Metody probabilistyczne

7. Wielowymiarowe zmienne losowe

Wojciech Kotłowski

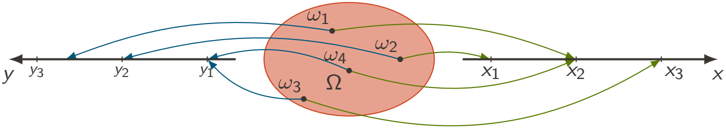
Instytut Informatyki PP
http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/

21.11.2017

Wiele zmiennych losowych

Będziemy rozważali wiele zmiennych losowych zdefiniowanych na tej samej przestrzeni probabilistycznej Ω

$$Y: \Omega \to \mathbb{R} \qquad X: \Omega \to \mathbb{R}$$



Przykład: rzut dwoma kostkami

- X – wynik rzutu na pierwszej kostce
- Y – wynik rzutu na drugiej kostce

Przykład: rzut dwoma kostkami

- X – wynik rzutu na pierwszej kostce
- Y – wynik rzutu na drugiej kostce

$$
\begin{aligned}
P(X = 1) &= 1/6 \\
P(2 \leqslant Y \leqslant 3) &= 2/6 \\
P(X \geqslant 4) &= 3/6
\end{aligned}
$$

Przykład: rzut dwoma kostkami

- X – wynik rzutu na pierwszej kostce
- Y – wynik rzutu na drugiej kostce

$$
\begin{aligned}
P(X = 1) &= 1/6 \\
P(2 \leqslant Y \leqslant 3) &= 2/6 \\
P(X \geqslant 4) &= 3/6 \\
P(X = 2 \wedge Y = 3) &=
\end{aligned}
$$

Przykład: rzut dwoma kostkami

- X – wynik rzutu na pierwszej kostce
- Y – wynik rzutu na drugiej kostce

$$
\begin{aligned}
P(X = 1) &= 1/6 \\
P(2 \leqslant Y \leqslant 3) &= 2/6 \\
P(X \geqslant 4) &= 3/6 \\
P(X = 2 \wedge Y = 3) &= 1/36
\end{aligned}
$$

Przykład: rzut dwoma kostkami

- X – wynik rzutu na pierwszej kostce
- Y – wynik rzutu na drugiej kostce

$$
\begin{aligned}
P(X = 1) &= 1/6 \\
P(2 \leqslant Y \leqslant 3) &= 2/6 \\
P(X \geqslant 4) &= 3/6 \\
P(X = 2 \wedge Y = 3) &= 1/36 \\
P(X = 2 | Y = 3) &=
\end{aligned}
$$

Przykład: rzut dwoma kostkami

- X – wynik rzutu na pierwszej kostce
- Y – wynik rzutu na drugiej kostce

$$\begin{aligned}
P(X = 1) &= 1/6 \\
P(2 \leqslant Y \leqslant 3) &= 2/6 \\
P(X \geqslant 4) &= 3/6 \\
P(X = 2 \wedge Y = 3) &= 1/36 \\
P(X = 2 | Y = 3) &= 1/6
\end{aligned}$$

Przykład: rzut dwoma kostkami

- X – wynik rzutu na pierwszej kostce
- Y – wynik rzutu na drugiej kostce

$$
\begin{aligned}
P(X = 1) &= 1/6 \\
P(2 \leqslant Y \leqslant 3) &= 2/6 \\
P(X \geqslant 4) &= 3/6 \\
P(X = 2 \wedge Y = 3) &= 1/36 \\
P(X = 2 | Y = 3) &= 1/6 \\
P(X + Y = 10) &=
\end{aligned}
$$

Przykład: rzut dwoma kostkami

- X – wynik rzutu na pierwszej kostce
- Y – wynik rzutu na drugiej kostce

$$\begin{aligned}
P(X = 1) &= 1/6 \\
P(2 \leqslant Y \leqslant 3) &= 2/6 \\
P(X \geqslant 4) &= 3/6 \\
P(X = 2 \wedge Y = 3) &= 1/36 \\
P(X = 2 | Y = 3) &= 1/6 \\
P(X + Y = 10) &= 3/36
\end{aligned}$$

Przykład: rzut dwoma kostkami

- X – wynik rzutu na pierwszej kostce
- Y – wynik rzutu na drugiej kostce

$$\begin{aligned}
P(X = 1) &= 1/6 \\
P(2 \leqslant Y \leqslant 3) &= 2/6 \\
P(X \geqslant 4) &= 3/6 \\
P(X = 2 \wedge Y = 3) &= 1/36 \\
P(X = 2 | Y = 3) &= 1/6 \\
P(X + Y = 10) &= 3/36 \\
P(X + Y = 10 | Y = 6) &=
\end{aligned}$$

Przykład: rzut dwoma kostkami

- X – wynik rzutu na pierwszej kostce
- Y – wynik rzutu na drugiej kostce

$$
\begin{aligned}
P(X = 1) &= 1/6 \\
P(2 \leqslant Y \leqslant 3) &= 2/6 \\
P(X \geqslant 4) &= 3/6 \\
P(X = 2 \wedge Y = 3) &= 1/36 \\
P(X = 2 | Y = 3) &= 1/6 \\
P(X + Y = 10) &= 3/36 \\
P(X + Y = 10 | Y = 6) &= 1/6
\end{aligned}
$$

Rozkład łączny (nieformalnie)

Niech $X \in \mathcal{X}$ i $Y \in \mathcal{Y}$ będą dyskretnymi zmiennymi losowymi zdefiniowanymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej.

Rozkład łączny określa prawdopodobieństwa równoczesnego przyjęcia danych wartości przez X i Y:

$$P(X = x, Y = y), \qquad x \in \mathcal{X}, \; y \in \mathcal{Y}$$

Rozkład łączny (nieformalnie)

Niech $X \in \mathcal{X}$ i $Y \in \mathcal{Y}$ będą dyskretnymi zmiennymi losowymi zdefiniowanymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej.

Rozkład łączny określa prawdopodobieństwa równoczesnego przyjęcia danych wartości przez X i Y:

$$P(X = x, Y = y), \qquad x \in \mathcal{X}, \; y \in \mathcal{Y}$$

Interpretacja:
$P\big(\{X = x \wedge Y = y\}\big)$

Rozkład łączny (nieformalnie)

Niech $X \in \mathcal{X}$ i $Y \in \mathcal{Y}$ będą dyskretnymi zmiennymi losowymi zdefiniowanymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej.

Rozkład łączny określa prawdopodobieństwa równoczesnego przyjęcia danych wartości przez X i Y:

$$P(X = x, Y = y), \qquad x \in \mathcal{X},\ y \in \mathcal{Y}$$

Interpretacja:
$P(\{X = x \wedge Y = y\})$

Rozkład łączny pozwala wyznaczać dowolne prawdopodobieństwa postaci:

$$P\Big((X, Y) \in A\Big) = \sum_{(x,y)\in A} P(X = x, Y = y), \qquad A \subseteq \mathbb{R}^2$$

Przykład: rzut kostką

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	0	1	0	1	0	1
$Y(\omega)$	1	1	1	2	2	3

Przykład: rzut kostką

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	0	1	0	1	0	1
$Y(\omega)$	1	1	1	2	2	3

Rozkład łączny:

$$P(X=0, Y=1) = \tfrac{2}{6} \quad P(X=0, Y=2) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=0, Y=3) = \tfrac{0}{6}$$

$$P(X=1, Y=1) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=1, Y=2) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=1, Y=3) = \tfrac{1}{6}$$

Przykład: rzut kostką

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	0	1	0	1	0	1
$Y(\omega)$	1	1	1	2	2	3

Rozkład łączny:

$$P(X=0, Y=1) = \tfrac{2}{6} \quad P(X=0, Y=2) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=0, Y=3) = \tfrac{0}{6}$$

$$P(X=1, Y=1) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=1, Y=2) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=1, Y=3) = \tfrac{1}{6}$$

$$P(X+Y=2) =$$

Przykład: rzut kostką

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	0	1	0	1	0	1
$Y(\omega)$	1	1	1	2	2	3

Rozkład łączny:

$$P(X=0, Y=1) = \tfrac{2}{6} \quad P(X=0, Y=2) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=0, Y=3) = \tfrac{0}{6}$$

$$P(X=1, Y=1) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=1, Y=2) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=1, Y=3) = \tfrac{1}{6}$$

$$P(X+Y=2) = P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1) = \frac{2}{6}$$

Przykład: rzut kostką

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	0	1	0	1	0	1
$Y(\omega)$	1	1	1	2	2	3

Rozkład łączny:

$$P(X=0, Y=1) = \tfrac{2}{6} \quad P(X=0, Y=2) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=0, Y=3) = \tfrac{0}{6}$$
$$P(X=1, Y=1) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=1, Y=2) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=1, Y=3) = \tfrac{1}{6}$$

$$P(X+Y=2) = P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1) = \frac{2}{6}$$
$$P(X=1) =$$

Przykład: rzut kostką

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	0	1	0	1	0	1
$Y(\omega)$	1	1	1	2	2	3

Rozkład łączny:

$$P(X=0, Y=1) = \tfrac{2}{6} \quad P(X=0, Y=2) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=0, Y=3) = \tfrac{0}{6}$$

$$P(X=1, Y=1) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=1, Y=2) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=1, Y=3) = \tfrac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} P(X+Y=2) &= P(X=0,Y=2) + P(X=1,Y=1) = \frac{2}{6} \\ P(X=1) &= P(X=1, Y \in \mathbb{R}) \\ &= P(X=1,Y=1) + P(X=1,Y=2) + P(X=1,Y=3) = \frac{3}{6} \end{aligned}$$

Przykład: rzut kostką

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	0	1	0	1	0	1
$Y(\omega)$	1	1	1	2	2	3

Rozkład łączny:

$$P(X=0, Y=1) = \tfrac{2}{6} \quad P(X=0, Y=2) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=0, Y=3) = \tfrac{0}{6}$$
$$P(X=1, Y=1) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=1, Y=2) = \tfrac{1}{6} \quad P(X=1, Y=3) = \tfrac{1}{6}$$

$$P(X+Y=2) = P(X=0,Y=2) + P(X=1,Y=1) = \frac{2}{6}$$
$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(X=1, Y \in \mathbb{R}) \\ &= P(X=1,Y=1) + P(X=1,Y=2) + P(X=1,Y=3) = \frac{3}{6} \end{aligned}$$

$$P(X=1 | Y=1) =$$

Przykład: rzut kostką

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6
$X(\omega)$	0	1	0	1	0	1
$Y(\omega)$	1	1	1	2	2	3

Rozkład łączny:

$P(X=0, Y=1) = \frac{2}{6}$ $\quad P(X=0, Y=2) = \frac{1}{6}$ $\quad P(X=0, Y=3) = \frac{0}{6}$

$P(X=1, Y=1) = \frac{1}{6}$ $\quad P(X=1, Y=2) = \frac{1}{6}$ $\quad P(X=1, Y=3) = \frac{1}{6}$

$$P(X+Y=2) = P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=1) = \frac{2}{6}$$

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P(X=1, Y \in \mathbb{R}) \\ &= P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=3) = \frac{3}{6} \end{aligned}$$

$$P(X=1 | Y=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$$

Rozkład brzegowy

Mając rozkład łączny zmiennych $X \in \mathcal{X}$ i $Y \in \mathcal{Y}$ definiujemy rozkłady brzegowe:

- Ze względu na X jako:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(X = x, Y = y)$$

Rozkład brzegowy

Mając rozkład łączny zmiennych $X \in \mathcal{X}$ i $Y \in \mathcal{Y}$ definiujemy rozkłady brzegowe:

- Ze względu na X jako:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(X = x, Y = y)$$

wynika z rozbicia na sumę rozłącznych zdarzeń:
$\{X = x\} = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} \{X = x \wedge Y = y\}$

Rozkład brzegowy

Mając rozkład łączny zmiennych $X \in \mathcal{X}$ i $Y \in \mathcal{Y}$ definiujemy rozkłady brzegowe:

- Ze względu na X jako:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(X = x, Y = y)$$

wynika z rozbicia na sumę rozłącznych zdarzeń:
$\{X = x\} = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} \{X = x \wedge Y = y\}$

- Ze względu na Y jako:

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P(X = x, Y = y)$$

Rozkład brzegowy

Mając rozkład łączny zmiennych $X \in \mathcal{X}$ i $Y \in \mathcal{Y}$ definiujemy rozkłady brzegowe:

- Ze względu na X jako:

$$P(X = x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(X = x, Y = y)$$

wynika z rozbicia na sumę rozłącznych zdarzeń:
$\{X = x\} = \bigcup_{y \in \mathcal{Y}} \{X = x \wedge Y = y\}$

- Ze względu na Y jako:

$$P(Y = y) = \sum_{x \in \mathcal{X}} P(X = x, Y = y)$$

Rozkład brzegowy określa więc rozkład prawdopodobieństwa jednej ze zmiennych, gdzie wynik drugiej zmiennej jest dowolny

Rozkład brzegowy a łączny

	y_1	y_2	
x_1	$P(X = x_1, Y = y_1)$	$P(X = x_1, Y = y_2)$	
x_2	$P(X = x_2, Y = y_1)$	$P(X = x_2, Y = y_2)$	

Rozkład brzegowy a łączny

	y_1	y_2	Σ
x_1	$P(X = x_1, Y = y_1)$	$P(X = x_1, Y = y_2)$	$P(X = x_1)$
x_2	$P(X = x_2, Y = y_1)$	$P(X = x_2, Y = y_2)$	$P(X = x_2)$
Σ	$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	1

Rozkład brzegowy a łączny

	y_1	y_2	Σ
x_1	$P(X = x_1, Y = y_1)$	$P(X = x_1, Y = y_2)$	$P(X = x_1)$
x_2	$P(X = x_2, Y = y_1)$	$P(X = x_2, Y = y_2)$	$P(X = x_2)$
Σ	$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	1

Czy mając rozkłady brzegowe jesteśmy w stanie odtworzyć rozkład łączny?

Rozkład brzegowy a łączny

	y_1	y_2	Σ
x_1	$P(X = x_1, Y = y_1)$	$P(X = x_1, Y = y_2)$	$P(X = x_1)$
x_2	$P(X = x_2, Y = y_1)$	$P(X = x_2, Y = y_2)$	$P(X = x_2)$
Σ	$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	1

Czy mając rozkłady brzegowe jesteśmy w stanie odtworzyć rozkład łączny?

	y_1	y_2	Σ
x_1	0.08	0.12	0.2
x_2	0.32	0.48	0.8
Σ	0.4	0.6	1

	y_1	y_2	Σ
x_1	0.2	0	0.2
x_2	0.2	0.6	0.8
Σ	0.4	0.6	1

Rozkład brzegowy a łączny

	y_1	y_2	Σ
x_1	$P(X = x_1, Y = y_1)$	$P(X = x_1, Y = y_2)$	$P(X = x_1)$
x_2	$P(X = x_2, Y = y_1)$	$P(X = x_2, Y = y_2)$	$P(X = x_2)$
Σ	$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	1

Czy mając rozkłady brzegowe jesteśmy w stanie odtworzyć rozkład łączny?

	y_1	y_2	Σ
x_1	0.08	0.12	0.2
x_2	0.32	0.48	0.8
Σ	0.4	0.6	1

	y_1	y_2	Σ
x_1	0.2	0	0.2
x_2	0.2	0.6	0.8
Σ	0.4	0.6	1

Jeśli X przyjmuje n wartości, a Y – m wartości, to ile „niezależnych" parametrów mają rozkłady brzegowe a ile rozkład łączny?

Rozkład brzegowy a łączny

	y_1	y_2	Σ
x_1	$P(X = x_1, Y = y_1)$	$P(X = x_1, Y = y_2)$	$P(X = x_1)$
x_2	$P(X = x_2, Y = y_1)$	$P(X = x_2, Y = y_2)$	$P(X = x_2)$
Σ	$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	1

Czy mając rozkłady brzegowe jesteśmy w stanie odtworzyć rozkład łączny?

	y_1	y_2	Σ
x_1	0.08	0.12	0.2
x_2	0.32	0.48	0.8
Σ	0.4	0.6	1

	y_1	y_2	Σ
x_1	0.2	0	0.2
x_2	0.2	0.6	0.8
Σ	0.4	0.6	1

Jeśli X przyjmuje n wartości, a Y – m wartości, to ile „niezależnych” parametrów mają rozkłady brzegowe a ile rozkład łączny?

Rozkład łączny: $n \cdot m - 1$, brzegowe: $n - 1$ i $m - 1$

Rozkład warunkowy

Rozkładem warunkowym zmiennej X pod warunkiem $Y \in B$, gdzie $P(Y \in B) > 0$, nazywamy rozkład prawdopodobieństwa zdefiniowany dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{R}$ jako:

$$P(X \in A | Y \in B) = \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(Y \in B)}$$

Rozkład warunkowy

Rozkładem warunkowym zmiennej X pod warunkiem $Y \in B$, gdzie $P(Y \in B) > 0$, nazywamy rozkład prawdopodobieństwa zdefiniowany dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{R}$ jako:

$$P(X \in A | Y \in B) = \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(Y \in B)}$$

Uwaga: Zwykle będziemy zainteresowani tylko prawdopodobieństwami postaci:

$$P(X = x | Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}, \qquad \text{dla} \;\; P(Y = y) > 0$$

Rozkład warunkowy

Rozkładem warunkowym zmiennej X pod warunkiem $Y \in B$, gdzie $P(Y \in B) > 0$, nazywamy rozkład prawdopodobieństwa zdefiniowany dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{R}$ jako:

$$P(X \in A | Y \in B) = \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(Y \in B)}$$

Uwaga: Zwykle będziemy zainteresowani tylko prawdopodobieństwami postaci:

$$P(X = x | Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}, \qquad \text{dla} \;\; P(Y = y) > 0$$

Zadanie 1

Pokaż, że rozkład $P_{X|B}(A) = P(X \in A | Y \in B)$ zdefiniowany w ten sposób spełnia aksjomaty Kołmogorowa.

Rozkład warunkowy: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	Σ
$X = 0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X = 1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$$P(X = 0 | Y = 0) \quad =$$

Rozkład warunkowy: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	Σ
$X = 0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X = 1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$$P(X = 0|Y = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

Rozkład warunkowy: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	Σ
$X = 0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X = 1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$$P(X = 0 | Y = 0) = \frac{P(X = 0, Y = 0)}{P(Y = 0)} = \frac{1/4}{1/4} = 1$$

$$P(X = 1 | Y = 0) =$$

Rozkład warunkowy: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	Σ
$X=0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X=1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$$
\begin{aligned}
P(X=0|Y=0) &= \frac{P(X=0,Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{1/4}{1/4} = 1 \\
P(X=1|Y=0) &= \frac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)} = 0
\end{aligned}
$$

Rozkład warunkowy: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	Σ
$X=0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X=1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$$
\begin{aligned}
P(X=0|Y=0) &= \frac{P(X=0,Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{1/4}{1/4} = 1 \\
P(X=1|Y=0) &= \frac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)} = 0 \\
P(X=1|Y=1) &=
\end{aligned}
$$

Rozkład warunkowy: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	Σ
$X=0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X=1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$$
\begin{aligned}
P(X=0|Y=0) &= \frac{P(X=0,Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{1/4}{1/4} = 1 \\
P(X=1|Y=0) &= \frac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)} = 0 \\
P(X=1|Y=1) &= \frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2
\end{aligned}
$$

Rozkład warunkowy: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	Σ
$X=0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X=1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$$
\begin{aligned}
P(X=0|Y=0) &= \frac{P(X=0,Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{1/4}{1/4} = 1 \\
P(X=1|Y=0) &= \frac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)} = 0 \\
P(X=1|Y=1) &= \frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2 \\
P(Y=0|X=0) &=
\end{aligned}
$$

Rozkład warunkowy: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	Σ
$X=0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X=1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$$
\begin{aligned}
P(X=0|Y=0) &= \frac{P(X=0,Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{1/4}{1/4} = 1 \\
P(X=1|Y=0) &= \frac{P(X=1,Y=0)}{P(Y=0)} = 0 \\
P(X=1|Y=1) &= \frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2 \\
P(Y=0|X=0) &= \frac{P(X=0,Y=0)}{P(X=0)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2
\end{aligned}
$$

Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Dla dyskretnych zmiennych $X \in \mathcal{X}$ i $Y \in \mathcal{Y}$, gdzie $P(Y = y) > 0$ dla wszystkich $y \in \mathcal{Y}$, zachodzi:

$$P(X \in A) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(X \in A | Y = y) P(Y = y)$$

Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Dla dyskretnych zmiennych $X \in \mathcal{X}$ i $Y \in \mathcal{Y}$, gdzie $P(Y = y) > 0$ dla wszystkich $y \in \mathcal{Y}$, zachodzi:

$$P(X \in A) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(X \in A | Y = y) P(Y = y)$$

Dowód: Rodzina zdarzeń $\{Y = y\}$ dla wszystkich $y \in \mathcal{Y}$ tworzy układ zupełny (wzajemnie rozłączne i pokrywają całą przestrzeń probabilistyczną).

Wzór wynika więc bezpośrednio ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite dla zdarzeń.

Przykład

Rzucamy wpierw kostką ($Y \in \{1, \ldots, 6\}$), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania k orłów ($k = 1, \ldots, 6$).

Przykład

Rzucamy wpierw kostką ($Y \in \{1, \ldots, 6\}$), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania k orłów ($k = 1, \ldots, 6$).

X – liczba orłów.

$$P(X = k | Y = n) =$$

Przykład

Rzucamy wpierw kostką ($Y \in \{1, \ldots, 6\}$), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania k orłów ($k = 1, \ldots, 6$).

X – liczba orłów.

$$P(X = k | Y = n) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad k > n \\ \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{jeśli} \quad k \leqslant n \end{cases}$$

Przykład

Rzucamy wpierw kostką ($Y \in \{1, \dots, 6\}$), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania k orłów ($k = 1, \dots, 6$).

X – liczba orłów.

$$P(X = k | Y = n) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } k > n \\ \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{jeśli } k \leqslant n \end{cases}$$

$$P(X = k) = \sum_{n=1}^{6} P(X = k | Y = n) P(Y = n)$$

Przykład

Rzucamy wpierw kostką ($Y \in \{1, \dots, 6\}$), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania k orłów ($k = 1, \dots, 6$).

X – liczba orłów.

$$P(X = k | Y = n) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad k > n \\ \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{jeśli} \quad k \leqslant n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=1}^{6} P(X = k | Y = n) P(Y = n) \\ &= \sum_{n=k}^{6} \frac{1}{6} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Przykład

Rzucamy wpierw kostką ($Y \in \{1, \ldots, 6\}$), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Oblicz prawdopodobieństwo uzyskania k orłów ($k = 1, \ldots, 6$).

X – liczba orłów.

$$P(X = k | Y = n) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli} \quad k > n \\ \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{jeśli} \quad k \leqslant n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=1}^{6} P(X = k | Y = n) P(Y = n) \\ &= \sum_{n=k}^{6} \frac{1}{6} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

$$\text{np.} \quad P(X = 5) = \frac{1}{6} \binom{5}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{6} \binom{6}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

Zadanie

Zadanie 2

Owad składa Y jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem λ, a potomek owada wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p niezależnie od innych.
Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa liczby potomków X

Warunkowa wartość oczekiwana

Definicja

Wyrażenie:

$$E(X|Y=y) \;=\; \sum_{x\in\mathcal{X}} xP(X=x|Y=y)$$

nazywamy warunkową wartością oczekiwaną zmiennej losowej X pod warunkiem $Y=y$.

Jest to wartość średnia zmiennej X policzona na rozkładzie warunkowym $P(X=x|Y=y)$.

Warunkowa wartość oczekiwana

Definicja

Wyrażenie:

$$E(X|Y = y) \;=\; \sum_{x \in \mathcal{X}} x P(X = x|Y = y)$$

nazywamy warunkową wartością oczekiwaną zmiennej losowej X pod warunkiem $Y = y$.

Jest to wartość średnia zmiennej X policzona na rozkładzie warunkowym $P(X = x|Y = y)$.

Uwaga: Ponieważ rozkład warunkowy jest pewnym rozkładem prawdopodobieństwa, warunkowa wartość oczekiwana ma te same własności co zwykła wartość oczekiwana, np:

$$\begin{aligned} E(f(X)|Y = y) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x) P(X = x|Y = y) \\ E(aX + b|Y = y) &= aE(f(X)|Y = y) + b \end{aligned}$$

Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	Σ
$X=0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X=1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$$P(X=0|Y=0)=1 \qquad P(X=1|Y=0)=0$$
$$P(X=0|Y=1)=1/2 \qquad P(X=1|Y=1)=1/2$$
$$P(X=0|Y=2)=0 \qquad P(X=1|Y=2)=1$$

Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	Σ
$X=0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X=1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$P(X=0|Y=0)=1$ $\qquad$ $P(X=1|Y=0)=0$

$P(X=0|Y=1)=1/2$ $\qquad$ $P(X=1|Y=1)=1/2$

$P(X=0|Y=2)=0$ $\qquad$ $P(X=1|Y=2)=1$

$$E(X|Y=0) \quad =$$

Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	Σ
$X=0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X=1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$P(X=0|Y=0)=1$ $\qquad$ $P(X=1|Y=0)=0$

$P(X=0|Y=1)=1/2$ $\qquad$ $P(X=1|Y=1)=1/2$

$P(X=0|Y=2)=0$ $\qquad$ $P(X=1|Y=2)=1$

$$E(X|Y=0) \;=\; 0\cdot 1 + 1\cdot 0 \;=\; 0$$

Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	Σ
$X=0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X=1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$P(X=0|Y=0)=1$ $\qquad$ $P(X=1|Y=0)=0$

$P(X=0|Y=1)=1/2$ $\qquad$ $P(X=1|Y=1)=1/2$

$P(X=0|Y=2)=0$ $\qquad$ $P(X=1|Y=2)=1$

$$\begin{aligned} E(X|Y=0) &= 0\cdot 1+1\cdot 0 = 0 \\ E(X|Y=1) &= \end{aligned}$$

Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	Σ
$X = 0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X = 1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$$P(X = 0 | Y = 0) = 1 \qquad P(X = 1 | Y = 0) = 0$$
$$P(X = 0 | Y = 1) = 1/2 \qquad P(X = 1 | Y = 1) = 1/2$$
$$P(X = 0 | Y = 2) = 0 \qquad P(X = 1 | Y = 2) = 1$$

$$\begin{aligned} E(X | Y = 0) &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 \\ E(X | Y = 1) &= 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	Σ
$X=0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X=1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$P(X=0|Y=0)=1$ $\quad$ $P(X=1|Y=0)=0$

$P(X=0|Y=1)=1/2$ $\quad$ $P(X=1|Y=1)=1/2$

$P(X=0|Y=2)=0$ $\quad$ $P(X=1|Y=2)=1$

$$\begin{aligned}
E(X|Y=0) &= 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0 \\
E(X|Y=1) &= 0\cdot \frac{1}{2} + 1\cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
E(X|Y=2) &=
\end{aligned}$$

Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Rozważmy rozkład łączny opisany tabelką:

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	Σ
$X=0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X=1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$$P(X=0|Y=0)=1 \qquad P(X=1|Y=0)=0$$
$$P(X=0|Y=1)=1/2 \qquad P(X=1|Y=1)=1/2$$
$$P(X=0|Y=2)=0 \qquad P(X=1|Y=2)=1$$

$$\begin{aligned}
E(X|Y=0) &= 0\cdot 1+1\cdot 0 = 0\\
E(X|Y=1) &= 0\cdot \frac{1}{2}+1\cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\\
E(X|Y=2) &= 0\cdot 0+1\cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Owad składa Y jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem λ, a potomek owada wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p niezależnie od innych. Jeśli X określa liczbę potomków, wyznacz $E(X|Y = n)$.

Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Owad składa Y jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem λ, a potomek owada wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p niezależnie od innych. Jeśli X określa liczbę potomków, wyznacz $E(X|Y = n)$.

Przy zadanym $Y = n$, X ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$:

$$P(X = k|Y = n) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Warunkowa wartość oczekiwana: przykład

Owad składa Y jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem λ, a potomek owada wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p niezależnie od innych. Jeśli X określa liczbę potomków, wyznacz $E(X|Y = n)$.

Przy zadanym $Y = n$, X ma rozkład dwumianowy $B(n, p)$:

$$P(X = k|Y = n) \ = \ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Tym samym:

$$E(X|Y = n) \ = \ np$$

Zadanie

Zadanie 3

Rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie, jeżeli wiemy, że łącznie zaszło k sukcesów?

Zadanie

Zadanie 3

Rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie, jeżeli wiemy, że łącznie zaszło k sukcesów?

Szkic rozwiązania: $Y \in \{0, 1, \ldots, n\}$ – liczba sukcesów w n próbach,
$X \in \{0, 1\}$ – czy sukces nastąpił w pierwszej próbie.

Zadanie

Zadanie 3

Rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie, jeżeli wiemy, że łącznie zaszło k sukcesów?

Szkic rozwiązania: $Y \in \{0, 1, \ldots, n\}$ – liczba sukcesów w n próbach, $X \in \{0, 1\}$ – czy sukces nastąpił w pierwszej próbie.

$$E(X|Y = k) \; = \; 0 \cdot P(X = 0|Y = k) + 1 \cdot P(X = 1|Y = k)$$

Zadanie

Zadanie 3

Rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie, jeżeli wiemy, że łącznie zaszło k sukcesów?

Szkic rozwiązania: $Y \in \{0, 1, \ldots, n\}$ – liczba sukcesów w n próbach, $X \in \{0, 1\}$ – czy sukces nastąpił w pierwszej próbie.

$$E(X|Y = k) = P(X = 1|Y = k)$$

Zadanie

Zadanie 3

Rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie, jeżeli wiemy, że łącznie zaszło k sukcesów?

Szkic rozwiązania: $Y \in \{0, 1, \ldots, n\}$ – liczba sukcesów w n próbach, $X \in \{0, 1\}$ – czy sukces nastąpił w pierwszej próbie.

$$E(X|Y = k) = P(X = 1|Y = k)$$

$$P(X = 1|Y = k) = \frac{P(X = 1, Y = k)}{P(Y = k)}$$

Zadanie

Zadanie 3

Rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie, jeżeli wiemy, że łącznie zaszło k sukcesów?

Szkic rozwiązania: $Y \in \{0, 1, \ldots, n\}$ – liczba sukcesów w n próbach, $X \in \{0, 1\}$ – czy sukces nastąpił w pierwszej próbie.

$$E(X|Y = k) = P(X = 1|Y = k)$$

$$\begin{aligned} P(X = 1|Y = k) &= \frac{P(X = 1, Y = k)}{P(Y = k)} \\ &= \frac{\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \end{aligned}$$

Zadanie

Zadanie 3

Rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie, jeżeli wiemy, że łącznie zaszło k sukcesów?

Szkic rozwiązania: $Y \in \{0, 1, \ldots, n\}$ – liczba sukcesów w n próbach, $X \in \{0, 1\}$ – czy sukces nastąpił w pierwszej próbie.

$$E(X|Y = k) = P(X = 1|Y = k)$$

$$\begin{aligned} P(X = 1|Y = k) &= \frac{P(X = 1, Y = k)}{P(Y = k)} \\ &= \frac{\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \\ &= \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n} \end{aligned}$$

Zadanie

Zadanie 3

Rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie, jeżeli wiemy, że łącznie zaszło k sukcesów?

Szkic rozwiązania: $Y \in \{0, 1, \ldots, n\}$ – liczba sukcesów w n próbach, $X \in \{0, 1\}$ – czy sukces nastąpił w pierwszej próbie.

$$E(X|Y = k) = P(X = 1|Y = k)$$

$$\begin{aligned} P(X = 1|Y = k) &= \frac{P(X = 1, Y = k)}{P(Y = k)} \\ &= \frac{\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} \\ &= \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{n} \end{aligned}$$

Średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie nie zależy od parametru p!

Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

Ponieważ $E(X|Y = n) = f(n)$ jest pewną funkcją wartości przyjmowanej przez Y, możemy ją potraktować jako zmienną losową będącą funkcją Y:

$$E(X|Y) = f(Y)$$

Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

Ponieważ $E(X|Y = n) = f(n)$ jest pewną funkcją wartości przyjmowanej przez Y, możemy ją potraktować jako zmienną losową będącą funkcją Y:

$$E(X|Y) = f(Y)$$

Przykład: W poprzednim zadaniu wyznaczyliśmy $E(X|Y = n) = np$.
Tym samym:

$$E(X|Y) = Yp$$

Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

Ponieważ $E(X|Y=n) = f(n)$ jest pewną funkcją wartości przyjmowanej przez Y, możemy ją potraktować jako zmienną losową będącą funkcją Y:

$$E(X|Y) = f(Y)$$

Przykład: W poprzednim zadaniu wyznaczyliśmy $E(X|Y=n) = np$. Tym samym:

$$E(X|Y) = Yp$$

Przykład: W pierwszym przykładzie wyznaczyliśmy:

$$E(X|Y=0) = 0, \quad E(X|Y=1) = \frac{1}{2}, \quad E(X|Y=2) = 1$$

Tym samym:

$$E(X|Y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } Y=0 \\ 1/2 & \text{dla } Y=1 \\ 1 & \text{dla } Y=2 \end{cases} = \frac{1}{2}Y$$

Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

Jeśli $P(Y = y) > 0$ dla wszystkich $y \in \mathcal{Y}$, zachodzi:

$$E\Big(E(X|Y)\Big) \; = \; EX$$

Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

Jeśli $P(Y = y) > 0$ dla wszystkich $y \in \mathcal{Y}$, zachodzi:

$$E\Big(E(X|Y)\Big) \; = \; EX$$

Dowód: Skoro $E(X|Y) = f(Y)$, mamy:

$$E\Big(E(X|Y)\Big) \;\; = \;\; \sum_{y \in \mathcal{Y}} f(y) P(Y = y)$$

Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

Jeśli $P(Y = y) > 0$ dla wszystkich $y \in \mathcal{Y}$, zachodzi:

$$E\Big(E(X|Y)\Big) = EX$$

Dowód: Skoro $E(X|Y) = f(Y)$, mamy:

$$\begin{aligned} E\Big(E(X|Y)\Big) &= \sum_{y\in\mathcal{Y}} f(y)P(Y = y) \\ &= \sum_{y\in\mathcal{Y}} E(X|Y = y)P(Y = y) \end{aligned}$$

Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

Jeśli $P(Y = y) > 0$ dla wszystkich $y \in \mathcal{Y}$, zachodzi:

$$E\Big(E(X|Y)\Big) = EX$$

Dowód: Skoro $E(X|Y) = f(Y)$, mamy:

$$\begin{aligned}
E\Big(E(X|Y)\Big) &= \sum_{y\in\mathcal{Y}} f(y)P(Y = y) \\
&= \sum_{y\in\mathcal{Y}} E(X|Y = y)P(Y = y) \\
&= \sum_{y\in\mathcal{Y}} \Big(\sum_{x\in\mathcal{X}} xP(X = x|Y = y)\Big)P(Y = y)
\end{aligned}$$

Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

Jeśli $P(Y = y) > 0$ dla wszystkich $y \in \mathcal{Y}$, zachodzi:

$$E\Big(E(X|Y)\Big) = EX$$

Dowód: Skoro $E(X|Y) = f(Y)$, mamy:

$$\begin{aligned}
E\Big(E(X|Y)\Big) &= \sum_{y\in\mathcal{Y}} f(y)P(Y = y) \\
&= \sum_{y\in\mathcal{Y}} E(X|Y = y)P(Y = y) \\
&= \sum_{y\in\mathcal{Y}} \Big(\sum_{x\in\mathcal{X}} xP(X = x|Y = y)\Big)P(Y = y) \\
&= \sum_{x\in\mathcal{X}} x \sum_{y\in\mathcal{Y}} P(X = x|Y = y)P(Y = y)
\end{aligned}$$

Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

Jeśli $P(Y = y) > 0$ dla wszystkich $y \in \mathcal{Y}$, zachodzi:

$$E\Big(E(X|Y)\Big) = EX$$

Dowód: Skoro $E(X|Y) = f(Y)$, mamy:

$$\begin{aligned}
E\Big(E(X|Y)\Big) &= \sum_{y\in\mathcal{Y}} f(y)P(Y=y) \\
&= \sum_{y\in\mathcal{Y}} E(X|Y=y)P(Y=y) \\
&= \sum_{y\in\mathcal{Y}} \Big(\sum_{x\in\mathcal{X}} xP(X=x|Y=y)\Big)P(Y=y) \\
&= \sum_{x\in\mathcal{X}} x \sum_{y\in\mathcal{Y}} P(X=x|Y=y)P(Y=y) \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{x\in\mathcal{X}} xP(X=x) = EX,
\end{aligned}$$

gdzie $(*)$ wynika ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

Warunkowa wartość oczekiwana jako zmienna losowa

Jeśli $P(Y = y) > 0$ dla wszystkich $y \in \mathcal{Y}$, zachodzi:

$$E\Big(E(X|Y)\Big) \;=\; EX$$

Uwaga: Założenie $P(Y = y) > 0$ nie jest potrzebne, ponieważ zgodnie z definicją:

$$E\Big(E(X|Y)\Big) \;=\; \sum_{y \in \mathcal{Y}} E(X|Y = y)P(Y = y)$$

Jeśli $P(Y = y) = 0$ dla pewnego $y \in \mathcal{Y}$, to mimo, że $E(X|Y = y)$ jest w tym przypadku niezdefiniowane, jest ono przemnażane przy sumowaniu przez $P(Y = y) = 0$, więc nie ma wpływu na wynik.

Przykład: oblicz EX

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	Σ
$X=0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X=1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$$E(X|Y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } Y=0 \\ 1/2 & \text{dla } Y=1 \\ 1 & \text{dla } Y=2 \end{cases} = \frac{1}{2}Y$$

Przykład: oblicz EX

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	Σ
$X=0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X=1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$$E(X|Y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } Y=0 \\ 1/2 & \text{dla } Y=1 \\ 1 & \text{dla } Y=2 \end{cases} = \frac{1}{2}Y$$

- Z jednej strony:

$$EX = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = \frac{1}{2}$$

Przykład: oblicz EX

	$Y=0$	$Y=1$	$Y=2$	Σ
$X=0$	$1/4$	$1/4$	0	$1/2$
$X=1$	0	$1/4$	$1/4$	$1/2$
Σ	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

$$E(X|Y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } Y=0 \\ 1/2 & \text{dla } Y=1 \\ 1 & \text{dla } Y=2 \end{cases} = \frac{1}{2}Y$$

- Z jednej strony:

$$EX = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = \frac{1}{2}$$

- Z drugiej strony:

$$\begin{aligned} EX &= E\Big(E(X|Y)\Big) = \frac{1}{2}EY \\ &= \frac{1}{2}\Big(0 \cdot P(Y=0) + 1 \cdot P(Y=1) + 2 \cdot P(Y=2)\Big) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Przykład

Owad składa Y jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem λ, a potomek owada wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p niezależnie od innych. Jeśli X określa liczbę potomków, wyznacz EX

Przykład

Owad składa Y jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem λ, a potomek owada wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p niezależnie od innych. Jeśli X określa liczbę potomków, wyznacz EX

Policzyliśmy, że:

$$E(X|Y) = Yp$$

Przykład

Owad składa Y jajeczek zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem λ, a potomek owada wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p niezależnie od innych. Jeśli X określa liczbę potomków, wyznacz EX

Policzyliśmy, że:

$$E(X|Y) = Yp$$

Tym samym:

$$EX = E\Big(E(X|Y)\Big) = pEY = p\lambda$$

Przykład

Rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie?

Przykład

Rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie?

$Y \in \{0, 1, \ldots, n\}$ – liczba sukcesów w n próbach, $X \in \{0, 1\}$ – czy sukces nastąpił w pierwszej próbie.

Przykład

Rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie?

$Y \in \{0, 1, \ldots, n\}$ – liczba sukcesów w n próbach, $X \in \{0, 1\}$ – czy sukces nastąpił w pierwszej próbie.

- Z jednej strony, ponieważ X ma rozkład dwupunktowy $B(p)$:

$$EX = p$$

Przykład

Rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie?

$Y \in \{0, 1, \ldots, n\}$ – liczba sukcesów w n próbach, $X \in \{0, 1\}$ – czy sukces nastąpił w pierwszej próbie.

- Z jednej strony, ponieważ X ma rozkład dwupunktowy $B(p)$:

$$EX = p$$

- Z drugiej strony wyznaczyliśmy:

$$E(X|Y = k) = \frac{k}{n}, \qquad \text{a stąd} \quad E(X|Y) = \frac{Y}{n}$$

Przykład

Rozważmy schemat n prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p. Jaka jest średnia liczba sukcesów w pierwszej próbie?

$Y \in \{0, 1, \ldots, n\}$ – liczba sukcesów w n próbach, $X \in \{0, 1\}$ – czy sukces nastąpił w pierwszej próbie.

- Z jednej strony, ponieważ X ma rozkład dwupunktowy $B(p)$:

$$EX = p$$

- Z drugiej strony wyznaczyliśmy:

$$E(X|Y = k) = \frac{k}{n}, \qquad \text{a stąd} \quad E(X|Y) = \frac{Y}{n}$$

Tym samym:

$$EX = E\Big(E(X|Y)\Big) = \frac{EY}{n} = \frac{np}{n} = p$$

Przykład

Rzucamy wpierw kostką ($Y \in \{1, \ldots, 6\}$), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Niech X oznacza liczbę orłów. Wyznacz EX

Przykład

Rzucamy wpierw kostką ($Y \in \{1, \ldots, 6\}$), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Niech X oznacza liczbę orłów. Wyznacz EX

Przy zadanym $Y = n$, X ma rozkład dwumianowy $B(n, 1/2)$.

Przykład

Rzucamy wpierw kostką ($Y \in \{1, \dots, 6\}$), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Niech X oznacza liczbę orłów. Wyznacz EX

Przy zadanym $Y = n$, X ma rozkład dwumianowy $B(n, 1/2)$. Stąd:

$$E(X|Y = n) \;=\; \frac{1}{2}n, \qquad E(X|Y) = \frac{1}{2}Y$$

Przykład

Rzucamy wpierw kostką ($Y \in \{1, \ldots, 6\}$), a następnie tyle razy (uczciwymi) monetami, ile wypadło oczek na kostce. Niech X oznacza liczbę orłów. Wyznacz EX

Przy zadanym $Y = n$, X ma rozkład dwumianowy $B(n, 1/2)$. Stąd:

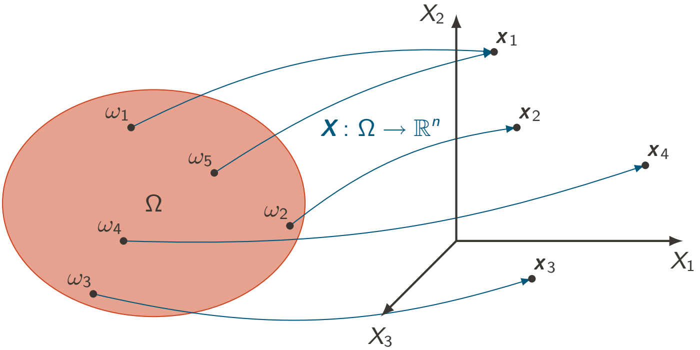
$$E(X|Y = n) = \frac{1}{2}n, \qquad E(X|Y) = \frac{1}{2}Y$$

$$EX = E\Big(E(X|Y)\Big) = \frac{1}{2}EY = \frac{1}{2} \cdot 3.5$$

Wielowymiarowe zmienne losowe

Rozważmy n zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ zdefiniowanych na tej samej przestrzeni probabilistycznej Ω

Zmienne to można całościowo traktować jako wielowymiarową zmienną losową (wektor losowy) $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, gdzie $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$

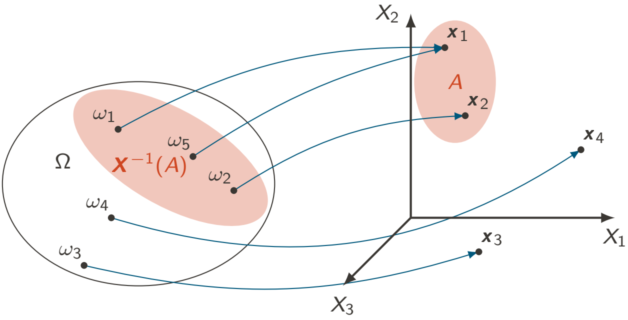


Rozkład łączny

Łącznym rozkładem prawdopodobieństwa wektora $\boldsymbol{X}\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ nazywamy miarę określoną dla zbiorów borelowskich $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jako:

$$P_{\boldsymbol{X}}(A) \;=\; P\Big(\{\omega \in \Omega \colon \boldsymbol{X}(\omega) \in A\}\Big) \;=\; P\Big(\boldsymbol{X}^{-1}(A)\Big)$$

Częściej zapisujemy $P(\boldsymbol{X} \in A)$



Rozkład łączny

Niech $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ będzie wektorem dyskretnych zmiennych losowych. Rozkład łączny można w pełni opisać za pomocą prawdopodobieństw postaci:

$$P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) \; = \; P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n),$$

dla dowolnego $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Rozkład łączny

Niech $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ będzie wektorem dyskretnych zmiennych losowych. Rozkład łączny można w pełni opisać za pomocą prawdopodobieństw postaci:

$$P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) \; = \; P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n),$$

dla dowolnego $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Wtedy dla dowolnego borelowskiego $A \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$P(\boldsymbol{X} \in A) \; = \; \sum_{\boldsymbol{x} \in A} P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x})$$

Rozkład brzegowy

Mając rozkład łączny wektora $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definiujemy rozkład brzegowy ze względu na zmienną X_i $(i = 1, \ldots, n)$ jako:

$$\begin{aligned} P(X_i = a) &= P(X_1 \in \mathbb{R}, \ldots, X_{i-1} \in \mathbb{R}, X_i = x, X_{i+1} \in \mathbb{R}, \ldots, X_n \in \mathbb{R}) \\ &= \sum_{\boldsymbol{x} :\, x_i = a} P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

Rozkład brzegowy

Mając rozkład łączny wektora $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definiujemy rozkład brzegowy ze względu na zmienną X_i ($i = 1, \ldots, n$) jako:

$$\begin{aligned} P(X_i = a) &= P(X_1 \in \mathbb{R}, \ldots, X_{i-1} \in \mathbb{R}, X_i = x, X_{i+1} \in \mathbb{R}, \ldots, X_n \in \mathbb{R}) \\ &= \sum_{\boldsymbol{x} \,:\, x_i = a} P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

Można też definiować rozkłady brzegowe ze względu na podzbiór zmiennych, np:

$$P(X_i = a, X_j = b) = \sum_{\boldsymbol{x} \,:\, x_i = a, x_j = b} P(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x})$$

Rozkład warunkowy

Rozkładem warunkowym dyskretnego wektora $\boldsymbol{X}$ pod warunkiem $X_i = x_i$ dla $P(X_i = x_i) > 0$ nazywamy rozkład prawdopodobieństwa zdefiniowany jako

$$\begin{aligned} P(X_1 = x_1, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \ldots, X_n = x_n | X_i = x_i) \\ = \frac{P(X_1 = x_1, \ldots, X_i = x_i, \ldots, X_n = x_n)}{P(X_i = x_i)} \end{aligned}$$

Rozkład warunkowy

Rozkładem warunkowym dyskretnego wektora $\boldsymbol{X}$ pod warunkiem $X_i = x_i$ dla $P(X_i = x_i) > 0$ nazywamy rozkład prawdopodobieństwa zdefiniowany jako

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = x_1, \ldots, & X_{i-1} = x_{i-1}, X_{i+1} = x_{i+1}, \ldots, X_n = x_n | X_i = x_i) \\
&= \frac{P(X_1 = x_1, \ldots, X_i = x_i, \ldots, X_n = x_n)}{P(X_i = x_i)}
\end{aligned}
$$

Można też zdefiniować rozkłady warunkowe pod warunkiem wielu zmiennych, np:

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = x_1, X_2 = x_2 | & X_3 = x_3, X_4 = x_4) \\
&= \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4)}{P(X_3 = x_3, X_4 = x_4)}
\end{aligned}
$$

Wielowymiarowe zmienne losowe

W podobny sposób można uogólnić na n zmiennych:

- Wzór na prawdopodobieństwo całkowite, np:

$$P(X_1 \in A) = \sum_{x_2, x_3} P(X_1 \in A | X_2 = x_2, X_3 = x_3) P(X_2 = x_2, X_3 = x_4)$$

- Warunkową wartość oczekiwaną, np:

$$E(X_1 | X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \sum_{x_1} x_1 P(X_1 = x_1 | X_2 = x_2, X_3 = x_3)$$