

Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki

Praca zbiorowa
pod redakcją
Krzysztofa Łapsy

Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej



Poznań 2008

Recenzent
dr MARIA KOTŁOWSKA

Projekt okładki
KRZYSZTOF ŁAPSA

Redaktor
RENATA LUBAWY

Skład tekstu i łamanie
STANISŁAW SZUBA

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopujących, nagrywających i innych bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

ISBN 978-83-7143-367-2

© Copyright by Politechnika Poznańska, Poznań 2008

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ
60-965 Poznań, pl. M. Skłodowskiej-Curie 2
tel. (061) 6653516, faks (061) 6653583
e-mail: office_ed@put.poznan.pl, www.ed.put.poznan.pl

Wydanie I

Sprzedaż publikacji:

Poznańska Księgarnia Akademicka
61-138 Poznań, ul. Piotrowo 3
tel. (061) 6652324; faks (061) 6652326
e-mail: politechnik@politechnik.poznan.pl, www.politechnik.poznan.pl

Druk i oprawa: Zakład Poligraficzny A. Frąckowiak
e-mail: afdruk@icpnet.pl, tel. (061) 8783302



Spis treści

PRZEDMOWA	5
MECHANIKĘ	7
1. Badanie właściwości żyroskopu (<i>Wojciech Koczarowski</i>)	7
2. Wyznaczanie prędkości pocisku za pomocą wahadła balistycznego skrętnego (<i>Piotr Ziobrowski</i>)	13
3. Wyznaczanie parametrów ruchu obrotowego bryły sztywnej (<i>Stanisław Szuba</i>)	19
4. Wahadło fizyczne (<i>Izabela Szyperska</i>)	24
5. Wyznaczenie elipsoidy bezwładności bryły sztywnej za pomocą wahadła skrętnego (<i>Krzysztof Łapsa</i>)	30
6. Badanie zderzeń centralnych (<i>Izabela Szyperska</i>)	37
7. Wyznaczanie prędkości rozchodzenia się fal akustycznych w prętach (<i>Krzysztof Łapsa</i>)	44
ELEKTRYCZNOŚĆ, MAGNETYZM, FIZYKA WSPÓŁCZESNA	51
8. Pomiar przesunięcia fazowego w obwodzie prądu zmiennego (<i>Stanisław Szuba</i>)	51
9. Analiza harmoniczna (<i>Stanisław Szuba</i>)	61
10. Badanie lądowania i rozładowania kondensatora za pomocą zestawu komputerowego (<i>Stanisław Szuba</i>)	69
11. Badanie zjawiska Halla (<i>Miroslawa Bertrandt, Eugeniusz Chimczak, Tomasz Berus</i>)	76
12. Badanie właściwości dielektrycznych ciał stałych (<i>Miroslaw Szybowicz, Krzysztof Łapsa, Izabela Szyperska</i>)	82
13. Wyznaczanie rozkładu nateżenia pola mikrofalowego podczas interferencji i dyfrakcji (<i>Piotr Ziobrowski</i>)	93
14. Badanie zjawiska dyfrakcji elektronów (<i>Krzysztof Łapsa, Adam Buczek</i>)	101
OPTYKA	109
15. Badanie prędkości fal elektromagnetycznych (<i>Adam Buczek</i>)	109
16. Wyznaczanie przerwy energetycznej półprzewodnika (<i>Miroslaw Szybowicz</i>)	121
17. Badanie zjawisk dyfrakcji i interferencji światła (<i>Adam Buczek</i>)	127
18. Badanie skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła w polu magnetycznym (<i>Miroslaw Szybowicz</i>)	136
19. Badanie zjawiska odbicia światła od powierzchni dielektryka (<i>Krzysztof Łapsa</i>)	143
DODATEK	151
20. Komputerowy zestaw pomiarowy (<i>Stanisław Szuba</i>)	151
SKOROWIDZ	161

Przedmowa

Skrypt *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki* jest przeznaczony dla studentów Politechniki Poznańskiej wykonujących ćwiczenia laboratoryjne z fizyki w I Pracowni Fizycznej Wydziału Fizyki Technicznej. W zależności od kierunku studiów studenci mają ćwiczenia laboratoryjne w jednym lub dwóch semestrach. Opis zestawu ćwiczeń przeznaczonych na pierwszy semestr zawarty jest w skrypcie Stanisława Szuby *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*, natomiast niniejsza książka jest przeznaczona dla studentów kontynuujących zajęcia laboratoryjne w drugim semestrze. Z tego względu zrezygnowano tutaj z rozdziałów wprowadzających poświęconych analizie wyników pomiarowych oraz zasadzie działania przyrządów pomiarowych. Osoby pragnące przypomnieć sobie powyższe zagadnienia odsyłam do wymienionego skryptu autorstwa Stanisława Szuby.

Opisy poszczególnych ćwiczeń zawierają na wstępie temat oraz cel ćwiczenia, a w dalszej części podstawy teoretyczne badanych zjawisk, zasadę pomiaru, przebieg ćwiczenia oraz pojęcia kluczowe. Autorzy ćwiczeń starali się w sposób możliwie jasny przedstawić kolejne zagadnienia, jednakże ze względu na złożoność opisywanych zjawisk i ograniczoną objętość skryptu przedstawione podstawy teoretyczne mogą okazać się niewystarczające. Studentom, którzy odczuwają potrzebę pogłębienia wiedzy z zakresu wykonywanych ćwiczeń, polecam następujące podręczniki:

- R. Resnick, D. Halliday, *Fizyka*, Warszawa, PWN 2007,
- S. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna*, Warszawa, PWN 1980,
- R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *Feynmana wykłady z fizyki*, PWN 2001,
- J. Ginter, *Fizyka fal*, Warszawa, PWN 1993.

Poprzednikiem niniejszego skryptu były *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki* Jęzegro Zielińskiego. Skrypt ten znacznie się zdezaktualizował na skutek zmian w I Pracowni Fizycznej, co zrodziło potrzebę stworzenia nowej pracy. Prezentowane opracowanie jest pracą zbiorową napisaną przez grupę pracowników Wydziału Fizyki Technicznej Politechniki Poznańskiej. Autorzy ćwiczeń zostali wymienieni na początku każdego z rozdziałów. Niżej podpisany jest autorem i współautorem kilku ćwiczeń oraz redaktorem całości.

W imieniu wszystkich autorów wyrażam nadzieję, że niniejszy skrypt okaże się pomocny przy wykonywaniu ćwiczeń w pracowni fizycznej, a praktyczne umiejętności zdobyte w trakcie zajęć będą przydatne w dalszych studiach na Politechnice Poznańskiej.

Krzysztof Łapsa

Wojciech Koczorowski

1. Badanie właściwości żyroskopu

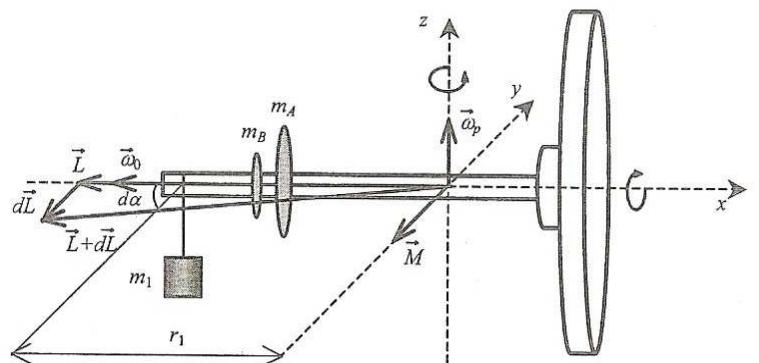
Cel ćwiczenia

Doświadczalne wyznaczenie momentu bezwładności tarczy żyroskopu oraz obserwacja zjawisk: precesji i nutacji żyroskopu.

Wprowadzenie

Bryłę sztywną o symetrii obrotowej, mogącą swobodnie obracać się wokół osi największego momentu bezwładności (osi x na rys. 1.1), nazywa się *żyroskopem*. Dodatkowo żyroskop może swobodnie obracać się wokół dwóch innych osi prostopadłych do osi x (osie y , z na rys. 1.1) dzięki zamocowaniu go na przecie stanowiącym dźwignię dwustronną. W przypadku przedstawionym na rysunku 1.1 bryłą sztywną jest tarcza. Ciężar żyroskopu równoważony jest wówczas siłą ciężkości ciężarków o masach m_A i m_B . Układ ciężarków pozwala na precyzyjne równoważenie żyroskopu.

Ruch żyroskopu podlega *zasadom dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego*. Zgodnie z drugą zasadą moment siły \vec{M} jest proporcjonalny do przyspieszenia kątowego $\vec{\epsilon}$, jakie ten moment siły powoduje, a współczynnikiem propor-



Rys. 1.1. Schemat wyjaśniający zasadę działania żyroskopu, przedstawiający wzajemną orientację wektorów

cjonalności jest moment bezwładności I bryły. Moment siły \vec{M} jest jednocześnie pochodną wektora momentu pędu \vec{L} względem czasu:

$$\vec{M} = I \vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (1.1)$$

Zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu, jeśli na bryłę sztywną nie działa moment siły lub działające momenty się równoważą, to wektor momentu pędu jest stały. Wówczas przy stałym momencie bezwładności bryły (tarcza żyroskopu) porusza się ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}_0$:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}_0 = \text{const.} \quad (1.2)$$

Wynika stąd, że przy zerowym wypadkowym momencie siły i stałym momencie bezwładności prędkość kątowa bryły jest stała co do wartości, zwrotu i kierunku. Żyroskop swobodny względem trzech prostopadłych osi zachowuje stałą prędkość kątową i oś obrotu. Jeśli na żyroskop zadziała moment siły równoległy do osi y , to w przedziale czasu dt zmianie ulegnie wektor momentu pędu o wartość $d\vec{L}$, zgodnie z zależnością (1.1):

$$d\vec{L} = \vec{M} dt. \quad (1.3)$$

Ciągłe działanie momentu siły \vec{M} powoduje ciągłą zmianę wektora \vec{L} co do kierunku, a nie co do wartości, gdyż wektory te są wzajemnie prostopadłe (rys. 1.1). Ponieważ moment bezwładności I jest stały, ciągła zmiana ulega kierunek wektora prędkości kątowej, co powoduje obrót żyroskopu wokół osi z . Wektor momentu pędu zatacza wówczas okrąg o promieniu równym swojej długości i w przedziale czasu dt zakreśli kąt $d\alpha$:

$$d\alpha = \frac{dL}{L}. \quad (1.4)$$

Taki obrót żyroskopu, wywołany stałym, zewnętrznym momentem siły, nazywa się *precesją*, a prędkość kątową, z jaką obraca się wektor momentu pędu, *prędkością kątową ruchu precesyjnego* ω_p :

$$\omega_p = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{L} \frac{dL}{dt}. \quad (1.5)$$

Przekształcając powyższe równanie i zapisując je w postaci wektorowej, można pokazać, że

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{L} \times \vec{\omega}_p. \quad (1.6)$$

Po podstawieniu równania (1.6) do wzoru (1.1) i uwzględnieniu zależności (1.2) można otrzymać:

$$\vec{M} = \vec{L} \times \vec{\omega}_p = I \vec{\omega}_0 \times \vec{\omega}_p. \quad (1.7)$$

Powyższe równanie opisuje ruch precesyjny żyroskopu. Wektory \vec{M} , $\vec{\omega}_p$ i $\vec{\omega}_0$ w przybliżeniu pozostają zawsze wzajemnie prostopadłe, zatem wyrażenie (1.7) można przedstawić w postaci iloczynu wielkości skalarnych:

$$M = I \omega_p \omega_0. \quad (1.8)$$

Często zjawisku precesji towarzyszy zjawisko *nutacji*. Oś żyroskopu wykonującego ruch precesyjny jednocześnie wykonuje ruch okresowy po cykloidzie obrotowej (złożenie ruchu po okręgu z ruchem postępowym). Amplituda i okres nutacji maleją wraz ze wzrostem wartości prędkości kątowej ω_0 .

Pomiary i obliczenia

Wyznaczanie momentu bezwładności tarczy żyroskopu z pomiaru czasu opadania ciężarka

W układzie pomiarowym do tarczy żyroskopu dołączona jest dodatkowa mała szpulka o promieniu r , na której nawinięta jest nić (rys. 1.2). Po zawieszeniu na niej ciężarka o masie m pojawia się moment siły \vec{M} , który wprawia tarczę żyroskopu w ruch obrotowy z przyspieszeniem kątowym $\vec{\varepsilon}$:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I} = \frac{\vec{r} \times \vec{F}}{I}, \quad (1.9)$$

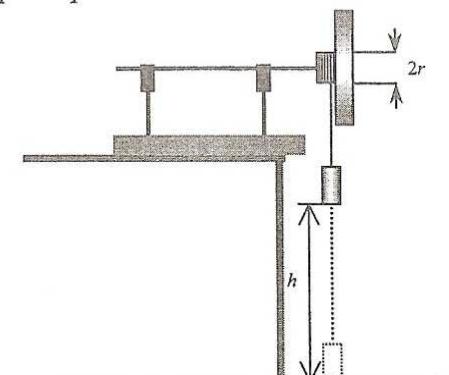
gdzie \vec{F} jest siłą naciągu nici, I – momentem bezwładności tarczy żyroskopu.

Wartość siły naciągu nici F można wyrazić wzorem:

$$F = m(g - a), \quad (1.10)$$

gdzie: a – wartość liniowego przyspieszenia opadającego ciężarka o masie m , g – przyspieszenie ziemskie.

Ciężarek zawieszony na nici opada ruchem jednostajnie przyspieszonym, a więc można zapisać zależność wysokości h , z jakiej opada ciężarek, od czasu opadania t :



Rys. 1.2. Schemat eksperymentalnego wyznaczania momentu bezwładności tarczy żyroskopu

$$h = \frac{at^2}{2}. \quad (1.11)$$

Łącząc ze sobą równania (1.1), (1.10) i (1.11), otrzymuje się następującą zależność:

$$t^2 = \frac{2I + 2mr^2}{mgr^2} h. \quad (1.12)$$

Dokonując następujących podstawień: $y = t^2$, $x = h$ oraz $a_r = (2I + 2mr^2)/(mgr^2)$ w powyższym równaniu, uzyskuje się zależność typu $y = a_r x + b$. Jest to zależność liniowa, gdzie wartość a_r jest współczynnikiem kierunkowym prostej. Wykreślając zależność kwadratu czasu opadania ciężarka w funkcji wysokości: $t^2 = f(h)$, powinno się otrzymać linię prostą. Stosując metodę regresji liniowej do tak otrzymanego wykresu, można wyznaczyć współczynnik nachylenia prostej, a następnie korzystając z wyznaczonych wartości m oraz r , wyliczyć moment bezwładności tarczy żyroskopu I .

Wyznaczanie momentu bezwładności tarczy żyroskopu z pomiaru jego precesji

Żyroskop symetryczny w obecności niezerowego momentu siły wykonuje ruch precesyjny. W pozycji poziomej wyważa się go ciężarkami: zgrubnie większym o masie m_A , a następnie precyzyjnie mniejszym o masie m_B . Zawieszenie dodatkowego ciężarka o masie m_1 w odległości r_1 od punktu podparcia (rys. 1.1) powoduje powstanie niezerowego momentu siły, działającego na żyroskop, co wywołuje ruch precesyjny. Wyrażony jest on zależnością:

$$\bar{M} = m_1 \bar{r}_1 \times \bar{g} = \frac{d\bar{L}}{dt}. \quad (1.13)$$

Skutkiem działania momentu siły \bar{M} jest obrót (precesja) wektora momentu pędu \bar{L} wokół osi pionowej, opisany przez zmianę kąta $d\alpha$ w przedziale czasu dt (równanie (1.4)). Częstość precesji (korzystając z równości (1.5)) można przedstawić w postaci skalarnej jako:

$$\omega_p = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{M}{I\omega_0} = \frac{m_1 g r_1}{I\omega_0}, \quad (1.14)$$

gdzie I jest momentem bezwładności tarczy żyroskopu względem osi obrotu x .

Powyższe równanie można przekształcić, wykorzystując zależności na okresy ruchów precesyjnego $T_p = 2\pi/\omega_p$ oraz obrotowego $T_0 = 2\pi/\omega_0$ tarczy żyroskopu. Otrzymujemy wówczas wzór:

$$\frac{1}{T_0} = \frac{m_1 g r_1}{4\pi^2 I} T_p. \quad (1.15)$$

Wykreślając zależność $T_0^{-1} = f(T_p)$ dla kilku różnych wartości okresów, powinno się otrzymać linię prostą. Podstawiając wartości T_0^{-1} za y oraz T_p za x i korzystając z metody regresji liniowej, można wyznaczyć współczynnik kierunkowy prostej a_R . Z równania (1.15) wynika, że $a_R = (m_1 g r_1)/(4\pi^2 I)$. Znajomość wartości a_R , m_1 , r_1 i g umożliwia wyliczenie momentu bezwładności tarczy żyroskopu I .

Obserwacja zjawiska nutacji

Wartość prędkości kątowej nutacji ω_N jest wprost proporcjonalna do wartości prędkości kątowej tarczy żyroskopu ω_0 . Współczynnik proporcjonalności k zależy od momentu bezwładności względem osi obrotu żyroskopu. W związku z powyższym można zapisać następujące zależności:

$$\omega_N = k \omega_0 \Rightarrow T_0 = k T_N. \quad (1.16)$$

Wykreślając funkcję $T_N = f(T_0)$ dla tej samej wartości momentu bezwładności tarczy żyroskopu I , na podstawie regresji liniowej można wyznaczyć stałą k .

Przebieg ćwiczenia

1. Zamocować sztywno ramię żyroskopu.
2. Wyznaczyć masy ciężarków m , m_1 i zawieszenia oraz zmierzyć średnicę szpulki $2r$.
3. Dziesięciokrotnie zmierzyć czas opadania ciężarka o wybranej masie m , przy mocowanego do nici nawiniętej na szpulkę, dla różnych wysokości opadania h .
4. Wykreślić zależność $t^2 = f(h)$.
5. Korzystając ze wzoru (1.12) oraz metody regresji liniowej, wyznaczyć współczynnik kierunkowy prostej a_r , a następnie moment bezwładności tarczy żyroskopu.
6. Zwolnić podparcie ramienia żyroskopu.
7. Przesuwając ciężarki o masach m_A i m_B (w pierwszej kolejności większy, następnie mniejszy), zrównoważyć poziomo układ żyroskopu.
8. Nawiniąć nić na szpulkę w celu ręcznego nadania prędkości kątowej żyroskopu.
9. W odległości r_1 umieścić ciężarek o wybranej masie m_1 , a następnie, ciągnąc gwałtownie za sznurek, nadać prędkość kątową tarczy żyroskopu. Zmierzyć dla 10 różnych okresów obrotu tarczy T_0 odpowiadające im okresy precesji T_p żyroskopu. *Uwaga:* okres T_0 należy mierzyć na początku i na końcu obrotu precesyjnego, ponieważ prędkość kątowa tarczy maleje w czasie. Do obliczeń przyjąć wartość średnią z obydwu pomiarów.
10. Wykonać wykres $T_0^{-1} = f(T_p)$.

11. Korzystając ze wzoru (1.15) oraz metody regresji liniowej, wyznaczyć współczynnik kierunkowy prostej a_R , a następnie moment bezwładności tarczy żyroskopu.
12. Powtórzyć polecenia z punktów 8–11 dla kilku różnych położień ciężarka. Z poszczególnych pomiarów wyznaczyć I , a następnie jego wartość średnią i odchylenie standardowe średniej.
13. Porównać wartości momentu bezwładności tarczy żyroskopu otrzymane obiema metodami.

Zestaw ćwiczeniowy

Żyroskop, ciężarki m , m_A , m_B i m_1 , stoper, licznik obrotów

Pojęcia kluczowe

- Bryła sztywna
- Wielkości opisujące ruch obrotowy bryły sztywnej
- Zasady dynamiki dla ruchu obrotowego
- Żyroskop
- Ruch precesyjny żyroskopu
- Zjawisko nutacji

Piotr Ziobrowski

2. Wyznaczanie prędkości pocisku za pomocą wahadła balistycznego skrętnego

Cel ćwiczenia

Wyznaczenie prędkości pocisku metodą pomiaru okresu drgań i kąta odchylenia wahadła balistycznego skrętnego.

Wprowadzenie

Do wyznaczenia prędkości poruszającego się pocisku stosujemy *wahadło balistyczne skręcone*. Wahadło takie jest szczególnym przypadkiem wahadła fizycznego. Okres drgań wahadła fizycznego można obliczyć ze wzoru:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}, \quad (2.1)$$

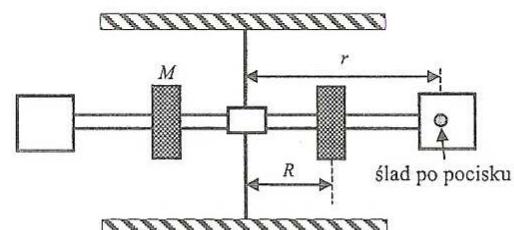
gdzie: D – moment kierujący wahadła fizycznego, I – moment bezwładności wahadła.

Moment kierujący D o wymiarze [N·m/rad] jest współczynnikiem proporcjonalności pomiędzy momentem siły M_s i kątem wychylenia z położenia równowagi α :

$$M_s = -D\alpha. \quad (2.2)$$

Wahadło balistyczne jest to stalowy pręt zawieszony na sprężystych drutach. Pręt ten obraca się wokół osi pionowej, prostopadłej do niego. Stalowe druty zapewniają działanie momentu sprężystości podczas wychyleń wahadła z położenia równowagi. Na przecie umieszczone są dwa ciężarki o równych masach M . Ciężarki zamocowane na przecie mogą być przemieszczańskie wzdłuż osi pręta, co powoduje zmianę momentu bezwładności wahadła.

W przypadku małych wychyleń wahadła (gdy naprężenia w drutach mieszczą się jeszcze w granicy stosowności prawa Hooke'a) oraz po zaniedbaniu sił oporu



Rys. 2.1. Schemat wahadła balistycznego skrętnego

ruch wahadła jest *ruchem harmonicznym prostym*. Gdy ciężarki rozstawione są w odległości R_1 od osi obrotu, okres wahań może być wyrażony zależnością:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{D}}, \quad (2.3)$$

gdzie I_1 oznacza *moment bezwładności* naszego wahadła. Zgodnie z twierdzeniem Steinera, moment bezwładności zależy od kwadratu odległości środka masy od osi obrotu. Zatem

$$I_1 = I_0 + 2MR_1^2, \quad (2.4)$$

gdzie I_0 jest momentem bezwładności wahadła bez ciężarków.

Po przesunięciu ciężarków do odległości R_2 ($R_2 > R_1$) moment bezwładności wahadła ulegnie zmianie:

$$I_2 = I_0 + 2MR_2^2. \quad (2.5)$$

Wtedy jego okres wahań

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{D}}. \quad (2.6)$$

Z równań (2.3) i (2.6) po odpowiednich przekształceniach (po podniesieniu do kwadratu wyrażeń, a następnie po odjęciu ich stronami) otrzymamy następującą zależność:

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{I_2 - I_1}{D}. \quad (2.7)$$

Z powyższego równania wyznaczamy moment kierujący:

$$D = 4\pi^2 \frac{I_2 - I_1}{T_2^2 - T_1^2}. \quad (2.8)$$

Przesunięcie mas M z położenia R_1 do R_2 powoduje zmianę momentu bezwładności wahadła (równania (2.3) i (2.6)) o wartość:

$$I_2 - I_1 = 2M(R_2^2 - R_1^2). \quad (2.9)$$

Po podstawieniu tej zależności do równania (2.8) otrzymamy moment kierujący wahadła:

$$D = 8\pi^2 M \frac{R_2^2 - R_1^2}{T_2^2 - T_1^2}. \quad (2.10)$$

Zasada pomiaru

Wystrzelony pocisk uzyskuje energię kinetyczną kosztem energii potencjalnej zgromadzonej w ściśniętej sprężynie:

$$E_s = \frac{kx^2}{2}, \quad (2.11)$$

gdzie k jest stałą sprężystości sprężyny, a x jej odkształceniem.

W czasie strzału energia ta jest zamieniana na energię kinetyczną pocisku oraz energię kinetyczną samej sprężyny. Wystrzelony pocisk, zderzając się niesprężystie z wahadłem, powoduje jego wychylenie i pobudza je do drgań. Zgodnie z *zasadą zachowania momentu pędu*

$$mv r = I\omega_0, \quad (2.12)$$

gdzie m jest masą pocisku, v – jego prędkością w momencie zderzenia, r – odległością od osi obrotu punktu zetknięcia się pocisku z wahadłem, I – momentem bezwładności wahadła, a ω_0 – maksymalną wartością prędkości kątowej wahadła w chwili zderzenia.

Z zasady zachowania momentu pędu (wzór 2.12) otrzymujemy się prędkość pocisku:

$$v = \frac{I\omega_0}{mr}. \quad (2.13)$$

Ruch drgający harmoniczny wahadła może być opisany równaniem:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (2.14)$$

Jeżeli ruch wahadła jest ruchem harmonicznym oraz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}} = \frac{2\pi}{T}, \quad (2.15)$$

różniczkowe równanie ruchu wahadła można zapisać w postaci:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{D}{I} \alpha = 0 \quad (2.16)$$

lub

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{4\pi^2}{T^2} \alpha = 0, \quad (2.17)$$

funkcja zaś będąca rozwiązaniem tego różniczkowego równania ruchu wahadła ma postać:

$$\alpha = \alpha_0 \sin \frac{2\pi}{T} t. \quad (2.18)$$

Maksymalny kąt wychylenia wahadła osiągany jest po czasie $t = 1/4T$, gdy to funkcja sinus przyjmuje maksymalną wartość 1.

Wartość prędkości kątowej wahadła zmienia się okresowo:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi}{T} \alpha_0 \cos \frac{2\pi}{T} t. \quad (2.19)$$

Maksymalną wartość prędkości kątowej wahadło osiąga w chwili $t = 0$, gdy funkcja kosinus przyjmuje maksymalną wartość 1. Ta maksymalna wartość prędkości kątowej może być zapisana w postaci zależności:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \alpha_0. \quad (2.20)$$

Gdy w równaniu (2.13) uwzględni się wyrażenia (2.1) i (2.20), prędkość pocisku można zapisać jako zależność:

$$v = \left(\frac{T}{2\pi mr} \alpha_0 \right) D. \quad (2.21)$$

Stanowisko pomiarowe

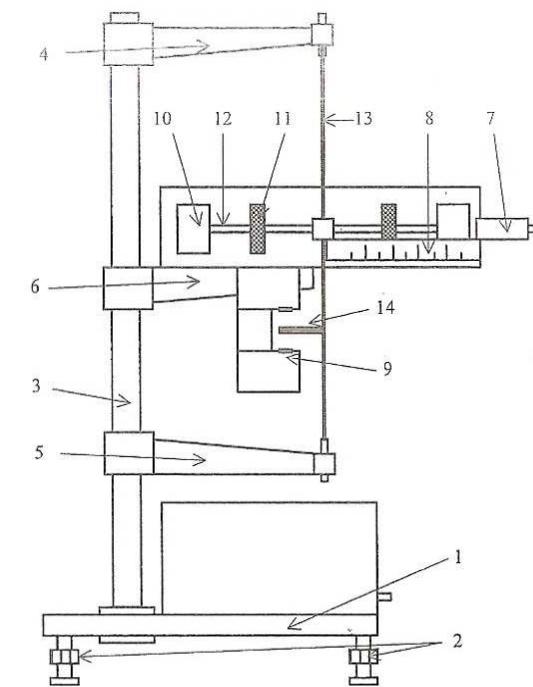
Wahadło balistyczne skrętne stosowane w doświadczeniu przedstawiono na rysunku 2.2. Podstawa (1) ma regulowane nóżki umożliwiające wypoziomowanie przyrządu. W podstawie osadzona jest kolumna (3), na której zamocowano wsporniki (4, 5 i 6). Do wspornika środkowego przymocowane jest urządzenie strzelające (7), osłona z naniesioną na niej skalą kątową (8) oraz czujnik fotoelektryczny (9). Wsporniki (4 i 5) mają zaciski służące do umocowania drutu stalowego (13). Na stalowych drutach zawieszono wahadło składające się z dwóch tarcz wypełnionych plasteliną (10), dwóch ciężarków przesuwnych (11), pręta (12) i wodzika (14). Czujnik fotoelektryczny, złożony z żarówki i fototranzystora, połączony jest z układem elektronicznym zliczającym okresy i czas ich trwania.

Na płycie czołowej układu elektronicznego umieszczono następujące elementy:

- włącznik sieciowy SIEĆ – powoduje włączenie napięcia zasilającego,
- zerowanie ZERO – powoduje wyzerowanie wyświetlaczy cyfrowych,
- wyłącznik STOP – powoduje zatrzymanie liczenia okresów i czasu.

Przebieg ćwiczenia

1. Włączyć przyrząd pomiarowy.
2. Maksymalnie zsunąć ciężarki na przecie wahadła oraz wyznaczyć odległości ich środków od osi obrotu wahadła R .
3. Wyzerować wahadło, tzn. ustawić wahadło w takiej pozycji, aby kreska na końcu pręta wskazywała kąt wychylenia $\alpha = 0$.



Rys. 2.2. Wahadło balistyczne skrętne (opis w tekście)

4. Wyznaczyć masę pocisku m , korzystając z wagi elektronicznej, oraz odczytać masę ciężarka M .
5. Załadować urządzenie strzelające.
6. Wyzerować automatyczny miernik czasu.
7. Wystrzelić pocisk.
8. Odczytać maksymalny kąt wychylenia α_0 .
9. Wyznaczyć czas 10 wahnięć i obliczyć okres T .
10. Ustalić odległość miejsca klejenia się pocisku od osi obrotu r .
11. Pomiary według punktów 5–10 powtórzyć pięciokrotnie, obliczyć wartości średnie \bar{T} , $\bar{\alpha}_0$, \bar{r} oraz ich odchylenia standardowe.
12. Rozsunąć ciężarki, wyznaczyć odległość ich środków od osi obrotu wahadła R .
13. Wyzerować automatyczny miernik czasu.
14. Odchylić wahadło o kąt równy wyznaczonemu średniemu maksymalnemu kątowi wychylenia $\bar{\alpha}_0$ i puścić wahadło.
15. Wyznaczyć czas 10 wahnięć i obliczyć okres.
16. Pomiary według punktów 12–15 wykonać dla pięciu różnych odległości R .

17. Przyjmując wyznaczone okresy z odpowiadającymi im odległościami jako T_1 , R_1 oraz T_2 , R_2 , dla różnych ich kombinacji wyliczyć moment kierujący wahadła (wzór 2.10). Następnie wyznaczyć średnią wartość momentu kierującego wahadła \bar{D} oraz jej odchylenie standardowe.
18. Korzystając ze wzoru (2.21) i wyznaczonych wartości średnich \bar{T} , $\bar{\alpha}_0$, \bar{r} , \bar{D} i masy pocisku m , obliczyć średnią prędkość pocisku.
19. Wyznaczyć niepewność pomiarową prędkości pocisku.
20. Pomiary według punktów 2–11 oraz procedury obliczeniowe powtórzyć dla kolejnego wybranego pocisku.

Zestaw ćwiczeniowy

Wahadło balistyczne skrętne, pociski i waga

Pojęcia kluczowe

- Moment bezwładności
- Moment kierujący
- Moment siły
- Ruch harmoniczny
- Zasady zachowania pędu, momentu pędu i energii

Stanisław Szuba

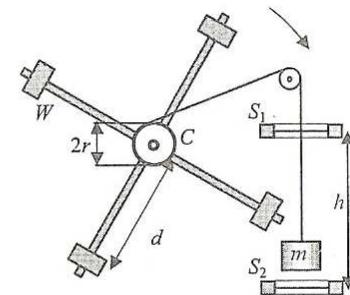
3. Wyznaczanie parametrów ruchu obrotowego bryły sztywnej

Cel ćwiczenia

Sprawdzenie drugiej zasady dynamiki dla ruchu obrotowego, wyznaczenie momentu bezwładności bryły złożonej oraz wyznaczenie masy walca.

Wprowadzenie

Do badania ruchu obrotowego stosujemy w ćwiczeniu odmianę wahadła Oberbecka, przedstawioną na rysunku 3.1. Do krążka C są przyjmocowane pręty tworzące krzyżak w płaszczyźnie pionowej. Na tych prętach są osadzone walce W , których odległość od osi obrotu może być regulowana. Całe urządzenie może wykonywać ruch obrotowy wokół osi poziomej pokrywającej się z osią krążka C . Na



Rys. 3.1. Urządzenie do badania ruchu obrotowego; C – krążek na poziomej osi, S_1 i S_2 – optyczne czujniki ruchu z pomiarem czasu

górnej powierzchni krążka jest nawinięta jednowarstwowa nić, która następnie przechodzi przez inny krążek, a na jej końcu jest zawieszony ciężarek o masie m . Siła ciężkości powoduje jego spadanie z pewnym przyspieszeniem a i jednocześnie obrót całego wahadła.

Na wahadło, które będziemy traktować jak bryłę sztywną, działa moment siły M o wartości

$$M = rm(g - a), \quad (3.1)$$

gdzie r jest promieniem krążka C w miejscu nawinięcia nici. W ogólności, w powyższym równaniu występuje iloczyn wektorowy, ale w sytuacji, gdy nić jest nawinięta prostopadle do osi obrotu (kierunek promienia krążka jest prostopadły do kierunku wektora przyspieszenia), można stosować zapis skalarny.

Pod działaniem momentu siły bryła wykonuje ruch obrotowy jednostajnie przyspieszony. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki dla ruchu obrotowego wartość momentu siły opisuje równanie:

$$M = I\alpha, \quad (3.2)$$

gdzie I jest całkowitym momentem bezwładności bryły, a α – wartością przyspieszenia kątowego. Po połączeniu obu powyższych równań otrzymujemy

$$mrg = (I + mr^2)\alpha. \quad (3.3)$$

W powyższym równaniu wykorzystano także związek między przyspieszeniem liniowym a i przyspieszeniem kątowym α :

$$a = r\alpha. \quad (3.4)$$

W dalszych rozważaniach przyjmujemy, że liczba pretów i walców W wynosi 4. Całkowity moment bezwładności względem osi obrotu jest sumą trzech składników pochodzących od: kązka $C - I_c$, pretów $- 4I_p$ i walców $W - 4I'_w$. Moment I'_w jest liczony względem osi obrotu całej bryły; można go wyrazić na podstawie *twierdzenia Steinera* w następującej postaci:

$$I'_w = I_w + m_w d^2, \quad (3.5)$$

gdzie I_w jest momentem bezwładności walca W względem osi przechodzącej przez środek jego masy i równoległej do osi obrotu całej bryły, d jest odległością między osiami, a m_w masą walca.

Po zsumowaniu wszystkich momentów bezwładności otrzymujemy:

$$I = I_c + 4I_p + 4I'_w + 4m_w d^2. \quad (3.6)$$

W powyższym wyrażeniu trzy pierwsze wyrazy po prawej stronie są niezależne od położenia walców W względem osi obrotu. Oznaczmy je wspólnym symbolem I_0 , tzn.

$$I_0 = I_c + 4I_p + 4I'_w. \quad (3.7)$$

Pozwala to na zwięzłe zapisanie równania (3.6), które przyjmuje postać:

$$I = I_0 + 4m_w d^2. \quad (3.8)$$

Przyspieszenie kątowe α wyznaczamy na podstawie pomiarów wysokości i czasu opadania ciężarka. Ponieważ w niniejszym ćwiczeniu moment siły jest stały, więc ruch obrotowy bryły jest jednostajnie przyspieszony. Jeżeli umieścimy ciężarki w miejscu przejścia przez czujnik S_1 , to po zwolnieniu będzie się on poruszał również ruchem jednostajnie przyspieszonym i przejdzie przez czujnik S_2 po pewnym czasie t , pokonawszy drogę h :

$$h = \frac{1}{2}\alpha r t^2. \quad (3.9)$$

Po przekształceniu tego równania otrzymujemy użyteczne wyrażenie na przyspieszenie kątowe:

$$\alpha = \frac{2h}{t^2 r}. \quad (3.10)$$

Zapiszmy teraz równanie wyjściowe (3.3) w rozwiniętej formie przez wstawienie do niego wyrażeń (3.8) i (3.10):

$$mrg = (I_0 + 4m_w d^2 + mr^2) \frac{2h}{t^2 r}. \quad (3.11)$$

To równanie przekształcimy tak, aby otrzymać w wyraźnej postaci zależność czasu t od położenia walców określonego odległością d . Przekształcenie równania (3.11) prowadzi do postaci:

$$t^2 = \frac{2h(I_0 + mr^2)}{mgr^2} + \frac{8hm_w}{mgr^2} d^2. \quad (3.12)$$

Równanie to możemy najwygodniej przedstawić graficznie, jeśli podstawimy nowe zmienne: $y = t^2$, $x = d^2$ oraz stałe:

$$a_r = \frac{8hm_w}{mgr^2}, \quad (3.13a)$$

$$b_r = \frac{2h(I_0 + mr^2)}{mgr^2}. \quad (3.13b)$$

Przy takich podstawieniach równanie (3.12) przyjmuje postać

$$y = a_r x + b_r. \quad (3.14)$$

Jest to równanie liniowe, którego wykresem jest linia prosta o współczynniku nachylenia a_r , przecinająca oś y w punkcie b_r .

Pomiary i obliczenia

Celem ćwiczenia jest:

- sprawdzenie zależności $M = I\alpha$,
- wyznaczenie momentu bezwładności I_0 ,
- wyznaczenie masy m_w walca W .

Aby osiągnąć pierwszy cel, wykonujemy pomiary czasu opadania ciężarka z określonej wysokości dla kilku położen walców W , różnych się odległością od osi obrotu d . Górnego położenie ciężarka powinno być nieco powyżej czujnika S_1 .

Najpierw ustawiamy wszystkie 4 walce w największych (ale równych) odległościach od osi obrotu, nawijamy nić do górnego położenia ciężarka, a następnie zwalniamy blokadę, pozwalając na swobodny obrót bryły i opadanie ciężarka.

Pomiary czasu dokonuje się za pomocą czasomierza elektronicznego połączonego z czujnikami S_1 i S_2 . Przycisk START zwalnia elektromagnes utrzymujący ciężarek, co powoduje, że ciężarek zaczyna opadać, a wahadło zaczyna się obracać. Pomiar czasu uruchamia się automatycznie po przejściu ciężarka przez czujnik S_1 i kończy w momencie przejścia ciężarka przez czujnik S_2 .

Z kolei przesuwamy walce ku osi obrotu (zwracając uwagę na to, aby ich rozmieszczenie było dokładnie symetryczne) i powtarzamy pomiary czasu opadania. Analogicznie postępujemy dla co najmniej pięciu położen walców. Po wykonaniu pomiarów sporządzamy wykres zależności t^2 w funkcji d^2 . Jeżeli punkty wykresu układają się wzdłuż linii prostej, to równanie (3.3) jest spełnione.

Stosując metodę regresji liniowej, obliczamy współczynnik nachylenia prostej a_r i punkt przecięcia z osią y b_r , które to wielkości wykorzystujemy do wyznaczenia I_0 z równania (3.13b) oraz m_w z równania (3.13a). Przed przystąpieniem do obliczeń musimy ponadto wykonać pomiary promienia kątka r oraz masy ciężarka m .

Przebieg ćwiczenia

1. Ustalić położenia walców W na prêtach w zakresie od połowy do końca.
2. Wyznaczyć masę ciężarka m .
3. Zmierzyć odległość między czujnikami h .
4. Wyznaczyć czas opadania ciężarka.
5. Oszacować wartości niepewności pomiarowej wielkości mierzonych bezpośrednio.
6. Powtórzyć pomiary czasu opadania ciężarka dla kilku (5–7) zmienionych położień walców.
7. Wykreślić zależność $t^2 = f(d^2)$.
8. Stosując metodę regresji liniowej, znaleźć współczynnik nachylenia prostej a_r i punkt jej przecięcia z osią y b_r , a także niepewność tych wielkości.
9. Obliczyć moment bezwładności I_0 oraz masę walca m_w , korzystając z równań (3.13b) i (3.13a).
10. Obliczyć niepewność pomiarową ΔI_0 . W tym celu użyć metody różniczki zupełnej do przekształconego równania (3.13b).
11. Obliczyć niepewność pomiarową Δm_w . W tym celu użyć metody różniczki logarytmicznej do przekształconego równania (3.13a) (równanie to ma postać iloczynową).
12. Zestawić końcowe wyniki pomiarów.

Zestaw ćwiczeniowy

Wahadło Oberbecka na ramie, układ rejestrujący czas, suwmiarka, miara, waga

Pojęcia kluczowe

- Moment siły, moment bezwładności
- Przyspieszenie liniowe i kątowe, druga zasada dynamiki dla ruchu postępowego i obrotowego
- Twierdzenie Steinera, całkowity moment bezwładności wahadła
- Zależność kąta obrotu od czasu
- Czynności pomiarowe
- Metoda regresji liniowej

Izabela Szyperska

4. Wahadło fizyczne

Cel ćwiczenia

Wyznaczenie momentu bezwładności brył sztywnych na podstawie pomiarów okresu drgań wahadła fizycznego oraz z teoretycznego wzoru na podstawie pomiaru masy bryły i ich wymiarów geometrycznych.

Wprowadzenie

Wahadło fizyczne jest to dowolna bryła sztywna, zawieszona powyżej środka ciężkości S bryły, na poziomej osi obrotu O (rys. 4.1). Jeżeli taką bryłę odchylimy od położenia równowagi o niewielki kąt φ , a następnie puścimy, to będzie się ona poruszać ruchem wahadłowym o pewnym okresie T . Ruch wahadła odbywa się pod działaniem siły ciężkości o wartości F .

Punktem przyłożenia tej siły jest środek masy wahadła. Siłę ciężkości można rozłożyć na dwie składowe: \vec{F}_1 – skierowaną równolegle do prostej OS i \vec{F}_2 – prostopadłą do niej. Składowa równoległa nie wpływa na ruch wahadła (mogłaby ona jedynie rozciągać odcinek OS , ale wahadło jest sztywne – rozciąganie nie następuje). Ruch wahadła odbywa się pod wpływem niezrównoważonego momentu siły \vec{M} wywołanego składową siły ciężkości \vec{F}_2 i można go uważać za szczególny przypadek ruchu obrotowego zmiennego o zmiennym przyspieszeniu $\vec{\varepsilon}$:

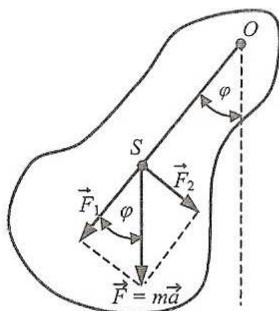
$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}, \quad (4.1)$$

gdzie I jest momentem bezwładności.

Dla danego kąta wychylenia φ wartość momentu siły M względem osi przechodzącej przez punkt O wyraża wzór:

$$M = F_2 l = Fl \sin \varphi = mgl \sin \varphi, \quad (4.2)$$

gdzie m jest masą bryły, a l – odlegością środka masy S od osi obrotu O . Po podstawieniu równania (4.2) do wzoru (4.1), a następnie przekształceniu wzoru (4.1) oraz oznaczeniu przyspieszenia kątowego przez $d^2\varphi/dt^2$ otrzymujemy wzór wyrażający drugą zasadę dynamiki Newtona dla ruchu obrotowego:



Rys. 4.1. Wahadło fizyczne wychylone z położenia równowagi

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi. \quad (4.3)$$

Znak minus w powyższym równaniu oznacza, że siła \vec{F}_2 jest zawsze skierowana przeciwnie do kierunku wychylenia. Dla małych kątów wychylenia wahadła z położenia równowagi ($\sin \varphi \approx \varphi; \varphi < 5^\circ$) równanie (4.3) można zapisać następująco:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl\varphi, \quad (4.4)$$

co po przekształceniu można wyrazić w postaci:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + mgl\varphi = 0. \quad (4.5)$$

Zależność (4.5) jest równaniem drgań harmonicznych. Z ruchem harmonicznym mamy do czynienia tylko wtedy, gdy działająca siła jest proporcjonalna do wychylenia z położenia równowagi i skierowana w stronę położenia równowagi. Szczególne rozwiązanie równania (4.5) ma postać:

$$\varphi = A \sin \omega t, \quad (4.6)$$

gdzie A oznacza amplitudę, ω – częstotliwość kołową. Po podstawieniu równania (4.6) do wzoru (4.5) i wykonaniu różniczkowania otrzymamy:

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I}. \quad (4.7)$$

Korzystając z powyższego wzoru oraz zależności:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad (4.8)$$

można wyznaczyć okres drgań wahadła fizycznego:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (4.9)$$

Wyrażenie mgl nazywamy momentem kierującym wahadła.

Jak widać, okres drgań wahadła fizycznego zależy od momentu bezwładności I , masy m bryły oraz odległości l środka masy od osi obrotu. Znając wartość okresu, masę oraz odległość l , można wyznaczyć moment bezwładności danej bryły.

Przy wyprowadzeniu wzoru (4.9) zostało przyjęte założenie, że $\varphi < 5^\circ$. W przypadku wychylenia o większy kąt ruch wahadła pozostaje okresowy, ale nie jest harmoniczny, a rozwiązanie równania (4.3) daje bardziej złożoną zależność. Okres takiego wahadła jest uzależniony od kąta φ w następujący sposób:

$$T_\varphi = T_0 \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \sin^4 \frac{\varphi}{2} + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)^2}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)} \right)^2 \sin^{2n} \frac{\varphi}{2} \right]. \quad (4.10)$$

Po rozwinięciu funkcji sinus w szereg potęgowy otrzymamy wzór:

$$T_\varphi = T_0 \left[1 + \frac{1}{16} \varphi^2 + \frac{11}{3072} \varphi^4 + \dots \right], \quad (4.11)$$

gdzie kąt φ wyrażany jest w radianach.

Momentem bezwładności I ciała sztywnego nazywamy sumę iloczynów mas m_i wszystkich elementów ciała i kwadratów ich odległości r_i od osi obrotu. Dla ciał o ciągłym rozkładzie masy sumowanie przechodzi w całkowanie:

$$I = \int r^2 dm, \quad (4.12)$$

gdzie dm to masa nieskończonym elementu bryły, a r – odległość takiego elementu od osi obrotu.

Moment bezwładności I w ruchu obrotowym odgrywa rolę analogiczną do roli masy w ruchu postępowym, stanowi miarę bezwładności obracającego się ciała. Zależy on od masy ciała oraz jej przestrzennego rozmieszczenia względem osi obrotu. To samo ciało sztywne może mieć różne momenty bezwładności w odniesieniu do różnych osi.

Znając gęstość materiału, z którego wykonana jest bryła ρ , można obliczyć element masy dm ze wzoru:

$$dm = \rho dV, \quad (4.13)$$

wtedy moment bezwładności dla brył jednorodnych o regularnych kształtach można łatwo obliczyć ze wzoru:

$$I = \rho \int_V r^2 dV, \quad (4.14)$$

gdzie r jest odlegością elementu od osi obrotu, ρ – gęstością, a V – objętością bryły. Gotowe wzory na wyznaczenie momentów bezwładności takich brył względem różnych osi można znaleźć w tabeli 4.1.

Moment bezwładności występujący we wzorze (4.9) jest momentem względem osi obrotu przechodzącej przez punkt zawieszenia O . Można go obliczyć, gdy znany jest moment bezwładności I_0 względem osi równoległą przechodzącą przez środek ciężkości bryły, z twierdzenia Steinera:

$$I = I_0 + ml^2, \quad (4.15)$$

gdzie l jest odlegością od środka ciężkości do punktu zawieszenia bryły.

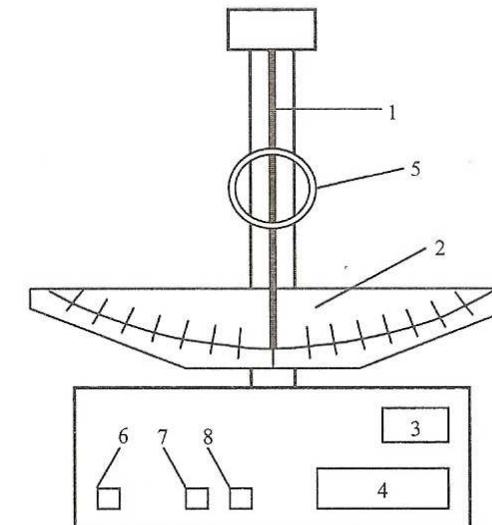
Gdy bryła sztywna składa się z n zespolonych ze sobą elementów, wtedy okres drgań tak utworzonego wahadła fizycznego można wyliczyć ze wzoru:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n I_i}{\sum_{i=1}^n gm_il_i}}, \quad (4.16)$$

gdzie I_i oznacza moment bezwładności i -tej bryły względem osi obrotu przechodzącej przez punkt zawieszenia, m_i – masę i -tej bryły, a l_i – odległość środka ciężkości i -tej bryły od punktu zawieszenia. Dla układu złożonego z dwóch brył, gdy znany jest okres wahania układu i moment bezwładności jednej z brył, można obliczyć z tego wzoru moment bezwładności drugiej bryły.

Stanowisko pomiarowe

Przyrząd pomiarowy przedstawiono na rysunku 4.2. Składa się on z wahadła fizycznego (1), skali kątowej (2) pozwalającej określić amplitudę drgań, licznika okresów (3) oraz elektronicznego milisekundomierza (4). Wahadło fizyczne ma kształt pręta, którego jeden koniec przyjmocowany jest do osi osadzonej w dwóch łożyskach kulkowych. Na przecie tym można mocować w dowolnym miejscu ciężarki stanowiące część zestawu ćwiczeniowego (5). Koniec wahadła fizycznego,



Rys. 4.2. Schemat przyrządu pomiarowego (opis w tekście)

poruszając się, przecina strumień świetlny żarówki padający na fototranzyistor. W wyniku tego generowane są impulsy elektryczne doprowadzane do licznika cyfrowego, który zlicza liczbę okresów, licząc co drugi impuls. Naciśnięcie przycisku SIEC (6) uruchamia przyrząd. Przycisk ZER (7) powoduje zerowanie licznika oraz generowanie sygnału zezwolenia na pomiar, pierwsze przejście wahadła przez strumień świetlny uruchamia milisekundomierz, który wyłącza się przyciskiem STOP (8). Pomiar czasu kończy się przez naciśnięcie klawisza STOP, ale dopiero po zakończeniu pełnego okresu.

Tabela 4.1. Momenty bezwładności podstawowych brył symetrycznych

Rodzaj ciała	Oś obrotu	Moment bezwładności
Kula pełna, promień R	przez środek	$\frac{2}{5}MR^2$
Powłoka sferyczna, promień R	przez środek	$\frac{2}{3}MR^2$
Walec, promień R	przez środek symetrii	$\frac{1}{2}MR^2$
Walec, promień R , wysokość h	średnica przechodząca przez środek bryły	$M(\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{12}h^2)$
Pręt, długość l	prostopadła do pręta, przechodząca przez jego środek	$\frac{1}{12}Ml^2$
Pręt, długość l	prostopadła do pręta, przechodząca przez jego koniec	$\frac{1}{3}Ml^2$
Pierścień, o promieniach wew. R_1 i zew. R_2	oś symetrii	$\frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$

Przebieg ćwiczenia

- Uruchomić przyrząd. Odchylić wahadło fizyczne (sam pręt) o kąt nieprzekraczający 3° , puścić i zmierzyć czas 5 okresów. W celu zwiększenia dokładności pomiar powtórzyć kilkakrotnie. Z otrzymanych w ten sposób wyników wyznaczyć wartość średnią okresu T_0 .
- Znając masę m i długość pręta, obliczyć jego teoretyczny moment bezwładności (patrz tab. 4.1), a następnie moment bezwładności pręta z przekształconego wzoru (4.9), wykorzystując wyznaczony w punkcie 1 okres T_0 . Porównać oba

otrzymane wyniki. *Uwaga:* Nic mylić długości pręta z odlegością l od środka ciężkości bryły do punktu zawieszenia.

- Wychylić pręt kolejno o $5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ$ i 30° i wyznaczyć okresy T_5, T_{10} itd. jak w punkcie 1. Następnie dla każdej wartości obliczyć względne wydłużenie okresu:

$$\frac{T_\varphi - T_0}{T_0}. \quad (4.17)$$

- Wyliczyć teoretyczne wartości okresów T_φ dla badanych amplitud z zależności (4.11). Korzystając z otrzymanych wyników, obliczyć z równania (4.17) teoretyczne względne wydłużenie okresu.
- Wykonać wykres zależności teoretycznego względnego wydłużenia okresu od amplitudy φ . Następnie na ten sam wykres nanieść wartości względnego wydłużenia okresu wyliczone w punkcie 3.
- Wyznaczyć masę i wymiary geometryczne dodatkowej bryły. Na ich podstawie wyliczyć teoretyczny moment bezwładności bryły.
- Dodatkową bryłę umieścić na pręcie w znanej odległości l od osi obrotu i wyznaczyć jak w punkcie 1 okres nowo powstałego wahadła. Pomiar powtórzyć dla trzech odległości l .
- Znając moment bezwładności pręta oraz okres wahania układu (pręt + dodatkowa bryła), wyliczyć, korzystając z przekształconego równania (4.16), moment bezwładności dodatkowej bryły. Obliczyć wartość średnią z uzyskanych wyników.
- Porównać wartość momentu bezwładności dodatkowej bryły obliczoną teoretycznie z wartością uzyskaną z pomiarów.

Zestaw ćwiczeniowy

Wahadło fizyczne w kształcie pręta, elektroniczny miernik czasu i okresów oraz dodatkowa bryła

Pojęcia kluczowe

- Wahadło fizyczne
- Ruch harmoniczny prosty, drgania anharmoniczne
- Moment siły, moment bezwładności
- Dynamika ciała sztywnego

Krzysztof Łapsa

5. Wyznaczenie elipsoidy bezwładności bryły sztywnej za pomocą wahadła skrętnego

Cel ćwiczenia

Wyznaczenie momentów bezwładności bryły sztywnej względem wybranych osi przechodzących przez środek masy bryły. Wykreślenie elipsoidy bezwładności bryły na podstawie uzyskanych wyników.

Wprowadzenie

W opisie ruchu postępowego ciała istotna jest informacja o jego masie. W przypadku ruchu obrotowego znajomość masy ciała jest niewystarczająca, ważny jest jej przestrzenny rozkład względem osi obrotu. Wielkością fizyczną zawierającą informacje o masie i jej przestrzennym rozkładzie jest *moment bezwładności* I . Dla układu N punktów materialnych sztywno połączonych ze sobą względem osi obrotu zwanej osią bezwładności można go zdefiniować za pomocą zależności:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2, \quad (5.1)$$

gdzie m_i jest masą i -tego punktu materialnego, a r_i – jego odległością od osi bezwładności.

Gdy mamy do czynienia z bryłą sztywną o masie M , moment bezwładności można wyliczyć następująco:

$$I = \int_0^M r^2 dm, \quad (5.2)$$

gdzie r jest odlegością elementu masy dm od osi obrotu (rys. 5.1).

Rozpatrując ruch obrotowy bryły sztywnej obracającej się z prędkością kątową $\vec{\omega}$, moment pędu ciała \vec{L} można zapisać w postaci zależności:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}. \quad (5.3)$$

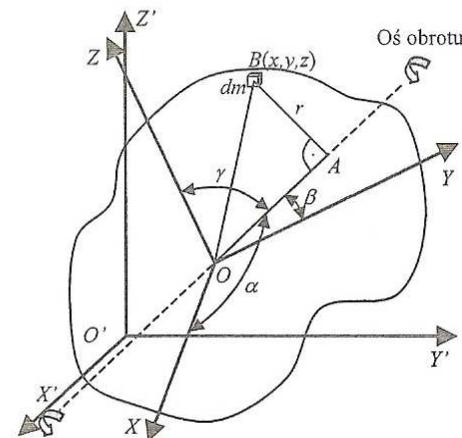
Moment bezwładności w powyższym wzorze postrzegamy jako wielkość skalarną, a więc zakładamy, że kierunki wektorów momentu pędu i prędkości kątowej są stałe i zgodne z kierunkiem osi obrotu. Jest to jednak obraz uproszczony. Powyższe równanie możemy zapisać, gdy mamy do czynienia z ruchem obrotowym bryły sztywnej wokół wybranej, nieruchomej osi pokrywającej się z osią symetrii ciała. W przeciwnym wypadku ruch obrotowy bryły jest znacznie bardziej skomplikowany, a kierunki wektorów momentu pędu i prędkości kątowej nie pokrywają się.

Ruch obrotowy ciała sztywnego wokół środka jego masy

Moment bezwładności ciała sztywnego o dowolnym kształcie jest uzależniony od wyboru osi bezwładności, a więc jedno ciało może mieć nieskończony zbiór momentów bezwładności.

Spróbujmy scharakteryzować moment bezwładności ciała sztywnego, rozpatrując jego ruch obrotowy względem dowolnej osi obrotu przechodzącej przez środek masy ciała.

Na początek wprowadźmy dwa układy odniesienia. Pierwszy XYZ o początku O w środku masy bryły będzie związyany na stałe z bryłą i będzie wykonywać z nią wszystkie ruchy. Drugi układ odniesienia $X'Y'Z'$ będzie nieruchomy względem



Rys. 5.1. Położenie elementu masy dm w przestrzeni. Układ $X'Y'Z'$ („nieruchomy”) jest związanym z otoczeniem, np. z laboratorium, a układ XYZ powiązany jest z bryłą i wykonuje z nią wszystkie obroty

otoczenia, a bryła będzie się poruszała względem niego (rys. 5.1). Korzystając z powyższych założeń i równania (5.2), wyliczymy moment bezwładności bryły względem osi przechodzącej przez punkty O i A (rys. 5.1). Element masy dm jest oddalony od osi obrotu o odcinek r , a osi tworzy z osiami układu współrzędnych XYZ kąty α , β i γ (rys. 5.1). Korzystając z twierdzenia Pitagorasa oraz zależności trygonometrycznych, możemy powiązać odcinki r , OB i OA następującą relacją:

$$r^2 = (OB)^2 - (OA)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2, \quad (5.4)$$

gdzie OB jest odlegością elementu masy dm od początku układu współrzędnych, a OA – rzutem odcinka OB na oś obrotu (rys. 5.1). Podstawiamy zależność (5.4) do wzoru (5.2) i otrzymujemy:

$$I = \int_0^M [x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2] dm. \quad (5.5)$$

Powyższe równanie po dalszych przekształceniach możemy zapisać w następującej postaci:

$$I = I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma - 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2I_{zx} \cos \gamma \cos \alpha, \quad (5.6)$$

gdzie

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_0^M (z^2 + y^2) dm, & I_{yy} &= \int_0^M (x^2 + z^2) dm, & I_{zz} &= \int_0^M (x^2 + y^2) dm, \\ I_{xy} &= \int_0^M xy dm, & I_{yz} &= \int_0^M yz dm, & I_{zx} &= \int_0^M zx dm. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Jak widać z powyższych równań, wyrażenie na moment bezwładności bryły o dowolnym kształcie jest bardzo złożone. Momenty bezwładności I_{xx} , I_{yy} , I_{zz} są momentami bezwładności bryły względem odpowiednich osi układu współrzędnych i zawsze przyjmują wartości dodatnie. Wyrażenia I_{xy} , I_{yz} , I_{zx} noszą nazwę *momentów dewiacji lub momentów odśrodkowych* i mogą przyjmować wartości ujemne. Wygodną formą zapisu momentu bezwładności bryły jest postać macierzowa:

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

przy czym ze względu na symetrię $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{yz} = I_{zy}$, $I_{zx} = I_{xz}$. A zatem moment bezwładności w ogólnym przypadku nie jest skalarem, lecz *wielkością tensorową*.

Reprezentacją tensora symetrycznego jest powierzchnia drugiego stopnia. Równanie tej powierzchni można znaleźć w następujący sposób. Wyobraźmy sobie zbiór prostych przechodzących przez punkt O . Jeżeli każda z prostych stanowi os obrotu, to możemy na nich odłożyć odcinki OE_i o długości

$$R_i = \frac{1}{\sqrt{I_i}}, \quad (5.9)$$

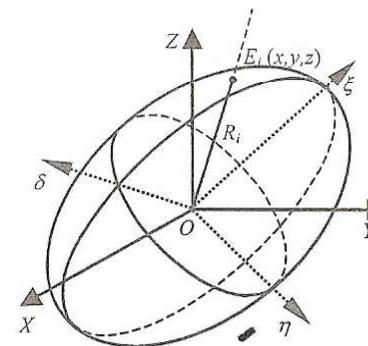
gdzie I_i jest momentem bezwładności bryły względem i -tej osi pokrywającej się z odcinkiem OE_i (rys. 5.2). Punkty na końcach odcinków OE_i utworzą powierzchnię zamkniętą. Współrzędne takiego przykładowego punktu można wyznaczyć następująco:

$$x = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{I}}, \quad y = \frac{\cos \beta}{\sqrt{I}}, \quad z = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{I}}. \quad (5.10)$$

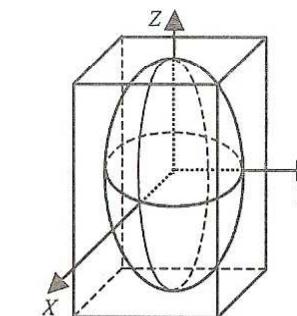
Po wyznaczeniu z powyższych równań wartości kosinusów kierunkowych, a następnie podstawieniu ich do wzoru (5.6) otrzymamy równanie *elipsoidy bezwładności*:

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx = 1. \quad (5.11)$$

Istnieje pewna orientacja osi X , Y , Z względem rozpatrywanej bryły, dla której momenty dewiacji są równe zeru (rys. 5.3). W takim przypadku osie te nazywamy



Rys. 5.2. Elipsoida bezwładności dla bryły zorientowanej dowolnie względem układu XYZ (osie elipsoidy δ , η , ξ nie pokrywają się z osiami układu)



Rys. 5.3. Elipsoida bezwładności dla bryły symetrycznej (prostopadłościanu) zorientowanej w układzie XYZ tak, że jej osie symetrii pokrywają się z osiami układu (osie elipsoidy pokrywają się z osiami X , Y , Z)

głównymi osiami bezwładności, a momenty bezwładności bryły względem tych osi *głównymi momentami bezwładności* I_x , I_y , I_z . Dla powyższego przypadku ($I_{yz} = I_{zx} = I_{xy} = 0$ oraz $I_{xx} = I_x$, $I_{yy} = I_y$, $I_{zz} = I_z$) równanie elipsoidy (5.11) przybierze postać:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1. \quad (5.12)$$

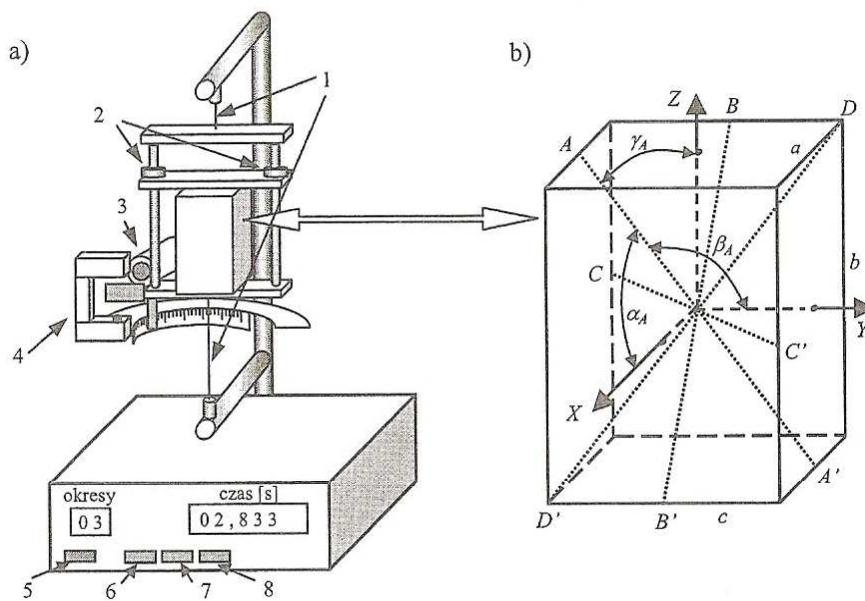
Podobnie upraszcza się zależność momentu bezwładności od kierunku osi obrotu:

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma. \quad (5.13)$$

Jeżeli mamy do czynienia z bryłami symetrycznymi (np. prostopadłościan, walec), główne osie bezwładności pokrywają się z osiami symetrii bryły (rys. 5.3). Dla brył o dużej symetrii (np. kula, sfera, sześcian) elipsoida bezwładności staje się sferą ($I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$ oraz $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I$), a więc moment bezwładności nie zależy od kierunku osi obrotu, a wektory momentu pędu i prędkości kątowej są zawsze wzajemnie równoległe.

Stanowisko pomiarowe

Do wyznaczenia momentów bezwładności bryły sztywejnej (stalowy prostopadłościan) posłużymy się wahadłem skrętnym (torsyjnym). Składa się ono z ramki (uchwytu) zamocowanej od góry i od dołu za pomocą dwóch pionowych naprężonych drutów (1) stanowiących jej oś obrotu (rys. 5.4a). Ruchoma belka ramki wyposażona w śruby (2) umożliwia mocowanie bryły z nawierconymi wgłębienniami stożkowymi tak, aby oś obrotu wyznaczona przez druty przechodziła przez środek masy bryły. Zmiana położenia ruchomej belki nie powoduje zmiany momentu bezwładności ramki I_R . W badanym prostopadłościanie jest więcej wgłębień, co pozwala na wybór kilku osi obrotu (rys. 5.4b).



Rys. 5.4. a) widok ogólny wahadła skrętnego wyposażonego w system automatycznego pomiaru czasu i liczby okresów (opis w tekście), b) badana bryła z oznaczonymi osiami pomiarowymi oraz przykładowymi kątami

Po włączeniu przyrządu przyciskiem SIEĆ (5) należy odchylić ramkę, aby została przyciągnięta przez elektromagnes (3). Wciśnięcie przycisku START (7) wyłącza elektromagnes i zwalnia ramkę, która pod wpływem momentu sił sprężystych wykonuje drgania obrotowe. W celu zwiększenia dokładności pomiaru przyrząd wyposażono w czujnik światła (4) oraz układ automatycznego pomiaru liczby

okresów oraz czasu. Włączenie przycisku STOP (8) spowoduje zatrzymanie zliczania okresów, natomiast koniec pomiaru czasu nastąpi po zakończeniu ostatniego pełnego okresu. Przed przystąpieniem do kolejnych pomiarów należy wcisnąć przycisk ZERO (6) służący do wyzerowania liczników przyrządu.

Pomiar i obliczenia

Dla niewielkich kątów wychyleń ramki moment siły sprężystej drutu jest proporcjonalny do kąta wychylenia, a więc ruch ramki wahadła będzie ruchem harmonicznym. W takim przypadku okres wahadła możemy zapisać następująco:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}, \quad (5.14)$$

gdzie I jest momentem bezwładności wahadła, a D – momentem kierującym.

Moment bezwładności I w przypadku omawianego ćwiczenia będzie równy momentowi bezwładności ramki I_R lub sumie momentów bezwładności ramki i badanej bryły $I_R + I_B$. Moment kierujący D zależy od parametrów drutu (modułu skręcenia, długości i promienia) i w tym przypadku jest stały.

Na początek należy wyznaczyć okres drgań T_R pustej ramki, a następnie okres drgań T_W ramki z zamocowaną w niej bryłą wzorcową o momencie bezwładności I_W . W powyższych przypadkach równanie (5.14) przybierze postaci:

$$T_R = 2\pi \sqrt{\frac{I_R}{D}}, \quad (5.15)$$

$$T_W = 2\pi \sqrt{\frac{I_R + I_W}{D}}. \quad (5.16)$$

Następnie badamy wybraną bryłę względem kilku różnych osi obrotu. Zależność pomiędzy okresem drgań T_B a momentem bezwładności bryły I_B względem i -tej osi obrotu wygląda następująco:

$$T_{Bi} = 2\pi \sqrt{\frac{I_R + I_{Bi}}{D}}. \quad (5.17)$$

Korzystając z zależności (5.15), (5.16) i (5.17), można zapisać następujący wzór na moment bezwładności bryły względem i -tej osi bezwładności:

$$I_{Bi} = \frac{T_{Bi}^2 - T_R^2}{T_W^2 - T_R^2} I_W. \quad (5.18)$$

Jako bryłę wzorcową zastosujemy w ćwiczeniu walec o promieniu R i masie m . Wybór ten jest podyktowany łatwością wyznaczenia momentu bezwładności względem osi symetrii walca:

$$I_W = \frac{1}{2} m R^2. \quad (5.19)$$

Przebieg ćwiczenia

1. Wyznaczyć masę i promień walca wzorcowego, a następnie, korzystając ze wzoru (5.19), obliczyć jego moment bezwładności względem jego osi symetrii.
2. Zmierzyć długości boków a, b, c badanego prostopadłościanu.
3. Zmierzyć czas wahania 10 okresów pustej ramki $t_R = 10T_R$. Pomiar powtórzyć trzykrotnie, a następnie obliczyć średnią wartość okresu T_R .
4. Zamocować walec wzorcowy w ramce tak, aby jego osią pokrywała się z odcinkiem wyznaczonym przez druty wahadła skrętnego. Analogicznie do punktu 3 wyznaczyć okres T_W .
5. Mocując badany prostopadłościan w ramce w różnych orientacjach, wyznaczyć, podobnie jak w punktach 3 i 4, okresy drgań wahadła T_{Bi} względem i -tych położen osi bezwładności. Pomary należy wykonać dla głównych osi bezwładności X, Y, Z oraz osi AA', BB', CC' i DD' (patrz rys. 5.4b).
6. Korzystając z wyznaczonych wielkości, obliczyć na podstawie równania (5.18) momenty bezwładności bryły względem badanych osi obrotu I_{Bi} .
7. Korzystając z równania (5.12) oraz wyznaczonych głównych momentów bezwładności I_x, I_y, I_z badanego prostopadłościanu, wykreślić ćwiartki elipsy bezwładności w płaszczyznach XY , YZ i ZX . *Uwaga:* jeżeli ruch bryły następuje np. wokół osi X , to wartość x w równaniu (5.12) jest równa 0.
8. Z pomiarów długości boków obliczyć kosinusy kierunkowe badanych osi bezwładności AA', BB', CC' i DD' , a następnie momenty bezwładności względem tych osi, korzystając ze wzoru (5.13) oraz wyznaczonych wartości I_x, I_y, I_z . Porównać te wyniki z wynikami otrzymanymi doświadczalnie.
9. Przeanalizować czynniki wpływające na wartości niepewności pomiarowej w ćwiczeniu.

Zestaw ćwiczeniowy

Wahadło skręcone, zestaw brył, suwniarka, waga

Pojęcia kluczowe

- Moment bezwładności, tensor momentu bezwładności, elipsoida bezwładności
- Moment dewiacji
- Moment kierujący
- Związek pomiędzy momentem pędu a prędkością kątową
- Ruch harmoniczny

6. Badanie zderzeń centralnych

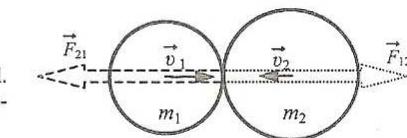
Cel ćwiczenia

Wyznaczenie parametrów opisujących zderzenia centralne ciał oraz modułu Younga materiałów, z których wykonane są zderzające się ciała.

Wprowadzenie

Wszelkie zderzenia ciał możemy podzielić na dwa rodzaje: *sprężyste*, gdy suma energii kinetycznej zderzających się ciał jest zachowana, i *niesprężyste*, gdy suma energii kinetycznej po zderzeniu jest mniejsza od sumy energii przed zderzeniem. W obu tych sytuacjach zasada zachowania pędu jest spełniona, czyli suma pędów przed zderzeniem jest równa sumie pędów po zderzeniu. W trakcie zderzenia, które trwa bardzo krótko (np. czas zderzenia kul bilardowych mieści się w przedziale 0,1–1 ms), działają siły zwane siłami chwilowymi lub zderzeniowymi.

W przypadku zderzeń sprężystych (rys. 6.1) w pierwszej fazie zderzenia ciała zaczynają się odkształcać, a energia kinetyczna ciał zamienia się całkowicie



Rys. 6.1. Zderzenie centralne, proste kul. Wektory prędkości i sił mają ten sam kierunek, ale przeciwnie zwroty

w energię potencjalną sprężystości. W drugiej fazie ciała zaczynają się od siebie oddalać, odkształcenia maleją i ciała wracają do pierwotnej postaci, a energia potencjalna sprężystości zamienia się całkowicie w energię kinetyczną. Jeśli zderzenie jest doskonale sprężyste, to całkowita końcowa energia kinetyczna jest równa energii początkowej:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'_1^2}{2} + \frac{m_2 v'_2^2}{2}, \quad (6.1)$$

gdzie m_1, m_2 są to masy zderzających się ciał, v_1, v_2 – wartości prędkości ciał przed zderzeniem, a v'_1, v'_2 – wartości prędkości ciał po zderzeniu. Natomiast zgodnie z zasadą zachowania pędu:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2. \quad (6.2)$$

Na podstawie tych równań możemy obliczyć wartości prędkości końcowych v'_1 i v'_2 obu ciał. W tym celu przekształćmy oba wzory do postaci:

$$m_1 (v_1^2 - v'^2_1) = m_2 (v_2^2 - v'^2_2), \quad (6.3)$$

$$m_1(v_1 + v'_1) = m_2(v'_2 + v_2). \quad (6.4)$$

Następnie, dzieląc wzór (6.3) przez wzór (6.4), otrzymujemy równanie:

$$v_1 + v_2 = v'_2 + v'_1. \quad (6.5)$$

Równanie to pokazuje, że w zderzeniu sprężystym zachodzącym w przestrzeni jednowymiarowej względna prędkość zbliżania się ciał przed zderzeniem $v_1 + v_2$ jest równa względnej prędkości oddalania się ciał po zderzeniu $v'_1 + v'_2$. Oznacza to, że np. doskonale sprężysta kulka, odbijając się od doskonale sprężystej powierzchni, odskoczyłaby na tę samą wysokość, z której spadała. Mogłaby ona tak spadać i odbijać się w nieskończoność. W rzeczywistości nie ma materiałów doskonale sprężystych. Do najbardziej sprężystych można zaliczyć kość słoniową, kauczuk, hartowną stal i szkło. W trakcie rzeczywistego zderzenia początkowa energia mechaniczna jest pomniejszona o straty, które wynikają z powstania trwałych deformacji, wytwarzania się ciepła, drgań akustycznych i innych. Straty te uwzględnia się, wprowadzając tzw. współczynnik restytucji γ . Współczynnik ten mieści się w przedziale od 0 do 1 i zależy od właściwości materiałów, z których są zbudowane ciała (np. $\gamma_{\text{stali}} = 0,55$; $\gamma_{\text{szkla}} = 0,94$). Można go wyznaczyć doświadczalnie, korzystając z następującego wzoru:

$$\gamma = \frac{v'_1 + v'_2}{v_1 + v_2}. \quad (6.6)$$

W ćwiczeniu będą badane zderzenia centralne. Ze zderzeniami centralnymi mamy do czynienia wtedy, gdy siły wzajemnego nacisku mają wspólny kierunek, leżący na prostej przechodzącej przez środki mas obu zderzających się ciał. Wśród ciał mających różne kształty kule wyróżniają się tym, że podczas ich zderzeń powyższy warunek zawsze jest spełniony (rys. 6.1). Jeżeli także wektory prędkości kul leżą na tej samej prostej, zderzenia nazywamy centralnymi prostymi lub czołowymi. Jeśli wektory prędkości nie spełniają tego warunku, to zderzenia nazywamy skośnymi.

Ze zderzeniami niecentralnymi mamy do czynienia wtedy, gdy wektory sił wzajemnego oddziaływania nie leżą na prostej przechodzącej przez środki ciężkości obu ciał. Zderzenie niecentralne oprócz innych skutków zawsze powoduje obrót zderzających się ciał.

Prędkości v'_1 i v'_2 ciał po zderzeniu centralnym można wyznaczyć, korzystając z przekształconych zależności (6.4) i (6.6):

$$v'_1 = \frac{(1+\gamma)m_2}{m_1+m_2}(v_1+v_2)-v_1, \quad (6.7)$$

$$v'_2 = \frac{(1+\gamma)m_1}{m_1+m_2}(v_1+v_2)-v_2. \quad (6.8)$$

Jeżeli mielibyśmy do czynienia ze zderzeniem idealnie sprężystym ($\gamma = 1$) i dodatkowo $m_1 = m_2$, to otrzymamy $v'_1 = v_2$ i $v'_2 = v_1$. Oznacza to, że w trakcie zderzenia kul o jednakowych masach następuje między nimi zamiana prędkości. Jednak w większości zderzeń zostaje utracona pewna część energii kinetycznej:

$$\Delta E_k = \frac{(1-\gamma^2)m_1 m_2}{2(m_1+m_2)}(v_1+v_2)^2. \quad (6.9)$$

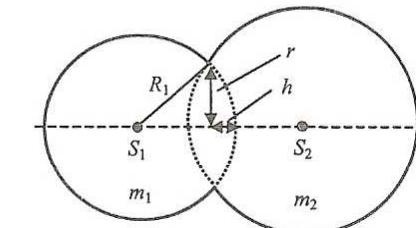
Deformacja, której ulegają kule w trakcie zderzenia, ma kształt czaszy kulistej o wysokości h i promieniu r (rys. 6.2). Wysokość czaszy można obliczyć, zakładając, że w czasie pierwszego etapu ruch kul jest ruchem jednostajnie opóźnionym i po czasie $t = T/2$, gdzie T jest czasem trwania zderzenia, prędkość $v_1 = v_2 = 0$. Tak więc rozważając deformację kuli, możemy zapisać równania jej drogi i prędkości w ruchu jednostajnie opóźnionym:

$$h = v_1 t - \frac{1}{2}at^2, \quad (6.10)$$

$$0 = v_1 - at. \quad (6.11)$$

Po wyznaczeniu z równania (6.11) przyspieszenia a i podstawieniu go do równania (6.10) otrzymujemy:

$$h = \frac{v_1 t}{2} = \frac{v_1 T}{4}. \quad (6.12)$$



Rys. 6.2. Schematyczne przedstawienie parametrów deformacji r, h

Promień powstałej czaszy możemy obliczyć (rys. 6.2), korzystając z twierdzenia Pitagorasa:

$$r = \sqrt{2R_1 h - h^2}, \quad (6.13)$$

gdzie R_1 oznacza promień kuli o masie m_1 . Ze względu na to, że $R_1 \gg h$, drugi wyraz w powyższym związku możemy zaniedbać i otrzymujemy:

$$r = \sqrt{2R_1 h}. \quad (6.14)$$

Siła, z jaką działają na siebie kule podczas zderzenia, jest proporcionalna do głębokości deformacji x i $F = kx$ (k – współczynnik sprężystości). Praca, jaka zostanie przy tym wykonana, jest równa energii sprężystości:

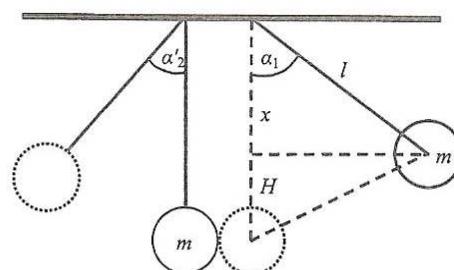
$$W = E_s = \int_0^h F dx = \int_0^h kx dx = \frac{1}{2} kh^2 = \frac{1}{2} F_m h, \quad (6.15)$$

gdzie $F_m = kh$ i jest maksymalną siłą nacisku kul występującą w chwili, gdy ich prędkość jest równa zeru, wtedy $x = h$.

Pomiary i obliczenia

W ćwiczeniu będą badane zderzenia dwóch kul o jednakowych masach m . Dodatkowo jedna z kul przed zderzeniem będzie pozostawać w spoczynku ($v_2 = 0$). Na rysunku 6.3 przedstawiono schematycznie taką sytuację. W tym przypadku wzór na utraconą podczas zderzenia energię kinetyczną (6.9) upraszcza się do postaci:

$$\Delta E_k = \frac{(1-\gamma^2)m}{4} v_1^2. \quad (6.16)$$



Rys. 6.3. Schemat do obliczenia prędkości kul podczas zderzenia

Energia, jaką będzie miał układ na początku doświadczenia, to energia potencjalna kuli wychylonej z położenia równowagi. Energia ta będzie całkowicie zamieniona na energię kinetyczną w momencie zderzenia (kula ma wtedy prędkość v_1):

$$mgH = \frac{1}{2} mv_1^2. \quad (6.17)$$

Prędkość kuli można obliczyć, znając kąt maksymalnego wychylenia od położenia równowagi. Związek między kątem α_1 a wysokością H , na której znajduje się kula, jest następujący:

$$H = l - x = l(1 - \cos \alpha_1) = 2l \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}. \quad (6.18)$$

Wykorzystując powyższą zależność oraz równanie (6.17), otrzymamy wzór na prędkość v_1 kuli w chwili zderzenia:

$$v_1 = 2\sqrt{lg} \sin \frac{\alpha_1}{2}. \quad (6.19)$$

Oznaczając przez α'_2 kąt odchylenia drugiej kuli po zderzeniu, możemy jej prędkość v'_2 w chwili zderzenia przedstawić w postaci:

$$v'_2 = 2\sqrt{lg} \sin \frac{\alpha'_2}{2}. \quad (6.20)$$

Zgodnie z zasadą zachowania energii, początkowa energia kinetyczna jest równa sumie energii strat ΔE_k oraz energii sprężystości zmagazynowanej w obydwu kulach ($2E_s$).

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = \Delta E_k + 2E_s. \quad (6.21)$$

Wykorzystując tę zależność oraz równanie (6.15), możemy wyznaczyć wartość maksymalnej siły działającej w badanym układzie:

$$F_m = \frac{mv_1^2 - 2\Delta E_k}{2h}. \quad (6.22)$$

Znajomość wartości maksymalnej siły F_m umożliwia wyznaczenie *modułu Youenga E* ze wzoru na głębokość deformacji h (zbliżenie środków) zderzających się kul:

$$2h = \frac{3F_m(1-\nu^2)}{2rE}, \quad (6.23)$$

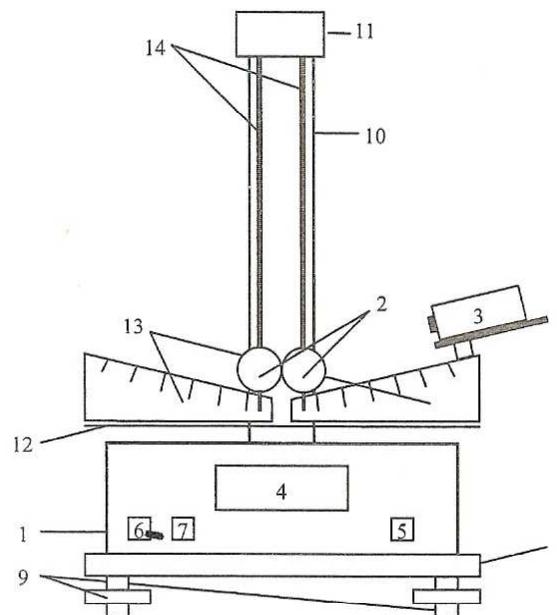
gdzie ν jest liczbą Poissona, która wynosi np. 0,29 dla stali, 0,3–0,4 dla mosiądu, 0,34 dla aluminium. Po przekształceniu powyższego równania na moduł Youenga E przedstawia się następująco:

$$E = \frac{3F_m(1-\nu^2)}{4hr}. \quad (6.24)$$

Stanowisko pomiarowe

W ćwiczeniu korzystamy z urządzenia przedstawionego na rysunku 6.4. Do podstawy jest przy mocowany mikrosekundomierz (1) z zasilaczem dostarczającym napięcie do kul (2) i elektromagnes (3). Mikrosekundomierz wyposażony jest w generator kwarcowy spełniający funkcję wzorca czasu. Sygnały tego generatora o częstotliwości 1 MHz są zliczane przez licznik czasu tylko w momencie, gdy kule są złączone. Czas połączenia to czas trwania zderzenia. Wartość tego czasu w mikrosekundach pokazuje układ wyświetlający (4) znajdujący się na panelu mikrosekundomierza. Poniżej znajdują się przyciski: SIEĆ (5) – włączenie napięcia zasilającego, ZER (6) – wyzerowanie układu mikrosekundomierza i START (7)

– sterowanie elektromagnesem (przyciśnięcie klawisza powoduje wyłączenie pola magnetycznego, wyciśnięcie – włączenie pola magnetycznego). Podstawa przyrządu (8) jest wyposażona w nóżki (9) pozwalające na wypoziomowanie urządzenia. W podstawie jest również zamontowana kolumna (10), a do niej są przymocowane dwa wsporniki: górny (11) i dolny (12). Na dolnym wsporniku znajdują się kątowniki ze skalami (13) i elektromagnesy. Na górnym wsporniku zamocowane są przewody elektryczne (14), na których zawieszone są kule.



Rys. 6.4. Schemat przyrządu do badania zderzeń centralnych
(opis w tekście)

Przebieg ćwiczenia

1. Zważyć kule i zmierzyć ich średnice.
2. Zawiesić kule na przewodach. Wyznaczyć długość l zawieszenia kul, czyli najkrótszą odległość między punktem zawieszenia przewodu (rys. 6.4) a środkiem kuli. Sprawdzić, czy układ jest wypoziomowany.
3. Prawą kulę odciągnąć w stronę elektromagnesu, zablokować w tym położeniu (wycisnąć przycisk START) i odczytać wartość kąta wychylenia α_1 . Lewa kula pozostaje w spoczynku w położeniu równowagi.
4. Wcisnąć przycisk START. Po zderzeniu kul zaobserwować, o jaki kąt α'_2 od-

chyli się lewa kula. Odczytać czas zderzenia T . Pomiar powtórzyć co najmniej 10 razy. Obliczyć wartość średnią kąta α'_2 i czasu zderzenia T .

5. Pomiary powtórzyć dla dwóch innych kątów wychylenia α_1 .
6. Na podstawie uzyskanych wyników obliczyć następujące wielkości:
 - prędkość kul przed zderzeniem i po zderzeniu (v_1 i v'_2),
 - współczynnik restytucji γ ,
 - energię ΔE_k utraconą podczas zderzenia (wzór (6.16)),
 - parametry deformacji h i r (wzory (6.12) i (6.14)),
 - wartość maksymalnej siły nacisku F_m ,
 - moduł Younga E .
7. Obliczyć niepewność pomiarową zmierzonych wartości i zestawić końcowe wyniki.

Zestaw ćwiczeniowy

Przyrząd do badania zderzeń, kule, waga elektroniczna, suwmiarka, miara długości

Pojęcia kluczowe

- Zasady zachowania energii i pędu
- Zderzenia sprężyste i niesprężyste
- Centralne zderzenia rzeczywistych ciał stałych, współczynnik restytucji
- Starty energii kinetycznej podczas zderzenia, parametry deformacji przy zderzeniu, siła nacisku
- Właściwości sprężyste ciał stałych, moduł Younga

7. Wyznaczanie prędkości rozchodzenia się fal akustycznych w prętach

Cel ćwiczenia

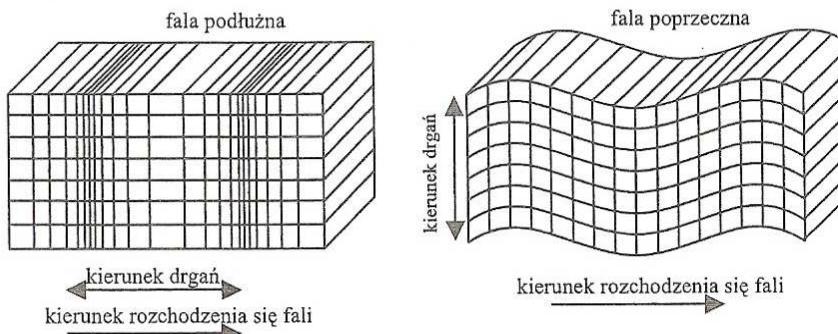
Wyznaczanie prędkości rozchodzenia się fal akustycznych w prętach wykonanych z różnych materiałów oraz modułów Younga tych materiałów.

Wprowadzenie

Fale mechaniczne

Fale mechaniczne (*fale akustyczne*) powstają w wyniku wychylenia elementu ośrodka sprężystego ze stanu równowagi, co w konsekwencji prowadzi do drgań takiego elementu wokół początkowego położenia. W ośrodku sprężystym drgania te są przekazywane do dalszych jego części, powodując przemieszczanie zaburzenia (a tym samym fali) wzduż całego ośrodka. Należy zwrócić uwagę, że ośrodek jako całość nie przemieszcza się ani pojedyncze elementy ośrodka nie podążają za rozchodząjącą się falą. Rozchodzenie się fali mechanicznej związane jest zatem z przekazywaniem energii pomiędzy poszczególnymi elementami (cząsteczkami) ośrodka, a więc do rozchodzenia się takich fal niezbędny jest ośrodek materiałny.

Jeżeli cząsteczki ośrodka przenoszące falę mechaniczną wykonują drgania równolegle do kierunku rozchodzenia się fali, to mamy do czynienia z *falą podłużną*. Gdy kierunek drgań cząsteczek jest prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali, mówimy o *fali poprzecznej* (rys. 7.1). Fale podłużne mogą rozchodzić się we wszystkich ośrodkach materialnych (gazach, cieczach, ciałach stałych), natomiast fale poprzeczne tylko w ciałach stałych lub bardzo lepkich cieczach.



Rys. 7.1. Uproszczony obraz fal mechanicznych: podłużnej i poprzecznej

Właściwościami ośrodka decydującymi o prędkości rozchodzenia się w nim fal akustycznych są jego sprężystość oraz gęstość (bezwładność).

Ze względu na zakres częstotliwości fale akustyczne możemy podzielić następująco:

- infradźwięki ($0 - 20 \text{ Hz}$),
- dźwięki (fale słyszalne) ($20 - 20 \cdot 10^3 \text{ Hz}$),
- ultradźwięki ($20 \cdot 10^3 - 10^9 \text{ Hz}$),
- hiperdźwięki ($10^9 - 10^{13} \text{ Hz}$).

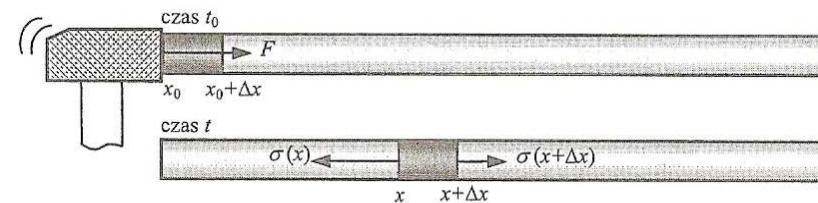
Niekiedy przyjmuje się zakresy odpowiednio $0 - 16 \text{ Hz}$, $16 - 16 \cdot 10^3 \text{ Hz}$, $16 \cdot 10^3 - 10^9 \text{ Hz}$ oraz $10^9 - 10^{13} \text{ Hz}$.

Prędkość podłużnych fal sprężystych w pręcie

Wyobraźmy sobie, że uderzamy niewielkim młotkiem w koniec jednorodnego metalowego pręta prostopadle do jego przekroju poprzecznego S , powodując lokalne odkształcenie tego ośrodka (rys. 7.2). Tak powstałe zaburzenie zacznie się przemieszczać wzduż pręta na skutek różnicy wystepujących w nim naprężeń. Zakładając, że pręt leży wzduż osi X , siła działająca na dowolny element objętości $S\Delta x$ w pręcie będzie proporcjonalna do różnicy naprężeń σ w punktach x i $x + \Delta x$ (rys. 7.2). Równanie ruchu dla elementu objętości, przedstawiające warunek równowagi pomiędzy siłą sprężystości elementu ośrodka $F_S = S\Delta\sigma$ a siłą bezwładności $F_b = \rho S\Delta x (\partial^2 \psi / \partial t^2)$, możemy zapisać następująco:

$$S[\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)] = \rho S \Delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (7.1)$$

gdzie $\psi(x, t)$ jest przemieszczeniem, jakiego doznaje środek masy elementu objętości po czasie t , ρ – gęstością pręta, $\sigma(x)$ – naprężeniem w punkcie x .



Rys. 7.2. Uproszczony model powstania i rozchodzenia się zaburzenia mechanicznego w pręcie

Przekształcając równanie (7.1), otrzymujemy:

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)}{\Delta x}, \quad (7.2)$$

co dla $\Delta x \rightarrow 0$ można zapisać:

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (7.3)$$

Jeżeli skorzystamy z prawa Hooke'a

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (7.4)$$

gdzie E jest *modułem Younga* (modułem sprężystości), a $\varepsilon = \partial \psi / \partial x$ – odkształceniem względnym, równanie (7.3) ostatecznie przybierze postać:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (7.5)$$

Jest to równanie falowe dla przemieszczenia $\psi(x, t)$. Zakładając, że mamy do czynienia z monochromatyczną falą płaską o częstotliwości kołowej ω i wektorze falowym \vec{k} rozchodzącej się w kierunku \vec{x} , jej równanie możemy zapisać następująco:

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}. \quad (7.6)$$

Jeżeli podstawimy równanie (7.6) do wzoru (7.5) i zróżniczkujemy je, otrzymamy:

$$\omega^2 = \frac{E}{\rho} k^2. \quad (7.7)$$

Korzystając z zależności na prędkość fali $v = \omega/k$, ostatecznie możemy zapisać następujący wzór na prędkość rozchodzenia się podłużnych fal sprężystych w pręcie:

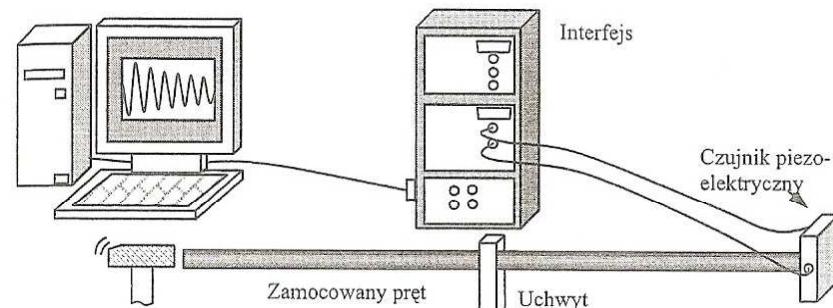
$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (7.8)$$

Należy dodać, że jeżeli średnica pręta jest porównywalna z długością fali akustycznej lub mniejsza od niej (co jest spełnione dla fal dźwiękowych), to drgania nie mają charakteru czysto podłużnego. W takim przypadku oprócz deformacji wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali występuje również deformacja poprzeczna, polegająca na zmianach grubości pręta (pogrubienie w obszarach zagęszczonych i zwężenie w obszarach rozrzedzonych). W związku z tym prędkość podłużnych fal akustycznych w pręcie jest mniejsza niż fal w takim samym ośrodku nieograniczonym.

Pomiary i obliczenia

Do wyznaczenia prędkości fal akustycznych wykorzystamy zjawisko echa w pręcie. Uderzając niewielkim młotkiem w koniec pręta, tworzymy zaburzenie przemieszczające się wzdłuż pręta. W momencie, gdy impuls dotrze do końca pręta

na granicy metal–powietrze, nastąpi jego odbicie i zacznie się przemieszczać w przeciwnym kierunku. Proces ten będzie zachodził cyklicznie aż do całkowitego wymiętlenia impulsu. W celu wyznaczenia prędkości rozchodzenia się zaburzenia mechanicznego należy znać drogę oraz czas jego przemieszczania.



Rys. 7.3. Układ eksperymentalny do badań prędkości rozchodzenia się fal akustycznych w prętach (na rysunku nie są zachowane proporcje)

Do pomiaru czasu przebiegu impulsu w pręcie posłuży zestaw złożony z uchwytu, kompletu prętów wykonanych z różnych materiałów, czujnika piezoelektrycznego oraz komputera z interfejsem (rys. 7.3). Badany pręt należy umieścić luźno w uchwycie, a następnie jeden jego koniec dosunąć bardzo uważnie do czujnika piezoelektrycznego połączonego z interfejsem. Dokręcić śrubą pręt tak, aby nie mógł się poruszać. Delikatne uderzenie młoteczka w drugi koniec pręta wytwarza impuls mechaniczny rozchodzący się w pręcie. Zaburzenie docierające do końca pręta z dołączonym czujnikiem generuje impuls elektryczny w czujniku na skutek zjawiska piezoelektrycznego. Sygnał z czujnika poprzez interfejs dociera do komputera i jest prezentowany na monitorze. Zaburzenie mechaniczne po odbiciu na końcu pręta dociera następnie do drugiego końca i ponownie odbija się na granicy metal–powietrze. Po dotarciu do czujnika kolejny raz impuls elektryczny jest rejestrowany w komputerze (cykl ten powtarza się wielokrotnie). Zastosowanie zestawu komputerowego umożliwia precyzyjne rejestrowanie szybkich zmian (rozdzielcość czasowa pomiaru wynosi 10 μs). Na podstawie położenia maksymów impulsów widocznych w oknie pomiarowym (rys. 7.4) należy wyznaczyć średni czas przebiegu zaburzenia Δt w pręcie (tam i z powrotem). Prędkość fal akustycznych można zatem wyznaczyć z prostej zależności:

$$v = \frac{2l}{\Delta t}, \quad (7.9)$$

gdzie l jest długością pręta.

Chcąc wyznaczyć moduł Younga, należy skorzystać z równania (7.8) po uprzednim wyznaczeniu gęstości ρ danego materiału. Można ją wyliczyć, dzieląc

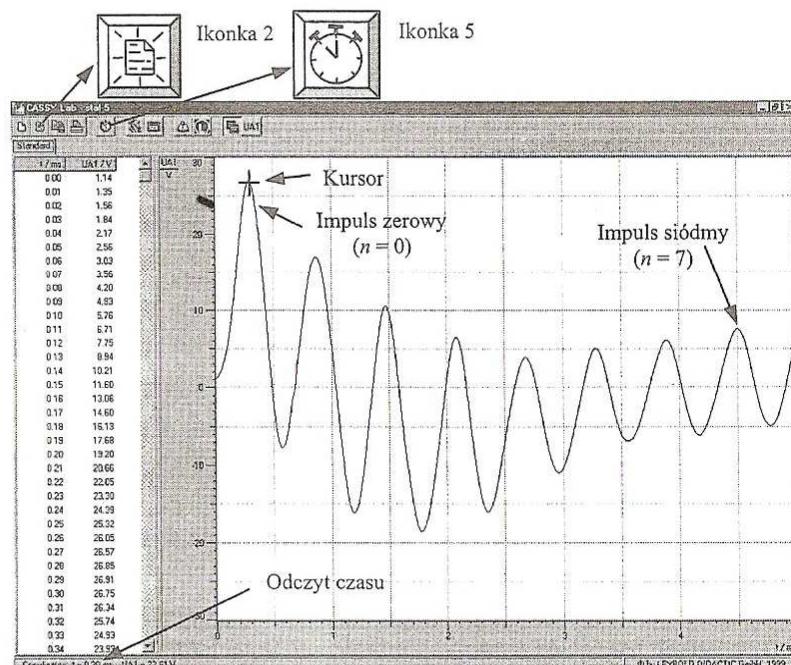
mąsę pręta przez jego objętość. Te ostatnie dwa parametry uzyskamy, ważąc badany pręt oraz mierząc jego wymiary geometryczne.

Tabela 7.1. Prędkość podłużnych fal sprężystych w prętach oraz moduł Younga dla wybranych metali w temperaturze 20°C

Rodzaj materiału	Prędkość [m/s]	Moduł Younga 10^{10} [N·m $^{-2}$]	Rodzaj materiału	Prędkość [m/s]	Moduł Younga 10^{10} [N·m $^{-2}$]
Stal	4990	21,5	Żelazo	5100	–
Mosiądz	3500	10,3	Ołów	1200	1,4–1,7
Miedź	3710	7,9–13	Cyna	2730	3,9–5,4
Aluminiów	5100	6,2–7,3	Nikiel	4780	20

Przebieg ćwiczenia

- Włączyć zasilanie interfejsu oraz komputer, a następnie otworzyć program *Cassylab*.
- Kliknąć myszką na ikonkę 2 (rys. 7.4) i otworzyć plik Pręty.



Rys. 7.4. Widok okna pomiarowego

- Włożyć wybrany pręt do uchwytu, a następnie delikatnie dosunąć go jednym końcem do czujnika piezoelektrycznego. Za pomocą śruby umocować pręt w uchwycie. *Uwaga:* czujnik piezoelektryczny jest urządzeniem delikatnym, w związku z czym należy uważać, aby go nie uszkodzić przez zbyt silny docisk.
- Włączyć program w stan czuwania przez wcisnięcie klawisza F9 lub kliknięcie na ikonkę 5 (rys. 7.4). Na ekranie powinien się pojawić napis No Trigger Signal.
- Delikatnie uderzyć młoteczkiem w koniec pręta (w środek powierzchni po przecznej pręta).
- Za pomocą myszki komputerowej ustawić cursor na maksimum zerowego impulsu i odczytać czas t_0 , a następnie przesunąć cursor na maksimum n -tego impulsu (czas t_n). Obliczyć różnicę czasów $\Delta t = (t_n - t_0)/n$. Pomiar powtórzyć kilkakrotnie dla tego samego pręta.
- Powtórzyć czynności z punktów 3–6 dla pozostałych prętów.
- Zważyć badane pręty, zmierzyć ich długość oraz średnicę.
- Ze wzoru (7.9) wyznaczyć prędkość rozchodzenia się fal akustycznych w badanych materiałach.
- Korzystając z wyników pomiarów masy prętów i ich wymiarów geometrycznych, wyznaczyć gęstość badanych materiałów, a następnie z przekształconego równania (7.8) ich moduły Younga.
- Obliczyć niepewność pomiarową wyznaczonych wartości i zestawić wyniki końcowe.
- Porównać otrzymane wyniki z wartościami zawartymi w tabeli 7.1.

Zestaw ćwiczeniowy

Komputer wraz z oprogramowaniem, interfcjs, czujnik piezoelektryczny, zestaw prętów, uchwyt, mały młotek, waga

Pojęcia kluczowe

- Ruch falowy
- Fale akustyczne
- Podział fal akustycznych
- Prędkość rozchodzenia się fal akustycznych
- Właściwości sprężyste ciał stałych (moduł Younga)

Stanisław Szuba

8. Pomiar przesunięcia fazowego w obwodzie prądu zmiennego

Cel ćwiczenia

Pomiar przesunięcia fazy prądu względem napięcia spowodowanego przez indukcyjność i pojemność oraz znalezienie warunków kompensacji przesunięć fazy i porównanie ze wzorem teoretycznym.

Wprowadzenie

Sila elektromotoryczna (SEM) wytworzana przez źródło może mieć wartość stałą albo może się zmieniać w czasie w sposób opisany różnymi funkcjami. Najczęściej spotykana jest funkcja harmoniczna (sinusoidalna). Również powszechnie jest stosowanie funkcji prostokątnych – SEM ma przez część okresu pewną wartość stałą, po czym skokowo przechodzi do innej wartości stałej. Przykładem zastosowania siły elektromotorycznej o przebiegu prostokątnym jest zegar taktujący w komputerze – SEM zmienia się skokowo od pewnej wartości, zależnej od technologii układów scalonych, do zera. W zastosowaniach specjalistycznych stosuje się funkcje trójkątne, piłokształtne i inne.

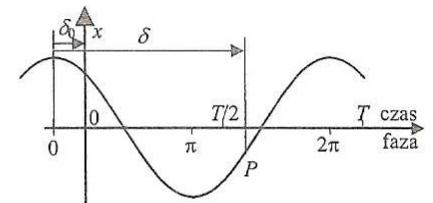
Funkcję harmoniczną w ogólnym przypadku opisuje jedno z równań:

$$x = A \sin(\omega t + \delta_0), \quad (8.1a)$$

$$x = A \cos(\omega t + \delta_0), \quad (8.1b)$$

gdzie x oznacza wychylenie od stanu równowagi, A – amplitudę, ω – częstotliwość kołową, t – czas.

Argument funkcji sinus i kosinus, w tym przypadku $(\omega t + \delta_0)$, nazywa się *fazą* drgania harmonicznego δ , gdzie δ_0 oznacza jej wartość w chwili $t = 0$ i jest *fazą początkową*. Faza jest wielkością określającą stan drgania w dowolnej chwili;

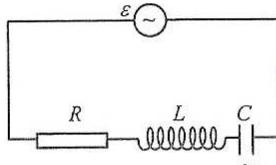


Rys. 8.1. Ilustracja pojęcia fazy drgania harmonicznego opisanego funkcją kosinus; przyjęto, że faza ma wartość zero, gdy funkcja osiąga maksimum; w chwili $t = 0$ faza wynosi δ_0 , a w dowolnie wybranym punkcie, oznaczonym P , $\delta = \omega t + \delta_0$; x oznacza wychylenie, a T – okres drgań

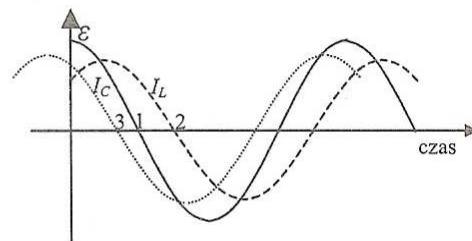
jest wyrażona w jednostkach kąta, a jej wartość zależy od wyboru stanu, któremu przypisujemy wartość fazy $\delta = 0$.

- Jeżeli przyjmiemy $\delta = 0$ w chwili, gdy wychylenie przechodzi przez zero i rośnie, to do opisu drgania stosujemy równanie (8.1a). Faza zerowa występuje w czasie $t = -\delta_0/\omega$. Faza kolejnych punktów przejścia przez zero wynosi π , 2π itd., kolejne maksima mają fazę równą $\pi/2$, $5\pi/2$ itd., a faza kolejnych minimów wynosi $3\pi/2$, $7\pi/2$ itd.
 - Jeżeli przyjmiemy $\delta = 0$ w chwili, gdy wychylenie osiąga wartość maksymalną (patrz rys. 8.1), do opisu matematycznego stosujemy równanie (8.1b). Maksimum wychylenia w tym przypadku przypada w chwili $t = -\delta_0/\omega$; na rysunku 8.1 wykres funkcji kosinus jest przesunięty w lewo. Kolejne maksima mają fazę równą 2π , 4π itd., faza kolejnych minimów wynosi π , 3π itd., a faza kolejnych punktów przejścia przez zero $\pi/2$, $3\pi/2$ itd.

Na przykład, wykres podobny do oznaczonego I_c na rysunku 8.3 można opisać w dwojakim sposobie (zakładając przesunięcie kosinusoidy 30° w lewo):
 $x = A \cos(\omega t + 30^\circ)$ lub $x = A \sin(\omega t + 120^\circ)$.



Rys. 8.2. Obwód prądu przemiennego RLC z siłą elektromotoryczną $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$



Rys. 8.3. Siła elektromotoryczna ε i natężenie prądu w funkcji czasu. Prąd I_L w obwodzie RL jest opóźniony w fazie, ponieważ określona fazę (punkt 2) osiąga później niż siła elektromotoryczna (punkt 1). Faza prądu I_C w obwodzie RC wyprzedza fazę siły elektromotorycznej

Do pomiaru przesunięcia fazy natężenia prądu względem fazy napięcia stosujemy źródło SEM sinusoidalnie zmiennej oraz opornik R , cewkę indukcyjną L i kondensator C , które tworzą obwód zamknięty przedstawiony na rysunku 8.2. Przyjmujemy, że faza początkowa SEM ma wartość zerową. W obwodzie popłynie prąd o natężeniu I , którego zależność od czasu będzie również funkcją harmoniczną, ale faza prądu w ogólnym przypadku może się różnić od fazy SEM (napięcia). Powyższe stwierdzenia mogą być wyrażone w postaci równań:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cos(\omega t), \quad (8.2a)$$

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (8.2b)$$

Faza SEM wynosi ωt , a faza prądu ($\omega t + \varphi$), więc φ jest różnicą faz prądu i napięcia. Różnica faz zależy od rodzaju i wartości elementów tworzących obwód: oporu, indukcyjności i pojemności (rys. 8.3).

Rozważmy przesunięcie fazy prądu względem fazy napięcia w trzech charakterystycznych obwodach zawierających: (a) tylko opór R , (b) opór i cewkę indukcyjną (obwód RL) oraz (c) opór i kondensator (obwód RC).

Obwód zawierający tylko opór

Prawo Kirchhoffa dla obwodu składającego się ze źródła prądu i oporu R wyraża się w postaci:

$$RI = \varepsilon \quad \text{lub} \quad RI_0 \cos(\omega t + \varphi) = \varepsilon_0 \cos \omega t. \quad (8.3)$$

Powyższe równanie ma rozwiązanie dla dowolnej wartości t tylko wtedy, gdy $\varphi = 0$. Stąd wniosek, że w obwodzie zawierającym tylko opór nie ma przesunięcia fazy prądu względem napięcia.

Obwód RL

Po dodaniu cewki o indukcyjności L w obwodzie występuje SEM źródła ε i SEM samoindukcji równa $-L \cdot dI/dt$. Zgodnie z prawem Kirchhoffa ta suma sił elektromotorycznych jest równa napięciu na oporze RI , co wyraża równanie:

$$\varepsilon - L \frac{dI}{dt} = RI , \quad (8.4)$$

które po uwzględnieniu zależności (8.2a) i (8.2b) oraz po obliczeniu pochodnej przyjmie postać:

$$\varepsilon_0 \cos \omega t - L I_0 \omega \sin(\omega t + \varphi) = R I_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (8.5)$$

Następnie, w równaniu tym rozwiniemy sinus i kosinus sumy kątów oraz uporządkujemy je tak, aby otrzymać następującą postać:

$$\sin \omega t(-RI_0 \sin \varphi - LI_0 \omega \cos \varphi) + \cos \omega t(RI_0 \cos \varphi - LI_0 \omega \sin \varphi - \varepsilon_0) = 0. \quad (8.6)$$

Żeby powyższe równanie miało zawsze rozwiązanie (dla wszystkich wartości t), współczynniki przy $\sin \omega t$ i przy $\cos \omega t$ muszą być równe zeru. Wyraża się to dwoma równaniami:

$$RI_0 \sin \varphi + LI_0 \omega \cos \varphi = 0, \quad (8.7)$$

$$RI_0 \cos \varphi - LI_0 \omega \sin \varphi - \varepsilon_0 = 0. \quad (8.8)$$

Równanie (8.7) pozwala na wyliczenie kąta φ , ponieważ

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{L\omega}{R}. \quad (8.9)$$

Z powyższego równania wynika, że obecność indukcyjności w obwodzie powoduje przesunięcie fazy prądu, które rośnie ze wzrostem indukcyjności, a także częstotliwości. Przesunięcie fazy ma wartość ujemną, co oznacza, że określona faza prądu pojawia się później niż ta sama faza napięcia (patrz rys. 8.3). Możliwe wartości kąta przesunięcia fazowego są zawarte w zakresie od 0 do $-\pi/2$. Przesunięcie fazowe nie występuje tylko wtedy, gdy w obwodzie nie ma indukcyjności (i oczywiście gdy prąd jest stały, gdy $\omega = 0$). Przesunięcie fazy wynosi $-\pi/2$, gdy $L = \infty$, jak również dla dowolnej indukcyjności, ale gdy $R = 0$.

Obwód RC

Gdy zamiast indukcyjności w obwodzie występuje pojemność C , to w chwili, gdy ładunek na okładkach kondensatora wynosi q , napięcie na kondensatorze wynosi q/C , a prawo Kirchhoffa przyjmie postać:

$$\varepsilon = RI + \frac{q}{C}. \quad (8.10)$$

Ladunek można powiązać z natężeniem prądu następującą zależnością:

$$q = \int I dt = -\frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi). \quad (8.11)$$

Do równania (8.10) wstawimy teraz I , q oraz ε odpowiednio z równań (8.2b), (8.11) i (8.2a). W wyniku otrzymujemy równanie:

$$\varepsilon_0 \cos \omega t = RI_0 \cos(\omega t + \varphi) - \frac{I_0}{\omega C} \sin(\omega t + \varphi). \quad (8.12)$$

Następnie, w tym równaniu rozwiniemy sinus i kosinus sumy kątów oraz uporządkujemy je tak, aby otrzymać następującą postać:

$$\sin \omega t \left(\frac{I_0}{\omega C} \cos \varphi - RI_0 \sin \varphi \right) + \cos \omega t \left(\frac{I_0}{\omega C} \sin \varphi - RI_0 \cos \varphi + \varepsilon_0 \right) = 0. \quad (8.13)$$

Powyższe równanie będzie zawsze miało rozwiązaniami (dla wszystkich wartości t) pod warunkiem, że współczynniki przy $\sin \omega t$ i przy $\cos \omega t$ będą równe zero. Wyraża się to dwoma równaniami:

$$\frac{I_0}{\omega C} \cos \varphi - RI_0 \sin \varphi = 0, \quad (8.14)$$

$$\frac{I_0}{\omega C} \sin \varphi - RI_0 \cos \varphi + \varepsilon_0 = 0. \quad (8.15)$$

Równanie (8.14) umożliwia wyliczenie kąta φ , którego tangens można zapisać następująco:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega RC}. \quad (8.16)$$

Widzimy, że pojemność w obwodzie powoduje przesunięcie fazy prądu, które maleje ze wzrostem pojemności, a także częstotliwości kołowej. Jednocześnie przesunięcie fazy ma wartość dodatnią, co oznacza, że określona faza prądu pojawia się wcześniej niż ta sama faza napięcia (patrz rys. 8.3). Skrajnymi wartościami kąta przesunięcia fazowego są: $\varphi = \pi/2$ dla $C = 0$ i $\varphi = 0$ dla $C = \infty$.

Obwód RLC

Gdy w obwodzie znajdują się wszystkie elementy, tzn. opór, indukcyjność i pojemność połączone szeregowo, to przesunięcie fazowe jest rezultatem przeciwnego działania indukcyjności i pojemności i jest określone wzorem:

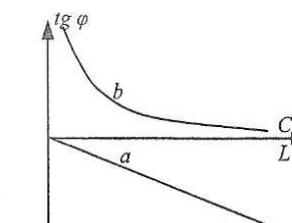
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\omega RC} - \frac{\omega L}{R}. \quad (8.17)$$

Mожет być ono zarówno dodatnie, jak i ujemne. Szczególna sytuacja występuje, gdy oba wyrazy po prawej stronie są równe. Jest tak, gdy spełniony jest warunek:

$$LC = \frac{1}{\omega^2}. \quad (8.18)$$

Wówczas przesunięcie fazy jest zerowe, a obwód RLC zachowuje się, jakby zawierał tylko opór R .

Ilustracją równania (8.17) jest rysunek 8.4, na którym przedstawiono przesunięcie fazy w funkcji indukcyjności i w funkcji pojemności. Zależność od indukcyjności odnosi się do obwodu bez kondensatora¹; dodanie kondensatora o określonej



Rys. 8.4. Przesunięcie fazowe w funkcji (a) indukcyjności (dla $C = \infty$) i (b) pojemności (dla $L = 0$)

¹ Brak kondensatora jest równoważny obecności kondensatora o pojemności $C = \infty$. Oznacza to, że równanie (8.17) dla tego przypadku możemy stosować dwojako: albo odrzucając pierwszy wyraz, albo zostawiając go i obliczając wartość dla $C = \infty$. Taka wartość pojemności przy braku kondensatora może być też przyjęta na podstawie zależności pojemności kondensatora od odległości między okładkami. Otóż, brak kondensatora oznacza, że ta odległość jest nieskończonie mała, a wtedy pojemność jest nieskończonie duża.

pojemności powoduje przesunięcie wykresu (a) do góry. Podobnie, zależność od pojemności odnosi się do obwodu, w którym $L = 0$, a dodanie stałej indukcyjności powoduje przesunięcie wykresu (b) ku dołowi. W ostatnich dwóch przypadkach wykresy przechodzą przez osz odciętych w punkcie spełniającym warunek (8.18).

Metody pomiarowe

Pomiar bezpośredni

Po połączeniu obwodu RLC z wejściami Y oscyloskopu dwukanałowego pracującego w trybie $Y-t$ (rys. 8.5) na ekranie otrzymuje się dwa wykresy: napięcia i natężenia przesunięte w fazie, podobne do przedstawionych na rysunku 8.3.

Przesunięcie fazowe jest proporcjonalne do odległości d między punktami o tej samej fazie na obu wykresach, np. między punktami przecięcia z osią odciętych. Długość odcinka odpowiadającego różnicy faz 2π oznaczmy przez D . Przesunięcie fazowe φ obliczymy na podstawie proporcji:

$$\frac{\varphi}{d} = \frac{2\pi}{D}. \quad (8.19)$$

Metoda figur Lissajous

Przesunięcie fazowe między napięciem a natężeniem prądu możemy badać za pomocą oscyloskopu pracującego w trybie $Y-X$, przykładając na płytka odchylenia pionowego Y przebieg napięcia, a na płytka odchylenia poziomego X przebieg prądu (więcej o oscyloskopie w rozdziale 20).

Ruch plamki świetlnej na ekranie oscyloskopu jest wynikiem nałożenia się dwóch prostopadłych ruchów harmonicznych o tej samej częstotliwości i amplitudzie oraz różnicę faz φ . Ruch wypadkowy jest ruchem po krzywej zwanej *figurą Lissajous* (czytaj *liszążu*), której kształt zależy w ogólności od stosunku częstotliwości, amplitud, a także od różnicy faz obu drgań składowych. Zasadę konstrukcji figury Lissajous i kilka przykładów podano w skrypcie S. Szuby *Ćwiczenia laboratoryjne z fizyki*¹.

Jeżeli wartości częstotliwości i amplitudy obu drgań są takie same, jedynym parametrem określającym kształt figury Lissajous jest różnica faz φ .

Oznaczmy wychylenie chwilowe w kierunku pionowym przez y , w kierunku poziomym przez x i wychylenia maksymalne odpowiednio przez A_y i A_x . Przyjmijmy, że faza początkowa drgań w kierunku Y wynosi zero, a faza początkowa drgań w kierunku X wynosi φ . W tej sytuacji φ jest również różnicą faz obu drgań lub inaczej przesunięciem fazowym drgań x względem drgań y . Zmiany obu wychyleń w funkcji czasu można opisać za pomocą równań:

$$x = A_x \sin(\omega t + \varphi), \quad (8.20)$$

¹ Poznań, Wyd. Politechniki Poznańskiej 2007.

$$y = A_y \sin(\omega t). \quad (8.21)$$

Kształt figury Lissajous można łatwo określić analitycznie tylko w szczególnych przypadkach.

- Gdy różnica faz wynosi zero, powyższy układ równań można przekształcić do postaci:

$$y = \frac{A_y}{A_x} x. \quad (8.22)$$

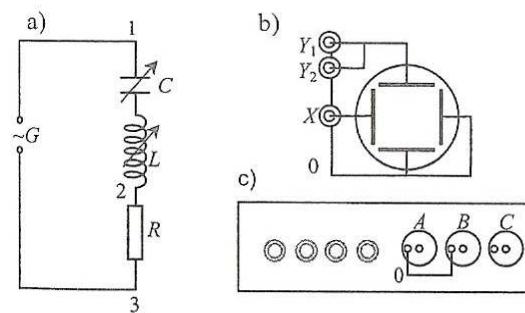
Otrzymane równanie przedstawia prostą o współczynniku nachylenia A_y/A_x .

- Gdy różnica faz wynosi 90° , po wyeliminowaniu czasu z układu równań (8.20) i (8.21) otrzymamy równanie elipsy symetrycznej względem osi x i y :

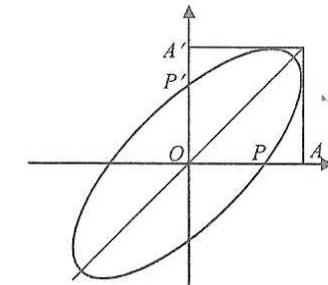
$$\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} = 1. \quad (8.23)$$

W pozostałych przypadkach figura Lissajous jest pochyloną elipsą, której spłaszczenie zależy od różnicy faz. Przesunięcie fazowe można wyznaczyć na podstawie właściwości elipsy. Punkty, w których elipsa przecina oś x (rys. 8.6), mają rzędną $y = 0$, stąd na podstawie równania (8.21) $\omega t = 0$ lub $\omega t = \pi$. Z równania (8.20) wynika, że w tej sytuacji odcięte punktów przecięcia wynoszą: $OP = A_x \sin \varphi$ i $OP' = -A_x \sin \varphi$. Amplituda drgań A_x jest długością odcinka OA . Po zmierzeniu odcinków OP oraz OA znajdujemy sinus przesunięcia fazy i samo przesunięcie:

$$\sin \varphi = \frac{OP}{OA}, \quad \varphi = \arcsin \frac{OP}{OA}. \quad (8.24)$$



Rys. 8.5. Schemat zestawu do pomiaru przesunięcia fazowego. W skład zestawu wchodzi układ RLC (a) oraz oscyloskop analogowy (b) lub interfejs pomiarowy (c) i komputer. Połączenia obwodu z oscyloskopem: 1-Y₁, 2-Y₂, 3-0 (pomiar bezpośredni) lub 1-Y₁, 2-X, 3-0 (metoda figur Lissajous); połączenia obwodu z interfejsem: 1-A, 2-B, 3-0



Rys. 8.6. Figura Lissajous dla różnych faz różnej od zera i 90° oraz dla równych okresów

Pomiary i obliczenia

W celu praktycznego wyznaczenia przesunięcia fazowego tworzymy obwód elektryczny przedstawiony na rysunku 8.5 i łączymy go z oscyloskopem analogowym lub komputerowym. Prąd zmienny ze źródła (generatora) płynie przez szeregowo połączone cewkę indukcyjną L , kondensator C i opór omowy R . Użytkownik w szerokim zakresie może zmieniać wartość każdego elementu obwodu. Całkowite napięcie panujące między punktami 1 i 3 (U_{13}) ma fazę SEM generatora G , a napięcie między punktami 2 i 3 (U_{23}) jest proporcjonalne do natężenia prądu ($U = RI$), więc ma taką samą fazę jak prąd. Sposób dołączenia napięć do oscyloskopu zależy od stosowanej metody. Jeżeli w zestawie nie ma oscyloskopu dwukanałowego, można stosować tylko metodę figur Lissajous.

- Stosując metodę pomiaru bezpośredniego, oba napięcia dołączamy do wejście Y oscyloskopu 2-kanałowego, natomiast oś X jest osią czasu.
- Stosując metodę figur Lissajous, napięcie U_{13} podajemy na wejście Y , a napięcie U_{23} na wejście X .

Pomiary sprowadzają się do zmierzenia odległości omówionych w metodach pomiarowych. W przypadku oscyloskopu analogowego odległość mierzy się za pomocą podziałki na ekranie, natomiast w przypadku oscyloskopu komputerowego używa się wskaźnika graficznego poruszanej myszką, podającego współrzędne wskazanego punktu.

Dla określenia *znaku przesunięcia fazowego* w pomiarze bezpośredniim należy przyporządkować odpowiednie wykresy na oscyloskopie napięciu i natężeniu prądu. Jednym ze sposobów przyporządkowania może być chwilowa zmiana natężenia prądu przez zmianę oporu R . Wykres, który reaguje na tę zmianę, prezentuje natężenie prądu, ten zaś, który się nie zmienił, prezentuje siłę elektromotoryczną.

Celem ćwiczenia jest zbadanie przesunięcia fazowego spowodowanego przez indukcyność, pojemność oraz przez oba elementy jednocześnie. W zależności od potrzeby wyłączamy jeden z elementów, zwierając jego zaciski. W przypadku pełnego obwodu RLC wyznaczamy ponadto parametry kompensacji przesunięć fazy i porównujemy ze wzorem teoretycznym (8.18).

Przesunięcia fazowe wyznaczamy na podstawie wykonanych pomiarów oraz obliczamy je teoretycznie, stosując wzory (8.9), (8.16) i (8.17). W tych wzorach występuje opór R , który w rzeczywistości składa się z trzech składników: oporu zewnętrznego R_z , oporu wewnętrznego generatora R_g i oporu cewki R_L . W rezultacie R zastępujemy sumą oporów:

$$R = R_z + R_g + R_L. \quad (8.25)$$

Wartość R_z ustawia się za pomocą opornika regulowanego, R_g i R_L są podawane w instrukcji szczegółowej; R_g jest stałe dla danego źródła SEM, a R_L ma różne wartości dla każdej cewki.

Przebieg ćwiczenia

Metoda figur Lissajous

1. Połączyć obwód według rysunku 8.5 do pomiaru metodą figur Lissajous i wyłączyć pojemność C przez zwarcie zacisków kondensatora.
2. Manipulując wzmacnieniami oscyloskopu, napięciem generatora i wartością indukcyjności L doprowadzić do uzyskania elipsy zajmującej większą część ekranu.
3. Zgrubnie wyznaczyć zakres indukcyjności, w którym elipsa zmienia wyraźnie spłaszczenie.
4. Dla różnych wartości L z tego zakresu (oznaczonych jako seria L) zmierzyć odcinki OP i OA (rys. 8.6). Dla jednego z pomiarów ocenić niepewność pomiarową.
5. Zamiast indukcyjności wyłączyć zmienną pojemność C (przy $L = 0$) i dalej postępować analogicznie jak w punktach 1–3.
6. Dla różnych wartości C (oznaczonych jako seria C) zmierzyć odcinki OP i OA .
7. Ustawić wartość L w pobliżu środka zmierzzonego przedziału i ponownie zmierzyć odcinki OP i OA dla całego przedziału wartości C (seria LC).

Metoda bezpośrednią

1. Połączyć obwód do pomiarów metodą bezpośrednią.
2. Na wykresie SEM lub prądu zmierzyć na ekranie odcinek odpowiadający różnicy faz 2π .
3. Dla takich samych serii jak w metodzie figur Lissajous zmierzyć odległość między punktami o tej samej fazie na obu wykresach.

Obliczenia i wykresy¹

1. Dla każdego pomiaru obliczyć przesunięcie fazy odpowiednio ze wzorów (8.19) lub (8.24).
2. Wykreślić na jednym wykresie (o dwóch skalach na osi odciętych) zależności $\varphi = f(L)$ oraz $\varphi = f(C)$ osobno dla każdej metody, uwzględniając znak φ .
3. Obliczyć $\operatorname{tg}\varphi$ dla wszystkich φ oraz wartości teoretyczne $\operatorname{tg}\varphi$ odpowiednio ze wzorów (8.9), (8.16) i (8.17).
4. Wykreślić na jednym wykresie (o dwóch skalach na osi odciętych) zależności $\operatorname{tg}\varphi = f(L/R)$ oraz $\operatorname{tg}\varphi = f(CR)$ osobno dla każdej metody, uwzględniając znak fazy φ .
5. Obliczyć wartości niepewności pomiarowej dla kilku punktów, stosując metodę różniczki zupełnej do równań (8.19) i (8.24). Wynik obliczeń jest wyrażony w radianach.
6. Nanieść na wykres przykładowe prostokąty niepewności.

¹ Ze względu na wielokrotne powtarzanie obliczeń polecanie jest użycie arkusza kalkulacyjnego, np. Excela.

Zestaw ćwiczeniowy

Oscyloskop (rozdz. 20), generator, opornik regulowany, indukcyjność dekadowa, kondensator dekadowy, interfejs pomiarowy, komputer

Pojęcia kluczowe

- Prąd przemienny, równanie prądu i napięcia, częstotliwość, okres, częstotliwość kołowa
- Faza ruchu drgającego
- Składanie ruchów harmonicznych, figury Lissajous, postać figury Lissajous dla różnicy faz $0, \pi/2$ i innych
- Wyznaczanie przesunięcia fazowego na podstawie pomiarów bezpośrednich
- Wyznaczanie przesunięcia fazowego na podstawie kształtu figury Lissajous
- Określenie znaku przesunięcia fazowego w obu metodach

9. Analiza harmoniczna

Cel ćwiczenia

Uzyskanie widma fourierowskiego prostych funkcji za pomocą programu komputerowego, pomiar częstotliwości i amplitud składowych harmonicznych, porównanie zmierzonych wartości z wartościami teoretycznymi.

Wprowadzenie

Analiza harmoniczna jest matematycznym narzędziem analizowania dowolnej funkcji periodycznej przez jej rozłożenie na sumę znacznie prostszych funkcji harmonicznych (sinusoidalnych) tworzących szereg Fouriera. Nazwa szeregu wiąże się z nazwiskiem francuskiego matematyka i fizyka Josepha Fouriera, który wprowadził go w swojej pracy na temat przewodnictwa ciepła *Theorie Analytique de la Chaleur* (*Analityczna teoria ciepła*), opublikowanej w 1822 roku. Analiza Fouriera ma bardzo duże zastosowania, między innymi w analizie drgan, akustyce, optyce, spektroskopii, przetwarzaniu obrazów i kompresji danych (np. obrazów – JPG czy dźwięku – MP3).

Program komputerowy *Fourier-idea* znakomicie ułatwia zrozumienie idei analizy harmonicznej.

Pokazuje on składowe harmoniczne dla wielu funkcji w postaci liczbowej i w postaci wykresu.

Użytkownik może tworzyć krok po kroku widmo i zobaczyć wynik sumowania harmonicznych.

Pobierz program ze strony internetowej Wydziału Fizyki Technicznej i poćwicz analizę harmoniczną przed przystąpieniem do ćwiczenia.

Przypomnijmy, że funkcja harmoniczna o okresie T ma jedną z postaci:

$$\begin{aligned} h(t) &= a \cos(\omega t), \\ h(t) &= b \sin(\omega t), \\ h(t) &= a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t), \end{aligned} \tag{9.1}$$

gdzie a i b są amplitudami, ω – częstotliwością kołową ($\omega = 2\pi/T$), a zmienna t może oznaczać czas albo położenie.

Na rysunku 9.1 przedstawiono wykres pewnej funkcji $f(t)$, która została utworzona przez dodanie czterech znanych funkcji harmonicznych mających różne okresy i różne amplitudy. Mamy więc pewność, że wypadkowa funkcja jest sumą funkcji harmonicznych. Analiza harmoniczna jest procesem odwrotnym, tzn. znana jest funkcja $f(t)$, a chcemy się dowiedzieć, jakie są częstotliwość i amplituda składowych funkcji harmonicznych.

Okresowa funkcja $f(t)$ o okresie T może być rozwinięta w szereg Fouriera. To twierdzenie wyraża się matematycznie za pomocą równania:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)], \quad (9.2)$$

gdzie a_n i b_n są odpowiednio parzystymi i nieparzystymi *współczynnikami Fouriera*, a ω jest częstotliwością kołową (równą $2\pi/T$) zwaną *częstotliwością podstawową*.

Dla przykładowej funkcji na rysunku 9.1 wartości kilku początkowych współczynników Fouriera zawiera tabela poniżej; wszystkie pozostałe są zerowe.

a_0	a_1	b_1	a_2	b_2	a_3	b_3	a_4	b_4	a_5	b_5	a_6	b_6
0,9	1,2	0	0	0	0,3	2,5	3	0	0	0	2	0

Częstotliwości kołowe składowych harmonicznych (widoczne w argumencie funkcji sin i cos) są całkowitą wielokrotnością (n) częstotliwości podstawowej, np. ω , 2ω , 3ω ..., a okresy składowych harmonicznych są n -krotnie mniejsze od okresu podstawowego. Składowa o częstotliwości kołowej $n\omega$ (o okresie T/n) nazywa się n -tą harmoniczną, z wyjątkiem $n = 1$ (podstawowa) i $n = 0$ (stała).

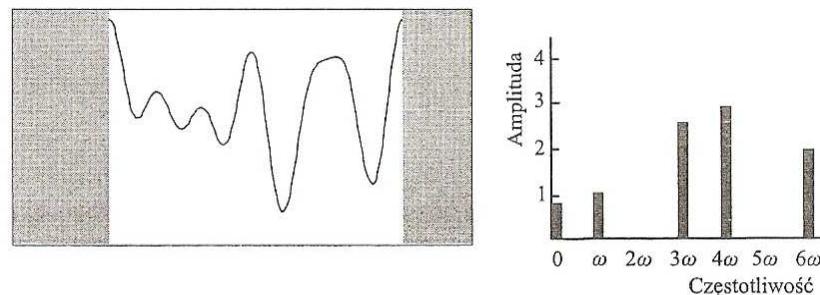
Amplituda n -tej harmonicznej A_n jest dana wyrażeniem:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \quad (9.3)$$

Zbiór amplitud wszystkich harmonicznych tworzy *widmo fourierowskie*, przedstawiane najczęściej w postaci wykresu słupkowego lub ciągłego, w którym na osi odciętych występuje częstotliwość. Dla wspomnianej już przykładowej funkcji widmo ma postać pokazaną na rysunku 9.1. Jak widać, szereg Fouriera (9.2) pozwala przejść od postaci analitycznej funkcji (lub wykresu) do postaci widmowej. To przejście nazywa się *transformacją Fouriera*.

Obliczanie współczynników Fouriera

Aby wyznaczyć analitycznie współczynniki Fouriera, dokonujemy pewnych operacji na równaniu (9.2), mianowicie mnożymy obie strony równania przez



Rys. 9.1. Funkcja złożona z czterech funkcji harmonicznych: $f(t) = 0,9 + 1,2 \cos(\omega t) + 0,3 \cos(3\omega t) + 2,5 \sin(3\omega t) + 3 \cos(4\omega t) + 2 \cos(6\omega t)$; biały obszar obejmuje pojedynczy okres T , ω oznacza częstotliwość kołową ($\omega = 2\pi/T$); po prawej widmo fourierowskie funkcji

$\cos(m\omega t)$ (m jest dowolną liczbą całkowitą dodatnią) i następnie całkujemy w granicach od dowolnej wartości $t = t_1$ do wartości większej o okres T . Otrzymujemy w ten sposób równość:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(m\omega t) dt = \int_{t_1}^{t_1+T} \cos(m\omega t) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \right] dt. \quad (9.4)$$

Składniki wyrażenia podcałkowego po prawej stronie mają wartości:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} \cos(m\omega t) \left[\frac{a_0}{2} \right] dt = 0, \quad (9.4a)$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T} a_n \cos(m\omega t) \cos(n\omega t) dt = a_n \frac{T}{2} \quad \text{dla } m = n, \quad (9.4b)$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T} a_n \cos(m\omega t) \cos(n\omega t) dt = 0 \quad \text{dla } m \neq n, \quad (9.4c)$$

$$\int_{t_1}^{t_1+T} b_n \cos(m\omega t) \sin(n\omega t) dt = 0 \quad \text{dla wszystkich } n. \quad (9.4d)$$

Uwzględniając równania (9.4)–(9.4d), otrzymujemy równanie pozwalające wyliczyć parzyste współczynniki Fouriera:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (9.5a)$$

W celu obliczenia współczynników nieparzystych wykonujemy analogiczne rozważania, zamieniając w równaniu (9.4) $\cos(m\omega t)$ na $\sin(m\omega t)$. W rezultacie otrzymujemy:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\omega t) dt. \quad (9.5b)$$

Jeżeli w równaniu (9.4) przyjmiemy $m = 0$, uprości się ono do postaci:

$$\int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt = \int_{t_1}^{t_1+T} \frac{a_0}{2} dt,$$

z której łatwo można obliczyć współczynnik a_0 . Po scałkowaniu prawej strony i przekształceniu współczynnik a_0 będzie miał postać:

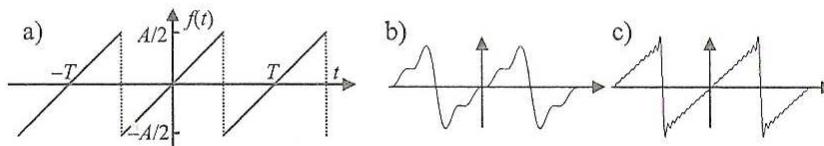
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) dt. \quad (9.5c)$$

Współczynniki Fouriera dla wybranych funkcji

Jeżeli znana jest funkcja $f(t)$, równania (9.5a–c) pozwalają na obliczenie wartości liczbowych współczynników Fouriera. Rachunki analityczne są łatwe tylko w przypadku prostych funkcji, np. piłokształtnej, prostokątnej czy trójkątnej. W innych przypadkach całkowanie jest bardziej skomplikowane; wówczas stosuje się numeryczne obliczanie współczynników za pomocą komputera.

PRZYKŁAD – obliczanie współczynników Fouriera dla funkcji piłokształtnej

Funkcja piłokształtna zmienia się liniowo w ramach pojedynczego okresu, na granicy okresu skokowo wraca do wartości z początku poprzedniego okresu i następnie znowu powtarza przebieg liniowy (rys. 9.2a). W ramach jednego okresu możemy ją wyrazić w postaci równania: $f(t) = kt$, gdzie k jest współczynnikiem nachylenia. Do znalezienia



Rys. 9.2. Funkcja piłokształtna a) przebieg matematyczny, b) suma 4 składowych harmonicznych, c) suma 20 składowych

współczynników Fouriera wykorzystamy równania (9.5) i wstawimy do nich aktualną postać funkcji. Równanie współczynników parzystych przyjmie postać:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} kt \cos(n\omega t) dt. \quad (9.6a)$$

Można łatwo sprawdzić, że funkcja podcałkowa jest antysymetryczna, tzn. zamiana t na $-t$ powoduje tylko zmianę znaku, a nie wartości. Całka takiej funkcji jest zerem, a więc wszystkie *parzyste współczynniki Fouriera są zerowe*:

$$a_n = 0 \quad (\text{dla wszystkich } n).$$

Analogicznie, równanie (9.5b) przyjmuje postać:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} kt \sin(n\omega t) dt. \quad (9.6b)$$

Teraz funkcja podcałkowa jest symetryczna, co oznacza, że wartość całki w granicach od $-T/2$ do zera jest taka sama jak w granicach od 0 do $T/2$. Można więc napisać:

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} kt \sin(n\omega t) dt = \frac{4}{T} \left[-\frac{kt \cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_0^{T/2} + \left[-\frac{k \sin(n\omega t)}{n^2 \omega^2} \right]_0^{T/2}. \quad (9.6c)$$

Drugi człon równania (9.6c) jest wynikiem całkowania przez części. Po wstawieniu granic całkowania i uwzględnieniu, że $kT = A$ (patrz rys. 9.2a) otrzymujemy ostatecznie:

$$b_n = \frac{-A}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{A}{n\pi} (-1)^{n+1}. \quad (9.6d)$$

Z równania (9.6d) wynika, że kolejne nieparzyste współczynniki Fouriera funkcji piłokształtnej są na przemian dodatnie i ujemne, a ich wartości maleją ze wzrostem n . Rozwinięty szereg Fouriera ma postać:

$$f(t) = \frac{A}{\pi} \sin(\omega t) - \frac{A}{2\pi} \sin(2\omega t) + \frac{A}{3\pi} \sin(3\omega t) + \dots \quad (9.6e)$$

Rysunki 9.2b i 9.2c przedstawiają sumy odpowiednio czterech i dwudziestu wyrazów szeregu Fouriera. Liczba potrzebnych składowych harmonicznych konieczna do osiągnięcia wystarczającej zgodności z funkcją wyjściową zależy od postaci funkcji; im wykres funkcji bardziej odbiega od sinusoidy, tym liczba składowych jest większa. Na przykład, dla funkcji piłokształtnej i trójkątnej dostateczną zgodność osiąga się, uwzględniając odpowiednio 20 i 4 składowe harmoniczne.

Procedura podobna do zastosowanej w powyższym przykładzie pozwala na obliczenie współczynników Fouriera również dla innych funkcji. Szczegółowe rachunki można znaleźć w innych źródłach. Poniżej podane są wyniki dla wybranych prostych funkcji.

Dla funkcji *prostokątnej* (antysymetrycznej względem osi Y , o współczynniku wypełnienia 0,5 i wartościach w zakresie $-A/2 \leq f(t) \leq A/2$):

$$a_n = 0 \quad (\text{dla wszystkich } n), \quad (9.7a)$$

$$b_n = \frac{2A}{n\pi} \quad (\text{dla } n = 2k-1), \quad (9.7b)$$

$$b_n = 0 \quad (\text{dla } n = 2k), \quad (9.7c)$$

$$f(t) = \frac{2A}{\pi} \sin(\omega t) + \frac{2A}{3\pi} \sin(3\omega t) + \frac{2A}{5\pi} \sin(5\omega t) + \dots \quad (9.7d)$$

W powyższych równaniach $k = 1, 2, 3, \dots$, więc na przykład $2k-1$ może przyjmować wartości 1, 3, 5, 7, ...

Dla funkcji *trójkątnej* (symetrycznej względem osi Y , o podstawie opartej na osi X i wysokości A):

$$a_0 = 1, \quad (9.8a)$$

$$a_n = \frac{4A}{n^2\pi^2} \quad (\text{dla } n = 2k - 1), \quad (9.8b)$$

$$a_n = 0 \quad (\text{dla } n = 2k), \quad (9.8c)$$

$$b_n = 0 \quad (\text{dla wszystkich } n), \quad (9.8d)$$

$$f(t) = \frac{4A}{\pi^2} \cos(\omega t) + \frac{4A}{9\pi^2} \cos(3\omega t) + \frac{4A}{25\pi^2} \cos(5\omega t) + \dots \quad (9.8e)$$

Ogólne właściwości współczynników Fouriera

Wartości bezwzględne współczynników Fouriera, oprócz a_0 , zależą wyłącznie od kształtu funkcji, natomiast ich znaki oraz wartość a_0 zależą ponadto od położenia funkcji w układzie współrzędnych.

- Dla funkcji symetrycznej wszystkie współczynniki b_n są zerowe.
- Dla funkcji antysymetrycznej – wszystkie a_n są zerowe.
- Jeżeli funkcja nie ma symetrii względem osi Y , to niezerowe wartości przyjmują zarówno a_n , jak i b_n (niekoniecznie wszystkie).
- Dodanie do funkcji dowolnej stałej, widoczne na wykresie jako przesunięcie funkcji wzdłuż osi Y , powoduje tylko zmianę a_0 .
- Przesunięcie funkcji wzdłuż osi odciętych (przez dodanie stałej do argumentu) prowadzi do zmiany rodzaju lub utraty symetrii.

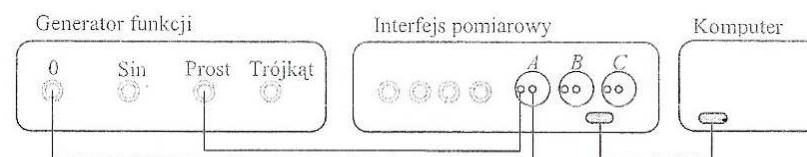
Jakiekolwiek przesuwanie określonej funkcji nie zmienia widma fourierowskiego, ponieważ składowe widma zależą tylko od kwadratów współczynników (patrz równanie (9.3)).

Pomiar

Celem ćwiczenia jest

- uzyskanie widma fourierowskiego prostych funkcji,
- pomiar częstotliwości i amplitud składowych harmonicznych,
- porównanie wartości zmierzonych z wartościami teoretycznymi.

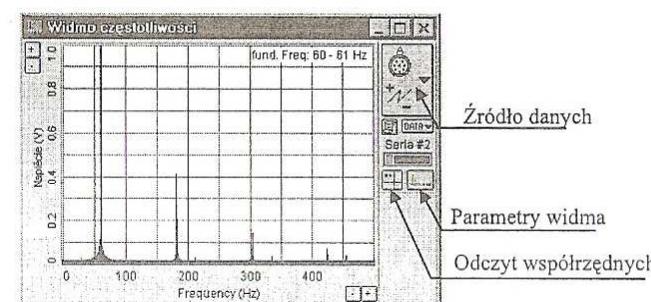
Zestaw ćwiczeniowy składa się z generatora funkcji, interfejsu pomiarowego i komputera z oprogramowaniem (rys. 9.3). Generator funkcji jest urządzeniem wytwarzającym periodyczne napięcie, którego wykres czasowy przypomina prostokąty lub trójkąty. Poszczególne funkcje mają osobne gniazda wyjściowe. Komputerowy układ pomiarowy składa się z interfejsu, komputera i oprogramowania. Dokładniejszy opis zestawu i programu obsługi znajduje się w rozdziale 20. Przed rozpoczęciem pomiarów należy dołączyć do wejścia analogowego dwa okna wyświetlania danych – Oscyloskop i SPF (szybkie przekształcenie Fouriera). Możliwe jest automatyczne ustawienie wszystkich parametrów ćwiczenia przez otwarcie pliku konfiguracyjnego; jeżeli taki plik nie jest dostępny, czynności należy wykonać samodzielnie.



Rys. 9.3. Układ do analizy harmonicznej

Badany przebieg z generatora jest doprowadzony do interfejsu, gdzie jest przetwarzany na dane cyfrowe i przesyłany do okna oscyloskopu. Jednocześnie dane cyfrowe są analizowane przez program obliczający współczynniki Fouriera i następnie wyświetlający widmo w oknie SPF. Przykładowe widoki obu okien przedstawiono na rysunkach 9.4 i 20.6.

Czynności pomiarowe sprowadzają się do odczytania w oknie oscyloskopu okresu funkcji złożonej i jej amplitudy oraz odczytania w oknie SPF częstotliwości i amplitud składowych widma. Do odczytania współrzędnych używamy ruchomego kurSORA w kształcie krzyża, który pojawia się zamiast normalnego kurSORA myszki po naciśnięciu przycisku Odczyt współrzędnych. Współrzędne punktu aktualnie wskazywanego przez środek krzyża są pokazywane na odpowiednich osiach.



Rys. 9.4. Widmo otrzymane za pomocą programu *Science Workshop*

Analiza wyników pomiarów

Pierwsze porównanie parametrów zmierzonych i teoretycznych polega na zestawieniu występujących w widmach wartości częstotliwości. W przykładowym widmie drgania prostokątnego, przedstawionym na rysunku 9.4, znajdujemy częstotliwość podstawową 60 Hz oraz wartości częstotliwości 180, 300 i 420 Hz, które są 3, 5 i 7 razy większe, a więc reprezentują nieparzyste harmoniczne. W widmie brak parzystych harmonicznych. Taki zestaw harmonicznych zgadza się z przewidywaniami teoretycznymi – ze wzorów (9.7) wynika bowiem, że dla parzystych n

zarówno a_n , jak i b_n są zerowe. W widmie występują ponadto małe pikи o częstotliwości 310, 330 i 445 Hz, które nie są całkowitą wielokrotnością częstotliwości podstawowej; ich istnienie oznacza, że drgania wytwarzane przez generator nie są dokładnie prostokątne.

Drugi etap analizy widma polega na obliczeniu współczynników Fouriera na podstawie amplitudy składowych. Składowa widma zależy od obu współczynników – a_n i b_n (patrz równanie (9.3)), więc w ogólnym przypadku nie można tych współczynników wyznaczyć z amplitudy. Jednakże dla badanych funkcji jeden ze współczynników jest równy零 dla wszystkich wartości n (patrz równania (9.7a) i (9.8d)), więc amplituda jest równa współczynnikowi Fouriera.

Dla wykresu funkcji na oscyloskopie można arbitralnie ustawić układ współrzędnych. Dla celów ćwiczenia należy przyjąć go w taki sposób, aby były spełnione założenia równań (9.7) i (9.8). Wynikiem analizy widma powinno być zestawienie zmierzonych i teoretycznych współczynników Fouriera badanych funkcji.

Przebieg ćwiczenia

1. Połączyć układ według rysunku 9.3.
2. Uruchomić program *Science Workshop*.
3. W oknie oscyloskopu odczytać okres i amplitudę badanej funkcji.
4. W oknie STF odczytać częstotliwość i amplitudy wszystkich składowych widma.
5. Zestawić niezerowe i zerowe składowe widma w tabeli i porównać je z zestawem teoretycznym. Zrobić wykres $A = f(\omega)$ podobny do przedstawionego na rysunku 9.1.
6. Obliczyć teoretyczne i doświadczalne współczynniki Fouriera i zrobić ich zestawienie umożliwiające porównanie.

Zestaw ćwiczeniowy

Generator funkcyjny, interfejs pomiarowy, komputer, program *Science Workshop*

Pojęcia kluczowe

- Funkcje harmoniczne: równania, funkcje złożone z funkcji harmonicznych, analiza harmoniczna
- Rozwinięcie funkcji w szereg Fouriera, współczynniki Fouriera, częstotliwość podstawowa, częstotliwość i okresy składowych harmonicznych, amplituda składowych, widmo fourierowskie
- Metoda obliczania współczynników Fouriera
- Przykład obliczania współczynników Fouriera
- Ogólne właściwości współczynników Fouriera
- Wielkości do zmierzenia i sposób pomiaru
- Obliczanie współczynników Fouriera ze wzorów teoretycznych i z widma

10. Badanie ładowania i rozładowania kondensatora za pomocą zestawu komputerowego

Cel ćwiczenia

Sprawdzenie, w jakim stopniu przebieg rzeczywisty ładowania/rozładowania kondensatora jest zgodny z opisem teoretycznym kondensatora idealnego, określonej stałej czasowej, wyznaczenie pojemności kondensatora oraz ładunku na okładkach kondensatora.

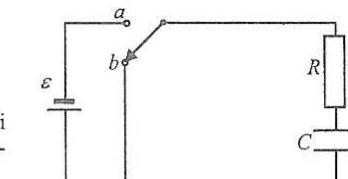
Wprowadzenie

Kondensatorem nazywamy układ dwóch okładek metalowych dowolnego kształtu rozdzielonych dielektrykiem. W stanie naładowania na każdej z okładek znajduje się ładunek elektryczny Q o przeciwnym znaku, a między okładkami panuje różnica potencjałów (napięcie) U . Pojemnością kondensatora nazywamy stosunek ładunku do napięcia:

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (10.1)$$

Pojemność kondensatora zależy od jego geometrii, tzn. od kształtu, rozmiarów i odległości okładek, a także od rodzaju dielektryka znajdującego się między nimi. Pojemność kondensatorów o dostatecznie symetrycznej budowie (np. płaskich, cylindrycznych, kulistycznych) jest opisana prostymi wzorami podawanymi w podstawowych podręcznikach fizyki.

Ładowanie kondensatora odbywa się przez dołączenie źródła o sile elektromotorycznej (SEM) ε do obwodu zawierającego szeregowo połączone opór R i pojemność C (na rys. 10.1 pozycja przełącznika a), natomiast *rozładowanie* – przez odłączenie źródła od obwodu i połączenie okładek kondensatora opornikiem R (pozycja przełącznika b).



Rys. 10.1. Obwód RC ; gdy przełącznik jest w pozycji a , następuje ładowanie kondensatora, a gdy jest w pozycji b – rozładowanie

Przebieg ładowania

W dowolnym momencie ładowania na okładkach znajduje się ładunek q , a w obwodzie płynie prąd I . Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa spadki potencjału na kondensatorze i na oporniku są kompensowane przez SEM źródła:

$$\varepsilon = IR + \frac{q}{C}. \quad (10.2)$$

Po zróżniczkowaniu tego równania względem czasu i uwzględnieniu związku $I = dq/dt$ otrzymamy

$$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC}I = 0 \quad \text{lub} \quad \frac{dI}{I} = -\frac{dt}{RC}. \quad (10.3)$$

Jest to równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych, które się rozwiązuje przez niezależne całkowanie każdej strony. W wyniku takiego całkowania otrzymujemy równanie:

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{t}{RC}, \quad (10.4)$$

gdzie I_0 jest stałą całkowania określona przez warunki początkowe. Ostateczna, jawną postać funkcji I otrzymamy po wykonaniu operacji odlogarytmowania:

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (10.5)$$

W początkowej chwili ładowania ($t = 0$) ładunek na okładkach kondensatora jest równy零u i z równania (10.2) wynika, że wtedy prąd $I_0 = \varepsilon/R$. Prąd ładowania skokowo rośnie do wartości maksymalnej w momencie zamknięcia obwodu, po czym wykładniczo maleje do zero. Prąd maksymalny ma taką samą wartość, jaką miałby prąd stały w obwodzie niezawierającym kondensatora.

Napięcie na kondensatorze U_c w dowolnej chwili wynosi $\varepsilon - RI$ i zmienia się w czasie według równania:

$$U_c = \varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{RC}}). \quad (10.6)$$

Napięcie na kondensatorze rośnie początkowo szybko, a następnie coraz wolniej, żeby dojść do napięcia nasycenia równego SEM źródła. Po dostatecznie długim czasie kondensator zostaje naładowany całkowicie. Matematycznie stwierdzamy, że $U_c \rightarrow \varepsilon$, gdy $t \rightarrow \infty$. W praktyce kondensator uważaemy za naładowany po czasie $t = 5RC$.

Wykresy równań (10.5) i (10.6) są przedstawione na rysunku 10.2.

Przebieg rozładowania

Gdy okładki naładowanego kondensatora połączymy bezpośrednio opornikiem R (przełącznik w położeniu b), wówczas przez opornik popłynie prąd w kierunku przeciwnym niż przy ładowaniu. W tej sytuacji drugie prawo Kirchhoffa przyjmuje postać:

$$RI + \frac{q}{C} = 0. \quad (10.7)$$

Po ponownym uwzględnieniu, że $I = dq/dt$, otrzymamy równanie różniczkowe

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (10.8)$$

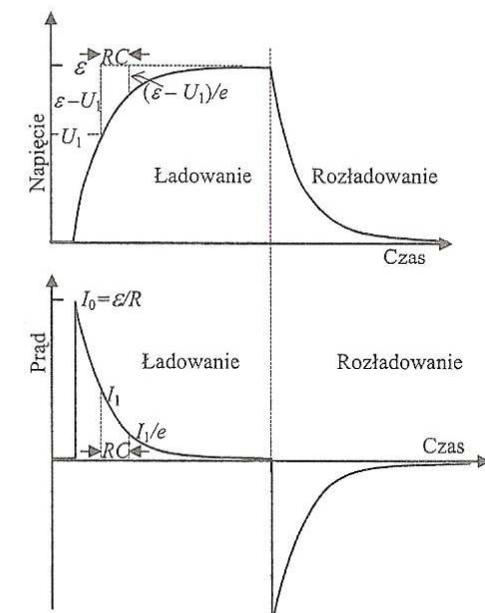
Rozwiązaniem tego równania jest funkcja:

$$q = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (10.9)$$

gdzie q_0 jest początkowym ładunkiem na kondensatorze – jest to ładunek kondensatora naładowanego: $q_0 = C\varepsilon$. Ładunek na okładkach kondensatora zmniejsza się wykładniczo z czasem rozładowania, dając asymptotycznie do zera.

Natężenie prądu podczas rozładowywania znajdujemy, różniczkując równanie (10.9):

$$I = -\frac{\varepsilon}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (10.10)$$



Rys. 10.2. Przebieg ładowania i rozładowania kondensatora – zależność napięcia na kondensatorze i prądu w obwodzie od czasu. Maksymalne napięcie równe jest SEM źródła prądu. Maksymalny prąd jest taki, jak gdyby w obwodzie nie było kondensatora. Iloczyn RC jest stałą czasową obwodu

Widzimy, że prąd rozładowania zmienia się w czasie tak samo jak prąd ładowania; oba prądy różnią się tylko kierunkiem, co odzwierciedla znak minus w równaniu (10.10) i jego brak w równaniu (10.5).

Dzieląc równanie (10.9) przez C , znajdujemy napięcie na kondensatorze w dowolnej chwili rozładowywania:

$$U_c = \varepsilon e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (10.11)$$

W równaniach opisujących ładowanie i rozładowanie kondensatora występuje wielkość RC mająca wymiar czasu. Wielkość tę nazywa się *stałą czasową* τ obwodu. Określa ona szybkość zarówno ładowania, jak i rozładowania kondensatora:

$$\tau = RC. \quad (10.12)$$

Po czasie $t = \tau$ od chwili rozpoczęcia ładowania lub rozładowania wyrażenie $\exp(-t/(RC))$ wynosi $1/e$ ($e = 2,71828$). Z odpowiednich równań podanych powyżej wynika, że prąd ładowania lub rozładowania po czasie równym stałej czasowej zmniejsza się e -krotnie względem wartości początkowej. Napięcie na kondensatorze podczas rozładowania również zmniejsza się e -krotnie po tym czasie, natomiast podczas ładowania e -krotny spadek odnosi się do różnicy $\varepsilon - U$.

Wielkością pokrewną stałej czasowej jest *czas połowicznego zaniku* $T_{1/2}$, po którym następuje 2-krotny spadek prądu lub napięcia. W celu znalezienia ilościowego związku między nimi zastosujemy wzór (10.5) do czasu połowicznego zaniku. W tej sytuacji $t = T_{1/2}$, $I/I_0 = 1/2$ i $RC = \tau$. Po podstawieniu tych wielkości i prostych przekształceniach otrzymuje się szukany związek:

$$T_{1/2} = \tau \ln 2. \quad (10.13)$$

Pomiary i obliczenia

W ćwiczeniu ładujemy i rozładowujemy kondensator, mierząc w trakcie tych procesów prąd płynący w obwodzie i napięcie na kondensatorze. Do mierzenia stosujemy zestaw zawierający komputer i interfejs pomiarowy połączony z obwodem ładowania/rozładowania w sposób pokazany na rysunku 10.3. Wykorzystamy zdolność zestawu do pomiaru napięcia, a także możliwość przetwarzania danych.

Wielkościami bezpośrednio mierzonymi są: napięcie między punktami 0 i 1 oraz napięcie między punktami 0 i 2. Interesują nas prąd w obwodzie i napięcie na kondensatorze, więc te wielkości musimy obliczyć na podstawie zmierzonych napięć.

Po uruchomieniu programu *Science Workshop* należy załadować plik konfiguracyjny, a jeżeli taki nie istnieje, skonfigurować system – za pomocą okna ustawień dołączyć dwa czujniki napięć do wejść analogowych A i B , utworzyć dwa okna wykresów i dwie tabele oraz ustawić częstotliwość próbkowania na wartość 20–50 Hz (z menu głównego wybrać polecenia *Eksperyment-Częstotliwość próbkowania*).

Z pomocą kalkulatora definiujemy obliczanie prądu ładowania i napięcia na kondensatorze. W celu obliczenia prądu w głównym oknie kalkulatora wpisu-

jemy $@B/R_0$ ($@B$ oznacza wartość zmierzoną w kanale B ; więcej na temat przetwarzania danych za pomocą kalkulatora patrz rozdział 20). Nadajemy temu obliczeniu nazwę *Prqd*, skrót I i jednostkę mA .

Napięcie na kondensatorze nie może być zmierzane bezpośrednio, ponieważ dołączenie interfejsu równolegle do kondensatora powodowałoby przepływ dodatkowego prądu, który, chociaż niewielki, zmieniłby charakter przebiegu ładowania i rozładowania. Wobec tego definiujemy obliczanie napięcia na kondensatorze, używając nazw *Napięcie*, U_c , V . To napięcie jest różnicą między wartością w kanale A (ε w trakcie ładowania, zero w czasie rozładowania) a napięciem na obu opornikach, czyli $@A - (R_0+R_1)I = @A - @B/R_0(R_0+R_1)$.

Sam pomiar polega na włączeniu rejestracji pomiaru i zaraz potem ładowania oraz zakończeniu rejestracji, kiedy kondensator będzie bliski naładowania. Po kilku minutach włączamy ponownie rejestrację, przełącznikiem uruchamiamy rozładowanie i przerywamy rejestrację, kiedy kondensator jest prawie rozładowany.

Celem ćwiczenia jest:

- sprawdzenie, w jakim stopniu przebieg rzeczywisty ładowania/rozładowania kondensatora jest zgodny z opisem teoretycznym kondensatora idealnego,
- określenie stałej czasowej,
- wyznaczenie pojemności kondensatora,
- wyznaczenie ładunku na okładkach kondensatora.

W celu sprawdzenia, czy zmiany prądu i napięcia mają charakter wykładniczy, stosujemy 2 metody. Poniższy opis tych metod odnosi się do prądu ładowania, ale można go łatwo dostosować zarówno do prądu rozładowania, jak i do przebiegu napięcia.

1. Metoda *czasu połowicznego zaniku*. Na wykresie prądu ładowania wybieramy punkt blisko początku i określamy jego współrzędną czasową t_1 za pomocą kurSORA (rys. 20.4). Następnie ustawiamy kurSOR na krzywej w punkcie, w którym natężenie prądu jest o połowę mniejsze; współrzędną tego punktu oznaczymy t_2 . Różnica $t_2 - t_1$ jest czasem połowicznego zaniku w wybranym przedziale. Tę czynność powtarzamy dla dalszych punktów na krzywej tak, aby pokryć cały zakres ładowania. Otrzymujemy zestaw wartości $T_{1/2}$ dla całego procesu rozładowania.

Dla idealnej krzywej wykładniczej wszystkie wartości byłyby jednakowe. W praktyce obserwuje się zbliżone wartości $T_{1/2}$ dla znacznej części procesu rozładowania, a większe odstępstwa mogą się pojawić w zakresie, w którym kondensator jest bliski rozładowania. W czasie ćwiczenia należy ocenić rzeczywisty zakres stałości $T_{1/2}$, a tym samym dobrą stosowalność funkcji wykładniczej, i dla tego zakresu obliczyć czas połowicznego zaniku $T_{1/2}$ jako wartość średnią przedziałów.

2. Metoda *logarytmiczna*. Z równania (10.4) wynika, że logarytm prądu ładowania jest liniową funkcją czasu. Zatem wykres logarytmu prądu jest linią prostą. Wykresy logarytmiczne są dostępne w programie obsługi *Science Workshop*; można też zapisać dane, a obliczenia $\ln(I/I_0)$ i wykresy wykonać w innym progra-

mie, np. w Excelu. W praktyce liniowość może nie być spełniona w całym zakresie; wówczas stwierdzamy, że ładowanie kondensatora jest procesem ściśle wykładniczym tylko w określonym zakresie. Z równania (10.4) wynika również, że współczynnik nachylenia prostej na wykresie wynosi $-1/(RC)$, czyli jest odwrotnością stałej czasowej τ . Wartość współczynnika nachylenia prostej a znajdujemy metodą regresji liniowej i na jej podstawie obliczamy stałą czasową $\tau = -a$.

Wyniki uzyskane w punktach 1 i 2 uzupełniamy przez dodanie w każdym przypadku wielkości brakującej do pary: $T_{1/2}$, τ .

Wartość oporu w obwodzie ładowania jest znana dokładnie, więc ze znajomości stałej czasowej obliczamy pojemność kondensatora C .

Ladunek kondensatora obliczmy dwiema metodami:

- 1) na podstawie definicji pojemności ze wzoru (10.1),
- 2) z powierzchni pod wykresem $I(t)$.

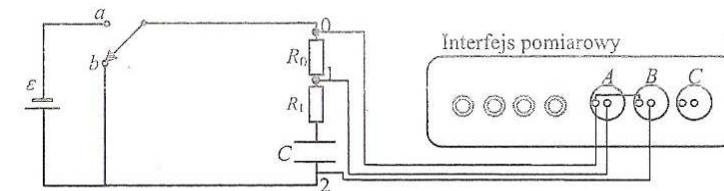
Z definicji natężenia prądu wynika, że w czasie dt przez przekrój przewodnika przepływa ładunek $I \cdot dt$. W dłuższym przedziale czasowym ładunek wyraża równanie:

$$q = \int_{t_1}^{t_2} I dt. \quad (10.14)$$

Całka prądu jest właśnie powierzchnią pod wykresem prądu. W celu znalezienia tej powierzchni stosujemy opcję programu Statystyka, która wybieramy z okna wykresu. Z kolei wybieramy Całkowanie i zaznaczamy na wykresie cały obszar ładowania lub rozładowania. Obliczone wartości z wykresów ładowania i rozładowania uśredniamy i porównujemy wynik z wartością otrzymaną metodą 1.

Przebieg ćwiczenia

1. Połączyć układ pomiarowy według schematu na rysunku 10.3.
2. Uruchomić program obsługi pomiaru.
3. Otworzyć plik konfiguracyjny, a w razie jego braku przeprowadzić konfigurację programu. Sprawdzić, czy zdefiniowane obliczenia w kalkulatorze programu zawierają aktualne dane (wartości oporów); w razie potrzeby wprowadzić odpowiednie wartości.
4. Jako źródło danych do wykresów i tabel wybrać *Prąd* i *Napięcie* (nie kanał A i kanał B).
5. Wykonać wstępny pomiar prądu ładowania i rozładowania. Ocenić wizualnie, czy krzywe na wykresach *Prąd* i *Napięcie* są zbliżone do krzywych teoretycznych. Jeżeli tak, przeprowadzić właściwy pomiar i zapisać dane w pamięci.



Rys. 10.3. Obwód RC i połączenie z interfejsem pomiarowym. Gdy przełącznik jest w pozycji a , następuje ładowanie kondensatora, a gdy jest w pozycji b – rozładowanie

6. Określić zakres spełniania praw wykładniczych, stosując dwie metody.
7. Obliczyć dwiema metodami stałą czasową i czas połowicznego zaniku.
8. Obliczyć pojemność kondensatora w układzie RC , przyjmując znaną wartość R i obliczoną τ .
9. Powtórzyć czynności z punktów 5–8 dla innych wartości oporników i kondensatorów.

Zestaw ćwiczeniowy

Układ ładowania/rozładowania kondensatora, zasilacz prądu stałego, interfejs pomiarowy, komputer, program *Science Workshop*

Pojęcia kluczowe

- Pojemność elektryczna, kondensatory
- Ładowanie kondensatora: prawo Kirchhoffa, zmiana prądu i napięcia w czasie
- Rozładowanie kondensatora: prawo Kirchhoffa, zmiana prądu i napięcia w czasie, stała czasowa, czas połowicznego zaniku
- Sprawdzanie, czy ładowanie i rozładowanie są procesami wykładniczymi
- Obliczanie ładunku kondensatora, wyznaczanie pojemności

Mirosława Bertrandt, Eugeniusz Chimczak, Tomasz Berus

11. Badanie zjawiska Halla

Cel ćwiczenia

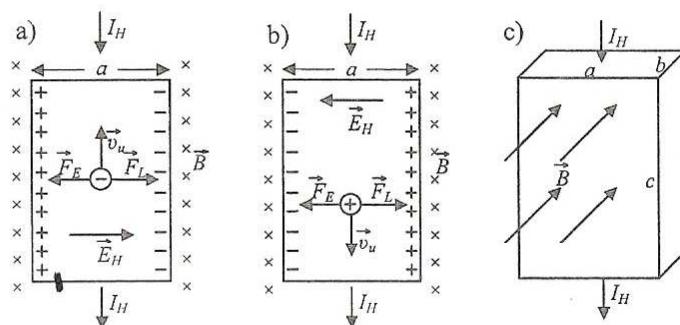
Zapoznanie się ze zjawiskiem Halla. Wyznaczenie wartości indukcji magnetycznej elektromagnesu w zależności od natężenia prądu elektromagnesu, korzystając z hallotronu o znanej czułości. Wyznaczenie parametrów nieznanego hallotronu.

Wprowadzenie

W roku 1879 Edwin H. Hall, ówczesny 24-letni magistrant, przeprowadził doświadczenie, które pozwala określić znak nośników prądu w przewodniku lub półprzewodniku.

W złotej, prostopadłościennej płycie umieszczonej w polu magnetycznym o indukcji \vec{B} płynie prąd o natężeniu I_H . Rozpatrzmy dwa przypadki, gdy prąd jest przenoszony przez:

- ładunki ujemne (rys. 11.1a),
- ładunki dodatnie (rys. 11.1b).



Rys. 11.1. Rysunek ilustrujący powstawanie napięcia Halla: a) prąd przenoszony przez ładunki ujemne, b) prąd przenoszony przez ładunki dodatnie, c) ogólny widok hallotronu z zaznaczonymi wymiarami

Kierunek przepływu prądu elektrycznego na rysunkach jest zgodny z umową pochodząącą z czasów, gdy natura nośników ładunków elektrycznych nie była jeszcze znana. Tak więc kierunek przepływu prądu I_H jest taki jak linii sił pola elektrycznego, to znaczy od + do -. Na ładunki ujemny o wartości q , poruszający się z prędkością unoszenia v_u , działa siła Lorentza

$$\vec{F}_L = -q\vec{v}_u \times \vec{B}, \quad (11.1)$$

powodująca odchylenie nośników w prawą stronę płytki. Po tej stronie zaczyna się gromadzić ładunek ujemny, a po stronie lewej nieskompensowane ładunki dodatnie. Powstaje różnica potencjałów, którą można zmierzyć za pomocą woltomierza. Ponadto woltomierz wskaże, która strona płytki ma wyższy potencjał. Opisane zjawisko, polegające na powstawaniu różnicy potencjałów pod wpływem siły Lorentza, nazywamy *zjawiskiem Halla*.

Rozpatrzmy teraz ładunek dodatni (rys. 11.1b). Na ładunek ten działa siła Lorentza również skierowana w prawo. Ale teraz wyższy potencjał jest po prawej stronie płytki. Jeżeli tak wskaże woltomierz, to rzeczywiście ładunek jest dodatni, jeżeli odwrotnie, to znaczy, że nośnikami prądu w danym materiale są ładunki ujemne.

Wiemy już, że pomiędzy krawędziami płytki tworzy się różnica potencjałów, czyli powstaje poprzeczne pole elektryczne o natężeniu \vec{E}_H . Odchylenie ładunków trwa tak długo, aż wartość siły pola elektrycznego $|\vec{F}_E|$ nie zrównoważy wartości siły Lorentza:

$$|\vec{F}_E| = |\vec{F}_L|. \quad (11.2)$$

Przyjmując, że nośnikami prądu są elektrony ($q = e$) i podstawiając $\vec{F}_E = -e\vec{E}_H$, zapiszemy:

$$|-e\vec{E}_H| = |-e\vec{v}_u \times \vec{B}|, \quad (11.3)$$

gdzie e jest ładunkiem elementarnym. Ponieważ kierunek prędkości unoszenia elektronów \vec{v}_u jest prostopadły do kierunku wektora indukcji magnetycznej \vec{B} , możemy zapisać powyższe równanie skalarnie:

$$E_H = v_u B. \quad (11.4)$$

Wartość natężenia pola elektrycznego E_H jest równa stosunkowi różnic potencjałów między lewą a prawą stroną płytki, czyli napięcia Halla U_H , do odległości a (rys. 11.1):

$$E_H = \frac{U_H}{a}. \quad (11.5)$$

Prędkość unoszenia nośników

$$v_u = \frac{j}{ne} = \frac{I_H}{Sne}, \quad (11.6)$$

gdzie n jest koncentracją nośników, czyli liczbą nośników prądu w jednostce objętości, j – gęstością prądu ($j = I_H / S$). Pole powierzchni S , zgodnie z rysunkiem 11.1c, wyraża się zależnością: $S = ab$, przy czym a jest szerokością płytki, a b –

grubością wzdłuż kierunku pola magnetycznego. Po podstawieniu ostatnich zależności do wzoru (11.4) otrzymujemy:

$$\frac{U_H}{a} = \frac{I_H B}{abne}, \quad (11.7)$$

a stąd

$$U_H = \frac{I_H B}{bne} \quad (11.8)$$

albo

$$U_H = R_H \frac{I_H B}{b}, \quad (11.9)$$

gdzie

$$R_H = \frac{1}{ne}. \quad (11.10)$$

Wielkość R_H nazywa się *stałą Halla*, a jej znak zależy od znaku nośników ładunku.

Tabela 11.1. Stała Halla, ruchliwość i koncentracja nośników wybranych materiałów

Materiał	R_H [m ³ /C]	μ [m ² /(V·s)]	N [m ⁻³]
Cu	$-6,09 \cdot 10^{-11}$	0,0039	$10,3 \cdot 10^{28}$
Zn	$10,4 \cdot 10^{-11}$	-0,0018	$6,0 \cdot 10^{28}$
Ge	$7,1 \cdot 10^{-2}$	0,38	10^{20}
Monokryształ InAs	$7,0 \cdot 10^{-3}$	3,0	10^{21}
Cienka warstwa InAs	$9,3 \cdot 10^{-5}$	1,3	$7 \cdot 10^{22}$

W metalach wartości stały Halla są bardzo małe, rzędu 10^{-11} m³/C, ze względu na znaczną koncentrację nośników. W półprzewodnikach stała Halla ma wartości kilka rzędów większe i stąd pomiar koncentracji nośników prądu odgrywa ważną rolę.

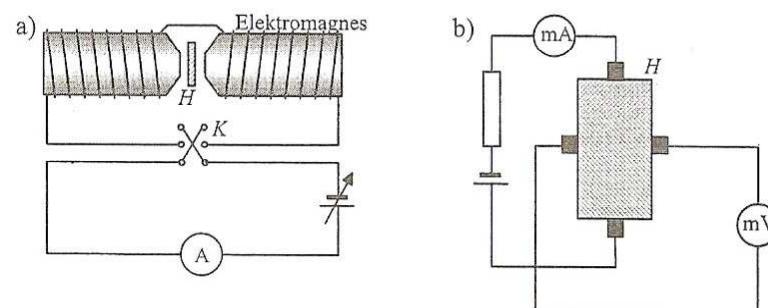
Niektóre metale, jak np. cynk, kadm, beryl, mają dodatni znak stałej Halla – tak zwany anomalny zjawisko Halla. Metale te wykazują przewodnictwo dodatnie, bo pasmo przewodnictwa jest prawie całkowicie zapełnione i dziury związane z pozostałymi niezapełnionymi poziomami zachowują się jak cząstki mające dodatnią masę efektywną i dodatni ładunek.

Płytki z przewodnika lub półprzewodnika wraz z przewodami nazywa się *hallotronem* i używana jest w wielu przyrządach przeznaczonych do pomiaru pól magnetycznych i prądów wysokiej częstotliwości. Zgodnie ze wzorem (11.9), napięcie Halla jest odwrotnie proporcjonalne do grubości b płytki przewodzącej prąd (rys. 11.1c). Dlatego stosuje się płytki bardzo cienkie, często naparowane, w celu uzyskania wyższego napięcia Halla w danym materiale.

Zasada pomiaru

Najczęściej spotykanym i najłatwiejszym sposobem pomiaru stałej Halla R_H jest stosowanie stałego prądu I_H płynącego przez hallotron oraz stałego pola magnetycznego.

Układ pomiarowy składa się z dwóch obwodów. Pierwszy jest obwodem zasilania elektromagnesu. W polu elektromagnesu, prostopadle do linii pola magnetycznego, ustawiono hallotron. Drugi obwód jest obwodem zasilającym hallotron, przez który płynie prąd stały o ustalonej wartości. Miliwoltomierzem mierzy się poprzeczne napięcie U_H , między bocznymi ściankami hallotronu.



Rys. 11.2. Schematy obwodów elektrycznych do pomiaru indukcji magnetycznej i parametrów hallotronu: a) obwód zasilania elektromagnesu, b) układ do pomiaru napięcia Halla; H – hallotron, K – komutator

Podczas obserwacji zjawiska Halla występują dodatkowo niewielkie efekty galwanomagnetyczne i termomagnetyczne, których przyczyną jest odchylenie torów elektronów przez pole magnetyczne, spowodowane rozrzutem prędkości nośników wokół ich prędkości średniej. Oprócz tego rejestruje się tak zwane napięcie asymetrii, które występuje w nieobecności pola magnetycznego, wynikające między innymi z niedoskonałości struktury mikroskopowej stosowanych materiałów. Aby wyeliminować te efekty, pomiary napięcia Halla wykonuje się dla dwóch kierunków pola magnetycznego B i dwóch kierunków przepływu prądu I_H przez hallotron. Otrzymujemy w ten sposób cztery wartości napięcia U_H . W praktyce, obliczając średnią arytmetyczną z bezwzględnych wartości tych napięć, w znacznej części eliminujemy dodatkowe efekty towarzyszące zjawisku Halla.

Parametrem opisującym hallotron jest jego *czułość* γ , definiowana następująco:

$$\gamma = \frac{R_H}{b}. \quad (11.11)$$

Korzystając ze wzorów (11.9) oraz (11.11), możemy napisać:

$$U_H = \gamma I_H B. \quad (11.12)$$

Po przekształceniu powyższej zależności otrzymamy następujący wzór na wartość indukcji pola magnetycznego B :

$$B = \frac{U_H}{\gamma I_H}. \quad (11.13)$$

A zatem, znając czułość hallotronu γ , można z pomiarów napięcia Halla U_H i natężenia prądu hallotronu I_H wyznaczyć wartość indukcji B w funkcji natężenia prądu płynącego przez elektromagnes I_{el} . Funkcja ta pozwala wyznaczyć dla innego, nieznanego hallotronu czułość γ , stałą Halla R_H , koncentrację n elektronów lub p dziur w zależności od rodzaju nośników prądu w danym materiale. Inny parametr – *ruchliwość elektronów lub dziur*, definiowany jako stosunek prędkości unoszenia do natężenia pola elektrycznego wywołującego przepływ prądu – można obliczyć następująco:

$$\mu_n = \frac{v_u}{E} = \frac{j}{ne} = \frac{I_H}{abne} = \frac{c}{abneR} = \frac{c\gamma}{aR}, \quad (11.14)$$

gdzie c jest długością próbki, a R – jej oporem elektrycznym.

Przebieg ćwiczenia i obliczenia

- Zapoznać się z układem pomiarowym i sprawdzić poprawność połączeń. Badane dwa hallotrony znajdują się pomiędzy płytami z pleksi, między nabiegunnikami elektromagnesu. Hallotrony zbudowane są z półprzewodnika antymonku indu InSb, przy czym wzorcowy, oznaczony nr. 1, domieszkowany jest cyną Sn, a badany, oznaczony nr. 2, nie jest domieszkowany.
- Dla hallotronu nr 1, o znanej czułości γ_1 , ustawić stałą wartość prądu I_{H1} w zakresie 15–20 mA.
- Zmierzyć napięcie Halla U_{H1} w zależności od natężenia prądu płynącego przez elektromagnes. Natężenie I_{el} zmieniać w zakresie 0–5 A co 0,25 A. Pomiary wykonać dla dwóch przeciwnych zwrotów pola magnetycznego. Wartość napięcia Halla wyznaczyć jako średnią arytmetyczną z dwóch bezwzględnych wartości U_{H1} dla danej wartości I_{el} .
- Dla badanego hallotronu nr 2 ustalić stałą wartość prądu I_{H2} ; może być taka sama jak dla hallotronu nr 1.
- Dla hallotronu nr 2 wykonać takie same pomiary jak w punkcie 3 dla tych samych wartości natężenia prądu elektromagnesu.
- Wykonać pomiary napięcia Halla U_{H2} w zależności od natężenia prądu sterującego przy ustalonej wartości prądu elektromagnesu, np. 2 A. Prąd sterujący I_{H2} zmieniać w granicach 0–15 mA.
- Z wykorzystaniem wyników pomiarów wykonanych dla hallotronu nr 1 obliczyć wartości indukcji magnetycznej B z zależności (11.13).

- Sporządzić wykres zależności indukcji magnetycznej B od prądu płynącego przez elektromagnes I_{el} .
- Dla hallotronu nr 2 wykreślić zależność napięcia Halla U_{H2} od wartości indukcji magnetycznej B . Korzystając z metody regresji liniowej, z nachylenia prostej wyznaczyć czułość hallotronu nr 2 – γ_2 .
- Znając grubość b hallotronu, wyznaczyć stałą Halla R_{H2} i następnie koncentrację nośników.
- Z zależności (11.14) obliczyć ruchliwość nośników prądu.
- Dla wszystkich obliczonych wielkości fizycznych przeprowadzić rachunek niepewności pomiarów i zestawić końcowe wyniki.
- Na podstawie wyników pomiarów z punktu 6 wykonać wykres $U_{H2} = f(I_{H2})$ i przeanalizować otrzymaną zależność.
- Parametry niezbędne do obliczeń spisać z tablicy ogłoszeń.

Zestaw ćwiczeniowy

Elektromagnes, hallotrony, miliwoltomierz, miliamperomierz, amperomierz, zasilacze prądu stałego, przełącznik

Pojęcia kluczowe

- Siła Lorentza
- Zjawisko Halla
- Wyprowadzenie wzoru na napięcie Halla i stałą Halla
- Hallotron, czułość hallotronu, koncentracja i ruchliwość nośników prądu
- Zastosowanie zjawiska Halla

Mirosław Szybowicz, Krzysztof Lapsa, Izabela Szyperska

12. Badanie właściwości dielektrycznych ciał stałych

Cel ćwiczenia

Wyznaczenie przenikalności elektrycznej oraz tangensa kąta strat (współczynnika stratności) wybranych dielektryków. Zbadanie zależności pojemności płytkiego kondensatora powietrznego od odległości między jego okładkami.

Właściwości dielektryczne ciał stałych

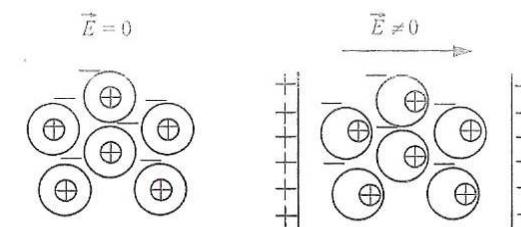
Ze względu na przewodnictwo elektryczne ciała stałe można podzielić na trzy grupy: przewodniki, półprzewodniki i izolatory, zwane inaczej *dielektrykami*. Dielektryki charakteryzuje się bardzo słabym przewodnictwem elektrycznym. Ich opór właściwy (rezystywność) jest rzędu 10^8 – 10^{16} $\Omega \cdot \text{m}$. Z punktu widzenia teorii pasmowej ciał stałych do dielektryków zaliczamy te materiały, których szerokość pasma zabronionego jest większa od 5 eV. Tak duża wartość energii wzbronionej powoduje, że w idealnym dielektryku nie ma swobodnych ładunków elektrycznych. W dielektryku rzeczywistym (zdefektowanym, zanieczyszczonym) ładunki swobodne występują, jednak ich koncentracja w warunkach normalnych jest na tyle mała, że nie mają one decydującego wpływu na właściwości elektryczne dielektryka. Natomiast istotną rolę odgrywają tzw. ładunki związane. Mogą być nimi na przykład ujemne lub dodatnie jony w kryształach jonowych, jak również stałe dipole elektryczne, które występują w dielektrykach o asymetrycznej budowie molekuł.

Polaryzacja dielektryka

Ze względu na stan elektryczny materiału dielektryki można podzielić na:

- niepolarne, w których nie występują trwałe dipole elektryczne,
- polarne, w których występują trwałe dipole elektryczne.

Jeżeli umieścimy dielektryk w polu elektrycznym, to oddziałuje ono na ładunki elektryczne znajdujące się w cząsteczkach dielektryka. Powoduje to przemieszczanie się ładunków dodatnich w kierunku działania pola, natomiast ładunków ujemnych w kierunku przeciwnym. Rozsuwanie się ładunków dodatnich i ujemnych w dielektryku znajdującym się w polu elektrycznym nosi nazwę *polaryzacji dielektrycznej*. W celu zdefiniowania wektora polaryzacji dielektrycznej posłużmy się innym wektorem, a mianowicie momentem dipolowym \vec{p} . Moment dipolowy jest to wielkość wektorowa charakteryzująca dipol elektryczny. Dipol jest układem dwóch ładunków elektrycznych o tych samych wartościach bezwzględnych, ale przeciwnych znakach. Elektryczny moment dipolowy dwóch punktowych ładunków o jednakowych wartościach q i przeciwnych znakach jest równy iloczynowi odległości między nimi i wartości ładunku.



Rys. 12.1. Polaryzacja elektronowa dielektryka

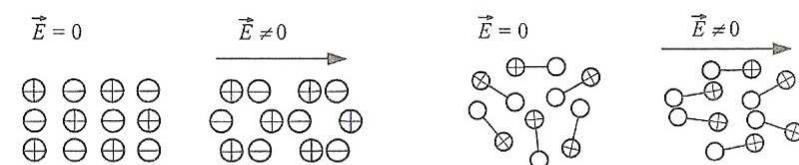
Wektor polaryzacji można wyrazić jako moment dipolowy dielektryka przypadający na jednostkę objętości:

$$\vec{P} = N \vec{p}, \quad (12.1)$$

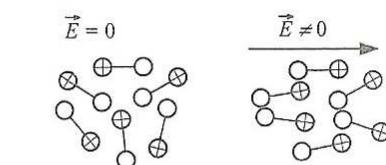
gdzie N jest gęstością elementarnych dipoli, a \vec{p} wyraża moment dipolowy elementarnego dipola elektrycznego. W dielektrykach mogą wystąpić różnego rodzaju polaryzacje, jak: elektronowa, jonowa, dipolowa, zwana też orientacyjną.

Polaryzacja elektronowa polega na deformacji powłok elektronowych atomu w wyniku przemieszczania się elektronów w stosunku do jądra pod wpływem przyłożonego zewnętrznego pola elektrycznego o natężeniu \vec{E} (rys. 12.1). Oddziaływanie pola elektrycznego na chmurę elektronową i na jądro atomu powoduje przesunięcie środka ciężkości chmury elektronowej względem jądra. Zalicza się ją do tzw. polaryzacji szybkich, stała czasowa bowiem tego procesu jest rzędu 10^{-15} s.

Polaryzacja jonowa występuje w kryształach charakteryzujących się budową jonową. Umieszczenie takiego dielektryka w zewnętrznym polu elektrycznym powoduje przesunięcie względem siebie dodatnich i ujemnych jonów, które bez zewnętrznego pola elektrycznego zajmują położenia równowagi (rys. 12.2). Siła, z jaką działa na jony pole zewnętrzne, jest równoważona przez siły międzyatomowe (sprzęzyste), które przeciwdziałają zmianom długości wiązań chemicznych. Siła działająca na jony jest wprost proporcjonalna od natężenia pola elektrycznego, natomiast siła sprężystości zależy od wartości przesunięcia jonów i współczynnika sił sprężystych.



Rys. 12.2. Polaryzacja jonowa dielektryka



Rys. 12.3. Polaryzacja dipolowa (orientacyjna) dielektryka

Polaryzacja dipolowa polega na zorientowaniu molekuł mających trwały moment dipolowy w kierunku przyłożonego zewnętrznego pola elektrycznego. Ten typ polaryzacji występuje zazwyczaj w dielektrykach charakteryzujących się asymetryczną budową cząsteczek. Schematycznie zachowanie się dipoli w nieobecności i w obecności zewnętrznego pola elektrycznego przedstawiono na rysunku 12.3.

Dielektryk w stałym polu elektrycznym

Istotny wpływ na zmianę właściwości fizycznych danego dielektryka ma umieszczenie go w zewnętrznym polu elektrycznym. Pole to będzie oddziaływało na ładunki związane. Mechanizm tego oddziaływania jest ściśle związane z polaryzacją dielektryka. Wskutek oddziaływania zewnętrznego pola elektrycznego z dielektrykiem na jego powierzchniach prostopadłych do kierunku pola pojawiają się ładunki o przeciwnych znakach. Efekt ten występuje również w dowolnie wybranej objętości dielektryka, która charakteryzuje się momentem dipolowym. W celu zobrazowania tego efektu rozważmy zjawisko zwiększenia się pojemności kondensatora po wprowadzeniu między jego płytki dielektryka. Jest to tak zwany efekt Faradaya.

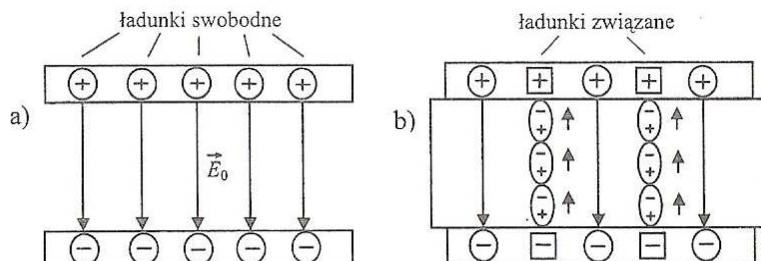
Przyłożenie do kondensatora próżniowego (bez dielektryka pomiędzy okładkami) napięcia elektrycznego U_0 powoduje pojawienie się na powierzchni okładek ładunku q_0 (rys. 12.4a) proporcjonalnego do przyłożonego napięcia:

$$q_0 = C_0 U_0, \quad (12.2)$$

gdzie C_0 jest pojemnością elektryczną kondensatora płaskiego. Pojemność takiego kondensatora (pojemność geometryczna) zależy od wymiarów kondensatora w następujący sposób:

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \quad (12.3)$$

gdzie $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ i jest przenikalnością elektryczną próżni (stałą dielek-



Rys. 12.4. Występowanie ładunków swobodnych i związanych: a) kondensator próżniowy, b) kondensator z dielektrykiem (kondensator próżniowy po naładowaniu odłączony od źródła napięcia)

tryczną próżni), S – powierzchnią okładek kondensatora, a d – odległośćą pomiędzy okładkami kondensatora.

W dalszych rozważaniach założymy, że kondensator jest izolowany i po naładowaniu odłączony od źródła zasilania o stałym napięciu U_0 . Umieszczenie między okładkami kondensatora dielektryka spowoduje jego polaryzację, w wyniku czego na powierzchni dielektryka pojawią się powierzchniowe ładunki polaryzacyjne. Są one związane (skompensowane) pewną liczbą ładunków wprowadzonych wcześniej na płytce. W wyniku tego wartość wypadkowego natężenia pola elektrycznego E w kondensatorze będzie różnicą pomiędzy wartością natężenia pola elektrycznego E_0 wytworzonego przez ładunki swobodne a wartością natężenia pola E_{ind} (o przeciwnym zwrocie) powstałą w dielektryku. Zmniejszenie wypadkowego natężenia pola elektrycznego prowadzi do spadku różnicy potencjałów między płytami kondensatora do wartości U . Umieszczenie dielektryka w zewnętrznym polu elektrycznym kondensatora i zachowanie ładunków ilustruje rysunek 12.4b. W omawianym przypadku pojemność kondensatora z dielektrykiem będzie opisana poniższym wzorem:

$$C = \frac{q_0}{U}, \quad q_0 = \text{const}, \quad U < U_0, \quad C > C_0. \quad (12.4)$$

Gdy kondensator nie będzie odłączony od źródła zasilania o stałym napięciu U_0 , to po umieszczeniu pomiędzy jego okładkami dielektryka nastąpi wzrost ładunku elektrycznego na okładkach kondensatora. Jest to spowodowane powstaniem ładunków polaryzacyjnych w dielektryku w polu elektrycznym. Z powyższego wynika, że ładunek q zgromadzony na okładkach w układzie z dielektrykiem jest większy od ładunku q_0 na elektrodach w układzie próżniowym. W związku z tym pojemność kondensatora wrasta i będzie określona jako:

$$C = \frac{q}{U_0}, \quad U_0 = \text{const}, \quad q > q_0, \quad C > C_0. \quad (12.5)$$

Jak widać z powyższych rozważań, umieszczenie dielektryka pomiędzy okładkami kondensatora próżniowego powoduje wzrost jego pojemności. Pojemność kondensatora płaskiego wypełnionego dielektrykiem można wyrazić w następujący sposób:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} = \frac{\varepsilon S}{d}, \quad (12.6)$$

gdzie ε_r jest względną przenikalnością elektryczną dielektryka, a ε – przenikalnością elektryczną dielektryka (przykładowe wartości ε_r podano w tabeli 12.1).

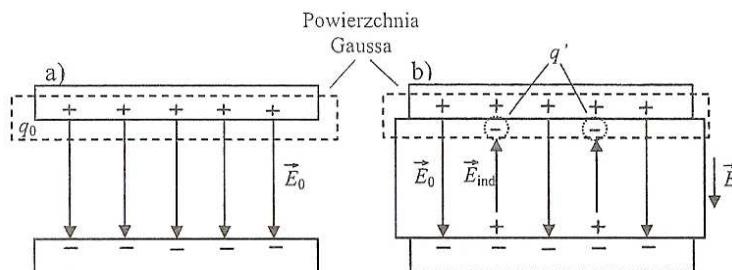
Zastosujmy prawo Gaussa w celu szczegółowej analizy jednego z omawianych powyżej przypadków. Założymy, że mamy płaski kondensator próżniowy, który po naładowaniu odłączymy od źródła napięcia, a następnie umieścimy w nim dielek-

tryk (rys. 12.5a, b). Prawo Gaussa można wtedy zapisać następująco dla kondensatora próżniowego i z dielektrykiem:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 E_0 S = q_0, \quad (12.7)$$

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon_0 E S = q_0 - q', \quad (12.8)$$

gdzie q_0 jest ładunkiem swobodnym zgromadzonym na okładce kondensatora, a q' – indukowanym ładunkiem powierzchniowym znajdującym się w dielektryku w pobliżu okładki kondensatora. Indukowane ładunki powierzchniowe wiążą ze sobą część ładunków swobodnych znajdujących się na okładkach kondensatora. W wyniku tego niezrównoważony ładunek znajdujący się wewnątrz powierzchni Gaussa $q_0 - q' = q_0/\varepsilon_r$.



Rys. 12.5. Zastosowanie prawa Gaussa do kondensatora: a) próżniowy, b) z dielektrykiem

Z równań (12.7) i (12.8) wyznaczmy wartości natężen pola elektrycznego odpowiednio w kondensatorze próżniowym E_0 oraz w kondensatorze z dielektrykiem E . Wyrażenia te będą miały następującą postać:

$$E_0 = \frac{q_0}{\varepsilon_0 S}, \quad (12.9)$$

$$E = \frac{q_0}{\varepsilon_0 S} - \frac{q'}{\varepsilon_0 S} = E_0 - E_{\text{ind}}. \quad (12.10)$$

Po przekształceniu równania (12.10) otrzymamy następujący wzór:

$$\frac{q_0}{S} = \varepsilon_0 E + \frac{q'}{S}. \quad (12.11)$$

Wyrażenie

$$P = \frac{q'}{S} \quad (12.12)$$

oznacza polaryzację elektryczną dielektryka odzwierciedlającą fakt powstawania indukowanego ładunku q' . Zatem równanie (12.10) ostatecznie przyjmie postać:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \quad (12.13)$$

gdzie \vec{D} nazywamy *indukcją elektryczną* lub *przesunięciem elektrycznym*. Wektor ten charakteryzuje pole elektryczne wytworzone wewnątrz dielektryka przez swobodne ładunki elektryczne. Wektory indukcji pola elektrycznego oraz natężenia pola elektrycznego mają ten sam kierunek w ośrodkach izotropowych. W przypadku ośrodków anizotropowych kierunki obu wektorów nie muszą być równoległe. Oznacza to, że w takim ośrodku przenikalność elektryczna ma różne wartości w różnych kierunkach i jest wyrażona za pomocą tensora.

Dielektryk w przemiennym polu elektrycznym

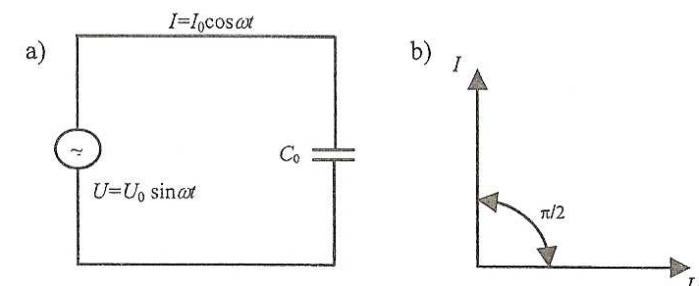
Rozważmy sytuację, w której płaski kondensator próżniowy o pojemności C_0 będzie podłączony do źródła napięcia przemiennego sinusoidalnie (rys. 12.6a):

$$U = U_0 e^{i\omega t} = U_0 \sin(\omega t), \quad (12.14)$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$ jest jednostką urojoną, U_0 – amplitudą napięcia, $\omega = 2\pi\nu$ – częstotliwość kołową zmian napięcia, a t – czasem. Na okładkach kondensatora pojawi się ładunek wyrażony zależnością: $q = C_0 U$. W obwodzie zawierającym rozważany kondensator popłynie prąd ładowania kondensatora wyrażony następującym równaniem:

$$I_C = \frac{dq}{dt} = i\omega C_0 U = I_0 e^{i(\omega t + \pi/2)} = I_0 \cos(\omega t). \quad (12.15)$$

Z ostatniej zależności można wywnioskować, że w omawianym przypadku prąd ładowania kondensatora wyprzedza w fazie napięcie o wartość $\pi/2$ radianów (rys.



Rys. 12.6. a) kondensator próżniowy w obwodzie prądu przemiennego, b) związek pomiędzy prądem i napięciem w kondensatorze

12.6b). Jeśli teraz między okładkami kondensatora umieścimy dielektryk, to zgodnie z zależnościami (12.3) i (12.6) otrzymamy:

$$C = \varepsilon_r C_0. \quad (12.16)$$

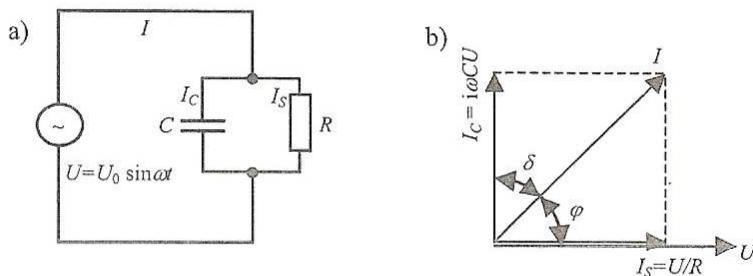
Jednakże w przypadku kondensatora z dielektrykiem występują straty energii elektrycznej, która jest rozpraszana jako ciepło. Zatem oprócz składowej prądu ładowania kondensatora I_C występuje składowa zgodna w fazie z napięciem, zwana *prądem strat* I_S , wyrażona w następujący sposób:

$$I_S = U / R, \quad (12.17)$$

gdzie R jest oporem elektrycznym.

Schemat obwodu zastępczego kondensatora z dielektrykiem w obwodzie prądu przemiennego przedstawiono rysunku 12.7a. W takim obwodzie kondensator strany odpowiada kondensatorowi równolegle połączonemu z oporem elektrycznym. Wypadkowa wartość natężenia prądu płynącego w kondensatorze będzie zatem sumą prądów ładowania i strat:

$$I = I_C + I_S = (i\omega C + 1/R)U. \quad (12.18)$$



Rys. 12.7. a) obwód zastępczy kondensatora z dielektrykiem stratnym w obwodzie prądu przemiennego, b) związek pomiędzy prądem ładowania i prądem strat

Na rysunku 12.7b widać, że prąd o natężeniu I tworzy z prądem strat I_S kąt fazowy φ , przy czym $\cos\varphi$ będzie określać moc wydzielaną w obwodzie. Kąt δ nazywamy kątem strat. Wartość tego kąta można wyznaczyć z rysunku 12.7b za pomocą tangensa kąta strat oraz korzystając z zależności (12.18):

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I_S}{I_C} = \frac{1}{\omega RC}. \quad (12.19)$$

Rzeczywiste zachowanie dielektryków nie zawsze jednak można odnieść do układu zastępczego przedstawionego na rysunku 12.7a. Można stosować wiele

innych, bardziej złożonych układów zastępczych odzwierciedlających rzeczywisty dielektryk. Do ogólnego opisu wprowadza się pojęcie zespolonej przenikalności elektrycznej:

$$\varepsilon^* = \varepsilon' - i\varepsilon'', \quad (12.20)$$

gdzie ε' jest rzeczywistą składową przenikalności elektrycznej, a ε'' – urojoną składową przenikalności elektrycznej (*współczynnik strat*). Składowa urojona przenikalności elektrycznej jest ściśle związana ze stratami energii w dielektryku, zamienianej na ciepło. Po zastosowaniu zależności (12.16) w wyrażeniu (12.18) opisującym wypadkową wartość prądu w kondensatorze, pamiętając, że ε_r jest wielkością zespoloną, otrzymamy równanie:

$$I = (i\omega C_0 \varepsilon_r^* + 1/R)U, \quad (12.21)$$

gdzie

$$\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_0} = \varepsilon'_r - i\varepsilon''_r. \quad (12.22)$$

Wielkość ε_r^* określa zespoloną względną przenikalność elektryczną dielektryka. W takim przypadku tangens kąta strat można wyrazić następująco:

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'_r}. \quad (12.23)$$

Jego odwrotność

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \delta} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} = \frac{\varepsilon'_r}{\varepsilon''} = Q \quad (12.24)$$

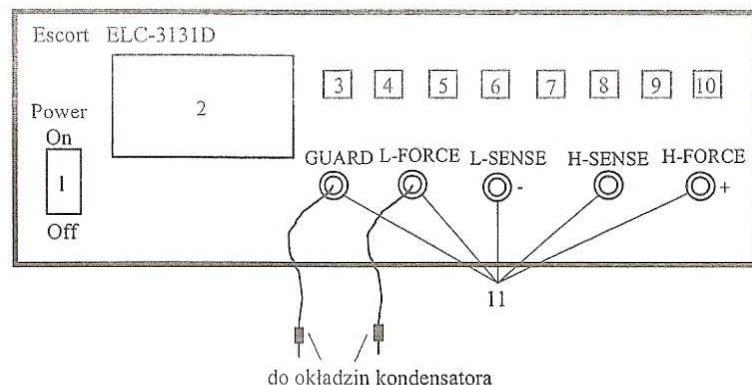
nazywa się *dobrocią dielektryka*. Im większa dobroć, tym mniej energii jest rozproszone w kondensatorze.

Stanowisko pomiarowe

Na stanowisku pomiarowym znajduje się miernik RLC Escort ELC-3131D (rys. 12.8), kondensator ze zmienną odlegością między okładkami (rys. 12.9) oraz kilka płyt dielektrycznych.

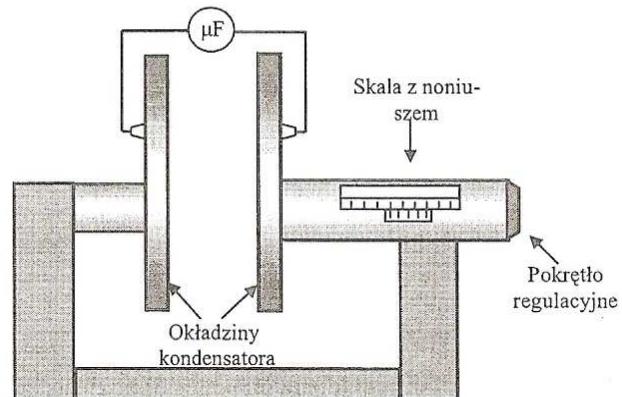
Miernik Escort służy do pomiaru induktywności L , pojemności C i rezystancji R (wybór za pomocą przycisku 4) dla dwóch częstotliwości pomiarowych 120 Hz i 1 kHz (9) oraz przy ręcznej lub automatycznej (zalecane) zmianie zakresów (6). Dodatkowo miernik ten podaje wartości dobroci Q oraz tangensa kąta strat δ (5). Przyciski 7 i 8 służą, odpowiednio, do wyboru trybu pracy i kalibracji.

Konstrukcja kondensatora (rys. 12.9) pozwala na płynną zmianę odległości między okładkami kondensatora. Aby zmienić w kondensatorze odległość pomię-



Rys. 12.8. Schemat płyty czołowej miernika Escort ELC-3131D (opis w tekście)

czy okładkami, należy odkręcić śrubę znajdującą się z tyłu elementu nastawiającego, a następnie przesunąć okładkę na zamierzoną odległość. Zamieszczony noniusz pozwala na dokładne wyznaczenie odległości między okładkami kondensatora oraz na dokładne „domknięcie” kondensatora z dielektrykiem.



Rys. 12.9. Kondensator pomiarowy

Przebieg ćwiczenia

1. Włączyć miernik (rys. 12.8) przyciskiem 1, następnie ustawić następujące parametry pomiarowe:

- zakres automatyczny – przycisk 6 (na wyświetlaczu pojawia się napis AUTO),
 - pomiar pojemności C – przycisk 4,
 - częstotliwość pomiarową 1 kHz – przycisk 9.
2. Zmierzyć wartość pojemności C_0 w funkcji odległości d (w przedziale od 0,2 do 5 cm) między okładkami kondensatora.
 3. Wybrany dielektryk włożyć między okładki kondensatora, dosunąć je do zetknięcia się dielektryka z okładkami i odczytać odległość d .
 4. Zmierzyć pojemność C oraz, przełączając przycisk 5, dobrać Q i tangens kąta strat δ kondensatora wypełnionego dielektrykiem.
 5. Wyjąć dielektryk i zmierzyć pojemność kondensatora powietrznego C_0 , zachowując tę samą odległość d między okładkami jak w punkcie 3.
 6. Powtórzyć pomiary z punktów 3–5 dla kilku dielektryków.
 7. Odczytać wartość średnicy okładek kondensatora z tablicy informacyjnej.
 8. Wykreślić zależność $C_0 = f(1/d)$ dla kondensatora powietrznego. Na podstawie uzyskanych wyników oraz wzoru (12.3), korzystając z metody regresji liniowej, wyznaczyć współczynnik kierunkowy prostej a oraz wartość b punktu przecięcia z osią y . Obliczyć wartość $\epsilon_0 = a/S$ oraz jej niepewność pomiarową. Wartość punktu przecięcia z osią y jest równa pojemności C_P przewodów łączących kondensator z miernikiem.
 9. Korzystając z zależności uwzględniającej dodatkową pojemność C_P wnoszoną przez przewody: $\epsilon'_r = (C - C_P)/(C_0 - C_P)$, obliczyć dla badanych dielektryków ich rzeczywiste wartości względnej przenikalności elektrycznej oraz niepewność tych wartości.
 10. Na podstawie otrzymanych wyników, stosując równanie (12.24), wyznaczyć ϵ''_r badanych materiałów.
 11. Zestawić końcowe wyniki pomiarów.

Tabela 12.1. Względna przenikalność elektryczna ϵ_r przykładowych materiałów dielektrycznych ($t = 20^\circ\text{C}$)

Materiał	ϵ_r	Materiał	ϵ_r
Bakelit	2,2–3,0	Plexi	3–3,7
Ebonit	2,0–3,5	Porcelana	5,5–6,5
Gliceryna	42,5	Powietrze	1,0059
Kwarc	3–6	Szkło	3,1–4,4
Woda	80,4	Tytanian strontu	310

Zestaw ćwiczeniowy

Cyfrowy miernik RLC do pomiarów: oporności, indukcyjności, pojemności, dobroci oraz tangensa kąta strat, kondensator zmiennej pojemności, płyty dielektryczne

Pojęcia kluczowe

- Polaryzacja dielektryka, dielektryk w stałym i przemiennym polu elektrycznym
- Przenikalność elektryczna dielektryka, względna przenikalność elektryczna, zespółona przenikalność dielektryczna
- Kondensator próżniowy, kondensator z dielektrykiem, kondensator stratny
- Tangens kąta strat, prawo Gaussa

Piotr Ziobrowski

13. Wyznaczanie rozkładu natężenia pola mikrofalowego podczas interferencji i dyfrakcji

Cel ćwiczenia

Wyznaczenie rozkładu natężenia pola mikrofalowego podczas interferencji i dyfrakcji oraz długości fali z eksperymentalnego wykresu rozkładu pola podczas interferencji.

Wprowadzenie

Mikrofale są to fale elektromagnetyczne o długości od 1 mm (częstotliwość 300 GHz) do około 30 cm (1 GHz). Są to najkrótsze fale spośród fal radiowych. Krótkofałowa granicę zakresu mikrofal stanowią fale podczerwone. Istnienie promieniowania mikrofalowego przewidział James Clerk Maxwell w 1864 roku. Rozwój techniki i teorii mikrofal nastąpił w latach 30. XX wieku w okresie prac nad radarami. Do generacji mikrofal stosuje się specjalne lampy elektronowe (klystrony, magnetrony), masery (wytwarzają spójną wiązkę promieniowania mikrofalowego) oraz generatory półprzewodnikowe.

Interferencja i dyfrakcja mikrofal

Mikrofale, będące falą elektromagnetyczną, podobnie jak wszystkie typy fal podlegają zjawiskom interferencji i dyfrakcji. Wiadomości o tych zjawiskach są podane w rozdziale 17.

Natężenie fali w zjawisku interferencji

Rozpatrując *interferencję* na dwóch szczelinach stanowiących źródła dwóch spójnych fal elektromagnetycznych, założymy, że składowe pola elektrycznego obu fal w punkcie *C* (rys. 17.3 w rozdziale 17) zmieniają się następująco:

$$E_1 = E_0 \sin \omega t, \quad (13.1)$$

$$E_2 = E_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad (13.2)$$

gdzie $\omega = 2\pi\nu$ jest częstotliwością kołową fal, a kąt φ różnicą faz między nimi.

Przyjmując, że φ zależy od położenia punktu *C*, a tym samym od kąta α , natomiast E_0 nie zależy od α (szczeliny są dostatecznie wąskie), otrzymamy, że wypadkowe pole elektryczne w punkcie *C*

$$E = E_1 + E_2. \quad (13.3)$$

Podstawiamy równania dla obu fal i obliczamy pole wypadkowe:

$$E = E_0 \sin \omega t + E_0 \sin(\omega t + \varphi) = 2E_0 \cos(\varphi/2) \sin(\omega t + \varphi/2) \quad (13.4)$$

lub

$$E = E_a \sin(\omega t + \varphi/2), \quad (13.5)$$

gdzie $E_a = 2E_0 \cos(\varphi/2)$.

Teraz chcemy obliczyć natężenie fali wypadkowej. Natężenie I fali jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy E^2 , zatem stosunek natężeń dwóch fal: fali wypadkowej i fali pojedynczej można zapisać następująco:

$$\frac{I_\alpha}{I_0} = \left(\frac{E_\alpha}{E_0} \right)^2, \quad (13.6)$$

czyli

$$I_\alpha = 4I_0 \cos^2(\varphi/2) = I_m \cos^2(\varphi/2), \quad (13.7)$$

gdzie przez I_m oznaczyliśmy maksymalną wartość natężenia fali wypadkowej. Natężenie zmienia się od zera (dla punktów, w których $\varphi = \pi$) do maksymalnego (dla punktów, w których $\varphi = 0$).

Różnica faz φ wiąże się z różnicą dróg ΔS :

$$\varphi/(2\pi) = \Delta S / \lambda, \quad (13.8)$$

czyli jeżeli przez d oznaczymy odległość między źródłami (rys. 17.3), otrzymamy:

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{d \sin \alpha}{\lambda}, \quad (13.9)$$

zatem

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \alpha. \quad (13.10)$$

Stąd mamy zależność natężenia fali od kąta α :

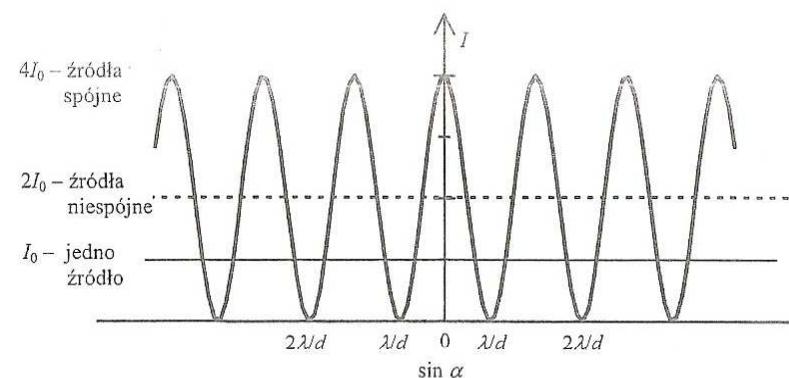
$$I_\alpha = 4I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right) = I_m \cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right). \quad (13.11)$$

Rozkład natężeń dla interferencji przy dwóch szczelinach dla źródeł spójnych, niespójnych oraz pojedynczego źródła przedstawiono na rysunku 13.1.

Natężenie fali w zjawisku dyfrakcji

Dyfrakcję na jednej szczelinie możemy rozpatrywać za pomocą metody graficznej strzałek fazowych. Metoda ta jest szczególnie przydatna w przypadku dodawania nieskończonej liczby zaburzeń falowych o nieskończonym wiele małych amplitudach.

Szczelinę o szerokości a dzielimy na N pasków o małej szerokości Δx . Każdy pasek jest źródłem fal kulistych Huygensa, które wytwarzają na ekranie określone



Rys. 13.1. Rozkład natężeń interferencji przy dwóch szczelinach

zaburzenie falowe. Różnica dróg między sąsiednimi paskami wynosi $\Delta x \sin \alpha$, stąd różnica faz $\Delta\varphi$ pomiędzy falami pochodząymi z sąsiednich pasków

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x \sin \alpha. \quad (13.12)$$

Zatem w punkcie C (rys. 17.4 w rozdziale 17) dodaje się N wektorów pól elektrycznych o tej samej amplitudzie, tej samej częstotliwości i tej samej różnicy faz $\Delta\varphi$ między kolejnymi wektorami. Szukamy zatem zaburzenia wypadkowego dla różnych punktów C , określonych dla różnych kątów α , a tym samym dla różnych $\Delta\varphi$. W przypadku dyfrakcji na jednej szczelinie, gdy szczelinę podzielimy na nieskończonie wiele małych pasków o szerokości Δx , łuk strzałek będzie łukiem okręgu o promieniu R (rys. 13.2.) Długość łuku wynosi E_m , czyli jest równa amplitudzie w środku obrazu dyfrakcyjnego (linia prosta strzałek). Z rysunku wynika, że

$$E_\alpha = 2R \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (13.13)$$

W mierze łukowej $\varphi = E_m / R$, stąd $R = E_m / \varphi/2$, a więc po podstawieniu otrzymamy:

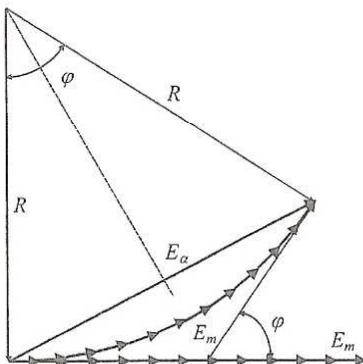
$$E_\alpha = \frac{E_m}{\varphi/2} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad (13.14)$$

gdzie φ jest różnicą faz dla promieni wychodzących z krańców szcelyn.

Pamiętając, że natężenie I fali jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy E^2 , obliczamy natężenie promieniowania dla dyfrakcji na pojedynczej szcelinie:

$$I_\alpha = I_m \left(\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} \right)^2, \quad (13.15)$$

gdzie I_m jest natężeniem fali w środku obrazu dyfrakcyjnego.



Rys. 13.2. Konstrukcja graficzna strzałek fazowych służąca do obliczenia wypadkowej amplitudy pola mikrofalowego w przypadku dyfrakcji

Ponieważ różnica dróg dla promieni wychodzących z krańców szczeliny wynosi $a \sin \alpha$ (a szerokość szczeliny), na podstawie równania (13.12) otrzymamy:

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \alpha. \quad (13.16)$$

Zatem zależność natężenia promieniowania od kąta α dla dyfrakcji na pojedynczej szczelinie

$$I_\alpha = I_m \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \alpha} \right)^2. \quad (13.17)$$

Wyrażenie na natężenie przyjmuje wartość minimalną dla

$$\varphi/2 = m\pi, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (13.18)$$

a więc gdy jest spełniony warunek:

$$a \sin \alpha = m\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ (minimum).} \quad (13.19)$$

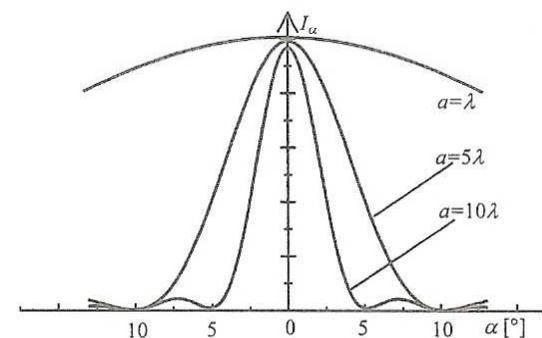
Obliczmy teraz względne natężenie kolejnych maksymów dyfrakcyjnych. Maksima leżą w środku pomiędzy minimami, a więc w punktach, dla których

$$\varphi/2 = (m + 1/2)\pi, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (13.20)$$

a więc gdy jest spełniony warunek:

$$a \sin \alpha = (m + 1/2)\lambda, \quad m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ (maksimum).} \quad (13.21)$$

Po podstawieniu do równania (13.17) zależności (13.21) otrzymamy $I_\alpha/I_m = 0,045; 0,016; 0,008$ odpowiednio dla $m = 1, 2, 3$. Widać, że natężenie kolejnych maksimów bardzo szybko maleje. Na rysunku 13.3 przedstawiono krzywe I_α dla różnych szerokości szczeliny a (w stosunku do długości fali λ) w funkcji położenia na ekranie.



Rys. 13.3. Natężenie I_α dla różnych szerokości szczeliny (w stosunku do długości fali λ) w funkcji położenia na ekranie (kąta α)

Natężenie fal w zjawisku równoczesnej interferencji i dyfrakcji

W warunkach pomiarowych trudno jest spełnić warunek $\alpha \ll \lambda$. Pojedyncza szczelina będzie dawała obraz dyfrakcyjny. Interferencja fal daje wtedy obraz, w którym natężenie prążków nie będzie stałe, ale będzie zależne od obrazu dyfrakcyjnego. Powoduje to zmianę natężenia kolejnych maksymów interferencyjnych.

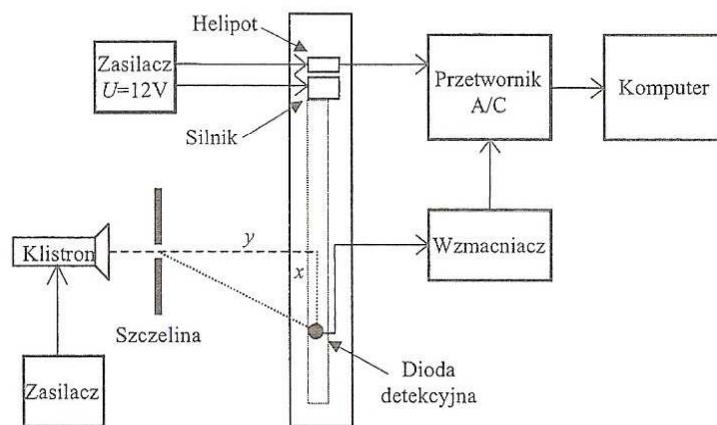
Natężenie obrazu interferencyjnego dane jest równaniem (13.11), a natężenie fali ugiętej na szczelinie równaniem (13.17). Łączymy oba równania i otrzymujemy wzór na natężenie obrazu jako funkcję kąta ugięcia:

$$I_\alpha = I_m \left(\cos^2 \left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \alpha \right) \right) \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \alpha} \right)^2. \quad (13.22)$$

Obraz powstający w wyniku równoczesnej interferencji i dyfrakcji dla różnych wartości a i d przedstawiono na rysunku 17.5 w rozdziale 17.

Zasada pomiaru i stanowisko pomiarowe

Schemat blokowy stanowiska pomiarowego służącego do wyznaczenia rozkładu natężenia pola mikrofalowego przedstawiono na rysunku 13.4.



Rys. 13.4. Stanowisko pomiarowe do wyznaczania rozkładu natężenia pola mikrofalowego podczas interferencji i dyfrakcji

Źródłem spójnego promieniowania mikrofalowego wykorzystywanego w eksperymencie jest klistoron. Jego działanie polega na grupowaniu elektronów w paczki z wykorzystaniem rezonatorów wnękowych. Z klistoronem zespolona jest antena tubowa. Jej stożkowe rozszerzenie stanowi układ dopasowujący impedancję falowodu do impedancji wolnej przestrzeni. Za zasilanie klistoronu odpowiada zasilacz. Procedura uruchamiania klistoronu jest następująca:

- wcisnąć przycisk SIEĆ (zapala się czerwona lampka),
- wcisnąć przycisk START (zapala się zielona lampka),
- wcisnąć przycisk PRACA (po upływie około 1 min zapala się pulsująca czerwona lampka).

Aby otrzymać maksymalne natężenie emitowanego pola mikrofalowego, należy:

- pokrętłem „reg U(V) REPL.” nastawić napięcie reflektora na około 155V,
- wciśnięciem przycisku „1 kHz” ustalić częstotliwość modulacji 1 kHz,
- pokrętłem „reg U(V)” nastawić napięcie modulujące w granicach 4–22 V.

Emitowana przez klistoron wiązka mikrofalowa pada na metalową płytę ze szczelinami. Za płytą umieszczony jest element detekcyjny w postaci mikrofalowej

diody półprzewodnikowej. W wyniku doprowadzenia do detektora mocy mikrofalowej na jego wyjściu pojawia się sygnał prądowy, który jest proporcjonalny do natężenia promieniowania.

Detektor umocowany jest w układzie mogącym się poruszać prostopadle do kierunku osi rozchodzenia się mikrofal. Za jego ruch odpowiedzialny jest silnik uruchamiany trójpozycyjnym przełącznikiem. Kierunek przesuwu zależy od wybranej pozycji przełącznika. Silnik obraca oś wielozwojowego potencjometru (helipotu) równocześnie z podawanym napięciem stałym. Spadek napięcia na potencjometrze jest proporcjonalny do przesuwu diody.

Prąd z diody detekcyjnej, proporcjonalny do natężenia padającej na nią fali elektromagnetycznej, jest doprowadzony na wejście wzmacniacza o regulowanym wzmacnieniu, a następnie na wejście przetwornika A/C (analogowo-cyfrowego).

Na drugi kanał tego przetwornika podawane jest napięcie z potencjometru śledzącego ruch diody detekcyjnej.

Dane o napięciu podawanym na wejścia przetwornika A/C (odpowiadające położeniu detektora oraz natężeniu pola mikrofalowego) są przesyłane do komputera i rejestrowane z wykorzystaniem programu *Science Workshop*. Program umożliwia rejestrację rozkładu natężenia pola mikrofalowego, powstającego w wyniku dyfrakcji i interferencji na dwu szczelinach, w zależności od położenia detektora. Wartość kąta ugięcia α można wyznaczyć z zależności:

$$\alpha = \arctg(x/y), \quad (13.23)$$

gdzie x jest odległością punktu pomiarowego od osi symetrii układu, a y – odległośćą płaszczyzny szczelin od prostej, po której porusza się detektor (rys. 13.4).

Na podstawie kąta odpowiadającego położeniom maksimów i minimów interferencyjnych można wyznaczyć długość fali z zależności:

$$d \sin \alpha = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ (maksimum)}, \quad (13.24)$$

$$d \sin \alpha = (m + 1/2)\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \text{ (minimum)}. \quad (13.25)$$

Po umieszczeniu w układzie pojedynczej szczeliny można zarejestrować rozkład kątowy natężenia pola mikrofalowego w wyniku dyfrakcji. Gdy znamy długość mikrofal wyznaczoną z pomiarów interferencyjnych, możemy wyznaczyć krzywą teoretyczną rozkładu natężenia pola mikrofalowego na podstawie wzoru (13.17).

Przebieg ćwiczenia

1. Włączyć wszystkie przyrządy, poczekać kilka minut na ustabilizowanie warunków pracy klistorunu.
2. Uruchomić program *Science Workshop* i wgrać moduł *mfalet.sws*.
3. Ustawić diodę detekcyjną w osi symetrii układu.
4. Ustawić wylot anteny tubowej klistorunu w odległości około 15 cm od szczeliny.

5. Ustawić przeslonę z dwoma szczelinami w odległości około 20 cm od diody. Zmierzyć tę odległość.
6. Zmierzyć szerokość szczelin a oraz odległość między ich środkami d .
7. Uruchomić w programie śledzenie natężenia pola mikrofalowego przyciskiem MON. Zmieniając położenie klistronu, poszukać maksymalnego sygnału.
8. Przesunąć detektor mikrofal w skrajne położenie.
9. Włączyć w programie rejestrację widma przyciskiem REC i uruchomić przesuw detektora. Zarejestrować rozkład pola mikrofalowego podczas interferencji.
10. Wyznaczyć kąty α dla minimum rzędu zerowego i maksimum rzędu pierwszego, korzystając z uzyskanych wyników oraz z równania (13.23). Obliczyć długość fali λ , posługując się równaniami (13.24) i (13.25).
11. W miejsce szczeliny podwójnej ustawić przeslonę z pojedynczą szczeliną. Zmierzyć szerokość szczeliny a .
12. Postępując jak w punktach 8 i 9, zarejestrować rozkład pola mikrofalowego podczas dyfrakcji.
13. Przyporządkować poszczególnym położeniom diody wartości kąta ugięcia α .
14. Znając długość fali λ , wyznaczoną w punkcie 10, według wzoru (13.17) wykreślić krzywą teoretyczną rozkładu natężenia pola w funkcji kąta ugięcia α .
15. Porównać wykres uzyskany doświadczalnie z krzywą teoretyczną.

Zestaw ćwiczeniowy

Zestaw mikrofalowy, dioda mikrofalowa, wzmacniacz, interfejs, zestaw komputerowy z oprogramowaniem *Science Workshop*, przesłona z pojedynczą szczeliną, przesłona z dwoma szczelinami

Pojęcia kluczowe

- Fale elektromagnetyczne
- Mikrofale
- Fale spójne, różnica faz
- Interferencja, dyfrakcja
- Natężenie fal w zjawisku interferencji i dyfrakcji

Krzysztof Łapsa, Adam Buczek

14. Badanie zjawiska dyfrakcji elektronów

Cel ćwiczenia

Eksperymentalne potwierdzenie istnienia fal materii. Wyznaczenie odległości między płaszczyznami sieciowymi kryształu grafitu.

Wstęp

Już ponad dwieście lat temu w doświadczeniach ze światłem wykazano, że ulega ono zjawisku dyfrakcji i interferencji, a tym samym potwierdzono jego falową naturę. Trzeba było jednak czekać kolejne sto lat, aby przekonać się, że światło oraz inne rodzaje fal elektromagnetycznych mają także drugą naturę. Zjawiska fotoelektryczne i Comptona potwierdziły, że światło możemy również traktować jako strumień cząsteczek (korpuskuł) o zerowej masie spoczynkowej. Cząsteczka światła otrzymała nazwę *foton*. Przez kolejne kilkanaście lat panowała opinia, że taka dwoistość natury dotyczy tylko fal elektromagnetycznych.

Przełomem okazała się hipoteza francuskiego uczonego Louisa de Broglie'a, który w 1923 roku przedstawił pogląd, że wszystkie cząsteczki mające niezerowy pęd wykazują właściwości falowe. Ta koncepcja wydawała się bardzo śmiałą, zważywszy, że nikt do tej pory nie zaobserwował na przykład dyfrakcji serii pocisków karabinowych przelatujących przez szczelinę. De Broglie nie tylko przewidział dwoistą naturę materii, ale również trafnie założył, że długość fali poruszającej się cząsteczki swobodnej, czyli tzw. *fali materii*, jest zależna od pędu cząsteczek w taki sam sposób jak długość fali świetlnej od pędu fotonu. Zależność de Broglie'a określa długość fal materii (*fal de Broglie'a*) w następujący sposób:

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (14.1)$$

gdzie $h = 6,62618 \cdot 10^{-34}$ J·s (stała Plancka), a p jest pędem cząsteczek.

Zakładając, że cząsteczka materialna porusza się z prędkością znacznie mniejszą od prędkości światła, można pominąć efekty relatywistyczne i zapisać następującą zależność:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE_K}}, \quad (14.2)$$

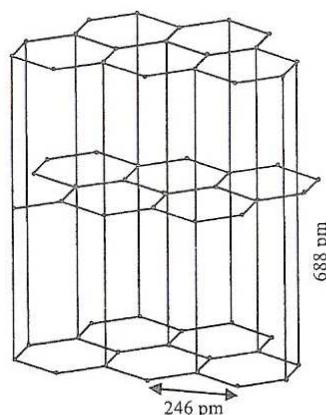
gdzie m jest masą, v – prędkością, E_K – energią kinetyczną cząsteczek.

Korzystając z powyższego wzoru, łatwo można wyliczyć, że na przykład dłużość fali materii związaną z pociskiem karabinowym o masie $m = 6,6$ g, poruszającym się z prędkością $v = 1000$ m/s, wyniesie około 10^{-34} m. Jak wiadomo z fizyki falowej, aby móc zaobserwować zjawisko dyfrakcji, szerokość szczeliny powin-

na być porównywalna z długością fali lub mniejsza od niej. W powyższym przypadku widać, że rozmiar pocisku jest wielokrotnie większy od długości fali materii z nim związanej. Jest to odpowiedź na pytanie, dlaczego w świecie ciał makroskopowych nie obserwujemy zjawisk falowych związanych z otaczającą nas materią. Po prostu rozmiary obiektów są wielokrotnie większe od długości fal materii z nimi związanych.

W celu zaobserwowania zjawiska dyfrakcji fal materii należało posłużyć się cząsteczkami o niewielkim rozmiarze i masie oraz zastosować siatkę dyfrakcyjną o odpowiednio małych szczelinach. Hipoteza de Broglie'a została potwierdzona doświadczalnie w 1927 roku przez Clintonę J. Davissona i Lastera H. Germera w USA oraz niezależnie przez George'a P. Thomsona w Szkocji. Amerykańscy naukowcy wykorzystali strumień elektronów przyspieszonych za pomocą różnicy potencjału elektrycznego oraz monokryształ niklu pełniący funkcję siatki dyfrakcyjnej. Otrzymano wynik analogiczny do wyniku dyfrakcji promieniowania X (tej samej długości co fale materii związane z elektronami) na badanym krysztale. George P. Thomson za pomocą strumienia szybkich elektronów z sukcesem badał cienkie polikrystaliczne folie metalowe. W późniejszych latach wykonano wiele udanych doświadczeń z wykorzystaniem innych mikrocząstek (np. neutronów, protonów).

Odkrycie fal materii dało początek *mechanice kwantowej*, dziedzinie zajmującej się matematycznym opisem falowych właściwości materii. Zjawisko dyfrakcji elektronów znalazło praktyczne zastosowanie między innymi w mikroskopach elektronowych wykorzystywanych głównie do badań powierzchni ciał stałych. Ze względu na bardzo małą długość fal materii zdolność rozdzielczą takich mikroskopów jest o kilka rzędów wartości większa od zdolności rozdzielczej klasycznych mikroskopów optycznych.

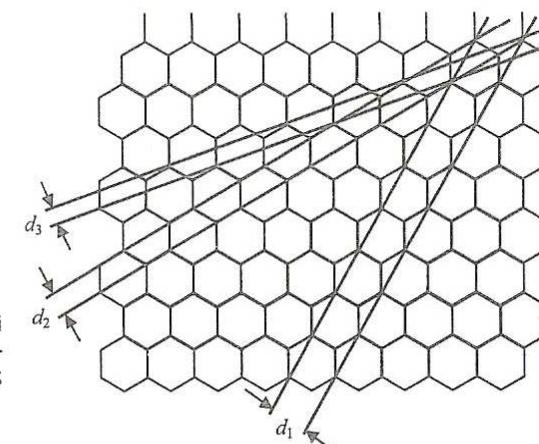


Rys. 14.1. Sieć krystaliczna grafitu

Kryształ jako „siatka dyfrakcyjna”

Odkryte przez Roentgena w 1895 roku promieniowanie X (promieniowanie rentgenowskie) okazało się doskonałym narzędziem do badania materii krystalicznej. W 1912 roku niemiecki fizyk Max von Laue i niezależnie w innym eksperymencie Brytyjczyk William L. Bragg posłużyli się promieniowaniem X do badania struktury kryształów. Badania za pomocą tych bardzo krótkich fal elektromagnetycznych (długości fal rzędu 10^{-9} – 10^{-11} m) wykazały, że kryształy zbudowane są z identycznych elementów strukturalnych (jonów, atomów

lub cząsteczek chemicznych) rozmieszczenych z okresową powtarzalnością przestrenną (patrz rys. 14.1). Płaszczyzny, na których znajdują się elementy strukturalne kryształu, nazywamy płaszczyznami sieciowymi (płaszczyznami krystalograficznymi). Odległość między dwiema najbliższymi płaszczyznami sieciowymi jest różna dla różnych kierunków w krysztale (rys. 14.2). Precyzyjne badania struktury kryształów były możliwe dzięki temu, że długość promieniowania X jest porównywalna z odległościami między płaszczyznami sieciowymi, a więc kryształ stanowi rodzaj siatki dyfrakcyjnej uginającej promieniowanie X . Wynikiem badań Bragga było sformułowanie warunku wzmacniania fal rozproszoonych na kryształe, tzw. *warunku Bragga*.



Rys. 14.2. Przykładowe odległości pomiędzy płaszczyznami krystalograficznymi w graficie: $d_1 = 213$ pm; $d_2 = 123$ pm; $d_3 = 80,5$ pm

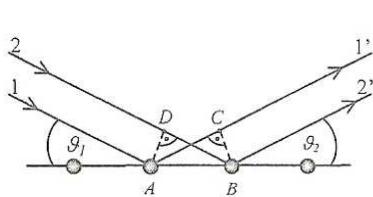
Dyfrakcyjny warunek Bragga

Fale elektromagnetyczne (promieniowanie X), padając na kryształ, ulegają rozproszeniu i mogą ze sobą interferować. Jeżeli kąty, które tworzą z płaszczyzną krystalograficzną fale padające i rozproszone (ugięte), będą równe, w wyniku zjawiska interferencji nastąpi wzmacnianie fal ugiętych (fale będą miały tę samą fazę). Powyższe stwierdzenie obrazuje rysunek 14.3, na którym widać, że fale ugięte 1' i 2' spotkają się w zgodnej fazie, gdy $AC = BD$, czyli gdy $\vartheta_1 = \vartheta_2$.

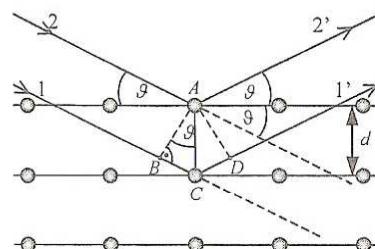
Dodatkowy efekt wzmacniania uzyskamy, gdy fale ugięte na jednej płaszczyźnie sieciowej nałożą się w zgodnych fazach z falami ugiętymi na kolejnych bliźniaczych płaszczyznach sieciowych. Taką sytuację ilustruje rysunek 14.4. Różnica dróg Δ pomiędzy interferującymi promieniami 1' i 2' $BC + CD = 2BC$ (gdyż $BC = CD$). Z trójkąta ABC widać, że $BC = ds \sin \vartheta$, a więc $\Delta = 2ds \sin \vartheta$. Jeżeli ma nastąpić wzmacnianie interferujących fal, muszą być one w zgodnej fazie, czyli różnica dróg musi się równać całkowitej wielokrotności długości fal $\Delta = n\lambda$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Prowadzi to do warunku Bragga:

$$n\lambda = 2d \sin \theta, \quad (14.3)$$

gdzie n jest rzędem ugięcia, λ – długością fali, d – odległością między płaszczyznami sieciowymi.



Rys. 14.3. Wzmocnienie fal rozproszonych 1' i 2' następuje w przypadku, gdy $g_1 = g_2$



Rys. 14.4. Ugięcie fal na równoległych płaszczyznach sieci kryształowej

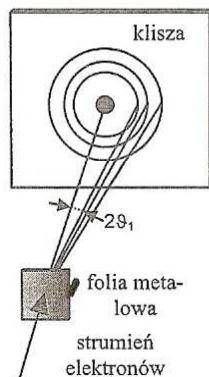
Metoda Thomsona

Metoda badania dyfrakcji elektronów zastosowana przez Thomsona była w rzeczywistości zmodyfikowaną metodą badania promieniowania X opracowaną przez Debye'a i Scherrera. Autorzy sproszkowali kryształ tak, że można było przyjąć, że wszystkie jego drobiny (mikrokryształy) miały przypadkowe orientacje.

Wiązka monochromatycznych promieni X , przechodząc przez tak utworzony proszek, ulegała dyfrakcji na pewnej części mikrokryształów, dla których był spełniony warunek Bragga. Ugięte promienie X wokół wiązki padającej tworzyły szereg stożków, które na kliszy fotograficznej były rejestrowane w postaci współśrodkowych pierścieni. W rzeczywistości dyfrakcja na pojedynczym kryształe dałaby na kliszy szereg jasnych punktów. Zbiór koncentrycznych pierścieni to wynik nakładania się olbrzymiej liczby obrazów dyfrakcyjnych pochodzących od różnie zorientowanych mikrokryształów. W opisanej metodzie sproszkowany kryształ można zastąpić materiałem polikrystalicznym,

Rys. 14.5. Schemat powstawania obrazu dyfrakcyjnego Thomsona

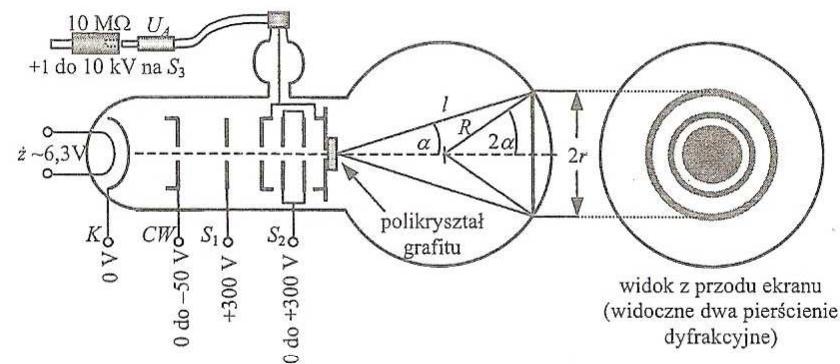
czyli ciałem stałym, którego struktura składa się z dużej liczby przypadkowo zorientowanych mikrokryształów (np. materiały walcowane – blacha stalowa). Thomson słusznie założył, że stosując strumień poruszających się elektronów, mógłby zaobserwować analogiczny efekt do wywołanego użyciem promienio-



wania X . Rzeczywiście, elektrony po przejściu przez cienką folię metalową tworzyły stożki, których osią symetrii był kierunek padających elektronów, a na kliszy zarejestrowano współśrodkowe okręgi (rys. 14.5).

Stanowisko pomiarowe

Do badań dyfrakcji elektronów posłuży lampa elektronowa z umieszczonym wewnątrz polikrystalicznym grafitem (rys. 14.6). W jednym końcu szklanej bańki próżniowej umieszczona jest żarzona katoda K , z której pod wpływem zjawiska termoemisji wydobywają się elektrony. Przyspieszony i uformowany przez pole elektryczne (cylinder Wehnelta CW , siatki S_1 , S_2 , S_3) równoległy strumień elektronów pada na cienką płytę polikrystalicznego grafitu. Poruszające się elektrony napotykają na swej drodze olbrzymią liczbę małych kryształków grafitu dowolnie zorientowanych względem wiązki, z których część ma swoje płaszczyzny krystalograficzne ustawione tak, że jest spełniony warunek Bragga dla fal materii związanych z elektronami. Na ekranie fotoluminescencyjnym pojawią się współśrodkowe



Rys. 14.6. Schemat lampy elektronowej do badania dyfrakcji elektronów (opis w tekście)

pierścienie będące obrazem ugiętych elektronów. Wynika to z tego, że w krysztale grafitu możemy wyróżnić wiele płaszczyzn sieciowych (rys. 14.2). Tym samym warunek Bragga jest spełniony wielokrotnie.

W układzie eksperymentalnym wykorzystanym do badań (rys. 14.7) wyraźnie można zaobserwować tylko dwa pierścienie dyfrakcyjne. Ze względu na to, że ich rozmiary są małe, zastosowano dodatkowo układ rejestracyjny złożony z kamery podłączonej do komputera, umożliwiający precyzyjny pomiar średnicy pierścieni.

Pomiary i obliczenia

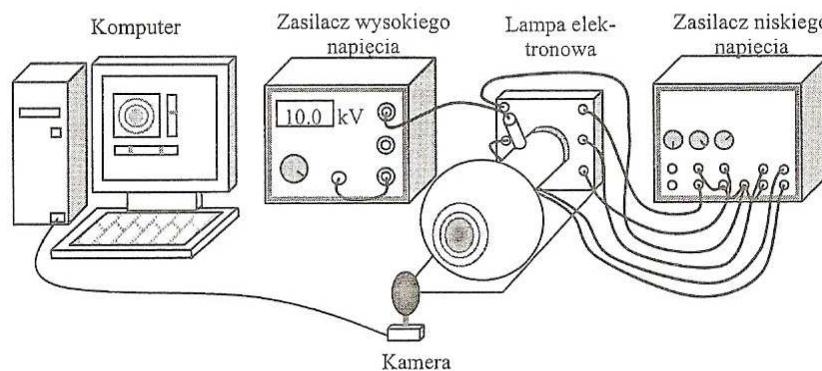
Do wyznaczenia długości fal materii posłużymy się równaniem de Broglie'a (14.2). Energię kinetyczną elektronu możemy wyznaczyć, znając napięcie przyspieszające na anodzie U_A (siatka S_3), w następujący sposób:

$$E_K = eU_A, \quad (14.4)$$

gdzie $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C (ładunek elektryczny elektronu). Ostatecznie długość fal materii związanych z poruszającymi się elektronami może być opisana poniższą zależnością:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU_A}}, \quad (14.5)$$

gdzie $m = 9,109 \cdot 10^{-31}$ kg (masa elektronu).



Rys. 14.7. Układ eksperymentalny do badania dyfrakcji elektronów

Strumień elektronów pada na płytę polikrystalicznego grafitu i ulega ugięciu zgodnie z warunkiem Bragga (14.3), przy czym w tym wypadku d będzie oznaczać odległość między płaszczyznami krystalograficznymi grafitu, a λ długość fal materii poruszających się elektronów. Kąt ugięcia ϑ można wyznaczyć z pomiaru promienia r pierścieni dyfrakcyjnych powstających na ekranie (rys. 14.6). Należy jednak pamiętać, że $\vartheta = \alpha/2$.

Z rysunku 14.6 możemy wyznaczyć

$$\sin 2\alpha = \frac{r}{R}, \quad (14.6)$$

gdzie $R = 65$ mm i jest promieniem szklanej bańki.

Korzystając z zależności trygonometrycznych, możemy zapisać, że

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (14.7)$$

Dla małych kątów $\alpha \cos \alpha \approx 1$ (np. $\cos 10^\circ = 0,985$), a więc

$$\sin 2\alpha \approx 2 \sin \alpha. \quad (14.8)$$

Wiedząc, że $\vartheta = \alpha/2$, możemy, korzystając z równań (14.3), (14.6) oraz (14.8), zapisać dla małych kątów ϑ następującą zależność:

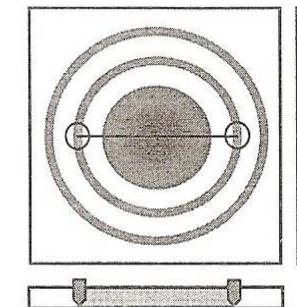
$$r = \frac{2Rn}{d} \lambda. \quad (14.9)$$

Jak widać, promień pierścienia dyfrakcyjnego w liniowy sposób zależy od długości fal materii. Wykres $r = f(\lambda)$ powinien być linią prostą, której współczynnik nachylenia a można wyznaczyć metodą regresji liniowej. Dla pierwszego wzmacnienia ($n = 1$) odległości między odpowiednimi płaszczyznami sieciowymi możemy obliczyć z poniższego wzoru:

$$d = \frac{2R}{a}. \quad (14.10)$$

Przebieg ćwiczenia

1. Sprawdzić poprawność połączeń elektrycznych według schematu znajdującego się na stanowisku pomiarowym, zaciemnić pojemnik z lampą elektronową, a następnie włączyć komputer oraz zasilacze wysokiego i niskiego napięcia.
2. Uruchomić program **Dyfrakcja** do rejestracji obrazu z kamery.
3. Ustawić następujące wartości napięć: anoda (siatka S_3) +10 kV, siatka S_2 około +210 V, cylinder Wehnelta (CW) -50 V.
4. Zmniejszając powoli wartość napięcia na cylindrze Wehnelta, doprowadzić do pojawienia się wyraźnego obrazu pierścieni dyfrakcyjnych na ekranie. *Uwaga:* zbyt mała wartość napięcia na CW może spowodować, że centralne jasne koło może zakryć obraz pierścienia nr 1.
5. Korzystając z programu **Dyfrakcja**, ustawić kursory linii pomiarowej w celu poprawnego pomiaru średnicy pierścienia (patrz rys. 14.8), a następnie odczytać tę wartość (Długość linii łączącej kursory [mm]).
6. Zmniejszając napięcie na anodzie co 0,5 kV, mierzyć średnicę obserwowanych pierścieni w zakresie od 10 kV do 5,5 kV. Jeżeli w trakcie pomiaru jasność pierścieni stanie się zbyt mała, należy delikatnie zmniejszyć wartość napięcia na cylindrze Wehnelta. Pomiar powtórzyć dwukrotnie.
7. Wyznaczyć promienie obserwowanych pierścieni dyfrakcyjnych r i długości fal materii związanych z poruszającymi się elektronami λ (równanie (14.5)).



Rys. 14.8. Uproszczony widok okna pomiarowego

8. Wykonać wykresy $r = f(\lambda)$ oraz, korzystając z metody regresji liniowej, wyznaczyć współczynniki nachylenia prostych i ich niepewność pomiarową.
9. Korzystając z równania (14.10), wyznaczyć stałe sieciowe grafitu odpowiadające obserwowanym pierścieniom dyfrakcyjnym.
10. Obliczyć niepewność pomiarową wyznaczonych wartości i zestawić końcowe wyniki pomiarów.

Uwaga: nie należy ustawać zbyt dużej jaskrawości obrazu (mała wartość napięcia na CW i duża na S_2), gdyż grozi to uszkodzeniem luminoforu lampy. Po skończonych pomiarach należy jak najszybciej wyłączyć zasilanie lampy.

Zestaw ćwiczeniowy

Zasilacze wysokiego i niskiego napięcia, lampa elektronowa z polikryształem grafitu, kamera, komputer wraz z oprogramowaniem

Pojęcia kluczowe

- Dwoista natura światła i materii
- Budowa kryształu – stałe sieciowe
- Warunek Bragga
- Metoda Thomsona
- Metoda regresji liniowej

Optyka

Adam Buczek

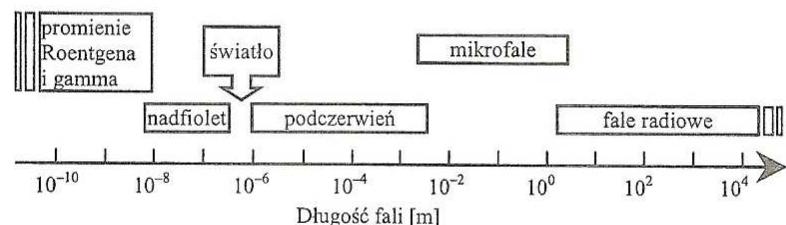
15. Badanie prędkości fal elektromagnetycznych

Cel ćwiczenia

Wyznaczenie prędkości impulsów elektromagnetycznych w powietrzu i przewodzie koncentrycznym.

Wprowadzenie

Fale elektromagnetyczne są rozchodzącymi się w przestrzeni cyklicznymi zaburzeniami pól elektrycznych i magnetycznych. Spektrum (widmo) różnych długości istniejących fal elektromagnetycznych jest bardzo szerokie (rys. 15.1). Podział na pokazane na rysunku zakresy nie jest sztywny, a ich granice są umowne. Jak wi-



Rys. 15.1. Widmo fal elektromagnetycznych. Między nadfioletem a podczerwienią wąski zakres fal widzianych przez ludzkie oczy (światło)

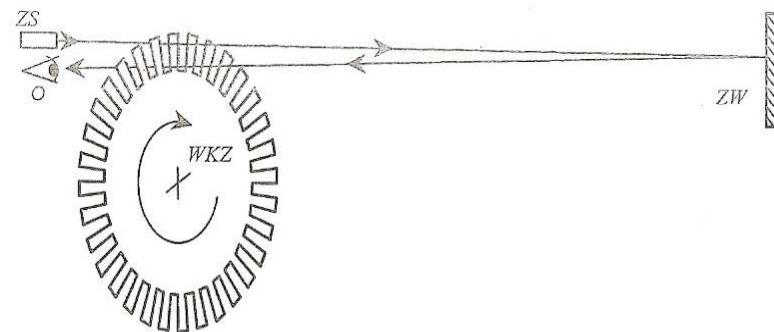
dać, obszar fal obserwowanych przez oko ludzkie (zakres widzialny – światło) jest bardzo wąski. W jego ramach kolejne długości fal – od najmniejszych do największych – oko postrzega jako różne barwy, odpowiednio, od fioletowej do czerwonej. Fale krótsze i dłuższe od wymienionych (nadfiolet i podczerwień) nie są już przez oko dostrzegane. Zakres widzialny, mimo iż jest niewielkim wycinkiem całego widma fal elektromagnetycznych, umożliwia człowiekowi doskonałą obserwację otaczającego świata. Był to powód, dla którego właśnie zakres widzialny jako pierwszy wzbudził zainteresowanie ludzkości falami elektromagnetycznymi.

Pomiary prędkości fal elektromagnetycznych

Pierwotnie sądzono, że światło rozchodzi się w przestrzeni momentalnie z nieukończenie wielką prędkością. Pogląd ten początkowo podzielił jeszcze Galileusz. W późniejszym czasie zmienił jednak zdanie i w roku 1638 doniósł o podjętych

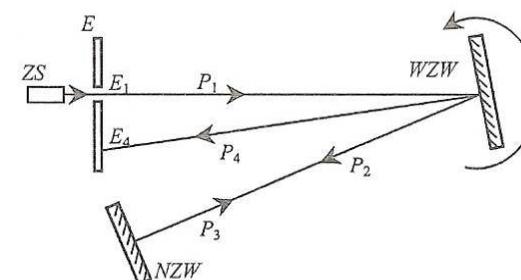
próbach pomiaru prędkości światła. Uczynił to wraz ze swoim pomocnikiem, cyklicznie odsłaniając i zasłaniając dwie latarnie oddalone od siebie o około 1,5 km i usiłując spostrzec opóźnienia w docierających sygnałach. Niestety, metoda była zbyt niedokładna, aby umożliwić choćby oszacowanie tak dużej prędkości. Dopiero w 1676 roku astronom Olaf Römer dokonał pierwszego pomiaru prędkości światła. Jego metoda była właściwie zbliżona do metody Galileusza, tyle że obserwował on zaćmienia księżyca Jowisza. Planeta ta ma cztery duże księżyce ulegające zaćmieniom w jej cieniu w regularnych odstępach czasu. Stanowiły one zatem rodzaj kosmicznego „świetlnego metronomu”. Astronom zauważył, że odstępy czasu między obserwacjami dwóch kolejnych zaćmień rosną, gdy Ziemia oddala się od Jowisza (w ciągu sześciu miesięcy na skutek obiegu wokół Słońca), oraz maleją, gdy się do niego zbliża (w kolejnych sześciu miesiącach). Gdyby światło biegło nieskończonym szybko, takich różnic nie powinno być. Ale ponieważ biegnie ono ze skończoną prędkością, a w wyniku ruchu Ziemi obraz kolejnych zaćmień ma do przebycia różne drogi, obserwuje się je w różnych odstępach czasu. Na tej podstawie Römer oszacował, że wartość prędkości światła leży w granicach między 220 000 a 300 000 km/s. Jednak część ówczesnego świata naukowego nie chciała pogodzić się z tym faktem. Dopiero wyniki obserwacji kolejnego astronoma – Bradleya – spowodowały, że od roku 1727 zaczęto powszechnie przyjmować koncepcję skończonej prędkości światła. Bradley był astronomem królewskim w Anglii. Prowadząc kilkuletnie obserwacje, stwierdził, że niektóre gwiazdy stale pozornie zmieniają swe położenie synchronicznie z ruchem Ziemi po orbicie, tak że w polu widzenia lunety obiegają małe elipsy. Ten pozorny ruch był spowodowany skończoną prędkością światła przybywającego od gwiazd do lunety stale zmieniającej swe położenie wraz z Ziemią. Wyniki Bradleya pozwoliły oszacować prędkość światła na 300 000 km/s.

Pierwszy pomiar prędkości światła w warunkach ziemskich zrealizował Fizeau w 1849 roku. Schemat jego aparatury ilustruje rysunek 15.2. Wiązka światła przechodząca przez szczerbinę między zębami wirującego koła zębatego WKZ i po odbiciu od odległego zwierciadła ZW niemal po tej samej drodze wracała do obserwatora O. Przy pewnej prędkości wirowania opóźnienie wiązki powracającej sprawiało, że trafiała ona nie na szczerbinę, ale na ząb koła, i nie była widoczna dla obserwatora. Dalsze zwiększenie prędkości wirowania powodowało, że wiązka trafiała na kolejną szczerbinę i była ponownie widoczna. Oznaczało to, że czas potrzebny wiązce na dotarcie do zwierciadła i na powrót jest równy czasowi obrotu koła o kąt odpowiadający odległości między dwiema szczerbinami. Fizeau, używając koła o 720 zębach, obracającego się z prędkością 12,6 obrotów na sekundę, oraz zwierciadła w odległości 8,6 km, otrzymał prędkość światła 312 000 km/s. Na początku XX wieku Perrotin udoskonalił powyższą metodę i otrzymał dokładniejszy wynik ($299\ 901 \pm 84$) km/s.



Rys. 15.2. Schemat metody Fizeau: ZS – źródło światła, WKZ – wirujące koło zębate, ZW – zwierciadło, O – obserwator

W 1834 roku Wheatstone zaproponował nieco inną metodę pomiarową. Jej koncepcję pokazano schematycznie na rysunku 15.3. Wiązka światła wychodząca ze źródła ZS przez szczerbinę w ekranie E_1 odbija się od wirującego zwierciadła WZW i nieruchomego zwierciadła NZW, po czym powraca do zwierciadła WZW. W tym czasie jednak zwierciadło WZW zdążyło się obrócić o pewien kąt, tak że powracająca wiązka jest odchylona i pada na ekran w miejscu E_4 . Z przesunięcia $E_1 - E_4$ oraz na podstawie odległości, jaką światło przebyło, i prędkości obrotów zwierciadła można obliczyć prędkość światła. Podobnie jak metoda Fizeau, jest to sposób na wytwarzanie impulsów światlnych, gdyż powracającą wiązkę można obserwować tylko w krótkich chwilach, gdy zwierciadło WZW jest w pozycji umożliwiającej odbicie promieni od zwierciadła NZW. Po udoskonaleniu tej metody przez Perrotina otrzymała nazwę metody z wirującym zwierciadłem.



Rys. 15.3. Schemat metody z wirującym zwierciadłem: ZS – źródło światła, E₁ – otwór w ekranie, przez który przechodzi wiązka światła P_1 skierowana na wirujące zwierciadło WZW, P_2 – promień po odbiciu od zwierciadła wirującego, P_3 – promień po odbiciu od nieruchomego zwierciadła NZW, wracający po tej samej drodze co P_2 , P_4 – promień po kolejnym odbiciu, obrócony względem P_1 na skutek obrotu zwierciadła WZW, E_4 – miejsce, gdzie na ekran pada promień P_4

dy Foucault otrzymał w roku 1862 wartość prędkości światła równą $(298\ 000 \pm 500)$ km/s. Dalsi badacze używali zwierciadeł wielościennych zamiast płaskiego. Na przykład, Michelson stosował wirujące zwierciadła cztero-, ośmio-, dwunasto- i szesnastościenne. W opublikowanej w 1935 roku pracy na podstawie serii wielu pomiarów podał, że najbardziej prawdopodobna wartość prędkości światła wynosi $299\ 774$ km/s (z rozrzutem około ± 25 km/s). Należy dodać, iż Michelson badał prędkość światła również metodami interferometrycznymi.

W późniejszym okresie nadal rozwijano metody impulsowe, ale zrezygnowano z mechanicznych przerywaczy wiązki światła. Rozwój techniki pozwolił na zbudowanie elektrooptycznych układów odcinających strumień światła pod wpływem impulsów elektrycznych. Umożliwiło to stosowanie bardzo wysokich częstotliwości przerywania, niedostępnych w metodach mechanicznych. Dzięki temu droga pokonywana przez impulsy i rozmiary aparatur pomiarowych mogły być znacznie zmniejszone. Metodę opartą na elektronicznie modulowanych sygnałach światła zastosowano też w tym ćwiczeniu.

Rozwój technik laserowych również umożliwił bardzo precyzyjne pomiary prędkości światła. Na przykład, Evenson w roku 1973 zmierzył częstotliwość i długość fali wiązki laserowej i na podstawie iloczynu tych wielkości określił wartość prędkości światła jako równą $299\ 792,45$ km/s.

Należy dodać, że obserwacja sygnałów świetlnych nie jest jedyną metodą pomiaru prędkości fal elektromagnetycznych. Wraz z rozwojem wiedzy ludzkość nauczyła się generować i obserwować inne zakresy tych fal. Przykładowo, w roku 1948 Essen i Gordon-Smith donieśli o pomiarze prędkości mikrofal o długości fali około 0,1 m. Pomiar ten wykonali, budując bardzo precyzyjną cylindryczną wnękę i badając jej częstotliwość rezonansową. Częstotliwość ta jest ścisłe określona przez rozmiary takiego rezonatora i prędkość mikrofal, co pozwoliło na wyznaczenie tej prędkości. Otrzymana wartość wynosiła $(299\ 792 \pm 9)$ km/s. Z kolei prędkość promieni gamma emitowanych przy anihilacji pozytonu określili Cleland i Jastram w 1951 roku. Badali oni różnice w czasach obserwacji impulsów rejestrównych przez liczniki będące w różnych odległościach od źródła promieniowania. W wyniku tych pomiarów otrzymali wartość prędkości równą $(298\ 300 \pm 1\ 500)$ km/s.

Współcześnie przyjmuje się prędkość fal elektromagnetycznych *w próżni* za fundamentalną stałą fizyczną o wartości $c = 299\ 792,458$ km/s. Na mocy równań Maxwella prędkość światła c związana jest z innymi stałymi fizycznymi formułą:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}, \quad (15.1)$$

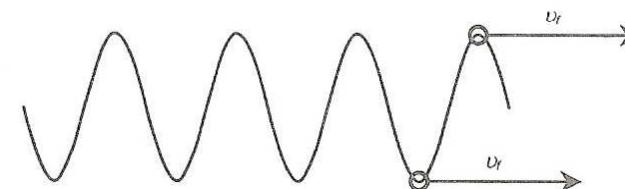
gdzie ϵ_0 jest przenikalnością elektryczną próżni, a μ_0 – przenikalnością magnetyczną próżni.

Prędkość fazowa i grupowa

Jeśli rozważa się pojedynczą falę z dowolnego zakresu widma (rys. 15.1) o ścisłe określonej długości i częstotliwości (*fala monochromatyczna*), to można ją przedstawić jako sinusoidę, której wszystkie punkty o ustalonej fazie poruszają się z pewną prędkością. Prędkość tę nazywamy *prędkością fazową* v_f (rys. 15.4). Jak zaznaczono wcześniej, prędkość ta dla fal elektromagnetycznych rozchodzących się w próżni jest równa stałej c . Natomiast w ośrodkach materialnych prędkość fazowa określona jest wzorem:

$$v_f = \frac{c}{n}, \quad (15.2)$$

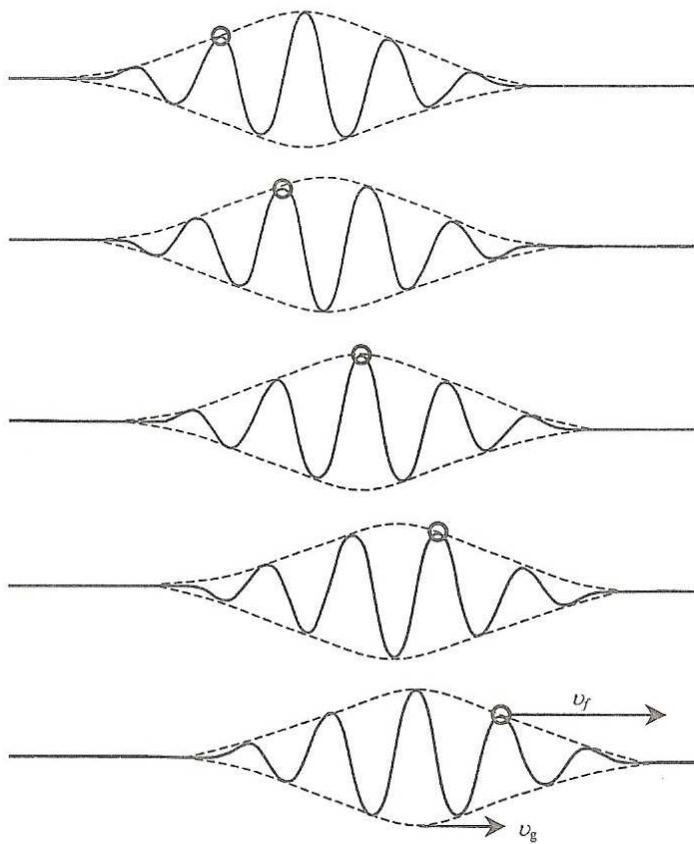
gdzie n jest *współczynnikiem załamania ośrodka* dla danej fali. Bardzo istotne jest, że współczynnik ten zależy nie tylko od rodzaju ośrodka, ale także od długości fali elektromagnetycznej. Zatem, w przeciwieństwie do próżni, w *ciałach materialnych* prędkości fazowe fal elektromagnetycznych o różnych długościach są różne. Zjawisko to określa się mianem *dyspersji*. Gdy $n < 1$, prędkość fazowa v_f jest większa od c . Natomiast w ośrodku, w którym $n > 1$, prędkość fazowa v_f jest mniejsza od c . Z tym drugim przypadkiem wiąże się ciekawe zjawisko fizyczne. Mianowicie, jeżeli w takim ośrodku pojawią się cząstki naładowane o prędkości większej od v_f (ale mniejszej od c , co wynika z teorii względności), to będą one emitować promieniowanie elektromagnetyczne. Takie promieniowanie cząstek o prędkości większej od prędkości fazowej fal elektromagnetycznych w danym ośrodku jest nazywane *promieniowaniem Czerenkowa*. Objawia się ono przykładowo w postaci błękitnej poświaty widocznej we wnętrzach niektórych reaktorów jądrowych.



Rys.15.4. Monochromatyczna fala przemieszczająca się w przestrzeni. Wszystkie punkty o ustalonej fazie (na przykład lokalne maksima i minima, z których dwa zaznaczono małymi okręgami) mają tę samą prędkość fazową v_f

Dotychczas omawiany przypadek fali monochromatycznej jest znacznie uproszczony. W rzeczywistości bardzo rzadko można mówić o rozprzestrzenianiu się fali o ścisłe określonej długości. Nawet najdoskonalsze źródła emittują zwykle nie jedną falę o długości λ_0 , ale pewną grupę fal o długości z zakresu $\lambda_0 \pm \Delta\lambda$. Fale te

nakładają się na siebie i w wyniku interferencji otrzymuje się nie prostą sinusoidę ale w skrajnym przypadku znacznie bardziej skomplikowany obiekt przemieszczający się w przestrzeni, zwany *paczką falową*. Dyspersja fal składowych w ośrodkach materialnych powoduje dodatkowo, że obiekt taki ewoluje również w czasie.



Rys. 15.5. Kształt przykładowej paczki falowej w kolejnych chwilach (linia ciągła). Małym okręgiem wyróżniono wybrane lokalne maksimum przemieszczające się z prędkością fazową v_f . Na ostatnim rysunku zaznaczono również prędkość grupową v_g , z jaką przemieszcza się obwiednia paczki (linia przerywana).

Przykład takiej paczki falowej w kilku chwilach pokazano na rysunku 15.5. Jak widać, ma ona postać sinusoidy (linia ciągła) „ograniczonej” w przestrzeni za pomocą obwiedni (linia przerywana). Lokalne maksima i minima sinusoidy poruszają się z prędkością fazową v_f . Ale obwiednia paczki porusza się z inną prędkością,

zwaną *prędkością grupową* v_g . W pokazanym przykładzie prędkość fazowa v_f jest większa od prędkości grupowej v_g , tak więc maksima i minima pojawiają się z tyłu paczki, przebiegają na jej początek i tam zanikają. Ogólną zależność między powyższymi prędkościami określa formuła:

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}. \quad (15.3)$$

Jak widać, w zależności od czynnika dyspersyjnego $dv_f/d\lambda$ możliwe są trzy przypadki relacji między prędkością fazową i grupową:

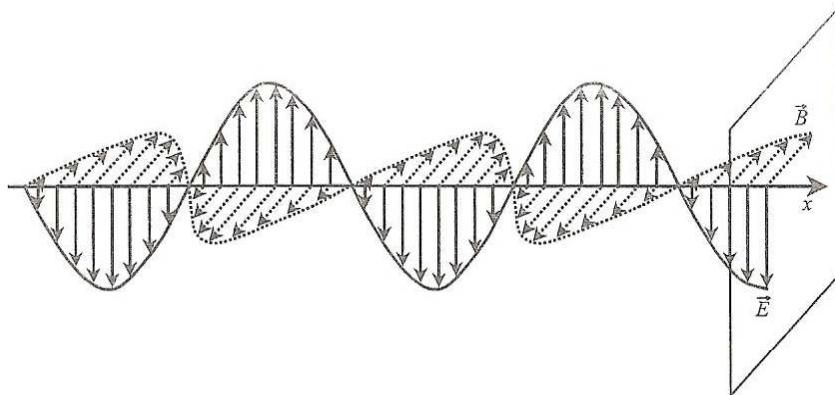
- $v_f > v_g$, gdy $(dv_f/d\lambda) > 0$ – dyspersja normalna (przykład z rys. 15.5),
- $v_f < v_g$, gdy $(dv_f/d\lambda) < 0$ – dyspersja anomalna,
- $v_f = v_g$, gdy $(dv_f/d\lambda) = 0$ – brak dyspersji (przykładowo w próżni).

Na rysunku 15.5 można zauważyc, że poza obszarem określonym obwiednią (linia przerywana) fala praktycznie zanika. Zatem energia niesiona przez taką falę i związane z nią oddziaływanie elektromagnetyczne mogą rozchodzić się tylko z prędkością przemieszczania się obwiedni, która jest równa prędkości grupowej v_g . Zgodnie z teorią względności, wszelkie oddziaływanie w przyrodzie nie mogą się rozprzestrzeniać z prędkością większą od c . To samo ograniczenie dotyczy również prędkości grupowej v_g . Natomiast prędkość fazowa v_f nie podlega temu ograniczeniu i w szczególnych przypadkach ($n < 1$) może być większa od c , co zaznaczono powyżej. Dodać należy, że ponieważ oddziaływanie elektromagnetyczne (także na przyrządy pomiarowe) rozchodzi się z prędkością grupową v_g , zatem wszystkie pomiary prędkości fal elektromagnetycznych w substancjach dają w wyniku wartość tej właśnie prędkości.

Propagacja i konfiguracja pól elektromagnetycznych

Dotychczas omawiano propagację fal elektromagnetycznych, skupiając się szczegółowo na zagadnieniu prędkości i efektów z nią związanych. Należy jednak pamiętać, że fala elektromagnetyczna składa się w istocie z dwóch zmieniających się cyklicznie pól: elektrycznego i magnetycznego. Opisuje się je wektorami odpowiednio natężenia pola elektrycznego \vec{E} oraz indukcji magnetycznej \vec{B} . Przestrzenny układ tych pól w ogólności określony jest równaniami Maxwella. Najprostszym przykładem jest monochromatyczna fala elektromagnetyczna rozchodząca się w swobodnej przestrzeni w konfiguracji, w której linie pól elektrycznych i magnetycznych oraz kierunek propagacji są wzajemnie prostopadłe. Zilustrowano to schematycznie na rysunku 15.6.

Sytuacja może natomiast wyglądać inaczej, gdy fala elektromagnetyczna przemieszcza się w obecności ciał materialnych. Wówczas kształty linii obu pól zależą od układu otaczających ciał oraz związanych z nimi warunków brzegowych, przy których rozwiązuje się równania Maxwella. Szczególnym przykładem jest tutaj bardzo popularny w technice (i stosowany w omawianym ćwiczeniu) przewód



Rys. 15.6. Konfiguracja pól elektrycznych \vec{E} (linie ciągłe) i magnetycznych \vec{B} (linie przerywane) w monochromatycznej fali elektromagnetycznej rozchodzącej się w swobodnej przestrzeni w kierunku x . W przekroju poprzecznym do kierunku propagacji linie pól elektrycznego i magnetycznego są prostymi wzajemnie prostopadłymi

koncentryczny służący do przesyłania zmiennych sygnałów elektromagnetycznych. Składa się on z centralnej żyły przewodnika otoczonej koncentrycznymi warstwami odpowiednio dielektryka i przewodzącego ekranu. Budowę takiego przewodu wraz z chwilowym rozkładem pól elektrycznych i magnetycznych monochromatycznej fali elektromagnetycznej pokazano na rysunku 15.7.

Przedstawiona konfiguracja pól tego rodzaju przewodu jest najprostsza z wielu możliwych. Jak widać, linie pola elektrycznego układają się radialnie w kierunkach od centralnego przewodu na zewnątrz (lub – w przeciwnie fazie – do wewnętrz), natomiast linie pola magnetycznego tworzą współśrodkowe lewoskrątne (w przeciwnie fazie – prawoskrątne) okręgi wokół wewnętrznego przewodu. W przypadku dobrego ekranowania pola nie przenikają na zewnątrz przewodu.

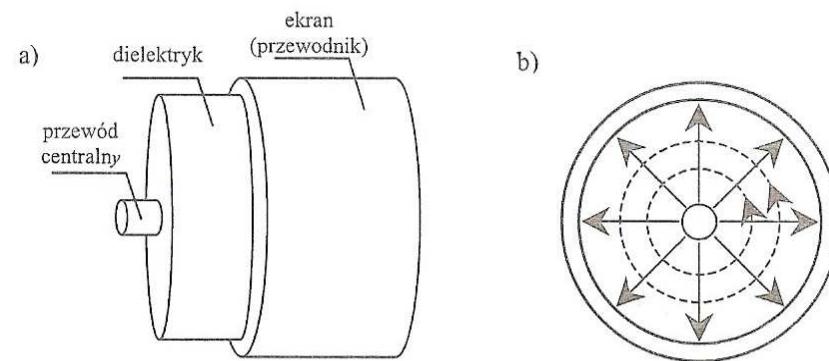
Powyższe przykłady stanowią tylko drobny fragment bardzo szerokiej tematyki propagacji fal elektromagnetycznych w próżni i w ośrodkach materialnych. W tych ostatnich dodatkowe komplikacje powodują fakt, że sygnały elektromagnetyczne o różnych długościach fal w sposób odmienny oddziałują z materią. Zatem dla różnych zakresów długości fal z widma elektromagnetycznego stosuje się rozmaite rodzaje i typy przewodów lub falowodów, czy wręcz światłowodów.

Stanowisko pomiarowe

Głównymi przyrządami układu pomiarowego są generator impulsowy i oscylometr. W pierwszej części ćwiczenia stosuje się konfigurację pokazaną na rysunku 15.8a. Generator steruje źródłem ZS (diode luminescencyjną) emitującym impulsy świetlne. Dwa elementy detekcyjne D1 i D2 (fotodiody) zamieniają nadchodzące ze źródła sygnały na odpowiadające im impulsy elektryczne. Układ jest tak skon-

struowany, że detektor D1 odbiera sygnały przebywające pomijalnie krótką drogę, natomiast detektor D2 odbiera impulsy po przebyciu znacznie dłuższej drogi S (światło z diody luminescencyjnej przebywa drogę do lustra, a następnie trafia do detektora). Sygnały z obu detektorów są kierowane do oddzielnych kanałów oscylometru, tak że można z jego pomocą mierzyć czasowe opóźnienie Δt między impulsami.

W drugiej części ćwiczenia stosuje się konfigurację pokazaną na rysunku 15.8b. Impulsy z generatora przesyłane są do pierwszego kanału oscylometru przez krótki przewód koncentryczny, a do drugiego kanału przez kolejny przewód o znaczającej długości S lub S_x . Podobnie jak wcześniej, oscylometr służy do pomiaru czasu opóźnienia Δt drugiego impulsu względem pierwszego.

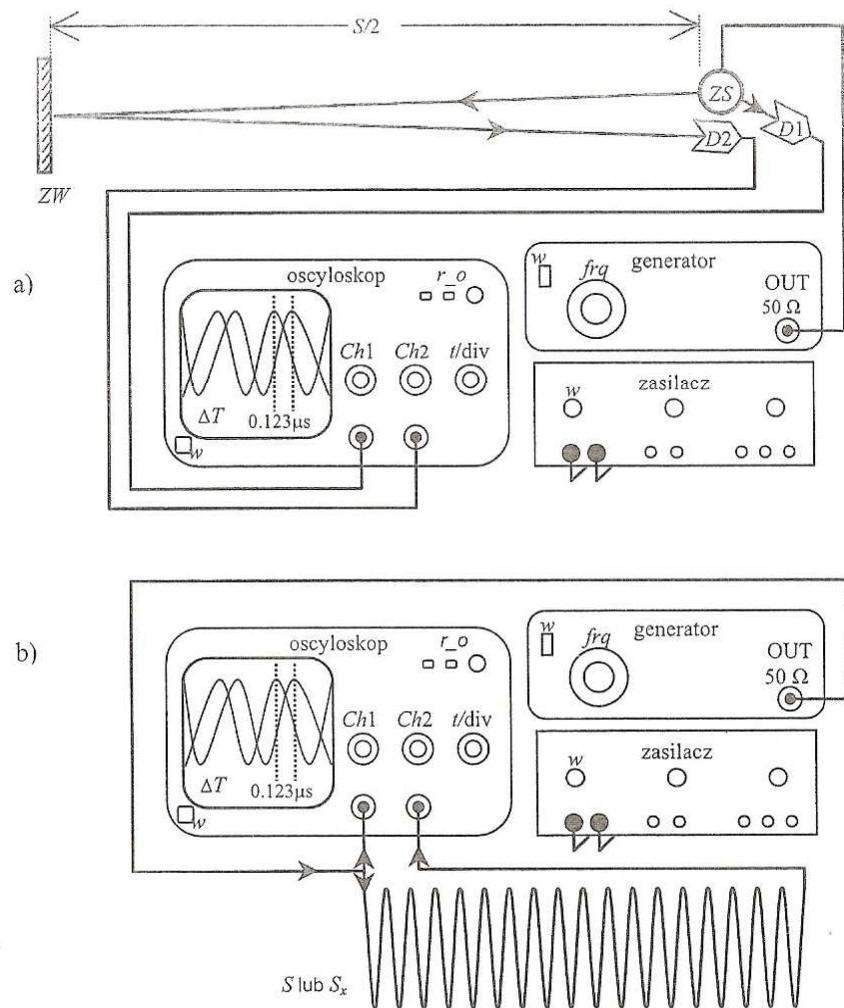


Rys. 15.7. Przewód koncentryczny: a) budowa (bez narysowanej zewnętrznej warstwy izolacji ochronnej), b) przykładowy rozkład linii pól elektrycznych (linie ciągłe) i magnetycznych (linie przerywane) w przekroju poprzecznym

Pomiar i obliczenia

Przed wykonaniem pomiarów należy uzyskać na oscylometrze stabilne, stosownej wielkości obrazy badanych przebiegów. Służą do tego między innymi następujące elementy nastawcze dostępne na panelu przyrządu (porównaj rys. 15.8):

- VOLTS/DIV – podwójne pokrętło wzmacnienia przebiegów, dla każdego kanału osobno (znajdujące się niżej przełączniki trybów pomiarowych powinny być w pozycji AC),
- TIME/DIV – podwójne pokrętło podstawy czasu przebiegów regulowanej wspólnie dla obu kanałów (*uwaga*: zewnętrzne pokrętło płynnej zmiany podstawy czasu powinno być ustawione w prawym skrajnym położeniu),



Rys. 15.8. Schematy stanowisk pomiarowych do badania prędkości impulsów elektromagnetycznych: a) w powietrzu; b) w przewodzie koncentrycznym. Strzałkami zaznaczono kierunki propagacji mierzonych impulsów. Oznaczenia: ZS – źródło światła, D1 i D2 – detektory światła, ZW – zwierciadło, w – własniki urządzeń elektronicznych, Ch1 i Ch2 – kanały oscylometru z gniazdami, przełącznikami trybów i pokrętlami regulacji wzmacniania (VOLTS/DIV), t/div (TIME/DIV) – pokrętło regulacji podstawy czasu, r_o (READ OUT) – pole obsługi cursorów pomiarowych (niżej znajdują się niepokazane na rysunku nastawy LEVEL i SOURCE), frq (FREQUENCY) – pokrętło regulacji częstotliwości impulsów, OUT 50 Ω – gniazdo wyjściowe generatora, S lub S_x – różnice dróg przebytych przez impulsy elektromagnetyczne

• LEVEL – poziom wyzwalania pozwalający uzyskać stabilny obraz przebiegów (znajdujący się niżej przełącznik źródła wyzwalania SOURCE powinien być ustawiony w pozycji CH1 lub CH2).

Po uzyskaniu odpowiednich obrazów należy skonfigurować tryb pracy kurSORów pomiarowych. Służą do tego przyciski i pokrętła znajdujące się w polu READ OUT w prawym górnym rogu panelu przyrządu. Należy je obsługiwać w następującej kolejności:

- CMNT/CUR – nacisnąć przycisk stosowną liczbę razy, aż do zniknięcia z ekranu napisów CMNT1, CMNT2, C2G5E.
- MODE – nacisnąć przycisk stosowną liczbę razy, aż pojawią się na ekranie dwie pionowe przerywane linie cursorów pomiarowych (patrz rys. 15.8) oraz w lewej części ekranu pojawi się napis ΔT, a nicco poniżej na prawo pojawi się wartość opóźnienia czasowego wyrażona w odpowiednich jednostkach czasu (s, ms, μs, ns). Opóźnienie to będzie odczytywane po odpowiednim ustawieniu linii kurSORów pomiarowych.

Przesuwanie linii cursorów odbywa się przez obrót pokrętła znajdującego się w prawej części pola READ OUT. Pokrętło to pełni również funkcję przycisku, który pozwala wybrać sposób przesuwu tych linii zgodnie z informacjami ukazującymi się na ekranie:

CURSOR 1 – przesuw tylko linii kurSORa pierwszego,

CURSOR 2 – przesuw tylko linii kurSORa drugiego,

TRACKING – jednoczesny przesuw linii obu kurSORów.

Aby zmierzyć opóźnienie czasowe między przebiegami, należy ustawić linie kurSORów na odpowiadających sobie, charakterystycznych punktach obu przebiegów (na przykład na lokalnych maksymach, jak pokazano na rys. 15.8). Należy pamiętać, aby wartość opóźnienia odczytywać z ekranu oscylometru, uwzględniając wyświetlane jednostki (s, ms, μs, ns).

Znając opóźnienie czasowe Δt między przebiegami oraz różnicę S między drogami przebytymi przez impulsy, można obliczyć prędkość tych impulsów w wybranym ośrodku. Korzysta się tutaj ze znanego z kinematyki wzoru na wartość prędkości w ruchu jednostajnym:

$$v = \frac{S}{\Delta t}. \quad (15.4)$$

Przebieg ćwiczenia

1. Połączyć układ przewodów zgodnie z rysunkiem 15.8a w celu pomiaru prędkości impulsów w powietrzu.
2. Włączyć generator, oscylometr oraz zasilacz pomocniczy.
3. Wyregulować nastawy oscylometru tak, aby sygnały z obu kanałów były wyraźnie widoczne.
4. Za pomocą linii cursorów pomiarowych odczytać na ekranie oscylometru opóźnienie Δt drugiego sygnału względem pierwszego.

5. Na podstawie wzoru (15.4) obliczyć prędkość badanych impulsów, podając zamiast S odpowiednią różnicę dróg.
6. Powyższe pomiary powtórzyć dla kilku innych wartości częstotliwości generatora impulsów. Obliczyć średnią i odpowiadające jej odchylenie standarde.
7. Połączyć układ zgodnie z rysunkiem 15.8b z przyłączonym przewodem o znanej długości. Długość ta odpowiada różnicy dróg S przebytych przez impulsy.
8. Powtarzając punkty od 3 do 5, określić prędkość impulsów v_k w przewodzie koncentrycznym. Obliczyć niepewność pomiarową wyznaczonej wartości.
9. Zamienić przewód o znanej długości na wskazany przez prowadzącego przewód tego samego typu, ale o nieznanej długości S_x .
10. Określić opóźnienie czasowe między impulsami Δt_x .
11. Na podstawie wzoru (15.5) obliczyć długość nieznanego przewodu:

$$S_x = v_k \Delta t_x. \quad (15.5)$$

12. Obliczyć niepewność pomiarową wyznaczonej wartości.
13. Powtórzyć pomiary dla innych przewodów wskazanych przez prowadzącego.
14. Na podstawie wzoru (15.1) i tablicowych wartości ε_0 oraz μ_0 obliczyć prędkość fal elektromagnetycznych w próżni. Wykonać rachunek jednostek. Skomentować porównanie obliczonej wartości z wcześniejszymi wynikami ćwiczenia.
15. Zestawić końcowe wyniki pomiarów.

Zestaw ćwiczeniowy

Generator impulsowy, oscyloskop, zasilacz, układ optyczny ze źródłem światła i detektorami, przewody koncentryczne

Pojęcia kluczowe

- Fale elektromagnetyczne
- Dyspersja
- Prędkość fazowa i grupowa
- Promieniowanie Czerenkowa
- Przewód koncentryczny

Mirosław Szybowicz

16. Wyznaczanie przerwy energetycznej półprzewodnika

Cel ćwiczenia

Zapoznanie się z techniką pomiarów absorpcji i transmisji światła za pomocą spektrofotokolorymetru. Wyznaczenie metodą pomiaru transmisji światła w funkcji długości fali przerwy energetycznej półprzewodnika naniesionego na podłoż szklane.

Wprowadzenie

Ciało stałe pod względem przewodnictwa elektrycznego można podzielić na trzy podstawowe grupy: *przewodniki, półprzewodniki i izolatory*. Często kryterium rozstrzygającym, do której grupy należy zaliczyć dany materiał, jest przewodność właściwa w temperaturze pokojowej. Z punktu widzenia teorii pasmowej ciała stałe można scharakteryzować za pomocą szerokości pasma energetycznego. W ciałach stałych o budowie krystalicznej elektronowe stany energetyczne stanowią pasma o szerokości kilku elektronowoltów. Pasma te powstają wskutek wzajemnego oddziaływanie poszczególnych atomów tworzących sieć krystaliczną. Kryształy zaliczane do grupy półprzewodników w temperaturze zera bezwzględnego mają całkowicie zapełnione przez elektrony pasmo walencyjne oraz puste pasmo przewodnictwa. W takich warunkach kryształ zachowuje się jak doskonały izolator. W temperaturze powyżej temperatury zera bezwzględnego elektrony częściowo obsadzają stany energetyczne pasma przewodnictwa. Wskutek tego w paśmie walencyjnym odpowiednie stany są puste. Mówimy tu zatem o powstawaniu tzw. *dziur*, czyli wolnych miejsc po elektronach, które przeszły do pasma przewodnictwa. W temperaturze powyżej zera bezwzględnego kryształ ma niewielkie przewodnictwo elektryczne. Wartość energii, która oddziela pasmo walencyjne od pasma przewodnictwa, nazywamy *przerwą energetyczną półprzewodnika*. Przejście elektronów z jednego pasma do drugiego związane jest z emisją (oddaniem) lub absorpcją (pochłanianiem) pewnej ilości energii. Zarówno emisja, jak i absorpcja energii mogą być procesem optycznym, tzn. wiązać się z emisją lub absorpcją fotonu. Przejścia te mogą być również związane z procesami cieplnymi. Mówimy wtedy o *fotonach* (kwantach drgań sieci krystalicznej). Zchodzą również procesy mieszane fotonowo-fotonowe.

Zjawisko absorpcji światła jest procesem pochłaniania energii przez ciało. Zatem jeśli na półprzewodnik padną fotony (światło) o energii wystarczającej do przeniesienia elektronów z pasma walencyjnego półprzewodnika do pasma przewodnictwa, nastąpi ich absorpcja. W widmie absorpcyjnym półprzewodnika można wyróżnić obszar szybkiego wzrostu współczynnika absorpcji dla fotonów o energii bliskiej $h\nu$ (h – stała Plancka, ν – częstotliwość padającego fotonu). Obszar ten nazywamy krawędzią absorpcji półprzewodnika. Minimalna wartość energii $h\nu$

padającego fotonu, pod wpływem którego następuje przejście elektronów z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa, odpowiadając bieżącą szerokością przerwy energetycznej półprzewodnika E_g . Wartość przerwy energetycznej półprzewodnika zwykle podajemy w elektronowoltach – eV. Jeden elektronowolt jest to energia, jaką uzyskuje elektron przyspieszony w wyniku różnicy potencjałów równej 1 V ($1 \text{ eV} \approx 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$).

Absorpcja światła wywołana przejściami elektronów z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa nosi nazwę *absorpcji podstawowej* lub *miedzypasmowej* w odróżnieniu od innych procesów pochłaniania światła.

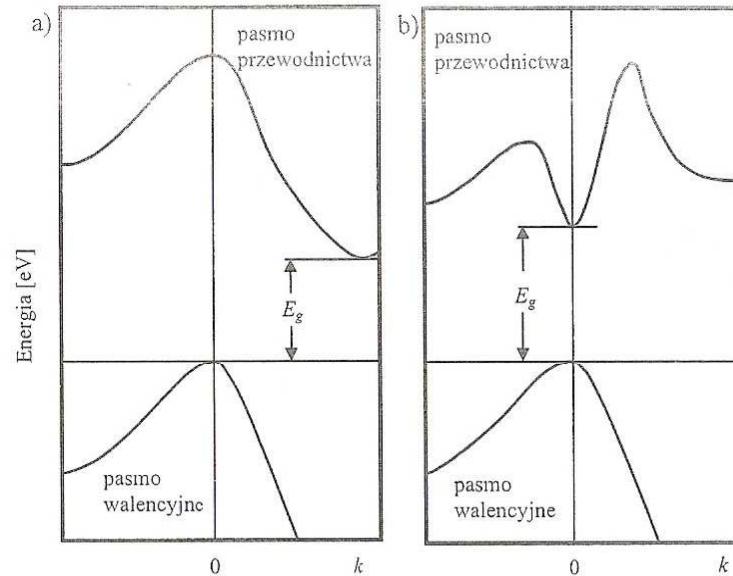
W procesie pochłaniania światła o energii $h\nu$ obowiązują zasady zachowania energii i pędu. Pęd elektronu \vec{p} można wyrazić za pomocą wektora falowego elektronu \vec{k} , $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, gdzie $\hbar = h/(2\pi)$. Należy zauważyć, że długość fali świetlnej λ padającej na kryształ jest około 10^3 razy większa od wymiarów komórki elementarnej monokryształu. W takim przypadku wartość wektora falowego fotonu $q = 2\pi/\lambda$ jest pomijalnie mała w porównaniu z wartością wektora falowego elektronów k w pasmach energetycznych półprzewodnika. Wektor falowy elektronów przybiera wartość $0 \leq k \leq \pi/a$, gdzie a oznacza liniowy wymiar komórki elementarnej kryształu (stała sieci krystalicznej). Wyrażenie π/a nazywamy granicą strefy Brillouina.

Ze względu na zachowanie wektora falowego przejścia elektronów z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa dzielimy na przejścia *proste* i *skośne*. Schematycznie mechanizm przejść skośnych i prostych pokazano na rysunku 16.1. W przypadku przejść skośnych wierzchołek pasma walencyjnego oraz dno pasma przewodnictwa nie mają takiej samej wartości wektora falowego k (rys. 16.1a). Oznacza to, że w wyniku przejścia następuje zmiana wartości wektora falowego k . W takim przypadku mówimy o półprzewodnikach ze skośną przerwą energetyczną (krzem Si, german Ge). W przejściach skośnych oprócz absorpcji fotonu jest wzbudzany lub absorbowany fonon. Gdy przejście elektronów z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa zachodzi bez zmiany wartości wektora falowego, przejście takie nazywamy przejściem prostym. Oznacza to, że wierzchołek pasma walencyjnego oraz dno pasma przewodnictwa mają tę samą wartość wektora falowego k (rys. 16.1b). Przejścia proste przeważają w pobliżu krawędzi absorpcji półprzewodników z tzw. prostą przerwą energetyczną (gal Ga, arsen As).

W kryształach istnieją określone reguły wyboru dozwolonych i wzbronionych przejść międzypasmowych pomiędzy dyskretnymi stanami energetycznymi. Zasada zachowania energii dla niektórych półprzewodników z przeważającą liczbą przejść prostych przyjmuje następującą postać:

$$h\nu = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2\bar{m}}, \quad (16.1)$$

gdzie \bar{m} jest masą zredukowaną ($1/\bar{m} = 1/m_e^* + 1/m_d^*$), określoną przez odpowiednie masy elektronów w paśmie przewodnictwa (m_e^*) i masy efektywne dziur (m_d^*) w paśmie walencyjnym. Masa efektywna elektronów i dziur jest odpowiednikiem



Rys. 16.1. Schemat mechanizmu absorpcji światła w półprzewodnikach:
a) przejście skośne, b) przejście proste

masy cząstek znajdujących się w środowisku materialnym. Pasma, dla których energia $h\nu$ jest funkcją k^2 , nazywają się *parabolicznymi* (wzór (16.1), rys. 16.1). Gdy $h\nu = E_g$, następuje przejście elektronu z wierzchołka pasma walencyjnego do dna pasma przewodnictwa. Wraz ze wzrostem energii kwantu fali świetlnej $h\nu$ poziom energii stanu początkowego przesuwa się w dół pasma walencyjnego, natomiast poziom energii stanu końcowego przesuwa się w górę pasma przewodnictwa. Zmiana ta jest proporcjonalna do różnicy energii $h\nu - E_g$. Analizując gęstość stanów elektronowych w pobliżu wierzchołka lub dna pasma energetycznego, możemy zapisać, że współczynnik absorpcji α jest ściśle związany z energią kwantów $h\nu$, a liczba stanów elektronowych rośnie proporcjonalnie do $(h\nu - E_g)^{1/2}$. Możemy zatem zapisać relację:

$$\alpha h\nu = C(h\nu - E_g)^{1/2}. \quad (16.2)$$

W powyższym wyrażeniu C jest współczynnikiem proporcjonalności, który w dalszych rozważaniach może zostać być pominięty.

W celu doświadczalnego wyznaczenia przerwy energetycznej półprzewodnika skorzystajmy z następującej analizy teoretycznej. Rozważmy półprzewodnik o grubości d , na który pada wiązka światła o natężeniu I_0 . Stosunek natężenia promieniowania przepuszczonego przez warstwę półprzewodnika I_T do natężenia

światła padającego I_0 nazywamy transmisją T (przepuszczalnością), którą definiuje poniższa zależność:

$$T = \frac{I_T}{I_0}. \quad (16.3)$$

Analogicznie można zdefiniować absorpcję światła A – jako stosunek intensywności światła zaabsorbowanego I_A do intensywności światła padającego na badany materiał I_0 :

$$A = \frac{I_A}{I_0}. \quad (16.4)$$

Oprócz światła zaabsorbowanego i przepuszczanego przez badany materiał istnieje część światła odbitego od warstw granicznych. Światło odbite stanowi z reguły mały procent wiązki padającej i zasadniczo w dalszym toku rozważać można je pominąć. W takim przypadku można zapisać, że współczynnik absorpcji

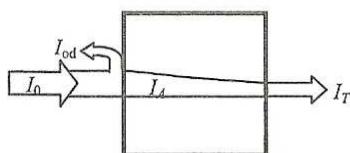
$$A = \frac{I_0 - I_T}{I_0}. \quad (16.5)$$

Schematycznie podział wiązki światła padającej na badany materiał przedstawiono na rysunku 16.2.

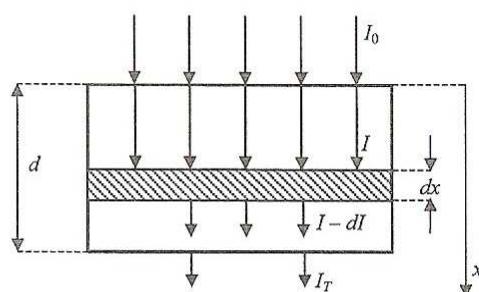
Na skutek przechodzenia światła o natężeniu I przez warstwę o nieskończonym mniej grubości dx (rys. 16.3) zmniejsza się jego natężenie. Jest to związane ze zdolnością pochłaniania światła przez dany ośrodek, scharakteryzowaną współczynnikiem absorpcji α . Zmniejszenie wartości natężenia światła ($-dI$) jest wprost proporcjonalne do wartości natężenia wiązki padającej na rozpatrywaną warstwę i do grubości warstwy pochłaniającej dx :

$$-dI = \alpha I dx. \quad (16.6)$$

Po scałkowaniu tego wyrażenia względem całej warstwy o grubości d , gdy natężenie światła padającego wynosi I_0 (dla $x = 0$), a natężenie światła wychodzącego I_T (dla $x = d$)



Rys. 16.2. Schematyczny podział wiązki światła padającej na materiał; I_T – natężenie światła przechodzącego, I_A – natężenie światła zaabsorbowanego, I_0 – natężenie światła padającego, I_{od} – natężenie światła odbitego



Rys. 16.3. Absorpcja światła w ciele stałym

$$\int_{I_0}^{I_T} \frac{dI}{I} = -\alpha \int_0^d dx \quad (16.7)$$

otrzymamy:

$$\ln \frac{I_T}{I_0} = -\alpha d. \quad (16.8)$$

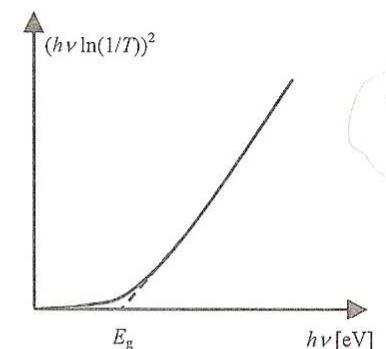
Po przekształceniu algebraicznym uzyskamy zależność na współczynnik absorpcji:

$$\alpha = \frac{1}{d} \ln \frac{1}{T}. \quad (16.9)$$

Uwzględniając zależności (16.2) i (16.9) oraz dokonując prostego przekształcenia i podstawienia, możemy zapisać:

$$\left(h\nu \ln \frac{1}{T} \right)^2 = C^2 d^2 (h\nu - E_g). \quad (16.10)$$

Wykreślając zależność $(h\nu \ln(1/T))^2$ od energii kwantu promieniowania $h\nu$, można zauważać, że dla energii $h\nu$ o wartości zbliżonej do krawędzi absorpcji (odcinek szybkiego wzrostu współczynnika absorpcji) wykres jest linią prostą. Punkt przecięcia prostej z osią odciętych (ekstrapolacja), której przypisujemy wartość energii kwantu $h\nu$, jest wartością przerwy energetycznej badanego półprzewodnika. Na rysunku 16.4 przedstawiono graficznie sposób wyznaczenia przerwy energetycznej w pobliżu krawędzi absorpcji półprzewodnika. Przez ekstrapolację liniową części krzywej (powyżej krawędzi absorpcji) otrzymanej doświadczalnie uzyskujemy numeryczne równanie, na podstawie którego obliczamy wartość przerwy energetycznej badanego półprzewodnika. Należy jednak pamiętać, że powyższa zależność nie jest funkcją, gdyż zmienna v występuje po obu stronach równania.



Rys. 16.4. Linia ciągła – zależność $(h\nu \ln(1/T))^2 = f(h\nu)$, linia przerwana – ekstrapolacja liniowa części krzywej

Stanowisko do badań absorpcji i transmisji światła

W układzie pomiarowym zastosowano spektrofotokolorymetr typu SPECOL. Składa się on ze źródła światła, monochromatora siatkowego, którego zadaniem jest rozszczepienie światła, oraz fotoogniwa selenowego zamieniającego padający strumień fotonów na prąd elektryczny (fotoprąd), który jest mierzony za pomocą

mikroamperomierza cyfrowego. Mierzona natężenie prądu jest wprost proporcjonalne do natężenia światła padającego na fotoogniwo.

Pomiar transmisji światła za pomocą spektrofotokolorymetru jest oparty na pomiarach porównawczych. W metodzie tej używamy dwóch identycznych szklanych płyt. Na jednej z nich naniesiona jest cienka warstwa półprzewodnika, natomiast druga jest czysta (odnośnik). Ma to na celu wyeliminowanie zniekształceń widm absorpcji badanego półprzewodnika powstających w wyniku przejścia światła przez płytę szklaną (absorpcja światła przez półprzewodnik i szkło), co z kolei wpływa na zmianę natężenia światła padającego na fotoogniwo. Pomiar zatem polega na odczytaniu wartości prądu rejestrowanego przez spektrofotokolorymetr po przejściu światła przez czystą płytę szklaną I_0 oraz po przejściu przez półprzewodnik naniesiony na identyczne podłożo szklane I . W takim przypadku można określić transmisję T światła jako $T = II_0$.

Przebieg ćwiczenia

- Włączyć spektrofotokolorymetr do sieci i odczekać około 5 min na ustalenie się odpowiednich warunków termicznych w fotoogniwie.
- W układzie pomiarowym w pojemnikach karetki pomiarowej umieścić: w pierwszym – płytę szklaną, w drugim – płytę z naniesioną warstwą półprzewodnika.
- Zmierzyć transmisję światła przez płytę szklaną oraz płytę z naniesionym półprzewodnikiem, ustawiając określoną długość fali na przyrządzie pomiarowym. Pomiarów dokonać w zakresie od 400 do 650 nm, zmieniając ustawienie długości fali co 10 nm.
- Sporządzić wykres zależności $(hv \ln(1/T))^2$ od energii promieniowania hv .
- Korzystając z metody regresji liniowej, wyznaczyć współczynniki prostej dopasowanej do wyników eksperymentalnych wybranych z liniowej części otrzymanego wykresu. Na podstawie uzyskanego równania prostej wyznaczyć wartość przerwy energetycznej półprzewodnika E_g dla wartości osi rzędnych równej零.
- Wyznaczyć niepewność pomiarową wartości przerwy energetycznej.

Zestaw ćwiczeniowy

Spektrofotokolorymetr SPECOL, płytka szklana, płytka szklana z naniesioną warstwą półprzewodnika ZnS (selenek siarki)

Pojęcia kluczowe

- Półprzewodniki, przerwa energetyczna półprzewodnika
- Pasmowa teoria ciał stałych
- Absorpcja i transmisja światła w ciałach stałych, prawo Lambertta

17. Badanie zjawisk dyfrakcji i interferencji światła

Cel ćwiczenia

Eksperymentalna obserwacja zjawisk dyfrakcji i interferencji. Wyznaczenie szerokości badanych szczelin oraz stałych siatek dyfrakcyjnych.

Wprowadzenie

Zjawiska interferencji i dyfrakcji dotyczą procesów związanych z rozchodzeniem i nakładaniem się fal. Fala jest to zaburzenie – często periodyczne – zmienne zarówno w czasie, jak i przestrzeni. Zależnie od rodzaju takiego zaburzenia i typu ośrodka, w jakim się ono rozchodzi, możemy mieć do czynienia z różnymi typami fal (akustycznymi, elektromagnetycznymi, falami na wodzie itd.). Niniejsze opracowanie odnosi się szczególnie do fal elektromagnetycznych, lecz należy pamiętać, że interferencja i dyfrakcja dotyczą wszystkich rodzajów zjawisk falowych.

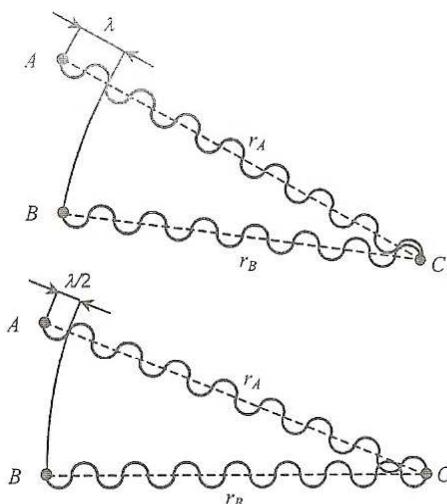
Interferencja

Ze zjawiskiem *interferencji* mamy do czynienia, gdy dwie fale lub więcej fal spotyka się w tym samym punkcie przestrzeni. Następuje wówczas ich wzajemne *nałożenie*. W większości przypadków możemy przyjąć, że fala wypadkowa w punkcie spotkania będzie prostą sumą fal składowych. Jest to tak zwana *zasada superpozycji*, którą przyjmujemy również w niniejszym opracowaniu. Dodatkowo – upraszczając zagadnienie – będziemy rozpatrywać tylko nałożenie fal o tych samych długościach λ (*fale monochromatyczne*) i amplitudach oraz zachowujących stałość fazy w czasie i przestrzeni (*fale spójne*).

Najprostszym przykładem interferencji jest nakładanie się fal pochodzących z dwóch punktów przestrzeni A i B . Szczególne przypadki takiego nałożenia pokazano na rysunkach 17.1 i 17.2.

Na rysunku 17.1 pokazano przypadek, w którym różnica przebytych przez fale dróg $\Delta S = r_A - r_B$ jest równa długości fali λ i w punkcie spotkania C_1 fale się wzmacniają. W tym punkcie fala wypadkowa ma amplitudę dwukrotnie większą od amplitud fal składowych. Na rysunku 17.2 pokazano z kolei przypadek, w którym różnica przebytych przez fale dróg ΔS jest równa połowie długości fali $\lambda/2$ i w punkcie spotkania C_2 fale się osłabiają. W tym punkcie fala wypadkowa ma amplitudę zerową.

Należy pamiętać, że źródła w punktach A i B emittują fale we wszystkich kierunkach, nie tylko w pokazanych na rysunkach 17.1 i 17.2. Dodatkowo fale, które już uległy nałożeniu, biegą dalej zgodnie z pierwotnymi kierunkami i mogą interferować w następnych punktach. Zatem wzmacnienia i osłabienia pojawią się również w kolejnych punktach C w przestrzeni wokół źródeł A i B . Uogólniając warunki interferencji na wszystkie takie punkty, stwierdzamy, co następuje:



Rys. 17.1. Nałożenie się fal wybiegających ze źródeł A i B . Przypadek powstania wzmacniania w punkcie C_1 . Różnica dróg przebytych przez fale od źródeł do punktu C_1 wynosi λ

Rys. 17.2. Nałożenie się fal wybiegających ze źródeł A i B . Przypadek powstania osłabienia w punkcie C_2 . Różnica dróg przebytych przez fale od źródeł do punktu C_2 wynosi $\lambda/2$

- w danym punkcie wystąpi *wzmocnienie* nakładających się fal, gdy różnica przebytych przez nie dróg ΔS będzie parzystą wielokrotnością połowy długości fali (czyli całkowitą wielokrotnością długości fali):

$$\Delta S = n \lambda, \quad \text{gdzie} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17.1)$$

- w danym punkcie wystąpi *osłabienie* nakładających się fal, gdy różnica przebytych przez nie dróg ΔS będzie nieparzystą wielokrotnością połowy długości fali:

$$\Delta S = (2n+1) \frac{\lambda}{2}, \quad \text{gdzie} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17.2)$$

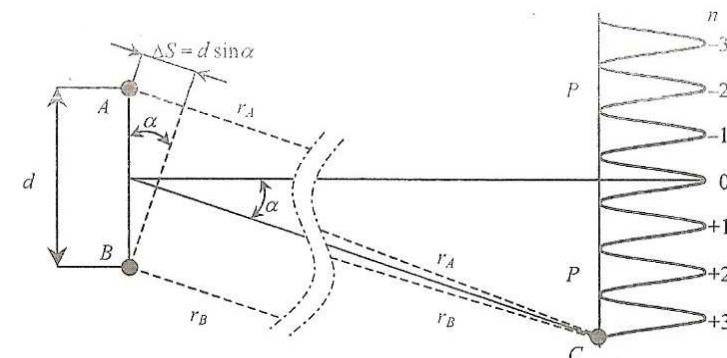
Parametr n zwany jest rzędem interferencji.

Założmy, że interesują nas punkty wzmacnianie i osłabień leżące w odległości od źródeł A i B znaczco wiêkszej od odległości d między źródłami. Sytuację tą pokazano na rysunku 17.3. W pobliżu źródeł kierunki biegu fal r_A i r_B są z dobrym przybliżeniem równoległe. Zatem różnicę przebytych dróg można zapisać prostą formułą trygonometryczną:

$$\Delta S = r_A - r_B = d \sin \alpha. \quad (17.3)$$

Po podstawieniu wyrażenia (17.3) do wzoru (17.1) otrzymuje się formułę na kierunki (kąty α), wzdłuż których obserwowane są punkty wzmacnianie:

$$d \sin \alpha = n \lambda, \quad \text{gdzie} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17.4)$$



Rys. 17.3. Interferencja w punkcie C znacząco odległym od źródeł A i B . Na rysunku zamiast fal narysowano schematyczne kierunki ich biegu r_A i r_B . Odległość linii pomiarowej P od źródeł A i B powinna być znacznie większa niż rozmiary rysunku. Literą n oznaczono rzędy wzajemnych wzmacnianie interferencyjnych fal ze źródeł

Analogicznie, po podstawieniu wzoru (17.3) do wzoru (17.2) otrzymuje się warunki, jakie spełniają kąty α dla kierunków, wzdłuż których występują osłabienia:

$$d \sin \alpha = (2n+1) \frac{\lambda}{2}, \quad \text{gdzie} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17.5)$$

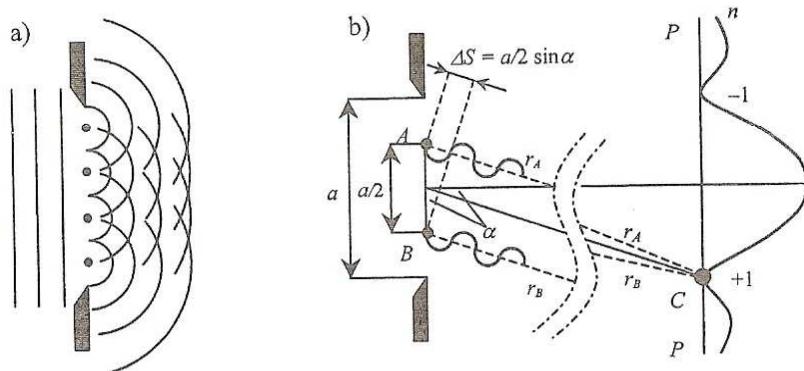
Zatem w miejscach znacząco odległych od źródeł punkty wzmacnianie i osłabień układają się we wzajemnie naprzemienne linie proste rozchodzące się promieniście od punktu środkowego między źródłami. Prowadząc pomiary amplitud wzdłuż prostej P przecinającej powyższe linie, można zaobserwować wzmacniania n -tych rzędów i stosowne osłabienia między nimi, schematycznie przedstawione na rysunku 17.3.

Dyfrakcja

Ze zjawiskami *dyfrakcji* mamy do czynienia, gdy fala napotyka na swej drodze materialne przeszkody. Mogą nimi być otwory o różnych kształtach (prostokątne, okrągłe itd.) lub przedmioty ustawione na drodze wędrówki fal. Wówczas kierunek ich biegu zostaje zakłócony i traci swą prostoliniowość. Oznacza to, że napotykając taką przeszkodę, część fali *ugina się*, wnikając w obszar geometrycznego cienia. Skoro nie daje się biegu fali opisać metodami tradycyjnymi, należało stworzyć stosowne modele. Formalnie opis takich zjawisk powinien się sprowadzać do rozwiązania równania, właściwego dla danej fali, z odpowiednimi warunkami brzegowymi. W przypadku fal elektromagnetycznych oznaczałoby to odwołanie się do równań Maxwell'a. Jednak opis taki prowadzi zwykle do skomplikowanych rachunków niedający się rozwiązać ściśle. Z tego powodu często stosuje się pewne przybliżenia i uproszczenia. W omawianym przypadku zastosu-

jemy przybliżenie Huygensa (lub inaczej zasadę Huygensa – czytaj Hojchensa).

Zgodnie z zasadą Huygensa, każdy punkt ośrodka, do którego dociera fala, staje się samodzielnym źródłem nowej fali. Te nowe fale, zwane częstotliwymi lub elementarnymi, interferują ze sobą w dalszym biegu. Dla przykładu rozpatrzmy otwór w postaci prostokątnej szczeliny o szerokości a , pokazany na rysunku 17.4.



Rys. 17.4. Bieg fal przez szczelinę o szerokości a : a) ilustracja zasady Huygensa: przykładowe punkty w szczelinie będące źródłami fal elementarnych, b) interferencja dwóch fal elementarnych pochodzących ze źródeł A i B odległych o $a/2$ i odpowiadające jej osłabienie w profilu pochodzącej z szczeliny fali (linia ciągła). Literą n oznaczono rzędy osłabeń dyfrakcyjnych fal emitowanych ze szczeliny

Na rysunku 17.4a pokazano kilka przykładowych źródeł fal elementarnych (punkty w szczelinie). Fale te nakładają się i tworzą nową powierzchnię fali wypadkowej (powierzchnię falową). Fale elementarne pochodzące ze źródeł znajdujących się bliżej środka szczeliny nakładają się i częściowo wzajemnie znoszą w taki sposób, że odpowiadająca im powierzchnia falowa jest równoległa do powierzchni pierwotnej fali padającej. Ich równoległość jest jednak zaburzona bliżej brzegów szczeliny, gdyż w ich pobliżu fale elementarne, nie mając „sąsiadek”, pozostają niezniesione przez interferencję i zginają się za szczeliną w strefę geometrycznego cienia. Aby określić rozkład kątowy natężenia fali wypadkowej, należy uwzględnić sumę przyczynków pochodzących od wszystkich fal częstotliwych. Taką sumę wyraża całka, ponieważ występuje tutaj promieniowanie ciągłego rozkładu źródeł. Jest to sytuacja znacznie bardziej skomplikowana niż rozpatrywany wcześniej prosty przypadek dwóch źródeł. Jednak opierając się na nim, można łatwo określić przynajmniej warunki występowania minimów w obrazie dyfrakcyjnym. Podzielmy szerokość szczeliny na połowę i weźmy pod uwagę dwa punkty: jeden w górnej połówce szczeliny (punkt A rys. 17.4b), a drugi w dolnej

połówce (punkt B rys. 17.4b) oddalony od górnego o odległość równą połowie szerokości szczeliny. Przy spełnionym warunku $\Delta S = a/2 \sin \alpha = \lambda/2$, czyli $a \sin \alpha = \lambda$ (na podstawie wzoru (17.5)), fale wybiegające z tych punktów są przesunięte o $\lambda/2$ i osłabiają się. W sumie w kierunku określonym przez kąt α wszystkie fale zostaną zniesione, ponieważ dla każdego punktu A z górnej połówki szczeliny znajdzie się analogiczny punkt B z dolnej połówki spełniający warunek wygaszenia. Podobnie, dzieląc szczelinę na cztery części, można wykazać znikanie natężenia dla $a \sin \alpha_2 = 2 \lambda$, a po podziale na sześć części dla $a \sin \alpha_3 = 3 \lambda$ i tak dalej. Ogólnie zatem warunek osłabienia (minimum) dyfrakcyjnego ma postać:

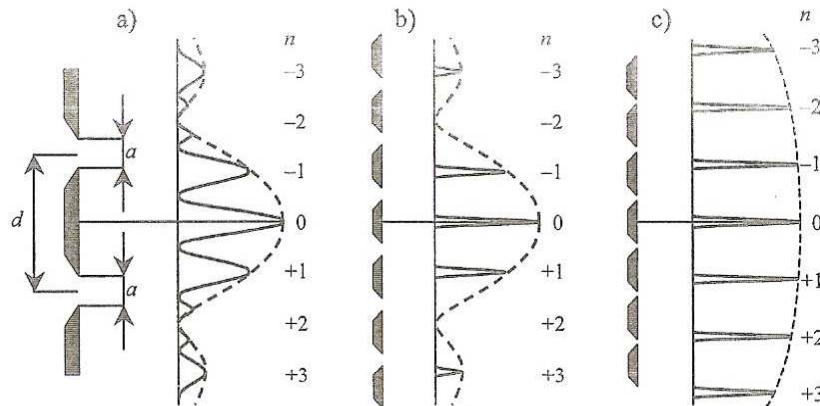
$$a \sin \alpha_n = n \lambda, \quad \text{gdzie} \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (17.6)$$

Oczywiście między minimami będą się pojawiać stosowne maksima natężenia fali wypadkowej. Zwróćmy uwagę, że powyższy warunek znikania natężenia fali rozproszonej na szczelinie jest formalnie identyczny z warunkiem wzmacniania dla prostej interferencji fal z dwóch źródeł (wzór 17.4). Pamiętać jednak należy, że wzory te zawierają inne parametry (d – odległość między źródłami, a – szerokość szczeliny), a we wzorze (17.6) na minimum dyfrakcyjne n jest liczone od ± 1 , a nie od zera, jak we wzorze (17.4) na wzmacnianie fal pochodzących z dwóch źródeł.

Siatka dyfrakcyjna

W 1830 roku Young (czytaj Jang) wykonał doświadczenie z układem szczelin przedstawionym na rysunku 17.5a. Young skierował wiązkę światła na pokazany układ i obserwował obraz powstały z drugiej strony. Ponieważ zachodzi zjawisko dyfrakcji, każdą ze szczelin można potraktować jako oddzielne źródło o rozkładzie kątowym promieniowania zgodnym z obwiednią dyfrakcyjną (podobnie jak na rys. 17.4). Dodatkowo fale pochodzące z obu szczelin ulegają wzajemnej interferencji (podobnie jak na rys. 17.3). Ostatecznie na powierzchni pomiarowej (w przypadku doświadczenia Younga – na ekranie) uzyskuje się obraz wzmacnień interferencyjnych, przedstawionych na rysunku 17.5a linią ciągłą, których amplitudy określone są obwiednią dyfrakcyjną, przedstawioną na rysunku linią przerywaną. Dodajmy, że obwiednia dyfrakcyjna może wręcz uniemożliwić obserwacje niektórych wzmacnień interferencyjnych przewidywanych wzorem (17.4) (np. dla rzędu $n = \pm 2$ na rys. 17.5a, gdzie występuje minimum dyfrakcyjne).

Logicznym uogólnieniem doświadczenia Younga jest skonstruowanie układu N równoodległych, identycznych szczelin o szerokości a . Taki element, bardzo popularny w optyce, nazywa się *siatką dyfrakcyjną* (rys. 17.5b, 17.5c). Odległość d między środkami najbliższych szczelin zwana jest *stałą siatki dyfrakcyjnej*. Wypadkowe natężenie fal przechodzących przez taką siatkę będzie łącznym wynikiem następujących efektów: dyfrakcji na każdej ze szczelin z osobna (obwiednia dyfrakcyjna – linia przerywana na rys. 17.5b, 17.5c), interferencji fal pochodzących od par sąsiadujących ze sobą szczelin (wzmocnienia i osłabienia – linia ciągła na rys. 17.5b, 17.5c) oraz interferencji fal pochodzących od par niesąsiadujących



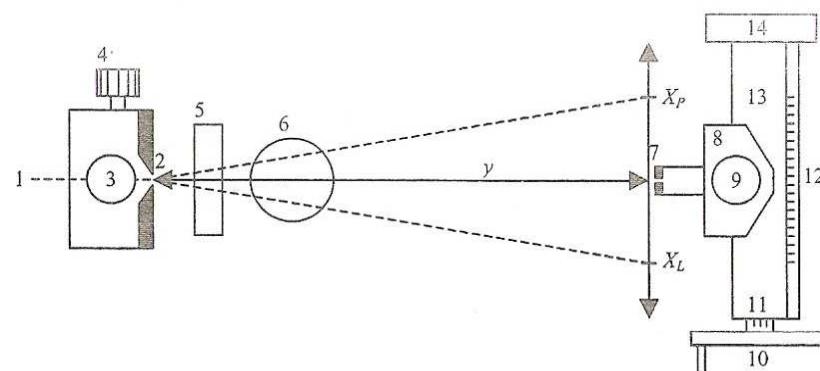
Rys. 17.5. Układy szczeleń i ich obrazy: a) dwa szczeleń o szerokości a oddalone od siebie o odległość d (doświadczenie Younga), b) układ o większej liczbie szczeleń (siatka dyfrakcyjna), ale o tych samych rozmiarach a i d jak na rysunku a), c) siatka dyfrakcyjna o mniejszych wartościach a i d niż w przypadkach a) i b). Linią przerywaną pokazano profile dyfrakcyjne. Na rysunkach nie zachowano proporcji rozmiarów układów szczeleń (powinny być znacznie mniejsze) i odległości od ekranów (powinny być znacznie większe). Literą n oznaczono rzędy wzajemnych wzmacnianie interferencyjnych fal ze szczeleń

ze sobą szczeleń. Na skutek tego ostatniego efektu pojawiają się dodatkowe minima leżące gęściej niż w przypadku tylko dwóch szczeleń, ale nie zmienia to układu wzmacnianie. Jednocześnie większa liczba szczeleń umożliwia przejście większej liczby fal składowych i powoduje wzrost wypadkowej amplitudy wzmacnianie. W sumie zwiększenie liczby N szczeleń prowadzi do pojawiania się coraz bardziej ostrych maksymów na ciemnym tle gęsto leżących osłabień (rys. 17.5b). Dodatkowo dzięki zmniejszeniu szerokości szczeleń można uzyskać szerszy przebieg obwiedni dyfrakcyjnej i minima dyfrakcyjne dla bardzo dużych kątów. Pozwala to na obserwacje większej liczby wzmacnianie interferencyjnych niższych rzędów, które mają w przybliżeniu to samo natężenie (rys. 17.5c). Formuła określająca położenie wzmacnianie dla siatki dyfrakcyjnej o stałej d jest oczywiście identyczna z równaniem (17.4).

Stanowisko pomiarowe

Na rysunku 17.6 pokazano schemat stanowiska pomiarowego.

W układzie pomiarowym źródłem światła jest laser, którego promień biegnie wzdłuż kierunku (1). W zależności od badanych efektów na ławie optycznej można umieścić układ ze szczeleń (2) o regulowanej szerokości lub ustawić na stoliku (6) siatkę dyfrakcyjną.



Rys. 17.6. Schemat układu pomiarowego (widok z góry): 1 – promień lasera, 2 – szczeleń, 3 – pokrętło regulacji szerokości szczeleń, 4 – pokrętło regulacji położenia szczeleń w poziomie, 5 – polaryzator, 6 – stolik pomocniczy, 7 – czujnik natężenia światła, 8 – przesuwna podstawa czujnika światła, 9 – pokrętło regulacji wysokości czujnika światła, 10 – korbka zmiany położenia czujnika światła, 11, 12 – skale położenia czujnika światła, 13 – sanie, 14 – czujnik położenia

Uzyskane rozkłady promieniowania mierzy się za pomocą ruchomego czujnika natężenia światła (7) przesuwanego za pomocą korbki (10). Program komputerowy obsługi eksperymentu pozwala na automatyczną rejestrację natężenia światła padającego na czujnik w funkcji jego położenia. Przesunięcie podstawy czujnika można też kontrolnie odczytać z pomocniczych skali (11) i (12). Obrotowy polaryzator (5) pozwala na regulację natężenia wiązki laserowej i dopasowanie jej do wzmacniania czujnika światła.

Przebieg ćwiczenia

1. Włączyć zasilanie lasera i interfejsów pomiarowych oraz komputer.
2. Uruchomić program *Science Workshop* i otworzyć plik *interfer.sws*.
3. Za pomocą korbki (10) (rys. 17.6) przesunąć szczeleń czujnika światła (7) na środek wiązki lasera. Sprawdzić, czy w pionie promień lasera pada na środek okienka czujnika i ewentualnie skorygować jego położenie pokrętlem (9). *Uwaga:* układ przesuwu czujnika światła jest przyrządem precyzyjnym i bardzo delikatnym! Należy zwrócić szczególną uwagę, aby go nie uszkodzić zbyt gwałtownymi zmianami położenia lub używając zbyt dużej siły.
4. Ustawić statyw ze szczeleń (2) na ławie optycznej zgodnie z rysunkiem 17.6. Pokrętlem (4) skorygować położenie szczeleń tak, aby promień lasera przechodził przez jej środek. Zmierzyć odległość y między szczeleń a płaszczyzną czujnika światła.

5. Pokrętłem (3) ustawić dowolną wartość szerokości szczeliny z zakresu 0,15 – 0,35 mm.
6. Za pomocą korbki (10) przesunąć czujnik światła (7) na skraj uzyskanego obrazu dyfrakcyjnego.
7. W programie komputerowym nacisnąć przycisk REC.
8. Jednostajnym ruchem korbki (10) przesunąć czujnik światła na drugi kraniec obrazu dyfrakcyjnego. *Uwaga:* przemieszczanie powinno się odbywać z *prędkością mniejszą* niż 0,5 mm/s (środkowe położenie wskaźnika prędkości) oraz, w ramach danego pomiaru, z zachowaniem *stałego kierunku* bez chwilowego cofania korbki.
9. W programie komputerowym nacisnąć przycisk STOP. Powinien się pojawić wykres natężenia światła w funkcji położenia czujnika. Jeśli zajdzie potrzeba, skorygować natężenie światła, obracając polaryzator (5), i powtórzyć pomiar.
10. Z wykresu odczytać położenia osłabień dyfrakcyjnych x_{Pn} i x_{Ln} odpowiednich rzędów n .
11. Na podstawie zależności (17.6) i z pomocą poniższego wzoru (17.7) obliczyć wartości szerokości szczeliny odpowiadające uzyskanym rzędom osłabień

$$\sin \alpha_n = \sqrt{\frac{(x_{Pn} - x_{Ln})^2}{4y^2 + (x_{Pn} - x_{Ln})^2}}. \quad (17.7)$$

Obliczyć średnią arytmetyczną z uzyskanych wartości oraz odchylenie standarde średniej. Zestawić końcowe wyniki pomiarów.

12. Powtarzając punkty 5 – 11, wyznaczyć szerokości dwóch innych szczelin.
13. Zdjąć z ławy optycznej statyw ze szczeliną. Ustawić na stoliku pomocniczym (6) siatkę dyfrakcyjną. Zmierzyć odległość y między siatką a płaszczyzną czujnika światła. Opisaną wcześniej metodą określić położenie wzmacnienia interferencyjnych x_{Pn} i x_{Ln} odpowiednich rzędów n .
14. Korzystając ze wzorów (17.4) i (17.7), obliczyć wartości stałych siatki odpowiadające uzyskanym rzędom wzmacnienia i ich średnią z odchyleniem standar-dowym. Pomiary powtórzyć dla innej siatki dyfrakcyjnej (wskażanej przez prowadzącego zajęcia). Zestawić końcowe wyniki pomiarów.
15. Zaobserwować obrazy dyfrakcyjne po ustawieniu na drodze wiązki laserowej przedmiotów o innych kształtach (wskażanych przez prowadzącego zajęcia). *Uwaga:* dokładny opis działania programu *Science Workshop* znajduje się w rozdziale 20.

Zestaw ćwiczeniowy

Komputer z interfejsami pomiarowymi, układ optyczny z laserem, szczelina, polaryzator, siatki dyfrakcyjne, przesuwny układ z czujnikami światła i położenia

Pojęcia kluczowe

- Fale elektromagnetyczne
- Interferencja
- Dyfrakcja
- Zasada Huygensa
- Doświadczenie Younga
- Siatka dyfrakcyjna

Mirosław Szybowicz

18. Badanie skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła w polu magnetycznym

Cel ćwiczenia

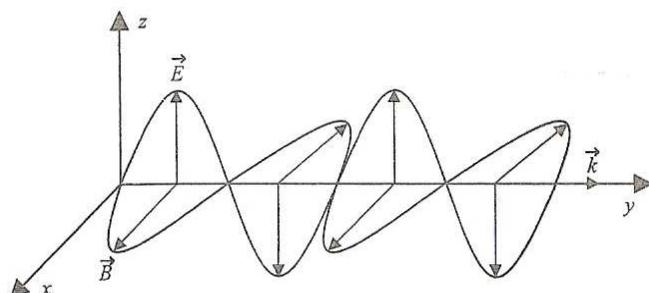
Obserwacja wpływu zewnętrznego pola magnetycznego na zmianę płaszczyzny polaryzacji światła w roztworach. Wyznaczenie stałej Verdata badanej substancji.

Wstęp

Światło zachowuje się jak *fala elektromagnetyczna*. Oznacza to rozchodzenie się w przestrzeni zmiennego pola elektrycznego i magnetycznego. Podstawowe wielkości opisujące i charakteryzujące falę elektromagnetyczną to *wektory natężenia pola elektrycznego* \vec{E} , *indukcji magnetycznej* \vec{B} oraz *falowy* \vec{k} . Ten ostatni wektor określa kierunek rozchodzenia się fali, a jego wartość można wyznaczyć w następujący sposób:

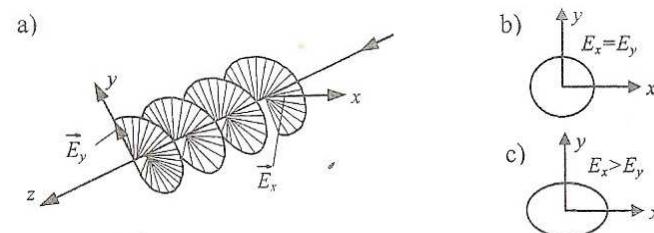
$$|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (18.1)$$

gdzie λ jest długością fali elektromagnetycznej. Wektory pola elektrycznego i magnetycznego tworzą ze sobą kąt prosty, jak również z wektorem falowym \vec{k} . Oznacza to, że fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną, tzn. kierunek drgań jest prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali. Światło może być spolaryzowane *liniowo*, *kołowo* lub *eliptycznie*. Rodzaj polaryzacji światła uzależniony jest od kierunku drgań wektora natężenia pola elektrycznego w stosunku do płaszczyzny drgań tego wektora w czasie. W przypadku polaryzacji liniowej mamy do czynienia z drganiemi wektora natężenia pola elektrycznego w jednej płaszczyźnie. Przykład fali elektromagnetycznej spolaryzowanej liniowo przedstawiono na rysunku 18.1.



Rys. 18.1. Przykład fali elektromagnetycznej spolaryzowanej liniowo

W przypadku polaryzacji kołowej lub eliptycznej koniec wektora natężenia pola elektrycznego fali kreśli linię śrubową lub eliptyczną (rys. 18.2).



Rys. 18.2. Drgania wektora elektrycznego w świetle spolaryzowanym: a) i b) kołowo, c) eliptycznie

Metody polaryzacji światła – liniowa polaryzacja światła

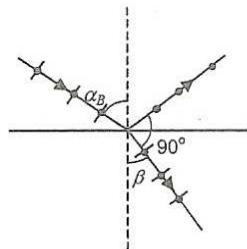
Liniowo spolaryzowane światło można uzyskać na kilka sposobów. Najpowszechniejsze jest użycie w tym celu polaryzatorów odbiciowych, polaryzatorów dwójłomnych czy też polaroidów (płytki wykonane z tworzywa sztucznego, błony polaryzacyjne).

Najczęstszym polaryzatorem światła jest polaroid. Jest to polaryzator wykorzystujący selektywne pochłanianie światła. Jego działanie polega na tłumieniu wybranych drgań w określonym kierunku i przepuszczaniu drgań do niego prostopadłych. Pierwszy polaroid został skonstruowany w 1938 roku przez Edwina H. Land'a. Wykorzystano w nim folię wykonaną z tworzywa sztucznego (polimeru), rozciągającą w jednym wybranym kierunku. Otrzymany materiał nakleja się na szkło. Rozciąganie powoduje, że długie cząsteczki polimeru układają się równolegle do siebie. Tak ułożone cząsteczki pochłaniają drgania pola elektrycznego fali światowej równoległe do kierunku cząsteczek, natomiast drgania w kierunku prostopadłym są przepuszczane bez strat energii.

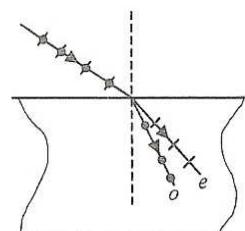
Inna metoda uzyskania światła spolaryzowanego liniowo to odbicie wiązki światła od dielektryka. W takim przypadku może nastąpić częściowe lub całkowite spolaryzowanie światła. Całkowicie spolaryzowane światło można uzyskać, odbijając wiązkę światła jedynie dla jednej wartości kąta padania światła (gdy promień odbity jest prostopadły do wiązki załamanej). Kąt ten nosi nazwę *kąta Brewste'a* (rys. 18.3). Korzystając z prawa Snelliusa, możemy obliczyć kąt padania odpowiadający całkowitej polaryzacji światła odbitego. Wyrażenie to będzie miało następującą postać:

$$n = \frac{\sin \alpha_B}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha_B}{\sin(90^\circ - \alpha_B)} = \operatorname{tg} \alpha_B, \quad (18.2)$$

gdzie n jest współczynnikiem załamania światła, a α i β odpowiednio kątem padania i załamania światła.



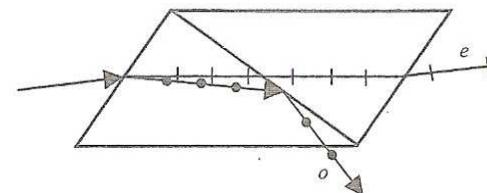
Rys. 18.3. Całkowita polaryzacja światła przez odbicie pod kątem Brewster'a, α_B – kąt padania, β – kąt załamania



Rys. 18.4. Podwójne załamanie światła w kryształku dwójłomnym (e - promień nadzwyczajny, o - promień zwyczajny)

Kolejną metodą liniowej polaryzacji światła jest metoda wykorzystująca zjawisko podwójnego załamania światła. Zjawisko takie występuje w kryształach zwanych *kryształami dwójłomnymi*. Przykładami materiałów dwójłomnych mogą być kryształy rutyłu i kalcytu. Zjawisko dwójłomności polega na rozdzieleniu w krysztale wiązki padającej na dwie wiązki załamane (rys. 18.4). Jedna z nich, zwana promieniem zwyczajnym, spełnia prawo Snelliusa i leży w płaszczyźnie padania. Kierunek drgań wektora elektrycznego jest prostopadły do płaszczyzny głównej kryształu. Druga wiązka, zwana promieniem nadzwyczajnym, nie spełnia prawa Snelliusa. Promień ten nie musi leżeć w płaszczyźnie padania. Może także ulec załamaniu, gdy promień pada prostopadle do powierzchni kryształu. Kierunek drgań wektora elektrycznego promienia nadzwyczajnego jest równoległy do płaszczyzny głównej kryształu. Istotnymi cechami charakteryzującymi obie załamane wiązki są ich całkowicie liniowe spolaryzowanie oraz różna prędkość, wynikająca z różnego współczynnika załamania promienia zwyczajnego i nadzwyczajnego. Jak widać z powyższego opisu, drgania wektora natężenia pola elektrycznego są w obu wiązkach do siebie prostopadłe. W celu uzyskania za pomocą kryształów dwójłomnych światła spolaryzowanego liniowo należy usunąć jeden z załamanych promieni światła. Zasłonięcie jednego z promieni nie jest możliwe, gdyż ich rozsunięcie jest znikome. Dlatego stosuje się tzw. pryzmat Nicola, zwany *nikolem*. Jest on zbudowany z kryształu szpatu islandzkiego (kalcyt CaCO_3), odpowiednio oszlifowanego i przeciętego na dwie części. Obie części klejone są ze sobą balsamem kanadyjskim. Budowę pryzmatu Nicola przedstawiono na rysunku 18.5. Promień po wejściu do kryształu rozszczepia się na dwa promienie spolaryzowane w kierunkach wzajemnie do siebie prostopadłych (promień zwyczajny o i promień nadzwyczajny e). Oba promienie biegą w krysztaale z inną prędkością. Współczynnik załamania balsamu kanadyjskiego $n_b = 1,550$. Jest to wartość pośrednia między współczynnikiem załamania promienia zwyczajnego $n_o = 1,658$ i nadzwyczajnego

$n_e = 1,486$ w krysztale kalcytu. Balsam kanadyjski jest zatem dla promienia zwyczajnego optycznie rzadszy, natomiast dla promienia nadzwyczajnego gęstszy. Kąt przecięcia pryzmatu jest tak dobrany, aby kąt padania światła α na powierzchnię balsamu był dla promienia zwyczajnego większy od kąta granicznego, przy którym



Rys. 18.5. Schemat pryzmatu Nicola

następuje całkowite wewnętrzne odbicie światła. Natomiast dla promienia nadzwyczajnego kąt ten jest mniejszy od kąta granicznego. Tak więc promień zwyczajny odbija się od balsamu i jest absorbowany na czarnej ścianie pryzmatu (na rysunku dolna ściana), natomiast promień nadzwyczajny przechodzi przez balsam i dalej przez cały pryzmat. Główną zaletą pryzmatu Nicola jest uzyskanie światła całkowicie spolaryzowanego bez zmiany kierunku jego biegu.

Aktywność optyczna – skręcenie płaszczyzny polaryzacji światła

Aktywność optyczna to właściwość pewnych związków chemicznych polegająca na zdolności skręcania płaszczyzny polaryzacji światła. Skręcenie płaszczyzny polaryzacji światła zależy od długości fali światła. Niektóre ze związków, zależnie od długości fali, mogą skręcać płaszczyznę polaryzacji w lewo lub w prawo. Aktywność optyczną wykazują ciała stałe, ciecze, np. terpentyna, oraz roztwory ciał stałych w cieczach optycznie nieczynnych, np. roztwór cukru w wodzie. Parametrem charakteryzującym zmianę płaszczyzny polaryzacji światła jest skręcenie właściwe lub zdolność skręcającą roztwór.

Istnieje również *aktywność optyczna wymuszona*. Jest ona spowodowana wpływem zewnętrznych czynników fizycznych, np. pola magnetycznego. Substancje, które w nieobecności pola magnetycznego nie są aktywne optycznie, po umieszczeniu ich w zewnętrznym polu magnetycznym wykazują zdolność skręcania płaszczyzny polaryzacji. Zjawisko to zostało odkryte przez Faradaya. Podczas tego zjawiska kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji jest proporcjonalny do wartości indukcji pola magnetycznego B i do długości drogi d światła przechodzącego przez badaną substancję. Największe skręcenie płaszczyzny polaryzacji światła uzyskuje się, gdy światło biegnie równolegle do linii pola magnetycznego. Istnieje bowiem związek pomiędzy skręceniem płaszczyzny polaryzacji światła a kątem

pomiędzy kierunkiem rozchodzenia się światła i polem magnetycznym. Kąt skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła ϕ w zjawisku Farada, przy założeniu równoległości kierunku rozchodzenia się światła i kierunku pola magnetycznego, możemy opisać następującym wyrażeniem (prawo Verdet'a):

$$\phi = V B d, \quad (18.3)$$

gdzie V jest współczynnikiem proporcjonalności zwany *stałą Verdet'a*. Wielkość ta charakteryzuje badany ośrodek i jest zależna od długości fali, jak również od gęstości i temperatury ośrodka. Znak stałej może przyjmować wartość dodatnią (skręcenie płaszczyzny polaryzacji zgodne z kierunkiem przepływającego prądu w cewce wytwarzającej pole magnetyczne) lub ujemną. Substancje mogą skracać płaszczyznę polaryzacji w prawo (prawoskrętne) lub w lewo (lewośkrętne). Dla większości substancji diamagnetycznych oraz paramagnetycznych obserwujemy skręcenie płaszczyzny polaryzacji w prawo.

Zasada pomiaru

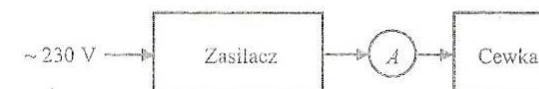
Podczas ćwiczenia badamy ciecz umieszczoną w rurce. Rurkę umieszczamy wewnętrz rurki, przez której uzwojenie przepływa prąd elektryczny o natężeniu I . Wartość indukcji magnetycznej wytworzonej w cewce

$$B = \mu_r \mu_0 \frac{NI}{l}, \quad (18.4)$$

gdzie μ_r i μ_0 wyrażają odpowiednio względną przenikalność magnetyczną ośrodka oraz przenikalność magnetyczną próżni, N – liczbę zwojów w cewce, a l – długość cewki. Po podstawieniu równania (18.4) do równania (18.3) otrzymamy prawo Verdet'a w następującej postaci:

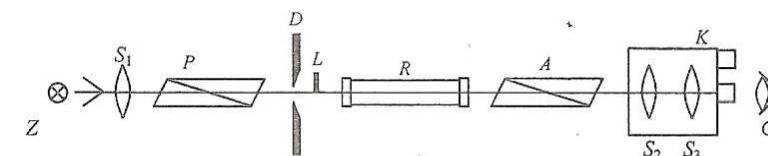
$$\phi = V \mu_r \mu_0 N I \frac{d}{l}. \quad (18.5)$$

Cewka jest włączona w obwód elektryczny, którego schemat blokowy przedstawiono na rysunku 18.6. Natężenie prądu płynącego przez cewkę regulujemy za pomocą napięcia podawanego z zasilacza. W wyniku zmiany napięcia zasilacza uzyskujemy zmianę natężenia prądu płynącego w cewce, a co za tym idzie, zgodnie z zależnością (18.4), zmianę indukcji magnetycznej wytworzonej w cewce. Ustawiając różną wartość prądu, odczytujemy kilkakrotnie wartość kąta skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła. Do pomiaru tego kąta używamy polarymetru półcieniowego. Jego budowę przedstawiono na rysunku 18.7. Światło z lampy sodowej Z przechodzi przez soczewkę S_1 i polaryzator P i pada na otwór w przesłonie D , którego połowa zasłonięta jest płytą kwarcową Laurenta L . W rurce R znajduje się badana substancja – ciecz. Następnie światło pada na analizator A i trafia do lunetki, składającej się z obiektywu i okularu, odpowiednio S_2 i S_3 , przez którą dokonujemy obserwacji. Pole widzenia lunetki jest podzielone na dwie różnie



Rys. 18.6. Schemat blokowy zasilania cewki wytwarzającej pole magnetyczne

oświetlone części. Przez obrót analizatora A możemy doprowadzić do takiego położenia, przy którym całe pole jest równo zaciemnione. Minimalny obrót analizatora powoduje rozjaśnienie jednej z połówek. Na podstawie pomiaru zależności kąta skręcenia polaryzacji światła od indukcji pola magnetycznego, korzystając z równania (18.3), możemy wyznaczyć stałą Verdet'a.



Rys. 18.7. Schemat polarymetru półcieniowego (opis w tekście)

Przebieg ćwiczenia

Uwaga: skala polarymetru podzielona jest na umowne stopnie ($^{\circ}S$). W celu wyznaczenia właściwego kąta w stopniach należy podzielić otrzymane wartości kąta ($^{\circ}S$) przez 2,9.

1. Zapisać parametry układu (zawarte w informacjach dodatkowych): długość rurki, liczba zwojów cewki, μ_r substancji.
2. Włączyć lampa sodową i odczekać około 5 min.
3. Ustawić ostrość widzenia w lunetce i w lupie odczytowej.
4. Znaleźć zerowe położenia analizatora ϕ_0 , doprowadzając do równego zaciemnienia pola widzenia w lupie odczytowej. Pomiar powtórzyć 10-krotnie.
5. Włączyć zasilanie cewki i ustawić wybraną wartość natężenia prądu.
6. Odczytać wartość kąta ϕ , doprowadzając do równomiernego zaciemnienia pola widzenia. Pomiar powtórzyć 5-krotnie, obracając analizator o przypadkowy kąt i na nowo ustalając właściwe położenie.
7. Pomiar powtórzyć dla innych 5–8 wartości prądu (w zakresie od 0,5 do 4 A) przepływającego przez cewkę. Jeśli skręcenie płaszczyzny polaryzacji światła następuje w prawo, oznaczamy ten kąt jako ϕ_p .

8. Zmienić kierunek przepływającego prądu za pomocą przełącznika i wykonać pomiary kąta skręcenia ϕ , jak w punktach 6 i 7.
 9. Obliczyć kąty skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła $|\phi_p - \phi_0|$ i $|\phi_i - \phi_0|$ oraz średnią wartość skręcenia przy danej wartości natężenia prądu w cewce. Obliczyć wartość indukcji pola magnetycznego dla poszczególnych wartości natężenia prądu.
 10. Wykreślić zależność $\phi = f(B)$.
 11. Wykorzystując metodę regresji liniowej do równania (18.3), wyznaczyć stałą Verdata V badanej cieczy.
 12. Wyznaczyć niepewność pomiarową stałej Verdera i zestawić końcowy wynik pomiaru.
- Uwaga:* podczas pomiarów nie utrzymywać zbyt długo napięcia przyłożonego do cewki, gdyż może to spowodować jej przegrzanie i uszkodzenie.

Zestaw ćwiczeniowy

Cewka, rurka z badaną cieczą, polarymetr półcieniowy, lampa sodowa, lawa optyczna, zasilacz z amperomierzem

Pojęcia kluczowe

- Rodzaje polaryzacji światła
- Metody polaryzacji światła
- Podwójne załamanie, kryształy dwójłomne, pryzmat Nicola
- Prawo Verdata
- Indukcja magnetyczna w cewce

Krzysztof Łapsa

19. Badanie zjawiska odbicia światła od powierzchni dielektryka

Cel ćwiczenia

Wyznaczenie kąta Brewstera oraz współczynnika załamania światła badanego ośrodku. Praktyczne i teoretyczne sprawdzenie zależności amplitudowych współczynników odbicia od kąta padania światła.

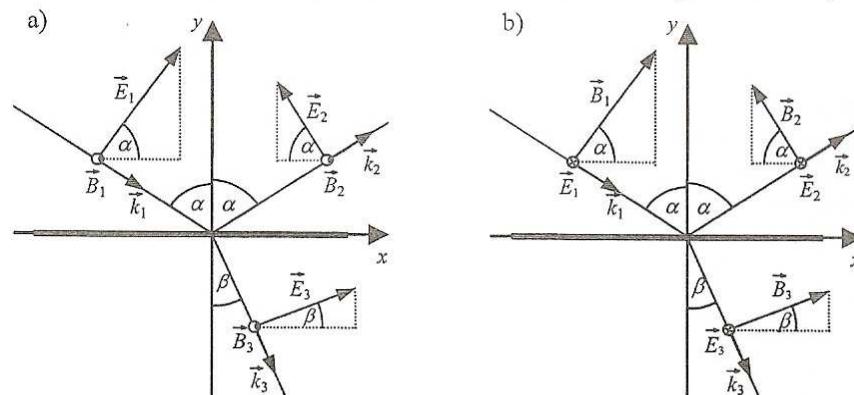
Wprowadzenie

Przed przystąpieniem do czytania poniższego opisu należy się zapoznać z wprowadzeniem do rozdziału 18 (ze szczególnym uwzględnieniem zjawiska polaryzacji liniowej światła).

Zjawisko odbicia od powierzchni dielektryka (np. szkła, wody, oleju) i załamania światła jest powszechnie znane. Dla dielektryka izotropowego promienie: padający, odbity i załamany, a także normalna do powierzchni leżą w jednej płaszczyźnie, zwanej *płaszczyzną padania* (rys. 19.1). Zgodnie z *prawem Snelliusa (prawem załamania światła)*, stosunek sinusów kąta padania α i kąta załamania β jest dla danej pary ośrodków stały, równy stosunkowi bezwzględnych współczynników załamania światła obu ośrodków (n_2/n_1). Zakładając, że ośrodkiem, w którym znajduje się promień padający, jest powietrze ($n_1 \approx 1$), z niewielkim przybliżeniem możemy napisać:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n, \quad (19.1)$$

gdzie n jest bezwzględnym współczynnikiem załamania światła przez dielektryk.



Rys. 19.1. Polaryzacja fal w zjawiskach odbicia i załamania światła na powierzchni dielektryka, gdy pole elektryczne fali padającej jest: a) równoległe do płaszczyzny padania, b) prostopadłe do płaszczyzny padania

Zgodnie z teorią Maxwella, światło jest *falą elektromagnetyczną*, czyli rozchodzącym się w przestrzeni zmiennymi polami: elektrycznym i magnetycznym. Organia pola elektrycznego i magnetycznego są wzajemnie prostopadłe, jak również prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali (fala elektromagnetyczna jest *falą poprzeczną*). Zmienne pola elektryczne i magnetyczne możemy scharakteryzować odpowiednio za pomocą wektora natężenia pola elektrycznego \vec{E} oraz wektora indukcji magnetycznej \vec{B} . Ich wartości możemy powiązać ze sobą następującą zależnością:

$$B = \frac{n}{c} E, \quad (19.2)$$

gdzie c jest prędkością światła w próżni.

Najczęściej przy omawianiu właściwości światła koncentrujemy się na polu elektrycznym fali elektromagnetycznej ze względu na to, że oko ludzkie oraz większość detektorów reaguje wyłącznie na nie.

Doświadczenia z odbiciem i załamaniem światła na powierzchni dielektryka wykazały, że odbicie światła przy kątach padania różnych od zera zależy od polaryzacji fali świetlnej. Stosując światło spolaryzowane liniowo, można zauważyc, że:

- 1) gdy wektor pola elektrycznego fali padającej jest równoległy do płaszczyzny padania (rys. 19.1a), natężenie światła w funkcji kąta padania najpierw maleje (osiągając dla pewnego kąta wartość zero), a potem rośnie,
- 2) gdy wektor pola elektrycznego fali padającej jest prostopadły do płaszczyzny padania (rys. 19.1b), natężenie światła odbitego rośnie monotonicznie wraz ze wzrostem kąta padania.

Rzeczywiście, z punktu widzenia elektrodynamiki obydwa przypadki są różne. W pierwszym pole elektryczne fali tworzy z powierzchnią odbijającą pewien kąt, natomiast w drugim jest zawsze do niej równoległe (rys. 19.1). Chcąc opisać zależność natężenia pola elektrycznego fali odbitej od kąta padania, należy skorzystać z *warunków granicznych (warunków ciągłości)*. Zgodnie z tymi warunkami, na granicy powietrze–dielektryk składowe pól elektrycznego i magnetycznego styczne do niej muszą być ciągłe.

Rozważmy przypadek pierwszy, gdy wektor pola elektrycznego fali jest równoległy do płaszczyzny padania (rys. 19.1a). Fale padającą (1), odbitą (2) i załamana (3) możemy zapisać w postaci

$$\vec{E}_N = \vec{E}_{N0} e^{i(\vec{k}_N \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (19.3)$$

$$\vec{B}_N = \vec{B}_{N0} e^{i(\vec{k}_N \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (19.4)$$

gdzie: \vec{k} – wektor falowy, \vec{r} – wektor położenia, ω – częstotliwość kołowa fali, t – czas, $N = 1, 2, 3$.

Dla wygody przyjmujemy układ współrzędnych jak na rysunku 19.1. Warunki ciągłości są spełnione na całej powierzchni odbijającej w dowolnej chwili, a więc

również w środku układu XYZ ($\vec{r} = 0$) oraz $t = 0$. W powietrzu (ośrodek 1) mamy do czynienia z superpozycją fal padającej i odbitej, natomiast w dielektryku (ośrodek 2) znajduje się fala załamana. Suma składowych pól elektrycznych równoległych do płaszczyzny odbijającej w ośrodku pierwszym musi być równa sumie takich składowych pól w ośrodku drugim. Analogicznie będzie z polami magnetycznymi. Możemy więc dla pierwszego przypadku zapisać:

$$\vec{E}_{10x}^{\parallel} + \vec{E}_{20x}^{\parallel} = \vec{E}_{30x}^{\parallel}, \quad (19.5)$$

$$\vec{B}_{10z}^{\perp} + \vec{B}_{20z}^{\perp} = \vec{B}_{30z}^{\perp}. \quad (19.6)$$

Korzystając z powyższych równań, zależności trygonometrycznych oraz równania (19.2), uzyskujemy następujące wzory:

$$E_{10}^{\parallel} \cos \alpha - E_{20}^{\parallel} \cos \alpha = E_{30}^{\parallel} \cos \beta, \quad (19.7)$$

$$\frac{1}{c} E_{10}^{\parallel} + \frac{1}{c} E_{20}^{\parallel} = \frac{n}{c} E_{30}^{\parallel}. \quad (19.8)$$

Znak minus w równaniu (19.7) wynika z tego, że fala, odbijając się od ośrodka gęstszej optycznie, zmienia fazę π (składowe $\vec{E}_{10x}^{\parallel}$ i $\vec{E}_{20x}^{\parallel}$ są przeciwnie skierowane). Z układu równań (19.7) i (19.8) otrzymamy zależność pomiędzy natężeniami pola elektrycznego promienia odbitego i padającego

$$E_{20}^{\parallel} = \frac{n \cos \alpha - \cos \beta}{n \cos \alpha + \cos \beta} E_{10}^{\parallel}. \quad (19.9)$$

Analogiczną analizę można przeprowadzić dla przypadku drugiego, gdy wektor pola elektrycznego jest prostopadły do płaszczyzny padania. Z warunku ciągłości otrzymamy:

$$\vec{E}_{10z}^{\perp} + \vec{E}_{20z}^{\perp} = \vec{E}_{30z}^{\perp}, \quad (19.10)$$

$$\vec{B}_{10x}^{\parallel} + \vec{B}_{20x}^{\parallel} = \vec{B}_{30x}^{\parallel}. \quad (19.11)$$

Postępując jak w przypadku pierwszym, powyższe równania uzyskamy w następującej formie:

$$E_{10}^{\perp} + E_{20}^{\perp} = E_{30}^{\perp}, \quad (19.12)$$

$$\frac{1}{c} E_{10}^{\perp} \cos \alpha - \frac{1}{c} E_{20}^{\perp} \cos \alpha = \frac{n}{c} E_{30}^{\perp} \cos \beta. \quad (19.13)$$

Na podstawie równań (19.12) i (19.13) możemy napisać, że w drugim przypadku zależność pomiędzy natężeniem pola elektrycznego promienia odbitego i padającego jest dana wzorem:

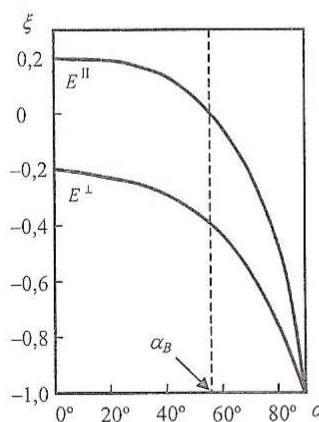
$$\frac{E_{20}^{\perp}}{E_{10}^{\parallel}} = \frac{\cos \alpha - n \cos \beta}{\cos \alpha + n \cos \beta} E_{10}^{\perp}. \quad (19.14)$$

W powyższych rozważaniach rysunek 19.1 posłużył nam jedynie do zobrazowania kierunków wektorów oraz kątów α i β , natomiast nie jest on odzwierciedleniem opisywanej sytuacji.

Korzystając z zależności trygonometrycznych oraz prawa Snelliusa (19.1), równania (19.9) i (19.14) można zapisać w innej formie:

$$\xi^{\parallel} = \frac{E_{20}^{\parallel}}{E_{10}^{\parallel}} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \frac{n^2 \cos \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n^2 \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad (19.15)$$

$$\xi^{\perp} = \frac{E_{20}^{\perp}}{E_{10}^{\perp}} = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = -\frac{(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha)^2}{n^2 - 1}. \quad (19.16)$$



Rys. 19.2. Zależności amplitudowych współczynników odbicia od kąta padania dla promienia padającego na powierzchnię szkła crown ($n = 1,5$)

Jeżeli przyjrzymy się *równaniom Fresnela* (19.15 i 19.16), możemy wyróżnić szczególne przypadki:

1. Dla $\alpha = \beta = 0$

$$|\xi^{\parallel}| = |\xi^{\perp}| = \frac{n-1}{n+1}. \quad (19.17)$$

2. Dla $\alpha = \pi/2$

$$|\xi^{\parallel}| = |\xi^{\perp}| = 1. \quad (19.18)$$

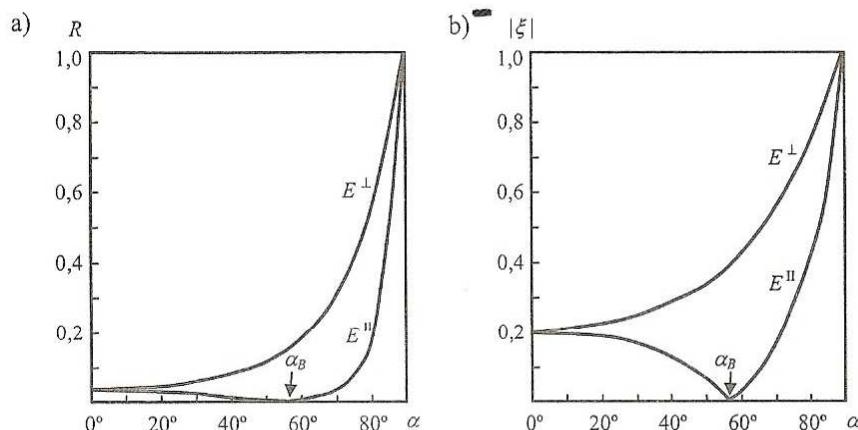
3. Jeżeli $\alpha + \beta = \pi/2$ (pomiędzy promieniem odbitym i załamany jest kąt $\pi/2$)

$$\xi^{\parallel} = 0. \quad (19.19)$$

Przypadek trzeci sprowadza się do stwierdzenia, że dla pewnego kąta padania α_B drgania pola elektrycznego promienia odbitego będą występować jedynie w kierunku prostopadłym do płaszczyzny padania (rys. 19.2). Chcąc znaleźć ten kąt, skorzystamy z prawa Snelliusa i zależności $\alpha_B + \beta = \pi/2$:

$$\frac{\sin \alpha_B}{\sin \beta} = \frac{\sin \alpha_B}{\sin(\pi/2 - \alpha_B)} = \frac{\sin \alpha_B}{\cos \alpha_B} = \operatorname{tg} \alpha_B = n. \quad (19.20)$$

Kąt α_B jest nazywany *kątem całkowitej polaryzacji* lub *kątem Brewstera*.



Rys. 19.3. Zależności: a) współczynników odbicia światła od kąta padania, b) wartości bezwzględnych współczynników Fresnela od kąta padania. W obydwu przypadkach światło odbija się w powietrzu od powierzchni szkła crown ($n = 1,5$)

W praktyce najczęściej mierzy się natężenie światła I , a nie natężenie pola elektrycznego E . W związku z tym często dla wygody nie korzysta się z amplitudowych współczynników odbicia ($|\xi^{\parallel}|$ i $|\xi^{\perp}|$), lecz ze *współczynnikami odbicia światła* (R^{\parallel} i R^{\perp}). Ponieważ natężenie światła I jest proporcjonalne do kwadratu natężenia pola elektrycznego E^2 , współczynniki odbicia światła wynoszą:

$$R^{\parallel} = \frac{I_2^{\parallel}}{I_1^{\parallel}} = \frac{(E_{20}^{\parallel})^2}{(E_{10}^{\parallel})^2} = (\xi^{\parallel})^2, \quad (19.21)$$

$$R^{\perp} = \frac{I_2^{\perp}}{I_1^{\perp}} = \frac{(E_{20}^{\perp})^2}{(E_{10}^{\perp})^2} = (\xi^{\perp})^2. \quad (19.22)$$

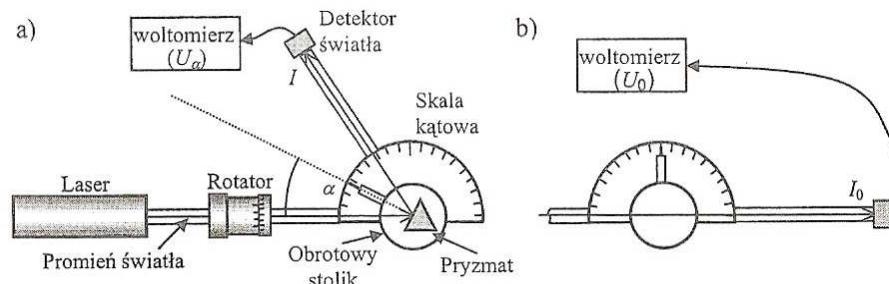
Na rysunku 19.3a przedstawiono przykładowe zależności współczynników odbicia światła od kąta padania światła.

Na zakończenie należy zaznaczyć, że natężenie światła odbitego od powierzchni jest zależne nie tylko od rodzaju dielektryka i polaryzacji światła padającego, ale również od właściwości powierzchni. Powyższe równania będą spełnione jedynie dla bardzo gładkich powierzchni.

Układ pomiarowy

Do badań posłuży zestaw pomiarowy przedstawiony na rysunku 19.4. Umożliwia on zbadanie względnego natężenia światła odbitego od powierzchni dielektryka w funkcji kąta padania światła spolaryzowanego liniowo w dwóch różnych płaszczyznach. Zestaw składa się ze źródła światła spolaryzowanego liniowo (laser helowo-neonowy, długość fali $\lambda = 632$ nm), rotatora polaryzacji, pryzmatu szklanego umieszczonego na obrotowym stoliczku połączonym z kątomierzem, detektora światła (ze wzmacniaczem) zamontowanego na obrotowym ramieniu oraz woltomierza rejestrującego wzmacniony sygnał z detektora. Rotator polaryzacji jest elementem optycznym służącym do skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła o dowolny kąt.

Napięcie U rejestrowane za pomocą miliwoltomierza jest proporcjonalne do natężenia światła I oświetlającego detektor ($U \sim I$). Korzystając więc z równań



Rys. 19.4. Schemat układu pomiarowego służącego do wyznaczenia współczynników odbicia światła: a) pomiar natężenia światła laserowego odbitego od powierzchni dielektryka ($I_\alpha \sim U_\alpha$), b) bezpośredni pomiar natężenia światła laserowego ($I_0 \sim U_0$)

(19.21) i (19.22), można wyznaczyć bezwzględne wartości współczynników Fresnela $|\xi_\alpha|$ dla poszczególnych kątów padania α w następujący sposób:

$$|\xi_\alpha| = \sqrt{R_\alpha} = \sqrt{\frac{U_\alpha}{U_0}}, \quad (19.23)$$

gdzie U_0 i U_α są napięciami na detektorze oświetlonym bezpośrednio promieniowaniem lasera oraz promieniowaniem odbitym pod kątem α od powierzchni dielektryka (rys. 19.4).

Wartość bezwzględna pojawiająca się w równaniu (19.23) wynika z tego, że z pomiaru natężenia światła nie możemy określić kierunku natężenia pola elektrycznego (wyznaczone przez nas współczynniki zawsze będą miały wartość dodatnią). Przykładowe zależności bezwzględnych współczynników Fresnela od kąta padania przedstawiono na rysunku 19.3b.

Przebieg ćwiczenia

1. Włączyć zasilanie lasera, miernik napięcia oraz wzmacniacz, a następnie ustawić położenie na skali rotatora na 0 (ustawienie to odpowiada drganiom wektora elektrycznego prostopadłym do płaszczyzny padania). Odczekać około 5 minut w celu dostatecznego wygrzania aparatury.
2. Zdjąć pryzmat w obudowie ze stoliczka, a następnie, ustawiając obrotowe ramię z detektorem wzdłuż promienia laserowego, zmierzyć wartość U_0 (rys. 19.4b).
3. Położyć pryzmat z obudową na stoliczku i obrócić stoliczek tak, aby kąt padania wynosił 10° . Zmierzyć wartość napięcia U_α , a następnie pomiar powtarzać, zwiększając kąt o 5° aż do osiągnięcia $\alpha = 85^\circ$ (rys. 19.4a).
4. Korzystając z równania (19.23), wyliczyć wartości bezwzględne amplitudowych współczynników odbicia dla poszczególnych kątów padania.
5. Za pomocą rotatora skrącić płaszczyznę polaryzacji światła o kąt 90° (na skali rotatora wartość 90) i powtórzyć punkty od 2 do 4. W pobliżu kąta, dla którego występuje wygaszenie wiązki odbitej, zagleścić pomiary, wykonując je co 1° .
6. Wykonać wykresy (na jednym układzie współrzędnych) wartości $|\xi^\perp| = f(\alpha)$ oraz $|\xi^{\parallel}| = f(\alpha)$.
7. Na podstawie wykresu $|\xi^{\parallel}| = f(\alpha)$ wyznaczyć kąt Brewstera α_B , a następnie, korzystając z równania (19.20), obliczyć współczynnik załamania światła n badanego materiału (dla $\lambda = 632$ nm).
8. Korzystając z równań (19.15) i (19.16) oraz wyznaczonej wartości n , wykreślić teoretyczne krzywe $|\xi^\perp| = f(\alpha)$ oraz $|\xi^{\parallel}| = f(\alpha)$ (w celu porównania krzywe te wykreślić na poprzednio wykonanych wykresach).
9. Przeanalizować czynniki wpływające na wartości niepewności pomiarowej w ćwiczeniu.

Zestaw ćwiczeniowy

Laser He-Ne, rotator polaryzacji, pryzmat w obudowie, detektor światła ze wzmacniaczem, woltomierz, statyw z ruchomym ramieniem i obrotowym stolikiem

Pojęcia kluczowe

- Falowa natura światła, światło spolaryzowane liniowo
- Prawo Snelliusa, współczynnik załamania światła, kąt Brewstera
- Równania Fresnala dla odbicia, współczynniki odbicia

Dodatek

Stanisław Szuba

20. Komputerowy zestaw pomiarowy

Wprowadzenie

Właściwości komputerów, w tym również osobistych, umożliwiły ich bardzo szerokie zastosowanie do pomiarów różnych wielkości fizycznych. Szczególnie pozytyczne są takie właściwości, jak szybkość wykonania pomiaru, łatwość wielokrotnego powtarzania, przechowywania i przetwarzania zmierzonych danych.

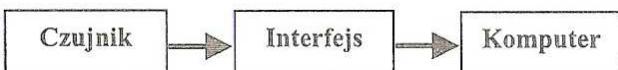
Żeby wykorzystać komputer do celów pomiarowych, należy do niego dostarczyć sygnał cyfrowy, a prawie wszystkie mierzone wielkości fizyczne są wielkościami ciągłymi. Dostosowanie różnych wielkości fizycznych do formy cyfrowej wymaga dwóch transformacji:

- zamiany danej wielkości na napięcie elektryczne,
- przetworzenia napięcia (analogowego) na wartość cyfrową za pomocą tzw. przetwornika analogowo-cyfrowego.

Przetwornik analogowo-cyfrowy, oprócz swojej zasadniczej funkcji, ma także funkcję zliczania czasu.

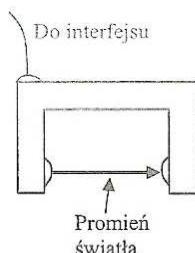
Składniki zestawu

W Pracowni Fizycznej Politechniki Poznańskiej jest używany system pomiarowy o nazwie *Science Workshop*. System składa z trzech głównych elementów, które kolejno przetwarzają informacje, jak pokazano na poniższym schemacie.



Stosowane są czujniki dwóch rodzajów – analogowe i cyfrowe. *Czujnik analogowy* wytwarza napięcie proporcjonalne do wielkości fizycznej. Na przykład, czujnik temperatury wytwarza napięcie proporcjonalne do temperatury – w temperaturze 0°C wytwarza napięcie 0 V; gdy temperatura wynosi 10°C, napięcie jest równe 0,1 V, a w temperaturze 100°C – 1 V. Inne czujniki mogą mierzyć np. siłę, przyspieszenie, natężenie światła czy dźwięku. Analogowe napięcie z czujnika jest przetwarzane przez interfejs na sygnał cyfrowy, który z kolei jest przekazywany do komputera.

Czujnik cyfrowy wytwarza innego rodzaju sygnał. Wytwarza on tylko dwie wartości napięcia – 5 V i 0 V. Przykładem takiego czujnika jest tzw. fotobramka

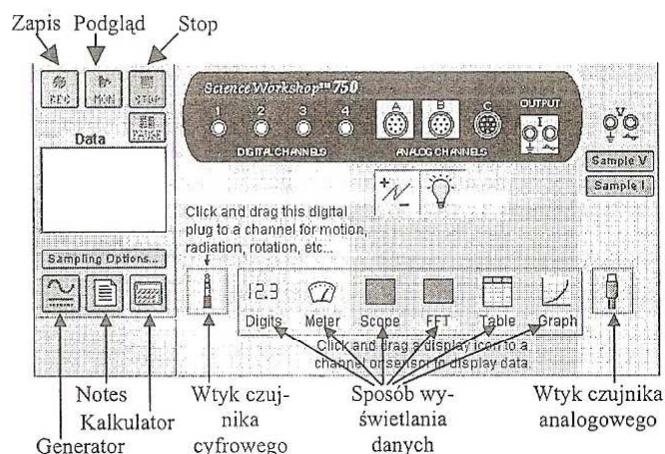


Rys. 20.1. Fotobramka

przedstawiona schematycznie na rysunku 20.1. Na jednym z ramion bramki znajduje się źródło światła, a na drugim – detektor, który pod wpływem oświetlenia wytwarza napięcie 5 V. Zasłonięcie promienia powoduje spadek sygnału do wartości 0 V.

Fotobramka może być użyta do pomiaru czasu przechodzenia jakiegoś obiektu lub odstępu czasu między przejściami dwóch obiektów. Dokładność pomiaru czasu wynosi 0,0001 s, czyli 0,1 ms.

Interfejs jest urządzeniem, które z jednej strony jest połączone z czujnikiem, a z drugiej – z komputerem. Ściana czołowa interfejsu jest widoczna na rysunku 20.2 jako ciemny element w górnej części rysunku. Na ścianie czołowej znajdują się gniazda do podłączenia czujników cyfrowych, oznaczone 1 i 2, oraz gniazda do czujników analogowych A, B, C. Przed rozpoczęciem pomiarów do interfejsu należy dołączyć odpowiedni czujnik.



Rys. 20.2. Okno ustawień

Konfiguracja programu

Wykonanie pomiaru z użyciem komputera wymaga odpowiedniego oprogramowania, które umożliwia między innymi rozpoczęcie i zakończenie pomiaru, określenie potrzebnych parametrów, wykonanie obliczeń czy przedstawienie wyników. Użytkownik komunikuje się z komputerem za pomocą przycisków, list wyboru i okienek do wpisywania danych. Elementy komunikacyjne są dostosowane do aktualnej sytuacji procesu pomiarowego.

Podstawowe parametry pomiaru są wprowadzane przez użytkownika do programu za pomocą *okna ustawień* (rys. 20.2), które otwiera się przy uruchamianiu programu; stanowi ono główną „konsolę” sterowania pomiarem. Oprócz fizycznego połączenia czujników z interfejsem konieczne jest „poinformowanie” o tym programu przez wskazanie, który czujnik został przyłączony i do którego wejścia (kanału). Dokonuje się tego przez naciśnięcie klawisza myszki, gdy kurSOR wskazuje wtyk czujnika analogowego lub cyfrowego, i przeciągnięcie wtyku do odpowiedniego gniazda interfejsu. W czasie wykonywania tej czynności ukazuje się lista czujników do wyboru. Na rysunku 20.2 są zaznaczone gniazda analogowe A i B, a poniżej – ikony załączonych czujników: źródło napięcia i czujnik światła.

Oprócz wymienionych już wtyków czujników i gniazdek do nich w oknie ustawień jest widoczny zestaw możliwych sposobów przedstawiania wyników pomiarów. Możliwe jest także wywołanie na ekranie kalkulatora i notatnika.

Przed przystąpieniem do pomiarów należy określić, jakie mierniki, wykresy czy tabele będą używane. Na przykład, do pomiaru zależności prądu od napięcia potrzebne będą: tabela wartości napięcia, tabela wartości prądu oraz wykres zależności prądu od napięcia. Po uaktywnieniu narzędzi pomiarowych można je zapisać w pamięci w celu wykorzystania w kolejnych pomiarach. Utworzony w ten sposób plik konfiguracyjny zawiera również wyniki wykonanych pomiarów i inne informacje szczegółowe o pomiarach i narzędziach. Plik tworzy się za pomocą polecenia Plik-Zapisz (lub Zapisz jako), ma on rozszerzenie .sws.

W lewym górnym rogu znajdują się przyciski sterowania przebiegiem pomiaru – Zapis, Podgląd, Stop i Pauza.

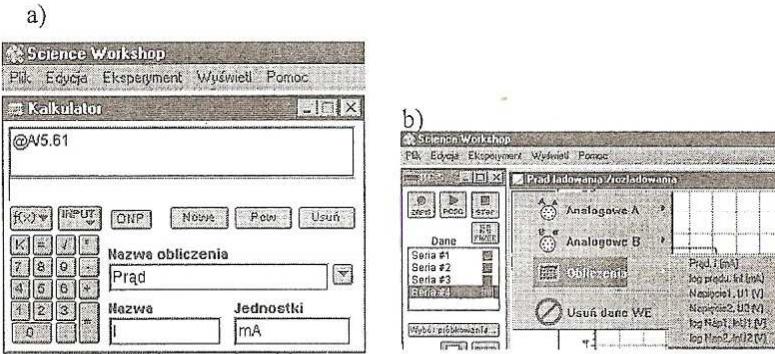
- Kliknięcie na Zapis rozpoczyna rejestrację pomiarów, które są równocześnie prezentowane na ekranie i zapisywane w pamięci.
- Kliknięcie na Podgląd umożliwia wykonanie tych samych czynności z wyjątkiem zapisu do pamięci – rozpoczęcie kolejnego pomiaru powoduje utratę poprzednio otrzymanych danych.
- Przyciski Pauza i Stop służą do przerwania/kontynuacji lub zatrzymywania rejestracji pomiarów.

Przetwarzanie danych

Wynik bezpośredniego pomiaru wielkości analogowych zawsze jest napięciem i często wymaga przetworzenia na inną wielkość. Na przykład, zmierzone napięcie (U) na oporniku (R) można przetworzyć na natężenie prądu płynącego przez ten opornik. Wystarczy w tym celu wykonać dzielenie U/R . Do przetwarzania danych stosujemy wbudowane narzędzie Kalkulator, uruchamiane albo z menu głównego (Eksperyment – Okno Kalkulatora), albo przez naciśnięcie ikonki w oknie ustawień.

Za pomocą kalkulatora można wykonywać operacje matematyczne na pojedynczych liczbach, a także na serii uprzednio zmierzonych danych. W tym drugim przypadku seria przetworzonych danych jest traktowana przez program jako nowe

źródło danych, na równi z danymi bezpośrednimi, na przykład do utworzenia wykresu. Widok kalkulatora i jego opis jest przedstawiony na rysunku 20.3. Przetwarzanie danych jest często stosowane w celu przejrzystego ich przedstawiania oraz w celu obliczania parametrów funkcji.



Rys. 20.3. (a) Kalkulator służy do prostych obliczeń i do przetwarzania serii danych. W górnym polu wprowadza się operację do wykonania – np. $@A/5.61$ oznacza, że wszystkie dane z kanału A będą podzielone przez liczbę 5.61. Ta operacja otrzymuje nazwę ‘Prąd’, krótką nazwę I oraz jednostkę mA. Oprócz operacji arytmetycznych można wprowadzać funkcje za pomocą przycisku $f(x)$ – po wybraniu z listy, np. w $\log(x)$ następuje x nazwa kanału (@A, @B lub @C) lub liczbą. Dostępne kanały wybiera się przyciskiem INPUT. Można utworzyć wiele sposobów przetwarzania. (b) Przetworzone dane są traktowane jak dodatkowe źródła danych i są widoczne na liście otwieranej z okna wykresu lub tabeli pod nazwą Obliczenia. Na prawym rysunku widoczne są serie danych przetworzonych: Prąd, Napięcie i inne

Tabele, wykresy i mierniki

Gdy wynikiem pomiaru jest pojedyncza wartość, wówczas celowe jest pokazywanie wyników w postaci cyfrowej lub analogowej – tak, jakbyśmy używali cyfrowego lub wskazówkowego miernika.

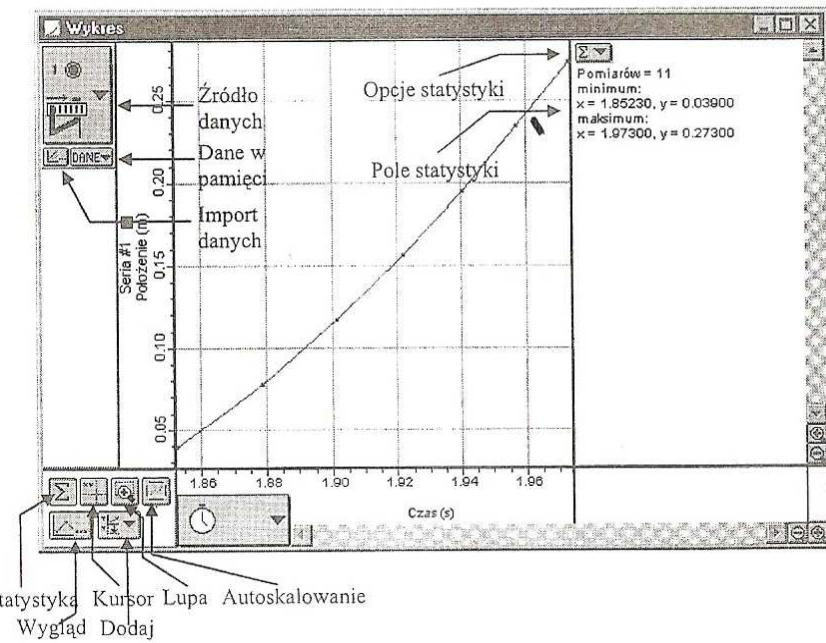
Gdy chcemy zmierzyć zmiany jakiejś wielkości podczas pojedynczego zjawiska, wtedy wygodniej jest przedstawić je w postaci tabeli lub wykresu. Przykładem może być pomiar co 0,1 s aktualnej wysokości spadającego ciała.

Gdy rezultatem pomiaru jest seria wartości zmieniających się w czasie, wtedy wygodniej jest przedstawić je w postaci tabeli lub wykresu. Okno tabeli lub wykresu można utworzyć na dwa sposoby:

- z okna ustawień (rys. 20.2) – chwytając myszką ikonę tabeli lub wykresu i przeciągając ją do wybranego gniazda,
- z menu głównego – wybierając Wyświetl i następnie z listy rozwijanej Nowa tabela lub Nowy wykres.

Przykładowe okno wykresu pokazano na rysunku 20.4. Główna część okna zawiera właściwy wykres i pole statystyki. Ponadto, znajdują się w nim przyciski sterujące zawartością:

- Źródło danych – pozwala określić albo zmienić kanał, z którego mają być pobierane dane, oraz rodzaj danych z wybranego kanału. Na przykład, do wyboru może być Kanał cyfrowy 1 i Kanał cyfrowy 2, a po wybraniu kanału – Położenie, Prędkość i Przyspieszenie. Na liście wyboru mogą też być dane przetworzone (patrz rys. 20.3); występują one pod wspólną nazwą Calculations.
- Dane w pamięci – umożliwia pobranie danych uprzednio zmierzonych i zachowanych w pamięci.
- Import danych – dotyczy pobierania danych zapisanych w innym formacie.



Rys. 20.4. Okno wykresu

- Statystyka – powoduje kolejno otwieranie i zamykanie pola statystyki w prawej części okna.
- Kursor – powoduje powstanie krzyża poruszającego się zgodnie z ruchem myszki i podawanie współrzędnych w miejscu kurSORA.
- Lupa – powiększa fragment wykresu.

- Autoskalowanie – dostosowuje zakres współrzędnych wykresu do zakresu zmierzonych wartości.
- Wygląd – umożliwia ustawienie parametrów wykresu, takich jak np. siatka, łączenie punktów.
- Dodaj – pozwala umieścić następny wykres razem z aktualnym.

Zawartość pola Statystyki określa się po kliknięciu przycisku Opcje statystyki. Na rysunku 12.4 są pokazane w tym polu: liczba pomiarów, wartości minimalne i maksymalne. Dalsze możliwe dane statystyczne to wartości średnie i odchylenia standardowe. Osobną grupę stanowią: dopasowanie funkcji, pochodna, całka i histogram.

Dopasowanie funkcji polega na znalezieniu parametrów funkcji $y(x)$ najlepiej dopasowanej do danych pomiarowych. Na przykład, dopasowanie do funkcji liniowej polega na znalezieniu parametrów a_1 i a_2 funkcji $y = a_1 + a_2 x$. Po wybraniu Dopasowanie krzywej i następnie f.liniowa w polu statystyki widać postać funkcji z poprzedniego zdania oraz wartości parametrów a_1 i a_2 . Oznaczenia pozostają takie same, niezależnie od nazw zmiennych, które aktualnie są mierzone. Przykładowo, badając ruch jednostajnie przyspieszony, mamy funkcję $v = v_0 + at$. W tym przypadku wyniki statystyki mają następujące znaczenie: $x = t$, $y = v$, $a_1 = v_0$, $a_2 = a$.

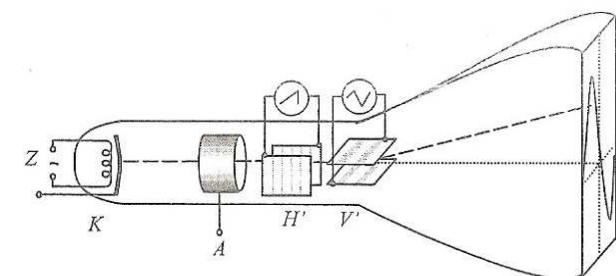
Z danych w tabeli lub na wykresie możemy wybrać tylko pewien zakres i umieścić je wewnątrz prostokąta zakreślonego myszką, który pojawi się jako obszar przyciemniony. Wszystkie obliczenia w polu statystyki odnoszą się do zaznaczonego zakresu. Brak zaznaczenia jest równoważny zaznaczeniu wszystkich danych.

Oscyloskop

Oscyloskop klasyczny

Do obserwacji i pomiaru wielkości szybko- i periodycznie zmiennych stosuje się oscyloskop. *Klasyczny oscyloskop* jest analogowym urządzeniem elektronicznym wyposażonym w niewielki ekran fluorescencyjny (tzn. pokryty od wewnętrz warstwą luminoforu), na którym jest widoczny przebieg zmian badanej wielkości w funkcji czasu (rys. 20.5 i 20.6). Jasny świecący punkt na ekranie powstaje w wyniku uderzenia wąskiej wiązki elektronów w luminofor i następującego zjawiska katodoluminescencji. Ekran oscyloskopu jest elementem lampy kineskopowej, której budowę przedstawiono na rysunku 20.5.

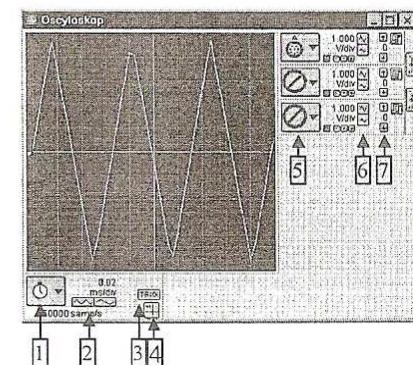
Elektrony emitowane z podgrzanej katody w wyniku zjawiska *termoemisji* są następnie przyspieszane w polu elektrycznym między katodą a anodą. Anoda służy również do zogniskowania wiązki elektronów i najczęściej ma postać kilku cylinderów o odpowiednich potencjałach. Następnie elektrony przechodzą między płytami H , które służą do odchylenia poziomego, i dalej między płytami V , gdzie są odchylane w kierunku pionowym (rys. 20.5). Odchylenie toru elektronów jest wy-



Rys. 20.5 Budowa lampy kineskopowej; K – katoda z układem żarzenia, Z – anoda, H – płytki odchylenia poziomego, V – płytki odchylenia pionowego, E – ekran fluorescencyjny, linia kreskowana – tor elektronów od katody do ekranu

nikiem oddziaływania pola elektrycznego między płytami, a wartość i kierunek pola zależą od przyłożonego napięcia. Po opuszczeniu obszaru płyt V elektrony biegą po linii prostej i w końcu uderzają w ekran fluorescencyjny, powodując świecenie punktu, którego położenie jest określone przez wartości napięcia na płytach H i V . Zamiast odchylenia elektrostatycznego często stosowane jest odchylenie magnetyczne; wówczas zamiast płyt występują uzwojenia tworzące pole magnetyczne, które działa na poruszające się elektrony z siłą określona wzorem Lorentza.

Odchylenie poziome zazwyczaj odbywa się jednostajnie od lewej do prawej strony ekranu, po czym następuje bardzo szybki powrót do położenia wyjściowego i cykl się powtarza. Odchylenie w kierunku pionowym jest proporcjonalne do badanej wielkości. W rezultacie odchylenia elektronów w obu kierunkach punkt na ekranie wykresła zależność badanego napięcia od czasu. Gdy wiązka elektronów zmienia odchylenie, pobudza do świecenia inny punkt ekranu, a punkt poprzedni pozostaje jasny jeszcze przez kilka dziesięciątek części sekundy. Czas świecenia danego punktu jest na tyle długi, że na ogół widoczna jest cała krzywa (jeżeli przebieg jest powolny, to widać punkt poruszający się po ekranie). Ze względu na periodyczność zarówno badanego przebiegu, jak i procesu odchy-



Rys. 20.6. Płyta czołowa oscyloskopu;
1 – wybór osi X , 2 – prędkość przesuwu poziomego, 3 – wyczyszczanie, 4 – włączanie kursora do odczytania współrzędnych, 5 – kanały, 6 – czułość, 7 – przesuw pionowy

lania poziomego przebieg na ekranie jest powtarzany wielokrotnie i w rezultacie sprawia wrażenie stałego. W oscyloskopie znajdują się elementy regulacyjne pozwalające na zmianę prędkości odchylania poziomego, wysokości sygnału, przesuwanie obrazu itp.

W powyższym opisie nie został uwzględniony problem wyzwalania przebiegu, mający zasadnicze znaczenie dla powtarzalności przebiegu na ekranie. Otóż na początku fazy kolejnego przebiegu na ogół nie jest zgodna z fazą początkową przebiegu poprzedniego, co oznacza, że każdy kolejny przebieg jest przesunięty względem poprzedniego i w rezultacie otrzymuje się „skaczący” obraz. W celu uniknięcia tego efektu stosuje się właśnie wyzwalanie przebiegu, polegające na zatrzymaniu odchylania poziomego na początku i jego uruchomieniu dopiero wtedy, gdy przebieg osiągnie właściwą fazę. Do włączenia trybu wyzwalania służy przycisk TRIG (patrz rys. 20.6).

Oscyloskop może jednocześnie obrazować kilka przebiegów, a ich liczba zależy od konstrukcji urządzenia. Źródło każdego przebiegu dołącza się do różnych kanałów (każdy kanał ma osobne gniazdo wejściowe, odpowiedni układ wewnętrzny i regulacyjny). Oscyloskop na rysunku 20.6 ma trzy kanały; gniazda wejściowe do kanałów wskazuje strzałka 5.

Odchylanie poziome jednostajne w czasie oznacza, że przebieg na ekranie jest po prostu funkcją czasu (oś X oznacza czas, a ten tryb pracy nazywa się $Y-t$). Możliwy jest także inny sposób odchylania poziomego (tryb $Y-X$), polegający na wykorzystaniu jednego z kanałów do odchylania w tym kierunku. Na ekranie otrzymujemy się wówczas zależność $Y(X)$. Na przykład, na wejściu X może być napięcie zasilania żarówki, a na wejściu Y natężenie światła; otrzymana krzywa przedstawia wówczas zależność natężenia światła od napięcia. Na rysunku 20.6 do wyboru trybu odchylania poziomego służy przycisk z ikoną zegara (oznaczony wskaźnikiem 1).

Oscyloskop komputerowy

Oscyloskop komputerowy składa się z interfejsu i komputera osobistego i jest w istocie symulacją komputerową, która w efekcie końcowym tworzy obraz ściany czołowej oscyloskopu rzeczywistego z ekranem i elementami regulacyjnymi, taki jak przedstawiony na rysunku 20.6. Ten sam rysunek został użyty powyżej do opisu rzeczywistego oscyloskopu, ponieważ między obrazem okna komputerowego a widokiem oscyloskopu nie ma istotnych różnic. W oscyloskopie komputerowym są uwzględnione wszystkie opisane powyżej funkcje, ale prawie wszystkie operacje są wykonywane za pomocą komputera sterowanego odpowiednim programem.

Nie ma w ogóle lampy kineskopowej (nie mylić z lampą kineskopową monitora) i co za tym idzie, wiązki elektronów i płytka odchylających. Ekran oscyloskopu rzeczywistego jest ciągły, tzn. świeci każdy punkt, na który pada wiązka elektronów, natomiast ekran monitora składa się z małych „kropek” luminoforu

zwanych pikselami, które tworzą regularną matrycję (we współczesnych monitorach typowa matryca ma 1024×768 pikseli). Elementy regulacyjne w oscyloskopie rzeczywistym – pokrętła, przełączniki, klawisze itp. – pozwalają zmienić wartość określonego składnika układu elektronicznego, np. opornika czy kondensatora. W oscyloskopie komputerowym działanie elementów regulacyjnych powoduje zmianę wartości odpowiedniego parametru przez wprowadzenie do pamięci programu nowej wartości, która zostanie uwzględniona w następnych obliczeniach.

Jedynym elementem rzeczywistym oscyloskopu komputerowego jest interfejs z gniazdami wejściowymi pełniącymi funkcję kanałów. W interfejsie są wykonywane pomiary napięcia w krótkich odstępach czasu (nazywa się to próbkowaniem); każda zmierzona wartość jest przetwarzana do postaci cyfrowej i przesyłana na wejście komputera. Wierność cyfrowego odtworzenia zmian napięcia jest tym lepsza, im większa jest częstotliwość próbkowania. Na rysunku 20.6 wartość częstotliwości wynosi 250 000 próbek na sekundę (ang. samp/s) i jest widoczna poniżej przycisków 1 i 2.

Program obsługujący pomiar jest tym, co przekształca uniwersalny komputer w oscyloskop. Jego zadaniem jest przedstawienie rzeczywistego przebiegu napięcia w postaci wykresu na ekranie oscyloskopu. W tym celu program musi obliczyć współrzędne na ekranie odpowiadające zmierzonym wartościom napięć, uwzględniając wszystkie ustawione przez użytkownika parametry (w szczególności czułość w kierunku pionowym i prędkość przesuwu poziomego).

Ustawienia parametrów oscyloskopu dokonuje się za pomocą kliknięcia na odpowiedni przycisk. Powoduje to albo bezpośrednio zmianę wartości wybranej wielkości, albo otarcie listy wyboru. Znaczenie poszczególnych przycisków objasnia poniższa lista.

1. Wybór osi X : kliknięcie otwiera listę wyboru, na przykład Analog A, Analog B, Time Input (dla ustawienia jak na rys. 20.2). Wybranie Time Input oznacza, że oś X jest osią czasu, natomiast inny wybór oznacza pracę w trybie $Y-X$. W tym trybie pod ekranem pojawiają się 2 małe przyciski \leftarrow i \rightarrow , za pomocą których można przesuwać obraz w kierunku poziomym. Wartość przesunięcia podana jest między przyciskami.
2. Zmiana skali na osi X : zwiększenie lub zmniejszenie zakresu. Nad przyciskami widoczną jest czułość podana w ms/działkę (w trybie $Y-t$) lub w V/działkę (w trybie $Y-X$), zaś pod przyciskami – częstotliwość próbkowania. W trybie $Y-X$ pojawiają się 2 małe przyciski "+" i "-", za pomocą których można zmieniać częstotliwość próbkowania. W trybie $Y-t$ częstotliwość próbkowania jest ustalana automatycznie.
3. Włączanie i wyłączanie wyzwalania pomiaru.
4. Włączanie i wyłączanie wskaźnika w postaci ruchomych skrzyżowanych linii. Wartości współrzędnych w punkcie skrzyżowania są podawane dla osi X oraz dla wszystkich kanałów Y .

5. Wybór kanału. Po wciśnięciu przycisku pojawia się lista wyboru, na przykład Digital 2, Analog A, No Input. Wybranie No Input powoduje odłączenie wejścia oscyloskopu, natomiast inny wybór powoduje połączenie kanału oscyloskopu z odpowiednim wejściem interfejsu.
6. Zmiana czułości każdego kanału. Przy każdym z kanałów są dwa przyciski, za pomocą których można zwiększać lub zmniejszać czułość kanału. Aktualna wartość woltach na działkę jest podana obok. Zakres osi jest większy dla mniejszej czułości, stąd na przyciskach są rysunki większego i mniejszego wykresu.
8. Przesuwanie wykresu w pionie za pomocą przycisków ↑ i ↓. Wartość przesunięcia widoczna jest między przyciskami.

Jeżeli interfejs, komputer i oprogramowanie połączy się w zintegrowaną jednostkę, to powstanie *oscyloskop cyfrowy*. W tym przypadku stosuje się wyspecjalizowany komputer, przystosowany do wykonywania tylko niezbędnych operacji i do którego użytkownik nie może użyć innego oprogramowania.

Konfigurowanie programu do pracy jako oscyloskop

Po uruchomieniu programu *Science Workshop* na ekranie monitora widoczne jest Okno ustawień (rys. 20.2). Przeciągnąć ikonę wtyku czujnika (analogowego lub cyfrowego) do wybranego kanału interfejsu. Następnie przeciągnąć ikonę oscyloskopu (*Oscyloskop*) do tego samego kanału. Po wykonaniu tych czynności na ekranie pojawi się okno podobne do pokazanego na rysunku 20.6. Wszystkie potrzebne ustawienia mogą być zapamiętane w postaci pliku konfiguracyjnego i odzworzone przed rozpoczęciem następnych pomiarów.

Po włączeniu przycisku Zapis lub Podgląd (patrz rys. 20.2) rozpoczyna się wyświetlanie badanego przebiegu. Widok dostosowuje się przez dobór odpowiednich parametrów (patrz opis powyżej).



Skorowidz

A

absorpcja, 121, 122
aktywność optyczna, 139
wymuszona, 139
amplituda, 62
analiza harmoniczna, 61

B

bryła sztywna, 7

C

czas połowicznego zaniku, 73
częstotliwość,
harmoniczna, 62
kołowa, 46, 51, 61
czujnik
analogowy, 151
cyfrowy, 151

D

dielektryk, 82
dobroć dielektryka, 89
dopasowanie funkcji, 156
drugie harmoniczne, 25
druga zasada dynamiki Newtona, 25
dyfrakcja, 95
dyfrakcja elektronów, 101
dispersja, 113
dziury, 121

E

efekt Faradaya, 84
elipsoida bezwładności, 30

F

fala
akustyczna, 44
de Broglie'a, 101
elektromagnetyczna, 93, 136, 144

materii, 101
mechaniczna, 44
podłużna, 44
poprzeczna, 44, 144
faza
początkowa, 51
ruchu harmonicznego, 51
figury Lissajous, 56
fotobramka, 151
foton, 101
funkcja harmoniczna, 51, 61

H

halotron, 78
czułość, 79
iperdźwięki, 45

I

indukcja elektryczna, 87
infradźwięki, 45
interfejs, 47, 56, 66, 152
interferencja, 93, 127

K

kąt
Brewstera, 137, 147
całkowitej polaryzacji, 147
strat, 88
kryształ dwójłomny, 138

L

liczba Poissona, 41

Ł

ładowanie kondensatora, 69

M

mikrofale, 93
moduł Younga, 41, 43, 46

moment
bezwładności, 14, 20, 26, 30
dewiacji, 32
dipolowy, 82
kierujący, 13, 25
pędę, 30
siły, 19

N

napięcie Halla, 77
nośniki ładunku
koncentracja, 77
ruchliwość, 80
nutacja, 9, 11

O

obwód
 RC , 54
 RL , 53
 RLC , 52
odchylenie standardowe, 156
oscyloskop, 56
analogowy, 156
cyfrowy, 160
komputerowy, 158

P

paczka falowa, 114
plik konfiguracyjny, 153
pojemność elektryczna, 69
polaryzacja
dielektryczna, 82
dipolowa, 84
elektronowa, 83
jonowa, 83
polaryzacja światła, 136
eliptyczna, 136
kołowa, 136
linowa, 136
półprzewodnik, 121
prawo
Hooke'a, 46
Kirchhoffa, 53, 69
Snelliusa, 137
Verdeta, 140
załamania światła, 143

prąd strat, 88
precesja, 8, 10
pryzmat Nicola, 138
przejścia
proste, 122
skośne, 122
przenikalność
elektryczna, 85, 112
magnetyczna, 112
przerwa energetyczna, 121
przesunięcie fazy, 55
przetwarzanie danych, 153

R

rozładowanie kondensatora, 70
równania Fresnela, 147
ruch
harmoniczny, 35
prosty, 14

S

Science Workshop, 72, 99, 133, 151
sila Lorentza, 76
spektrofotokolorymetr, 126
stała
czasowa, 72
Halla, 78
Verdeta, 140
szereg Fouriera, 61

T

termoemisja, 156
transformacja Fouriera, 62
transmisja, 123
twierdzenie Steinera, 20, 26

U

ultradźwięki, 45

W

wahadło
balistyczne skrętne, 13
fizyczne, 24
Oberbecka, 19
warunek Bragga, 103

wektor
falowy, 136
momentu pędę, 8, 30
widmo fourierowskie, 62
współczynnik
absorpcji, 125
Fouriera, 62
odbicia światła, 146, 147
restytucji, 38, 43
załamania światła, 143

Z

zasada zachowania
energii, 122

momentu pędę, 15
pędę, 37
zasady dynamiki Newtona, 7
zderzenia
centralne, 38
niesprzyiste, 37
sprzyiste, 37
zjawisko
Halla, 77
odbicia światła, 143
załamania światła, 143

Ż

zyroskop, 7, 9