Metody probabilistyczne
Rozwiązania zadań

6. Momenty zmiennych losowych

14.11.2017

Zadanie 1*. *Pokaż, że jeśli X ma rozkład $NB(r,p)$ to $EX = \frac{rp}{1-p}$*

Odpowiedź: Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ ma rozkład ujemny dwumianowy $NB(r,p)$ jeśli:

$$P(X = k) \;=\; \binom{r+k-1}{r-1}(1-p)^r p^k.$$

Liczymy wartość oczekiwaną:

$$EX \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} kP(X = k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k\binom{r+k-1}{r-1}(1-p)^r p^k, \tag{1}$$

gdzie opuściliśmy składnik sumy dla $k = 0$ (równy zero). Zauważmy, że:

$$\begin{aligned} k\binom{r+k-1}{r-1} \;&=\; k\frac{(r+k-1)!}{(r-1)!(r+k-1-(r-1))!} \;=\; k\frac{(r+k-1)!}{(r-1)!k!} \\ &=\; \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!(k-1)!} \;=\; r\frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} \\ &=\; r\frac{(r+k-1)!}{r!(r+k-1-r)!} \;=\; r\binom{r+k-1}{r}. \end{aligned}$$

Wracając do (1), mamy:

$$\begin{aligned} P(X = k) \;&=\; \sum_{k=1}^{\infty} r\binom{r+k-1}{r}(1-p)^r p^k \\ &=\; r\frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{r+k-1}{r}(1-p)^{r+1}p^{k-1} \\ &=\; r\frac{p}{1-p}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k}{r}(1-p)^{r+1}p^{k}, \end{aligned} \tag{2}$$

gdzie ostatnia równość wynika ze zmiany indeksu sumowania z k na $k-1$. Czym jest suma otrzymana w ostatnim wyrażeniu? Aby odpowiedzieć na to pytanie zauważmy, że Y ma rozkład $NB(r+1,p)$ jeśli:

$$P(Y = k) \;=\; \binom{(r+1)+k-1}{(r+1)-1}(1-p)^{r+1}p^k \;=\; \binom{r+k}{r}(1-p)^{r+1}p^k.$$

A więc ostatnia suma w (2) jest po prostu równa:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(Y = k) \;=\; 1$$

Czyli $EX = \frac{rp}{1-p}$, co należało dowieść.

Zadanie 2. *Pokaż, że jeśli X ma rozkład* Pois(λ) *to* $EX = \lambda$

Odpowiedź: Zmienna $X \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ma rozkład Poissona Pois(λ), jeśli:

$$P(X = k) \;=\; \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Liczymy wartość oczekiwaną:

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=0}^{\infty} k P(X = k) \overset{(a)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} \\ &\overset{(b)}{=} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)}_{=1} = \lambda, \end{aligned}$$

gdzie w (a) opuściliśmy składnik sumy dla $k = 0$ (równy zero), w (b) zmieniliśmy indeks sumowania z k na $k - 1$, a ostatnia suma wynosi 1, ponieważ jest to suma prawdopodobieństw wszystkich możliwych wyników zmiennej losowej X.

Zadanie 3*. *Pokaż, że dla rozkładu geometrycznego:*

$$P(X = k) \;=\; (1-p)^{k-1} p, \qquad k = 1, 2, \dots$$

wariancja wynosi $D^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Odpowiedź: Jeden sposób został pokazany na wykładzie. Tutaj rozważymy inny sposób, w którym bezpośrednio będziemy próbowali policzyć nieskończone sumy wykorzystując wiedzę z matematyki dyskretnej. Wiemy, że wartość oczekiwana w rozkładzie geometrycznym wynosi $EX = \frac{1}{p}$. Wykorzystując wzór skróconego mnożenia dla wariancji:

$$D^2(X) \;=\; E\big(X^2\big) - \big(EX\big)^2 \;=\; E\big(X^2\big) - \frac{1}{p^2}, \tag{3}$$

Musimy tylko policzyć $E\big(X^2\big)$:

$$E\big(X^2\big) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(X = k) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (1-p)^{k-1} p$$

Rozważmy funkcję $g(p)$ określoną wyrażeniem:

$$g(p) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k+1} \tag{4}$$

Możemy wyznaczyć wartość $g(p)$ jako sumę nieskończonego szeregu geometrycznego $a + ar + ar^2 + \dots$ o wyrazie początkowym $a = (1-p)^2$ i ilorazie $r = (1-p)$:

$$g(p) \;=\; \frac{a}{1-r} \;=\; \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)} = \frac{(1-p)^2}{p} \tag{5}$$

Policzmy pierwszą i drugą pochodną $g(p)$. Możemy wykorzystać wyrażenie (4):

$$\begin{aligned} g'(p) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k+1} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \big((1-p)^{k+1}\big)' = -\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(1-p)^k \\ g''(p) &= \left(-\sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(1-p)^k \right)' = -\sum_{k=1}^{\infty} (k+1) \big((1-p)^k\big)' = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)k(1-p)^{k-1} \end{aligned}$$

Teraz zauważmy, że:

$$pg''(p) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)k(1-p)^{k-1}p \;=\; \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}k^2(1-p)^{k-1}p}_{=E\left(X^2\right)} \;+\; \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p,}_{=EX}$$

a więc:

$$pg''(p) \;=\; E\big(X^2\big) + \frac{1}{p} \qquad \Longrightarrow \qquad E\big(X^2\big) \;=\; pg''(p) - \frac{1}{p}.$$

Z drugiej strony, korzystając z wyrażenia (5), mamy:

$$\begin{aligned} g'(p) \;&=\; \left(\frac{(1-p)^2}{p}\right)' \;=\; \left(\frac{1-2p+p^2}{p}\right)' \;=\; \left(\frac{1}{p}\right)' - (2)' + (p)' \;=\; -\frac{1}{p^2} + 1 \\ g''(p) \;&=\; \left(-\frac{1}{p^2} + 1\right)' \;=\; \frac{2}{p^3} \end{aligned}$$

Tym samym:

$$E\big(X^2\big) \;=\; pg''(p) - \frac{1}{p} \;=\; \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p},$$

a więc z (3):

$$D^2(X) \;=\; E\big(X^2\big) - \frac{1}{p^2} \;=\; \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \;=\; \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} \;=\; \frac{1-p}{p^2}$$

Zadanie 4*. *Pokaż, że dla rozkładu dwumianowego:*

$$P(X=k) \;=\; \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

wariancja wynosi $D^2(X) = np(1-p)$

Odpowiedź: Wiemy, że wartość oczekiwana w rozkładzie dwumianowym wynosi $EX = np$. Wykorzystując wzór skróconego mnożenia dla wariancji:

$$D^2(X) \;=\; E\big(X^2\big) - \big(EX\big)^2 \;=\; E\big(X^2\big) - n^2p^2, \tag{6}$$

musimy tylko policzyć $E\bigl(X^2\bigr)$:

$$\begin{aligned}
E\bigl(X^2\bigr) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \bigl(\underbrace{k(k-1)+k}_{=k^2}\bigr) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \;+\; \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{=EX=np} \\
&= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \;+\; np \\
&= \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \;+\; np \\
&= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \underbrace{\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}}_{=\binom{n-2}{k-2}} p^k (1-p)^{n-k} \;+\; np \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-k} \;+\; np \\
&= n(n-1)p^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k}}_{=1} \;+\; np \\
&= n(n-1)p^2 + np \;=\; n^2p^2 - np^2 + np,
\end{aligned}$$

gdzie ostatnia z sum równa jest jeden, ponieważ jest to suma prawdopodobieństw wszystkich możliwych wyników zmiennej o rozkładzie dwumianowym $B(n-2,p)$. Używając (6) otrzymujemy:

$$D^2(X) \;=\; E\bigl(X^2\bigr) - n^2p^2 \;=\; n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \;=\; np - np^2 \;=\; np(1-p).$$