Metody probabilistyczne
Rozwiązania zadań

5. Zmienne losowe: wprowadzenie

31.10.2017

Zadanie 1. *Mamy urnę z 10 białymi i 20 czarnymi kulami. Wybieramy losowo ze zwracaniem 9 kul. Niech X określa liczbę wylosowanych białych kul. Jaki rozkład ma X?*

Odpowiedź: Ponieważ łącznie jest 30 kul, prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli w każdym losowaniu wynosi $p = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ (losujemy ze zwracaniem!). Zmienna losowa X określa więc liczbę sukcesów (sukces = „biała kula”) w 9 próbach, gdzie prawdopodobieństwo sukcesu wynosi $p = \frac{1}{3}$. Tym samym X ma rozkład dwumianowy $B(9, \frac{1}{3})$.

Zadanie 2*. *Odszukaj dlaczego $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$*

Odpowiedź: Wzór wynika z rozwinięcia funkcji e^x w nieskończony szereg Taylora:

$$f(x) \;=\; f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}}{k!}(x - x_0)^k + \ldots$$

wokół punktu $x_0 = 0$ (tzw. *szereg Maclaurina*). Jest to możliwe, ponieważ e^x jest funkcją *analityczną*. Ponieważ $f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = e^x$, mamy:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = e^0 = 1,$$

stąd:

$$e^x \;=\; 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Zadanie 3. *Wyznacz rozkład prawdopodobieństwa dla wszystkich wymienionych poprzednio przykładów. Oblicz kilka pierwszych prawdopodobieństw*

Odpowiedź: Wszystkie wspomniane przykłady można modelować za pomocą rozkład Poissona, wystarczy tylko obliczyć λ.

- Szansa rozpadu atomu promieniotwórczego w ciągu sekundy wynosi $p = 10^{-14}$. Mając $n = 10^{15}$ atomów wyznacz rozkład prawdopodobieństwa liczby rozpadów w danej sekundzie.
  Mamy $\lambda = pn = 10$, stąd:

$$P(X = k) = \frac{10^k}{k!}e^{-10}, \qquad P(X = 0) = e^{-10} \simeq 4.5 \cdot 10^{-5}, \qquad P(X = 1) = 10e^{-10} \simeq 4.5 \cdot 10^{-4}$$

$$P(X = 2) = \frac{10^2}{2!}e^{-10} \simeq 2.3 \cdot 10^{-3}, \quad P(X = 3) \simeq 7.6 \cdot 10^{-3}, \quad P(X = 4) \simeq 1.9 \cdot 10^{-2}$$

- Mamy artykuł z $n = 8\,000$ słów. Szansa literówki w danym słowie to $p = 1/1000$. Znaleźć rozkład liczby literówek.
  Mamy $\lambda = pn = 8000/1000 = 8$, stąd:

$$P(X = k) = \frac{8^k}{k!}e^{-8}, \quad P(X = 0) \simeq 3.4 \cdot 10^{-4}, \quad P(X = 1) \simeq 2.7 \cdot 10^{-3}, \quad P(X = 2) \simeq 0.01$$

- DNA człowieka składa się z $n = 6.4 \times 10^9$ par zasad (w pojedynczej komórce). Szansa mutacji na parę zasad na rok wynosi $p = 0.5 \times 10^{-9}$. Wyznacz rozkład liczby mutacji w ciągu roku.
  Mamy $\lambda = pn = 6.4 \cdot 0.5 = 3.2$, stąd:

$$P(X = k) = \frac{3.2^k}{k!} e^{-3.2}, \quad P(X = 0) \simeq 0.04, \quad P(X = 1) \simeq 0.13, \quad P(X = 2) \simeq 0.21$$

- Szansa katastrofy lotniczej wynosi 1 na 11 mln lotów (rocznie). Wyznacz rozkład liczby katastrof na rok, jeśli w ciągu roku odbywa się $n = 16$ mln lotów.
  Mamy $\lambda = pn = \frac{16}{11}$, stąd:

$$P(X = k) = \frac{(16/11)^k}{k!} e^{-16/11}, \quad P(X = 0) \simeq 0.23, \quad P(X = 1) \simeq 0.4, \quad P(X = 2) \simeq 0.25$$