + (1 - x_k)\big(\ln(1 - x_k) - \ln(1 - p)\big)$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

$$
\begin{aligned}
f(x_k) &= x_k(\ln x_k - \ln p) + (1 - x_k)\big(\ln(1 - x_k) - \ln(1 - p)\big) \\
f'(x_k) &= \log x_k - \log p - \log(1 - x_k) + \log(1 - p)
\end{aligned}
$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

$$\begin{aligned}
f(x_k) &= x_k(\ln x_k - \ln p) + (1 - x_k)\big(\ln(1 - x_k) - \ln(1 - p)\big) \\
f'(x_k) &= \log x_k - \log p - \log(1 - x_k) + \log(1 - p) \\
f''(x_k) &= \frac{1}{x_k} + \frac{1}{1 - x_k}
\end{aligned}$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

$$
\begin{aligned}
f(x_k) &= x_k(\ln x_k - \ln p) + (1 - x_k)\big(\ln(1 - x_k) - \ln(1 - p)\big) \\
f'(x_k) &= \log x_k - \log p - \log(1 - x_k) + \log(1 - p) \\
f''(x_k) &= \frac{1}{x_k} + \frac{1}{1 - x_k} \\
f(p) &= p(\ln p - \ln p) + (1 - p)\big(\ln(1 - p) - \ln(1 - p)\big) \;=\; 0
\end{aligned}
$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

$$
\begin{aligned}
f(x_k) &= x_k(\ln x_k - \ln p) + (1-x_k)\big(\ln(1-x_k) - \ln(1-p)\big) \\
f'(x_k) &= \log x_k - \log p - \log(1-x_k) + \log(1-p) \\
f''(x_k) &= \frac{1}{x_k} + \frac{1}{1-x_k} \\
f(p) &= p(\ln p - \ln p) + (1-p)\big(\ln(1-p) - \ln(1-p)\big) \;=\; 0 \\
f'(p) &= \log p - \log p - \log(1-p) + \log(1-p) \;=\; 0
\end{aligned}
$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

$$
\begin{aligned}
f(x_k) &= x_k(\ln x_k - \ln p) + (1 - x_k)\big(\ln(1 - x_k) - \ln(1 - p)\big) \\
f'(x_k) &= \log x_k - \log p - \log(1 - x_k) + \log(1 - p) \\
f''(x_k) &= \frac{1}{x_k} + \frac{1}{1 - x_k} \\
f(p) &= p(\ln p - \ln p) + (1 - p)\big(\ln(1 - p) - \ln(1 - p)\big) = 0 \\
f'(p) &= \log p - \log p - \log(1 - p) + \log(1 - p) = 0 \\
f''(p) &= \frac{1}{p} + \frac{1}{1 - p} = \frac{p + (1 - p)}{p(1 - p)} = \frac{1}{p(1 - p)}
\end{aligned}
$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

$$
\begin{aligned}
f(x_k) &= x_k(\ln x_k - \ln p) + (1-x_k)\big(\ln(1-x_k) - \ln(1-p)\big)\\
f'(x_k) &= \log x_k - \log p - \log(1-x_k) + \log(1-p)\\
f''(x_k) &= \frac{1}{x_k} + \frac{1}{1-x_k}\\
f(p) &= p(\ln p - \ln p) + (1-p)\big(\ln(1-p) - \ln(1-p)\big) \;=\; 0\\
f'(p) &= \log p - \log p - \log(1-p) + \log(1-p) \;=\; 0\\
f''(p) &= \frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} \;=\; \frac{p+(1-p)}{p(1-p)} \;=\; \frac{1}{p(1-p)}
\end{aligned}
$$

Stąd:

$$
f(x_k) \simeq \underbrace{f(p)}_{0} + \underbrace{f'(p)}_{0}(x_k - p) + \frac{1}{2}f''(p)(x_k-p)^2 \;=\; \frac{(x_k-p)^2}{2p(1-p)}
$$

Dowód twierdzenia Moivre'a-Laplace'a (nieformalnie)

Pokazaliśmy, że:

$$\ln B \;=\; -nf(x_k) \;\simeq\; -\frac{n(x_k-p)^2}{2p(1-p)}$$

Używając $x_k = \frac{k}{n}$ lub $k = x_k n$:

$$\ln B \;=\; -\frac{(nx_k-np)^2}{2np(1-p)} \;=\; -\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)} \quad\Longrightarrow\quad B \;=\; e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}}$$

pamiętając, że $P(S_k = k) = A \cdot B$ i wykorzystując szacowanie A otrzymujemy:

$$P(S_k = k) \;\simeq\; \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}},$$

co należało pokazać.

Centralne Twierdzenie Graniczne

$X_1, X_2, X_3 \ldots$ – ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, $EX_i = \mu$, $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Centralne Twierdzenie Graniczne

$X_1, X_2, X_3 \ldots$ – ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, $EX_i = \mu$, $D^2(X_i) = \sigma^2$.

Zgodnie z prawem wielkich liczb:

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} \mu$$

Możemy jednak ustandaryzować ciąg średnich:

$$U_n = \frac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{D(\overline{X}_n)} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$$

Do czego dąży U_n?

Centralne Twierdzenie Graniczne

Twierdzenie Lindeberga-Levy'ego

Niech $X_1, X_2, X_3 \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z $EX_i = \mu$ i $D^2(X_i) = \sigma^2$. Niech:

$$U_n = \frac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{D(\overline{X}_n)} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n}, \qquad \text{gdzie } \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Wtedy:

$$\forall x \qquad \lim_{n\to\infty} F_{U_n}(x) = \Phi(x),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego $N(0,1)$.

Zjawisko zbiegania rozkładu standaryzowanej średniej do rozkładu normalnego jest uniwersalne!

Centralne Twierdzenie Graniczne

Twierdzenie Lindeberga-Levy'ego

Niech $X_1, X_2, X_3 \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z $EX_i = \mu$ i $D^2(X_i) = \sigma^2$. Niech:

$$U_n = \frac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{D(\overline{X}_n)} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n}, \qquad \text{gdzie } \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Wtedy:

$$\forall x \qquad \lim_{n\to\infty} F_{U_n}(x) = \Phi(x),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą standardowego rozkładu normalnego $N(0, 1)$.

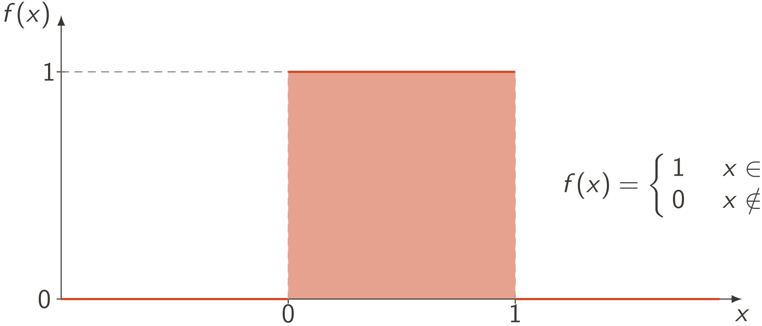
Zjawisko zbiegania rozkładu standaryzowanej średniej do rozkładu normalnego jest uniwersalne!

Rozkład normalny jest powszechny: powstaje ilekroć obserwowane zjawiska są wynikiem uśredniania wielu niezależnych losowych przyczynków.

Przykład: rozkład jednostajny $\mathrm{Unif}[0,1]$

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ – niezależne zmienne $\sim \mathrm{Unif}[0,1]$

$$EX_i = \frac{1}{2}, \qquad D^2(X_i) = \frac{1}{12}$$

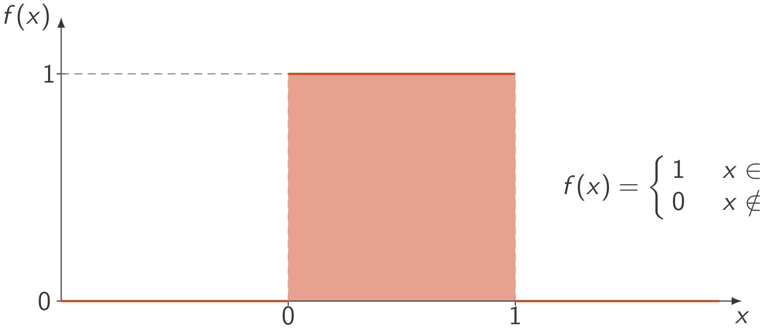


$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

Przykład: rozkład jednostajny $\mathrm{Unif}[0,1]$

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ – niezależne zmienne $\sim \mathrm{Unif}[0,1]$

$$EX_i = \frac{1}{2}, \qquad D^2(X_i) = \frac{1}{12}$$



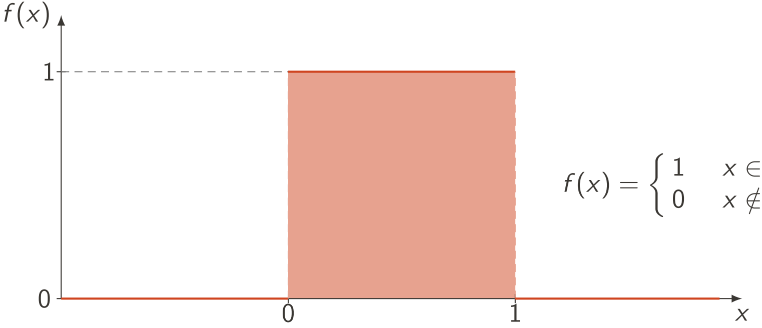
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad U_n = \frac{S_n - ES_n}{D(S_n)} =$$

Przykład: rozkład jednostajny $\mathrm{Unif}[0,1]$

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ – niezależne zmienne $\sim \mathrm{Unif}[0,1]$

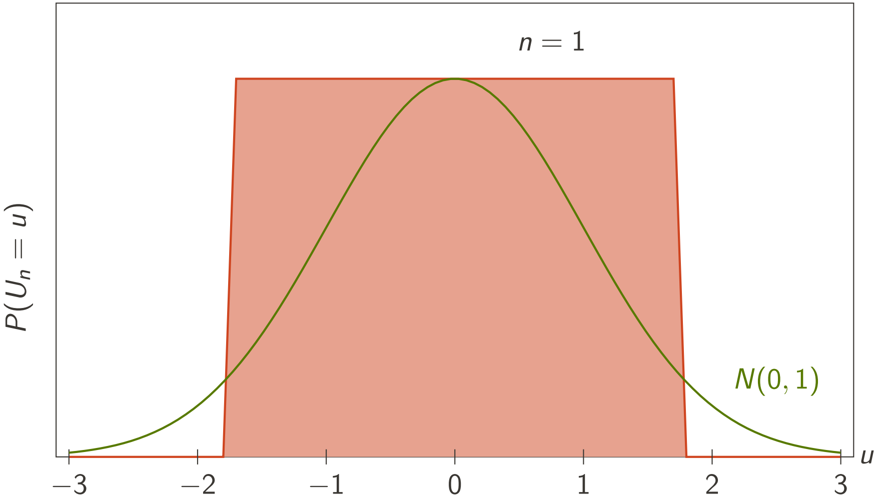
$$EX_i = \frac{1}{2}, \qquad D^2(X_i) = \frac{1}{12}$$



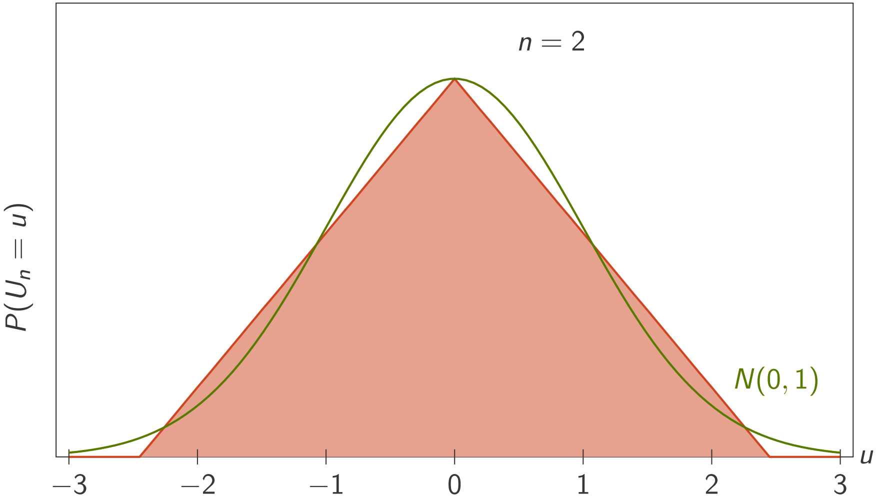
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & x \notin [0,1] \end{cases}$$

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad U_n = \frac{S_n - ES_n}{D(S_n)} = \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{12}}}$$

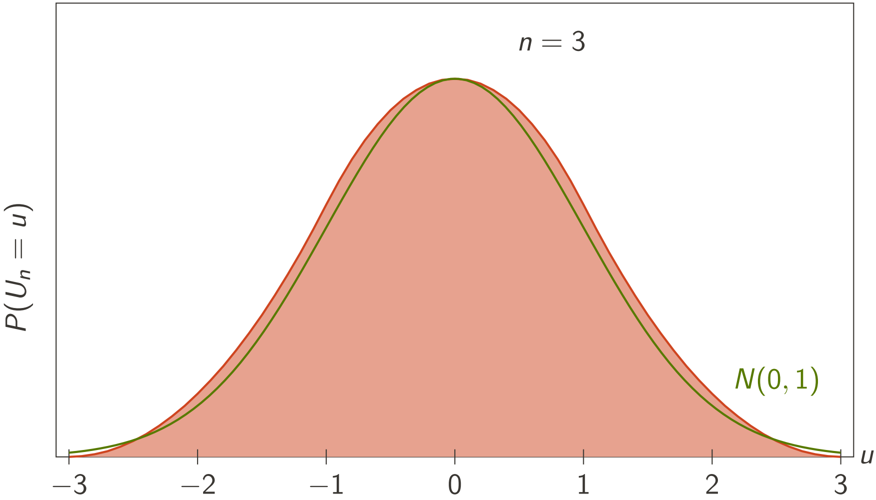
Przykład: rozkład jednostajny $\mathrm{Unif}[0,1]$



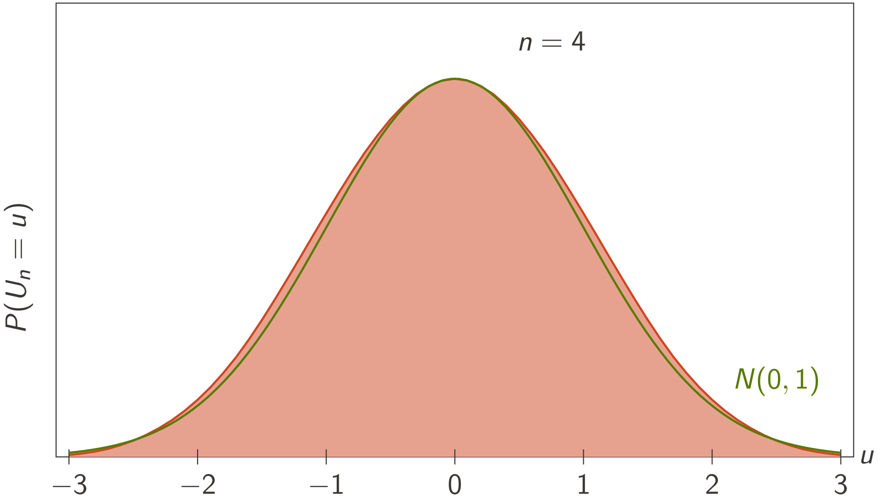
Przykład: rozkład jednostajny $\mathrm{Unif}[0,1]$



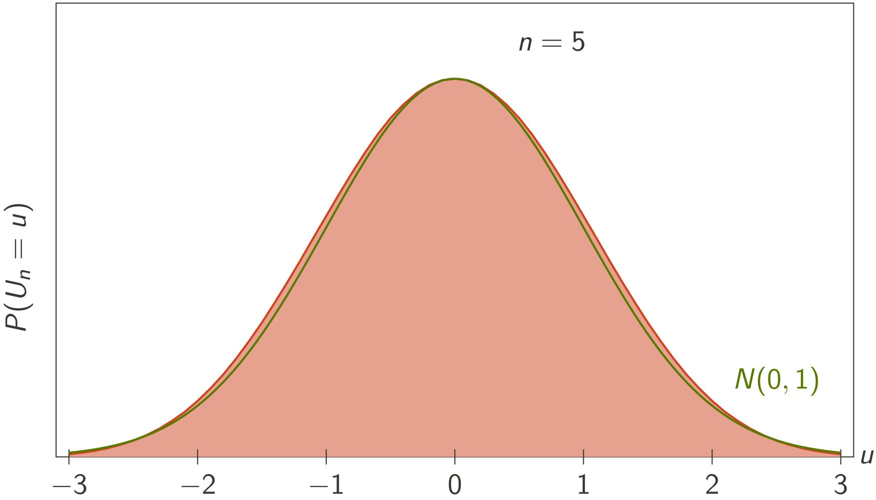
Przykład: rozkład jednostajny $\mathrm{Unif}[0,1]$



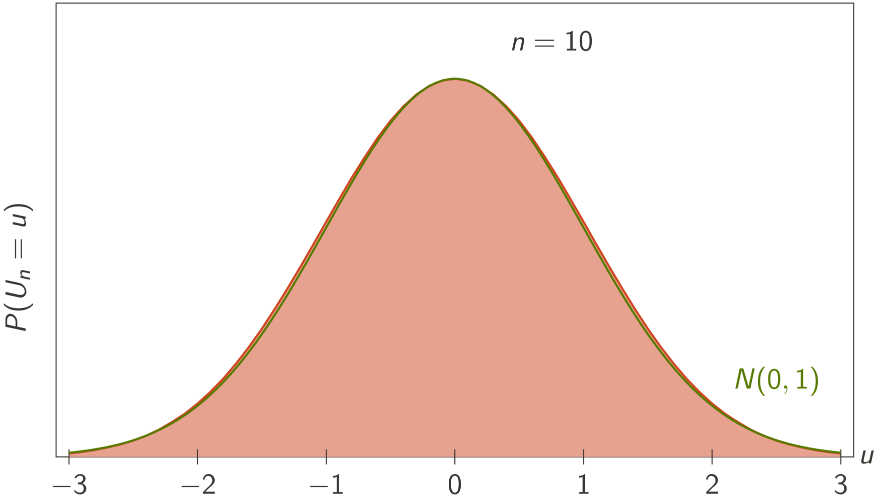
Przykład: rozkład jednostajny $\mathrm{Unif}[0,1]$



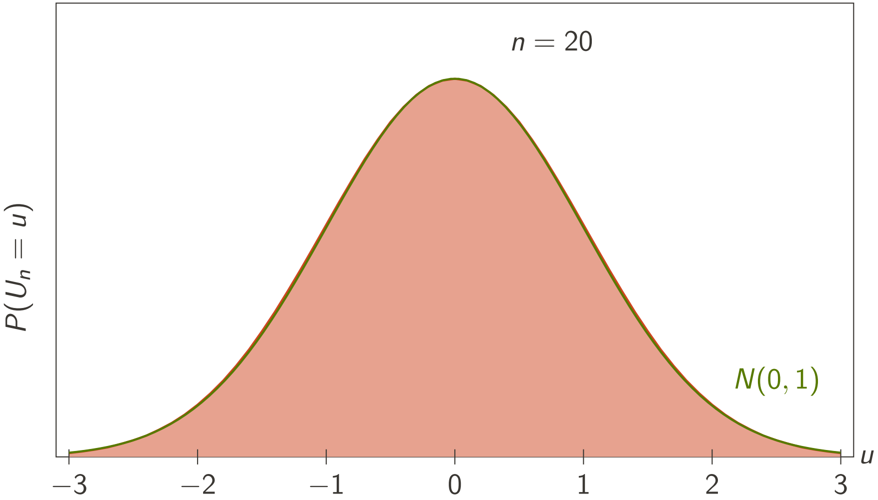
Przykład: rozkład jednostajny $\mathrm{Unif}[0, 1]$



Przykład: rozkład jednostajny $\mathrm{Unif}[0,1]$



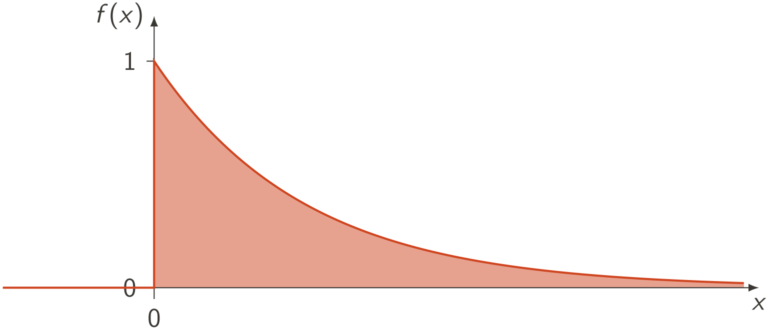
Przykład: rozkład jednostajny $\mathrm{Unif}[0,1]$



Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ – niezależne zmienne $\sim \mathrm{Exp}(\lambda = 1)$

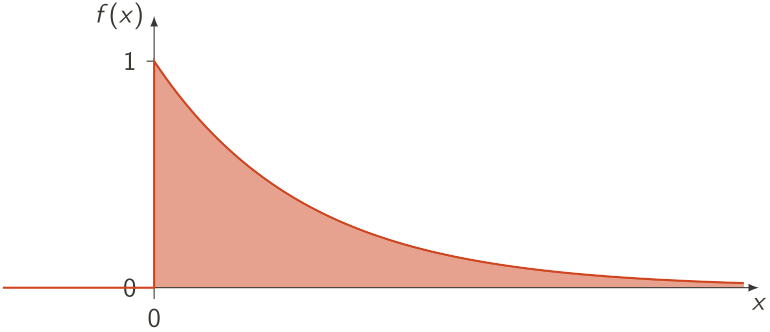
$$EX_i = \frac{1}{\lambda} = 1, \qquad D^2(X_i) = \frac{1}{\lambda^2} = 1$$



Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ – niezależne zmienne $\sim \mathrm{Exp}(\lambda = 1)$

$$EX_i \;=\; \frac{1}{\lambda} \;=\; 1, \qquad D^2(X_i) \;=\; \frac{1}{\lambda^2} \;=\; 1$$

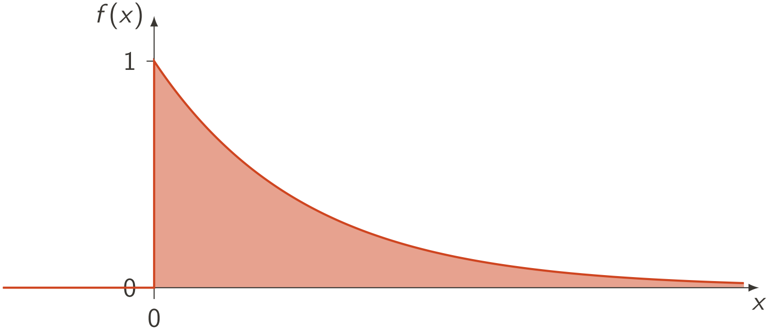


$$S_n \;=\; X_1 + \ldots + X_n, \qquad U_n \;=\; \frac{S_n - ES_n}{D(S_n)} \;=$$

Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)

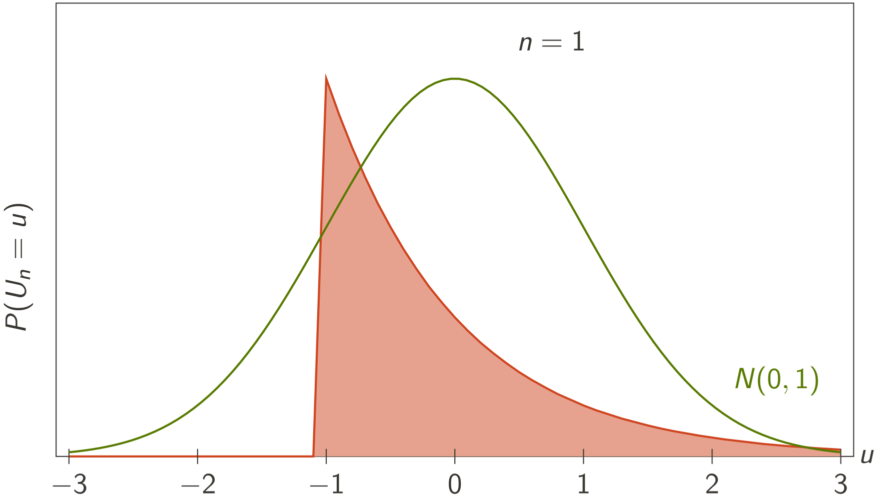
$X_1, X_2, X_3, \ldots$ – niezależne zmienne $\sim \mathrm{Exp}(\lambda = 1)$

$$EX_i = \frac{1}{\lambda} = 1, \qquad D^2(X_i) = \frac{1}{\lambda^2} = 1$$

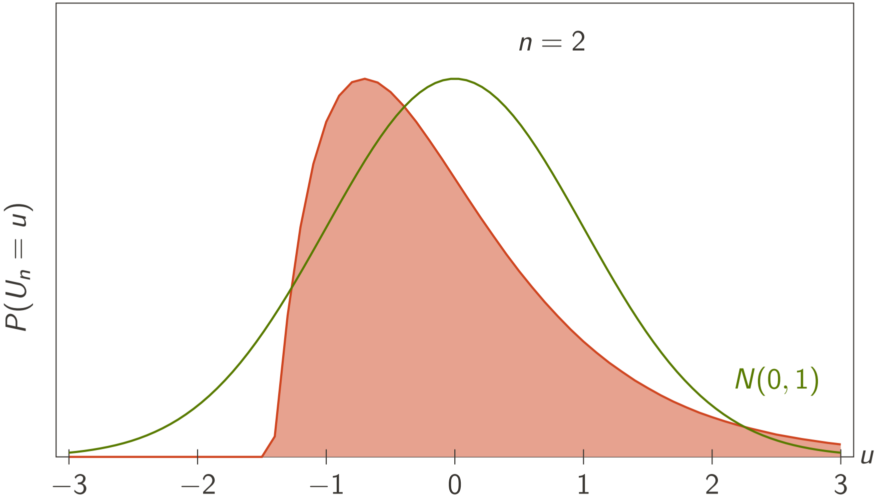


$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \qquad U_n = \frac{S_n - ES_n}{D(S_n)} = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$$

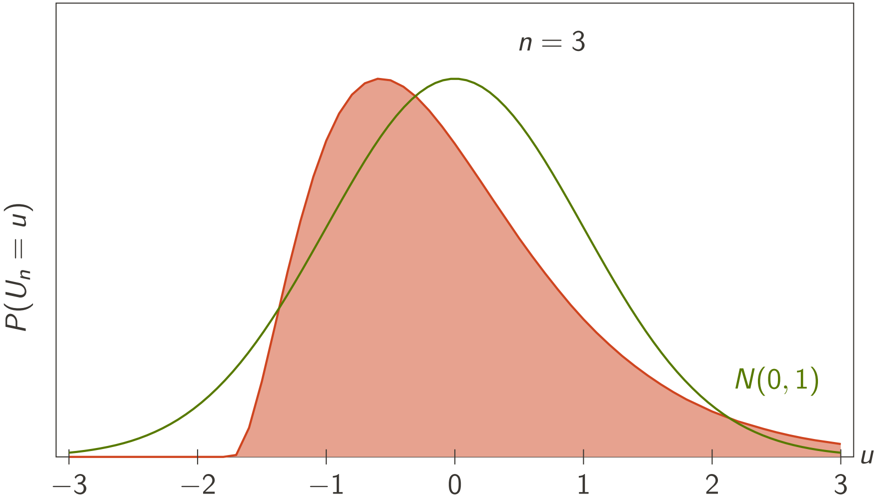
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



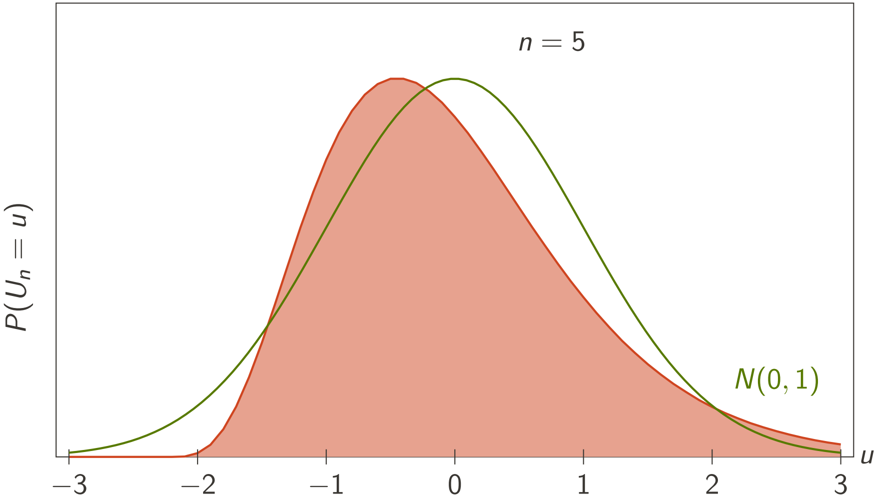
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



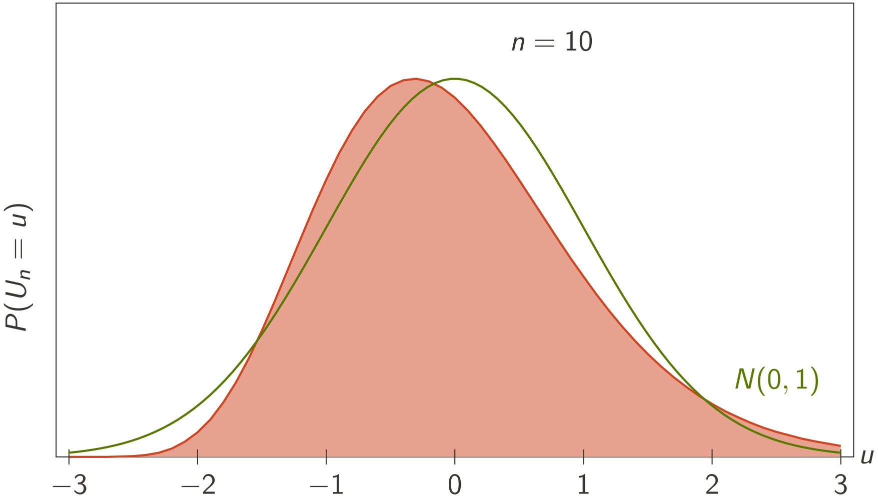
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



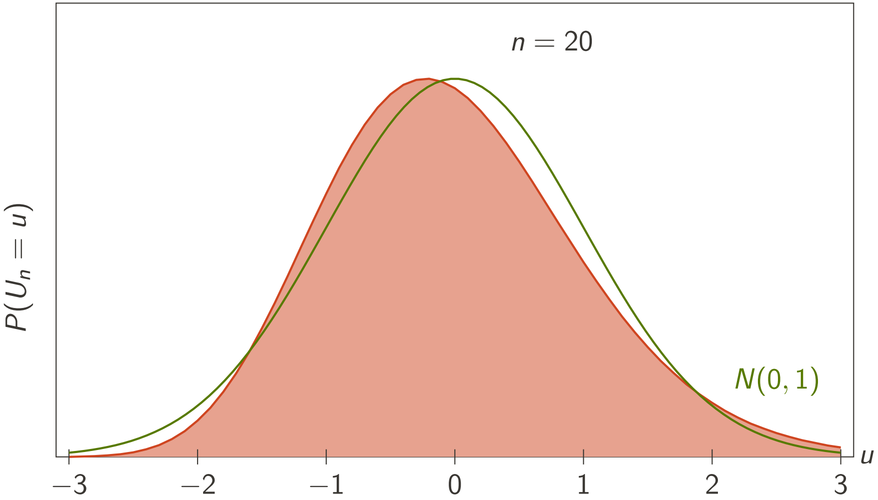
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



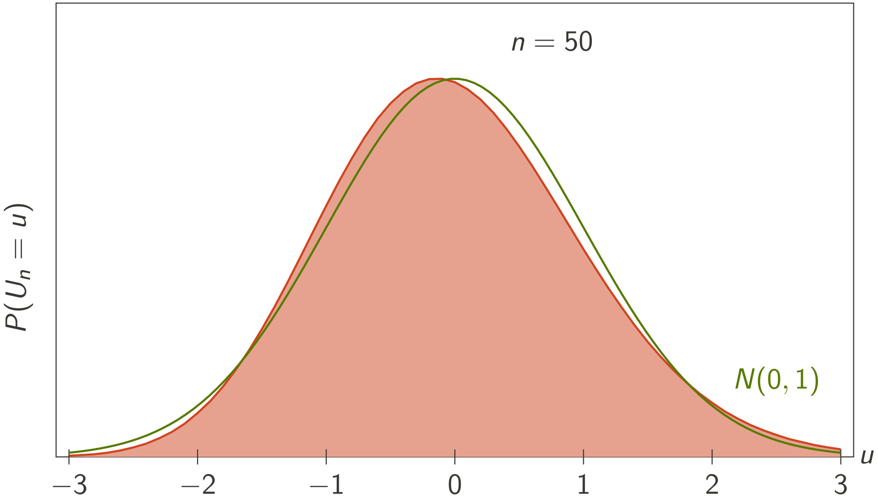
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



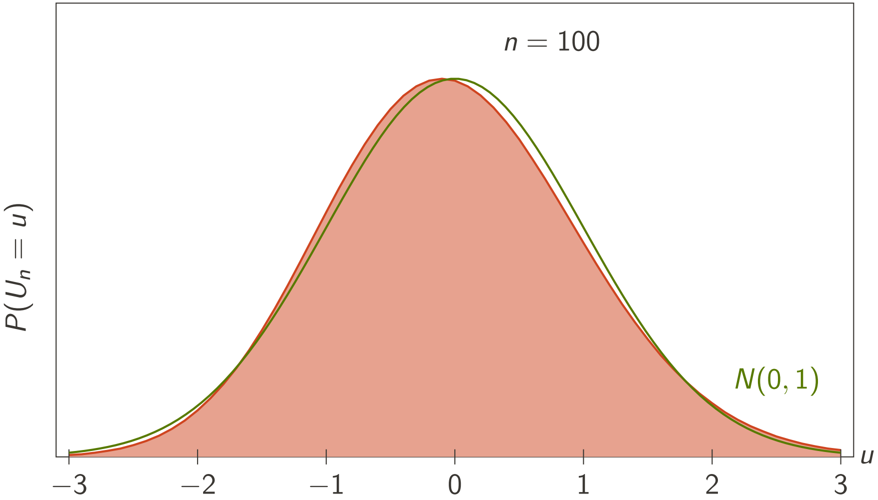
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



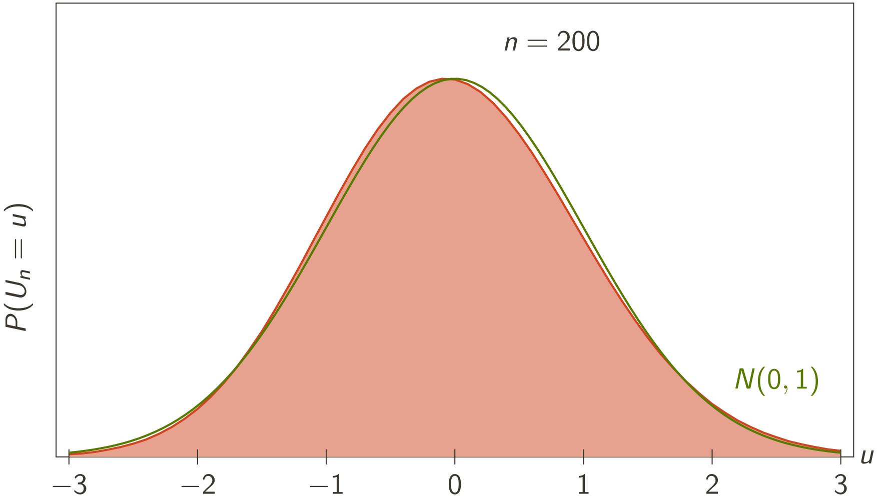
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



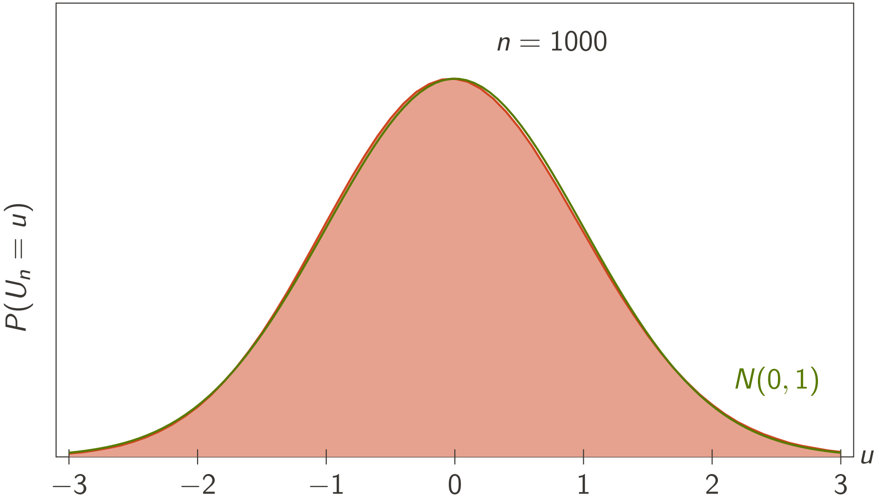
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



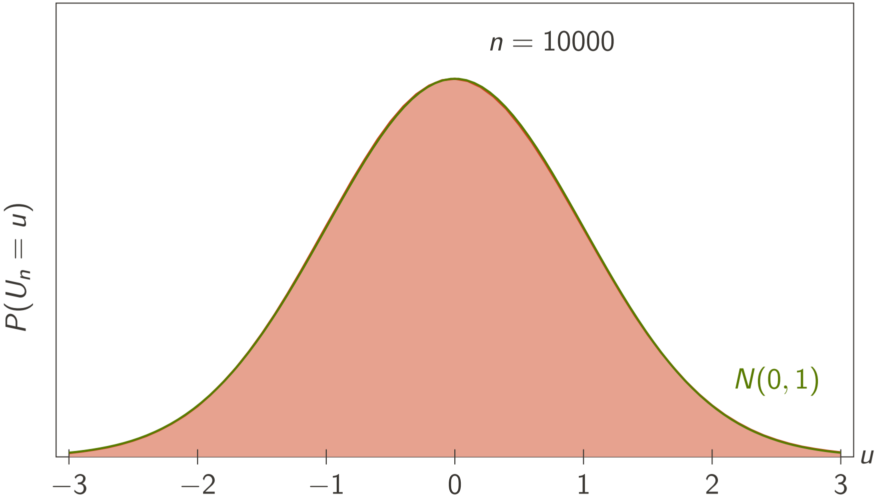
Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



Przykład: rozkład wykładniczy ($\lambda = 1$)



Zbieżność według dystrybuant

Mówimy, że ciąg zmiennych $X_1, X_2, \ldots$ jest zbieżny do zmiennej X:

- Z prawdopodobieństwem jeden (ozn. $X_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} X$), gdy:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$$

- Według prawdopodobieństwa (ozn. $X_n \overset{P}{\to} X$), gdy:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0$$

Zbieżność według dystrybuant

Mówimy, że ciąg zmiennych $X_1, X_2, \ldots$ jest zbieżny do zmiennej X:

- Z prawdopodobieństwem jeden (ozn. $X_n \stackrel{\text{z pr. 1}}{\to} X$), gdy:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) \;=\; 1$$

- Według prawdopodobieństwa (ozn. $X_n \stackrel{P}{\to} X$), gdy:

$$\forall\epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| > \epsilon\right) \;=\; 0$$

- Według dystrybuant (ozn. $X_n \stackrel{D}{\to} X$), gdy:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \;=\; F_X(x) \quad \text{w każdym punkcie ciągłości } F_X$$

Zbieżność według dystrybuant

Mówimy, że ciąg zmiennych $X_1, X_2, \ldots$ jest zbieżny do zmiennej X:

- Z prawdopodobieństwem jeden (ozn. $X_n \xrightarrow{\text{z pr. } 1} X$), gdy:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$$

- Według prawdopodobieństwa (ozn. $X_n \xrightarrow{P} X$), gdy:

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| > \epsilon\right) = 0$$

- Według dystrybuant (ozn. $X_n \xrightarrow{D} X$), gdy:

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \text{w każdym punkcie ciągłości } F_X$$

Zachodzi: $X_n \xrightarrow{\text{z pr. } 1} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{P} X \quad \Rightarrow \quad X_n \xrightarrow{D} X$,

czyli zbieżność według dystrybuant jest najsłabszym z typów zbieżności

Podsumowanie

$X_1, X_2, X_3, \ldots$ – ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie z wartością oczekiwaną $EX_i = \mu$ i wariancją $D^2(X_i) = \sigma^2$

$$\text{Definiujemy } \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- Prawo Wielkich Liczb

$$\overline{X}_n \overset{\text{z pr. 1}}{\longrightarrow} \mu$$

- Centralne Twierdzenie Graniczne

$$\frac{\overline{X}_n - E\overline{X}_n}{D(\overline{X}_n)} = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \xrightarrow{D} U \sim N(0,1)$$