Całkowitoliczbowe programowanie liniowe

Badania operacyjne

Joanna Józefowska

Instytut Informatyki

Przykład Algorytm Ralph Gomory Inne przykłady

Zadanie

Producent dwóch typów szynobusów planuje produkcję na najbliższy miesiąc. Każdy z szynobusów przynosi taki sam zysk, ale wymagają do produkcji różnych zasobów. Zapotrzebowanie na zasoby oraz ich dostępność przedstawiono w Tablicy.

	Typ A	Typ B	dostępna ilość zasobu
Zasób I	4	5	20
Zasób II	2	1	6

Znaleźć optymalny plan produkcji szynobusów.

Joanna Józefowska

Model dyskretny

$$\text{zmaksymalizować} \quad z = x_1 + x_2 \tag{1}$$
$$2x_1 + x_2 \leqslant 6 \tag{2}$$
$$4x_1 + 5x_2 \leqslant 20 \tag{3}$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0 \tag{4}$$
$$x_1, x_2 \in \mathcal{Z} \tag{5}$$

Postać standardowa

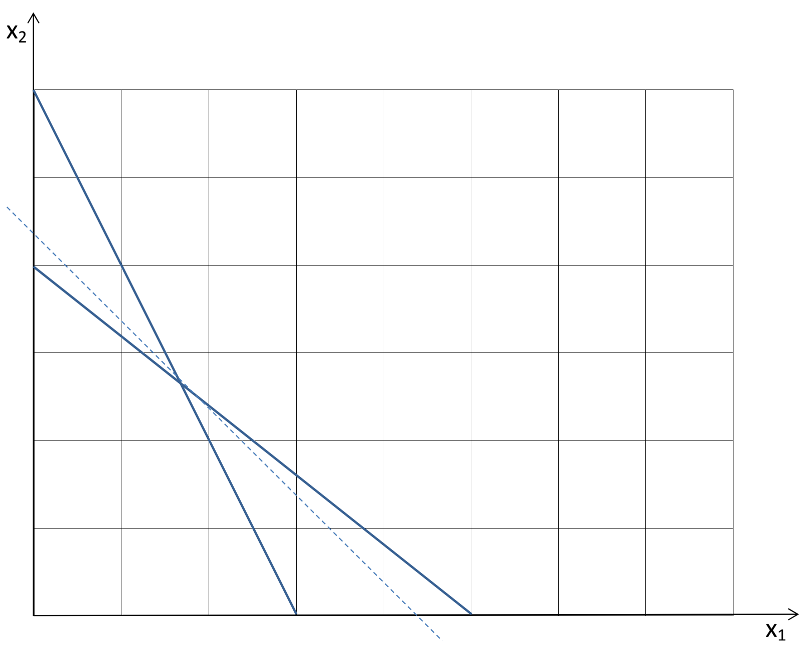
$$\text{zmaksymalizować} \quad z = x_1 + x_2 \tag{6}$$
$$2x_1 + x_2 + s_1 = 6 \tag{7}$$
$$4x_1 + 5x_2 + s_2 = 20 \tag{8}$$
$$x_1, x_2 \geqslant 0 \tag{9}$$
$$x_1, x_2 \in \mathcal{Z} \tag{10}$$

i	B	c	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
1	s_1	0	2	1	1	0	6
2	s_2	0	4	5	0	1	20
3			1	1	0	0	0

Rozwiązanie

i	B	c	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
1	x_1	1	1	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{3}$
2	x_2	1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
3			0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{13}{3}$

Dyskretne programowanie liniowe



Dyskretne programowanie liniowe

i	B	c	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
1	x_1	1	1	0	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{3}$
2	x_2	1	0	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
3			0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{13}{3}$

$$x_2 - \frac{2}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2 = \frac{8}{3} \tag{11}$$

$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \cdot s_1 + \left(0 + \frac{1}{3}\right) \cdot s_2 = 2 + \frac{2}{3} \tag{12}$$

$$\frac{1}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2 = \frac{2}{3} + (2 - x_2 + s_1) \tag{13}$$

Dyskretne programowanie liniowe

$$x_2 - \frac{2}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2 = \frac{8}{3}$$

$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \cdot s_1 + \left(0 + \frac{1}{3}\right) \cdot s_2 = 2 + \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2 = \frac{2}{3} + (2 - x_2 + s_1)$$

$$\frac{1}{3}s_1 + \frac{1}{3}s_2 \geqslant \frac{2}{3} \qquad | \cdot 3$$

$$s_1 + s_2 \geqslant 2 \tag{14}$$

$$s_1 + s_2 - s_3 + a_1 = 2 \tag{15}$$

Dyskretne programowanie liniowe

Twierdzenie

Niech IL oraz IR będą dowolnymi liczbami naturalnymi, f ściśle dodatnim ułamkiem a F sumą ściśle dodatnich ułamków takich, że

$$IL + F = IR + f$$

Wtedy $$IL \leqslant IR \text{ oraz } F \geqslant f.$$

Dowód. Niech (IL, IR, f, F) będzie dowolną czwórką spełniającą założenia twierdzenia. Ponieważ IL oraz IR są liczbami naturalnymi, F jest sumą ściśle dodatnich ułamków a f jest ściśle dodatnim ułamkiem, to musi zachodzić $F \geqslant f$. Jeżeli bowiem $F < 1$ to $F = f$, a jeżeli $F > 1$ to $F > f$. Ponieważ f jest ułamkiem, a IL oraz IR są liczbami naturalnymi, to F nie może być całkowite, w szczególności nie może być równe 1. Zatem z $IL + F = IR + f$ wynika, że $IL \leqslant IR$. Jest oczywiste, że gdy $F < 1$ to $IL = IR$ oraz gdy $F > 1$ to $IL < IR$. $\square$

Dyskretne programowanie liniowe

$$\text{zmaksymalizować} \quad x_1 + x_2 + M \cdot a_1 \tag{16}$$

$$\text{przy ograniczeniach} \quad x_1 + \tfrac{5}{6}s_1 - \tfrac{1}{6}s_2 = \tfrac{5}{3} \tag{17}$$

$$x_2 - \tfrac{2}{3}s_1 + \tfrac{1}{3}s_2 = \tfrac{8}{3} \tag{18}$$

$$s_1 + s_2 - s_3 + a_1 = 2 \tag{19}$$

i	B	c	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a_1	RHS
1	x_1	1	1	0	1	0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{3}$
2	x_2	1	0	1	-1	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$
3	a_1	$-M$	0	0	1	1	-1	1	2
4			0	0	M	M	$-\frac{1}{6} - M$	0	4

Dyskretne programowanie liniowe

i	B	c	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
1	x_1	1	1	0	1	0	$\frac{1}{6}$	2
2	x_2	1	0	1	-1	0	$\frac{1}{3}$	2
3	s_2	0	0	0	1	1	-1	2
4			0	0	0	0	$-\frac{1}{6}$	4

Przykład Algorytm Ralph Gomory Inne przykłady

Odcięcie

$$s_1 + s_2 \geqslant 2 \tag{20}$$

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 6 \tag{21}$$

$$4x_1 + 5x_2 + s_2 = 20 \tag{22}$$

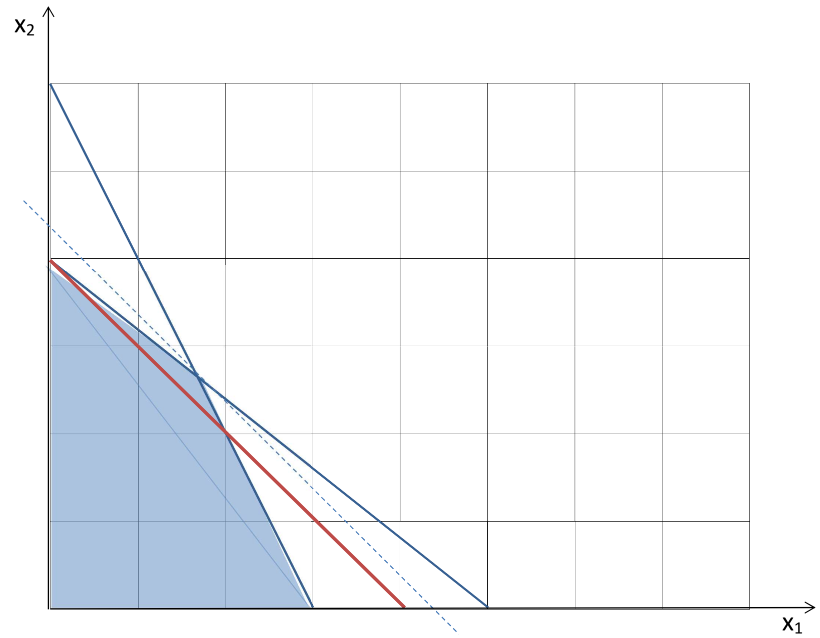
$$(6 - 2x_1 - x_2) + (20 - 4x_1 - 5x_2) \geqslant 2 \tag{23}$$

$$26 - 6x_1 - 6x_2 \geqslant 2 \tag{24}$$

$$x_1 + x_2 \leqslant 4 \tag{25}$$

Joanna Józefowska

Dyskretne programowanie liniowe



Algorytm Gomory'ego

krok 1 Rozwiąż metodą sympleks zadanie PL bez uwzględniania warunku dyskretności zmiennych.

krok 2 Jeżeli rozwiązanie uzyskane w wyniku ostatniego zastosowania metody sympleks jest całkowitoliczbowe, to jest ono rozwiązaniem wyjściowego zadania całkowitoliczbowego programowania liniowego; w przeciwnym razie przejdź do kroku 3.

krok 3 Wyeliminuj wszystkie zmienne sztuczne (bazowe i niebazowe) z równań wynikających z ostatniej tablicy sympleksowej, po czym wybierz zmienną x_k, która ma wartość ułamkową w ostatnim rozwiązaniu.

Algorytm Gomory'ego

krok 4 W układzie równań wynikającym z ostatniej tablicy sympleks jeden ze współczynników przy x_k, powiedzmy w l-tym równaniu jest równy 1, a pozostałe są równe zero. Zastąp współczynniki i stałą w l-tym równaniu ich częściami ułamkowymi.

krok 5 Dodaj 1 do każdego ujemnego ułamka wynikającego z kroku 4. Zapisz otrzymane równanie jako ograniczenie nierównościowe ze znakiem "$\geqslant$".

Algorytm Gomory'ego

krok 6 Odejmij zmienną osłabiającą i dodaj zmienną sztuczną do zmodyfikowanego l-tego ograniczenia w celu sprowadzenia go do równania. Dołącz to równanie na koniec układu równań wynikającego z ostatniej tablicy sympleks i przydziel nowej zmiennej sztucznej dowolnie duży współczynnik w funkcji celu. Uaktualnij wiersz wskaźnikowy tablicy sympleks.

krok 7 Wykonaj dodatkowe iteracje metody sympleks dla nowego układu równań utworzonego w kroku 6. Po uzyskaniu rozwiązania przejdź do kroku 2.

http://www.ms.unimelb.edu.au/ moshe/620-362/gomory/

Ralph Gomory (born 7 May 1929)

Gomory described his method in a very short paper entitled "Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs", Bull. American Math. Society, 64, 275-278, 1958.

an American applied mathematician and executive. Gomory worked at IBM as a researcher and later as an executive. During that time, his research led to the creation of new areas of applied mathematics. He graduated from George School in Newtown, PA in 1946. He received his B.A. from Williams College in 1950, studied at Cambridge University, and received his Ph.D. in mathematics from Princeton University in 1954. While serving in the Navy (1954-1957), he shifted his focus to applied mathematics in operations research. Among his mathematical achievements were founding contributions to the field of integer programming, an active area of research to this day. In December 2007 Gomory retired and became Professor at Stern School of Business, New York University.

Problem plecakowy

W kolejce do serwera oczekuje 8 zadań obliczeniowych, które bezwzględnie trzeba zakończyć w ciągu godziny. Za niewykonanie zadania należy zapłacić karę zleceniodawcy. Czasy realizacji oraz kary za niewykonanie poszczególnych zadań zawarto w tablicy. Które zadania należy wykonać, aby zminimalizować całkowitą karę?

zadanie	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8
czas [min]	6	8	11	20	28	35	25	9
kara [tys.zł]	6	5	9	10	11	12	9	8

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy zadanie } i \text{ zostanie wykonane} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \qquad (26)$$

Problem plecakowy

zadanie	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6	Z7	Z8
czas [min]	6	8	11	20	28	35	25	9
kara [tys.zł]	6	5	9	10	11	12	9	8

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy zadanie } i \text{ zostanie wykonane} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\text{zmin.} \quad & 6(1-x_1)+5(1-x_2)+9(1-x_3)+10(1-x_4)+ && (28)\\
& 11(1-x_5)+12(1-x_6)+9(1-x_7)+8(1-x_8) && (29)\\
\text{p.o.} \quad & 6x_1+8x_2+11x_3+20x_4+28x_5+35x_6+25x_7+9x_8 \leqslant 60 && (30)\\
& x_i \in \{0,1\}, i=1,\dots,8 && (31)
\end{aligned}$$

Przykład Algorytm Ralph Gomory Inne przykłady

Problem plecakowy

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy zadanie } i \text{ zostanie wykonane} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
\text{zmin.} \quad & 6(1-x_1)+5(1-x_2)+9(1-x_3)+10(1-x_4)+ && (33)\\
& 11(1-x_5)+12(1-x_6)+9(1-x_7)+8(1-x_8) && (34)\\
\text{p.o.} \quad & 6x_1+8x_2+11x_3+20x_4+28x_5+35x_6+25x_7+9x_8 \leqslant 60 && (35)\\
& x_i \in \{0,1\}, i=1,\dots,8 && (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{zmaks.} \quad & 6x_1+5x_2+9x_3+10x_4+11x_5+12x_6+9x_7+8x_8 && (37)\\
\text{p.o.} \quad & 6x_1+8x_2+11x_3+20x_4+28x_5+35x_6+25x_7+9x_8 \leqslant 60 && (38)\\
& x_i \in \{0,1\}, i=1,\dots,8 && (39)
\end{aligned}$$

Joanna Józefowska

Problem plecakowy

Dany jest skończony zbiór elementów $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, z których każdy ma całkowitoliczbową wagę w_i i wartość v_i oraz całkowitoliczbową pojemność plecaka b. Które elementy należy włożyć do plecaka, aby nie przekraczając jego pojemności zmaksymalizować wartość zapakowanych elementów?

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{gdy element } i \text{ zostanie zapakowany} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \tag{40}$$

$$\text{zmaksymalizować} \quad \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \tag{41}$$

$$\text{przy ograniczeniach} \quad \sum_{i=1}^{n} w_i x_i \leqslant b \tag{42}$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n \tag{43}$$

Problem jest NP-trudny w zwykłym sensie.

Problem transportowy

Firma produkująca nawozy sztuczne ma trzy zakłady produkcyjne zlokalizowane w Kluczborku, Białymstoku i Pile. Kwartalna produkcja poszczególnych zakładów wynosi odpowiednio: 5000 kg, 6000 kg, i 2500 kg. Firma ma cztery centra dystrybucji, zlokalizowane w Lublinie, Elblągu, Łodzi i Opolu. Przewidywany popyt na nawozy w poszczególnych centrach dystrybucji wynosi odpowiednio: 6000 kg, 4000 kg, 2000 kg oraz 1500 kg. Jednostkowe koszty transportu (w zł/kg) z każdego zakładu do poszczególnych centrów dystrybucji podano w tablicy.

	Lublin	Elbląg	Łódź	Opole
Kluczbork	3	2	7	6
Białystok	7	5	2	3
Piła	2	5	4	5

Problem transportowy

x_{ij} – ilość towaru przewieziona od dostawcy i do odbiorcy j

$$\begin{aligned}
\text{zminimalizować} \quad & 3x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14} + \\
& 7x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + \\
& 2x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34} && (44) \\
\text{przy ograniczeniach} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leqslant 5000 && (45) \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leqslant 6000 && (46) \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leqslant 2500 && (47) \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} \geqslant 6000 && (48) \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} \geqslant 4000 && (49) \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} \geqslant 2000 && (50) \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} \geqslant 1500 && (51) \\
& x_{ij} \geqslant 0, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4 && (52) \\
& x_{ij} \in \mathcal{Z}, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4 && (53)
\end{aligned}$$

Problem transportowy

Mamy m dostawców, których możliwości wysyłki wynoszą $a_i, i = 1, \ldots m$ i n odbiorców, których zapotrzebowania wynoszą $b_j, j = 1, \ldots n$. Koszt przesłania jednostkowej porcji towaru od dostawcy i do odbiorcy j wynosi c_{ij}. Wyznaczyć plan przewozów minimalizujący całkowite koszty.

$$\begin{aligned}
\text{zminimalizować} \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} && (54) \\
\text{przy ograniczeniach} \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, i = 1, \ldots, m && (55) \\
& \textstyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j, j = 1, \ldots, n && (56) \\
& x_{ij} \geqslant 0, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n && (57) \\
& x_{ij} \in \mathcal{Z}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n && (58)
\end{aligned}$$

Istnieje algorytm wielomianowy o złożoności $O(n^3)$ znajdujący optymalne rozwiązanie problemu.

Problem przydziału

Firma zatrudniła do sprzątania po remoncie 3 pracowników: Armonda, Francine, i Herberta. Jeden z nich musi posprzątać łazienkę, drugi umyć podłogi, a trzeci umyć okna, ale każdy z nich otrzymuje inne wynagrodzenie za te same czynności (tablica). Należy tak rodzielić zadania między pracowników, aby zminimalizować całkowity koszt sprzątania.

	Armond	Francine	Herbert
łazienka	2	3	3
podłogi	3	2	3
okna	3	3	2

Przykład Algorytm Ralph Gomory Inne przykłady

Problem przydziału

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pracownik } i \text{ wykonuje zadanie } j \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\text{zmin.} \quad & 2x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 3x_{23} + 3x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} && (59)\\
\text{p.o.} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 && (60)\\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 && (61)\\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 && (62)\\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 && (63)\\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 && (64)\\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 && (65)\\
& x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n && (66)
\end{aligned}$$

Joanna Józefowska

Problem przydziału

Mamy n pracowników (maszyn, procesorów) i n zadań do wykonania. Koszt (czas) wykonania zadania i przez pracownika j wynosi c_{ij}. Przydzielić zadania do pracowników w taki sposób, aby całkowity koszt wykonania wszystkich zadań był minimalny.

$$\text{zminimalizować} \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \tag{67}$$

$$\text{przy ograniczeniach} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geqslant 1, i = 1, \ldots, m \tag{68}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant 1, j = 1, \ldots, n \tag{69}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n \tag{70}$$

Istnieje algorytm wielomianowy o złożoności $O(log^2(n))$ znajdujący optymalne rozwiązanie problemu.