Metody probabilistyczne
Rozwiązania zadań

10. Ciągłe zmienne losowe II

19.12.2017

Zadanie 1. *Rozważ zmienne (X, Y) o gęstości łącznej:*

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} c(x+y) & x,y \in [0,1] \\ 0 & \textit{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Oblicz stałą c, gęstości brzegowe i warunkowe.

Odpowiedź: Korzystając z warunku normalizacji gęstości obliczamy stałą c:

$$\begin{aligned} 1 \;&=\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;=\; \int_0^1\int_0^1 c(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &=\; c\int_0^1\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \;+\; c\int_0^1\int_0^1 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &=\; c\int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^1 \mathrm{d}y\right)}_{=1} x\,\mathrm{d}x \;+\; c\int_0^1 \underbrace{\left(\int_0^1 \mathrm{d}x\right)}_{=1} y\,\mathrm{d}y \\ &=\; c\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 \;+\; c\frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 \;=\; \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c \;=\; c, \end{aligned}$$

z czego wynika, że $c = 1$, a więc $f(x,y) = x + y$ dla $x, y \in [0,1]$. Wyznaczmy teraz gęstości brzegowe:

$$f_X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \;=\; \int_0^1 (x+y)\,\mathrm{d}y \;=\; x\int_0^1 \mathrm{d}y + \int_0^1 y\,\mathrm{d}y \;=\; x + \frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 \;=\; x + \frac{1}{2}.$$

Z symetrii gęstości ze względu na x i y otrzymujemy również $f_Y(y) = y + \frac{1}{2}$. Wyznaczamy na koniec gęstości warunkowe:

$$f_{Y|X}(y|x) \;=\; \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \;=\; \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}}.$$

Z symetrii zagadnienia mamy również $f_{X|Y}(x|y) = \frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}$.

Zadanie 2. *Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie opisanym dystrybuantą F_X. Wyznacz dystrybuanty zmiennych $Y = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ oraz $X = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.*

Odpowiedź:

1. Dystrybuanta F_Y zmienne Y:

$$\begin{aligned} F_Y(y) \;&=\; P(Y \leqslant y) \;=\; P(\max\{X_1,\ldots,X_n\} \leqslant y) \\ &=\; P(X_1 \leqslant y, X_2 \leqslant y, \ldots, X_n \leqslant y) \\ &\overset{(*)}{=}\; P(X_1 \leqslant y)\cdot P(X_2 \leqslant y)\cdot \ldots \cdot P(X_n \leqslant y) \;=\; F_X(y)^n, \end{aligned}$$

   gdzie w $(*)$ wykorzystaliśmy niezależność $X_1, \ldots, X_n$.

2. Dystrybuanta F_Z zmienne Z:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leqslant z) \ = \ 1 - P(Z > z) \ = \ 1 - P(\min\{X_1, \ldots, X_n\} > z) \\ &= 1 - P(X_1 > z, X_2 > z, \ldots, X_n > z) \\ &\overset{(*)}{=} 1 - P(X_1 > z) \cdot P(X_2 > z) \cdot \ldots \cdot P(X_n > z) \\ &= 1 - \big(1 - P(X_1 \leqslant z)\big) \cdot \big(1 - P(X_2 \leqslant z)\big) \cdot \ldots \cdot \big(1 - P(X_n \leqslant z)\big) \\ &= 1 - \big(1 - F_X(z)\big)^2, \end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ wykorzystaliśmy niezależność $X_1, \ldots, X_n$.

Zadanie 3*. *Rozważ dwie niezależne zmienne losowe $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ oraz $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Wyznacz gęstość zmiennej $Z = X + Y$.*

Odpowiedź: Gęstość f_Z zmiennej Z jest splotem gęstości f_X i f_Y:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) f_Y(z-t)\,\mathrm{d}t && (1) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left\{-\frac{(t-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left\{-\frac{(z-t-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(t-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2} - \frac{(z-t-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}\right\} \mathrm{d}t. && (2) \end{aligned}$$

Aby policzyć tę całkę, spróbujemy uprościć wykładnik (wyrażenie w exp) w (2):

$$\begin{aligned} -\frac{(t-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2} - \frac{(z-t-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2} &= -\frac{(t-\mu_X)^2\sigma_Y^2 + ((z-\mu_Y)-t)^2\sigma_X^2}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2} \\ &= -\frac{t^2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2) - 2t\big(\mu_X\sigma_Y^2 + (z-\mu_Y)\sigma_X^2\big) + \mu_X^2\sigma_Y^2 + (z-\mu_Y)^2\sigma_X^2}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2}. && (3) \end{aligned}$$

Zauważmy, że w liczniku w (3) mamy wyrażenie kwadratowe (ze względu na t) postaci:

$$at^2 - 2tb + c,$$

gdzie:

$$a \ = \ \sigma_X^2 + \sigma_Y^2, \quad b \ = \ \mu_X\sigma_Y^2 + (z-\mu_Y)\sigma_X^2, \quad c \ = \ \mu_X^2\sigma_Y^2 + (z-\mu_Y)^2\sigma_X^2 \tag{4}$$

Chcielibyśmy je zamienić na bardziej zwartą postać $a(t-d)^2 + r$. Jak znaleźć d i r? Wystarczy oba wyrażenia przyrównać:

$$at^2 - 2tb + c \ = \ a(t-d)^2 + r \ = \ at^2 - 2tad + ad^2 + r.$$

Ponieważ wyrażenia przy kolejnych potęgach t muszą być sobie równe, dostaniemy:

$$b \ = \ ad, \ c \ = \ ad^2 + r \qquad \Longrightarrow \qquad d \ = \ \frac{b}{a}, \quad r \ = \ c - ad^2 \ = \ c - \frac{b^2}{a}.$$

Czyli:

$$\begin{aligned} d &= \frac{\mu_X\sigma_Y^2 + (z-\mu_Y)\sigma_X^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2} \\ r &= \mu_X^2\sigma_Y^2 + (z-\mu_Y)^2\sigma_X^2 - \frac{\big(\mu_X\sigma_Y^2 + (z-\mu_Y)\sigma_X^2\big)^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2} \\ &= \frac{\mu_X^2\sigma_Y^4 + (z-\mu_Y)^2\sigma_X^4 + \sigma_X^2\sigma_Y^2\left(\mu_X^2 + (z-\mu_Y)^2\right) - \big(\mu_X\sigma_Y^2 + (z-\mu_Y)\sigma_X^2\big)^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2} \\ &= \frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2\left(\mu_X^2 + (z-\mu_Y)^2\right) - 2\mu_X\sigma_Y^2(z-\mu_Y)\sigma_X^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2} \\ &= \frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}\left(\mu_X^2 + (z-\mu_Y)^2 - 2\mu_X(z-\mu_Y)\right) \ = \ \frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}(z-\mu_X-\mu_Y)^2. && (5) \end{aligned}$$

Ułamek po prawej stronie równania (3) ma więc postać:

$$-\frac{a(t-d)^2+r}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2},$$

a tym samym całka w (2) wygląda następująco:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{a(t-d)^2+r}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2}\right\}\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{a(t-d)^2}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2}\right\}\exp\left\{-\frac{r}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2}\right\}\mathrm{d}t \\
&= \exp\left\{-\frac{r}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2}\right\}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{a(t-d)^2}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2}\right\}\mathrm{d}t. \qquad (6)
\end{aligned}$$

Mając dowolny rozkład normalny o parametrach μ i σ^2, gęstość rozkładu musi się normalizować do 1, tzn:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}t = 1,$$

z czego wynika:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi\sigma^2} \qquad (7)$$

Zauważmy teraz, że całka po prawej stronie (6) jest dokładnie postaci (7), jeśli przyrównamy $\mu = d$ oraz $\sigma^2 = \frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2}{a}$. Tym samym dostajemy:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{a(t-d)^2}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2}\right\}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi\frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2}{a}} = \sqrt{2\pi\frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}},$$

gdzie w ostatniej równości podstawiliśmy wartość a z (4). Wykorzystując definicję r z (5), dostajemy:

$$\exp\left\{-\frac{r}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2}\right\} = \exp\left\{-\frac{\cancel{\sigma_X^2\sigma_Y^2}(z-\mu_X-\mu_Y)^2}{2\cancel{\sigma_X^2\sigma_Y^2}(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right\} = \exp\left\{-\frac{(z-\mu_X-\mu_Y)^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right\}.$$

Możemy więc zapisać prawą stronę (6) jako:

$$\exp\left\{-\frac{(z-\mu_X-\mu_Y)^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right\}\sqrt{2\pi\frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}.$$

Podstawiając to do (2) dostajemy:

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}}\exp\left\{-\frac{(z-\mu_X-\mu_Y)^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right\}\sqrt{2\pi\frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}} \\
&= \sqrt{\cancel{2\pi}\frac{\cancel{\sigma_X^2}\cancel{\sigma_Y^2}}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}\frac{1}{\cancel{2\pi}\cancel{\sigma_X^2}}\frac{1}{2\pi\cancel{\sigma_Y^2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}}\exp\left\{-\frac{(z-\mu_X-\mu_Y)^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}\right\}.
\end{aligned}$$

Ale to ostatnie wyrażenie ma postać gęstości rozkładu normalnego z parametrami $\mu = \mu_X + \mu_Y$ i $\sigma^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$. Czyli:

$$Z \sim N\left(\mu_X+\mu_Y, \sigma_X^2+\sigma_Y^2\right).$$