Metody probabilistyczne

3. Prawdopodobieństwo warunkowe

Wojciech Kotłowski

Instytut Informatyki PP
http://www.cs.put.poznan.pl/wkotlowski/

10.10.2017

Motywacja

Jaś i Małgosia losują po jednej rękawiczce z pary.

- Jaka jest szansa, że Jaś ma lewą rękawiczkę?

Motywacja

Jaś i Małgosia losują po jednej rękawiczce z pary.

- Jaka jest szansa, że Jaś ma lewą rękawiczkę? $\frac{1}{2}$

Motywacja

Jaś i Małgosia losują po jednej rękawiczce z pary.

- Jaka jest szansa, że Jaś ma lewą rękawiczkę? $\frac{1}{2}$
- Jaka jest szansa, że Jaś ma lewą rękawiczkę, jeśli Małgosia wylosowała prawą rękawiczkę?

Motywacja

Jaś i Małgosia losują po jednej rękawiczce z pary.

- Jaka jest szansa, że Jaś ma lewą rękawiczkę? $\frac{1}{2}$
- Jaka jest szansa, że Jaś ma lewą rękawiczkę, jeśli Małgosia wylosowała prawą rękawiczkę? 1

Motywacja

Jaś i Małgosia losują po jednej rękawiczce z pary.

- Jaka jest szansa, że Jaś ma lewą rękawiczkę? $\frac{1}{2}$
- Jaka jest szansa, że Jaś ma lewą rękawiczkę, jeśli Małgosia wylosowała prawą rękawiczkę? 1

Prawdopodobieństwo zmieniło się wskutek uzyskania dodatkowej informacji.

Motywacja

Jaś i Małgosia losują po jednej rękawiczce z pary.

- Jaka jest szansa, że Jaś ma lewą rękawiczkę? $\frac{1}{2}$
- Jaka jest szansa, że Jaś ma lewą rękawiczkę, jeśli Małgosia wylosowała prawą rękawiczkę? 1

Prawdopodobieństwo zmieniło się wskutek uzyskania dodatkowej informacji.

Komplikujemy: Jaś i Małgosia losują po jednej karcie z talii:

- Jaka jest szansa, że Jaś wylosował asa?

Motywacja

Jaś i Małgosia losują po jednej rękawiczce z pary.

- Jaka jest szansa, że Jaś ma lewą rękawiczkę? $\frac{1}{2}$
- Jaka jest szansa, że Jaś ma lewą rękawiczkę, jeśli Małgosia wylosowała prawą rękawiczkę? 1

Prawdopodobieństwo zmieniło się wskutek uzyskania dodatkowej informacji.

Komplikujemy: Jaś i Małgosia losują po jednej karcie z talii:

- Jaka jest szansa, że Jaś wylosował asa? $\frac{4}{52}$

Motywacja

Jaś i Małgosia losują po jednej rękawiczce z pary.

- Jaka jest szansa, że Jaś ma lewą rękawiczkę? $\frac{1}{2}$
- Jaka jest szansa, że Jaś ma lewą rękawiczkę, jeśli Małgosia wylosowała prawą rękawiczkę? 1

Prawdopodobieństwo zmieniło się wskutek uzyskania dodatkowej informacji.

Komplikujemy: Jaś i Małgosia losują po jednej karcie z talii:

- Jaka jest szansa, że Jaś wylosował asa? $\frac{4}{52}$
- Jaka jest szansa, że Jaś wylosował asa, jeśli Małgosia wylosowała asa?

Motywacja

Jaś i Małgosia losują po jednej rękawiczce z pary.

- Jaka jest szansa, że Jaś ma lewą rękawiczkę? $\frac{1}{2}$
- Jaka jest szansa, że Jaś ma lewą rękawiczkę, jeśli Małgosia wylosowała prawą rękawiczkę? 1

Prawdopodobieństwo zmieniło się wskutek uzyskania dodatkowej informacji.

Komplikujemy: Jaś i Małgosia losują po jednej karcie z talii:

- Jaka jest szansa, że Jaś wylosował asa? $\frac{4}{52}$
- Jaka jest szansa, że Jaś wylosował asa, jeśli Małgosia wylosowała asa? $\frac{3}{51}$

Motywacja

Często pytamy się o prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia innego zdarzenia B.

Ta dodatkowa informacja o zajściu B może zmienić szanse zajścia A.

Motywacja

Często pytamy się o prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia innego zdarzenia B.

Ta dodatkowa informacja o zajściu B może zmienić szanse zajścia A.

- Jaka jest szansa wylosowania co najmniej 5 oczek w rzucie kostką (A) jeśli wypadła nieparzysta liczba oczek (B)?
- Wybieramy losowe słowo z angielskiej książki. Jaka jest szansa, że druga litera słowa to „h" (A), jeśli pierwsza to „t" (B)?
- Jaka jest szansa, że losowo wybrany uczeń ma 5 z matematyki (A), jeśli z fizyki otrzymał 2 (B)?

Motywacja

Często pytamy się o prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia innego zdarzenia B.

Ta dodatkowa informacja o zajściu B może zmienić szanse zajścia A.

- Jaka jest szansa wylosowania co najmniej 5 oczek w rzucie kostką (A) jeśli wypadła nieparzysta liczba oczek (B)?
- Wybieramy losowe słowo z angielskiej książki. Jaka jest szansa, że druga litera słowa to „h" (A), jeśli pierwsza to „t" (B)?
- Jaka jest szansa, że losowo wybrany uczeń ma 5 z matematyki (A), jeśli z fizyki otrzymał 2 (B)?

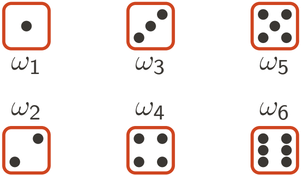
Takie prawdopodobieństwo nazywamy warunkowym i oznaczamy przez:

$$P(A \mid B)$$

(„prawdopodobieństwo A pod warunkiem B").

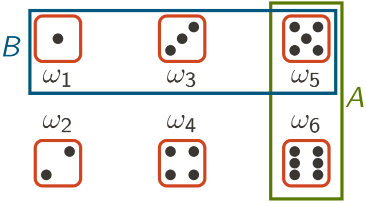
Przykład

Jaka jest szansa wylosowania co najmniej 5 oczek w rzucie kostką (A) jeśli wypadła nieparzysta liczba oczek (B)?



Przykład

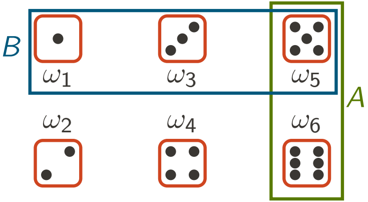
Jaka jest szansa wylosowania co najmniej 5 oczek w rzucie kostką (A) jeśli wypadła nieparzysta liczba oczek (B)?



$$
\begin{aligned}
A &= \{\omega_5, \omega_6\} \\
B &= \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} \\
A \cap B &= \{\omega_5\}
\end{aligned}
$$

Przykład

Jaka jest szansa wylosowania co najmniej 5 oczek w rzucie kostką (A) jeśli wypadła nieparzysta liczba oczek (B)?

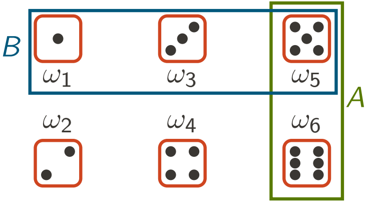


$$
\begin{aligned}
A &= \{\omega_5, \omega_6\} \\
B &= \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} \\
A \cap B &= \{\omega_5\}
\end{aligned}
$$

Jeśli zaszło B, jedyne możliwe zdarzenia elementarne to $\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ (przestrzeń zdarzeń Ω zredukowała się do B)

Przykład

Jaka jest szansa wylosowania co najmniej 5 oczek w rzucie kostką (A) jeśli wypadła nieparzysta liczba oczek (B)?



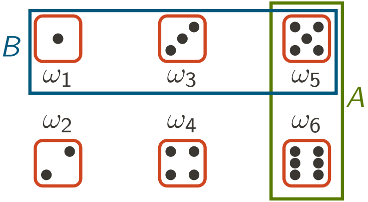
$$A = \{\omega_5, \omega_6\}$$
$$B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$$
$$A \cap B = \{\omega_5\}$$

Jeśli zaszło B, jedyne możliwe zdarzenia elementarne to $\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ (przestrzeń zdarzeń Ω zredukowała się do B)

Wśród tych zdarzeń tylko $A \cap B = \{\omega_5\}$ sprzyja zdarzeniu A

Przykład

Jaka jest szansa wylosowania co najmniej 5 oczek w rzucie kostką (A) jeśli wypadła nieparzysta liczba oczek (B)?



$$
\begin{aligned}
A &= \{\omega_5, \omega_6\} \\
B &= \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} \\
A \cap B &= \{\omega_5\}
\end{aligned}
$$

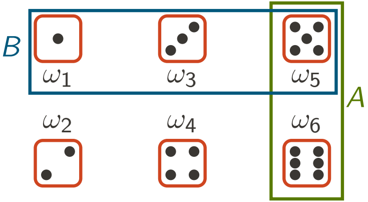
Jeśli zaszło B, jedyne możliwe zdarzenia elementarne to $\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ (przestrzeń zdarzeń Ω zredukowała się do B)

Wśród tych zdarzeń tylko $A \cap B = \{\omega_5\}$ sprzyja zdarzeniu A

$$P(A \mid B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{3}$$

Przykład

Jaka jest szansa wylosowania co najmniej 5 oczek w rzucie kostką (A) jeśli wypadła nieparzysta liczba oczek (B)?



$$A = \{\omega_5, \omega_6\}$$
$$B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$$
$$A \cap B = \{\omega_5\}$$

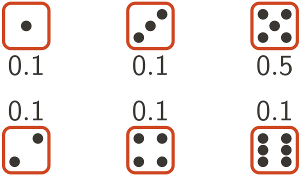
Jeśli zaszło B, jedyne możliwe zdarzenia elementarne to $\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ (przestrzeń zdarzeń Ω zredukowała się do B)

Wśród tych zdarzeń tylko $A \cap B = \{\omega_5\}$ sprzyja zdarzeniu A

$$P(A \,|\, B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{1}{3}$$
$$= \frac{|A \cap B|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

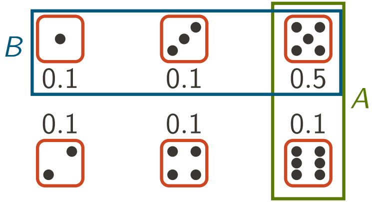
Przykład

Rozważmy to samo zadanie dla nieuczciwej kostki, w której piątka wypada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, a pozostałe liczby z prawd. $\frac{1}{10}$



Przykład

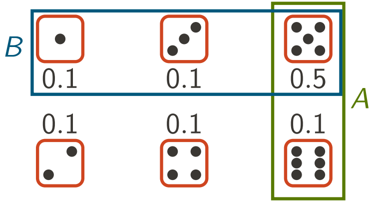
Rozważmy to samo zadanie dla nieuczciwej kostki, w której piątka wypada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, a pozostałe liczby z prawd. $\frac{1}{10}$



$$
\begin{aligned}
A &= \{\omega_5, \omega_6\} & P(A) &= 0.6 \\
B &= \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} & P(B) &= 0.7 \\
A \cap B &= \{\omega_5\} & P(A \cap B) &= 0.5
\end{aligned}
$$

Przykład

Rozważmy to samo zadanie dla nieuczciwej kostki, w której piątka wypada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, a pozostałe liczby z prawd. $\frac{1}{10}$

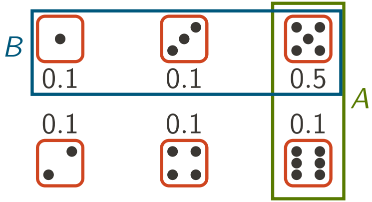


$$
\begin{aligned}
A &= \{\omega_5, \omega_6\} & P(A) &= 0.6 \\
B &= \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} & P(B) &= 0.7 \\
A \cap B &= \{\omega_5\} & P(A \cap B) &= 0.5
\end{aligned}
$$

Jeśli zaszło B, łączne prawdopodobieństwo wszystkich możliwych wyników zmniejszyło się z $P(\Omega) = 1$ do $P(B) = 0.7$

Przykład

Rozważmy to samo zadanie dla nieuczciwej kostki, w której piątka wypada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, a pozostałe liczby z prawd. $\frac{1}{10}$



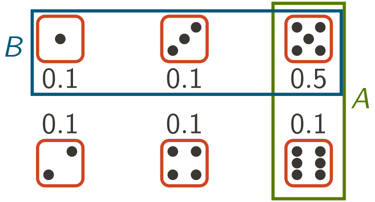
$$\begin{aligned} A &= \{\omega_5, \omega_6\} & P(A) &= 0.6 \\ B &= \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} & P(B) &= 0.7 \\ A \cap B &= \{\omega_5\} & P(A \cap B) &= 0.5 \end{aligned}$$

Jeśli zaszło B, łączne prawdopodobieństwo wszystkich możliwych wyników zmniejszyło się z $P(\Omega) = 1$ do $P(B) = 0.7$

Z tego $P(A \cap B) = 0.5$ prawdopodobieństwa sprzyja zdarzeniu A

Przykład

Rozważmy to samo zadanie dla nieuczciwej kostki, w której piątka wypada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, a pozostałe liczby z prawd. $\frac{1}{10}$



$$
\begin{aligned}
A &= \{\omega_5, \omega_6\} & P(A) &= 0.6 \\
B &= \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} & P(B) &= 0.7 \\
A \cap B &= \{\omega_5\} & P(A \cap B) &= 0.5
\end{aligned}
$$

Jeśli zaszło B, łączne prawdopodobieństwo wszystkich możliwych wyników zmniejszyło się z $P(\Omega) = 1$ do $P(B) = 0.7$

Z tego $P(A \cap B) = 0.5$ prawdopodobieństwa sprzyja zdarzeniu A

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{5}{7}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja

Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B, gdzie $P(B) > 0$, nazywamy liczbę:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja

Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B, gdzie $P(B) > 0$, nazywamy liczbę:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Jeśli $P(B) = 0$, to jak to możliwe, że B w ogóle by zaszło?
- Nie ma jednoznacznej relacji między $P(A)$ a $P(A|B)$ – może się zdarzyć, że:
  - $P(A|B) < P(A)$
  - $P(A|B) = P(A)$
  - $P(A|B) > P(A)$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja

Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B, gdzie $P(B) > 0$, nazywamy liczbę:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Jeśli $P(B) = 0$, to jak to możliwe, że B w ogóle by zaszło?
- Nie ma jednoznacznej relacji między $P(A)$ a $P(A|B)$ – może się zdarzyć, że:
  - $P(A|B) < P(A)$
  - $P(A|B) = P(A)$
  - $P(A|B) > P(A)$

Uwaga: Jeśli $P(A), P(B) > 0$ to przez symetrię:

$$P(A \cap B) \; = \; P(B)P(A \mid B) \; = \; P(A)P(B \mid A)$$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Zadanie 1

Pokaż, że $P(A|B)$ jako funkcja A przy ustalonym B spełnia aksjomaty Kołmogorowa.

Posiada więc wszystkie udowodnione własności prawdopodobieństwa:

$P(A|B) = 1 - P(A'|B)$

$P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1 \cap A_2|B)$

itp.

Przykład

Jaś i Małgosia losują po jednej karcie z talii. Jaka jest szansa, że Jaś wylosował asa, jeśli Małgosia wylosowała asa?

Przykład

Jaś i Małgosia losują po jednej karcie z talii. Jaka jest szansa, że Jaś wylosował asa, jeśli Małgosia wylosowała asa?

Zdarzenie elementarne: para wylosowanych kart (J, M), gdzie
$J, M \in \{2\heartsuit, 2\diamondsuit, 2\clubsuit, 2\spadesuit, \ldots A\heartsuit, A\diamondsuit, A\clubsuit, A\spadesuit\}$

$|\Omega| = 52 \times 51$

Przykład

Jaś i Małgosia losują po jednej karcie z talii. Jaka jest szansa, że Jaś wylosował asa, jeśli Małgosia wylosowała asa?

Zdarzenie elementarne: para wylosowanych kart (J, M), gdzie $J, M \in \{2\heartsuit, 2\diamondsuit, 2\clubsuit, 2\spadesuit, \ldots A\heartsuit, A\diamondsuit, A\clubsuit, A\spadesuit\}$

$|\Omega| = 52 \times 51$

A – „Jaś ma asa”: $A = \{(A\heartsuit, 2\heartsuit), (A\spadesuit, D\clubsuit), (A\clubsuit, 7\diamondsuit), \ldots\}$

B – „Małgosia ma asa”: $B = \{(4\spadesuit, A\heartsuit), (K\clubsuit, A\spadesuit), (A\heartsuit, A\diamondsuit), \ldots\}$

Przykład

Jaś i Małgosia losują po jednej karcie z talii. Jaka jest szansa, że Jaś wylosował asa, jeśli Małgosia wylosowała asa?

Zdarzenie elementarne: para wylosowanych kart (J, M), gdzie $J, M \in \{2\heartsuit, 2\diamondsuit, 2\clubsuit, 2\spadesuit, \ldots A\heartsuit, A\diamondsuit, A\clubsuit, A\spadesuit\}$

$|\Omega| = 52 \times 51$

A – „Jaś ma asa": $A = \{(A\heartsuit, 2\heartsuit), (A\spadesuit, D\clubsuit), (A\clubsuit, 7\diamondsuit), \ldots\}$

B – „Małgosia ma asa": $B = \{(4\spadesuit, A\heartsuit), (K\clubsuit, A\spadesuit), (A\heartsuit, A\diamondsuit), \ldots\}$

Z symetrii $P(A) = P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

Przykład

Jaś i Małgosia losują po jednej karcie z talii. Jaka jest szansa, że Jaś wylosował asa, jeśli Małgosia wylosowała asa?

Zdarzenie elementarne: para wylosowanych kart (J, M), gdzie
$J, M \in \{2\heartsuit, 2\diamondsuit, 2\clubsuit, 2\spadesuit, \ldots A\heartsuit, A\diamondsuit, A\clubsuit, A\spadesuit\}$

$|\Omega| = 52 \times 51$

A – „Jaś ma asa”: $A = \{(A\heartsuit, 2\heartsuit), (A\spadesuit, D\clubsuit), (A\clubsuit, 7\diamondsuit), \ldots\}$

B – „Małgosia ma asa”: $B = \{(4\spadesuit, A\heartsuit), (K\clubsuit, A\spadesuit), (A\heartsuit, A\diamondsuit), \ldots\}$

Z symetrii $P(A) = P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$A \cap B = \{(A\heartsuit, A\spadesuit), (A\clubsuit, A\diamondsuit), (A\spadesuit, A\clubsuit), \ldots\}, \quad |A \cap B| = 4 \times 3 = 12$

Przykład

Jaś i Małgosia losują po jednej karcie z talii. Jaka jest szansa, że Jaś wylosował asa, jeśli Małgosia wylosowała asa?

Zdarzenie elementarne: para wylosowanych kart (J, M), gdzie
$J, M \in \{2\heartsuit, 2\diamondsuit, 2\clubsuit, 2\spadesuit, \ldots A\heartsuit, A\diamondsuit, A\clubsuit, A\spadesuit\}$

$|\Omega| = 52 \times 51$

A – „Jaś ma asa": $A = \{(A\heartsuit, 2\heartsuit), (A\spadesuit, D\clubsuit), (A\clubsuit, 7\diamondsuit), \ldots\}$

B – „Małgosia ma asa": $B = \{(4\spadesuit, A\heartsuit), (K\clubsuit, A\spadesuit), (A\heartsuit, A\diamondsuit), \ldots\}$

Z symetrii $P(A) = P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$A \cap B = \{(A\heartsuit, A\spadesuit), (A\clubsuit, A\diamondsuit), (A\spadesuit, A\clubsuit), \ldots\}, \quad |A \cap B| = 4 \times 3 = 12$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{12}{51 \cdot 52} = \frac{1}{221}$$

Przykład

Jaś i Małgosia losują po jednej karcie z talii. Jaka jest szansa, że Jaś wylosował asa, jeśli Małgosia wylosowała asa?

Zdarzenie elementarne: para wylosowanych kart (J, M), gdzie $J, M \in \{2\heartsuit, 2\diamondsuit, 2\clubsuit, 2\spadesuit, \ldots A\heartsuit, A\diamondsuit, A\clubsuit, A\spadesuit\}$

$|\Omega| = 52 \times 51$

A – „Jaś ma asa": $A = \{(A\heartsuit, 2\heartsuit), (A\spadesuit, D\clubsuit), (A\clubsuit, 7\diamondsuit), \ldots\}$

B – „Małgosia ma asa": $B = \{(4\spadesuit, A\heartsuit), (K\clubsuit, A\spadesuit), (A\heartsuit, A\diamondsuit), \ldots\}$

Z symetrii $P(A) = P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

$A \cap B = \{(A\heartsuit, A\spadesuit), (A\clubsuit, A\diamondsuit), (A\spadesuit, A\clubsuit), \ldots\}, \quad |A \cap B| = 4 \times 3 = 12$

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{12}{51 \cdot 52} = \frac{1}{221}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/221}{1/13} = \frac{1}{17}$$

Przykład

Jaś i Małgosia umówili na randkę. Oboje przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 8:00 a 9:00. Jaka jest szansa, że Małgosia przyjdzie później niż Jaś, jeśli Jaś przyjdzie po 8:30?

Przykład

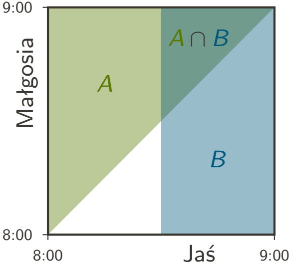
Jaś i Małgosia umówili na randkę. Oboje przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 8:00 a 9:00. Jaka jest szansa, że Małgosia przyjdzie później niż Jaś, jeśli Jaś przyjdzie po 8:30?

A – „Małgosia przyjdzie później niż Jaś"
B – „Jaś przyjdzie po 8:30"

Przykład

Jaś i Małgosia umówili na randkę. Oboje przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 8:00 a 9:00. Jaka jest szansa, że Małgosia przyjdzie później niż Jaś, jeśli Jaś przyjdzie po 8:30?

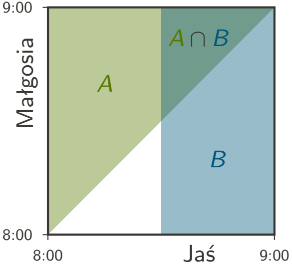
A – „Małgosia przyjdzie później niż Jaś"
B – „Jaś przyjdzie po 8:30"



Przykład

Jaś i Małgosia umówili na randkę. Oboje przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 8:00 a 9:00. Jaka jest szansa, że Małgosia przyjdzie później niż Jaś, jeśli Jaś przyjdzie po 8:30?

A – „Małgosia przyjdzie później niż Jaś"
B – „Jaś przyjdzie po 8:30"

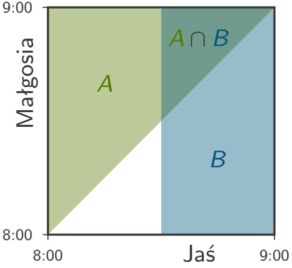


$$|\Omega| = 60 \times 60$$

Przykład

Jaś i Małgosia umówili na randkę. Oboje przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 8:00 a 9:00. Jaka jest szansa, że Małgosia przyjdzie później niż Jaś, jeśli Jaś przyjdzie po 8:30?

A – „Małgosia przyjdzie później niż Jaś”
B – „Jaś przyjdzie po 8:30”



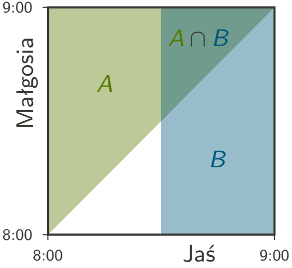
$$|\Omega| = 60 \times 60$$

$$|B| = 30 \times 60 \qquad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$$

Przykład

Jaś i Małgosia umówili na randkę. Oboje przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 8:00 a 9:00. Jaka jest szansa, że Małgosia przyjdzie później niż Jaś, jeśli Jaś przyjdzie po 8:30?

A – „Małgosia przyjdzie później niż Jaś"
B – „Jaś przyjdzie po 8:30"



$$|\Omega| = 60 \times 60$$

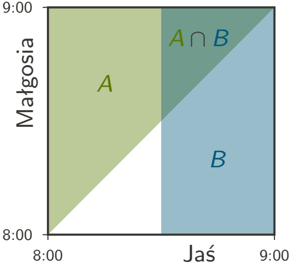
$$|B| = 30 \times 60 \qquad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$$

$$|A \cap B| = \frac{1}{2} \times 30 \times 30 \qquad P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{8}$$

Przykład

Jaś i Małgosia umówili na randkę. Oboje przychodzą na spotkanie w losowym czasie między 8:00 a 9:00. Jaka jest szansa, że Małgosia przyjdzie później niż Jaś, jeśli Jaś przyjdzie po 8:30?

A – „Małgosia przyjdzie później niż Jaś"
B – „Jaś przyjdzie po 8:30"



$$|\Omega| = 60 \times 60$$

$$|B| = 30 \times 60 \qquad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{2}$$

$$|A \cap B| = \frac{1}{2} \times 30 \times 30 \quad P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{1}{8}$$

$$P(A \mid B) = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}$$

Przykład

Rodzina ma dwójkę dzieci. Jaka jest szansa, że ma dwóch chłopców, jeśli wiemy, że przynajmniej jedno z dzieci jest chłopcem?
(na potrzeby zadania przyjmij prawd. urodzenia dziewczynki jako $\frac{1}{2}$)

Przykład

Rodzina ma dwójkę dzieci. Jaka jest szansa, że ma dwóch chłopców, jeśli wiemy, że przynajmniej jedno z dzieci jest chłopcem?
(na potrzeby zadania przyjmij prawd. urodzenia dziewczynki jako $\frac{1}{2}$)

Odpowiedź: No raczej $\frac{1}{2}$, tak??

Przykład

Rodzina ma dwójkę dzieci. Jaka jest szansa, że ma dwóch chłopców, jeśli wiemy, że przynajmniej jedno z dzieci jest chłopcem?
(na potrzeby zadania przyjmij prawd. urodzenia dziewczynki jako $\frac{1}{2}$)

Odpowiedź: No raczej $\frac{1}{2}$, tak??

$\Omega = \{(c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$ (pierwsze z pary to np. starsze dziecko)

Przykład

Rodzina ma dwójkę dzieci. Jaka jest szansa, że ma dwóch chłopców, jeśli wiemy, że przynajmniej jedno z dzieci jest chłopcem?
(na potrzeby zadania przyjmij prawd. urodzenia dziewczynki jako $\frac{1}{2}$)

Odpowiedź: No raczej $\frac{1}{2}$, tak??

$\Omega = \{(c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$ (pierwsze z pary to np. starsze dziecko)
A – „dwóch chłopców”, $\quad A = \{(c, c)\}$

Przykład

Rodzina ma dwójkę dzieci. Jaka jest szansa, że ma dwóch chłopców, jeśli wiemy, że przynajmniej jedno z dzieci jest chłopcem?
(na potrzeby zadania przyjmij prawd. urodzenia dziewczynki jako $\frac{1}{2}$)

Odpowiedź: No raczej $\frac{1}{2}$, tak??

$\Omega = \{(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}$ (pierwsze z pary to np. starsze dziecko)

A – „dwóch chłopców”, $\quad A = \{(c,c)\}$

B – „co najmniej jeden chłopiec”,
$B = \{(c,c),(c,d),(d,c)\}, \quad P(B) = \frac{3}{4}$

Przykład

Rodzina ma dwójkę dzieci. Jaka jest szansa, że ma dwóch chłopców, jeśli wiemy, że przynajmniej jedno z dzieci jest chłopcem?
(na potrzeby zadania przyjmij prawd. urodzenia dziewczynki jako $\frac{1}{2}$)

Odpowiedź: No raczej $\frac{1}{2}$, tak??

$\Omega = \{(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}$ (pierwsze z pary to np. starsze dziecko)

A – „dwóch chłopców", $\quad A = \{(c,c)\}$

B – „co najmniej jeden chłopiec",
$B = \{(c,c),(c,d),(d,c)\}, \quad P(B) = \frac{3}{4}$

$A \cap B = \{(c,c)\}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Przykład

Rodzina ma dwójkę dzieci. Jaka jest szansa, że ma dwóch chłopców, jeśli wiemy, że przynajmniej jedno z dzieci jest chłopcem?
(na potrzeby zadania przyjmij prawd. urodzenia dziewczynki jako $\frac{1}{2}$)

Odpowiedź: No raczej $\frac{1}{2}$, tak??

$\Omega = \{(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}$ (pierwsze z pary to np. starsze dziecko)

A – „dwóch chłopców", $\quad A = \{(c,c)\}$

B – „co najmniej jeden chłopiec",
$B = \{(c,c),(c,d),(d,c)\}, \quad P(B) = \frac{3}{4}$
$A \cap B = \{(c,c)\}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$$P(A \mid B) = \frac{1/4}{1/3} = \frac{1}{3}$$

Przykład

Rodzina ma dwójkę dzieci. Jaka jest szansa, że ma dwóch chłopców, jeśli wiemy, że przynajmniej jedno z dzieci jest chłopcem?
(na potrzeby zadania przyjmij prawd. urodzenia dziewczynki jako $\frac{1}{2}$)

Odpowiedź: No raczej $\frac{1}{2}$, tak?? Raczej nie...

$\Omega = \{(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}$ (pierwsze z pary to np. starsze dziecko)

A – „dwóch chłopców”, $\quad A = \{(c,c)\}$

B – „co najmniej jeden chłopiec”,
$B = \{(c,c),(c,d),(d,c)\}$, $\quad P(B) = \frac{3}{4}$
$A \cap B = \{(c,c)\}$, $\quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$$P(A \mid B) = \frac{1/4}{1/3} = \frac{1}{3}$$

Przykład

Rodzina ma dwójkę dzieci. Jaka jest szansa, że ma dwóch chłopców, jeśli wiemy, że starsze dziecko jest chłopcem?

Przykład

Rodzina ma dwójkę dzieci. Jaka jest szansa, że ma dwóch chłopców, jeśli wiemy, że starsze dziecko jest chłopcem?

Odpowiedź:

Przykład

Rodzina ma dwójkę dzieci. Jaka jest szansa, że ma dwóch chłopców, jeśli wiemy, że starsze dziecko jest chłopcem?

Odpowiedź:

$\Omega = \{(c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$, gdzie pierwsze z pary to starsze dziecko

Przykład

Rodzina ma dwójkę dzieci. Jaka jest szansa, że ma dwóch chłopców, jeśli wiemy, że starsze dziecko jest chłopcem?

Odpowiedź:

$\Omega = \{(c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$, gdzie pierwsze z pary to starsze dziecko

A – „dwóch chłopców", $\quad A = \{(c, c)\}$

Przykład

Rodzina ma dwójkę dzieci. Jaka jest szansa, że ma dwóch chłopców, jeśli wiemy, że starsze dziecko jest chłopcem?

Odpowiedź:

$\Omega = \{(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}$, gdzie pierwsze z pary to starsze dziecko

A – „dwóch chłopców", $\quad A = \{(c,c)\}$

B – „starsze dziecko to chłopiec", $\quad B = \{(c,c),(c,d)\}$, $\quad P(B) = \frac{1}{2}$

Przykład

Rodzina ma dwójkę dzieci. Jaka jest szansa, że ma dwóch chłopców, jeśli wiemy, że starsze dziecko jest chłopcem?

Odpowiedź:

$\Omega = \{(c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$, gdzie pierwsze z pary to starsze dziecko

A – „dwóch chłopców”, $\quad A = \{(c, c)\}$

B – „starsze dziecko to chłopiec”, $\quad B = \{(c, c), (c, d)\}, \quad P(B) = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{(c, c)\}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Przykład

Rodzina ma dwójkę dzieci. Jaka jest szansa, że ma dwóch chłopców, jeśli wiemy, że starsze dziecko jest chłopcem?

Odpowiedź:

$\Omega = \{(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}$, gdzie pierwsze z pary to starsze dziecko

A – „dwóch chłopców", $\quad A = \{(c,c)\}$

B – „starsze dziecko to chłopiec", $\quad B = \{(c,c),(c,d)\}, \quad P(B) = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{(c,c)\}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

$$P(A \mid B) = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

Reguła łańcuchowa

$$P(A_1 \cap A_2) \quad = \quad P(A_1)P(A_2|A_1) \qquad \text{(z definicji)}$$

Reguła łańcuchowa

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)P(A_2|A_1) \qquad \text{(z definicji)} \\ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \end{aligned}$$

Reguła łańcuchowa

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)P(A_2|A_1) \qquad \text{(z definicji)} \\
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \\
&= P(A_1 \cap A_2)P(A_3|A_1 \cap A_2) \quad \text{(z def.)}
\end{aligned}
$$

Reguła łańcuchowa

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)P(A_2|A_1) \qquad \text{(z definicji)} \\
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \\
&= P(A_1 \cap A_2)P(A_3|A_1 \cap A_2) \quad \text{(z def.)} \\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \quad \text{(z def.)}
\end{aligned}
$$

Reguła łańcuchowa

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)P(A_2|A_1) \qquad \text{(z definicji)} \\
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \\
&= P(A_1 \cap A_2)P(A_3|A_1 \cap A_2) \quad \text{(z def.)} \\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \quad \text{(z def.)} \\
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \quad \text{(z def.)}
\end{aligned}
$$

Reguła łańcuchowa

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)P(A_2|A_1) \qquad \text{(z definicji)} \\
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \\
&= P(A_1 \cap A_2)P(A_3|A_1 \cap A_2) \quad \text{(z def.)} \\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \quad \text{(z def.)} \\
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \quad \text{(z def.)} \\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}
$$

Reguła łańcuchowa

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2) &= P(A_1)P(A_2|A_1) \qquad \text{(z definicji)} \\
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P((A_1 \cap A_2) \cap A_3) \\
&= P(A_1 \cap A_2)P(A_3|A_1 \cap A_2) \quad \text{(z def.)} \\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \quad \text{(z def.)} \\
P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \quad \text{(z def.)} \\
&= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Reguła łańcuchowa

Twierdzenie

Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ spełniają warunek:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0,$$

to:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Reguła łańcuchowa

Twierdzenie

Jeśli zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ spełniają warunek:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0,$$

to:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Uwaga: Warunek $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$ implikuje, że:

$$P(A_1) > 0, \quad P(A_1 \cap A_2) > 0, \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) > 0, \ldots$$

a więc wszystkie prawdopodobieństwa warunkowe mają sens.

Przykład

Losujemy trzy karty z talii. Jaka jest szansa, że wszystkie będą asami?

Przykład

Losujemy trzy karty z talii. Jaka jest szansa, że wszystkie będą asami?

Rozwiązanie: Niech A_i oznacza „i-ta karta w ręce to as” $(i = 1, 2, 3)$.
Wtedy $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ oznacza „trzy asy”

Przykład

Losujemy trzy karty z talii. Jaka jest szansa, że wszystkie będą asami?

Rozwiązanie: Niech A_i oznacza „i-ta karta w ręce to as" $(i = 1, 2, 3)$.
Wtedy $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ oznacza „trzy asy"

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \;=\; P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \;=\; \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{2}{50}$$

Układ zupełny zdarzeń

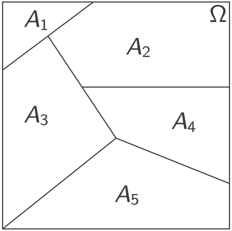
Mówimy, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tworzą układ zupełny zdarzeń, jeśli

1. Są parami rozłączne: $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$
2. Pokrywają cała przestrzeń: $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n = \Omega$

Układ zupełny zdarzeń

Mówimy, że zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tworzą układ zupełny zdarzeń, jeśli

1. Są parami rozłączne: $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$
2. Pokrywają cała przestrzeń: $A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n = \Omega$



Układ zupełny zdarzeń rozbija przestrzeń Ω na n rozłącznych części.

Przykład: Przy rzucie kością zbiory $A_1 = \{\omega_1, \omega_3\}$, $A_2 = \{\omega_2, \omega_5, \omega_6\}$, $A_3 = \{\omega_4\}$ tworzą układ zupełny.

Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Twierdzenie

Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ jest układem zupełnym, to dla dowolnego zdarzenia B:

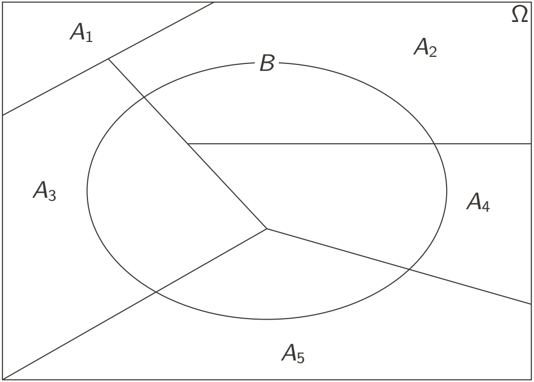
$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i)$$

Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Twierdzenie

Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ jest układem zupełnym, to dla dowolnego zdarzenia B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i)$$

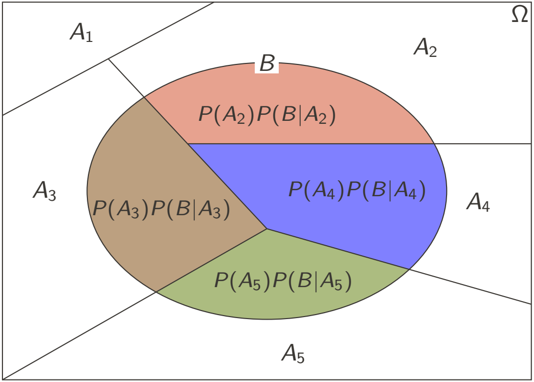


Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Twierdzenie

Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ jest układem zupełnym, to dla dowolnego zdarzenia B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$



Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Twierdzenie

Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ jest układem zupełnym, to dla dowolnego zdarzenia B:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$$

Dowód: Ponieważ

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n),$$

a zdarzenia $B \cap A_i$, $i = 1, \ldots, n$, są parami rozłączne, to

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i),$$

gdzie skorzystaliśmy z definicji $P(B|A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)}$.

Przykład

Studenci są podzieleni na 3 grupy o liczności 20, 25 i 30. W grupie 1 na pytanie potrafi odpowiedzieć 50% studentów, w grupie 2 – 60% a w grupie 3 – 30%. Jaka jest szansa, że losowo wybrany student (spośród wszystkich grup) odpowie na pytanie?

Przykład

Studenci są podzieleni na 3 grupy o liczności 20, 25 i 30. W grupie 1 na pytanie potrafi odpowiedzieć 50% studentów, w grupie 2 – 60% a w grupie 3 – 30%. Jaka jest szansa, że losowo wybrany student (spośród wszystkich grup) odpowie na pytanie?

- Ω jest zbiorem wszystkich studentów ($|\Omega| = 75$)
- Grupy (podzbiory) A_1, A_2, A_3 tworzą układ zupełny
- Zdarzenie B – zbiór studentów, którzy znają odpowiedź na pytanie

Przykład

Studenci są podzieleni na 3 grupy o liczności 20, 25 i 30. W grupie 1 na pytanie potrafi odpowiedzieć 50% studentów, w grupie 2 – 60% a w grupie 3 – 30%. Jaka jest szansa, że losowo wybrany student (spośród wszystkich grup) odpowie na pytanie?

- Ω jest zbiorem wszystkich studentów ($|\Omega| = 75$)
- Grupy (podzbiory) A_1, A_2, A_3 tworzą układ zupełny
- Zdarzenie B – zbiór studentów, którzy znają odpowiedź na pytanie

$$P(B) \quad = \quad P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)$$

Przykład

Studenci są podzieleni na 3 grupy o liczności 20, 25 i 30. W grupie 1 na pytanie potrafi odpowiedzieć 50% studentów, w grupie 2 – 60% a w grupie 3 – 30%. Jaka jest szansa, że losowo wybrany student (spośród wszystkich grup) odpowie na pytanie?

- Ω jest zbiorem wszystkich studentów ($|\Omega| = 75$)
- Grupy (podzbiory) A_1, A_2, A_3 tworzą układ zupełny
- Zdarzenie B – zbiór studentów, którzy znają odpowiedź na pytanie

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\ &= \frac{20}{75} \cdot 0.5 + \frac{25}{75} \cdot 0.6 + \frac{30}{75} \cdot 0.3 \end{aligned}$$

Przykład

Studenci są podzieleni na 3 grupy o liczności 20, 25 i 30. W grupie 1 na pytanie potrafi odpowiedzieć 50% studentów, w grupie 2 – 60% a w grupie 3 – 30%. Jaka jest szansa, że losowo wybrany student (spośród wszystkich grup) odpowie na pytanie?

- Ω jest zbiorem wszystkich studentów ($|\Omega| = 75$)
- Grupy (podzbiory) A_1, A_2, A_3 tworzą układ zupełny
- Zdarzenie B – zbiór studentów, którzy znają odpowiedź na pytanie

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\ &= \frac{20}{75} \cdot 0.5 + \frac{25}{75} \cdot 0.6 + \frac{30}{75} \cdot 0.3 \\ &= \frac{10}{75} + \frac{15}{75} + \frac{9}{75} = \frac{34}{75} \end{aligned}$$

Zadanie

Zadanie 2

Rzucamy kostką, jeśli wypadnie jedno oczko to rzucamy ponownie i dodajemy wyniki. Jaka jest szansa, że (sumarycznie) wyrzucimy wartość powyżej 4?

Wzór Bayesa

Twierdzenie

Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ jest układem zupełnym zdarzeń z $P(A_i) > 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, a B zdarzeniem takim, że $P(B) > 0$ to:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)P(A_j)}$$

Wzór Bayesa

Twierdzenie

Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ jest układem zupełnym zdarzeń z $P(A_i) > 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, a B zdarzeniem takim, że $P(B) > 0$ to:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)P(A_j)}$$

Dowód:

Ponieważ $P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$, mamy $P(A_i \cap B) = P(A_i \mid B)P(B)$.

Wzór Bayesa

Twierdzenie

Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ jest układem zupełnym zdarzeń z $P(A_i) > 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, a B zdarzeniem takim, że $P(B) > 0$ to:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)P(A_j)}$$

Dowód:

Ponieważ $P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$, mamy $P(A_i \cap B) = P(A_i \mid B)P(B)$.

Podobnie z $P(B \mid A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$ wynika $P(A_i \cap B) = P(B \mid A_i)P(A_i)$

Wzór Bayesa

Twierdzenie

Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ jest układem zupełnym zdarzeń z $P(A_i) > 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, a B zdarzeniem takim, że $P(B) > 0$ to:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)P(A_j)}$$

Dowód:

Ponieważ $P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$, mamy $P(A_i \cap B) = P(A_i \mid B)P(B)$.

Podobnie z $P(B \mid A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$ wynika $P(A_i \cap B) = P(B \mid A_i)P(A_i)$

Przyrównując oba wzory stronami dostajemy:

$$P(A_i \mid B)P(B) = P(B \mid A_i)P(A_i) \implies P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

Wzór Bayesa

Twierdzenie

Jeśli $A_1, \ldots, A_n$ jest układem zupełnym zdarzeń z $P(A_i) > 0$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, a B zdarzeniem takim, że $P(B) > 0$ to:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B \mid A_j)P(A_j)}$$

Dowód:

Ponieważ $P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$, mamy $P(A_i \cap B) = P(A_i \mid B)P(B)$.

Podobnie z $P(B \mid A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)}$ wynika $P(A_i \cap B) = P(B \mid A_i)P(A_i)$

Przyrównując oba wzory stronami dostajemy:

$$P(A_i \mid B)P(B) = P(B \mid A_i)P(A_i) \implies P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{P(B)}$$

Druga z równości wynika ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite.

Znaczenie wzoru Bayesa

Wzór Bayesa używa jest często we wnioskowaniu na temat zbioru hipotez $A_1, \ldots, A_n$.

Każda z hipotez ma pewne prawdopodobieństwo a priori $P(A_i)$.

Po przeprowadzeniu doświadczenia, wynikiem którego jest B, wzór Bayesa pozwala obliczyć prawdopodobieństwa a posteriori $P(A_i \mid B)$ każdej z hipotez.

Thomas Bayes
(1702-1761)

Przykład

W pewnym mieście są dwa kierunki studiów informatycznych.
Na popularniejszy kierunek A_1 uczęszcza 75% studentów, na A_2 – pozostałe 25%.
Aplikacje napisane przez studentów z kierunku A_1 zawieszają się w 5% przypadków, a przez studentów z A_2 – w 15%.

Dostaliśmy program, który się zawiesił. Jaka jest szansa, że napisali go studenci z kierunku A_1, a jaka, że z kierunku A_2?

Przykład

W pewnym mieście są dwa kierunki studiów informatycznych.
Na popularniejszy kierunek A_1 uczęszcza 75% studentów, na A_2 – pozostałe 25%.
Aplikacje napisane przez studentów z kierunku A_1 zawieszają się w 5% przypadków, a przez studentów z A_2 – w 15%.
Dostaliśmy program, który się zawiesił. Jaka jest szansa, że napisali go studenci z kierunku A_1, a jaka, że z kierunku A_2?

Odpowiedź:

B – „aplikacja się zawiesiła”, $P(B|A_1) = \frac{1}{20}$, $P(B|A_2) = \frac{3}{20}$

Przykład

W pewnym mieście są dwa kierunki studiów informatycznych.
Na popularniejszy kierunek A_1 uczęszcza 75% studentów, na A_2 – pozostałe 25%.
Aplikacje napisane przez studentów z kierunku A_1 zawieszają się w 5% przypadków, a przez studentów z A_2 – w 15%.
Dostaliśmy program, który się zawiesił. Jaka jest szansa, że napisali go studenci z kierunku A_1, a jaka, że z kierunku A_2?

Odpowiedź:

B – „aplikacja się zawiesiła", $P(B|A_1) = \frac{1}{20}$, $P(B|A_2) = \frac{3}{20}$
Prawdopodobieństwa a priori: $P(A_1) = \frac{3}{4}$, $P(A_2) = \frac{1}{4}$.

Przykład

W pewnym mieście są dwa kierunki studiów informatycznych.
Na popularniejszy kierunek A_1 uczęszcza 75% studentów, na A_2 – pozostałe 25%.
Aplikacje napisane przez studentów z kierunku A_1 zawieszają się w 5% przypadków, a przez studentów z A_2 – w 15%.
Dostaliśmy program, który się zawiesił. Jaka jest szansa, że napisali go studenci z kierunku A_1, a jaka, że z kierunku A_2?

Odpowiedź:

B – „aplikacja się zawiesiła”, $P(B|A_1) = \frac{1}{20}$, $P(B|A_2) = \frac{3}{20}$
Prawdopodobieństwa a priori: $P(A_1) = \frac{3}{4}$, $P(A_2) = \frac{1}{4}$.
Prawdopodobieństwa a posteriori: $P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)}$

$$P(A_1|B) = \frac{\frac{1}{20} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{20} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}, \qquad P(A_2|B) = 1 - P(A_1|B) = \frac{1}{2}$$

Szansa A_2 wzrosła z 25% do 50% – dlaczego?

Przykład

Test na rzadką chorobę, na którą zapadają dwie osoby na tysiąc, jest w 100% skuteczny, jeśli osoba jest chora. Jednak jeśli osoba jest zdrowa, test daje odpowiedź fałszywie pozytywną w 5% przypadków. Jaka jest szansa, że osoba jest chora, jeśli wynik testu jest pozytywny?

Przykład

Test na rzadką chorobę, na którą zapadają dwie osoby na tysiąc, jest w 100% skuteczny, jeśli osoba jest chora. Jednak jeśli osoba jest zdrowa, test daje odpowiedź fałszywie pozytywną w 5% przypadków. Jaka jest szansa, że osoba jest chora, jeśli wynik testu jest pozytywny?

Zdarzenia: C – „chory”, Z – „zdrowy”, W_+ – „wynik testu pozytywny”, W_- – „wynik testu negatywny”

Przykład

Test na rzadką chorobę, na którą zapadają dwie osoby na tysiąc, jest w 100% skuteczny, jeśli osoba jest chora. Jednak jeśli osoba jest zdrowa, test daje odpowiedź fałszywie pozytywną w 5% przypadków. Jaka jest szansa, że osoba jest chora, jeśli wynik testu jest pozytywny?

Zdarzenia: C – „chory”, Z – „zdrowy”, W_+ – „wynik testu pozytywny”, W_- – „wynik testu negatywny”

$$P(C) = 0.002, \quad P(Z) = 0.998, \quad P(W_+|C) = 1, \quad P(W_+|Z) = 0.05.$$

Przykład

Test na rzadką chorobę, na którą zapadają dwie osoby na tysiąc, jest w 100% skuteczny, jeśli osoba jest chora. Jednak jeśli osoba jest zdrowa, test daje odpowiedź fałszywie pozytywną w 5% przypadków. Jaka jest szansa, że osoba jest chora, jeśli wynik testu jest pozytywny?

Zdarzenia: C – „chory", Z – „zdrowy", W_+ – „wynik testu pozytywny", W_- – „wynik testu negatywny"

$$P(C) = 0.002, \quad P(Z) = 0.998, \quad P(W_+|C) = 1, \quad P(W_+|Z) = 0.05.$$

C i Z tworzą układ zupełny. Z twierdzenia Bayesa:

$$P(C|W_+) = \frac{P(W_+|C)P(C)}{P(W_+|C)P(C) + P(W_+|Z)P(Z)}$$

Przykład

Test na rzadką chorobę, na którą zapadają dwie osoby na tysiąc, jest w 100% skuteczny, jeśli osoba jest chora. Jednak jeśli osoba jest zdrowa, test daje odpowiedź fałszywie pozytywną w 5% przypadków. Jaka jest szansa, że osoba jest chora, jeśli wynik testu jest pozytywny?

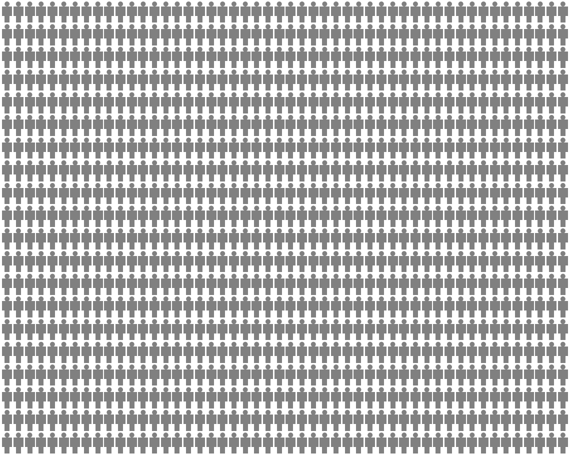
Zdarzenia: C – „chory”, Z – „zdrowy”, W_+ – „wynik testu pozytywny”, W_- – „wynik testu negatywny”

$$P(C) = 0.002, \quad P(Z) = 0.998, \quad P(W_+|C) = 1, \quad P(W_+|Z) = 0.05.$$

C i Z tworzą układ zupełny. Z twierdzenia Bayesa:

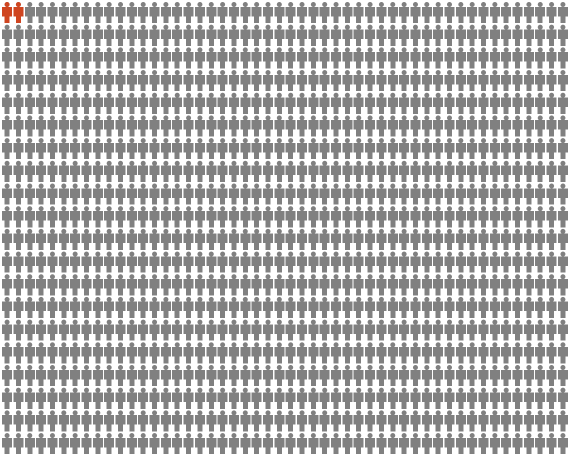
$$\begin{aligned} P(C|W_+) &= \frac{P(W_+|C)P(C)}{P(W_+|C)P(C) + P(W_+|Z)P(Z)} \\ &= \frac{1 \cdot 0.002}{1 \cdot 0.002 + 0.05 \cdot 0.998} \simeq 0.0385 \end{aligned}$$

Intuicyjne uzasadnienie wyniku



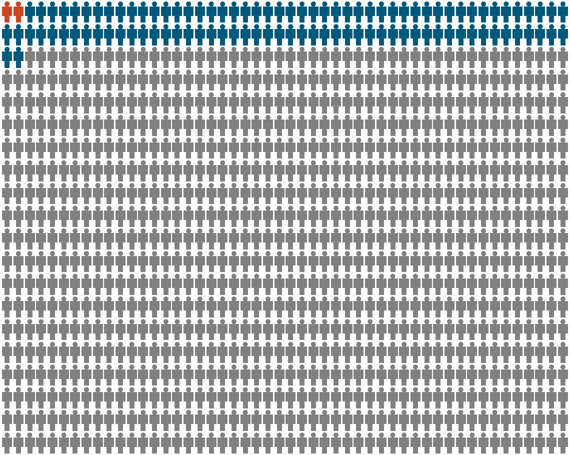
Weźmy 1000 osób.   .

Intuicyjne uzasadnienie wyniku



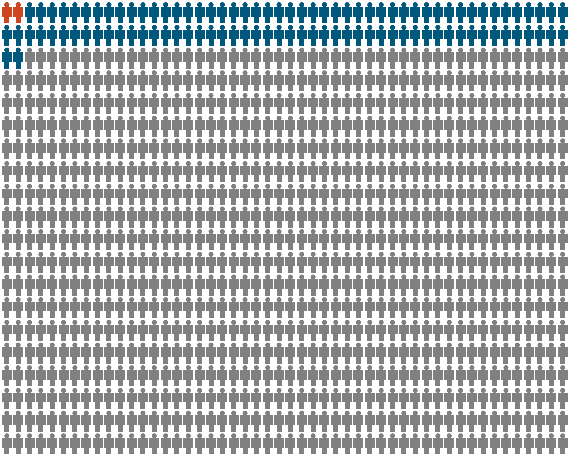
Weźmy 1000 osób. Spośród nich, dwie osoby są chore.

Intuicyjne uzasadnienie wyniku



Weźmy 1000 osób. Spośród nich, dwie osoby są chore. Test dał wynik pozytywny dwóm chorym, ale również 50 zdrowym (5%).

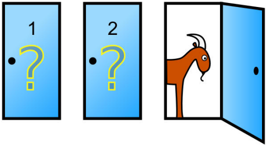
Intuicyjne uzasadnienie wyniku



Weźmy 1000 osób. Spośród nich, dwie osoby są chore. Test dał wynik pozytywny dwóm chorym, ale również 50 zdrowym (5%). Czyli tylko dwie z 52 osób z wynikiem pozytywnym są chore.

Przykład (paradoks Monty'ego Halla)

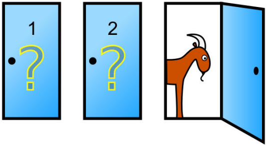
Za 3 zasłoniętymi bramkami stoją 2 kozy i samochód. Gracz wybiera jedną z bramek. Prowadzący odsłania inną bramkę (z kozą) i proponuje graczowi zmianę wyboru. Czy decyzja gracza zmienia szanse wygranej?



źródło wszystkich rysunków: wikipedia

Przykład (paradoks Monty'ego Halla)

Za 3 zasłoniętymi bramkami stoją 2 kozy i samochód. Gracz wybiera jedną z bramek. Prowadzący odsłania inną bramkę (z kozą) i proponuje graczowi zmianę wyboru. Czy decyzja gracza zmienia szanse wygranej?



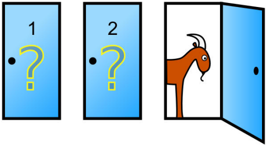
źródło wszystkich rysunków: wikipedia

Wstępna odpowiedź:

Skoro zostały dwie zasłonięte bramki, to prawdopodobieństwo wygranej wynosi $\frac{1}{2}$ i nie ma znaczenia, czy gracz zmieni decyzję, czy nie...

Przykład (paradoks Monty'ego Halla)

Za 3 zasłoniętymi bramkami stoją 2 kozy i samochód. Gracz wybiera jedną z bramek. Prowadzący odsłania inną bramkę (z kozą) i proponuje graczowi zmianę wyboru. Czy decyzja gracza zmienia szanse wygranej?

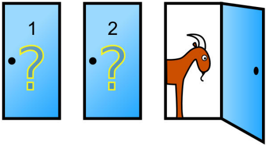


źródło wszystkich rysunków: wikipedia

Przypadek 1: Gracz nie zmienia decyzji.

Przykład (paradoks Monty'ego Halla)

Za 3 zasłoniętymi bramkami stoją 2 kozy i samochód. Gracz wybiera jedną z bramek. Prowadzący odsłania inną bramkę (z kozą) i proponuje graczowi zmianę wyboru. Czy decyzja gracza zmienia szanse wygranej?

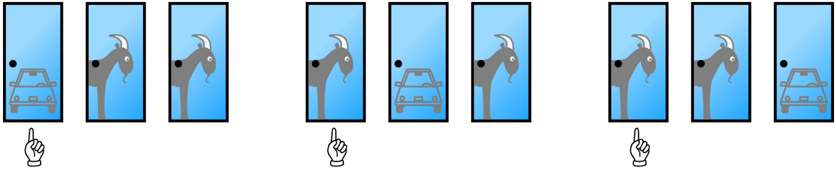


źródło wszystkich rysunków: wikipedia

Przypadek 1: Gracz nie zmienia decyzji.

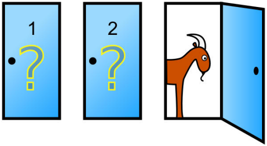
Załóżmy (bez straty ogólności), że gracz wybrał bramkę nr 1.

Zdarzenie S_i – „samochód w bramce i” ($i = 1, 2, 3$), $P(S_i) = \frac{1}{3}$.



Przykład (paradoks Monty'ego Halla)

Za 3 zasłoniętymi bramkami stoją 2 kozy i samochód. Gracz wybiera jedną z bramek. Prowadzący odsłania inną bramkę (z kozą) i proponuje graczowi zmianę wyboru. Czy decyzja gracza zmienia szanse wygranej?

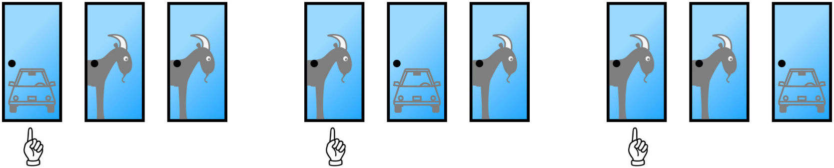


źródło wszystkich rysunków: wikipedia

Przypadek 1: Gracz nie zmienia decyzji.

Załóżmy (bez straty ogólności), że gracz wybrał bramkę nr 1.

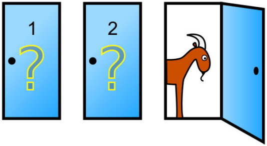
Zdarzenie S_i – „samochód w bramce i" ($i = 1, 2, 3$), $P(S_i) = \frac{1}{3}$.



Gracz wygrywa gdy zajdzie zdarzenie S_1, czyli prawdopodobieństwo wygranej wynosi $\frac{1}{3}$.

Przykład (paradoks Monty'ego Halla)

Za 3 zasłoniętymi bramkami stoją 2 kozy i samochód. Gracz wybiera jedną z bramek. Prowadzący odsłania inną bramkę (z kozą) i proponuje graczowi zmianę wyboru. Czy decyzja gracza zmienia szanse wygranej?

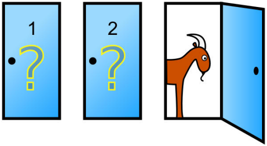


źródło wszystkich rysunków: wikipedia

Przypadek 2: Gracz zmienia decyzję.

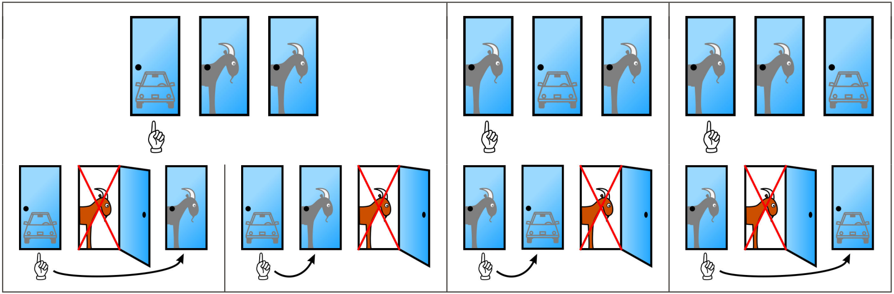
Przykład (paradoks Monty'ego Halla)

Za 3 zasłoniętymi bramkami stoją 2 kozy i samochód. Gracz wybiera jedną z bramek. Prowadzący odsłania inną bramkę (z kozą) i proponuje graczowi zmianę wyboru. Czy decyzja gracza zmienia szanse wygranej?



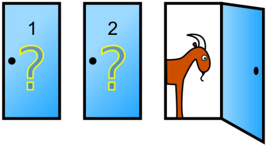
źródło wszystkich rysunków: wikipedia

Przypadek 2: Gracz zmienia decyzję.



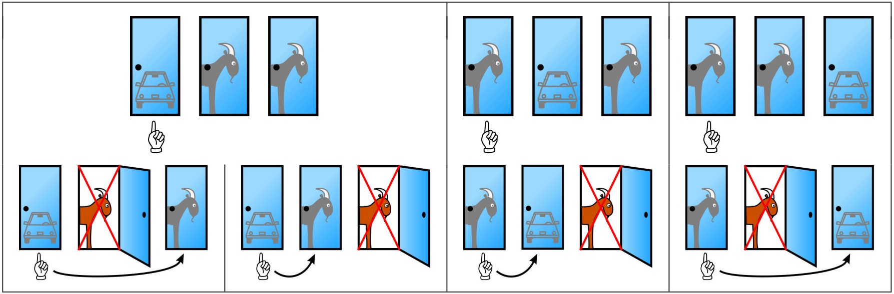
Przykład (paradoks Monty'ego Halla)

Za 3 zasłoniętymi bramkami stoją 2 kozy i samochód. Gracz wybiera jedną z bramek. Prowadzący odsłania inną bramkę (z kozą) i proponuje graczowi zmianę wyboru. Czy decyzja gracza zmienia szanse wygranej?



źródło wszystkich rysunków: wikipedia

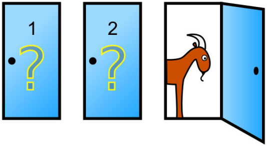
Przypadek 2: Gracz zmienia decyzję.



Gracz wygrywa gdy zajdą zdarzenia S_2 lub S_3 i przegrywa gdy zajdzie zdarzenie S_1 więc prawdopodobieństwo wygranej wynosi $P(S_2 \cup S_3) = \frac{2}{3}$.

Przykład (paradoks Monty'ego Halla)

Za 3 zasłoniętymi bramkami stoją 2 kozy i samochód. Gracz wybiera jedną z bramek. Prowadzący odsłania inną bramkę (z kozą) i proponuje graczowi zmianę wyboru. Czy decyzja gracza zmienia szanse wygranej?

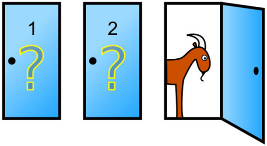


źródło wszystkich rysunków: wikipedia

Dlaczego początkowe rozumowanie zawiodło?
Załóżmy, że gracz wskazuje bramkę 1, a prowadzący otwiera bramkę 3 (zdarzenie O_3). Jakie jest prawd., że samochód jest w bramce 1?

Przykład (paradoks Monty'ego Halla)

Za 3 zasłoniętymi bramkami stoją 2 kozy i samochód. Gracz wybiera jedną z bramek. Prowadzący odsłania inną bramkę (z kozą) i proponuje graczowi zmianę wyboru. Czy decyzja gracza zmienia szanse wygranej?



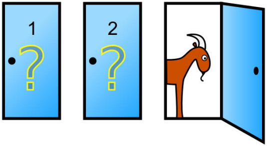
źródło wszystkich rysunków: wikipedia

Dlaczego początkowe rozumowanie zawiodło?
Załóżmy, że gracz wskazuje bramkę 1, a prowadzący otwiera bramkę 3 (zdarzenie O_3). Jakie jest prawd., że samochód jest w bramce 1?

$$P(S_1|O_3) = \frac{P(O_3|S_1)P(S_1)}{P(O_3|S_1)P(S_1) + P(O_3|S_2)P(S_2) + P(O_3|S_3)P(S_3)}$$

Przykład (paradoks Monty'ego Halla)

Za 3 zasłoniętymi bramkami stoją 2 kozy i samochód. Gracz wybiera jedną z bramek. Prowadzący odsłania inną bramkę (z kozą) i proponuje graczowi zmianę wyboru. Czy decyzja gracza zmienia szanse wygranej?



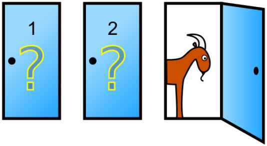
źródło wszystkich rysunków: wikipedia

Dlaczego początkowe rozumowanie zawiodło?
Załóżmy, że gracz wskazuje bramkę 1, a prowadzący otwiera bramkę 3 (zdarzenie O_3). Jakie jest prawd., że samochód jest w bramce 1?

$$P(S_1|O_3) = \frac{P(O_3|S_1)P(S_1)}{\underbrace{P(O_3|S_1)}_{=\frac{1}{2}} P(S_1) + \underbrace{P(O_3|S_2)}_{=1} P(S_2) + \underbrace{P(O_3|S_3)}_{=0} P(S_3)}$$

Przykład (paradoks Monty'ego Halla)

Za 3 zasłoniętymi bramkami stoją 2 kozy i samochód. Gracz wybiera jedną z bramek. Prowadzący odsłania inną bramkę (z kozą) i proponuje graczowi zmianę wyboru. Czy decyzja gracza zmienia szanse wygranej?



źródło wszystkich rysunków: wikipedia

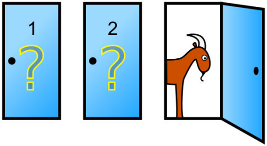
Dlaczego początkowe rozumowanie zawiodło?
Załóżmy, że gracz wskazuje bramkę 1, a prowadzący otwiera bramkę 3 (zdarzenie O_3). Jakie jest prawd., że samochód jest w bramce 1?

$$P(S_1|O_3) = \frac{P(O_3|S_1)P(S_1)}{\underbrace{P(O_3|S_1)}_{=\frac{1}{2}}P(S_1) + \underbrace{P(O_3|S_2)}_{=1}P(S_2) + \underbrace{P(O_3|S_3)}_{=0}P(S_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

Przykład (paradoks Monty'ego Halla)

Za 3 zasłoniętymi bramkami stoją 2 kozy i samochód. Gracz wybiera jedną z bramek. Prowadzący odsłania inną bramkę (z kozą) i proponuje graczowi zmianę wyboru. Czy decyzja gracza zmienia szanse wygranej?



źródło wszystkich rysunków: wikipedia

Dlaczego początkowe rozumowanie zawiodło?

Załóżmy, że gracz wskazuje bramkę 1, a prowadzący otwiera bramkę 3 (zdarzenie O_3). Jakie jest prawd., że samochód jest w bramce 1?

$$P(S_1|O_3) = \frac{P(O_3|S_1)P(S_1)}{\underbrace{P(O_3|S_1)}_{=\frac{1}{2}} P(S_1) + \underbrace{P(O_3|S_2)}_{=1} P(S_2) + \underbrace{P(O_3|S_3)}_{=0} P(S_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

Podobnie, $P(S_2|O_3) = \frac{2}{3}$, czyli opłaca się zmienić bramkę.

Przykład

Trzej więźniowie – Arnold, Bernard i Cezary – czekają na ścięcie przez kata. Król postanowił ułaskawić jednego z nich (wybranego losowo). Arnold przekupił strażnika, aby ten wyjawił mu kto zostanie ścięty (choć o losie Arnolda nie powie nic). Strażnik powiedział, że Bernard. Jaka jest szansa, że Arnold również zostanie ścięty?

Przykład

Trzej więźniowie – Arnold, Bernard i Cezary – czekają na ścięcie przez kata. Król postanowił ułaskawić jednego z nich (wybranego losowo). Arnold przekupił strażnika, aby ten wyjawił mu kto zostanie ścięty (choć o losie Arnolda nie powie nic). Strażnik powiedział, że Bernard. Jaka jest szansa, że Arnold również zostanie ścięty?

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$, bo albo Arnold, albo Cezary zostanie ułaskawiony??

Przykład

Trzej więźniowie – Arnold, Bernard i Cezary – czekają na ścięcie przez kata. Król postanowił ułaskawić jednego z nich (wybranego losowo). Arnold przekupił strażnika, aby ten wyjawił mu kto zostanie ścięty (choć o losie Arnolda nie powie nic). Strażnik powiedział, że Bernard. Jaka jest szansa, że Arnold również zostanie ścięty?

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$, bo albo Arnold, albo Cezary zostanie ułaskawiony??

Nie, szansa wynosi $\frac{1}{3}$! Jest to dokładnie paradoks Monty'ego Halla.

Przykład

Trzej więźniowie – Arnold, Bernard i Cezary – czekają na ścięcie przez kata. Król postanowił ułaskawić jednego z nich (wybranego losowo). Arnold przekupił strażnika, aby ten wyjawił mu kto zostanie ścięty (choć o losie Arnolda nie powie nic). Strażnik powiedział, że Bernard. Jaka jest szansa, że Arnold również zostanie ścięty?

Odpowiedź: $\frac{1}{2}$, bo albo Arnold, albo Cezary zostanie ułaskawiony??

Nie, szansa wynosi $\frac{1}{3}$! Jest to dokładnie paradoks Monty'ego Halla.

- Więźniowie = bramki, samochód = ułaskawienie
- Arnold = wybór pierwszej bramki
- Odpowiedź strażnika = podpowiedź prowadzącego
- Szansa ścięcia Arnolda = szansa przy braku zmiany decyzji