

Metody probabilistyczne

Rozwiązania zadań

8. Wielowymiarowe zmienne losowe II

28.11.2017

Zadanie 1. Pokaż, że dla dowolnych zmiennych losowych:

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_n.$$

Możesz wykorzystać udowodniony na wykładzie fakt, że zachodzi to dla $n = 2$ zmiennych losowych.

Odpowiedź: Udowodnimy to przez indukcję po n , zaczynając od $n = 2$. Przypadek bazowy dla $n = 2$ został pokazany na wykładzie. Weźmy teraz dowolne n i założmy (krok indukcyjny), że twierdzenie zachodzi dla $n - 1$, tzn. że dla dowolnych zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_{n-1} zachodzi:

$$E(X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}) = EX_1 + EX_2 + \dots + EX_{n-1}.$$

Pokażemy, że zachodzi to również dla dowolnych n zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_n . W tym celu definiujemy zmienną $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}$. Mamy:

$$\begin{aligned} E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) &= E(Y + X_n) \\ &\stackrel{(*)}{=} EY + EX_n \\ &= E(X_1 + \dots + X_{n-1}) + EX_n \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} EX_1 + \dots + EX_{n-1} + EX_n, \end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n = 2$, a w (\dagger) użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n - 1$ zmiennych losowych. To kończy dowód.

Zadanie 2*. Udowodnij nierówność Cauchy'ego-Schwarza: dla dowolnych zmiennych losowych X i Y zachodzi:

$$(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2),$$

Przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy X i Y są swoimi wielokrotnościami, tzn. $X = cY$ lub $Y = cX$ dla $c \in \mathbb{R}$.

Odpowiedź: Dowód przeprowadzimy osobno w dwóch przypadkach: (1) kiedy $E(Y^2) = 0$; (2) kiedy $E(Y^2) > 0$.

1. Zauważmy, że jeśli $E(Y^2) = 0$, to znaczy, że

$$0 = E(Y^2) = \sum_y y^2 P(Y = y).$$

Ponieważ wszystkie elementy sumy po prawej stronie są nieujemne, równość ta będzie spełniona tylko wtedy, gdy $y^2 = 0$ dla wszystkich y (takich, że $P(Y = y) > 0$). Oznacza to, że zmienna Y jest stałą równą zero¹. Tym samym $XY = 0$ oraz $Y^2 = 0$, a więc: $E(XY) = 0$ i $E(Y^2) = 0$, więc nierówność Cauchy'ego-Schwarza jest spełniona jako równość. Ponieważ możemy zapisać wtedy $Y = 0 \cdot X$, jest to przypadek kiedy Y jest (trywialną) wielokrotnością X .

¹Ścisłej: Y jest równe zero z prawdopodobieństwem 1, tzn. $P(Y = 0) = 1$. Y może przyjąć inną wartość niż zero, ale musi to mieć wtedy prawdopodobieństwo równe zero. Tę subtelność matematyczną pomijamy

2. Załóżmy teraz, że $E(Y^2) > 0$. Rozważmy zmienną losową $Z = X - \lambda Y$ dla pewnego $\lambda \neq 0$, które ustalimy później. Mamy oczywiście $E(Z^2) \geq 0$, ponieważ Z^2 przyjmuje tylko wartości nieujemne. Tym samym:

$$0 \leq E(Z^2) = E(X^2) - 2\lambda E(XY) + \lambda^2 E(Y^2) \quad (1)$$

Przyjmijmy teraz $\lambda = \frac{E(XY)}{E(Y^2)}$. Prawa strona nierówności (1) przyjmie wtedy postać:

$$\begin{aligned} E(X^2) - 2 \frac{E(XY)}{E(Y^2)} E(XY) + \frac{(E(XY))^2}{(E(Y^2))^2} E(Y^2) &= E(X^2) - 2 \frac{(E(XY))^2}{E(Y^2)} + \frac{(E(XY))^2}{E(Y^2)} \\ &= E(X^2) - \frac{(E(XY))^2}{E(Y^2)}. \end{aligned}$$

Z (1) wynika więc, że:

$$E(X^2) - \frac{(E(XY))^2}{E(Y^2)} \geq 0,$$

lub przemnażając obie strony przez $E(Y^2)$:

$$E(X^2)E(Y^2) - (E(XY))^2 \geq 0 \quad \implies \quad (E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$$

To dowodzi nierówności Cauchy'ego-Schwarza. Na koniec zauważamy, że jedyną nierówność, jaką tutaj zastosowaliśmy to $E(Z^2) \geq 0$. Nierówność ta spełniona jest jako równość $E(Z^2) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $P(Z=0) = 1$, tzn. Z jest stałą równą zero. Ale ponieważ $Z = X - \lambda Y$, zachodzi to wtedy i tylko wtedy gdy $X = \lambda Y$, tzn. X i Y są swoimi wielokrotnościami.

Zadanie 3*. Pokaż, że ta nierówność Cauchy'ego-Schwarza implikuje następującą nierówność:

$$|C(X, Y)| \leq D(X)D(Y)$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy jedna ze zmiennych jest funkcją liniową drugiej, np. $Y = aX + b$.

Odpowiedź: Rozważmy zmienne losowe:

$$Y' = Y - EY, \quad X' = X - EX.$$

Mamy wtedy:

$$\begin{aligned} C(X, Y) &= E((X - EX)(Y - EY)) = E(X'Y'), \\ D^2(X) &= E((X - EX)^2) = E(X'^2), \\ D^2(Y) &= E((Y - EY)^2) = E(Y'^2). \end{aligned}$$

Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza wynika, że:

$$(E(X'Y'))^2 \leq E(X'^2)E(Y'^2),$$

co oznacza, że:

$$C(X, Y)^2 \leq D^2(X)D^2(Y).$$

Po wyciągnięciu pierwiastka z obu stron dostajemy nierówność, którą chcieliśmy udowodnić. Na koniec zauważmy, że nierówność jest spełniona jako równość wtedy i tylko wtedy gdy nierówność Cauchy'ego-Schwarza jest spełniona jako równość, tzn. X' jest wielokrotnością Y' lub odwrotnie, np. $Y' = aX'$. Ale:

$$Y' = aX' \iff Y - EY = a(X - EX) \iff Y = aX - aEX + EY.$$

Ale to oznacza, że Y jest dowolną funkcją liniową X , tzn. $Y = aX + b$. Dlaczego? Ponieważ gdy przyłożymy wartość oczekiwaną do obu stron, dostaniemy $EY = aEX + b$, z czego wyjdzie nam, że $b = EY - aEX$, a tym samym $Y = aX - aEX + EY$.

Zadanie 4. Udowodnij, że jeśli zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_n są niezależne to zachodzi:

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = (EX_1) \cdot (EX_2) \cdot \dots \cdot (EX_n).$$

Możesz wykorzystać udowodniony na wykładzie fakt, że zachodzi to dla $n = 2$ zmiennych losowych.

Odpowiedź: Udowodnimy to przez indukcję po n , zaczynając od $n = 2$. Przypadek bazowy dla $n = 2$ został pokazany na wykładzie. Weźmy teraz dowolne n i założmy (krok indukcyjny), że twierdzenie zachodzi dla $n - 1$, tzn. że dla dowolnych niezależnych zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_{n-1} zachodzi:

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_{n-1}) = (EX_1) \cdot (EX_2) \cdot \dots \cdot (EX_{n-1}).$$

Pokażemy, że zachodzi to również dla dowolnych n niezależnych zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_n . W tym celu definiujemy zmienną $Y = X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_{n-1}$. Mamy:

$$\begin{aligned} E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) &= E(Y \cdot X_n) \\ &\stackrel{(*)}{=} (EY) \cdot (EX_n) \\ &= E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_{n-1})(EX_n) \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} (EX_1) \cdot (EX_2) \cdot \dots \cdot (EX_n), \end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n = 2$, a zmienne Y i X_n są niezależne (ponieważ Y jest funkcją X_1, X_2, \dots, X_{n-1} , które wszystkie są niezależne od X_n), natomiast w (\dagger) użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n - 1$ zmiennych losowych. To kończy dowód.

Zadanie 5. Udowodnij, że jeśli zmienne losowe X_1, X_2, \dots, X_n są niezależne to zachodzi:

$$D^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \dots + D^2(X_n).$$

Możesz wykorzystać udowodniony na wykładzie fakt, że zachodzi to dla $n = 2$ zmiennych losowych.

Odpowiedź: Udowodnimy to przez indukcję po n , zaczynając od $n = 2$. Przypadek bazowy dla $n = 2$ został pokazany na wykładzie. Weźmy teraz dowolne n i założmy (krok indukcyjny), że twierdzenie zachodzi dla $n - 1$, tzn. że dla dowolnych zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_{n-1} zachodzi:

$$D^2(X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}) = D^2(X_1) + D^2(X_2) + \dots + D^2(X_{n-1}).$$

Pokażemy, że zachodzi to również dla dowolnych n zmiennych losowych X_1, X_2, \dots, X_n . W tym celu definiujemy zmienną $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_{n-1}$. Mamy:

$$\begin{aligned} D^2(X_1 + X_2 + \dots + X_n) &= D^2(Y + X_n) \\ &\stackrel{(*)}{=} D^2(Y) + D^2(X_n) \\ &= D^2(X_1 + \dots + X_{n-1}) + EX_n \\ &\stackrel{(\dagger)}{=} D^2(X_1) + D^2(X_2) + \dots + D^2(X_{n-1}), \end{aligned}$$

gdzie w $(*)$ użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n = 2$, a zmienne Y i X_n są niezależne (ponieważ Y jest funkcją X_1, X_2, \dots, X_{n-1} , które wszystkie są niezależne od X_n), natomiast w (\dagger) użyliśmy faktu, że twierdzenie zachodzi dla $n - 1$ zmiennych losowych. To kończy dowód.

Zadanie 6. Pokaż, że jeśli X i Y są niezależne, to:

$$D^2(aX + bY) = a^2 D^2(X) + b^2 D^2(Y)$$

Odpowiedź: Bierzymy zmienne losowe $U = aX$ i $V = bY$. Ponieważ X i Y są niezależne, to niezależne są również U i V . Wykorzystując w $(*)$ poniżej twierdzenie o sumie zmiennych losowych:

$$D^2(aX + bY) = D^2(U + V) \stackrel{(*)}{=} D^2(U) + D^2(V) = D^2(aX) + D^2(bY) = a^2 D^2(X) + b^2 D^2(Y),$$

gdzie w ostatniej równości wykorzystaliśmy znane prawo skalowania wariancji (patrz wykład).

Zadanie 7*. Pokaż, że jeśli X i Y są niezależne i X ma rozkład $\text{Pois}(\lambda_1)$, a Y ma rozkład $\text{Pois}(\lambda_2)$, to $Z = X + Y$ ma rozkład $\text{Pois}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Odpowiedź:

$$\begin{aligned}
 P(Z = n) &= \sum_{k, \ell: k+\ell=n} P(X = k)P(Y = \ell) \\
 &= \sum_{k=0}^n P(X = k)P(Y = n - k) \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2} \\
 &= \frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} \\
 &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!} (\lambda_1 + \lambda_2)^n,
 \end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość wynika z następującego faktu: dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$