

Plan wykładu

- Problem programowania liniowego
 - Postać kanoniczna
 - Postać standardowa
- Algorytm sympleks
 - Początkowa baza dopuszczalna
 - Tablica sympleks
 - Warunek optymalności rozwiązania
 - Zmiana bazy
 - Transformacja tablicy
- Metoda sztucznej bazy
- Metoda graficzna

2018-02-26

10

Przykład zastosowania PL

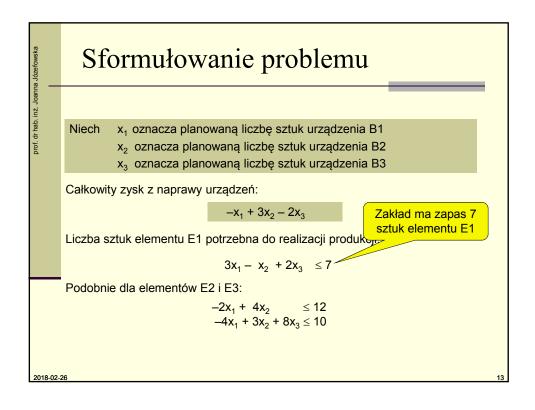
dr hab. inż. Joanna Jd

Mały warsztat naprawia trzy rodzaje urządzeń B1, B2, B3. Każde urządzenie zawiera trzy podstawowe elementy: E_1 , E_2 , E_3 . Naprawa polega na demontażu i/lub montażu elementów E_1 , E_2 , E_3 według określonej technologii. Tabela przedstawia przebieg każdej naprawy, zysk z naprawy urządzenia określonego typu oraz zapas elementów E_1 , E_2 , E_3 w firmie.

2018-02-2

11

| prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska I | Przykład | zasto | sowania | a PL | | • | | | | | | | |
|---|---|----------------------------------|---------|------------------|-----------------|----|--|--|--|--|--|--|--|
| of. dr hab | Element | | | | | | | | | | | | |
| bud | Urządzenie E1 E2 E3 zysk | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | [\$/szt] | | | | | | | | |
| | B1 | 3 | -2 | -4 | -1 | | | | | | | | |
| | B2 | -1 | 4 | 3 | 3 | | | | | | | | |
| | B3 | 2 | 0 | 8 | -2 | | | | | | | | |
| | Zapas [szt.] | 7 | 12 | 10 | | | | | | | | | |
| - | Aby określić optyma budujemy model lin | | | ymalizacji zysku | ı zakres napraw | = | | | | | | | |
| | a a a a jointy in odor in it | budujemy model liniowy problemu. | | | | | | | | | | | |
| 2018-0 | 2-26 | | | | | 12 | | | | | | | |



Zmaksymalizować $-x_1 + 3x_2 - 2x_3$ (1)

Przy ograniczeniach $3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7$ (2)

 $-2x_1 + 4x_2 \leq 12 (3)$

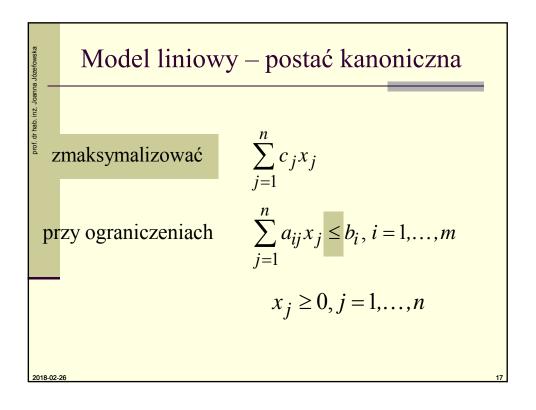
 $-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10 \tag{4}$

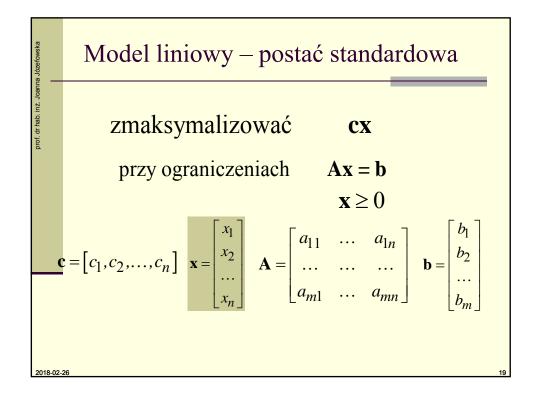
 $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ (5)

2018-02-2

Model liniowy funkcja celu (kryterium) zmaksymalizować $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ przy ograniczeniach $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, i=1,\ldots,m$ ograniczenia $x_j \geq 0, j=1,\ldots,n$

Model liniowy zmienna decyzyjna zmaksymalizować
$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
 (i) przy ograniczenia $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, $i=1,\ldots,m$ (ii) parametry $x_j \ge 0, j=1,\ldots,n$ (iii)





Podstawowe definicje

Rozwiązaniem dopuszczalnym zagadnienia programowania liniowego jest wektor x=(x₁,x₂,...,x_n), spełniający warunki (ii) oraz (iii).

Rozwiązaniem bazowym układu równań (ii) nazywamy rozwiązanie układu powstałego przez przyrównanie do zera n – m zmiennych przy założeniu, że wyznacznik współczynników pozostałych m zmiennych jest niezerowy. Te m zmiennych nazywamy zmiennymi bazowymi.

Niezdegenerowanym rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym nazywamy bazowe rozwiązanie dopuszczalne, w którym wszystkie zmienne bazowe są dodatnie.

Maksymalnym (minimalnym) rozwiązaniem dopuszczalnym jest rozwiązanie dopuszczalne, które maksymalizuje (minimalizuje) funkcję celu (i).

018-02-26

Algorytm sympleks

- sprowadzić problem do postaci standardowej;
- znaleźć dopuszczalne rozwiązanie bazowe;
- zbudować początkową tablicę sympleks;
- 4. wybrać największy element wiersza wskaźnikowego (x_{m+1 k});
- jeżeli jego wartość jest dodatnia, to
 - wyznaczyć element x_{ik} o najmniejszym ilorazie b_{ik}/x_{ik} dla $x_{ik}>0$, $i \in B$;
 - przekształcić tablicę sympleks przyjmując element x_{lk} za element centralny przekształcenia stosując następujące wzory:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} x_{lj}$$
 $x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}$

- sprowadzić problem do postaci standardowej;
- 2. znaleźć dopuszczalne rozwiązanie bazowe;
- zbudować początkową tablicę sympleks;
- 4. wybrać największy element wiersza wskaźnikowego (x_{m+1,k});
- 5. jeżeli jego wartość jest dodatnia, to
 - wyznaczyć element x_{lk} o najmniejszym ilorazie b_{ik}/x_{ik} dla x_{ik}≥0, i∈B;
 - przekształcić tablicę sympleks przyjmując element x_{lk} za element centralny przekształcenia stosując następujące wzory:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} x_{lj}$$
 $x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}$

c. wrócić do kroku 4.

Postać kanoniczna problemu PL

Zmaksymalizować: $-x_1 + 3x_2 - 2x_3$

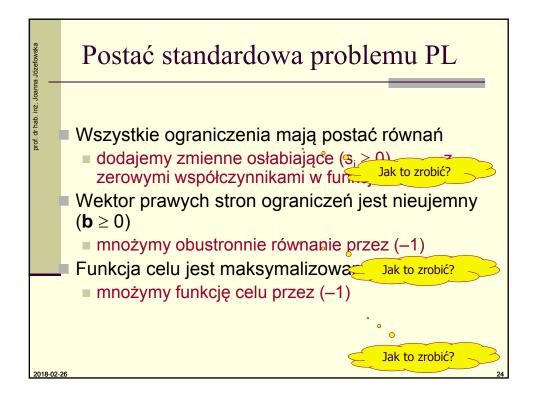
Przy ograniczeniach: $3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7$

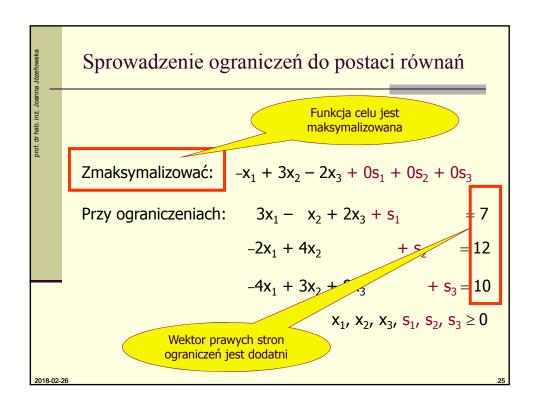
 $-2x_1 + 4x_2 \le 12$

 $-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10$

 $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

018-02-26





Problem w postaci standardowej

rof. dr hab. inż. Joa

Zmaksymalizować: $-x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

Przy ograniczeniach: $3x_1 - x_2 + 2x_3 + s_1 =$

 $-2x_1 + 4x_2 + s_2 = 12$

 $-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + s_3 = 10$

 x_1 , x_2 , x_3 , s_1 , s_2 , $s_3 \ge 0$

2018-02-26

26

Algorytm sympleks

- sprowadzić problem do postaci standardowej;
- znaleźć dopuszczalne rozwiązanie bazowe;
- zbudować początkową tablicę sympleks;
- 4. wybrać największy element wiersza wskaźnikowego (x_{m+1,k});
- 5. jeżeli jego wartość jest dodatnia, to
 - Wyznaczyć element x_{lk} o najmniejszym ilorazie b_{ik}/x_{ik} dla $x_{ik} \ge 0$, $i \in B$;
 - b. Przekształcić tablicę sympleks przyjmując element x_{lk} za element centralny przekształcenia stosując następujące wzory:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} x_{lj}$$
 $x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}$

Dopuszczalne rozwiązanie bazowe

Rozwiązaniem bazowym jest rozwiązanie, które powstaje przez przyrównanie do zera n – m zmiennych i rozwiązanie powstałego układu równań.

Jeżeli w rozwiązaniu baz Uwaga: w postaci standardowej zawsze n>m wszystkich zmiennych są niedjowacje zawsze n>m rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym.

Znalezienie bazy początkowej

Zmaksymalizować:

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

Przy ograniczeniach:
$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + s_1 = 7$$

$$-2x_1 + 4x_2$$

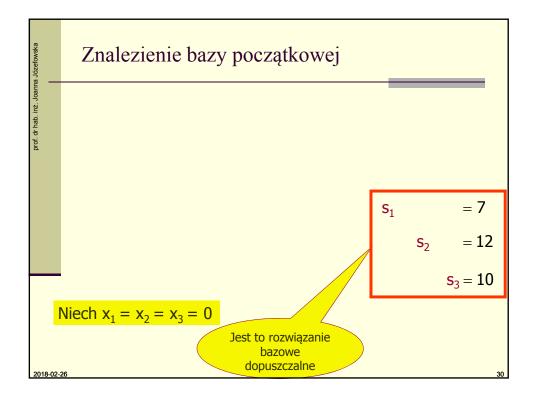
$$-2x_1 + 4x_2 + s_2 = 12$$

$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + s_3 = 10$$

$$+ s_3 = 10$$

Niech
$$x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

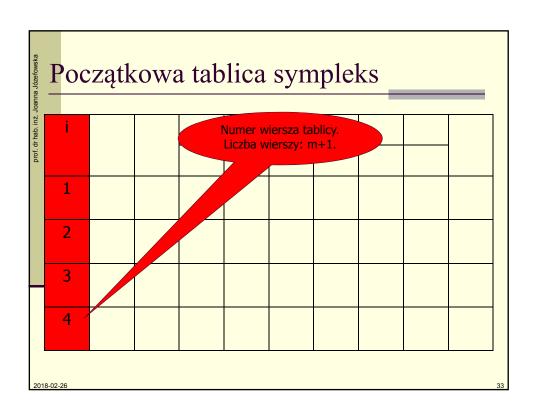
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \ge 0$$

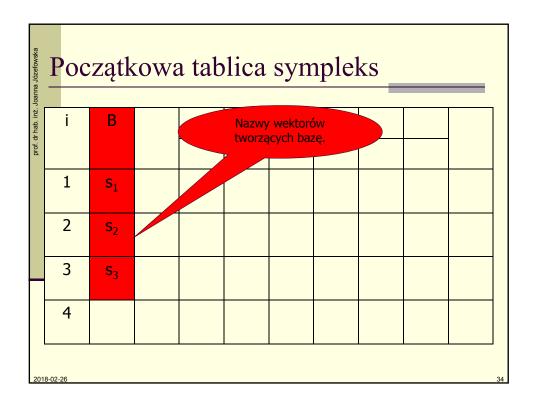


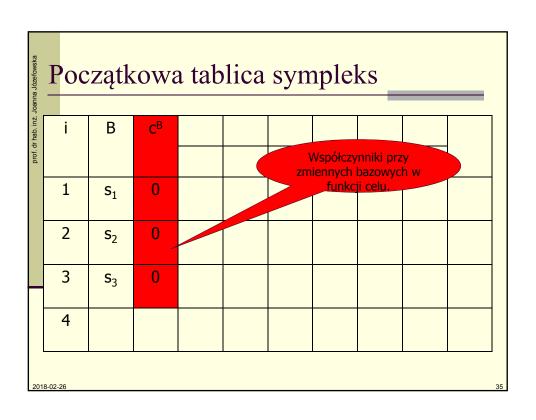
- sprowadzić problem do postaci standardowej;
- znaleźć dopuszczalne rozwiązanie bazowe;
- zbudować początkową tablicę sympleks;
- 4. wybrać największy element wiersza wskaźnikowego $(x_{m+1,k})$;
- jeżeli jego wartość jest dodatnia, to
 - Wyznaczyć element x_{lk} o najmniejszym ilorazie b_{ik}/x_{ik} dla $x_{ik} \ge 0$, $i \in B$;
 - b. Przekształcić tablicę sympleks przyjmując element x_{lk} za element centralny przekształcenia stosując następujące wzory:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} x_{lj}$$
 $x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}$

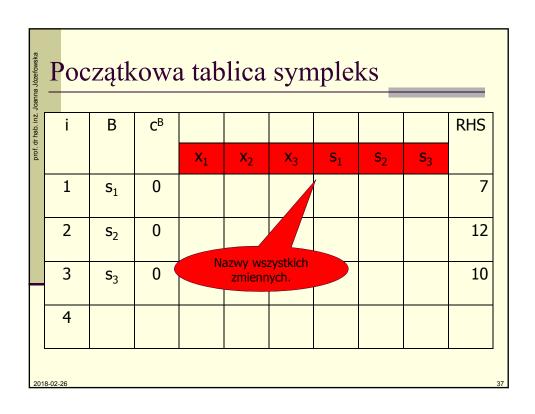
| prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska | Poc | zątk | towa | a tab | lica | syn | nple | KS | _ | |
|--------------------------------------|---------|------|------|-------|------|-----|------|----|---|----|
| prof. dr hab. inż | i | | | | | | | | | |
| | 1 | | | | | | | | | |
| | 2 | | | | | | | | | |
| | 3 | | | | | | | | | |
| | 4 | | | | | | | | | |
| 201 | 8-02-26 | | | | | | | | | 32 |







| Początkowa tablica sympleks | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------------------|----------------|----|--|---------------------------------------|----------|--|--|-----|--|--|--|--|--|
| i | В | CB | | Wartości zn bazowych w rozwiąza | bieżącym | | | RHS | | | | | |
| 1 | s ₁ | 0 | | | | | | 7 | | | | | |
| 2 | S ₂ | 0 | | | | | | 12 | | | | | |
| 3 | s ₃ | 0 | | | | | | 10 | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | |



| anna Józefowska | Początkowa tablica sympleks Współczynniki przy | | | | | | | | | | | | |
|------------------|---|-----------------------|-----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------|----------------|----------------|-----|--|--|--|
| prof. dr hab. in | | | v funkcji | | | -2 | 0 | 0 | 0 | RHS | | | |
| prof. dr | | | | X ₁ | x ₂ | X ₃ | s_1 | s ₂ | S ₃ | | | | |
| | 1 | S ₁ | 0 | | | | | | | 7 | | | |
| | 2 | S ₂ | 0 | | | | | | | 12 | | | |
| | 3 | S ₃ | 0 | | | | | | | 10 | | | |
| | 4 | | | | | | | | | | | | |
| 201 | 8-02-26 | | | | | | | | | 3 | | | |

| anna Jozetowska | | ółczynni | ki przy z | miennycl | _ | syn | nplel | KS = | | _ |
|------------------|---|-----------------------|-----------|-----------------------|----|----------------|----------------|----------------|-----------------------|-----|
| prot. dr hab. in | | w ogra | aniczenia | ich. | -3 | -2 | 0 | 0 | 0 | RHS |
| prot. dr | | | | X ₁ | | X ₃ | S ₁ | s ₂ | S ₃ | |
| | 1 | S ₁ | 0 | 3 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 7 |
| | 2 | S ₂ | 0 | -2 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| | 3 | S ₃ | 0 | -4 | 3 | 8 | 0 | 0 | 1 | 10 |
| | 4 | | | | | | | | | |

| prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska | Poc | zątk | towa | a tab | lica | sy | $x_j =$ | $\sum_{i \in B}$ | $c_i x_i$ | | |
|--------------------------------------|------------|------------------------|--|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------|------------------|-----------------------|-----|----|
| ır hab. inż. | i | В | CB | -1 | 3 | -2 | U | U | U | KHS | |
| prof. d | | | | X ₁ | x ₂ | X ₃ | s_1 | s ₂ | S ₃ | | |
| | 1 | S ₁ | 0 | 3 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 7 | |
| | 2 | S ₂ | 0 | -2 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 | |
| | 3 | S ₃ | 0 | -4 | 3 | 8 | 0 | 0 | 1 | 10 | |
| | 4 | | | | | | | | | | |
| 201 | Wiers W | sz wskaź /artości c | nikowy. c _j - z _j | 7 | | | | | | | 40 |

| prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska | Poc | zątk | towa | ı tab | lica | sy z | $x_j =$ | | $c_i x_i$ | j _— |
|--------------------------------------|-----|-----------------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|----------------|-----------------------|----------------|
| r hab. inż. Jo | i | В | c B | -1 | 3 | -2 | 0 | $i \in B$ | 0 | KHS |
| prof. di | | | | X ₁ | x ₂ | X ₃ | S ₁ | s ₂ | S ₃ | |
| | 1 | S ₁ | 0 | 3 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 7 |
| | 2 | S ₂ | 0 | -2 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| | 3 | S ₃ | 0 | -4 | 3 | 8 | 0 | 0 | 1 | 10 |
| | 4 | | | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | |
| 201 | | sz wskaź artości c | | | | | | | | |

| prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska | Poc | zątk | XOW2 | ı tab | lica | syn | plel | KS | | _ |
|--------------------------------------|-----|-----------------------------------|------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------------|----------------|-----------------------|-----|
| r hab. inż. J | i | В | CB | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | RHS |
| prof. d | | | | X ₁ | X ₂ | X ₃ | $s_{\scriptscriptstyle 1}$ | s ₂ | S ₃ | |
| | 1 | S ₁ | 0 | 3 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 7 |
| | 2 | s ₂ | 0 | -2 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| | 3 | S ₃ | 0 | -4 | 3 | 8 | 0 | 0 | 1 | 10 |
| | 4 | | | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 201 | 1 | cość funk w bieżąc ozwiązar | ym | 7 | | | | | | 4 |

| prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska | Poc | zątk | towa | ı tab | lica | sym | nplel | ζS _ | | _ |
|--------------------------------------|---------|-----------------------|------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|----------------|-----------------------|-----|
| r hab. inż. | i | В | CB | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | RHS |
| prof. d | | | | X ₁ | X ₂ | X ₃ | S ₁ | S ₂ | S ₃ | |
| | 1 | S ₁ | 0 | 3 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 7 |
| | 2 | S ₂ | 0 | -2 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 |
| | 3 | S ₃ | 0 | -4 | 3 | 8 | 0 | 0 | 1 | 10 |
| | 4 | | | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 201 | 8-02-26 | | | | | | | | | |

- sprowadzić problem do postaci standardowej;
- 2. znaleźć dopuszczalne rozwiązanie bazowe;
- zbudować początkową tablicę sympleks;
- 4. wybrać największy element wiersza wskaźnikowego (x_{m+1,k});
- 5. jeżeli jego wartość jest dodatnia, to
 - a. Wyznaczyć element x_{lk} o najmniejszym ilorazie b_{ik}/x_{ik} dla $x_{ik} \ge 0$, $i \in B$;
 - Przekształcić tablicę sympleks przyjmując element x_{lk} za element centralny przekształcenia stosując następujące wzory:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} x_{lj}$$
 $x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}$

| prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska | Początkowa tablica sympleks | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------------------|------------------------------------|-----------------------|---|-----------------------|-------|-----------------------|----------------------------|----------------|-----------------------|----|--|--|--|--|
| Ir hab. inż. , | i B C ^B -1 3 -2 0 0 RHS | | | | | | | | | | | | | |
| prof. c | | | | X ₁ | X_2 | X ₃ | $s_{\scriptscriptstyle 1}$ | s ₂ | S ₃ | | | | | |
| | 1 | S ₁ | 0 | 3 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 7 | | | | |
| | 2 | s ₂ | 0 | -2 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 | | | | |
| | 3 | S ₃ | 0 | -4 | 3 | 8 | 0 | 0 | 1 | 10 | | | | |
| | 4 | | | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | |
| 201 | 8-02-26 | | | | | | | | | | | | | |

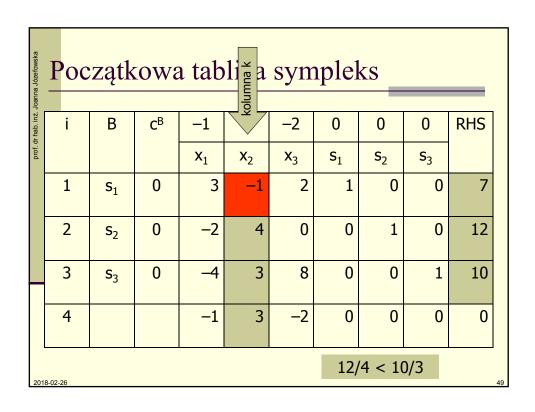
| prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska | Początkowa tablica sympleks | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------------------|-----------------------------|-----------------------|----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|----------------|-----------------------|-----|--|--|--|--|
| ır hab. inż. | i | В | CB | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | RHS | | | | |
| prof. d | | | | X ₁ | x ₂ | X ₃ | S ₁ | S ₂ | S ₃ | | | | | |
| | 1 | S ₁ | 0 | 3 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 7 | | | | |
| | 2 | s ₂ | 0 | -2 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 | | | | |
| | 3 | S ₃ | 0 | -4 | 3 | 8 | 0 | 0 | 1 | 10 | | | | |
| | 4 | | | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | | |
| 201 | 8-02-26 | | 1 | | | | | | | 46 | | | | |

- sprowadzić problem do postaci standardowej;
- znaleźć dopuszczalne rozwiązanie bazowe;
- zbudować początkową tablicę sympleks;
- 4. wybrać największy element wiersza wskaźnikowego (x_{m+1,k});
- 5. jeżeli jego wartość jest dodatnia, to
 - Wyznaczyć element x_{lk} o najmniejszym ilorazie b_{ik}/x_{ik} dla $x_{jk} \ge 0$, $i \in B$;
 - b. Przekształcić tablicę sympleks przyjmując element z za element centralny przekształcenia stosując następuja zory:

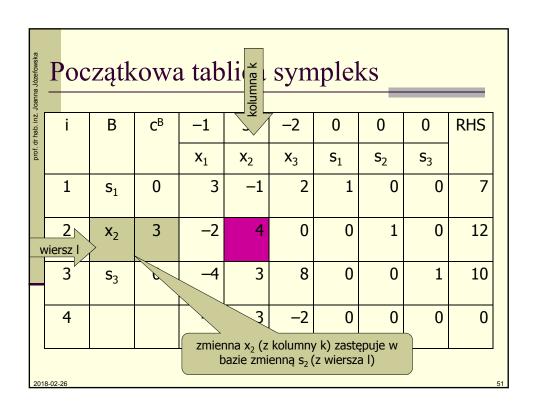
Jeżeli wszystkie x_{ik}≤0, i∈B, to funkcja celu może przyjmować dowolnie duże wartości (rozwiązanie nieograniczone).

$$x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}$$

| prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska | Poc | zątk | towa | a tab | a y a mulo | syn | nplel | KS | | _ | |
|--------------------------------------|---------|-----------------------|------|-------|-----------------------|-----------------------|----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----|----|
| Ir hab. inż. | i | В | CB | -1 | | -2 | 0 | 0 | 0 | RHS | |
| prof. c | | | | X_1 | X ₂ | X ₃ | $s_{\scriptscriptstyle 1}$ | s ₂ | S ₃ | | |
| | 1 | S_1 | 0 | 3 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 7 | |
| | 2 | S ₂ | 0 | -2 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 | |
| | 3 | S ₃ | 0 | -4 | 3 | 8 | 0 | 0 | 1 | 10 | |
| | 4 | | | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 201 | 8-02-26 | | | | | | | | | | 48 |



| prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska | Poc | zątk | towa | a tab | alumna k | syn | nplel | KS | | | | | |
|--------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------|------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|----------------|-----------------------|-----|--|--|--|
| r hab. inż. J | i | В | CB | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | RHS | | | |
| prof. d | | | | X ₁ | X ₂ | X ₃ | S ₁ | S ₂ | S ₃ | | | | |
| | 1 | S ₁ | 0 | 3 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 7 | | | |
| | 2 wiersz l | S ₂ | 0 | -2 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 | | | |
| | 3 | S ₃ | 0 | -4 | 3 | 8 | 0 | 0 | 1 | 10 | | | |
| | 4 | | | -1 | 3 | -2 | | 0 | 0 | 0 | | | |
| 201 | element centralny przekształcenia | | | | | | | | | | | | |

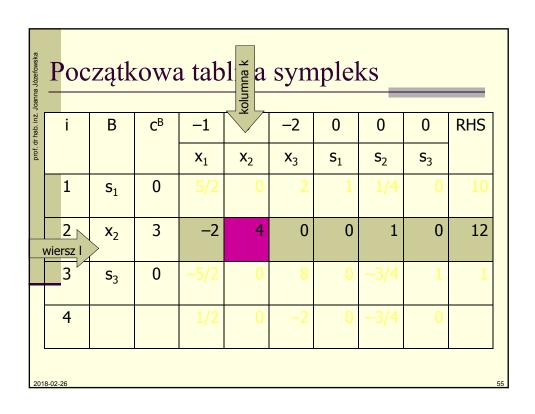


- sprowadzić problem do postaci standardowej;
- 2. znaleźć dopuszczalne rozwiązanie bazowe;
- zbudować początkową tablicę sympleks;
- 4. wybrać największy element wiersza wskaźnikowego (x_{m+1,k});
- 5. jeżeli jego wartość jest dodatnia, to
 - Wyznaczyć element x_{lk} o najmniejszym ilorazie b_{ik}/x_{ik} dla $x_{ik} \ge 0$, $i \in B$;
 - Przekształcić tablicę sympleks przyjmując element x_{lk} za element centralny przekształcenia stosując następujące wzory:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} x_{lj}$$
 $x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}$

| Początkowa t plawa sympleks i B CB - 2 0 0 F X1 X2 X2 S1 S2 S2 | | | | | | | | | | | | | |
|--|---------------|------------------|----|-------|----------------|-----------------------|----------------------------|----------------|-----------------------|-----|--|--|--|
| ır hab. inż. | i | В | CB | | · · | -2 | 0 | 0 | 0 | RHS | | | |
| prof. c | | | | x_1 | \mathbf{x}_2 | X ₃ | $s_{\scriptscriptstyle 1}$ | s ₂ | S ₃ | | | | |
| | 1 wiersz i | s_1 | 0 | 3 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 7 | | | |
| | 2 wiersz I | > x ₂ | 3 | -2 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 | | | |
| | 3 | S ₃ | 0 | -4 | 3 | 8 | 0 | 0 | 1 | 10 | | | |
| | 4 | | | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | 0 | | | |
| 201 | 8-02-26 | | | | | | | | | | | | |

| prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska | Poc | zątk | XOW2 | a t j | a y a mula k | sym | plel | KS | | | |
|--------------------------------------|---------------|-----------------------|------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|----------------|-----------------------|------|---|
| r hab. inż. , | i | В | CB | | ¥ | -2 | 0 | 0 | 0 | RHS | |
| prof. d | | | | X ₁ | x ₂ | X ₃ | S ₁ | S ₂ | S ₃ | | |
| , | 1 wiersz i | S ₁ | 0 | 3 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 | 7 | |
| | wiersz I | X ₂ | 3 | -2 | 4 | 0 | 0 | 1 | 0 | 12 | |
| | 3 | S ₃ | 0 | -4 | 3 | 8 | 0 | 0 | 1 | 10 | |
| | 4 | | | -1 | 3 | | _ | * | | =2,5 | _ |
| 201 | 8-02-26 | | | | | | _ | | | | |



| Początkowa tabl a sympleks i B CB -1 -2 0 0 F x, x | | | | | | | | | | | | |
|--|---------------|------------------|----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|----------------|-----------------------|-----|--|--|
| r hab. inż. | i | В | CB | -1 | | -2 | 0 | 0 | 0 | RHS | | |
| prof. d | | | | X ₁ | X ₂ | X ₃ | S ₁ | s ₂ | S ₃ | | | |
| | 1 | S ₁ | 0 | 5/2 | 0 | 2 | 1 | 1/4 | 0 | 10 | | |
| | 2 wiersz I | > x ₂ | 3 | -1/2 | 1 | 0 | 0 | 1/4 | 0 | 3 | | |
| | 3 | S ₃ | 0 | -5/2 | 0 | 8 | 0 | -3/4 | 1 | 1 | | |
| | 4 | | | 1/2 | 0 | -2 | 0 | -3/4 | 0 | | | |
| 201 | 8-02-26 | | | | | | | | | 5 | | |

- sprowadzić problem do postaci standardowej;
- znaleźć dopuszczalne rozwiązanie bazowe;
- zbudować początkową tablicę sympleks;
- 4. wybrać największy element wiersza wskaźnikowego (x_{m+1,k});
- jeżeli jego wartość jest dodatnia, to
 - Wyznaczyć element x_{ik} o najmniejszym ilorazie b_{ik}/x_{ik} dla $x_{ik} \ge 0$, $i \in B$;
 - Przekształcić tablicę sympleks przyjmując element x_{lk} za element centralny przekształcenia stosując następujące wzory:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} x_{lj}$$
 $x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}$

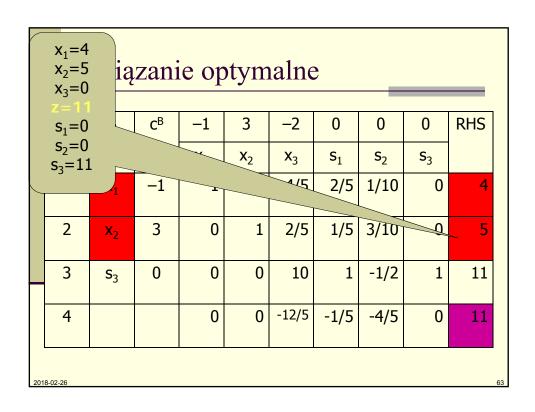
| prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska | Tab | Tablica sympleks | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------------------|---------|-----------------------|----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|----------------|-----------------------|-----|--|--|--|--|--|
| r hab. inż. | i | В | CB | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | RHS | | | | | |
| prof. d | | | | X ₁ | x ₂ | X ₃ | S ₁ | S ₂ | S ₃ | | | | | | |
| | 1 | S ₁ | 0 | 5/2 | 0 | 2 | 1 | 1/4 | 0 | 10 | | | | | |
| | 2 | x ₂ | 3 | -1/2 | 1 | 0 | 0 | 1/4 | 0 | 3 | | | | | |
| | 3 | S ₃ | 0 | -5/2 | 0 | 8 | 0 | -3/4 | 1 | 1 | | | | | |
| | 4 | | | 1/2 | 0 | -2 | 0 | -3/4 | 0 | 9 | | | | | |
| 201 | 8-02-26 | | | | | | | | | 5 | | | | | |

| prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska | Tab | lica | syn | nple | ks | | | _ | | |
|--------------------------------------|---------|-----------------------|-----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|----------------|-----------------------|-----|
| r hab. inż. 、 | i | В | CB | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | RHS |
| prof. d | | | | X ₁ | X ₂ | X ₃ | S ₁ | S ₂ | S ₃ | |
| | 1 | S ₁ | 0 | 5/2 | 0 | 2 | 1 | 1/4 | 0 | 10 |
| | 2 | X ₂ | 3 | -1/2 | 1 | 0 | 0 | 1/4 | 0 | 3 |
| | 3 | S ₃ | 0 | -5/2 | 0 | 8 | 0 | -3/4 | 1 | 1 |
| | 4 | | | 1/2 | 0 | -2 | 0 | -3/4 | 0 | 9 |
| 201 | 8-02-26 | | | | | | | | | 59 |

| prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska | Tablica sympleks | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------------------|------------------|-----------------------|----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|----------------|-----------------------|-----|--|--|--|--|
| r hab. inż. | i | В | CB | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | RHS | | | | |
| prof. d | | | | X ₁ | x ₂ | X ₃ | S ₁ | S ₂ | S ₃ | | | | | |
| | 1 | S ₁ | 0 | 5/2 | 0 | 2 | 1 | 1/4 | 0 | 10 | | | | |
| | 2 | x ₂ | 3 | -1/2 | 1 | 0 | 0 | 1/4 | 0 | 3 | | | | |
| | 3 | S ₃ | 0 | -5/2 | 0 | 8 | 0 | -3/4 | 1 | 1 | | | | |
| | 4 | | | 1/2 | 0 | -2 | 0 | -3/4 | 0 | 9 | | | | |
| 201 | 8-02-26 | | | | | | | | | 60 | | | | |

| prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska | Tab | lica | syn | nple | ks | | | _ | | _ |
|--------------------------------------|---------|-----------------------|-----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------|----------------|-----------------------|-----|
| r hab. inż. 、 | i | В | CB | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | RHS |
| prof. d | | | | X ₁ | X ₂ | X ₃ | S ₁ | S ₂ | S ₃ | |
| | 1 | S ₁ | 0 | 5/2 | 0 | 2 | 1 | 1/4 | 0 | 10 |
| | 2 | X ₂ | 3 | -1/2 | 1 | 0 | 0 | 1/4 | 0 | 3 |
| | 3 | S ₃ | 0 | -5/2 | 0 | 8 | 0 | -3/4 | 1 | 1 |
| | 4 | | | 1/2 | 0 | -2 | 0 | -3/4 | 0 | 9 |
| 201 | 8-02-26 | | | | | | | | | 6 |

| prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska | Koń | Końcowa tablica sympleks | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------------------|---------|--------------------------|----|-------|-----------------------|-----------------------|-------|----------------|-----------------------|-----|--|--|--|--|--|
| Ir hab. inż. | i | В | CB | -1 | 3 | -2 | 0 | 0 | 0 | RHS | | | | | |
| prof. c | | | | X_1 | X ₂ | X ₃ | S_1 | s ₂ | S ₃ | | | | | | |
| | 1 | x ₁ | -1 | 1 | 0 | 4/5 | 2/5 | 1/10 | 0 | 4 | | | | | |
| | 2 | x ₂ | 3 | 0 | 1 | 2/5 | 1/5 | 3/10 | 0 | 5 | | | | | |
| | 3 | S ₃ | 0 | 0 | 0 | 10 | 1 | -1/2 | 1 | 11 | | | | | |
| | 4 | | | 0 | 0 | -12/5 | -1/5 | -4/5 | 0 | 11 | | | | | |
| 201 | 8-02-26 | | | | | | | | | 62 | | | | | |



Interpretacja rozwiązania

Maksymalny zysk to 11\$.

- Należy naprawić 4 szt. urządzenia B1 i 5 szt. urządzenia B2, natomiast nie należy przyjmować zleceń na naprawę urządzenia B3.
- Wartości zmiennych uzupełniających oznaczają zapas części, który pozostanie w magazynie po zakończeniu produkcji.
- Elementy E1 i E2 zostaną zużyte, natomiast pozostanie 11 szt. Elementu E3.

2018-02-26

64

Problem w postaci standardowej

Zmaksymalizować: $-x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

Przy ograniczeniach: $3x_1 - x_2 + 2x_3 + s_1 = 7$

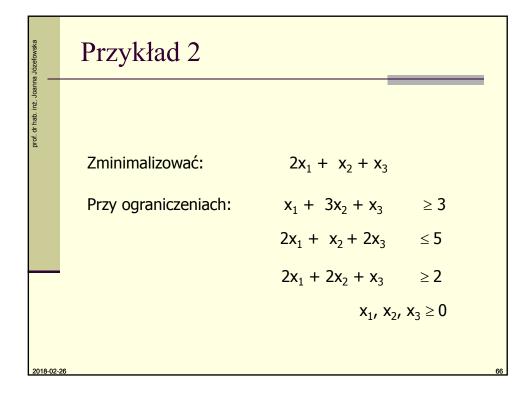
 $-2x_1 + 4x_2 + s_2 = 12$

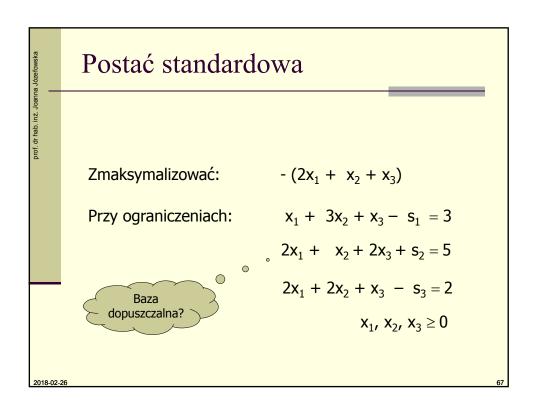
 $-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + s_3 = 10$

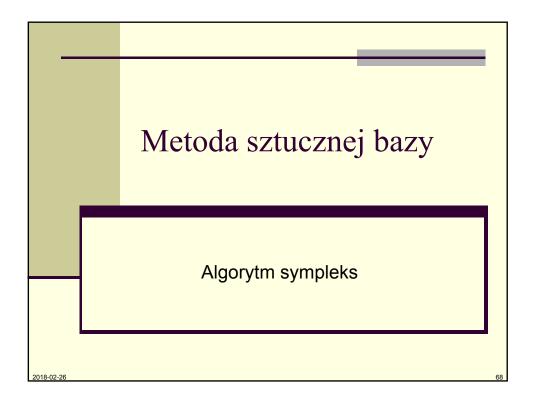
 x_1 , x_2 , x_3 , s_1 , s_2 , $s_3 \ge 0$

2018-02-26

29







Metoda sztucznej bazy

Wprowadzamy $k \le m$ zmiennych sztucznych. Zmienne te są nieujemne, a ich współczynniki w funkcji celu przyjmują wartość (–M), gdzie M jest dużą liczbą dodatnią.

- Tablicę sympleks ze sztucznymi wektorami przekształcamy jak zwykłą tablicę, dopóki:
 - wszystkie sztuczne wektory zostaną wyeliminowane z bazy, tj. mamy bazę dopuszczalną pierwotnego zagadnienia;
 - 2. brak dodatnich współczynników przy M w wierszu wskaźnikowym
 - jeżeli sztuczna część funkcji celu jest dodatnia, to zagadnienie nie ma rozwiązania dopuszczalnego;
 - jeśli sztuczna część funkcji celu jest równa zero, to mamy zdegenerowane rozwiązanie dopuszczalne pierwotnego zagadnienia, które zawiera co najwyżej jeden sztuczny wektor. Przekształcamy tablicę sympleks wprowadzając do bazy wektor, który odpowiada największemu dodatniemu elementowi wiersza wskaźnikowego przy zerowej wartości współczynnika przy M.
- III. Kolumny odpowiadające zmiennym sztucznym, które opuściły bazę można eliminować z obliczeń.
- Po otrzymaniu bazy dopuszczalnej zagadnienia pierwotnego kontynuujemy realizację algorytmu sympleks aż do otrzymania rozwiązania problemu pierwotnego.

Sztuczna baza

Zmaksymalizować: $-(2x_1 + x_2 + x_3) - Ma_1 - Ma_3$

Przy ograniczeniach: $x_1 + 3x_2 + x_3 - s_1 + a_1 = 3$

 $2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 5$

 $2x_1 + 2x_2 + x_3 - s_3 + a_3 = 2$

 $x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, a_1, a_3 \ge 0$

 $x_1 = x_2 = x_3 = s_1 = s_3 = 0$

2018-02-26

Sztuczna baza

Zmaksymalizować: $2x_1 + x_2 + x_3 - Ma_1 - Ma_3$

Przy ograniczeniach: $a_1 = 3$

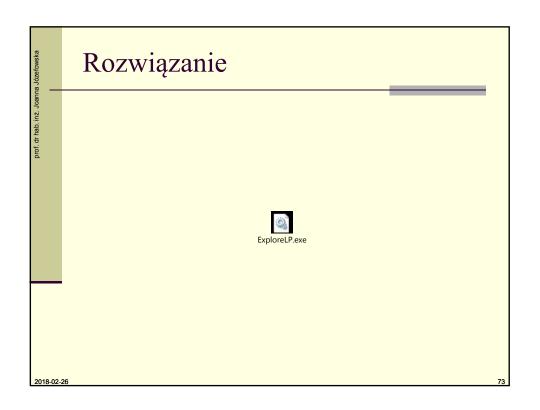
 $s_2 = 5$

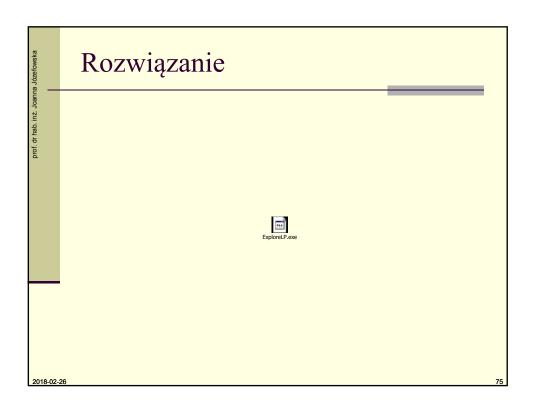
 $a_3 = 2$

 $x_1 = x_2 = x_3 = s_1 = s_3 = 0$

2018-02-26

| prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska | Po |)CZ | ząt | kow | a tab | olica | Sy1 | mpl | eks | | | | |
|--------------------------------------|---------|----------------|-----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------|----------------|-----------------------|-------|-----------------------|-----|----|
| hab. inż. | i | В | CB | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | -M | -M | RHS | |
| prof. dr | | | | X ₁ | X ₂ | X ₃ | s_1 | S ₂ | S ₃ | a_1 | a ₃ | | |
| | 1 | a ₁ | -M | 1 | 3 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 3 | |
| | 2 | S ₂ | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 5 | |
| | 3 | a ₃ | -M | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | 1 | 2 | |
| | 4 | | | 2+3M | 1+5M | 1+2M | -M | 0 | -M | 0 | 0 | -5M | |
| 201 | 8-02-26 | | | | | | | | | | | | 72 |





Podsumowanie Sformułowanie problemu PL w postaci standardowej Algorytm sympleks Metoda sztucznej bazy Metoda graficzna