Metody probabilistyczne
Rozwiązania zadań

8. Wielowymiarowe zmienne losowe II

28.11.2017

Zadanie 1. *Pokaż, że dla dowolnych zmiennych losowych:*

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_n.$$

Możesz wykorzystać udowodniony na wykładzie fakt, że zachodzi to dla $n = 2$ zmiennych losowych.

Odpowiedź: Udowodnimy to przez indukcję po n, zaczynając od $n = 2$. Przypadek bazowy dla $n = 2$ został pokazany na wykładzie. Weźmy teraz dowolne n i załóżmy (krok indukcyjny), że twierdzenie zachodzi dla $n - 1$, tzn. że dla dowolnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ zachodzi:

$$E(X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1}) = EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_{n-1}.$$

Pokażemy, że zachodzi to również dla dowolnych n zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$. W tym celu definiujemy zmienną $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1}$. Mamy:

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) &= E(Y + X_n) \\ &\overset{(*)}{=} EY + EX_n \\ &= E(X_1 + \ldots + X_{n-1}) + EX_n \\ &\overset{(\dagger)}{=} EX_1 + \ldots + EX_{n-1} + EX_n, \end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n = 2$, a w $(\dagger)$ użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n - 1$ zmiennych losowych. To kończy dowód.

Zadanie 2. *Udowodnij nierówność Cauchy'ego-Schwarza: dla dowolnych zmiennych losowych X i Y zachodzi:*

$$\big(E(XY)\big)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2),$$

Przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy X i Y są swoimi wielokrotnościami, tzn. $X = cY$ lub $Y = cX$ dla $c \in \mathbb{R}$.

Odpowiedź: Dowód przeprowadzimy osobno w dwóch przypadkach: (1) kiedy $E(Y^2) = 0$; (2) kiedy $E(Y^2) > 0$.

1. Zauważmy, że jeśli $E(Y^2) = 0$, to znaczy, że

   $$0 \;=\; E(Y^2) \;=\; \sum_y y^2 P(Y = y).$$

   Ponieważ wszystkie elementy sumy po prawej stronie są nieujemne, równość ta będzie spełniona tylko wtedy, gdy $y^2 = 0$ dla wszystkich y (takich, że $P(Y = y) > 0$). Oznacza to, że zmienna Y jest stałą równą zero[1] Tym samym $XY = 0$ oraz $Y^2 = 0$, a więc: $E(XY) = 0$ i $E(Y^2) = 0$, więc nierówność Cauchy'ego-Schwarza jest spełniona jako równość. Ponieważ możemy zapisać wtedy $Y = 0 \cdot X$, jest to przypadek kiedy Y jest (trywialną) wielokrotnością X.

[1] Ściślej: Y jest równe zero *z prawdopodobieństwem 1*, tzn. $P(Y = 0) = 1$. Y może przyjąć inną wartość niż zero, ale musi to mieć wtedy prawdopodobieństwo równe zero. Tę subtelność matematyczną pomijamy

2. Załóżmy teraz, że $E(Y^2) > 0$. Rozważmy zmienną losową $Z = X - \lambda Y$ dla pewnego $\lambda \neq 0$, które ustalimy później. Mamy oczywiście $E(Z^2) \geqslant 0$, ponieważ Z^2 przyjmuje tylko wartości nieujemne. Tym samym:
$$0 \ \leqslant \ E(Z^2) \ = \ E(X^2) - 2\lambda E(XY) + \lambda^2 E(Y^2) \tag{1}$$
Przyjmijmy teraz $\lambda = \frac{E(XY)}{E(Y^2)}$. Prawa strona nierówności (1) przyjmie wtedy postać:
$$\begin{aligned} E(X^2) - 2\frac{E(XY)}{E(Y^2)}E(XY) + \frac{\big(E(XY)\big)^2}{\big(E(Y^2)\big)^2}E(Y^2) \ &= \ E(X^2) - 2\frac{\big(E(XY)\big)^2}{E(Y^2)} + \frac{\big(E(XY)\big)^2}{E(Y^2)} \\ &= \ E(X^2) - \frac{\big(E(XY)\big)^2}{E(Y^2)}. \end{aligned}$$
Z (1) wynika więc, że:
$$E(X^2) - \frac{\big(E(XY)\big)^2}{E(Y^2)} \ \geqslant \ 0,$$
lub przemnażając obie strony przez $E(Y^2)$:
$$E(X^2)E(Y^2) - \big(E(XY)\big)^2 \ \geqslant \ 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \big(E(XY)\big)^2 \leqslant E(X^2)E(Y^2).$$
To dowodzi nierówności Cauchy'ego-Schwarza. Na koniec zauważamy, że jedyna nierówność, jaką tutaj zastosowaliśmy to $E(Z^2) \geqslant 0$. Nierówność ta spełniona jest jako równość $E(Z^2) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $P(Z = 0) = 1$, tzn. Z jest stałą równą zero. Ale ponieważ $Z = X - \lambda Y$, zachodzi to wtedy i tylko wtedy gdy $X = \lambda Y$, tzn. X i Y są swoimi wielokrotnościami.

Zadanie 3. *Pokaż, że ta nierówność Cauchy'ego-Schwarza implikuje następującą nierówność:*
$$\big|C(X,Y)\big| \leqslant D(X)D(Y)$$
przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy jedna ze zmiennych jest funkcją liniową drugiej, np. $Y = aX + b$.

Odpowiedź: Rozważmy zmienne losowe:
$$Y' = Y - EY, \qquad X' = X - EX.$$
Mamy wtedy:
$$\begin{aligned} C(X,Y) \ &= \ E\big((X-EX)(Y-EY)\big) \ = \ E(X'Y'), \\ D^2(X) \ &= \ E\big((X-EX)^2\big) \ = \ E\big(X'^2\big), \\ D^2(Y) \ &= \ E\big((Y-EY)^2\big) \ = \ E\big(Y'^2\big). \end{aligned}$$
Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza wynika, że:
$$\big(E(X'Y')\big)^2 \leqslant E\big(X'^2\big)E\big(Y'^2\big),$$
co oznacza, że:
$$C(X,Y)^2 \leqslant D^2(X)D^2(Y).$$
Po wyciągnięciu pierwiastka z obu stron dostajemy nierówność, którą chcieliśmy udowodnić. Na koniec zauważmy, że nierówność jest spełniona jako równość wtedy i tylko wtedy gdy nierówność Cauchy'ego-Schwarza jest spełniona jako równość, tzn. X' jest wielokrotnością Y' lub odwrotnie, np. $Y' = aX'$. Ale:
$$Y' = aX' \quad \Longleftrightarrow \quad Y - EY = a(X - EX) \quad \Longleftrightarrow \quad Y = aX - aEX + EY.$$
Ale to oznacza, że Y jest *dowolną* funkcją liniową X, tzn. $Y = aX + b$. Dlaczego? Ponieważ gdy przyłożymy wartość oczekiwaną do obu stron, dostaniemy $EY = aEX + b$, z czego wyjdzie nam, że $b = EY - aEX$, a tym samym $Y = aX - aEX + EY$.

Zadanie 4. *Udowodnij, że jeśli zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne to zachodzi:*

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) \;=\; (EX_1) \cdot (EX_2) \cdot \ldots \cdot (EX_n).$$

Możesz wykorzystać udowodniony na wykładzie fakt, że zachodzi to dla $n = 2$ zmiennych losowych.

Odpowiedź: Udowodnimy to przez indukcję po n, zaczynając od $n = 2$. Przypadek bazowy dla $n = 2$ został pokazany na wykładzie. Weźmy teraz dowolne n i załóżmy (krok indukcyjny), że twierdzenie zachodzi dla $n-1$, tzn. że dla dowolnych niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ zachodzi:

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{n-1}) = (EX_1) \cdot (EX_2) \cdot \ldots \cdot (EX_{n-1}).$$

Pokażemy, że zachodzi to również dla dowolnych n niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$. W tym celu definiujemy zmienną $Y = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{n-1}$. Mamy:

$$\begin{aligned}
E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) &\;=\; E(Y \cdot X_n) \\
&\overset{(*)}{=} (EY) \cdot (EX_n) \\
&\;=\; E(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_{n-1})(EX_n) \\
&\overset{(\dagger)}{=} (EX_1) \cdot (EX_2) \cdot \ldots \cdot (EX_n),
\end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n = 2$, a zmienne Y i X_n są niezależne (ponieważ Y jest funkcją $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$, które wszystkie są niezależne od X_n), natomiast w $(\dagger)$ użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n-1$ zmiennych losowych. To kończy dowód.

Zadanie 5. *Udowodnij, że jeśli zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne to zachodzi:*

$$D^2(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \ldots + D^2(X_n).$$

Możesz wykorzystać udowodniony na wykładzie fakt, że zachodzi to dla $n = 2$ zmiennych losowych.

Odpowiedź: Udowodnimy to przez indukcję po n, zaczynając od $n = 2$. Przypadek bazowy dla $n = 2$ został pokazany na wykładzie. Weźmy teraz dowolne n i załóżmy (krok indukcyjny), że twierdzenie zachodzi dla $n-1$, tzn. że dla dowolnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ zachodzi:

$$D^2(X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1}) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \ldots + D^2(X_{n-1}).$$

Pokażemy, że zachodzi to również dla dowolnych n zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$. W tym celu definiujemy zmienną $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_{n-1}$. Mamy:

$$\begin{aligned}
D^2(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) &\;=\; D^2(Y + X_n) \\
&\overset{(*)}{=} D^2(Y) + D^2(X_n) \\
&\;=\; D^2(X_1 + \ldots + X_{n-1}) + EX_n \\
&\overset{(\dagger)}{=} D^2(X_1) + D^2(X_2) + \ldots + D^2(X_{n-1}),
\end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n = 2$, a zmienne Y i X_n są niezależne (ponieważ Y jest funkcją $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$, które wszystkie są niezależne od X_n), natomiast w $(\dagger)$ użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n-1$ zmiennych losowych. To kończy dowód.

Zadanie 6. *Pokaż, że jeśli X i Y są niezależne, to:*

$$D^2(aX + bY) \;=\; a^2 D^2(X) + b^2 D^2(Y)$$

Odpowiedź: Bierzemy zmienne losowe $U = aX$ i $V = bY$. Ponieważ X i Y są niezależne, to niezależne są również U i V. Wykorzystując w $(*)$ poniżej twierdzenie o sumie zmiennych losowych:

$$D^2(aX + bY) \;=\; D^2(U + V) \;\overset{(*)}{=}\; D^2(U) + D^2(V) \;=\; D^2(aX) + D^2(bY) \;=\; a^2 D^2(X) + b^2 D^2(Y),$$

gdzie w ostatniej równości wykorzystaliśmy znane prawo skalowania wariancji (patrz wykład).

Zadanie 7. *Pokaż, że jeśli* X *i* Y *są niezależne i* X *ma rozkład* $\mathrm{Pois}(\lambda_1)$, *a* Y *ma rozkład* $\mathrm{Pois}(\lambda_2)$, *to* $Z = X + Y$ *ma rozkład* $\mathrm{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Odpowiedź:

$$\begin{aligned}
P(Z = n) &= \sum_{k,\ell:\ k+\ell=n} P(X = k)P(Y = \ell) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P(Y = n - k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} \\
&= \frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n,
\end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość wynika z następującego faktu: dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$