Metody probabilistyczne

6. Momenty zmiennych losowych

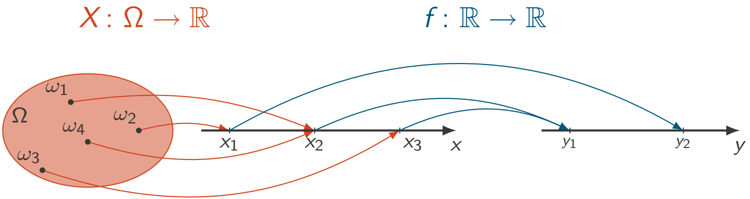
Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki PP
http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/

14.11.2017

Funkcje zmiennych losowych

Mierzalna funkcja $Y = f(X)$ zmiennej losowej X o wartościach rzeczywistych jest również zmienną losową.



Rozkład zmiennej losowej Y definiujemy poprzez przeciwobraz jako:

$$P_Y(A) \;=\; P_X\big(f^{-1}(A)\big),$$

lub w uproszczonej notacji:

$$P(Y \in A) \;=\; P\big(X \in f^{-1}(A)\big)$$

Przykład

Rzucamy dwoma kostkami:

- X określa sumaryczną liczbę oczek na obu kostkach
- $Y = f(X) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } X < 5 \\ 1 & \text{jeśli } 5 \leqslant X \leqslant 8 \\ 2 & \text{jeśli } 9 \leqslant X \leqslant 11 \\ 3 & \text{jeśli } X = 12 \end{cases}$

Przykład

Rzucamy dwoma kostkami:

- X określa sumaryczną liczbę oczek na obu kostkach
- $Y = f(X) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } X < 5 \\ 1 & \text{jeśli } 5 \leqslant X \leqslant 8 \\ 2 & \text{jeśli } 9 \leqslant X \leqslant 11 \\ 3 & \text{jeśli } X = 12 \end{cases}$

<table>
<tr><td>x</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td></tr>
<tr><td>$P(X = x)$</td><td>$\frac{1}{36}$</td><td>$\frac{2}{36}$</td><td>$\frac{3}{36}$</td><td>$\frac{4}{36}$</td><td>$\frac{5}{36}$</td><td>$\frac{6}{36}$</td><td>$\frac{5}{36}$</td><td>$\frac{4}{36}$</td><td>$\frac{3}{36}$</td><td>$\frac{2}{36}$</td><td>$\frac{1}{36}$</td></tr>
<tr><td>y</td><td colspan="3">0</td><td colspan="4">1</td><td colspan="3">2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$P(Y = y)$</td><td colspan="3">$\frac{6}{36}$</td><td colspan="4">$\frac{20}{36}$</td><td colspan="3">$\frac{9}{36}$</td><td>$\frac{1}{36}$</td></tr>
</table>

Przykład

Rzucamy dwoma kostkami:

- X określa sumaryczną liczbę oczek na obu kostkach
- $Y = f(X) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } X < 5 \\ 1 & \text{jeśli } 5 \leqslant X \leqslant 8 \\ 2 & \text{jeśli } 9 \leqslant X \leqslant 11 \\ 3 & \text{jeśli } X = 12 \end{cases}$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
y	0			1				2			3
$P(Y = y)$	$\frac{6}{36}$			$\frac{20}{36}$				$\frac{9}{36}$			$\frac{1}{36}$

Przykład:

$$\begin{aligned} P(Y = 2) &= P(X \in f^{-1}(2)) \\ &= P(X \in \{x \colon f(x) = 2\}) = P(X \in \{9, 10, 11\}) \end{aligned}$$

Funkcje dyskretnych zmiennych losowych

Jeśli $X \in \{x_1, x_2, \ldots\}$ oraz $Y = f(X) \in \{y_1, y_2, \ldots\}$ są dyskretnymi zmiennymi losowymi to:

$$P(Y = y) \; = \sum_{x:\, f(x)=y} P(X = x)$$

Czyli aby policzyć prawdopodobieństwo $P(Y = y)$ sumujemy prawdopodobieństwa $P(X = x)$ dla wszystkich x które prowadzą do wyniku $f(x) = y$.

Wartość oczekiwana: motywacja

- Rzucamy uczciwą monetą. W przypadku orła przegrywamy 1zł, w przypadku reszki wygrywamy 2zł. Czy warto brać udział w takiej grze?
- Wygrywamy a zł z prawdopodobieństwem p i przegrywamy b zł z prawdopodobieństwem $1 - p$. Ile wynosi średnia wygrana?
- Rzucamy kostką, jaka jest średnia liczba oczek której można się spodziewać?
- Gramy w totolotka aż do trafienia „szóstki". Ile średnio gier musielibyśmy zagrać?
- Jaka jest średnia liczba sukcesów w n próbach w schemacie Bernoulliego?

Wartość oczekiwana

Definicja

Niech $X \in \{x_1, x_2, \ldots\}$ będzie zmienną dyskretną. Wartością oczekiwaną (wartością przeciętną, wartością średnią) zmiennej losowej X nazywamy liczbę:

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Wartość oczekiwana jest średnią ważoną po zbiorze $\{x_1, x_2, \ldots\}$ z wagami $P(X = x_i)$.

Uwaga: wartość oczekiwana jest deterministyczną liczbą!

Uwaga: Często będziemy opuszczali nawiasy i zapisywali $E(X)$ jako EX

Wartość oczekiwana: przykłady

$$E(X) \;=\; \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Przykład: Rzucamy kostką, jaka jest wartość oczekiwana liczby oczek?

$X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(X = i) = \frac{1}{6}$

Wartość oczekiwana: przykłady

$$E(X) \;=\; \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Przykład: Rzucamy kostką, jaka jest wartość oczekiwana liczby oczek?

$X \in \{1,2,3,4,5,6\}$, $P(X = i) = \frac{1}{6}$

$$EX \;=\; 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} \;=\; \frac{21}{6} \;=\; 3.5$$

Wartość oczekiwana: przykłady

$$E(X) \;=\; \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Przykład: Rzucamy kostką, jaka jest wartość oczekiwana liczby oczek?

$X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(X = i) = \frac{1}{6}$

$$EX \;=\; 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} \;=\; \frac{21}{6} \;=\; 3.5$$

Przykład: Podobnie, ale rzucamy dwoma kostkami i sumujemy wynik

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Wartość oczekiwana: przykłady

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Przykład: Rzucamy kostką, jaka jest wartość oczekiwana liczby oczek?

$X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(X = i) = \frac{1}{6}$

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

Przykład: Podobnie, ale rzucamy dwoma kostkami i sumujemy wynik

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$EX = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + \ldots + 12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{252}{36} = 7$$

Wartość oczekiwana: przykłady

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Przykład: Rzucamy uczciwą monetą. W przypadku orła przegrywamy 1zł, w przypadku reszki wygrywamy 2zł. Czy warto brać udział w takiej grze?

$X \in \{-1, 2\}$, $P(X = -1) = P(X = 2) = \frac{1}{2}$

Wartość oczekiwana: przykłady

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Przykład: Rzucamy uczciwą monetą. W przypadku orła przegrywamy 1zł, w przypadku reszki wygrywamy 2zł. Czy warto brać udział w takiej grze?

$X \in \{-1, 2\}$, $P(X = -1) = P(X = 2) = \frac{1}{2}$

$$EX = -1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{(warto!)}$$

Wartość oczekiwana: przykłady

$$E(X) \; = \; \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Przykład: Rzucamy uczciwą monetą. W przypadku orła przegrywamy 1zł, w przypadku reszki wygrywamy 2zł. Czy warto brać udział w takiej grze?

$X \in \{-1, 2\}$, $P(X = -1) = P(X = 2) = \frac{1}{2}$

$$EX \; = \; -1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \; = \; \frac{1}{2} \qquad \text{(warto!)}$$

Przykład: Wygrywamy a zł z prawdopodobieństwem p i przegrywamy b zł z prawdopodobieństwem $1 - p$. Ile wynosi średnia wygrana?

$X \in \{a, -b\}$, $P(X = a) = p$, $P(X = -b) = 1 - p$

Wartość oczekiwana: przykłady

$$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i)$$

Przykład: Rzucamy uczciwą monetą. W przypadku orła przegrywamy 1zł, w przypadku reszki wygrywamy 2zł. Czy warto brać udział w takiej grze?

$X \in \{-1, 2\}$, $P(X = -1) = P(X = 2) = \frac{1}{2}$

$$EX = -1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{(warto!)}$$

Przykład: Wygrywamy a zł z prawdopodobieństwem p i przegrywamy b zł z prawdopodobieństwem $1 - p$. Ile wynosi średnia wygrana?

$X \in \{a, -b\}$, $P(X = a) = p$, $P(X = -b) = 1 - p$

$$EX = ap - b(1 - p)$$

Warto grać, jeśli $ap - b(1 - p) > 0$.

Strategia „martyngałowa”

Po obstawieniu a zł wygrywamy dodatkowe a zł z prawdopodobieństwem $1-p$ lub tracimy obstawione a zł z prawdopodobieństwem p.

Rozważmy strategię, w której gramy do momentu wygranej w ten sposób: obstawiamy 1zł; jeśli przegramy, obstawiamy 2zł; jeśli przegramy, obstawiamy 4zł, itp. (przy każdej przegranej podwajamy stawkę). Robimy tak, dopóki nie wygramy lub nie stracimy całego kapitału.

W przypadku wygranej zawsze jesteśmy do przodu 1zł, ponieważ następne zakłady kompensują poprzednie przegrane!

Jaka jest wartość oczekiwana wygranej?

Strategia „martyngałowa”

Załóżmy, że początkowy kapitał jest postaci $2^n - 1$ zł, czyli po przegranej n razy z rzędu tracimy cały kapitał.

Niech X określa wartość wygranej pod koniec gry

Strategia „martyngałowa”

Załóżmy, że początkowy kapitał jest postaci $2^n - 1$ zł, czyli po przegranej n razy z rzędu tracimy cały kapitał.

Niech X określa wartość wygranej pod koniec gry

- Jeśli przegramy n razy z rzędu, tracimy kapitał, czyli $X = -(2^n - 1)$

Strategia „martyngałowa”

Załóżmy, że początkowy kapitał jest postaci $2^n - 1$ zł, czyli po przegranej n razy z rzędu tracimy cały kapitał.

Niech X określa wartość wygranej pod koniec gry

- Jeśli przegramy n razy z rzędu, tracimy kapitał, czyli $X = -(2^n - 1)$
  Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi p^n

Strategia „martyngałowa”

Załóżmy, że początkowy kapitał jest postaci $2^n - 1$ zł, czyli po przegranej n razy z rzędu tracimy cały kapitał.

Niech X określa wartość wygranej pod koniec gry

- Jeśli przegramy n razy z rzędu, tracimy kapitał, czyli $X = -(2^n - 1)$
  Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi p^n
- Jeśli nie przegramy n razy z rzędu, zyskujemy 1zł, czyli $X = 1$

Strategia „martyngałowa"

Załóżmy, że początkowy kapitał jest postaci $2^n - 1$ zł, czyli po przegranej n razy z rzędu tracimy cały kapitał.

Niech X określa wartość wygranej pod koniec gry

- Jeśli przegramy n razy z rzędu, tracimy kapitał, czyli $X = -(2^n - 1)$
  Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi p^n
- Jeśli nie przegramy n razy z rzędu, zyskujemy 1zł, czyli $X = 1$
  Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi $1 - p^n$

Strategia „martyngałowa”

Załóżmy, że początkowy kapitał jest postaci $2^n - 1$ zł, czyli po przegranej n razy z rzędu tracimy cały kapitał.

Niech X określa wartość wygranej pod koniec gry

- Jeśli przegramy n razy z rzędu, tracimy kapitał, czyli $X = -(2^n - 1)$
  Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi p^n
- Jeśli nie przegramy n razy z rzędu, zyskujemy 1zł, czyli $X = 1$
  Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi $1 - p^n$

$$EX = 1 \cdot (1 - p^n) - (2^n - 1)p^n$$

Strategia „martyngałowa”

Załóżmy, że początkowy kapitał jest postaci $2^n - 1$ zł, czyli po przegranej n razy z rzędu tracimy cały kapitał.

Niech X określa wartość wygranej pod koniec gry

- Jeśli przegramy n razy z rzędu, tracimy kapitał, czyli $X = -(2^n - 1)$
  Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi p^n
- Jeśli nie przegramy n razy z rzędu, zyskujemy 1zł, czyli $X = 1$
  Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi $1 - p^n$

$$EX = 1 \cdot (1 - p^n) - (2^n - 1)p^n = 1 - 2^n p^n = 1 - (2p)^n$$

Strategia „martyngałowa"

Załóżmy, że początkowy kapitał jest postaci $2^n - 1$ zł, czyli po przegranej n razy z rzędu tracimy cały kapitał.

Niech X określa wartość wygranej pod koniec gry

- Jeśli przegramy n razy z rzędu, tracimy kapitał, czyli $X = -\big(2^n - 1\big)$
  Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi p^n
- Jeśli nie przegramy n razy z rzędu, zyskujemy 1zł, czyli $X = 1$
  Prawdopodobieństwo tej sytuacji wynosi $1 - p^n$

$$EX \;=\; 1 \cdot \big(1 - p^n\big) - \big(2^n - 1\big)p^n \;=\; 1 - 2^n p^n \;=\; 1 - (2p)^n$$

- Jeśli $p = \frac{1}{2}$ to $EX = 0$
- Jeśli $p > \frac{1}{2}$ (np. w ruletce), to $EX < 0$
  Mimo, że przegrana jest bardzo mało prawdopodobna, to generuje bardzo dużą stratę, stąd średnio przegrywamy

Wartość oczekiwana w rozkładzie dwupunktowym

Zmienna X ma rozkład dwupunktowy $B(p)$ jeśli $X \in \{0, 1\}$

$$p = P(X = 1), \qquad P(X = 0) = 1 - p$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie dwupunktowym

Zmienna X ma rozkład dwupunktowy $B(p)$ jeśli $X \in \{0, 1\}$

$$p = P(X = 1), \qquad P(X = 0) = 1 - p$$

$$EX \;=\; 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) \;=\; p$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie dwumianowym

Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$ jeśli:

$$P(X = k) \ = \ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie dwumianowym

Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$ jeśli:

$$
\begin{aligned}
P(X = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n \\
EX &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}
$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie dwumianowym

Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$ jeśli:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie dwumianowym

Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$ jeśli:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie dwumianowym

Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$ jeśli:

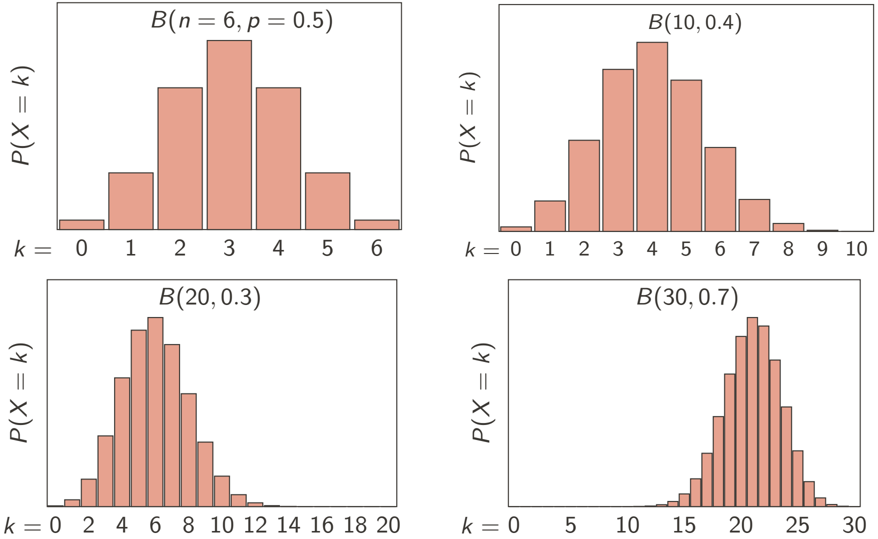
$$
\begin{aligned}
P(X = k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n \\
EX &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}
\end{aligned}
$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie dwumianowym

Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$ jeśli:

$$
\begin{aligned}
P(X = k) \; &= \; \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n \\
EX \; &= \; \sum_{k=0}^{n} k \cdot P(X = k) \; = \; \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \; \sum_{k=1}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \; \sum_{k=1}^{n} n \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p \cdot p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= \; np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= \; np \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}}_{=1} \; = \; np
\end{aligned}
$$

Rozkład dwumianowy



Alternatywny wzór wartość oczekiwaną

Niech X jest zmienną losową przyjmującą tylko wartości całkowite nieujemne ($X \in \{0, 1, 2, \ldots\}$). Wtedy:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)$$

Alternatywny wzór wartość oczekiwaną

Niech X jest zmienną losową przyjmującą tylko wartości całkowite nieujemne ($X \in \{0, 1, 2, \ldots\}$). Wtedy:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)$$

Dowód:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + \ldots$$

Alternatywny wzór wartość oczekiwaną

Niech X jest zmienną losową przyjmującą tylko wartości całkowite nieujemne ($X \in \{0, 1, 2, \ldots\}$). Wtedy:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)$$

Dowód:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + \ldots$$

$$= P(X = 1) \quad +2P(X = 2) \quad +3P(X = 3) \quad +4P(X = 4) \quad +5P(X = 5) \quad + \ldots$$

$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
		$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
			$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
				$P(X = 5)$	$\cdots$

Alternatywny wzór wartość oczekiwaną

Niech X jest zmienną losową przyjmującą tylko wartości całkowite nieujemne ($X \in \{0, 1, 2, \ldots\}$). Wtedy:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)$$

Dowód:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + \ldots$$

	$= P(X = 1)$	$+2P(X = 2)$	$+3P(X = 3)$	$+4P(X = 4)$	$+5P(X = 5)$	$+ \ldots$
$= P(X \geqslant 1)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
		$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
			$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
				$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
					$P(X = 5)$	$\cdots$

Alternatywny wzór wartość oczekiwaną

Niech X jest zmienną losową przyjmującą tylko wartości całkowite nieujemne ($X \in \{0, 1, 2, \ldots\}$). Wtedy:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)$$

Dowód:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + \ldots$$

	$= P(X = 1)$	$+2P(X = 2)$	$+3P(X = 3)$	$+4P(X = 4)$	$+5P(X = 5)$	$+\ldots$
$= P(X \geqslant 1)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
$+P(X \geqslant 2)$		$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
			$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
				$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
					$P(X = 5)$	$\cdots$

Alternatywny wzór wartość oczekiwaną

Niech X jest zmienną losową przyjmującą tylko wartości całkowite nieujemne ($X \in \{0, 1, 2, \ldots\}$). Wtedy:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)$$

Dowód:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + \ldots$$

	$= P(X = 1)$	$+2P(X = 2)$	$+3P(X = 3)$	$+4P(X = 4)$	$+5P(X = 5)$	$+\ldots$
$= P(X \geqslant 1)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
$+P(X \geqslant 2)$		$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
$+P(X \geqslant 3)$			$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
				$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
					$P(X = 5)$	$\cdots$

Alternatywny wzór wartość oczekiwaną

Niech X jest zmienną losową przyjmującą tylko wartości całkowite nieujemne ($X \in \{0, 1, 2, \ldots\}$). Wtedy:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)$$

Dowód:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + \ldots$$

	$= P(X = 1)$	$+2P(X = 2)$	$+3P(X = 3)$	$+4P(X = 4)$	$+5P(X = 5)$	$+ \ldots$
$= P(X \geqslant 1)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
$+P(X \geqslant 2)$		$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
$+P(X \geqslant 3)$			$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
$+P(X \geqslant 4)$				$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
					$P(X = 5)$	$\cdots$

Alternatywny wzór wartość oczekiwaną

Niech X jest zmienną losową przyjmującą tylko wartości całkowite nieujemne ($X \in \{0, 1, 2, \ldots\}$). Wtedy:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)$$

Dowód:

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + \ldots$$

	$= P(X = 1)$	$+2P(X = 2)$	$+3P(X = 3)$	$+4P(X = 4)$	$+5P(X = 5)$	$+\ldots$
$= P(X \geqslant 1)$	$P(X = 1)$	$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
$+P(X \geqslant 2)$		$P(X = 2)$	$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
$+P(X \geqslant 3)$			$P(X = 3)$	$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
$+P(X \geqslant 4)$				$P(X = 4)$	$P(X = 5)$	$\cdots$
$+\ldots$					$P(X = 5)$	$\cdots$

Przykład

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)$$

Nowy wzór działa również gdy $X \in \{i, \ldots, j\}$

Przykład

$$EX = \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)}$$

Nowy wzór działa również gdy $X \in \{i, \ldots, j\}$

Po prostu przyjmujemy $P(X = k) = 0$ dla $k < i$ lub $k > j$

Przykład

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)$$

Nowy wzór działa również gdy $X \in \{i, \ldots, j\}$

Po prostu przyjmujemy $P(X = k) = 0$ dla $k < i$ lub $k > j$

Przykład Rzut kostką: $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(X = k) = \frac{1}{6}$

Przykład

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)$$

Nowy wzór działa również gdy $X \in \{i, \ldots, j\}$

Po prostu przyjmujemy $P(X = k) = 0$ dla $k < i$ lub $k > j$

Przykład Rzut kostką: $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(X = k) = \frac{1}{6}$

$$EX = P(X \geqslant 1) + P(X \geqslant 2) + P(X \geqslant 3) + \ldots + P(X \geqslant 6)$$

Przykład

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)$$

Nowy wzór działa również gdy $X \in \{i, \ldots, j\}$

Po prostu przyjmujemy $P(X = k) = 0$ dla $k < i$ lub $k > j$

Przykład Rzut kostką: $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $P(X = k) = \frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} EX &= P(X \geqslant 1) + P(X \geqslant 2) + P(X \geqslant 3) + \ldots + P(X \geqslant 6) \\ &= 1 + \frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \ldots + \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5 \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym

Zmienna $X \in \{1, 2, \ldots\}$ ma rozkład geometryczny $G_1(p)$ jeśli:

$$P(X = k) \;=\; (1 - p)^{k-1} p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym

Zmienna $X \in \{1, 2, \ldots\}$ ma rozkład geometryczny $G_1(p)$ jeśli:

$$P(X = k) \;=\; (1 - p)^{k-1} p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$EX \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k)$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym

Zmienna $X \in \{1, 2, \ldots\}$ ma rozkład geometryczny $G_1(p)$ jeśli:

$$P(X = k) \;=\; (1-p)^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$\begin{aligned} EX \;&=\; \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k) \\ &=\; \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{P(X > k-1)}_{=(1-p)^{k-1}} \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym

Zmienna $X \in \{1, 2, \ldots\}$ ma rozkład geometryczny $G_1(p)$ jeśli:

$$P(X = k) \;=\; (1-p)^{k-1} p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_{k=1}^{\infty} k P(X = k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geqslant k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{P(X > k-1)}_{=(1-p)^{k-1}} \\
&= 1 + (1-p) + (1-p)^2 + \ldots \;=\; \frac{1}{1-(1-p)} \;=\; \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

Rozkład geometryczny: przykład

Gramy w totolotka aż do trafienia „szóstki”. Ile średnio gier musielibyśmy zagrać?

Rozkład geometryczny: przykład

Gramy w totolotka aż do trafienia „szóstki". Ile średnio gier musielibyśmy zagrać?

X – liczba gier (prób) do trafienia „szóstki" (sukcesu)

p – prawdopodobieństwo sukcesu, $p = \frac{1}{\binom{49}{6}}$

X ma rozkład $G_1(p)$

Rozkład geometryczny: przykład

Gramy w totolotka aż do trafienia „szóstki". Ile średnio gier musielibyśmy zagrać?

X – liczba gier (prób) do trafienia „szóstki" (sukcesu)

p – prawdopodobieństwo sukcesu, $p = \frac{1}{\binom{49}{6}}$

X ma rozkład $G_1(p)$

$$EX = \frac{1}{p} = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

Rozkład ujemny dwumianowy (Pascala)

Zmienna $X \in \{0, 1, \ldots\}$ ma rozkład ujemny dwumianowy $NB(r, p)$ jeśli:

$$P(X = k) \; = \; \binom{r+k-1}{r-1}(1-p)^r p^k$$

Zadanie 1

Pokaż, że jeśli X ma rozkład $NB(r, p)$ to:

$$EX = \frac{rp}{1-p}$$

Rozkład Poissona

Zmienna $X \in \{0, 1, \ldots\}$ ma rozkład Poissona $\mathrm{Pois}(\lambda)$ jeśli:

$$P(X = k) \; = \; \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Zadanie 2

Pokaż, że jeśli X ma rozkład $\mathrm{Pois}(\lambda)$ to:

$$EX = \lambda$$

Uwaga: Ponieważ rozkład Poissona jest przybliżeniem rozkładu dwumianowego przy $\lambda = np$, takiego wyniku należało oczekiwać!

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

- X określa wynik rzutu kostką ($X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)
- $Y = f(X) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X \in \{1, 2, 3\} \\ 2 & \text{jeśli } X \in \{4, 5\} \\ 3 & \text{jeśli } X = 6 \end{cases}$

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

- X określa wynik rzutu kostką ($X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)
- $Y = f(X) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X \in \{1, 2, 3\} \\ 2 & \text{jeśli } X \in \{4, 5\} \\ 3 & \text{jeśli } X = 6 \end{cases}$

<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>$P(X = x)$</td><td>1/6</td><td>1/6</td><td>1/6</td><td>1/6</td><td>1/6</td><td>1/6</td></tr>
<tr><td>y</td><td colspan="3">1</td><td colspan="2">2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$P(Y = y)$</td><td colspan="3">1/2</td><td colspan="2">1/3</td><td>1/6</td></tr>
</table>

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

- X określa wynik rzutu kostką ($X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)
- $Y = f(X) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X \in \{1, 2, 3\} \\ 2 & \text{jeśli } X \in \{4, 5\} \\ 3 & \text{jeśli } X = 6 \end{cases}$

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
y	1			2		3
$P(Y = y)$	$1/2$			$1/3$		$1/6$

$$\begin{aligned} EY &= 1 \cdot P(Y = 1) + 2 \cdot P(Y = 2) + 3 \cdot P(Y = 3) \\ &= \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

- X określa wynik rzutu kostką ($X \in \{1,2,3,4,5,6\}$)
- $Y = f(X) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X \in \{1,2,3\} \\ 2 & \text{jeśli } X \in \{4,5\} \\ 3 & \text{jeśli } X = 6 \end{cases}$

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
y	1			2		3
$P(Y = y)$	1/2			1/3		1/6

$$EY = 1 \cdot P(Y=1) + 2 \cdot P(Y=2) + 3 \cdot P(Y=3)$$

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

- X określa wynik rzutu kostką ($X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)
- $Y = f(X) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X \in \{1, 2, 3\} \\ 2 & \text{jeśli } X \in \{4, 5\} \\ 3 & \text{jeśli } X = 6 \end{cases}$

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
y	1			2		3
$P(Y = y)$	1/2			1/3		1/6

$$
\begin{aligned}
EY &= 1 \cdot P(Y = 1) + 2 \cdot P(Y = 2) + 3 \cdot P(Y = 3) \\
&= 1 \cdot \big(P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)\big) \\
&\quad + 2 \cdot \big(P(X = 4) + P(X = 5)\big) + 3 \cdot P(X = 6)
\end{aligned}
$$

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

- X określa wynik rzutu kostką ($X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)
- $Y = f(X) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X \in \{1,2,3\} \\ 2 & \text{jeśli } X \in \{4,5\} \\ 3 & \text{jeśli } X = 6 \end{cases}$

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
y	1			2		3
$P(Y = y)$	$1/2$			$1/3$		$1/6$

$$
\begin{aligned}
EY &= 1 \cdot P(Y=1) + 2 \cdot P(Y=2) + 3 \cdot P(Y=3) \\
&= 1 \cdot \big(P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)\big) \\
&\qquad + 2 \cdot \big(P(X=4) + P(X=5)\big) + 3 \cdot P(X=6) \\
&= \sum_{k=1}^{6} f(k) P(X = k)
\end{aligned}
$$

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

- X określa wynik rzutu kostką ($X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)
- $Y = f(X) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } X \in \{1,2,3\} \\ 2 & \text{jeśli } X \in \{4,5\} \\ 3 & \text{jeśli } X = 6 \end{cases}$

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$
y	1			2		3
$P(Y = y)$	$1/2$			$1/3$		$1/6$

$$\begin{aligned} EY &= 1 \cdot P(Y=1) + 2 \cdot P(Y=2) + 3 \cdot P(Y=3) \\ &= 1 \cdot \big(P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)\big) \\ &\quad + 2 \cdot \big(P(X=4) + P(X=5)\big) + 3 \cdot P(X=6) \\ &= \sum_{k=1}^{6} f(k) P(X=k) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Przykład

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\dots$	x_n
$P(X=x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	$\dots$	p_n
$y=f(x)$	y_1		y_2	y_3			$\dots$	y_n
$P(Y=y)$	p_1+p_2		p_3	$p_4+p_5+p_6$			$\dots$	p_n

$$EY = \sum_y y \cdot P(Y=y) = \sum_x f(x) \cdot P(X=x)$$

Przykład

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\ldots$	x_n
$P(X=x)$	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	$\ldots$	p_n
$y=f(x)$	y_1		y_2	y_3			$\ldots$	y_n
$P(Y=y)$	p_1+p_2		p_3	$p_4+p_5+p_6$			$\ldots$	p_n

$$EY \;=\; \sum_y y\cdot P(Y=y) \;=\; \sum_x f(x)\cdot P(X=x)$$

Aby policzyć EY nie musimy wyznaczać rozkładu zmiennej Y, wystarczy rozkład zmiennej X

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

Twierdzenie

Niech $Y = f(X) \in \mathcal{Y}$ będzie funkcją dyskretnej zmiennej losowej $X \in \mathcal{X}$. Zachodzi:

$$E(Y) \;=\; \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \, P(Y = y) \;=\; \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x) \, P(X = x)$$

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

Twierdzenie

Niech $Y = f(X) \in \mathcal{Y}$ będzie funkcją dyskretnej zmiennej losowej $X \in \mathcal{X}$. Zachodzi:

$$E(Y) \;=\; \sum_{y \in \mathcal{Y}} y\, P(Y = y) \;=\; \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x)\, P(X = x)$$

Dowód: Ponieważ $P(Y = y) = \sum_{x\colon f(x)=y} P(X = x)$, to:

$$E(Y) \;=\; \sum_{y \in \mathcal{Y}} y\, P(Y = y) \;=\; \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \Big(\sum_{x\colon f(x)=y} P(X = x) \Big)$$

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

Twierdzenie

Niech $Y = f(X) \in \mathcal{Y}$ będzie funkcją dyskretnej zmiennej losowej $X \in \mathcal{X}$. Zachodzi:

$$E(Y) \;=\; \sum_{y \in \mathcal{Y}} y\, P(Y = y) \;=\; \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x)\, P(X = x)$$

Dowód: Ponieważ $P(Y = y) = \sum_{x\colon f(x)=y} P(X = x)$, to:

$$\begin{aligned} E(Y) \;&=\; \sum_{y \in \mathcal{Y}} y\, P(Y = y) \;=\; \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \Big(\sum_{x\colon f(x)=y} P(X = x) \Big) \\ &=\; \sum_{y \in \mathcal{Y}} \sum_{x\colon f(x)=y} f(x)\, P(X = x) \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana funkcji zmiennej losowej

Twierdzenie

Niech $Y = f(X) \in \mathcal{Y}$ będzie funkcją dyskretnej zmiennej losowej $X \in \mathcal{X}$.
Zachodzi:

$$E(Y) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} y\, P(Y = y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x)\, P(X = x)$$

Dowód: Ponieważ $P(Y = y) = \sum_{x\colon f(x)=y} P(X = x)$, to:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} y\, P(Y = y) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} y \Big(\sum_{x\colon f(x)=y} P(X = x) \Big) \\ &= \sum_{y \in \mathcal{Y}} \sum_{x\colon f(x)=y} f(x)\, P(X = x) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x)\, P(X = x) \end{aligned}$$

Liniowość wartości oczekiwanej

$$E(aX + b) \ = \ aE(X) + b$$

W szczególności:

- Wartość oczekiwana stałej b jest równa b: $E(b) = b$
- Tym samym np. $E\left(EX\right) = EX$
- Stałą przemnażającą X można wyjąć przed wartość oczekiwaną: $\mathrm{E(aX) = a\ EX}$

Liniowość wartości oczekiwanej

$$E(aX + b) \; = \; aE(X) + b$$

W szczególności:

- Wartość oczekiwana stałej b jest równa b: $E(b) = b$
- Tym samym np. $E(EX) = EX$
- Stałą przemnażającą X można wyjąć przed wartość oczekiwaną: $\mathrm{E(aX) = a\ EX}$

Dowód: Rozważmy $Y = f(X)$ gdzie $f(X) = aX + b$

Liniowość wartości oczekiwanej

$$E(aX + b) \; = \; aE(X) + b$$

W szczególności:

- Wartość oczekiwana stałej b jest równa b: $E(b) = b$
- Tym samym np. $E\big(EX\big) = EX$
- Stałą przemnażającą X można wyjąć przed wartość oczekiwaną: $\mathrm{E(aX) = a\ EX}$

Dowód: Rozważmy $Y = f(X)$ gdzie $f(X) = aX + b$

$$E(aX + b) \;\; = \;\; EY \;\; = \;\; \sum_x f(x)\, P(X = x)$$

Liniowość wartości oczekiwanej

$$E(aX + b) \;=\; aE(X) + b$$

W szczególności:

- Wartość oczekiwana stałej b jest równa b: $E(b) = b$
- Tym samym np. $E\big(EX\big) = EX$
- Stałą przemnażającą X można wyjąć przed wartość oczekiwaną: E(aX) = a EX

Dowód: Rozważmy $Y = f(X)$ gdzie $f(X) = aX + b$

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= EY = \sum_x f(x)\,P(X=x) \\ &= \sum_x (ax+b)\,P(X=x) \end{aligned}$$

Liniowość wartości oczekiwanej

$$E(aX+b) \;=\; aE(X)+b$$

W szczególności:

- Wartość oczekiwana stałej b jest równa b: $E(b)=b$
- Tym samym np. $E(EX)=EX$
- Stałą przemnażającą X można wyjąć przed wartość oczekiwaną: $\mathrm{E(aX) = a\ EX}$

Dowód: Rozważmy $Y=f(X)$ gdzie $f(X)=aX+b$

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= EY = \sum_x f(x)\,P(X=x) \\ &= \sum_x (ax+b)\,P(X=x) \\ &= a\underbrace{\left(\sum_x x\,P(X=x)\right)}_{=EX} + b\underbrace{\left(\sum_x P(X=x)\right)}_{=1} \end{aligned}$$

Liniowość wartości oczekiwanej

$$\boxed{E\Big(f_1(X) + \ldots + f_n(X)\Big) \;=\; E(f_1(X)) + \ldots + E(f_n(X))}$$

Liniowość wartości oczekiwanej

$$E\Big(f_1(X) + \ldots + f_n(X)\Big) \;=\; E(f_1(X)) + \ldots + E(f_n(X))$$

Dowód: Zdefiniujmy $f(X) = f_1(X) + \ldots + f_n(X)$.

Liniowość wartości oczekiwanej

$$\boxed{E\Big(f_1(X) + \ldots + f_n(X)\Big) \; = \; E(f_1(X)) + \ldots + E(f_n(X))}$$

Dowód: Zdefiniujmy $f(X) = f_1(X) + \ldots + f_n(X)$.

$$E\Big(f_1(X) \quad + \quad \ldots + f_n(X)\Big) \; = \; E(f(X)) \; = \; \sum_x f(x)\, P(X = x)$$

Liniowość wartości oczekiwanej

$$\boxed{E\Big(f_1(X) + \ldots + f_n(X)\Big) \;=\; E(f_1(X)) + \ldots + E(f_n(X))}$$

Dowód: Zdefiniujmy $f(X) = f_1(X) + \ldots + f_n(X)$.

$$\begin{aligned} E\Big(f_1(X) \quad + \quad \ldots + f_n(X)\Big) \;&=\; E(f(X)) \;=\; \sum_x f(x)\, P(X = x) \\ &=\; \sum_x \Big(f_1(x) + \ldots f_n(x)\Big)\, P(X = x) \end{aligned}$$

Liniowość wartości oczekiwanej

$$E\Big(f_1(X) + \ldots + f_n(X)\Big) \;=\; E(f_1(X)) + \ldots + E(f_n(X))$$

Dowód: Zdefiniujmy $f(X) = f_1(X) + \ldots + f_n(X)$.

$$\begin{aligned} E\Big(f_1(X) \;&+\; \ldots + f_n(X)\Big) \;=\; E(f(X)) \;=\; \sum_x f(x)\, P(X = x) \\ &= \sum_x \Big(f_1(x) + \ldots f_n(x)\Big)\, P(X = x) \\ &= \sum_x f_1(x)\, P(X = x) \;+\; \ldots \;+\; \sum_x f_n(x)\, P(X = x) \end{aligned}$$

Liniowość wartości oczekiwanej

$$E\Big(f_1(X) + \ldots + f_n(X)\Big) \; = \; E(f_1(X)) + \ldots + E(f_n(X))$$

Dowód: Zdefiniujmy $f(X) = f_1(X) + \ldots + f_n(X)$.

$$\begin{aligned} E\Big(f_1(X) \;\; + \;\; & \ldots + f_n(X)\Big) \; = \; E(f(X)) \; = \; \sum_x f(x)\, P(X = x) \\ = \;\; & \sum_x \Big(f_1(x) + \ldots f_n(x)\Big)\, P(X = x) \\ = \;\; & \sum_x f_1(x)\, P(X = x) \; + \; \ldots \; + \; \sum_x f_n(x)\, P(X = x) \\ = \;\; & E(f_1(X)) + \ldots + E(f_n(X)) \end{aligned}$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X = k) \ = \ (1-p)^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y = k) \ = \ (1-p)^{k}p, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Zauważmy, że $X = Y + 1$.

Wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X = k) \;=\; (1-p)^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y = k) \;=\; (1-p)^{k}p, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Zauważmy, że $X = Y + 1$.

Z jednej strony:

$$EX \;=\; E(Y+1) \;=\; EY + 1$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y = k) = (1 - p)^{k} p, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Zauważmy, że $X = Y + 1$.

Z jednej strony:

$$EX = E(Y + 1) = EY + 1$$

Z drugiej strony:

$$EY = \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^k p = (1 - p) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^{k-1} p}_{=EX}$$

Wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X = k) \; = \; (1-p)^{k-1}p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y = k) \; = \; (1-p)^{k}p, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Zauważmy, że $X = Y + 1$.

Z jednej strony:

$$EX \; = \; E(Y+1) \; = \; EY + 1$$

Z drugiej strony:

$$EY \; = \; \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^k p \; = \; (1-p) \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p}_{=EX}$$

Czyli:

$$EX \; = \; EY + 1 = (1-p)EX + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad EX = \frac{1}{p}$$

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła. Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.

- Jeśli orzeł wypadnie w 1. rzucie – wygrywamy 2 zł
- Jeśli orzeł wypadnie w 2. rzucie – wygrywamy 4 zł
- Jeśli orzeł wypadnie w 3. rzucie – wygrywamy 8 zł
- itd.

Ile warto zapłacić „wpisowego”, aby przystąpić do takiej gry?

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła.
Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.
Ile warto zapłacić „wpisowego”, aby przystąpić do takiej gry?

X – liczba rzutów do pierwszego orła,

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła.
Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.
Ile warto zapłacić „wpisowego”, aby przystąpić do takiej gry?

X – liczba rzutów do pierwszego orła, X ma rozkład $G_1(\frac{1}{2})$:

$$P(X = k) \;=\; (1-p)^{k-1}p \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła.
Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.
Ile warto zapłacić „wpisowego”, aby przystąpić do takiej gry?

X – liczba rzutów do pierwszego orła, X ma rozkład $G_1(\frac{1}{2})$:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$Y = f(X) = 2^X$ – wygrana

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła.
Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.
Ile warto zapłacić „wpisowego”, aby przystąpić do takiej gry?

X – liczba rzutów do pierwszego orła, X ma rozkład $G_1(\frac{1}{2})$:

$$P(X = k) \; = \; (1-p)^{k-1} p \; = \; \left(\frac{1}{2}\right)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$Y \; = \; f(X) \; = \; 2^X$ – wygrana

Warto zapłacić a zł wpisowego jeśli $EY - a > 0$

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła.
Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.
Ile warto zapłacić „wpisowego”, aby przystąpić do takiej gry?

X – liczba rzutów do pierwszego orła, X ma rozkład $G_1(\frac{1}{2})$:

$$P(X=k) \;=\; (1-p)^{k-1}p \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^k, \qquad k=1,2,\dots$$

$Y \;=\; f(X) \;=\; 2^X$ – wygrana

Warto zapłacić a zł wpisowego jeśli $EY - a > 0$

$$EY \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} f(k)P(X=k)$$

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła.
Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.
Ile warto zapłacić „wpisowego", aby przystąpić do takiej gry?

X – liczba rzutów do pierwszego orła, X ma rozkład $G_1(\frac{1}{2})$:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$Y = f(X) = 2^X$ – wygrana

Warto zapłacić a zł wpisowego jeśli $EY - a > 0$

$$EY = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k =$$

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła.
Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.
Ile warto zapłacić „wpisowego", aby przystąpić do takiej gry?

X – liczba rzutów do pierwszego orła, X ma rozkład $G_1(\frac{1}{2})$:

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

$Y = f(X) = 2^X$ – wygrana

Warto zapłacić a zł wpisowego jeśli $EY - a > 0$

$$EY = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$$

Paradoks petersburski

Rozważmy grę w której rzucamy uczciwą monetą aż do wyrzucenia orła.
Wygrana w grze to 2^k zł, gdzie k – liczba rzutów.
Ile warto zapłacić „wpisowego”, aby przystąpić do takiej gry?

X – liczba rzutów do pierwszego orła, X ma rozkład $G_1(\frac{1}{2})$:

$$P(X=k) \;=\; (1-p)^{k-1}p \;=\; \left(\frac{1}{2}\right)^k, \qquad k=1,2,\ldots$$

$Y \;=\; f(X) \;=\; 2^X$ – wygrana

Warto zapłacić a zł wpisowego jeśli $EY - a > 0$

$$EY \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} f(k)P(X=k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \;=\; 1+1+1+\ldots \;=\; \infty$$

Warto zapłacić każdą kwotę „wpisowego”???
A za ile byście przystąpili do takiej gry?

Dygresja: teoria użyteczności

Zachowanie ludzi w tego typu grach wyjaśnia teorii użyteczności

- Ludzie nie kierują się oczekiwaną wartością wygranej, ale oczekiwaną użytecznością wygranej
- Użyteczność ta rośnie znacznie wolniej niż sama wygrana („prawo malejącej użyteczności krańcowej")

Dygresja: teoria użyteczności

Zachowanie ludzi w tego typu grach wyjaśnia teorii użyteczności

- Ludzie nie kierują się oczekiwaną wartością wygranej, ale oczekiwaną użytecznością wygranej
- Użyteczność ta rośnie znacznie wolniej niż sama wygrana („prawo malejącej użyteczności krańcowej")

Przykład: weźmy grę, w której z prawdopodobieństwem 20% wygrywamy 10-krotność zakładu, a z prawdopodobieństwem 80% przegrywamy zakład.

Jeśli obstawimy a zł, to średnia wygrana wynosi:

$$0.2 \cdot 10a - 0.8 \cdot a \; = \; 1.2a$$

Dygresja: teoria użyteczności

Zachowanie ludzi w tego typu grach wyjaśnia teorii użyteczności

- Ludzie nie kierują się oczekiwaną wartością wygranej, ale oczekiwaną użytecznością wygranej
- Użyteczność ta rośnie znacznie wolniej niż sama wygrana („prawo malejącej użyteczności krańcowej")

Przykład: weźmy grę, w której z prawdopodobieństwem 20% wygrywamy 10-krotność zakładu, a z prawdopodobieństwem 80% przegrywamy zakład.

Jeśli obstawimy a zł, to średnia wygrana wynosi:

$$0.2 \cdot 10a - 0.8 \cdot a \;=\; 1.2a$$

- Czy obstawilibyście w tej grze $a = 10$ zł?

Dygresja: teoria użyteczności

Zachowanie ludzi w tego typu grach wyjaśnia teorii użyteczności

- Ludzie nie kierują się oczekiwaną wartością wygranej, ale oczekiwaną użytecznością wygranej
- Użyteczność ta rośnie znacznie wolniej niż sama wygrana („prawo malejącej użyteczności krańcowej")

Przykład: weźmy grę, w której z prawdopodobieństwem 20% wygrywamy 10-krotność zakładu, a z prawdopodobieństwem 80% przegrywamy zakład.

Jeśli obstawimy a zł, to średnia wygrana wynosi:

$$0.2 \cdot 10a - 0.8 \cdot a \; = \; 1.2a$$

- Czy obstawilibyście w tej grze $a = 10$ zł?
- Czy obstawilibyście w tej grze całe oszczędności życia, powiedzmy $a = 100$ tys. zł?

Dygresja: przykład funkcji użyteczności

Często rozważa się użyteczność logarytmiczną jako funkcję kapitału y:

$$U(y) = C \log_2(y), \qquad \text{gdzie } C \text{ jest tylko jednostką } (C{=}1)$$

(„dwukrotne zwiększenie kapitału zwiększa użyteczność o jednostkę”)

Dygresja: przykład funkcji użyteczności

Często rozważa się użyteczność logarytmiczną jako funkcję kapitału y:

$$U(y) = C \log_2(y), \qquad \text{gdzie } C \text{ jest tylko jednostką } (C{=}1)$$

(„dwukrotne zwiększenie kapitału zwiększa użyteczność o jednostkę")

W poprzednim przykładzie, mając początkowy kapitał y_0 zł i obstawiając a zł, oczekiwana użyteczność wynosi:

$$EU \;=\; 0.2{\cdot}U(y_0{+}10a){+}0.8{\cdot}U(y_0{-}a) \;=\; 0.2\log_2(y_0{+}10a){+}0.8\log_2(y_0{-}a),$$

Dygresja: przykład funkcji użyteczności

Często rozważa się użyteczność logarytmiczną jako funkcję kapitału y:

$$U(y) = C \log_2(y), \qquad \text{gdzie } C \text{ jest tylko jednostką } (C{=}1)$$

(„dwukrotne zwiększenie kapitału zwiększa użyteczność o jednostkę")

W poprzednim przykładzie, mając początkowy kapitał y_0 zł i obstawiając a zł, oczekiwana użyteczność wynosi:

$$EU \;=\; 0.2{\cdot}U(y_0{+}10a){+}0.8{\cdot}U(y_0{-}a) \;=\; 0.2\log_2(y_0{+}10a){+}0.8\log_2(y_0{-}a),$$

stąd oczekiwany przyrost użyteczności wynosi:

$$\Delta U \;=\; EU - U(y_0) \;=\; 0.2\log_2(y_0 + 10a) + 0.8\log_2(y_0 - a) - \log_2(y_0)$$

Dygresja: przykład funkcji użyteczności

Często rozważa się użyteczność logarytmiczną jako funkcję kapitału y:

$$U(y) = C \log_2(y), \qquad \text{gdzie } C \text{ jest tylko jednostką } (C{=}1)$$

(„dwukrotne zwiększenie kapitału zwiększa użyteczność o jednostkę")

W poprzednim przykładzie, mając początkowy kapitał y_0 zł i obstawiając a zł, oczekiwana użyteczność wynosi:

$$EU \ = \ 0.2 \cdot U(y_0 + 10a) + 0.8 \cdot U(y_0 - a) \ = \ 0.2 \log_2(y_0 + 10a) + 0.8 \log_2(y_0 - a),$$

stąd oczekiwany przyrost użyteczności wynosi:

$$\Delta U \ = \ EU - U(y_0) \ = \ 0.2 \log_2(y_0 + 10a) + 0.8 \log_2(y_0 - a) - \log_2(y_0)$$

- Jeśli $y_0 = 1000$ zł i $a = 10$ zł, to $\Delta U \simeq 0.02$
- Jeśli $y_0 = 105\ 000$ zł i $a = 100\ 000$ zł, to $\Delta U \simeq -2.83$

Dygresja: paradoks petersburski

$$U(y) = \log_2(y)$$

Mając początkowy kapitał y_0 zł i płacąc wpisowe a zł, oczekiwany przyrost użyteczności wynosi:

$$\begin{aligned} EU - U(y_0) &= \sum_{k=1}^{\infty} U(y_0 - a + 2^k) P(X = k) - U(y_0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \log_2(y_0 - a + 2^k) \left(\frac{1}{2}\right)^k - \log_2(y_0) \end{aligned}$$

Dygresja: paradoks petersburski

$$U(y) = \log_2(y)$$

Mając początkowy kapitał y_0 zł i płacąc wpisowe a zł, oczekiwany przyrost użyteczności wynosi:

$$\begin{aligned} EU - U(y_0) &= \sum_{k=1}^{\infty} U(y_0 - a + 2^k) P(X = k) - U(y_0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \log_2(y_0 - a + 2^k) \left(\frac{1}{2}\right)^k - \log_2(y_0) \end{aligned}$$

Kiedy przyrost użyteczności jest dodatni?

Dygresja: paradoks petersburski

$$U(y) = \log_2(y)$$

Mając początkowy kapitał y_0 zł i płacąc wpisowe a zł, oczekiwany przyrost użyteczności wynosi:

$$\begin{aligned} EU - U(y_0) &= \sum_{k=1}^{\infty} U(y_0 - a + 2^k) P(X = k) - U(y_0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \log_2(y_0 - a + 2^k) \left(\frac{1}{2}\right)^k \; - \; \log_2(y_0) \end{aligned}$$

Kiedy przyrost użyteczności jest dodatni?

- Mając $y_0 = 1\ 000\ 000$ zł kapitału, przyrost użyteczności staje się dodatni dla $a < 20.88$ zł

Dygresja: paradoks petersburski

$$U(y) = \log_2(y)$$

Mając początkowy kapitał y_0 zł i płacąc wpisowe a zł, oczekiwany przyrost użyteczności wynosi:

$$\begin{aligned} EU - U(y_0) &= \sum_{k=1}^{\infty} U(y_0 - a + 2^k) P(X = k) - U(y_0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \log_2(y_0 - a + 2^k) \left(\frac{1}{2}\right)^k \; - \; \log_2(y_0) \end{aligned}$$

Kiedy przyrost użyteczności jest dodatni?

- Mając $y_0 = 1\ 000\ 000$ zł kapitału, przyrost użyteczności staje się dodatni dla $a < 20.88$ zł
- Mając $y_0 = 1\ 000$ zł kapitału, przyrost użyteczności staje się dodatni dla $a < 10.96$ zł

Dygresja: paradoks petersburski

$$U(y) = \log_2(y)$$

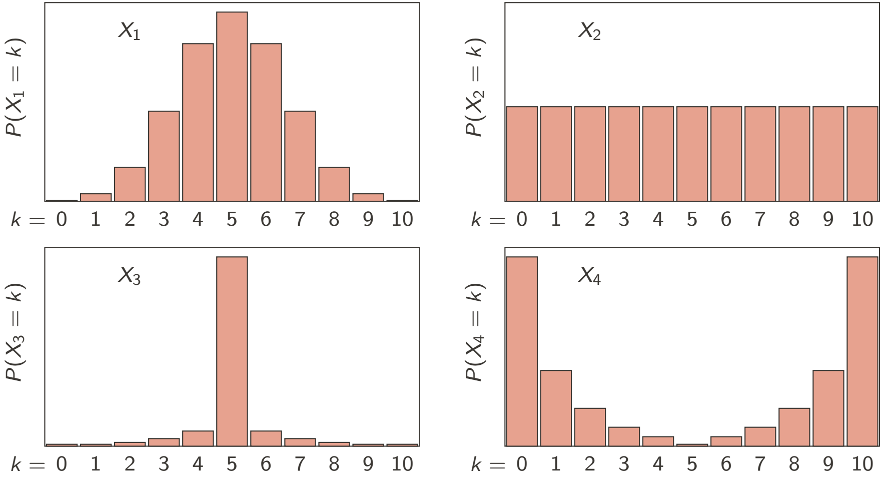
Mając początkowy kapitał y_0 zł i płacąc wpisowe a zł, oczekiwany przyrost użyteczności wynosi:

$$\begin{aligned} EU - U(y_0) &= \sum_{k=1}^{\infty} U(y_0 - a + 2^k) P(X = k) - U(y_0) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \log_2(y_0 - a + 2^k) \left(\frac{1}{2}\right)^k - \log_2(y_0) \end{aligned}$$

Kiedy przyrost użyteczności jest dodatni?

- Mając $y_0 = 1\ 000\ 000$ zł kapitału, przyrost użyteczności staje się dodatni dla $a < 20.88$ zł
- Mając $y_0 = 1\ 000$ zł kapitału, przyrost użyteczności staje się dodatni dla $a < 10.96$ zł
- Mając $y = 1$ zł kapitału, przyrost użyteczności staje się dodatni dla $a < 2.82$ zł

Wariancja: motywacja



Wszystkie zmienne losowe mają tę samą wartość oczekiwaną równą 5

Jak mocno rozkład jest skoncentrowany wokół tej wartości?

Wariancja zmiennej losowej

Definicja

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę określającą średni kwadrat odchylenia od wartości średniej:

$$D^2(X) = E\Big(\big(X - EX\big)^2\Big) = \sum_x \big(x - EX\big)^2 P(X = x),$$

Wariancja zmiennej losowej

Definicja

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę określającą średni kwadrat odchylenia od wartości średniej:

$$D^2(X) = E\Big(\big(X - EX\big)^2\Big) = \sum_x \big(x - EX\big)^2 P(X = x),$$

- Wariancja określa koncentrację rozkładu wokół swojej wartości oczekiwanej (średniej)
- Kwadrat w definicji wariancji używany jest do tego, żeby poszczególne odchyłki się nie znosiły

Wariancja zmiennej losowej

Definicja

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę określającą średni kwadrat odchylenia od wartości średniej:

$$D^2(X) = E\Big(\big(X - EX\big)^2\Big) = \sum_x \big(x - EX\big)^2 P(X = x),$$

- Wariancja określa koncentrację rozkładu wokół swojej wartości oczekiwanej (średniej)
- Kwadrat w definicji wariancji używany jest do tego, żeby poszczególne odchyłki się nie znosiły

$$E\Big(X - EX\Big) = EX - EX = 0$$

Wykorzystujemy wzór $E(aX + b) = aE(X) + b$
dla $a = 1$ i $b = -EX$

Wariancja: przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ określającej wynik rzutu kostką.

Wariancja: przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ określającej wynik rzutu kostką.

$$EX = 3.5$$

Wariancja: przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ określającej wynik rzutu kostką.

$$EX = 3.5$$

$$D^2(X) \quad = \quad E\Big((X - EX)^2\Big)$$

Wariancja: przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ określającej wynik rzutu kostką.

$$EX = 3.5$$

$$\begin{aligned} D^2(X) &= E\Big((X - EX)^2\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{6} (k - EX)^2 P(X = k) \end{aligned}$$

Wariancja: przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \in \{1,2,3,4,5,6\}$ określającej wynik rzutu kostką.

$$EX = 3.5$$

$$\begin{aligned} D^2(X) &= E\Big((X - EX)^2\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{6} (k - EX)^2 P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{6} (k - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Wariancja: przykład

Wyznacz wariancję zmiennej $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ określającej wynik rzutu kostką.

$$EX = 3.5$$

$$\begin{aligned}
D^2(X) &= E\Big((X - EX)^2\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{6} (k - EX)^2 P(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{6} (k - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{6}\Big((1 - 3.5)^2 + (2 - 3.5)^2 + \ldots + (6 - 3.5)^2\Big) = \frac{35}{12}
\end{aligned}$$

Wariancja rozkładu dwupunktowego

$$X \in \{0,1\}, \qquad p = P(X=1), \qquad P(X=0) = 1-p$$

$$EX = p$$

Wariancja rozkładu dwupunktowego

$$X \in \{0,1\}, \qquad p = P(X=1), \qquad P(X=0) = 1-p$$

$$EX \; = \; p$$

$$D^2(X) \; = \; (0-EX)^2 P(X=0) + (1-EX)^2 P(X=1)$$

Wariancja rozkładu dwupunktowego

$$X \in \{0,1\}, \qquad p = P(X=1), \qquad P(X=0) = 1-p$$

$$EX \;=\; p$$

$$\begin{aligned} D^2(X) &= (0-EX)^2 P(X=0) + (1-EX)^2 P(X=1) \\ &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p \end{aligned}$$

Wariancja rozkładu dwupunktowego

$$X \in \{0,1\}, \qquad p = P(X=1), \qquad P(X=0) = 1-p$$

$$EX \;=\; p$$

$$\begin{aligned} D^2(X) &= (0-EX)^2 P(X=0) + (1-EX)^2 P(X=1) \\ &= p^2(1-p) + (1-p)^2 p \\ &= p(1-p)\big(\underbrace{p+(1-p)}_{=1}\big) \;=\; p(1-p) \end{aligned}$$

Wzór skróconego mnożenia dla wariancji

Twierdzenie

$$D^2(X) \; = \; E\left(X^2\right) - \left(EX\right)^2$$

Wzór skróconego mnożenia dla wariancji

Twierdzenie

$$D^2(X) \;=\; E\left(X^2\right) - \left(EX\right)^2$$

Dowód:

$$D^2(X) \quad = \quad E\Big((X - EX)^2\Big)$$

Wzór skróconego mnożenia dla wariancji

Twierdzenie

$$D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2$$

Dowód:

$$\begin{aligned} D^2(X) &= E\Big((X - EX)^2\Big) \\ &= E\Big(X^2 - 2(EX)X + (EX)^2\Big) \end{aligned}$$

Wzór skróconego mnożenia dla wariancji

Twierdzenie

$$D^2(X) \;=\; E(X^2) - (EX)^2$$

Dowód:

$$\begin{aligned}
D^2(X) &= E\Big((X - EX)^2\Big) \\
&= E\Big(X^2 - 2(EX)X + (EX)^2\Big) \\
&= E\Big(X^2\Big) - E\Big(\underbrace{2(EX)}_{\text{stała}}X\Big) + E\Big(\underbrace{(EX)^2}_{\text{stała}}\Big)
\end{aligned}$$

Wzór skróconego mnożenia dla wariancji

Twierdzenie

$$D^2(X) \;=\; E(X^2) - (EX)^2$$

Dowód:

$$\begin{aligned}
D^2(X) &= E\Big((X - EX)^2\Big) \\
&= E\Big(X^2 - 2(EX)X + (EX)^2\Big) \\
&= E\Big(X^2\Big) - E\Big(\underbrace{2(EX)}_{\text{stała}}X\Big) + E\Big(\underbrace{(EX)^2}_{\text{stała}}\Big) \\
&= E(X^2) - 2(EX)(EX) + (EX)^2
\end{aligned}$$

Wzór skróconego mnożenia dla wariancji

Twierdzenie

$$D^2(X) = E(X^2) - (EX)^2$$

Dowód:

$$\begin{aligned}
D^2(X) &= E\Big((X - EX)^2\Big) \\
&= E\Big(X^2 - 2(EX)X + (EX)^2\Big) \\
&= E\Big(X^2\Big) - E\Big(\underbrace{2(EX)}_{\text{stała}}X\Big) + E\Big(\underbrace{(EX)^2}_{\text{stała}}\Big) \\
&= E(X^2) - 2(EX)(EX) + (EX)^2 \\
&= E(X^2) - (EX)^2
\end{aligned}$$

Wariancja rozkładu Poissona

$$P(X = k) \; = \; \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad X \in \{0, 1, \ldots\}, \qquad EX = \lambda$$

Wariancja rozkładu Poissona

$$P(X = k) \;=\; \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad X \in \{0, 1, \ldots\}, \qquad EX = \lambda$$

Ponieważ:

$$D^2(X) \;=\; E\big(X^2\big) - \big(EX\big)^2 \;=\; E\big(X^2\big) - \lambda^2$$

Musimy więc tylko policzyć $E\big(X^2\big)$

Wariancja rozkładu Poissona

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X = k)$$

Wariancja rozkładu Poissona

$$E(X^2) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Wariancja rozkładu Poissona

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(k(k-1)+k\right)}_{=k^2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

Wariancja rozkładu Poissona

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(k(k-1) + k\right)}_{=k^2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}_{=EX}
\end{aligned}
$$

Wariancja rozkładu Poissona

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(k(k-1)+k)}_{=k^2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}_{=EX} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda
\end{aligned}
$$

Wariancja rozkładu Poissona

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(k(k-1)+k)}_{=k^2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}_{=EX} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda
\end{aligned}
$$

Wariancja rozkładu Poissona

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(k(k-1)+k)}_{=k^2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}_{=EX} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}_{=1} + \lambda
\end{aligned}
$$

Wariancja rozkładu Poissona

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(k(k-1)+k\right)}_{=k^2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}_{=EX} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}_{=1} + \lambda = \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}
$$

Wariancja rozkładu Poissona

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(k(k-1)+k)}_{=k^2} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}_{=EX} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} e^{-\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}_{=1} + \lambda = \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}
$$

Stąd $D^2(X) = E(X^2) - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

Wariancja rozkładu geometrycznego i dwumianowego

Zadanie 3

Pokaż, że dla rozkładu geometrycznego:

$$P(X = k) \; = \; (1 - p)^{k-1} p, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

wariancja wynosi $D^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$
(krótszy sposób pokazany na następnym slajdzie)

Zadanie 4

Pokaż, że dla rozkładu dwumianowego:

$$P(X = k) \; = \; \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

wariancja wynosi $D^2(X) = np(1 - p)$

Wariancja w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X = k) \;=\; (1-p)^{k-1}p, \qquad EX = \frac{1}{p}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y = k) \;=\; (1-p)^{k}p, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ponieważ $X = Y + 1$, czyli $EY = EX - 1 = \frac{1}{p} - 1$

Wariancja w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X = k) \;=\; (1-p)^{k-1}p, \qquad EX = \frac{1}{p}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y = k) \;=\; (1-p)^{k}p, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ponieważ $X = Y + 1$, czyli $EY = EX - 1 = \frac{1}{p} - 1$

Z jednej strony:

$$E(X^2) \;=\; E((Y+1)^2) \;=\; E(Y^2) + 2E(Y) + 1 \;=\; E(Y^2) + \frac{2}{p} - 1$$

Wariancja w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X=k) \;=\; (1-p)^{k-1}p, \qquad EX = \frac{1}{p}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y=k) \;=\; (1-p)^{k}p, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Ponieważ $X = Y + 1$, czyli $EY = EX - 1 = \frac{1}{p} - 1$

Z jednej strony:

$$E(X^2) \;=\; E((Y+1)^2) \;=\; E(Y^2) + 2E(Y) + 1 \;=\; E(Y^2) + \frac{2}{p} - 1$$

Z drugiej strony:

$$E\left(Y^2\right) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^k p \;=\; (1-p)\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k^2(1-p)^{k-1}p}_{=E\left(X^2\right)}$$

Wariancja w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X=k) \;=\; (1-p)^{k-1}p, \qquad EX = \frac{1}{p}, \qquad k=1,2,\ldots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y=k) \;=\; (1-p)^{k}p, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

Ponieważ $X = Y+1$, czyli $EY = EX-1 = \frac{1}{p}-1$

Czyli:

$$E(X^2) \;=\; E(Y^2)+\frac{2}{p}-1 \qquad \text{oraz} \quad E\left(Y^2\right) \;=\; (1-p)E(X^2)$$

Wariancja w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:
$$P(X=k) \;=\; (1-p)^{k-1}p, \qquad EX=\frac{1}{p}, \qquad k=1,2,\ldots$$
- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:
$$P(Y=k) \;=\; (1-p)^{k}p, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

Ponieważ $X=Y+1$, czyli $EY=EX-1=\frac{1}{p}-1$

Czyli:
$$E(X^2) \;=\; E(Y^2)+\frac{2}{p}-1 \qquad \text{oraz} \quad E\left(Y^2\right) \;=\; (1-p)E(X^2)$$

Stąd:
$$E(X^2) \;=\; (1-p)E(X^2)+\frac{2}{p}-1 \qquad \Longrightarrow \qquad E(X^2) \;=\; \frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}$$

Wariancja w rozkładzie geometrycznym

- $G_1(p)$: liczba prób do sukcesu:

$$P(X=k) \;=\; (1-p)^{k-1}p, \qquad EX=\frac{1}{p}, \qquad k=1,2,\ldots$$

- $G_0(p)$: Liczba porażek do sukcesu:

$$P(Y=k) \;=\; (1-p)^{k}p, \qquad k=0,1,2,\ldots$$

Ponieważ $X=Y+1$, czyli $EY=EX-1=\frac{1}{p}-1$

Czyli:

$$E(X^2) \;=\; E(Y^2)+\frac{2}{p}-1 \qquad \text{oraz} \quad E\left(Y^2\right) \;=\; (1-p)E(X^2)$$

Stąd:

$$E(X^2) \;=\; (1-p)E(X^2)+\frac{2}{p}-1 \qquad \Longrightarrow \qquad E(X^2) \;=\; \frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}$$

$$D^2(X) \;=\; E(X^2)-(EX)^2 \;=\; \frac{2}{p^2}-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2} \;=\; \frac{1}{p^2}-\frac{1}{p} \;=\; \frac{1-p}{p^2}$$

Własności wariancji

1. $D^2(X) \geqslant 0$
2. $D^2(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $P(X = x) = 1$ dla pewnego $x \in \mathbb{R}$

Własności wariancji

1. $D^2(X) \geqslant 0$
2. $D^2(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $P(X = x) = 1$ dla pewnego $x \in \mathbb{R}$

Dowód:

$$D^2(X) \;=\; \sum_x (x - EX)^2 P(X = x)$$

Własności wariancji

1. $D^2(X) \geqslant 0$
2. $D^2(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $P(X = x) = 1$ dla pewnego $x \in \mathbb{R}$

Dowód:

$$D^2(X) = \sum_x (x - EX)^2 P(X = x)$$

Własność 1: oczywista, bo wszystkie wyrazy sumy są nieujemne

Własności wariancji

1. $D^2(X) \geqslant 0$
2. $D^2(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $P(X = x) = 1$ dla pewnego $x \in \mathbb{R}$

Dowód:

$$D^2(X) \;=\; \sum_x (x - EX)^2 P(X = x)$$

Własność 1: oczywista, bo wszystkie wyrazy sumy są nieujemne

Własność 2: jeśli $D^2(X) = 0$, to wszystkie wyrazy sumy muszą być $= 0$

Własności wariancji

1. $D^2(X) \geqslant 0$
2. $D^2(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $P(X = x) = 1$ dla pewnego $x \in \mathbb{R}$

Dowód:

$$D^2(X) \;=\; \sum_x (x - EX)^2 P(X = x)$$

Własność 1: oczywista, bo wszystkie wyrazy sumy są nieujemne

Własność 2: jeśli $D^2(X) = 0$, to wszystkie wyrazy sumy muszą być $= 0$

A więc jeśli $P(X = x) > 0$, to $x = EX$ dla wszystkich takich x!

Własności wariancji

1. $D^2(X) \geqslant 0$
2. $D^2(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $P(X = x) = 1$ dla pewnego $x \in \mathbb{R}$

Dowód:

$$D^2(X) \;=\; \sum_x (x - EX)^2 P(X = x)$$

Własność 1: oczywista, bo wszystkie wyrazy sumy są nieujemne

Własność 2: jeśli $D^2(X) = 0$, to wszystkie wyrazy sumy muszą być $= 0$

A więc jeśli $P(X = x) > 0$, to $x = EX$ dla wszystkich takich x!

Czyli jest tylko jeden taki x równy EX dla którego $P(X = x) > 0$

Własności wariancji

1. $D^2(X) \geqslant 0$
2. $D^2(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $P(X = x) = 1$ dla pewnego $x \in \mathbb{R}$

Dowód:

$$D^2(X) = \sum_x (x - EX)^2 P(X = x)$$

Własność 1: oczywista, bo wszystkie wyrazy sumy są nieujemne

Własność 2: jeśli $D^2(X) = 0$, to wszystkie wyrazy sumy muszą być $= 0$

A więc jeśli $P(X = x) > 0$, to $x = EX$ dla wszystkich takich x!

Czyli jest tylko jeden taki x równy EX dla którego $P(X = x) > 0$

Z normalizacji sumarycznego prawdopodobieństwa $P(X = x) = 1$

Własności wariancji

$$D^2(aX + b) \; = \; a^2 D^2(X)$$

Wariancja nie zmienia się przy translacji o stałą i przemnaża się przez a^2 przy przemnożeniu zmiennej przez a.

Własności wariancji

$$D^2(aX + b) \;=\; a^2 D^2(X)$$

Wariancja nie zmienia się przy translacji o stałą i przemnaża się przez a^2 przy przemnożeniu zmiennej przez a.

Dowód: Zdefiniujmy zmienną $Y = aX + b$. Musimy pokazać, że

$$D^2(Y) = a^2 D^2(X)$$

Własności wariancji

$$D^2(aX + b) \;=\; a^2 D^2(X)$$

Wariancja nie zmienia się przy translacji o stałą i przemnaża się przez a^2 przy przemnożeniu zmiennej przez a.

Dowód: Zdefiniujmy zmienną $Y = aX + b$. Musimy pokazać, że

$$D^2(Y) = a^2 D^2(X)$$

$$Y - EY \;=\; aX + b - \underbrace{E(aX + b)}_{=aEX+b} \;=\; aX - aEX \;=\; a(X - EX)$$

Własności wariancji

$$D^2(aX + b) \; = \; a^2 D^2(X)$$

Wariancja nie zmienia się przy translacji o stałą i przemnaża się przez a^2 przy przemnożeniu zmiennej przez a.

Dowód: Zdefiniujmy zmienną $Y = aX + b$. Musimy pokazać, że

$$D^2(Y) = a^2 D^2(X)$$

$$\begin{aligned} Y - EY &= aX + b - \underbrace{E(aX + b)}_{=aEX+b} = aX - aEX = a(X - EX) \\ (Y - EY)^2 &= a^2(X - EX)^2 \end{aligned}$$

Własności wariancji

$$D^2(aX + b) \; = \; a^2 D^2(X)$$

Wariancja nie zmienia się przy translacji o stałą i przemnaża się przez a^2 przy przemnożeniu zmiennej przez a.

Dowód: Zdefiniujmy zmienną $Y = aX + b$. Musimy pokazać, że

$$D^2(Y) = a^2 D^2(X)$$

$$\begin{aligned} Y - EY &= aX + b - \underbrace{E(aX + b)}_{=aEX+b} = aX - aEX = a(X - EX) \\ (Y - EY)^2 &= a^2(X - EX)^2 \\ E((Y - EY)^2) &= E(a^2(X - EX)^2) = a^2 E((X - EX)^2) \end{aligned}$$

Własności wariancji

$$D^2(aX+b) \; = \; a^2 D^2(X)$$

Wariancja nie zmienia się przy translacji o stałą i przemnaża się przez a^2 przy przemnożeniu zmiennej przez a.

Dowód: Zdefiniujmy zmienną $Y = aX + b$. Musimy pokazać, że

$$D^2(Y) = a^2 D^2(X)$$

$$\begin{aligned}
Y - EY &= aX + b - \underbrace{E(aX+b)}_{=aEX+b} = aX - aEX = a(X - EX) \\
(Y - EY)^2 &= a^2 (X - EX)^2 \\
\underbrace{E\left((Y - EY)^2\right)}_{D^2(Y)} &= E\left(a^2 (X - EX)^2\right) = a^2 \underbrace{E\left((X - EX)^2\right)}_{=D^2(X)}
\end{aligned}$$

Odchylenie standardowe

Wariancja ma inną „skalę” niż zmienna losowa

- Jeśli wartości X byłyby wyrażone np. w zł, to jaka jest jednostka wariancji?

Odchylenie standardowe

Wariancja ma inną „skalę” niż zmienna losowa

- Jeśli wartości X byłyby wyrażone np. w zł, to jaka jest jednostka wariancji?

Odchylenie standardowe

$$D(X) = \sqrt{D^2(X)}$$

Odchylenie standardowe

Wariancja ma inną „skalę" niż zmienna losowa

- Jeśli wartości X byłyby wyrażone np. w zł, to jaka jest jednostka wariancji?

Odchylenie standardowe

$$D(X) = \sqrt{D^2(X)}$$

O ile wariancją łatwiej operuje się w wyprowadzeniach wzorów, to odchylenie standardowe jest miarą rozkładu podawaną w statystykach

Odchylenie często (szczególnie w statystyce) oznacza się za pomocą symbolu σ, stąd wariancja oznaczana jest przez σ^2

Momenty zmiennej losowej

Definicja

Liczbę:

$$m_k \ = \ E(X^k)$$

nazywamy momentem rzędu k zmiennej losowej X

Momenty zmiennej losowej

Definicja

Liczbę:

$$m_k \;=\; E(X^k)$$

nazywamy momentem rzędu k zmiennej losowej X

- $m_1 \;=\; EX$
- $m_2 \;=\; E(X^2)$
- $m_3 \;=\; E(X^3)$
- $\ldots$

Momenty centralne zmiennej losowej

Definicja

Liczbę:

$$\mu_k \ = \ E\big((X - EX)^k\big)$$

nazywamy momentem centralnym rzędu k zmiennej losowej X

Momenty centralne zmiennej losowej

Definicja

Liczbę:

$$\mu_k \;=\; E\big((X - EX)^k\big)$$

nazywamy momentem centralnym rzędu k zmiennej losowej X

- $\mu_1 \;=\; E(X - EX) \;=\; EX - EX \;=\; 0$
- $\mu_2 \;=\; E\big((X - EX)^2\big) = D^2(X)$
- $\mu_3 \;=\; E\big((X - EX)^3\big)$
- ...

Nierówność Markowa

Niech X będzie nieujemną zmienną losową. Dla dowolnego $a > 0$:

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{EX}{a}$$

Nierówność Markowa

Niech X będzie nieujemną zmienną losową. Dla dowolnego $a > 0$:

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{EX}{a}$$

Dowód:

$$EX = \sum_x x\, P(X = x)$$

Nierówność Markowa

Niech X będzie nieujemną zmienną losową. Dla dowolnego $a > 0$:

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{EX}{a}$$

Dowód:

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{x} x\, P(X = x) \\ &= \underbrace{\sum_{x<a} x\, P(X = x)}_{\geqslant 0} + \sum_{x \geqslant a} x\, P(X = x) \end{aligned}$$

Nierówność Markowa

Niech X będzie nieujemną zmienną losową. Dla dowolnego $a > 0$:

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{EX}{a}$$

Dowód:

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{x} x\,P(X=x) \\ &= \underbrace{\sum_{x<a} x\,P(X=x)}_{\geqslant 0} + \sum_{x \geqslant a} x\,P(X=x) \\ &\geqslant 0 + \sum_{x \geqslant a} a\,P(X=x) \end{aligned}$$

Nierówność Markowa

Niech X będzie nieujemną zmienną losową. Dla dowolnego $a > 0$:

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{EX}{a}$$

Dowód:

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_{x} x\,P(X = x) \\
&= \underbrace{\sum_{x<a} x\,P(X = x)}_{\geqslant 0} + \sum_{x \geqslant a} x\,P(X = x) \\
&\geqslant 0 + \sum_{x \geqslant a} a\,P(X = x) \\
&= a \sum_{x \geqslant a} P(X = x) = aP(X \geqslant a)
\end{aligned}$$

Nierówność Markowa

Niech X będzie nieujemną zmienną losową. Dla dowolnego $a > 0$:

$$P(X \geqslant a) \leqslant \frac{EX}{a}$$

Dowód:

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_x x\,P(X = x) \\
&= \underbrace{\sum_{x<a} x\,P(X = x)}_{\geqslant 0} + \sum_{x\geqslant a} x\,P(X = x) \\
&\geqslant 0 + \sum_{x\geqslant a} a\,P(X = x) \\
&= a\sum_{x\geqslant a} P(X = x) = aP(X \geqslant a)
\end{aligned}$$

Dzieląc obustronnie przez a kończymy dowód.

Nierówność Czebyszewa

Dla zmiennej losowej o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji:

$$P\left(|X - EX| > \epsilon\right) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Prawdopodobieństwo znacznego odchylenia się od wartości oczekiwanej jest niewielkie.

Nierówność Czebyszewa

Dla zmiennej losowej o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji:

$$P(|X - EX| > \epsilon) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Prawdopodobieństwo znacznego odchylenia się od wartości oczekiwanej jest niewielkie.

Dowód: Weźmy nieujemną zmienną losową $Y = (X - EX)^2$

$$P(|X - EX| \geqslant \epsilon) \;=\; P((X - EX)^2 \geqslant \epsilon^2) \;=\; P(Y \geqslant \epsilon^2)$$

Nierówność Czebyszewa

Dla zmiennej losowej o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji:

$$P(|X - EX| > \epsilon) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Prawdopodobieństwo znacznego odchylenia się od wartości oczekiwanej jest niewielkie.

Dowód: Weźmy nieujemną zmienną losową $Y = (X - EX)^2$

$$\begin{aligned} P(|X - EX| \geqslant \epsilon) &= P((X - EX)^2 \geqslant \epsilon^2) = P(Y \geqslant \epsilon^2) \\ &\overset{(*)}{\leqslant} \frac{EY}{\epsilon^2} = \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}, \end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ skorzystaliśmy z nierówności Markowa

Nierówność Czebyszewa

$$P\left(|X - EX| > \epsilon\right) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Wniosek: Jeśli weźmiemy $\epsilon = kD(X)$ dla pewnego $k > 0$ to:

$$P\left(|X - EX| > kD(X)\right) \leqslant \frac{D^2(X)}{k^2 D^2(X)} = \frac{1}{k^2}$$

Prawdopodobieństwo odchylenia się zmiennej losowej od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż k odchyleń standardowych jest co najwyżej $\frac{1}{k^2}$

Nierówność Czebyszewa

$$P(|X - EX| > \epsilon) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Wniosek: Jeśli weźmiemy $\epsilon = kD(X)$ dla pewnego $k > 0$ to:

$$P(|X - EX| > kD(X)) \leqslant \frac{D^2(X)}{k^2 D^2(X)} = \frac{1}{k^2}$$

Prawdopodobieństwo odchylenia się zmiennej losowej od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż k odchyleń standardowych jest co najwyżej $\frac{1}{k^2}$

Przykład: Zmienna X ma wartość oczekiwaną 0 i odchylenie standardowe σ. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania wartości $|X| \geqslant 3\sigma$?

Nierówność Czebyszewa

$$P(|X - EX| > \epsilon) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Wniosek: Jeśli weźmiemy $\epsilon = kD(X)$ dla pewnego $k > 0$ to:

$$P(|X - EX| > kD(X)) \leqslant \frac{D^2(X)}{k^2 D^2(X)} = \frac{1}{k^2}$$

Prawdopodobieństwo odchylenia się zmiennej losowej od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż k odchyleń standardowych jest co najwyżej $\frac{1}{k^2}$

Przykład: Zmienna X ma wartość oczekiwaną 0 i odchylenie standardowe σ. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania wartości $|X| \geqslant 3\sigma$? $\leqslant \frac{1}{9}$

Nierówność Czebyszewa

$$P(|X - EX| > \epsilon) \leqslant \frac{D^2(X)}{\epsilon^2}$$

Wniosek: Jeśli weźmiemy $\epsilon = kD(X)$ dla pewnego $k > 0$ to:

$$P(|X - EX| > kD(X)) \leqslant \frac{D^2(X)}{k^2 D^2(X)} = \frac{1}{k^2}$$

Prawdopodobieństwo odchylenia się zmiennej losowej od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż k odchyleń standardowych jest co najwyżej $\frac{1}{k^2}$

Przykład: Zmienna X ma wartość oczekiwaną 0 i odchylenie standardowe σ. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania wartości $|X| \geqslant 3\sigma$? $\leqslant \frac{1}{9}$

Uwaga: Nierówność Czebyszewa działa dla dowolnego rozkładu, przez co może być dość słaba. W szczególnych przypadkach napotkamy na znacznie lepsze nierówności.