

Andrzej  
Urbaniak

# PODSTAWY AUTOMATYKI

**Andrzej  
Urbaniak**

# **PODSTAWY AUTOMATYKI**



**Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej  
Poznań 2001**

Recenzent  
prof. dr hab. inż. ZBIGNIEW BANASZAK

Redaktor  
RENATA LUBAWY

Skład i łamanie  
ANDRZEJ URBANIAK

Projekt okładki  
PIOTR GOŁĘBIAK

62-5 : 681.5



141388

**ISBN 83-7143-490-1**

© Copyright by Politechnika Poznańska, Poznań 2001

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI POZNAŃSKIEJ  
60-965 Poznań, pl. M. Skłodowskiej-Curie 2  
tel. (061) 6653516, faks (061) 6653583  
e-mail: office\_ed@put.poznan.pl

Wydanie I

## **SPIS TREŚCI**

Przedmowa 5

### 1. Układy logiczne 7

#### 1.1. Podstawy teorii układów przełączających 7

##### 1.1.1. Pojęcia podstawowe 7

##### 1.1.2. Funkcje przełączające i ich własności 8

##### 1.1.3. Minimalizacja funkcji przełączających 15

##### 1.1.4. Zasady projektowania układów kombinacyjnych 18

#### 1.2. Teoria automatów 20

##### 1.2.1. Definicja automatu 20

##### 1.2.2. Sposoby reprezentacji automatu 22

Literatura 25

### 2. Liniowe układy automatycznej regulacji 26

#### 2.1. Pojęcia podstawowe 26

#### 2.2. Opis matematyczny układów dynamicznych 27

##### 2.2.1. Opis w dziedzinie zmiennej czasu 27

##### 2.2.2. Linearyzacja równań nieliniowych 30

##### 2.2.3. Opis w dziedzinie zmiennej operatorowej $s$ 32

##### 2.2.4. Opis w dziedzinie zmiennej częstotliwościowej $\omega$ 35

##### 2.2.5. Podstawowe charakterystyki układów sterowania 36

#### 2.3. Układy sterowania i ich klasyfikacja 38

#### 2.4. Podstawowe czlony układów sterowania 44

##### 2.4.1. Czlon bezinerencyjny (proporcjonalny, wzmacniający) 44

##### 2.4.2. Czlon inercyjny pierwszego rzędu 46

##### 2.4.3. Czlon inercyjny drugiego rzędu 51

##### 2.4.4. Idealny czlon różniczkujący 58

##### 2.4.5. Rzeczywisty czlon różniczkujący 59

##### 2.4.6. Idealny czlon całkujący 63

##### 2.4.7. Rzeczywisty czlon całkujący 65

##### 2.4.8. Czlon oscylacyjny 69

##### 2.4.9. Czlon opóźniający 75

#### 2.5. Schematy blokowe i ich uproszczenia 78

#### 2.6. Stabilność układów regulacji 85

2.7.	Jakość regulacji 96	
2.7.1.	Jakość regulacji w stanie ustalonym 96	
2.7.2.	Jakość regulacji w stanie nieustalonym 100	
Literatura	102	
 3.	Nieliniowe układy automatycznej regulacji 103	
3.1.	Pojęcia podstawowe 103	
3.2.	Przykłady nieliniowych charakterystyk przekaźnikowych 103	
3.3.	Metoda funkcji opisującej 105	
3.4.	Metoda płaszczyzny fazowej 108	
3.4.1.	Wyznaczanie trajektorii fazowych metodą izoklin 109	
3.4.2.	Regulacja dwu- i trójpłaszczyznowa 110	
3.4.3.	Przykład analizy dwupołożeniowego układu regulacji metodą płaszczyzny fazowej 113	
Literatura	118	
 4.	Podstawy komputerowych systemów sterowania 119	
4.1.	Pojęcia podstawowe 119	
4.2.	Klasyfikacja komputerowych systemów sterowania 122	
4.3.	Sterowanie binarne 127	
4.4.	Sterowanie zmiennych procesowych ciągłych 129	
Literatura	130	
 5.	Elementy i urządzenia automatyki 131	
5.1.	Regulatory 131	
5.1.1.	Podstawowe typy regulatorów ciągłych 132	
5.1.2.	Dobór regulatorów 139	
5.2.	Elementy pomiarowe 142	
5.2.1.	Przetworniki pomiarowe 142	
5.2.2.	Czujniki pomiarowe 147	
5.3.	Sterowniki programowalne 161	
5.3.1.	Mikroprocesory 161	
5.3.2.	Sterowniki PLC 165	
5.3.3.	Mikrokontrolery 167	
Literatura	168	
 Dodatek:	Podstawowe własności przekształcenia Laplace'a 170	

– tego typu pojęcia, jakim jest sterowanie, regulacja i automatyzacja, z których skorzystał m.in. wynalazek, który zmienił świat. Wprowadzenie do życia nowych technologii, takich jak komputer, mikroprocesor, mikrofalówka, itp., umożliwiło stworzenie nowego typu systemów sterowania, regulacji i automatyzacji, które zrewolucjonizowały przemysł i gospodarkę.

## PRZEDMOWA

Wydanie niniejszej książki jest kontynuacją przedwcześnie wydanej w 1998 r. przez Wydawnictwo Politechniki Szczecinskiej. W tym czasie doszły do mnie wiele nowych informacji i zmian w dziedzinie sterowania i regulacji, co skłoniło mnie do przeprowadzenia aktualizacji i rozszerzenia niniejszej książki o nowe rozdziały, dotyczące nowych technologii i nowych rozwiązań.

Takie pojęcia, jak automatyka, sterowanie, regulacja, automatyzacja mają dla każdego pewne intuicyjnie wyczuwalne znaczenie. Wiąże się je zwykle z procesem, w którym działanie człowieka w większym lub mniejszym stopniu jest zastępowane przez różne urządzenia techniczne. Urządzenia automatyczne wykorzystuje się na co dzień, często nie zdając sobie sprawy ze stopnia ich skomplikowania. Automatyka ma niewątpliwie szczególne znaczenie w złożonych procesach technologicznych, których prowadzenie przez człowieka byłoby bardzo uciążliwe lub wręcz niemożliwe. Procesy takie spotyka się we wszystkich dziedzinach działalności człowieka, począwszy od domowych urządzeń typu pralka automatyczna, kuchenka mikrofalowa, lodówka, sprzęt audio i TV poprzez najnowsze generacje samochodów aż do skomplikowanych procesów wytwórczych w fabrykach i procesów odnowy środowiska (uzdatnianie i oczyszczanie wody, oczyszczanie powietrza i gleby).

Celem tej książki jest przedstawienie podstawowych zasad funkcjonowania układów sterowania i regulacji oraz przybliżenie wiedzy o budowie i funkcjonowaniu urządzeń służących do realizacji tych układów. Prezentowany materiał ma stanowić podstawę do analizy możliwości zastosowania układów sterowania i regulacji w różnych procesach technologicznych. Decyzje te podejmuje technolog w ścisłej współpracy z automatykiem. Taka współpraca jest możliwa w sytuacji posiadania pewnego minimum wiedzy zarówno z zakresu automatyki, jak i głównych cech automatyzowanego procesu. Poszczególne rozdziały zawierają materiał, który powinien to umożliwić.

W pierwszej części (rozdział 1) omówiono zasady opisu tzw. układów logicznych, często spotykanych w praktyce, do których opisu wystarczą dwa wyróżnione stany (tzw. sygnały binarne), np. załączone – wyłączone, praca – postój. Przedstawiono dwa rodzaje takich układów: układy przełączające, których wyjście zależy wyłącznie od stanów wejściowych, oraz automaty, których wyjście zależy dodatkowo od poprzedniego stanu.

Najobszerniejszy jest rozdział 2 dotyczący podstaw analizy liniowych układów automatycznej regulacji. Treści zawarte w tym rozdziale stanowią klasyczną wie-

dzę z zakresu sterowania i regulacji, a głównym celem ich prezentacji jest przybliżenie technologom metody opisu dynamiki układów, która jest głównym wyróżnikiem dla projektanta automatyki. Charakterystyczne układy dynamiczne zilustrowano przykładami zaczerpniętymi głównie z dziedziny inżynierii środowiska (układy ze zbiornikami oraz regulacja poziomu i przepływu).

Spotykane w praktyce obiekty i procesy wymagają nieliniowego opisu, a tym samym ich analiza jako obiektów regulacji wymaga zastosowania specjalnych metod i narzędzi. Problemy te poruszone w rozdziale 3. Z kolei rozdział 4 zawiera podstawy komputerowych systemów sterowania, które mają swoją specyfikę. Specyfika ta wynika z połączenia wiedzy z zakresu automatyki z nowoczesnymi rozwiązaniami, jakie daje informatyka. Wybrane elementy techniczne do realizacji układów sterowania i regulacji omówiono w rozdziale 5. Wybór został ukierunkowany na elementy wykorzystywane głównie w inżynierii środowiska, szczególnie w zakresie elementów pomiarowych. W dodatku zamieszczono podstawowe właściwości przekształcenia Laplace'a wykorzystywanego do opisu dynamiki procesów.

Po szczególnie rozdziały zamyka spis literatury uzupełniającej, który może ułatwić czytelnikowi dotarcie do interesujących go, bardziej szczegółowych rozważań teoretycznych lub materiałów źródłowych.

W książce przyjęto zasadę możliwie maksymalnego uproszczenia strony matematycznej problemów i przedstawienia ich głównie w formie poglądowej (rysunki, wykresy, szkice) w celu ułatwienia czytelnikowi kontaktu z prezentowanym materiałem.

układów przełączających. W tym rozdziale przedstawimy podstawy teorii układek przełączających, zaznaczając przy tym, że nie jest to jedyna możliwa klasa układów. Innymi są układy ciągłe, ale o nich mowa w dalszych rozdziałach.

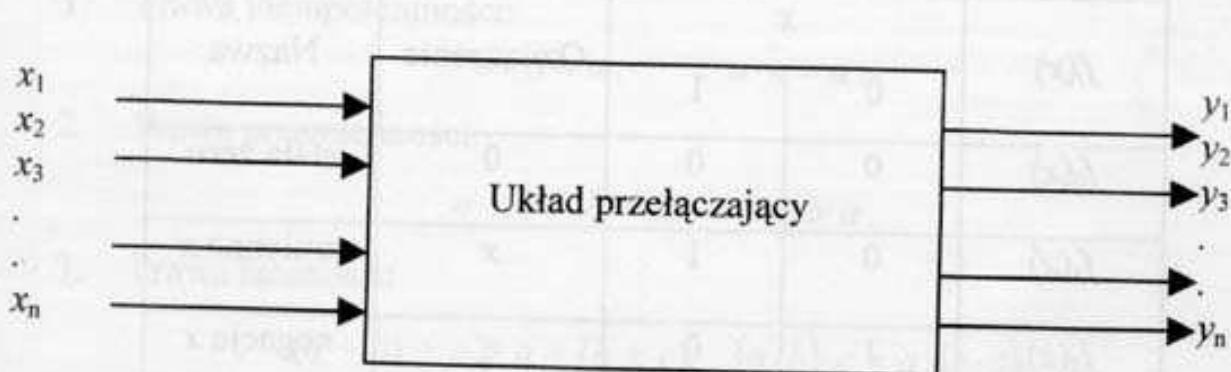
## 1. UKŁADY LOGICZNE

### 1.1. Podstawy teorii układów przełączających

#### 1.1.1. Pojęcia podstawowe

Układem przełączającym nazwiemy układ automatyki przetwarzający informacje dyskretnie. Układy przełączające (rys. 1.1) można podzielić na dwie grupy:

- 1) układy kombinacyjne – wartość każdego sygnału wyjściowego  $y_i$  zależy wyłącznie od aktualnej kombinacji sygnałów wejściowych  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ,
- 2) układy sekwencyjne – wartość sygnału wyjściowego  $y_i$  zależy od stanu aktualnego sygnałów  $x_i$  i stanów poprzednich.



Rys. 1.1. Schemat układu przełączającego

Teoria układów przełączających jest częścią teorii automatów, której głównym aparatem jest algebra abstrakcyjna. Teoria ta pozwala opisać pracę i własności układów przełączających. Zajmiemy się stroną praktyczną tej teorii, tj. analizą i syntezą w odniesieniu do układów przełączających.

### 1.1.2. Funkcje przełączające i ich własności

Rozpatrzmy układ kombinacyjny przedstawiony na rys. 1.1.

**D e f i n i c j a 1.1.** Funkcje  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , gdzie:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \quad y_m = f_m(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

będziemy nazywać funkcjami przełączającymi, jeśli podobnie jak ich argumenty będą przyjmować tylko dwie wyróżnione wartości, oznaczone przez 0 i 1.

**D e f i n i c j a 1.2.** Dwie funkcje przełączające tych samych argumentów są równe, jeśli przyjmują jednakowe wartości dla takich samych wartości argumentów po całym zbiorze kombinacji wartości argumentów.

**D e f i n i c j a 1.3.** Stanem wejścia nazywamy ciąg  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**D e f i n i c j a 1.4.** Stanem wyjścia nazywamy ciąg  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ .

Dla ciągu  $k$ -elementowego o elementach dwuwartościowych liczba możliwych różnych ciągów wyniesie  $2^k$ . Podobnie na  $k$  ciągach można określić liczbę  $2^k$  funkcji przełączających. Z powyższego wynika, że dla  $n$  argumentów można określić  $2^{2^n}$  funkcji przełączających.

T a b l i c a 1.1. Funkcje przełączające jednej zmiennej

$f_i(x)$	$x$		Oznaczenie	Nazwa
	0	1		
$f_0(x)$	0	0	0	stała zero
$f_1(x)$	0	1	$x$	zmienna $x$
$f_2(x)$	1	0	$\bar{x}$	negacja $x$
$f_3(x)$	1	1	1	stała jeden

W tablicy 1.1 zestawiono funkcje przełączające jednej zmiennej ( $n = 1$ ). W tym przypadku można określić 4 funkcje przełączające ( $2^2 = 4$ ). Funkcja  $f_0(x)$  przyjmuje wartość 0 zarówno dla zmiennej wejściowej 0, jak i 1 i jest nazywana **stałą zero**. Funkcja  $f_1(x)$  przyjmuje wartości równe zmiennej wejściowej  $x$  i stąd określa się ją

mianem **zmiennej**  $x$ . Funkcja  $f_2(x)$  przyjmuje wartości przeciwe do wartości zmiennej wejściowej i nosi nazwę **negacji, uzupełnienia** bądź **inwersji**. Funkcja  $f_3(x)$  przyjmuje wartość 1 niezależnie od wartości zmiennej wejściowej i nosi nazwę **stałej jeden**.

Rozpatrzmy obecnie układ kombinacyjny o dwóch wejściach. Możliwe są cztery ciągi wejściowe:  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ . Liczba funkcji określonych na tych ciągach wynosi  $16$  ( $n = 2$ , czyli  $2^{2^n} = 16$ ). Funkcje te zestawiono w tablicy 1.2. Funkcje sumy, iloczynu i negacji tworzą operacje podstawowe w tzw. algebrze Boole'a. Za pomocą tych operacji na zmiennych  $x_1$  i  $x_2$  oraz stałych 0 i 1 można przedstawić wszystkie pozostałe funkcje zawarte w tablicy 1.2. Dokonano tego w rubryce – Wartość równoważna.

Zdefiniujmy algebrę Boole'a.

**Definicja 1.5.** Algebrą Boole'a jest zbiór  $\mathcal{B}$  z operacjami nazywanymi dodawaniem logicznym (dysjunkcja, suma), mnożeniem logicznym (koniunkcja, iloczyn) i operacją umowną zwaną negacją.

Na oznaczenie poszczególnych operacji będziemy stosowali następujące symbole:

- dysjunkcja:  $+$ ,  $\vee$ ,  $\cup$ ; w rachunku zdań odpowiednikiem jest spójnik "lub";
- koniunkcja:  $\wedge$ ,  $\cap$ ; odpowiednikiem w rachunku zdań jest spójnik "i";
- negacja:  $\neg$ ,  $-$ ; odpowiednikiem w rachunku zdań jest słowo "nie".

Elementy  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , zbioru  $\mathcal{B}$  podlegają następującym prawom, zwanym prawami algebry Boole'a.

1. Prawa idempotentności:

$$a + a = a, \quad a \cdot a = a.$$

2. Prawa przemienności:

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

3. Prawa łączności:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

4. Prawa rozdzielności:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c).$$

5. Istnienie takiego elementu w zbiorze  $\mathcal{B}$  oznaczonego przez "0", że

$$0 + a = a, \quad 0 \cdot a = 0.$$

6. Istnienie takiego elementu w zbiorze  $\mathcal{B}$  oznaczonego przez "1", że

$$1 + a = 1, \quad 1 \cdot a = a.$$

T a b l i c a 1.2. Funkcje przełączające dwóch zmiennych

7. Prawa negacji:

$$a + \bar{a} = 1, \quad a \cdot \bar{a} = 0.$$

8. Prawo podwójnej negacji:

$$\bar{\bar{a}} = a.$$

9. Prawo de Morgana:

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}, \quad \overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}.$$

Podamy teraz kilka uwag związanych z systemami funkcjonalnie pełnymi.

**D e f i n i c j a 1.6.** Zbiór funkcji przełączających nazywa się **systemem funkcjonalnie pełnym (bazą)**, jeśli dowolna funkcja przełączająca może być przedstawiona za pomocą stałych 0 i 1 oraz funkcji należących do tego zbioru i argumentów funkcji.

Funkcje sumy, iloczynu i negacji tworzą tzw. **podstawowy system funkcjonalnie pełny**. Zauważmy, że system ten nie jest minimalny, ponieważ np. sumę zmiennych  $x_1, x_2$  można uzyskać za pomocą iloczynu i negacji

$$x_1 + x_2 = \overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}}$$

wykorzystując prawa algebra Boole'a, następująco:

$$\overline{\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}} = \overline{\overline{x_1}} + \overline{\overline{x_2}} = x_1 + x_2.$$

Innymi słowy, systemy złożone z iloczynu i negacji lub sumy i negacji tworzą również systemy funkcjonalnie pełne. Dodajmy, że funkcje Pierce'a lub Sheffera tworzą także systemy funkcjonalnie pełne, wykorzystywane często w praktyce projektowania układów kombinacyjnych. W przypadku wykorzystania systemu z funkcją Pierce'a mówi się o realizacji układów logicznych w logice NOR (negacja sumy), w przypadku realizacji układów z funkcją Sheffera mówi się o logice NAND (negacja iloczynu).

Funkcję przełączającą można przedstawić w różnych postaciach charakterystycznych, które określmy poniżej. W tym celu podamy kilka podstawowych określeń.

**Elementarna suma** (elementarna dysjunkcja) to suma liter, w której nie ma liter jednakowych, np.

$$x_1, x_1 + \bar{x}_2.$$

**Elementarny iloczyn** (elementarna koniunkcja) to iloczyn liter, w którym nie ma liter jednakowych, np.

$$x_1, x_1 \cdot \bar{x}_2.$$

Elementarna suma zawierająca wszystkie litery danej funkcji nosi nazwę **czynnika zera**. Na przykład, dla funkcji dwóch zmiennych

$$\begin{aligned}D_0 &= x_1 + x_2, \quad \dots \text{itd.} \\D_1 &= x_1 + \bar{x}_2,\end{aligned}$$

Elementarny iloczyn zawierający wszystkie litery danej funkcji nosi nazwę **składnika jedności**. Na przykład, dla funkcji dwóch zmiennych

$$\begin{aligned}K_0 &= \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2, \\K_1 &= \bar{x}_1 \cdot x_2.\end{aligned}$$

**Normalna postać sumy** to suma różnych elementarnych iloczynów, np.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 \cdot x_3, \\x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3.\end{aligned}$$

**Normalna postać iloczynu** to iloczyn różnych elementarnych sum, np.

$$(x_1 + \bar{x}_2) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + x_3).$$

**Kanoniczna postać sumy** to suma różnych składników jedności, np.

$$x_1 x_2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2.$$

**Kanoniczna postać iloczynu** to iloczyn różnych czynników zera, np.

$$(x_1 + x_2) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2).$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że dla każdej funkcji przełączającej istnieje tylko jedna postać kanoniczna sumy i jedna iloczynu. Funkcja przełączająca może być zadana w różny sposób. Najczęściej jest to formuła logiczna (wzór), opis słowny lub rzadziej wykres czasowy.

Przedstawimy obecnie różne formy zapisu funkcji w postaci **formuły logicznej**. Funkcja zadana jest w postaci normalnej lub kanonicznej sumy, np.

$$y = \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 \bar{x}_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 x_3 = K_3 + K_5 + K_6 + K_7,$$

w zapisie skróconym

$$y = \sum(3,5,6,7).$$

Indeksy składników jedności wynikają z binarnej interpretacji zapisu podanego wyżej. Zmiennym z negacją przypisujemy wartość 0, a pozostałym zmiennym 1. Wówczas kolejne składniki mają postać:

$$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \Rightarrow 011 = 3 \Rightarrow K_3,$$

$$x_1 \bar{x}_2 x_3 \Rightarrow 101 = 5 \Rightarrow K_5,$$

$$x_1 x_2 \bar{x}_3 \Rightarrow 111 = 7 \Rightarrow K_7.$$

Funkcja zadana jest w postaci normalnego lub kanonicznego iloczynu, np.

$$y = (x_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3) = D_0 \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot D_4,$$

w zapisie skróconym

$$y = \prod(0,1,2,4).$$

Indeksy czynników zera wynikają również z reprezentacji zapisu, lecz po przyjęciu odwrotnej interpretacji niż w przypadku składników jedności, tzn. dla zmiennych z negacją przyjmujemy 1, a dla pozostałych 0. W naszym przykładzie

$$(x_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow 000 \Rightarrow D_0,$$

$$(x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \Rightarrow 001 \Rightarrow D_1,$$

$$(x_1 + \bar{x}_2 + x_3) \Rightarrow 010 \Rightarrow D_2,$$

$$(\bar{x}_1 + x_2 + x_3) \Rightarrow 100 \Rightarrow D_4.$$

Dla każdej formy zapisu w postaci kanonicznej sumy można znaleźć równoważną postać kanoniczną iloczynu. W zapisie skróconym będzie to uzupełnienie liczbami wypełniającymi cały zbiór liczb dla danej liczby zmiennych. Na przykład, dla funkcji trzech zmiennych

$$y = \sum(3,5,6,7),$$

a odpowiednia postać iloczynowa

$$y = \prod(0,1,2,4).$$

Funkcja przełączająca może być opisana **słownie**. Przedstawimy ten sposób opisu na podanym niżej przykładzie.

**P r z y k ł a d 1.1.** Zapisać funkcję przełączającą dla układu o trzech wejściach i dwóch wyjściach. Wyjście pierwsze  $y_1$  ma przyjmować wartość 1, gdy liczba określona przez zmienne wyjściowe (traktowane jako ciąg binarny) jest parzysta. Wyjście drugie  $y_2$  ma przyjmować 1, gdy liczba ta jest podzielna przez 3.

**R o z w i ą z a n i e.** Zapiszemy naszą funkcję za pomocą tablicy 1.3, z której możemy wyznaczyć postać kanoniczną sumy (lub iloczynu) dla funkcji  $y_1$  i  $y_2$ , zapisując kolejne składniki jedności (lub czynniki zera) według zasady, że 0 odp-

wiada zmienna z negacją, a 1 zmienna prosta (lub odwrotnie). W naszym przypadku kanoniczna postać sumy jest następująca:

$$y_1 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3,$$

$$y_2 = \bar{x}_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3$$

lub kanoniczna postać iloczynu

$$y_1 = (x_1 + x_2 + \bar{x}_3)(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3),$$

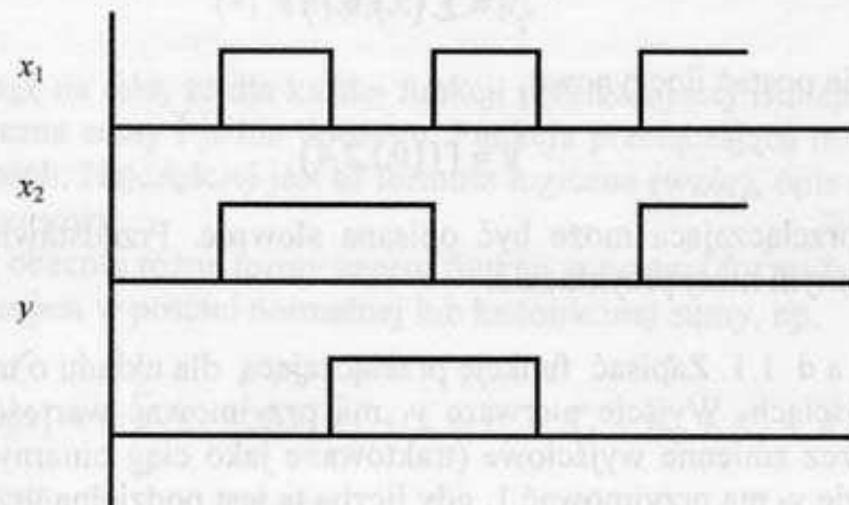
$$y_2 = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \bar{x}_3)(x_1 + \bar{x}_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 + x_3)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3) \times$$

$$\times (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)$$

T a b l i c a 1.3. Przykład zapisu funkcji

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$
0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
2	0	1	0	1	0
3	0	1	1	0	1
4	1	0	0	1	0
5	1	0	1	0	0
6	1	1	0	1	1
7	1	1	1	0	0

Wspomnijmy również o **wykresie funkcji przełączającej**. Przykład takiego wykresu zamieszczono na rys. 1.2. Odpowiadający mu zapis przedstawia tablica 1.4.



Rys. 1.2. Wykres funkcji przełączającej

Postać kanoniczną sumy wyraża zależność:

$$y = \bar{x}_1 x_2 + x_1 \bar{x}_2$$

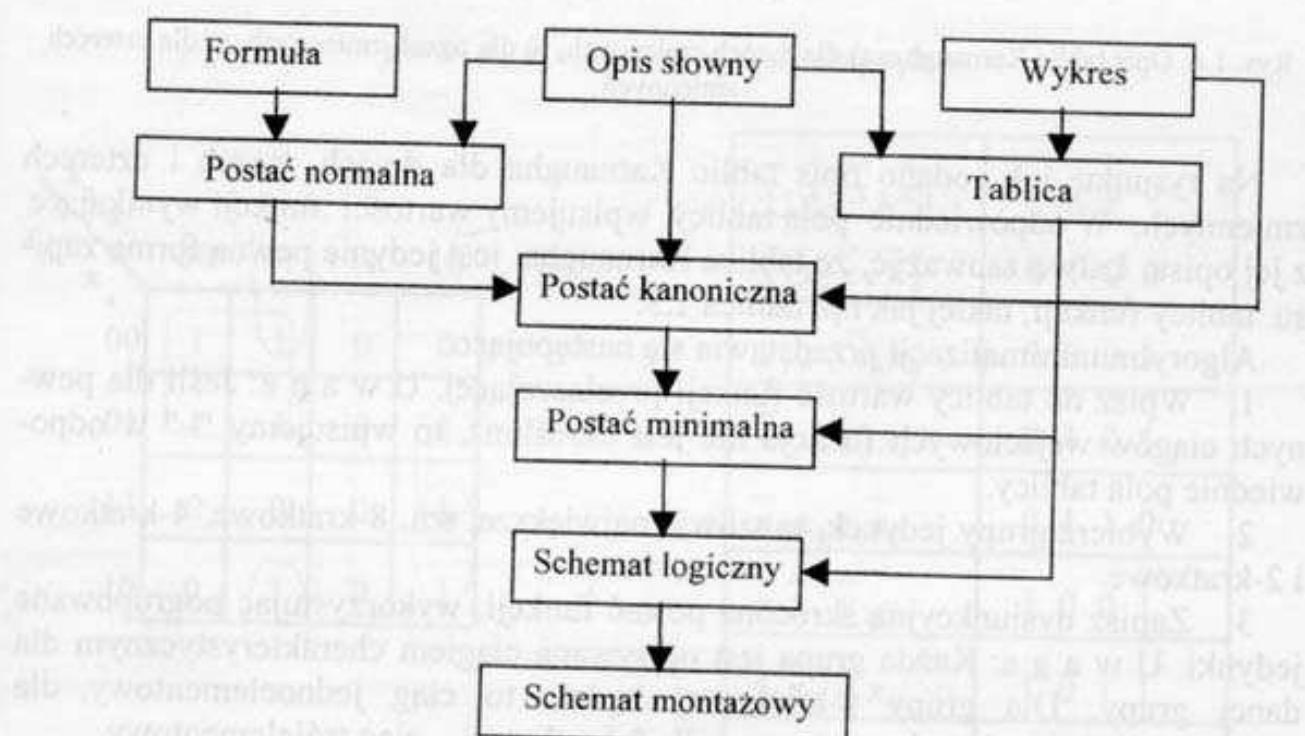
lub iloczynu

$$y = (x_1 + x_2)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2).$$

T a b l i c a 1.4. Zapis funkcji przełączającej podanej na rys. 1.2.

$x_1$	$x_2$	y
0	0	0
1	1	0
0	1	1
1	0	1

Zadanie funkcji przełączającej jest pierwszym etapem procesu projektowania układów przełączających. Poszczególne etapy procesu projektowania podano na rys. 1.3.

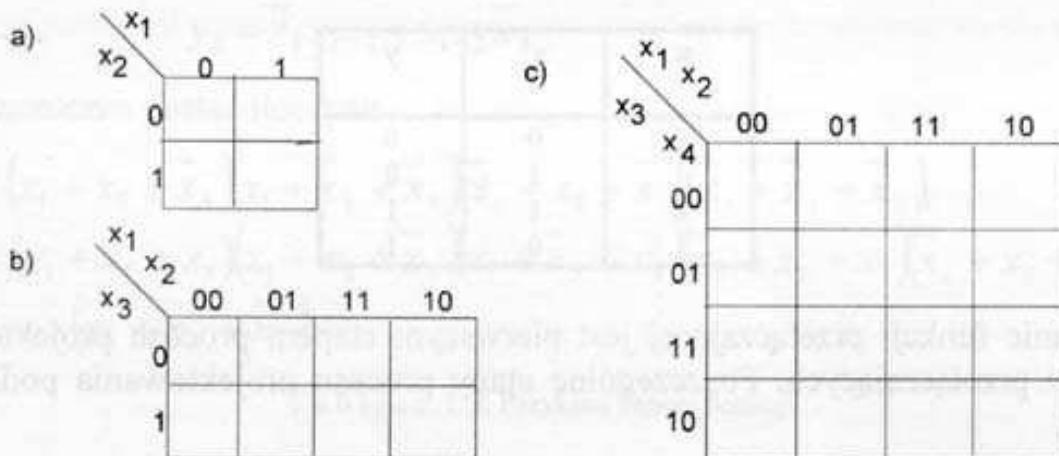


Rys. 1.3. Schemat procesu projektowania układów kombinacyjnych

### 1.1.3. Minimalizacja funkcji przełączających

Niżej omówimy metodę minimalizacji funkcji przełączających za pomocą tablic Karnaugha. Tablica taka jest graficznym sposobem przedstawienia funkcji boolewskiej kilku zmiennych. Najczęściej metodę Karnaugha stosuje się w odniesieniu do funkcji, której liczba zmiennych nie przekracza czterech. Dla funkcji o większej (dowolnej) liczbie zmiennych stosuje się metodę Quine'a-McCluskeya.

Konstruując tablice Karnaugha, należy trzymać się zasad, że wszystkie sąsiednie kolumny (lub wiersze) tablicy są opisane ciągami różniącymi się między sobą tylko jedną pozycją.



Rys. 1.4. Opis tablic Karnaugha: a) dla dwóch zmiennych, b) dla trzech zmiennych, c) dla czterech zmiennych

Na rysunku 1.4 podano opis tablic Karnaugha dla dwóch, trzech i czterech zmiennych. W odpowiednie pola tablicy wpisujemy wartości funkcji wynikające z jej opisu. Łatwo zauważać, że tablica Karnaugha jest jedynie pewną formą zapisu tablicy funkcji, takiej jak np. tablica 1.3.

Algorytm minimalizacji przedstawia się następująco:

1. Wpisz do tablicy wartość funkcji przełączającej. Uwaga: Jeśli dla pewnych ciągów wejściowych funkcja nie jest określona, to wpisujemy "—" w odpowiednie pola tablicy.
2. Wybierz grupy jedynek, możliwie największe, tzn. 8-kratkowe, 4-kratkowe i 2-kratkowe.
3. Zapisz dysjunkcyjną skróconą postać funkcji, wykorzystując pogrupowane jedynki. Uwaga: Każda grupa jest opisywana ciągiem charakterystycznym dla danej grupy. Dla grupy 8-kratkowej będzie to ciąg jednoelementowy, dla 4-kratkowej – ciąg dwuelementowy, a dla 2-kratkowej – ciąg trójelementowy.
4. Pozostałe jedynki zapisz, wykorzystując opis tablicy.
5. Powtórz czynności kroku 2 dla grup zer.
6. Zapisz koniunkcyjną skróconą postać funkcji.
7. Uzupełnij pozostałymi w tablicy zerami.
8. Porównaj uzyskane postacie: dysjunkcyjną i koniunkcyjną i do realizacji przyjmij postać prostszą.

**Przykład 1.2.** Zminimalizować funkcję przełączającą:  

$$y = \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 \overline{x_3} \overline{x_4} + \overline{x_1} \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 + \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} + x_1 \overline{x_2} \overline{x_3} x_4 + x_1 \overline{x_2} x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 \overline{x_4}$$

Rozwiązańe. Tworzymy tablicę Karnaugha dla funkcji czterech zmiennych (rys. 1.5); obok tablicy wypisano ciągi wejściowe odpowiadające poszczególnym składnikom jedności.

Krok 1. Wpisujemy do tabeli wartości funkcji.

Krok 2. Wybieramy grupy jedynek (zakreślone linią ciągłą). Znajdujemy jedną grupę 4-kratkową. Grupę tę identyfikują zmienne  $x_1 = 0$  i  $x_3 = 0$ , zatem zapis składnika funkcji dysjunkcyjnej jest następujący:  $\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2$ . Poza tym znajdujemy trzy grupy 2-kratkowe. Ich opis przedstawia się następująco:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4,$$

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_4 = 1 \Rightarrow x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4,$$

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 \bar{x}_2 x_3.$$

Krok 3. Skrócona dysjunkcyjna postać funkcji

$$y = \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3.$$

$x_1$	$x_2$		
$x_3$	$x_4$	00	01
00	1	1	0
01	1	1	0
11	0	0	0
10	0	1	0

$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	0 0 0 0
$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	0 1 0 0
$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$	0 0 0 1
$\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$	0 1 0 1
$\bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4$	0 1 1 0
$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	1 0 0 1
$x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$	1 0 1 1
$x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4$	1 0 1 0

Rys. 1.5. Tablica Karnaugha dla przykładu 1.2

Krok 4. W tablicy nie występuje więcej jedynek.

Krok 5. Poszukujemy grup zer (linia przerywana). Mamy jedną grupę 4-kratkową

$$x_1 = 1, x_2 = 1 \Rightarrow (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)$$

oraz trzy grupy 2-kratkowe

$$x_1 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0 \Rightarrow (\bar{x}_1 + x_3 + x_4),$$

$$x_1 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1 \Rightarrow (x_1 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4),$$

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow (x_1 + x_2 + \bar{x}_3)$$

Krok 6. Koniunkcyjna skrócona postać funkcji

$$y = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)(\bar{x}_1 + x_3 + x_4)(x_1 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4)(x_1 + x_2 + \bar{x}_3)$$

Krok 7. W tablicy nie występuje więcej zer.

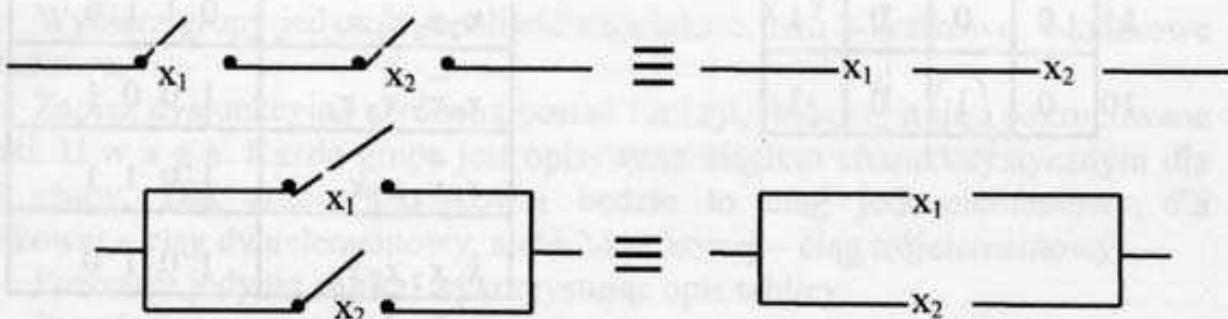
Krok 8. Obie postacie funkcji zawierają taką samą liczbę liter, są zatem równoważne.

Wybór postaci do realizacji będzie zależeć od sposobu realizacji.

#### 1.1.4. Zasady projektowania układów kombinacyjnych

Zgodnie ze schematem podanym na rys. 1.3, uzyskana postać minimalna jest podstawą do konstrukcji schematu logicznego układu kombinacyjnego. Układ kombinacyjny może być zrealizowany fizycznie na elementach stykowych (realizacja przekaźnikowa) bądź bezstykowych (realizacja na elementach logicznych).

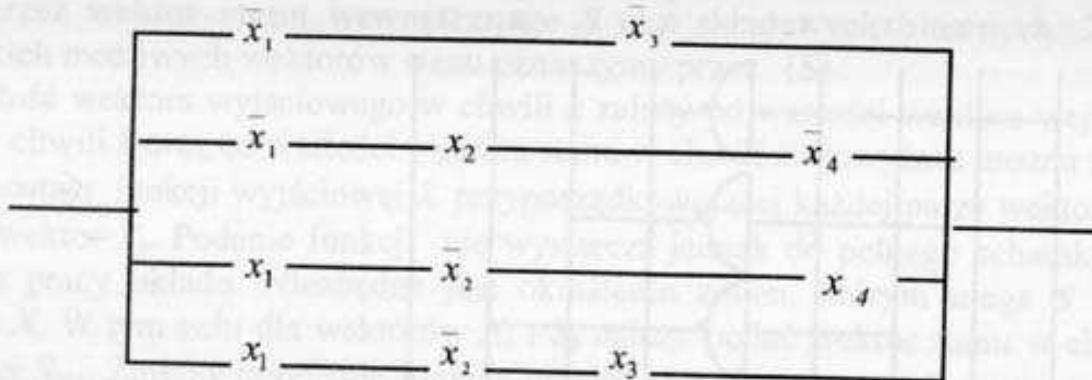
**Układy stykowe.** Rozpatrzmy połączenie zestyków pokazanych na rys. 1.6. Przyjmiemy, że położenie zestyku w stanie rozwartym odpowiada zmiennej prostej ( $x = 1, \bar{x} = 0$ ), natomiast położenie zestyku w stanie zwartym odpowiada zmiennej z negacją ( $x = 0, \bar{x} = 1$ ). Konstrukcja schematu logicznego jest oparta na równoważnym zapisie podanym z prawej strony rys. 1.6.



Rys. 1.6. Realizacja na elementach stykowych: a) funkcja iloczynu, b) funkcja sumy

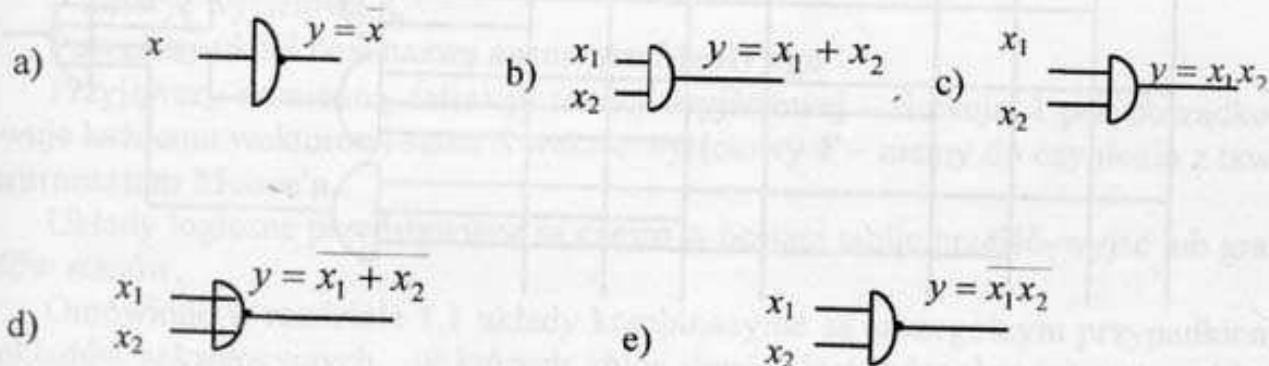
**P r z y k ł a d 1.3.** Narysować schemat logiczny realizacji na elementach stykowych dysjunkcyjnej skróconej postaci funkcji uzyskanej w przykładzie 1.2.

**R o z w i ą z a n i e:**  $y = \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ . Schemat będzie zawierał 4 równoległe gałęzie, z których każda jest realizacją poszczególnych składników jedności. Schemat zamieszczono na rys. 1.7.



Rys. 1.7. Schemat logiczny układu do przykładu 1.3

**Układy bezstykowe.** Przyjmiemy oznaczenie elementów logicznych realizujących wybrane funkcje zgodnie z rys. 1.8. Konstrukcję schematu logicznego pokażemy na przykładzie.

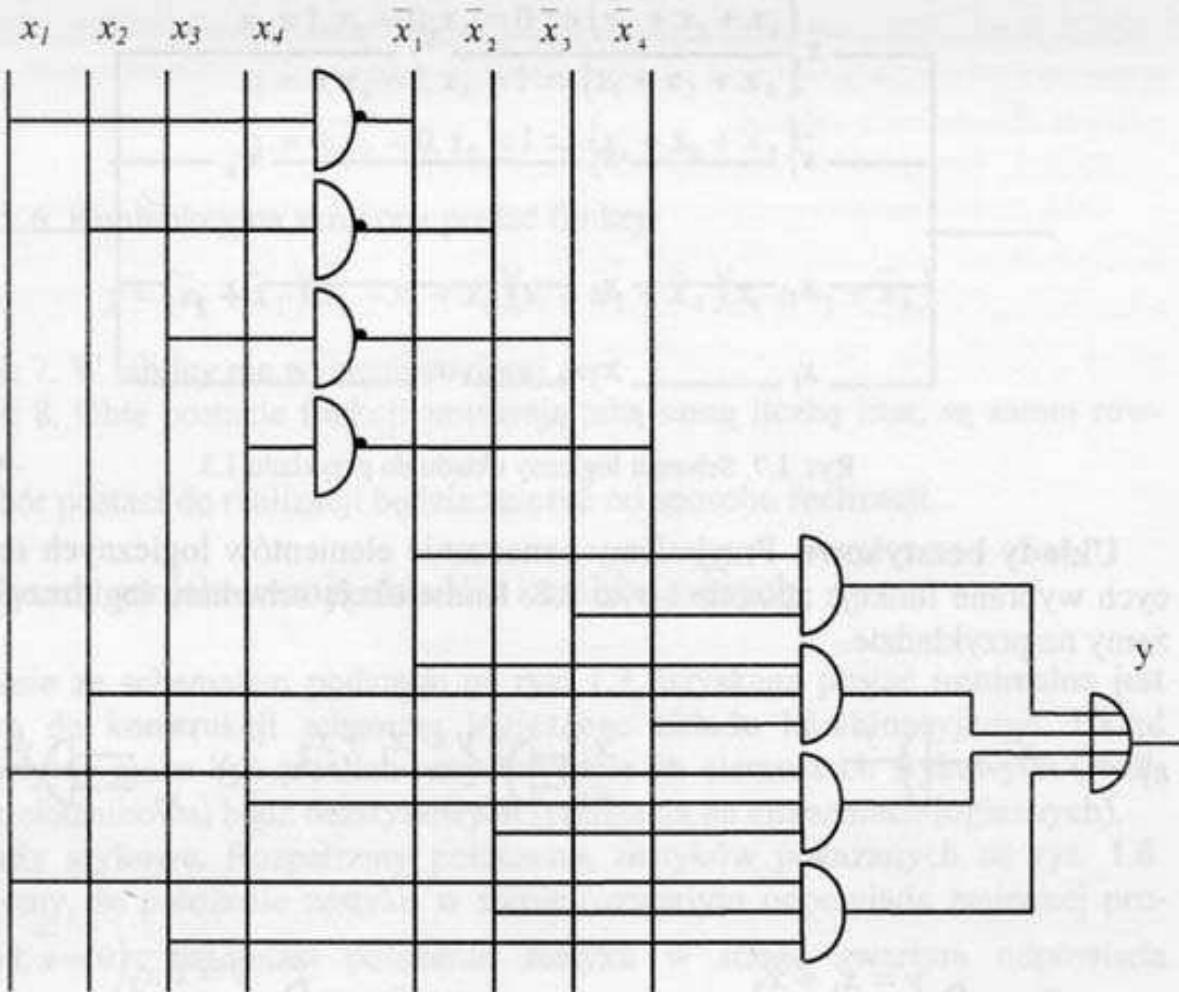


Rys. 1.8. Oznaczenie elementów logicznych: a) negacji, b) dysjunkcji, c) koniunkcji, d) funkcji NOR, e) funkcji NAND

Przykład 1.4. Narysować schemat logiczny realizacji na elementach logicznych dysjunkcyjnej skróconej postaci funkcji z przykładu 1.2.

Rozwiązanie:  $y = \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_4 + x_1 \bar{x}_2 x_4 + x_1 \bar{x}_2 x_3$ . Realizacja funkcji wymaga zastosowania bloków negacji, sumy i iloczynu, czyli bloków realizujących operacje podstawowe algebraii Boole'a. Za pomocą elementów realizujących negacje uzyskujemy negacje wszystkich zmiennych. Następnie realizujemy koniunkcje oraz w końcu sumę składników jedności (rys. 1.9).

Schematy logiczne uzyskane w przykładach 1.3 i 1.4 są podstawą do konstrukcji schematów montażowych przy znanych opisach technicznych elementów stykowych i logicznych.



Rys. 1.9. Realizacja funkcji z przykładu 1.2 na elementach logicznych

## 1.2. Teoria automatów

### 1.2.1. Definicja automatu

Uogólnieniem pojęcia układu kombinacyjnego jest układ logiczny z pamięcią, zwany **układem sekwencyjnym**. Układy takie są analizowane w dyskretnych chwilach czasowych. Kolejne punkty skali czasu oznaczamy przez liczby naturalne  $1, 2, 3, \dots, k, k+1, \dots$ . W układzie sekwencyjnym wartości wektora wyjściowego  $X_k$  zależą nie tylko od wartości wektora wejściowego  $X_k$ , lecz także od poprzednich wartości wektora wejściowego  $X_{k-1}, X_{k-2}, X_{k-3}, \dots$ . Układ pamięta historię wejść jako stan wewnętrzny. Stany wewnętrzne układu sekwencyjnego będziemy oznaczać literami  $s_1, s_2, \dots, s_n$ . Stany wewnętrzne są rozróżniane za pomocą dwustanowych elementów pamięciowych. Układ posiadający  $p$  elementów pamięciowych może mieć  $w = 2^p$  stanów wewnętrznych. Stan wewnętrzny układu będzie zatem opisy-

wany przez **wektor stanu wewnętrznego  $S$**  o  $p$  składowych binarnych. Zbiór wszystkich możliwych wektorów stanu oznaczymy przez  $\{S\}$ .

Wartość wektora wyjściowego w chwili  $k$  zależy od wartości wektora wejściowego w chwili  $k$  oraz od wartości wektora stanu w chwili  $k$ . Powyższe można zapisać w postaci funkcji wyjściowej  $\lambda$  przyporządkowującej każdej parze wektorów  $\langle X_k, S_k \rangle$  wektor  $Y_k$ . Podanie funkcji nie wystarcza jednak do pełnego scharakteryzowania pracy układu. Niezbędne jest określenie zmian, którym ulega  $S$  przy zmianie  $X$ . W tym celu dla wektorów  $X_k$  i  $S_k$  należy podać wektor stanu w chwili następnej  $S_{k+1}$ . Zmiany te opisuje funkcja przejściowa  $\delta$  przyporządkowująca każdej parze wektorów  $X_k, S_k$  wektor  $S_{k+1}$ . Dla scharakteryzowania układu sekwencyjnego należy zatem podać:

- zbiór wszystkich wektorów wejściowych  $\{X\}$ ,
- zbiór wszystkich wektorów wyjściowych  $\{Y\}$ ,
- zbiór wszystkich wektorów stanu  $\{S\}$ ,
- funkcję przejściową  $\delta$ ,
- funkcję wyjściową  $\lambda$ .

Powyższy układ nosi nazwę **automatu Mealy'ego**.

Przyjawszy odmienną definicję funkcji wyjściowej – funkcja  $\lambda$  przyporządkowuje każdemu wektorowi stanu  $S$  wektor wyjściowy  $Y$  – mamy do czynienia z tzw. **automatem Moore'a**.

Układy logiczne przedstawiane są często w postaci tablic przejść-wyjść lub grafów stanów.

Omówione w rozdziale 1.1 układy kombinacyjne są szczególnym przypadkiem układów sekwencyjnych, w których zbiór stanów jest jednoelementowy – układ jest zawsze w tym samym stanie wewnętrznym.

Podane wyżej dwa sposoby opisu automatu prowadzą do ich ścisłych definicji, które podano poniżej. Dla ścisłości przyjęto, że rozpatruje się automaty skończone, które opisują układy logiczne.

**D e f i n i c j a 1.7.** Automatem skończonym typu Mealy'ego nazywamy uporządkowaną piątkę:

$$M = \langle X, S, Y, \delta, \lambda \rangle,$$

w której:  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  – zbiór liter (sygnałów) wejściowych (alfabet wejściowy),

$S = \{s_1, \dots, s_n\}$  – zbiór stanówewnętrznych (alfabetewnętrzny),

$Y = \{y_1, \dots, y_n\}$  – zbiór liter (sygnałów) wyjściowych (alfabet wyjściowy),

przy czym zbiory te są skończone i niepuste;

$\delta: D_\delta \rightarrow S$  – funkcja przejść (przejściowa),  $D_\delta \subset X \times S$ ,

$\lambda: D_\lambda \rightarrow Y$  – funkcja wyjść (wyjściowa),  $D_\lambda \subset X \times S$ .

Funkcja przejść przyporządkowuje więc każdej parze złożonej z litery wejściowej i stanu obecnego oraz należącej do  $D_\delta$  stan następny. Funkcja wyjść przyporządkowuje każdej parze złożonej z litery wejściowej i stanu obecnego i należącej

do  $D_\lambda$  literę wyjściową. Powyższe sformułowania można zapisać w następujący sposób:

$$\forall \langle x^k, s^k \rangle \in D_\delta \quad \delta: \langle x^k, s^k \rangle \mapsto s^{k+1} = \delta(x^k, s^k),$$

$$\forall \langle x^k, s^k \rangle \in D_\lambda \quad \lambda: \langle x^k, s^k \rangle \mapsto y^k = \lambda(x^k, s^k).$$

Indeksy odpowiadają kolejnym chwilom czasu  $k, k+1$ . Gdy czas ten jest wyznaczany zewnętrznie za pomocą specjalnego generatora, mówimy o układzie synchronicznym. W przeciwnym przypadku, gdy skala czasu jest związana z danym układem (przez niego jest wytwarzana), mówimy o układzie asynchronicznym.

**Definicja 1.8.** Automatem (skończonym) Moore'a nazywamy uporządkowaną piątkę

$$M = \langle X, S, Y, \delta, \lambda \rangle,$$

w której:  $X = \{x_1, \dots, x_u\}$  – zbiór liter (sygnałów) wejściowych (alfabet wejściowy),

$S = \{s_1, \dots, s_w\}$  – zbiór stanów wewnętrznych (alfabet wewnętrzny),

$Y = \{y_1, \dots, y_v\}$  – zbiór liter (sygnałów) wyjściowych (alfabet wyjściowy),

przy czym zbiorów te są skończone i niepuste;

$\delta: D_\delta \rightarrow S$  – funkcja przejść (przejściowa),  $D_\delta \subset X \times S$ ,

$\lambda: D_\lambda \rightarrow Y$  – funkcja wyjść (wyjściowa),  $D_\lambda \subset X \times S$ .

$$\forall \langle x^k, s^k \rangle \in D_\delta \quad \delta: \langle x^k, s^k \rangle \mapsto s^{k+1} = \delta(x^k, s^k)$$

$$\forall s \in D_\lambda \quad \lambda: s^k \mapsto y^k = \lambda(s^k).$$

Jak wynika z porównania powyższych definicji, w automacie Moore'a litery wyjściowe są ściśle związane ze stanami automatu. Podane wyżej dwa sposoby opisu automatu są równoważne i dla każdego automatu typu Moore'a można podać jego odpowiednik typu Mealy'ego i odwrotnie.

Jeżeli w zależnościach opisujących zawieranie się zbiorów  $D$  w iloczynie kartezjańskim  $X \times S$  można postawić znak równości, to mówimy o automacie zupełnym. Funkcje  $\delta$  i  $\lambda$  są wówczas określone dla wszystkich par  $\langle x, s \rangle$ .

### 1.2.2. Sposoby reprezentacji automatu

Podstawowe sposoby opisu automatu to tablica przejść-wyjść oraz graf.

Tablica przejść-wyjść jest zbudowana na następującej zasadzie. Wiersze tablicy odpowiadają stanom wewnętrzny, a kolumny opisują litery wejściowe. W lewej części tablicy (tablica przejść) na przecięciu wiersza odpowiadającego stanowi  $s$  i kolumny odpowiadającej literze wejściowej  $x$  jest podana wartość funkcji  $\delta$  w punkcie  $\langle x, s \rangle$ , oznaczona  $\delta(x, s)$  i mająca znaczenie stanu następnego. W prawej części tablicy (tablica wyjść) na przecięciu wiersza  $s$  i kolumny  $x$  jest podawana

wartość funkcji  $\lambda$  w punkcie  $\langle x, s \rangle$ , oznaczona  $\lambda(x, s)$ , mająca sens litery wyjściowej. Powyższy opis odniesiemy do przykładowej definicji automatu Mealy'ego.

**P r z y k ł a d 1.5.** Automat Mealy'ego jest opisany następująco

$$M = \langle X, S, Y, \delta, \lambda \rangle.$$

Definicje poszczególnych elementów podano niżej:

$$X = \{x_1, x_2\}, \quad S = \{s_1, s_2, s_3\}, \quad Y = \{y_1, y_2\}$$

Iloczyn kartezjański

$$X \times S = \{x_1 s_1, x_1 s_2, x_1 s_3, x_2 s_1, x_2 s_2, x_2 s_3\}.$$

Zbiory:

$$D_\delta = \{x_1 s_1, x_1 s_2, x_2 s_2, x_2 s_3\}, \quad D_\lambda = \{x_1 s_1, x_1 s_2, x_1 s_3, x_2 s_3\},$$

$$X \times S - D_\delta = \{x_1 s_3, x_2 s_1\}, \quad X \times S - D_\lambda = \{x_2 s_1, x_2 s_2\}.$$

Definicje funkcji:

$$\begin{array}{ll} \delta: & \langle x_1 s_1 \rangle \mapsto s_2 = \delta(x_1 s_1) \\ & \langle x_1 s_3 \rangle \mapsto s_1 = \delta(x_1 s_3) \\ & \langle x_2 s_2 \rangle \mapsto s_3 = \delta(x_2 s_2) \\ & \langle x_2 s_3 \rangle \mapsto s_2 = \delta(x_2 s_3) \end{array}$$

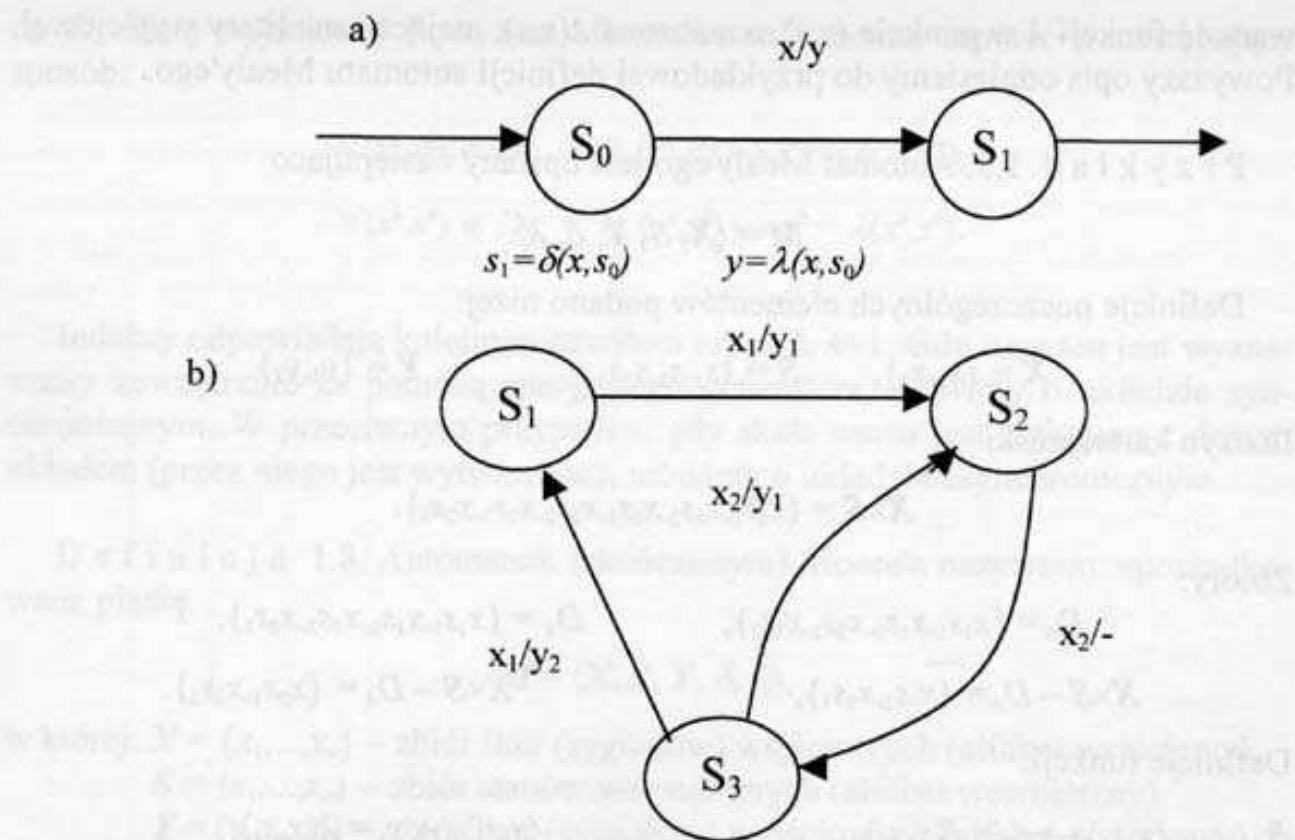
$$\begin{array}{ll} \lambda: & \langle x_1 s_1 \rangle \mapsto y_1 = \lambda(x_1 s_1) \\ & \langle x_1 s_2 \rangle \mapsto y_1 = \lambda(x_1 s_2) \\ & \langle x_1 s_3 \rangle \mapsto y_2 = \lambda(x_1 s_3) \\ & \langle x_2 s_3 \rangle \mapsto y_1 = \lambda(x_2 s_3) \end{array}$$

Zapis zgodny z przyjętą konwencją podano w tablicy 1.5.

T a b l i c a 1.5. Tablica przejść-wyjść dla automatu Mealy'ego z przykładu 1.5

S	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>
s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	—	y <sub>1</sub>	—
s <sub>2</sub>	—	s <sub>3</sub>	y <sub>1</sub>	—
s <sub>3</sub>	s <sub>1</sub>	s <sub>2</sub>	y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>

Graficznym odpowiednikiem tablicy przejść-wyjść jest graf stanów automatu. Na rysunku 1.10 pokazano zasadę konstruowania grafu (konwencję opisu) oraz graf skonstruowany dla rozpatrywanego przykładu. W podobny sposób można opisać automat zgodny z definicją Moore'a.



Rys. 1.10. Graf stanów automatu Mealy'ego:  
a) zasada opisu,  
b) graf stanów dla automatu z przykładu 1.5

### Przykład 1.6. Automat Moore'a

$$M = \langle X, S, Y, \delta, \lambda \rangle,$$

w którym:

$$X = \{x_1, x_2\}$$

$$S = \{s_1, s_2, s_3\}$$

$$Y = \{y_1, y_2, y_3\},$$

jest zadany za pomocą tablicy 1.6.

T a b l i c a 1.6. Tablica przejść-wyjścia dla automatu z przykładu 1.6

$S$	$x_1$	$x_2$	$Y$
$s_1$	$s_2$	$s_3$	$y_1$
$s_2$	$s_3$	$s_1$	$y_2$
$s_3$	$s_1$	$s_2$	$y_3$

Iloczyn kartezjański

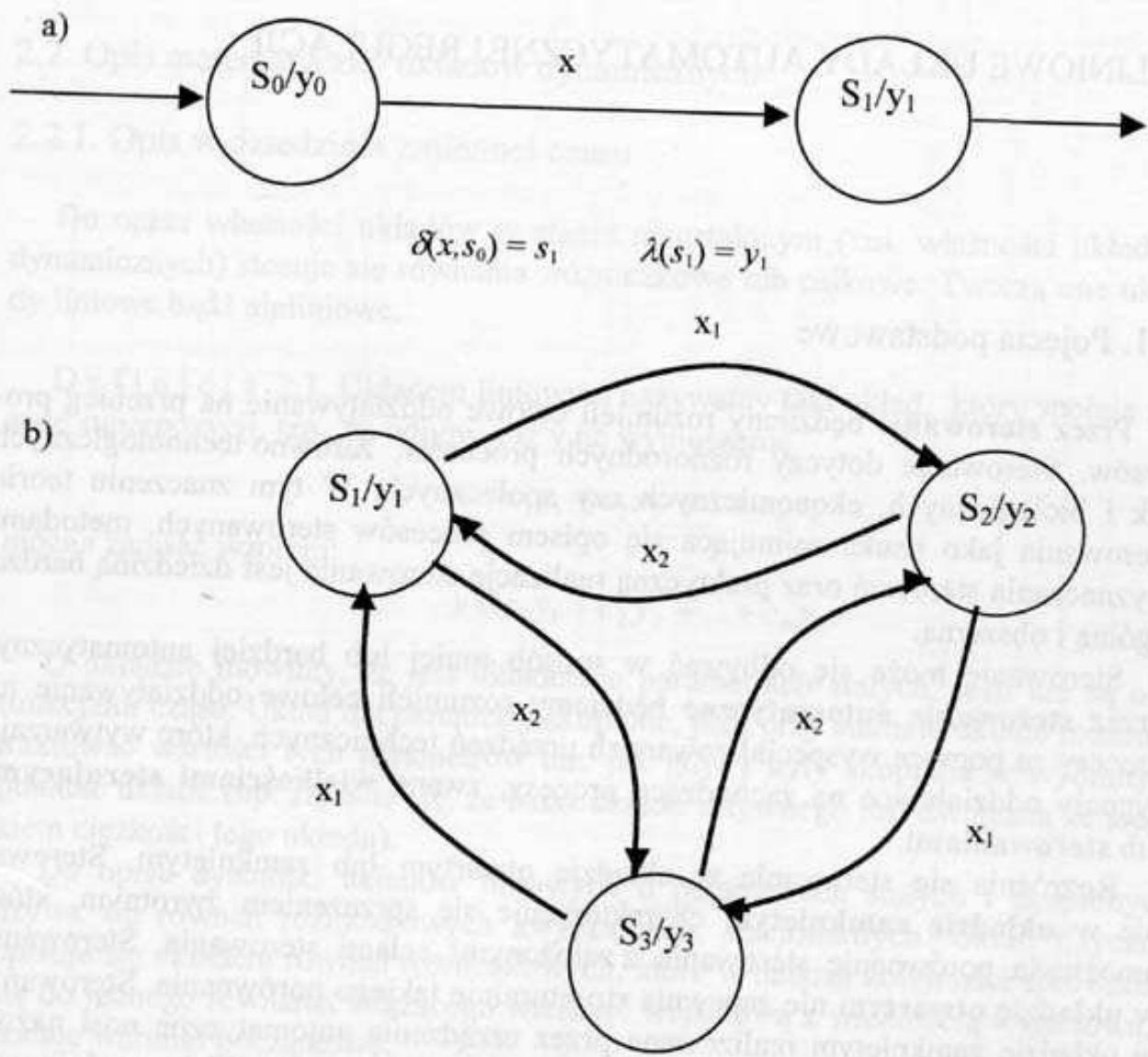
$$X \times S = \{x_1 s_1, x_1 s_2, x_1 s_3, x_2 s_1, x_2 s_2, x_2 s_3\}$$

Funkcje  $\delta$  i  $\lambda$  przyjmą wtedy postać:

$$s_2 = \delta(x_1 s_1), s_3 = \delta(x_1 s_2), s_1 = \delta(x_1 s_3), s_3 = \delta(x_2 s_1), s_1 = \delta(x_2 s_2), s_2 = \delta(x_2 s_3)$$

$$y_1 = \lambda(s_1), y_2 = \lambda(s_2), y_3 = \lambda(s_3).$$

Na rysunku 1.11 pokazano konwencję opisu oraz graf stanów automatu z przykładu 1.6.



Rys. 1.11. Graf stanów automatu Moore'a: a) zasada opisu, b) graf stanów automatu z przykładu 1.6

## Literatura

- [1] Chmiel K., Teoria układów logicznych, wyd.2, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1995
- [2] Majewski W., Układy logiczne, wyd. 5, WNT, Warszawa 1995
- [3]. Siwiński J., Układy przełączające w automatyce, WNT, Warszawa 1980
- [4] Waligórska S., Układy przełączające. Podstawy teoretyczne i metody syntezy, WNT, Warszawa 1982.

## 2. LINIOWE UKŁADY AUTOMATYCZNEJ REGULACJI

### 2.1. Pojęcia podstawowe

Przez **sterowanie** będziemy rozumieli celowe oddziaływanie na przebieg procesów. Sterowanie dotyczy różnorodnych procesów, zarówno technologicznych jak i biologicznych, ekonomicznych czy społecznych. W tym znaczeniu teoria sterowania jako nauka zajmująca się opisem procesów sterowanych, metodami wyznaczania sterowań oraz praktyczną realizację sterowania jest dziedziną bardzo ogólną i obszerną.

Sterowanie może się odbywać w sposób mniej lub bardziej automatyczny. Przez **sterowanie automatyczne** będziemy rozumieli celowe oddziaływanie na procesy za pomocą wyspecjalizowanych urządzeń technicznych, które wytwarzają sygnały oddziałujące na zachodzące procesy, zwane **wielkościami sterującymi** lub **sterowaniami**.

Rozróżnia się sterowanie w układzie otwartym lub zamkniętym. Sterowanie w **układzie zamkniętym** charakteryzuje się sprzężeniem zwotnym, które umożliwia porównanie sterowania z założonymi celami sterowania. Sterowanie w **układzie otwartym** nie zapewnia strukturalnie takiego porównania. Sterowanie w układzie zamkniętym realizowane przez urządzenia automatyczne nosi nazwę **regulacji automatycznej**. Stąd często mówi się o teorii regulacji jako części teorii sterowania traktującej o takich samych problemach jak ogólna teoria sterowania, jednak głównie w odniesieniu do procesów technologicznych.

W teorii sterowania posługujemy się często pojęciem **układu** lub **systemu**. Przez system fizyczny (układ fizyczny) rozumie się zwykle pewien zbiór (zespół) obiektów fizycznych (wyodrębnionych ze środowiska) powiązanych w pewną całość i służących do realizacji założonego celu.

Wielkości charakteryzujące oddziaływanie środowiska na układ nazywa się **wymuszeniami** lub **wielkościami wejściowymi** (wejście układu). Wymuszenia dzielą się na wielkości sterujące i wielkości zakłócające. Wielkości charakteryzujące oddziaływanie układu na środowisko nazywa się **odpowiedziami** lub **wielkościami wyjściowymi** (wyjście układu).

Ważnym pojęciem w teorii sterowania jest **stan układu**. Jest to najmniejszy liczebnie zbiór wielkości, którego znajomość w chwili  $t_0$  oraz znajomość wymuszeń w przedziale  $(t_0, t)$  pozwala wyznaczyć stan i odpowiedzi układu w chwili  $t$  ( $t > t_0$ ).

## 2.2. Opis matematyczny układów dynamicznych

### 2.2.1. Opis w dziedzinie zmiennej czasu

Do opisu własności układów w stanie nieustalonym (tzn. własności układów dynamicznych) stosuje się równania różniczkowe lub całkowe. Tworzą one układy liniowe bądź nieliniowe.

**D e f i n i c j a 2.1.** Układem liniowym nazywamy taki układ, który spełnia zasadę superpozycji, tzn., że odpowiedź y na wymuszenie

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

można zapisać wzorem:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n.$$

O układzie mówimy, że jest układem o parametrach stałych, jeśli nie są one funkcjami czasu. Układ ma parametry skupione, jeśli przy analizie układu możemy traktować wartości tych parametrów tak, jak gdyby były skupione w wybranym punkcie układu (np. zakłada się, że masa układu sztywnego jest związana ze środkiem ciężkości tego układu).

Do opisu dynamiki układów liniowych o parametrach stałych i skupionych używa się równań różniczkowych zwyczajnych, stacjonarnych. Układ fizyczny opisuje się układem równań różniczkowych, które w dalszej kolejności sprowadza się do jednego równania wiążącego wielkość wejściową z wielkością wyjściową, i dodaje warunki początkowe.

Dla różnych rodzajów układów (elektrycznych, mechanicznych, hydraulicznych czy pneumatycznych) równania mają podobną strukturę. Badaniem tych podobieństw zajmuje się teoria podobieństwa i analogii. O analogii mówimy wówczas, gdy mamy do czynienia z różnymi wielkościami fizycznymi, z różnymi rodzajowo zjawiskami, którymi rządzą prawa podobne pod względem formalnym. Na podstawie tych badań można skonstruować tablicę analogii elektryczno-mechanicznych (gdzie przez pojęcie mechaniki rozumie się zarówno mechanikę ciała stałego, jak i mechanikę płynów). Podstawowe analogie zestawiono w tablicy 2.1. Dla wszystkich rodzajów układów możemy wyróżnić pewne charakterystyczne zmienne:

- siłę wymuszającą,
- – współrzędną uogólnioną.

Tablica 2.1. Analoge elektryczno-mechaniczne

Wyszczególnienie	Układy elektryczne	Układy mechaniczne ciała stałego	Układy pneumatyczne	Układy hydrauliczne
$F$ - siła wymuszająca $y$ - współrzędna uogólniona $\dot{y}$ - pochodna współrzędnej	$U$ - napięcie $q$ - ładunek $i$ - prąd	$f$ - siła $x$ - przesunięcia $v$ - prędkość	$M$ - moment obrotowy $a$ - droga kątowa	$\Delta p$ - różnica ciśnień $V$ - objętość
Elementy tracące energię - prawo	$R$ - rezystancja	$B$ - współt. tarcia	$\omega$ - prędkość kątowa	$i_p$ - przepływ
	$U = Ri$	$f = BV$	$R_p$ - współtarcia	$R_h$ - opór hydrauliczny
- moc tracona	$P = R_i^2$	$P = Bv^2$	$M = R_p \omega$	$\Delta p = R_h i_h$
			$P = R_p \omega^2$	$P = R_h i_h^2$
Elementy magazynujące energię kinetyczną - prawo	$L$ - indukcyjność	$m$ - masa	$I$ - moment	$m_p$ - masa przepływu
- energia	$U = L \frac{di}{dt}$	$f = m \frac{dv}{dt}$	$M = I \frac{d\omega}{dt}$	$m_p$ - masa przepływu
	$E_k = Li^2/2$	$E_k = mv^2/2$	$E_k = I\omega^2/2$	
Elementy magazynujące potencjalną - prawo	$C$ - pojemność	$C_m (I/C_m - sztywność)$	$C_p$ - pojemność pneumatyczna	$C_h$ - pojemność hydrauliczna
- energia	$U = \frac{1}{C} \int idt$	$f = \frac{1}{C_m} \int v dt$	$M = \frac{1}{C_p} \int \omega dt$	
	$E_p = CU^2/2$	$E_p = C_m f^2/2$	$E_p = C_p M^2/2$	

Opiszemy dla przykładu dynamikę układu mechanicznego i analogicznego układu elektrycznego.

**P r z y k ł a d 2.1.** Napisać równanie dla układu podanego na rys. 2.1.

**R o z w i ą z a n i e.** Równanie równowagi sił dla naszego układu ma postać:

$$f = B \cdot v + \frac{1}{C_m} \int v dt.$$

Przekształcamy otrzymane równanie całkowe w równanie różniczkowe o postaci:

$$f = B \cdot \dot{x} + \frac{1}{C_m} \cdot x$$

i dodajemy warunek początkowy

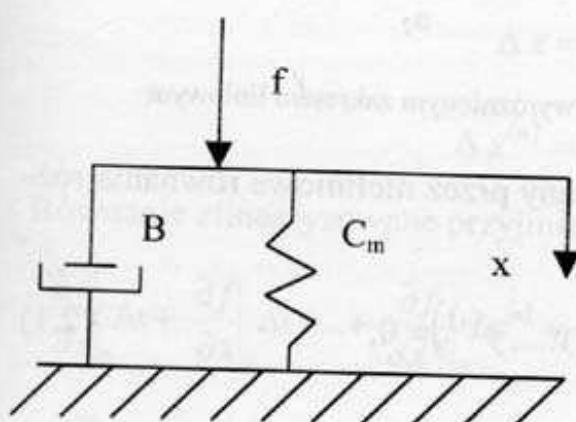
$$x(0) = x_0.$$

**P r z y k ł a d 2.2.** Skonstruować układ elektryczny opisywany analogicznym równaniem do równania uzyskanego w przykładzie 2.1.

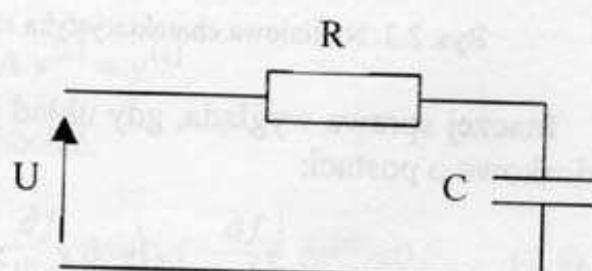
**R o z w i ą z a n i e.** Analogiczne równanie dla układu elektrycznego ma postać:

$$U = R \cdot i + \frac{1}{C} \int i dt,$$

a układ opisywany przez to równanie przedstawiono na rys. 2.2.



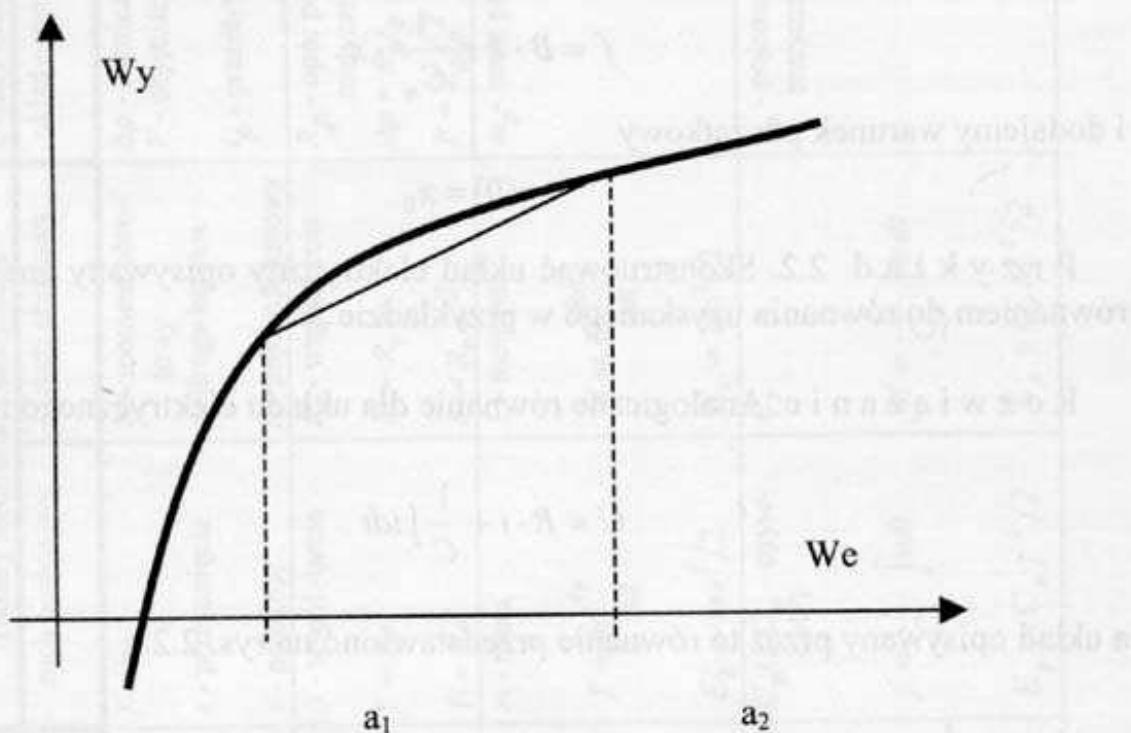
Rys. 2.1. Schemat układu mechanicznego dla przykładu 2.1



Rys. 2.2. Schemat układu elektrycznego, analogu układu z rys. 2.1 (przykład 2.1)

## 2.2.2. Linearyzacja równań nieliniowych

Wiele układów fizycznych ma charakterystyki nieliniowe wielkości wyjściowych w funkcji wielkości wejściowych. Często jednak można wyróżnić na tych charakterystykach odcinki, w zakresie których zachodzą zmiany bliskie zależnościom liniowym (rys. 2.3). Jeśli w badaniu układu ograniczymy sygnały wejściowe do tego zakresu (na rys. 2.3 jest to przedział  $(a_1, a_2)$ ), to możemy układ traktować jako liniowy i przesunąć oś rzędnych do punktu  $a_1$ . Sygnałem wejściowym będą wówczas przyrosty w stosunku do wartości  $a_1$ , zwanej punktem pracy układu. Postępowanie takie nosi nazwę linearyzacji statycznej.



Rys. 2.3. Nieliniowa charakterystyka statyczna z wyróżnionym zakresem liniowym

Inaczej sprawa wygląda, gdy układ jest opisany przez nieliniowe równania różniczkowe o postaci:

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (2.1)$$

gdzie:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, x^{(n)} = \frac{d^n x}{dt^n},$$

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt}, \ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}}.$$

Wówczas, jeśli istnieją pochodne funkcji  $f$  dostatecznie wysokiego rzędu względem wszystkich argumentów, możemy dokonać linearyzacji równania (2.1) przez rozwinięcie w szereg Taylora wielu zmiennych wokół punktu pracy  $(x_0, y_0)$ . Otrzymamy:

$$\begin{aligned} f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}, y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(n)}) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \Big|_{x_0} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial \ddot{x}} \Big|_{x_0} \ddot{x} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^{(n)}} \Big|_{x_0} x^{(n)} + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y_0} (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \Big|_{y_0} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} \Big|_{y_0} \ddot{y} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \Big|_{y_0} y^{(n)} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} \Big|_{x_0} \dot{x}^2 + \dots + R. \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie

$$N = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial \dot{x}^2} \Big|_{x_0} \dot{x}^2 + \dots + R$$

stanowi część nieliniową i resztę szeregu. Aby otrzymać równanie zlinearyzowane, musimy pominąć wyrażenie  $N$ . Charakterystykę statyczną układu otrzymamy dla składników z pochodnymi zerowymi, czyli równanie charakterystyki statycznej ma postać:

$$f(x_0, y_0) = 0. \quad (2.3)$$

Oznaczymy przyrosty:

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0,$$

wówczas

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= \dot{x} & \Delta \dot{y} &= \dot{y} \\ \Delta \ddot{x} &= \ddot{x} & \Delta \ddot{y} &= \ddot{y} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta x^{(n)} &= x^{(n)} & \Delta y^{(n)} &= y^{(n)}. \end{aligned}$$

Równanie zlinearyzowane przyjmie wtedy postać:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \Big|_{x_0} \Delta \dot{x} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^{(n)}} \Big|_{x_0} \Delta x^{(n)} + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y_0} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \Big|_{y_0} \Delta \dot{y} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} \Big|_{y_0} \Delta y^{(n)} = 0. \quad (2.4)$$

Przeprowadzony wyżej proces nosi nazwę linearyzacji dynamicznej. Przeanalizujemy interpretację graficzną takiej linearyzacji dla równania nieliniowego pierwszego rzędu o postaci:

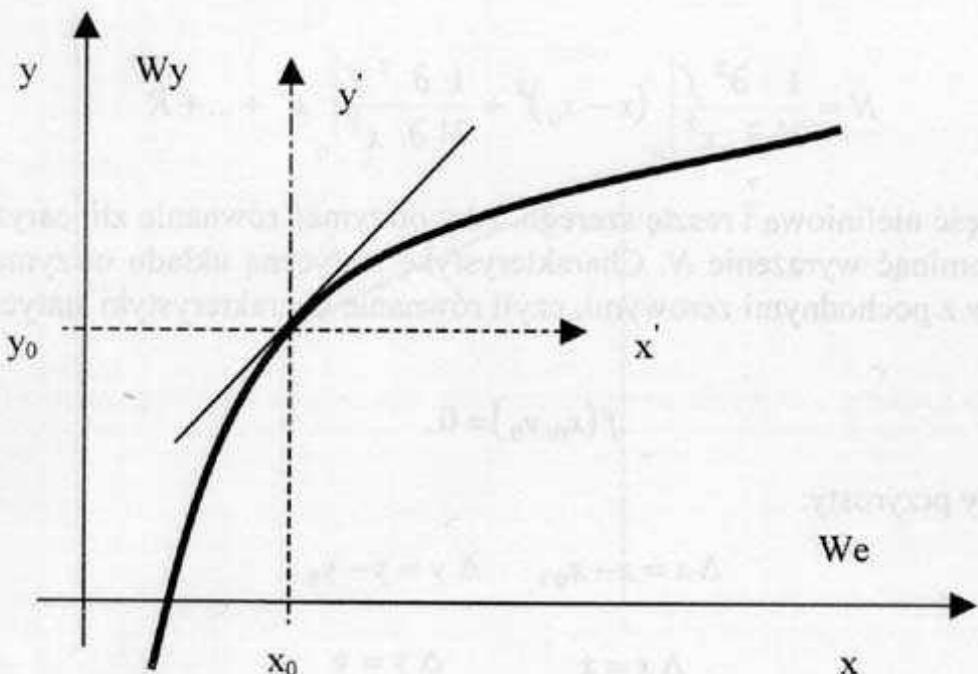
$$f(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = 0.$$

Zależność (2.4.) przyjmie wtedy postać:



$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_0 \Delta x + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right|_0 \Delta \dot{x} + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_0 \Delta y + \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{y}} \right|_0 \Delta \dot{y} = 0.$$

Dokonując takiej linearyzacji, zastępujemy charakterystykę statyczną układu linią prostą styczną do niej w punkcie pracy  $(x_0, y_0)$  i przechodzącą przez początek nowego układu współrzędnych (rys. 2.4). Metoda ta będzie słuszna tylko w przypadku rozpatrywania małych odchyleń  $\Delta x$  i  $\Delta y$  wokół punktu pracy układu. Przykłady wykorzystania podanych wyżej zależności podamy w dalszych rozdziałach, w których połączymy problemy linearyzacji z problematyką określania dynamiki wybranych obiektów.



Rys. 2.4. Linearyzacja charakterystyki na podstawie rozwinięcia w szereg Taylor'a

### 2.2.3. Opis w dziedzinie zmiennej operatorowej $s$

Będziemy analizować ciągły układ liniowy o parametrach stałych w czasie i skupionych. Układ spełniający powyższe warunki jest opisany liniowym równaniem różniczkowym zwyczajnym o stałych współczynnikach:

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}, \quad (2.5)$$

a także znane są warunki początkowe:

$$y^{(l)}(0) = 0, \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (n \geq m),$$

gdzie:  $y(t)$  – wielkość wyjściowa,  
 $x(t)$  – wielkość wejściowa,  
 $a_k, k = 0, 1, 2, \dots, n$  – parametry układu,  
 $b_i, i = 0, 1, 2, \dots, m$  – parametry układu,  
 $n$  – rząd wielkości wyjściowej,  
 $m$  – rząd wielkości wejściowej.

Warunek  $n \geq m$  jest często nazywany warunkiem realizowalności fizycznej układu. Przyjmujemy zerowe warunki początkowe, tzn.  $y^{(l)}(0) = 0$  dla  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , i stosujemy do równania (2.5) obustronne przekształcenie Laplace'a (patrz dodatek), wykorzystując twierdzenie o transformacie pochodnej:

$$\left( \sum_{k=0}^n a_k s^k \right) Y(s) = \left( \sum_{i=0}^m b_i s^i \right) X(s). \quad (2.6)$$

gdzie:  $Y(s)$  – transformata Laplace'a wielkości wyjściowej  $y(t)$ ,

$X(s)$  – transformata Laplace'a wielkości wejściowej  $x(t)$ .

Z równania (2.6) wyznaczamy stosunek  $Y(s)$  do  $X(s)$ :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{k=0}^n a_k s^k}. \quad (2.7)$$

**D e f i n i c j a 2.2.** Transmitancją operatorową nazywa się stosunek transformaty Laplace'a odpowiedzi do transformaty Laplace'a wymuszenia przy zerowych warunkach początkowych.

Transmitancja operatorowa jest pewną formą opisu dynamiki obiektów, najczęściej wykorzystywaną w analizie i syntezie układów sterowania. Transmitancja pozwala uzyskać niezbędne dane o obiekcie i jego zachowaniu się w przypadku różnych wymuszeń. W celu określenia tego zachowania wyznacza się dla danego obiektu jego charakterystyki czasowe.

**D e f i n i c j a 2.3.** Charakterystyką czasową będziemy nazywali przebieg czasowy wielkości wyjściowej wywołany danym wymuszeniem.

Najważniejszymi charakterystykami czasowymi są: charakterystyka impulsowa i charakterystyka skokowa.

**D e f i n i c j a 2.4.** Charakterystyką (odpowiedzią) impulsową  $g(t)$  układu nazywamy odpowiedź tego układu na wymuszenie w postaci impulsu Diraca  $\delta(t)$  przy zerowych warunkach początkowych.

Z definicji transmitancji operatorowej (definicja 2.2) mamy:  $Y(s) = G(s) \cdot X(s)$ . Przyjawszy wymuszenie  $x(t)$  w postaci impulsu Diraca,

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty \text{ dla } t=0 \\ 0 \text{ dla pozostałych } t, \end{cases} \quad (2.8)$$

otrzymujemy transformatę Laplace'a wymuszenia

$$X(s) = 1,$$

stąd

$$Y(s) = G(s) \cdot 1,$$

a odpowiedź czasową uzyskamy jako transformatę odwrotną Laplace'a z wyrażenia na  $Y(s)$ , czyli

$$y(t) = g(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)].$$

Możemy zatem sformułować następujący wniosek: odpowiedź impulsowa  $g(t)$  układu jest oryginałem jego transmitancji operatorowej  $G(s)$ .

**D e f i n i c j a 2.5.** Charakterystyką (odpowiedzią) skokową  $h(t)$  układu nazywamy odpowiedź tego układu na wymuszenie w postaci skoku jednostkowego  $\mathbf{1}(t)$  przy zerowych warunkach początkowych.

Wymuszenie w postaci skoku jednostkowego zapiszemy następująco:

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 \text{ dla } t \geq 0 \\ 0 \text{ dla } t \leq 0. \end{cases} \quad (2.9)$$

Zatem transformata Laplace'a funkcji traktowanej jako wymuszenie  $x(t) = \mathbf{1}(t)$  wynosi

$$X(s) = \frac{1}{s}.$$

Z definicji 2.2 uzyskamy

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}.$$

Charakterystyka skokowa  $h(t)$  przyjmie zatem postać:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

lub zapisując inaczej

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}.$$

Możemy sformułować następujący wniosek wynikający z powyższej zależności: pochodna odpowiedzi skokowej jest oryginałem transmitancji operatorowej.

Mając zarejestrowane odpowiedzi układu na wymuszenie typu impuls Diraca, skok jednostkowy lub inne znane wymuszenie, możemy określić transmitancję operatorową układu, czyli jego własności dynamiczne. Postępowanie takie nazywa się identyfikacją własności dynamicznych układu.

#### 2.2.4. Opis w dziedzinie zmiennej częstotliwościowej $\omega$

Dynamikę układu możemy również opisywać za pomocą transmitancji widmowej.

**Definicja 2.6.** Transmitancją widmową układu nazywamy stosunek wartości zespolonej składowej wymuszonej odpowiedzi  $Y_w$  tego układu wywołanej wymuszeniem sinusoidalnym do wartości zespolonej tego wymuszenia.

$$G(j\omega) = \frac{\hat{Y}_w}{\hat{X}}. \quad (2.10)$$

Sinusoidalny sygnał wejściowy możemy zapisać w postaci:

$$\hat{X} = A_X \cdot e^{j\omega t}.$$

Odpowiedź tego układu liniowego o parametrach stałych i skupionych zapiszemy jako

$$\hat{Y}_w = A_{Y_w} e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

Innymi słowy, przejście funkcji harmonicznej przez układ, które opisuje transmitancja widmowa, odbywa się bez zmiany jej charakteru, lecz przy zmianie amplitudy  $A_{Y_w}$  oraz przesunięcia fazowego  $\varphi$ . Transmitancję widmową możemy zapisać również w postaci:

$$G(j\omega) = \frac{A_{Y_w}(\omega) e^{j\varphi(\omega)}}{A_X(\omega)}, \quad (2.11)$$

uwzględniając w sposób wyraźny fakt, że amplituda i faza są zależne od pulsacji  $\omega$ .

Stosunek amplitudy składowej wymuszonej sygnału wyjściowego do amplitudy sygnału wejściowego określa moduł transmitancji widmowej:

$$|G(j\omega)| = \frac{A_{Y_w}(\omega)}{A_X(\omega)}. \quad (2.12)$$

Podobnie określmy argument transmitancji widmowej:

$$\varphi(\omega) = \arg [G(j\omega)] \quad (2.13)$$

Zależność (2.11) możemy również zapisać w postaci algebraicznej, wyróżniając część rzeczywistą i urojoną wyrażenia  $G(j\omega)$ :

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (2.14)$$

Na podstawie opisu układu w dziedzinie zmiennej  $\omega$  możemy konstruować różne charakterystyki układu w zależności od przyjętego opisu osi charakterystyk.

### 2.2.5. Podstawowe charakterystyki układów sterowania

Główną charakterystyką układu jest wykres transmitancji widmowej na płaszczyźnie Gaussa.

**D e f i n i c j a 2.7.** Charakterystyką amplitudowo-fazową układu nazywamy wykres transmitancji widmowej tego układu na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.

**U w a g a:** Na osi rzędnych odkładamy wartości części urojonej wyrażenia (2.14), natomiast na osi odciętych wartości części rzeczywistej dla różnych wartości pulsacji  $\omega$ .

**D e f i n i c j a 2.8.** Charakterystyką amplitudową układu nazywamy zależność modułu transmitancji widmowej  $G(j\omega)$  w funkcji pulsacji  $\omega$ .

**D e f i n i c j a 2.9.** Charakterystyką fazową układu nazywamy zależność argumentu transmitancji widmowej  $\varphi(j\omega)$  od pulsacji  $\omega$ .

Powysze charakterystyki częstotliwościowe można uzyskać praktycznie, podając na wejście badanego układu sygnał sinusoidalny o stałej amplitudzie i obserwując na wyjściu amplitudę i fazę sygnału wyjściowego w interesującym nas przedziale zmienności pulsacji  $\omega$ . Jest to następna metoda identyfikacji własności dynamicznych układu (por. rozdział 2.2.3). Do projektowania układów sterowania często przydatne okazują się inne charakterystyki, tzw. logarytmiczne.

**D e f i n i c j a 2.10.** Logarytmiczną charakterystyką amplitudową nazywamy zależność  $20 \log G(j\omega)$  w funkcji  $\log \omega$ .

**D e f i n i c j a 2.11.** Logarytmiczną charakterystykę fazową nazywamy zależność  $\varphi(\omega)$  w funkcji  $\log \omega$ .

**U w a g a:** W obu przypadkach (definicje 2.10 i 2.11) na osi odciętych odkłada się logarytm przy podstawie 10 z wartością  $\omega$ . Oznacza to, że na wykresie punkt 0 występuje dla  $\omega=1$  (ponieważ  $\log 1 = 0$ ), oraz że charakterystyka ma również swój przebieg dla wartości na osi odciętych mniejszych od 0. Odpowiadają one pulsacjom zawartym w przedziale  $(0,1)$ , a więc bardzo małym. Na osi rzędnych w przypadku charakterystyki opisanej w definicji 2.10 odkłada się wartości w decybelach. Wynika to z faktu, że jeden decybel odpowiada stosunkowi modułów sygnałów  $Y$  do  $X$

$$\frac{|Y|}{|X|} = \sqrt[20]{10},$$

czyli inaczej

$$\left( \frac{|Y|}{|X|} \right)^{20} = 10.$$

Logarytmujemy stronami ostatnią równość. Mamy wtedy:

$$20 \log \frac{|Y|}{|X|} = \log 10 = 1.$$

Jeżeli pulsacja zmieni się dwukrotnie, to mówimy, że zmieniła się o oktawę; jeśli zmieni się dziesięciokrotnie, to mówimy, że zmieniła się o dekadę. Oznaczamy przez  $n_1$  - liczbę oktaw zawartych w przedziale pulsacji  $(\omega_2, \omega_1)$ . Możemy powyższe założenie zapisać formalnie następująco:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 2^{n_1},$$

skąd

$$n_1 = \frac{\log \frac{\omega_2}{\omega_1}}{\log 2} = 3,34 \log \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

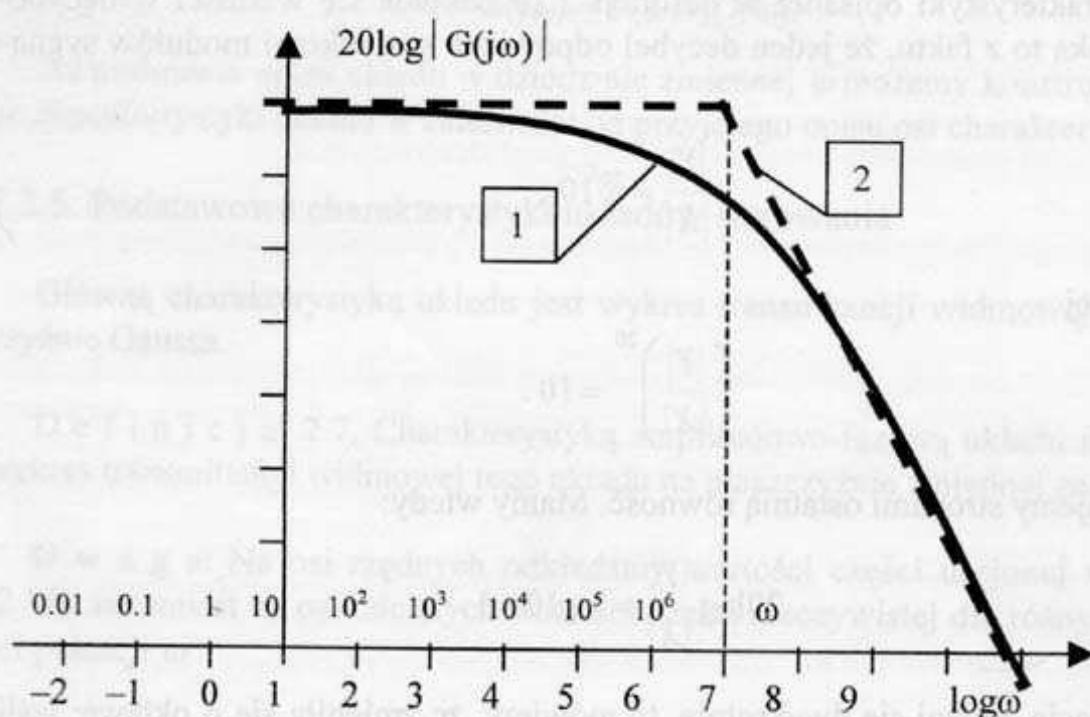
Z kolei oznaczmy liczbę dekad w tym samym przedziale przez  $n_2$ . Otrzymamy wtedy:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 10^{n_2}$$

oraz

$$n_2 = \log \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

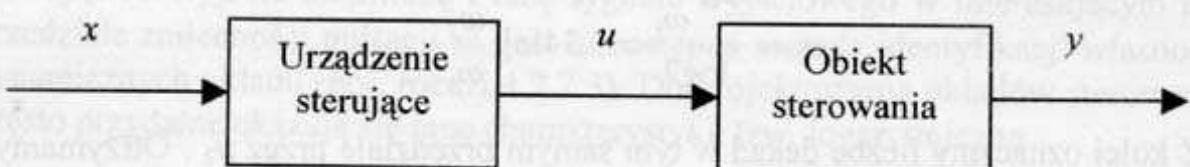
W wielu przypadkach w praktyce wystarcza korzystanie z przybliżonej charakterystyki logarytmicznej, zwanej asymptotyczną logarytmiczną charakterystyką amplitudową. Składa się ona z odcinków prostych zmieniających nachylenie w tzw. pulsacjach załamania. Niedokładności, jakie powstają przy takich charakterystykach, pokazano na rys. 2.5.



Rys. 2.5. Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu; 1 – logarytmiczna, 2 – asymptotyczna logarytmiczna

### 2.3. Układy sterowania i ich klasyfikacja

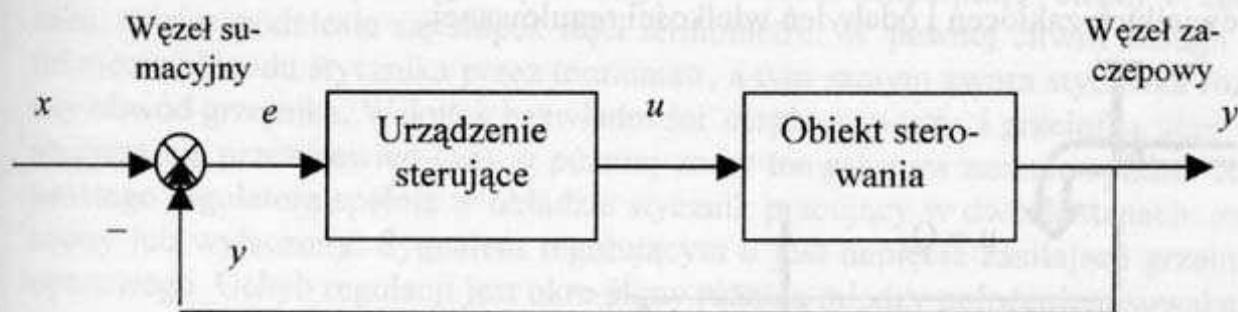
Jak wspomniano w rozdziale 2.1, różnią się dwie podstawowe struktury układów sterowania: otwartą i zamkniętą.



Rys. 2.6. Schemat blokowy otwartego układu sterowania

Sterowanie w strukturze otwartej (w układzie otwartym), pokazanej na rys. 2.6, charakteryzuje się przepływem sygnału od WEJŚCIA układu do WYJŚCIA; sygnał sterujący  $u$  jest określony przez urządzenie sterujące realizujące program sterowania.

Sterowanie w strukturze zamkniętej (w układzie zamkniętym) charakteryzuje się porównywaniem sygnału wyjściowego  $y$  z sygnałem zadanym  $x$  (rys. 2.7). Porównanie to jest realizowane przez ujemne sprzężenie zwrotne. Praca zamkniętego układu regulacji polega na reagowaniu na zmianę sygnału wyjściowego  $y$  (wywołaną np. zakłóceniem  $z$ ) przez wyznaczanie sygnału uchybu  $e$ . Sygnał ten oddziaływa na regulator, którego zadaniem jest wykształcenie sygnału sterującego obiektem regulacji w taki sposób, aby uzyskać ponownie zerową wartość uchybu. Używane oznaczenia są pokazane na schematach (rys. 2.6 i 2.7) i w dalszych rozważaniach będziemy korzystać z nich bez dodatkowego ich opisu.

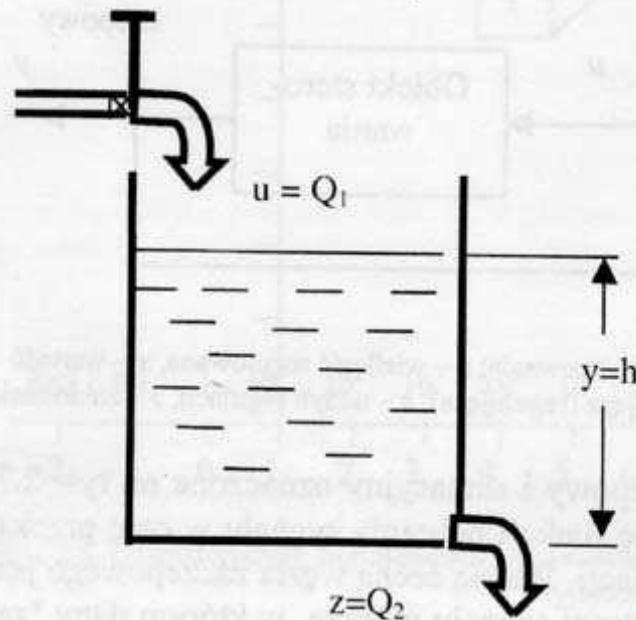


Rys. 2.7. Schemat blokowy zamkniętego układu sterowania;  $y$  – wielkość regułowanej,  $x$  – wartość zadana wielkości regułowanej,  $u$  – wielkość sterująca (regulująca),  $e$  – uchyb regulacji,  $z$  – zakłócenia

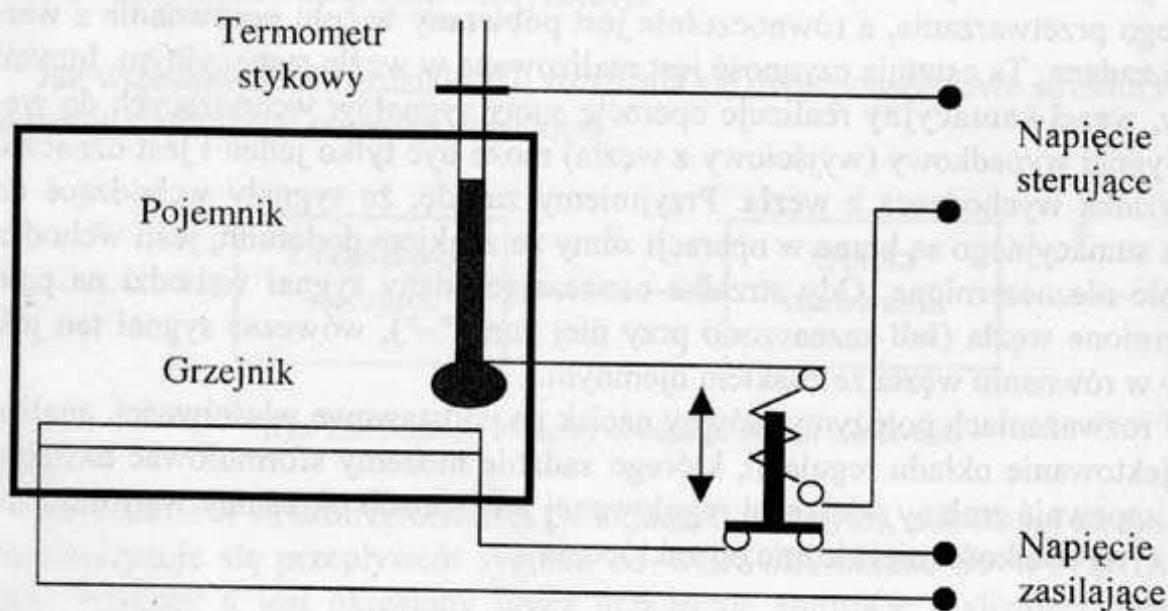
Wyjaśnienia wymagają węzły: zaczepowy i sumacyjny oznaczone na rys. 2.7. **Węzeł zaczepowy** pozwala na realizację funkcji pobrania sygnału w celu przekazania go do innego miejsca układu regulacji. Ważną cechą węzła zaczepowego jest to, że pobranie sygnału nie zmienia wartości sygnału w torze, w którym dany "zaczep" jest dokonany. Na przykład, na rys. 2.7 sygnał  $y$  może być przekazany do dalszego przetwarzania, a równocześnie jest pobierany w celu porównania z wartością zadaną. Ta ostatnia czynność jest realizowana w węźle sumacyjnym. Innymi słowy, **węzeł sumacyjny** realizuje operację sumy sygnałów wchodzących do węzła. Sygnał wypadkowy (wyjściowy z węzła) może być tylko jeden i jest oznaczony strzałką wychodzącą z węzła. Przyjmiemy zasadę, że sygnały wchodzące do węzła sumacyjnego sąbrane w operacji sumy ze znakiem dodatnim, jeśli wchodzą na pole niezaczernione. Gdy strzałka oznaczająca dany sygnał wchodzi na pole zaczernione węzła (lub zaznaczono przy niej znak " $-$ "), wówczas sygnał ten jest brany w równaniu węzła ze znakiem ujemnym.

W rozważaniach położymy główny nacisk na podstawowe właściwości, analizę i projektowanie układu regulacji, którego zadanie możemy sformułować następująco: zapewnić zmiany wielkości regułowanej  $y$  w sposób określony wartością zadaną  $x$  tej wielkości niezależnie od zakłócenia  $z$ .

Odniesmy powyższe określenia i uwagi do dwóch przykładów układów sterowania. Rozpatrzmy otwarty układ sterowania poziomem cieczy w zbiorniku z dolnym odpływem grawitacyjnym (rys. 2.8). W układzie tym przepływ  $Q_1$  cieczy do zbiornika jest zadawany za pomocą kąta obrotu zaworu umieszczonego na przewodzie doprowadzającym ciecz do zbiornika. Wielkością wyjściową (regulowaną) jest wysokość  $y$  słupa cieczy w zbiorniku. Wartość tej wysokości może być zakłócona przez zmiany wypływu  $Q_2$  ze zbiornika. Zadaniem tego układu jest utrzymanie stałej wysokości słupa cieczy, a raczej utrzymanie tej wysokości w pobliżu danej wartości. Łatwo zauważać, że takie sterowanie (wymagające zmiany natężwy kąta otwarcia zaworu przez obsługę) może być realizowane przy założeniu niewielkich zakłóceń i odchyleń wielkości regulowanej.



Rys. 2.8. Przykład otwartego układu sterowania poziomem cieczy w zbiorniku



Rys. 2.9. Przykład zamkniętego układu regulacji temperatury wewnętrz pojemnika z cieczą

Jako przykład zamkniętego układu sterowania (często w skrócie mówi się: układu regulacji) przeanalizujemy układ regulacji temperatury wewnątrz pojemnika zawierającego jakąś ciecz. Schemat tego układu podano na rys. 2.9.

Wartość zadaną temperatury określa się przez ustawienie styku na termometrze stykowym (obwód elektryczny zostaje zamknięty, gdy rtęć w termometrze dojdzie do styku). Ten termometr służy zatem do porównania sygnału sterowanego  $y$  (w naszym przypadku jest to temperatura cieczy wskazana przez termometr) z wartością zadaną. Jeśli temperatura cieczy w zbiorniku jest niższa od wartości zadanej, to w obwodzie styczniaka nie płynie prąd i zwora styczniaka załącza napięcie na grzejnik oporowy. Spowoduje to wzrost temperatury cieczy w zbiorniku, a więc podniesie się słupek rtęci termometru. W pewnej chwili nastąpi zamknięcie obwodu styczniaka przez termometr, a tym samym zwora styczniaka rozłączy obwód grzejnika. Wskutek bawiadłości cieplnej cieczy i grzejnika stan ten utrzyma się przez pewien czas, a później znów temperatura zacznie spadać. Rolę prostego regulatora spełnia w układzie styczniak pracujący w dwóch stanach: załączony lub wyłączony. Sygnałem regulującym  $u$  jest napięcie zasilające grzejnika oporowego. Uchyb regulacji jest określony różnicą między położeniem suwaka na termometrze stykowym a wysokością słupa rtęci.

Ze względu na teorię i praktykę sterowania interesująca jest klasyfikacja układów regulacji automatycznej. Klasyfikacji układów sterowania dokonuje się ze względu na następujące kryteria:

- 1) liniowość,
- 2) sposób przekazywania informacji w układzie,
- 3) liczbę wielkości regułowanych,
- 4) sposób wyrażenia zadania sterowania,
- 5) rodzaj aparatury sterującej.

Ad 1. Z uwagi na kryterium liniowości układy sterowania dzieli się na liniowe i nieliniowe.

**Układy liniowe** zawierają wyłącznie elementy liniowe, tzn. takie, których charakterystyki statyczne są liniami prostymi, zaś własności dynamiczne opisują liniowe równania różniczkowe, całkowe, różnicowe lub algebraiczne. Układy liniowe spełniają zasadę superpozycji (definicja 2.1). W praktyce większość elementów nie spełnia wymogów liniowości, lecz jeśli elementy pracują w wąskim zakresie zmian (wokół pewnego punktu pracy), to charakterystyki tych elementów można traktować jako prostoliniowe w otoczeniu punktu pracy.

**Układy nieliniowe** to takie, które zawierają co najmniej jeden element nieliniowy i w konsekwencji nie spełniają wymogów definicji 2.1. Do analizy układów nieliniowych stosuje się metody pozwalające uwzględnić różne rodzaje występujących nieliniowości. Dokładne metody analizy są bardzo złożone i dlatego najczęściej stosuje się metody przybliżone. Zagadnienie to zostało omówione szerzej w rozdziale 3. Często dokonuje się linearizacji charakterystyk w otoczeniu punktu

pracy w sposób opisany w rozdziale 2.2.2. Takie uproszczenie opisu układów nie zawsze jest jednak możliwe i może prowadzić do znaczących błędów.

Ad 2. Przekazywanie informacji (sygnałów) w układach sterowania jest możliwe w sposób ciągły lub dyskretny. W przypadku **ciągłych układów sterowania** wszystkie sygnały są opisane funkcjami ciągłyymi w czasie oraz funkcje te mogą przyjmować wszystkie wartości mieszczące się w przedziale ich zmienności. Natomiast **dyskretnie sterowane układy sterowania** mają przynajmniej jeden element działający w sposób dyskretny, tzn. że sygnały na wyjściu tego elementu mogą przyjmować tylko niektóre wybrane wartości (opisane np. funkcją schodkową) lub sygnały występują w określonych momentach czasu.

Ad 3. Jeżeli w układzie sterowania występuje tylko jedna wielkość regulowana, to mówimy o **układzie jednowymiarowym**; jeśli więcej, to mówimy o **układzie wielowymiarowym**. Niekiedy wielowymiarowy układ sterowania udaje się rozdzielić na kilka układów jednowymiarowych, szczególnie wówczas, gdy wzajemny wpływ poszczególnych wielkości regulowanych jest znikomy. Gdy wzajemnego wpływu wielkości regulowanych na siebie nie da się pominąć, dokonujemy analizy układu za pomocą metod sterowania wielowymiarowego, których stosowanie jest o wiele trudniejsze i z reguły mniej efektywne.

Ad 4. Zadanie sterowania może być wyrażone przez charakter sygnału zadanego  $x$  lub przez pewne wymagania co do struktury układu. Gdy zadanie sterowania jest określone przez charakter sygnału zadanego  $x$ , możemy wyróżnić trzy charakterystyczne przypadki.

1. Sygnał zadany  $x$  jest stały w czasie ( $x = \text{const}$ ). Wówczas mamy do czynienia z układem regulacji stałwartościowej, którego celem jest utrzymanie wielkości regulowanej  $y$  na stałym poziomie, określonym przez sygnał zadany  $x$ .

2. Sygnał zadany  $x$  jest znaną funkcją czasu ( $x = f(t)$ ). Mówimy wówczas o układzie regulacji programowej, którego zadaniem jest zmiana wartości wielkości sterowanej  $y(t)$  w sposób zgodny z przebiegiem funkcji wielkości zadanej  $x(t)$ .

3. Sygnał zadany  $x$  jest przypadkową funkcją czasu. Sytuacja ta zachodzi wówczas, gdy wartość zadanego  $x$  jest uzależniona od zajścia pewnych zdarzeń rejestrowanych w układzie sterowania oraz od zmian wartości najczęściej wielu wielkości opisujących stan obiektu regulacji. Zadanie układu regulacji wiąże się zatem z:

- identyfikacją stanu obiektu i układu regulacji,
- wypracowaniem sygnału zadanego  $x$  na podstawie wyników identyfikacji.

Mówimy wówczas o układzie regulacji nadążnej lub o układzie śledzącym. Przykładem układu regulacji nadążnej jest tzw. automatyczny pilot. Układ ten, wykorzystywany w samolotach, pozwala na skierowanie samolotu do określonego punktu nawigacyjnego z uwzględnieniem aktualnych parametrów, takich jak: kierunek, prędkość i siła wiatru, prędkość samolotu, pozycja względem ziemi, nośność itp.

Gdy zadanie sterowania jest określone za pomocą pewnych wymagań strukturalnych odnośnie do układu sterowania, możemy wyróżnić układy sterowania:

- ekstremalnego,
- optymalnego,
- adaptacyjnego.

Dla układu sterowania można podać wymagania pracy na ekstremum pewnej funkcji jakości sterowania, jeśli ekstremum to mieści się w obszarze zmienności parametrów. W ogólnym przypadku mówimy o optimum, które uwzględnia pewne ograniczenia i może pokrywać się z ekstremum, lecz może być od niego różne. Innymi słowy, różnica między układem sterowania ekstremalnego a układem sterowania optymalnego jest określona przez różnicę pojęć ekstremum – optimum.

Układ sterowania adaptacyjnego należy do układów o niepełnej informacji o obiekcie sterowania. Oznacza to, że urządzenie sterujące określa stan obiektu sterowania i ma możliwość samoczynnego dopasowania swych charakterystyk i parametrów do zmieniających się własności obiektów i wielkości zakłócających.

Ad 5. W zależności od rodzaju aparatury sterującej mówimy o układach:

- mechanicznych,
- elektrycznych,
- hydraulicznych,
- pneumatycznych,
- mieszanych (elektromechanicznych, elektropneumatycznych, elektrohydraulicznych).

Zauważmy na koniec, że coraz częściej w układzie regulacji wykorzystuje się komputery wyspecjalizowane do sterowania, tzw. sterowniki programowalne, lub urządzenia o architekturze komputera z przeznaczeniem do sterowania, zwane mikrosterownikami. Urządzenia te mogą pracować w różnych układach sterowania, lecz ze swojej natury są to układy dyskretne. Dynamiczny rozwój mikroelektroniki i informatyki powoduje, iż urządzenia te coraz skuteczniej wypierają tradycyjne układy automatyki. Uniwersalność konstrukcji sterowników programowalnych i mikrosterowników powoduje, że główny ciężar projektowania przesuwa się na warstwę oprogramowania tych urządzeń. Pozwala to na prostą i szybką zmianę funkcji oprogramowania bez konieczności wymiany urządzeń sterujących. Sterowniki są powszechnie stosowane we wszystkich dziedzinach życia, począwszy od sprzętu gospodarstwa domowego, poprzez skomplikowaną aparaturę do badań naukowych, aż po najbardziej złożone systemy sterowania statków kosmicznych. Dzięki rozwojowi różnorodnych systemów komunikacji jest możliwe również sterowanie obiektami rozproszonymi, jak również położonymi w znacznej odległości od miejsca, skąd jest wysyłany sygnał sterujący. Synteza (projektowanie) takich układów sterowania wymaga ścisłej współpracy technologów sterowanego procesu, automatyków i informatyków.

## 2.4. Podstawowe człony układów sterowania

Opiszemy podstawowe człony w układach sterowania, ich charakterystyki oraz przykłady obiektów fizycznych reprezentatywnych dla poszczególnych członów. Kolejne człony omówimy według następującego schematu: transmitancja, oznaczenie na schematach, charakterystyka skokowa, charakterystyka amplitudowo-fazowa, inne wybrane charakterystyki, wnioski i uwagi.

### 2.4.1. Człon bezinercyjny (proporcjonalny, wzmacniający)

**D e f i n i c j a 2.12.** Członem bezinercyjnym (proporcjonalnym lub wzmacniającym) nazywamy układ, którego transmitancja ma postać:

$$G(s) = k, \quad (2.15)$$

gdzie  $k$  jest liczbą rzeczywistą zwaną współczynnikiem wzmacnienia. Sposób oznaczenia członu bezinercyjnego na schematach podano na rys. 2.10a.

**Charakterystyka skokowa.** Charakterystykę skokową członu uzyskuje się na wyjściu, podając na wejście członu skok jednostkowy  $1(t)$  (por. definicja 2.5). Ze wzoru na transmitancję operatorową otrzymamy:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s).$$

Zatem charakterystyka skokowa jest oryginałem funkcji  $Y(s)$  przy założeniu, że  $X(s) = 1/s$  (ponieważ jest to transformata funkcji  $1(t)$ ). Oznaczmy, zgodnie z definicją 2.5, charakterystykę skokową przez

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[k \frac{1}{s}\right] = k \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = k \cdot 1(t).$$

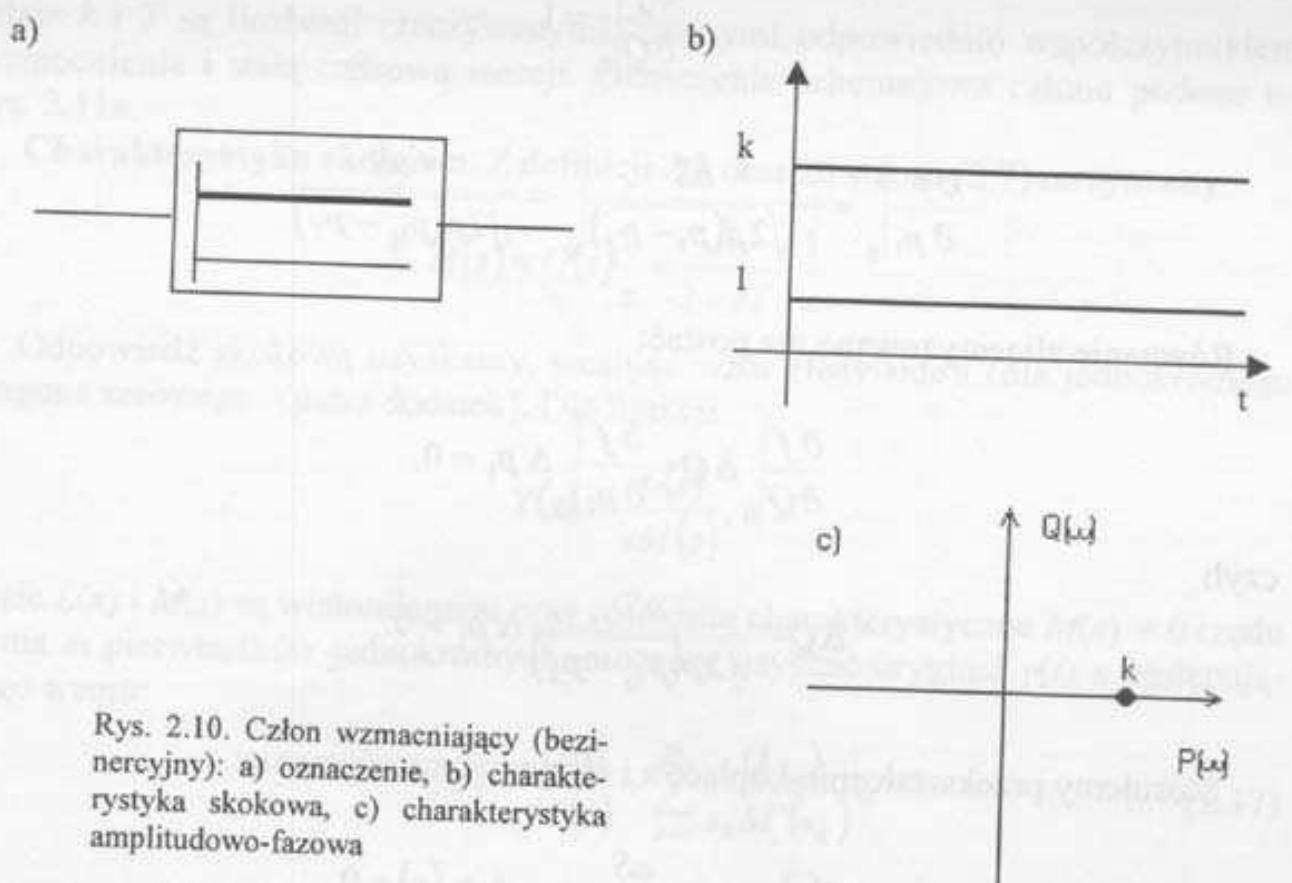
Wykres odpowiedzi skokowej umieszczono na rys. 2.10b.

**Charakterystyka amplitudowo-fazowa.** Zgodnie z definicją 2.7 jest to wykres transmitancji widmowej na płaszczyźnie zmiennej zespolonej Gaussa. Dla naszego członu

$$G(j\omega) = G(s)_{s=j\omega} = k,$$

czyli część rzeczywista  $P(\omega) = k$ , a część urojona  $Q(\omega) = 0$ . Wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej bezinercyjnego członu jest punktem na osi rzeczywistej (rys. 2.10c), którego położenie nie zależy od pulsacji  $\omega$ . Zwróćmy uwagę, że przesunięcie fazowe  $\varphi(\omega)$  również nie zależy od pulsacji  $\omega$  i ma wartość równą zero dla  $k > 0$  lub  $\pi$  dla  $k < 0$ .

W praktyce spotykamy często obiekty fizyczne opisywane wzorem (2.15). Należą do nich m.in.: dźwignia jednostronna i dwustronna, wzmacniacze różnych typów, zawory.



Rys. 2.10. Człon wzmacniający (bezineracyjny): a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa, c) charakterystyka amplitudowo-fazowa

**Przykład 2.3.** Wyznaczyć transmitancję zaworu hydraulicznego, przyjmując za sygnał wejściowy ciśnienie  $p_1$  przed zaworem, a za sygnał wyjściowy przepływ  $Q$  przez zawór.

**Rozwiązanie.** Równanie określające przepływ cieczy o gęstości  $\rho$  przez zawór o przekroju poprzecznym  $S$  można opisać zależnością:

$$Q = a \cdot S \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 - p_2)},$$

gdzie  $a$  jest współczynnikiem przepływu zależnym od gładkości ścian i kształtu przekroju.

Powyższa zależność wiąże ze sobą interesujące nas wielkości  $Q$  oraz  $p_1$  w sposób nieliniowy. Dokonujemy zatem linearizacji funkcji nieliniowej.

$$f(Q, p_1) = Q - aS \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_1 - p_2)} = 0.$$

Obliczamy pochodne cząstkowe w punkcie stacjonarnym  $Q_0, p_1$ .

$$\left. \frac{\partial f}{\partial Q} \right|_0 = 1,$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial p_1} \right|_0 = -\frac{aS}{\sqrt{2\rho(p_1 - p_2)}} \Big|_0 = \frac{-aS}{\sqrt{2\rho(p_{10} - p_2)}}.$$

Równanie zlinearyzowane ma postać:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial Q} \right|_0 \Delta Q + \left. \frac{\partial f}{\partial p_1} \right|_0 \Delta p_1 = 0,$$

czyli

$$\Delta Q - \frac{aS}{\sqrt{2\rho(p_{10} - p_2)}} \Delta p_1 = 0.$$

Stosujemy przekształcenie Laplace'a i otrzymujemy równanie:

$$\Delta Q(s) - \frac{aS}{\sqrt{2\rho(p_{10} - p_2)}} \Delta p_1(s) = 0.$$

Transmitancja zaworu ma zatem postać:

$$G(s) = \frac{\Delta Q(s)}{\Delta p_1(s)} = \frac{aS}{\sqrt{2\rho(p_{10} - p_2)}} = k_a,$$

czyli jest to transmitancja członu proporcjonalnego o współczynniku wzmocnienia  $k_a$  zależnym od parametrów cieczy ( $\rho$  – gęstość), zaworu ( $a$ ,  $S$ ) oraz ciśnienia za zaworem. Zależność ta jest słuszna w otoczeniu wybranego punktu pracy  $p_0$ .

#### 2.4.2. Człon inercyjny pierwszego rzędu

**D e f i n i c j a 2.13.** Członem inercyjnym pierwszego rzędu (z inercją pierwszego rzędu) nazywamy układ, którego transmitancja ma postać:

$$G(s) = \frac{k}{1+sT}, \quad (2.16)$$

gdzie  $k$  i  $T$  są liczbami rzeczywistymi, zwanyimi odpowiednio współczynnikiem wzmocnienia i stałą czasową inercji. Oznaczenie schematowe członu podano na rys. 2.11a.

**Charakterystyka skokowa.** Z definicji 2.5 oraz ze wzoru (2.7) otrzymamy:

$$H(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{k}{1+sT} \cdot \frac{1}{s}.$$

Odpowiedź skokową uzyskamy, stosując wzór Heaviside'a (dla jednokrotnego bieguna zerowego – patrz dodatek). Dla funkcji

$$Y(s) = \frac{L(s)}{sM(s)},$$

gdzie  $L(s)$  i  $M(s)$  są wielomianami oraz równanie charakterystyczne  $M(s) = 0$  rzędu  $m$  ma  $m$  pierwiastków jednokrotnych, możemy uzyskać oryginał  $y(t)$  z następującego wzoru:

$$y(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + \sum_{k=1}^m \frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)} e^{s_k t}. \quad (2.17)$$

W naszym przypadku  $L(s) = k$ ,  $L(0) = k$ ,  $M(s) = 1+sT$ ,  $M(0) = 1$  oraz  $M'(s) = T$ . Jedyny biegun niezerowy transmitancji występuje dla

$$s_1 = -\frac{1}{T}.$$

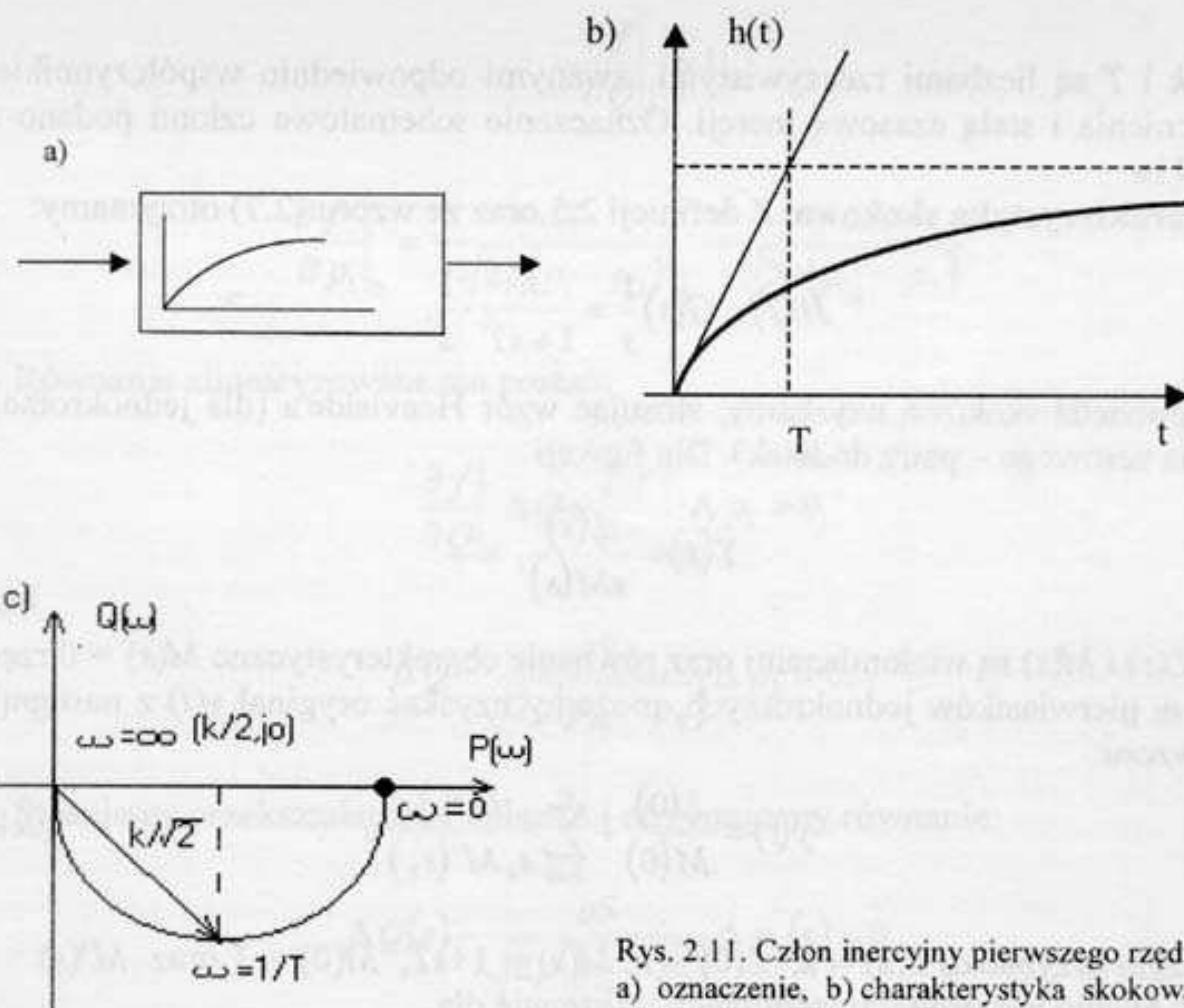
Wzór (2.17) przyjmuje zatem postać:

$$y(t) = \frac{k}{1} + \frac{L(s_1)}{s_1 M'(s_1)} e^{s_1 t} = k + \frac{k}{-1 \cdot T} e^{-\frac{t}{T}} = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

Wykres charakterystyki skokowej zamieszczono na rys. 2.11b. Stałą inercji  $T$  można wyznaczyć z charakterystyki skokowej przez poprowadzenie prostej stycznej w początku układu. Punkt przecięcia z asymptotą poziomą przebiegu wyznacza na osi czasu stałą  $T$ .

**Charakterystyka amplitudowo-fazowa.** Uzyskamy ją z transmitancji widmowej, która ma postać:

$$G(j\omega) = G(s)_{s=j\omega} = \frac{k}{1 + j\omega T}.$$



Rys. 2.11. Człon inercyjny pierwszego rzędu:  
a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa,  
c) charakterystyka amplitudowo-fazowa

Zgodnie z zasadami działań na liczbach zespolonych przekształcimy powyższą zależność do postaci:

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} \cdot \frac{1 - j\omega T}{1 - j\omega T} = \frac{k - j\omega Tk}{1 + (\omega T)^2} = \frac{k}{1 + (\omega T)^2} - j \frac{\omega Tk}{1 + (\omega T)^2} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

gdzie:

$$P(\omega) = \frac{k}{1 + (\omega T)^2}, \quad Q(\omega) = \frac{-\omega Tk}{1 + (\omega T)^2}. \quad (a)$$

Pokażemy, że wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej członu inercyjnego ma postać półokręgu. W tym celu rozpatrzmy układ równań (a).

Pulsacja  $\omega$  przyjmuje wartości nieujemne. Podobnie stała czasowa  $T$  może przyjmować wyłącznie wartości dodatnie (dla  $T = 0$  uzyskujemy człon proporcjonalny). Z powyższego wynika, że dla dodatnich wartości współczynnika wzmocnienia  $k$  wykres leży w IV ćwiartce płaszczyzny zmiennej zespolonej. Podniemy obie strony równań do kwadratu i dodajmy stronami. Uzyskamy wówczas

$$P^2(\omega) + Q^2(\omega) = \frac{k^2}{[1 + (\omega T)^2]^2} + \frac{\omega^2 T^2 k^2}{[1 + (\omega T)^2]^2}.$$

Ze wzoru na  $P(\omega)$  otrzymamy:

$$(\omega T)^2 = \frac{k}{P(\omega)} = 1.$$

Po wstawieniu powyższego do równania otrzymamy:

$$P^2(\omega) + Q^2(\omega) = \frac{k^2}{\left[1 + \frac{k}{P(\omega)} - 1\right]^2} + \frac{\left[\frac{k}{P(\omega)} - 1\right]k^2}{\left[1 + \frac{k}{P(\omega)} - 1\right]^2}.$$

Przekształcamy kolejno nasze równanie:

$$P^2(\omega) + Q^2(\omega) = P^2(\omega) + \frac{P^2(\omega)}{k^2} \left[ \frac{k}{P(\omega)} - 1 \right] k^2,$$

$$P^2(\omega) + Q^2(\omega) = P^2(\omega) + kP(\omega) - P^2(\omega),$$

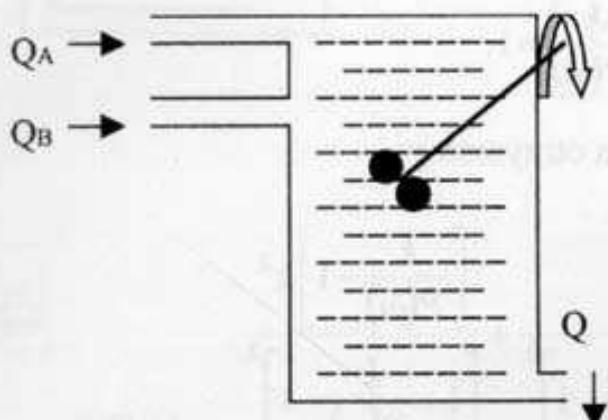
$$Q^2(\omega) - kP(\omega) + P^2(\omega) = 0,$$

$$Q^2(\omega) + P^2(\omega) - kP(\omega) + \frac{k}{4} - \frac{k}{4} = 0,$$

$$Q^2(\omega) + \left[ P(\omega) - \frac{k}{2} \right]^2 = \frac{k^2}{4}.$$

Powyższe równanie jest równaniem okręgu, którego środek leży w punkcie  $(k/2, j0)$  na osi  $P(\omega)$ , a promień okręgu ma wartość  $k/2$ . Doświadczalne uzyskanie charakterystyki wymaga badania wartości  $P(\omega)$  i  $Q(\omega)$  dla różnych wartości pulsacji  $\omega$  w przedziale  $(0, \infty)$ . Na rysunku 2.11c podano wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej i zaznaczono wybrane charakterystyczne punkty. Na uwagę zasługuje fakt, że dla różnych stałych inercji wykres pozostaje taki sam, a zmienia się jedynie rozkład pulsacji na półokręgu.

Przykład 2.4. Wyznaczyć równania dynamiki oraz transmitancję procesu mieszania dwóch składników  $A$  i  $B$  (rys. 2.12). Przyjąć, że wejściem układu jest przepływ składnika  $A$ , a wyjściem – stężenie  $C_A$  składnika  $A$ , rozumiane jako stosunek objętości  $W_A$  składnika  $A$  do objętości całkowitej  $W$ .



Rys. 2.12. Proces mieszania składników  $A$  i  $B$

Rozwiązańe. Równanie bilansu masowego mieszalnika ma postać:

$$\frac{dW_A}{dt} = Q_A - C_A \cdot Q$$

lub inaczej

$$\frac{dW_A}{dt} = Q_A - \frac{W_A}{W} Q.$$

Stosując przekształcenia Laplace'a, otrzymamy:

$$sW_A(s) = Q_A(s) - W_A(s) \frac{Q}{W},$$

$$W_A(s) \left[ \frac{Q}{W} + s \right] = Q_A(s),$$

$$\frac{W_A(s)}{W} [Q + Ws] = Q_A(s),$$

$$G(s) = \frac{C_A(s)}{Q_A(s)} = \frac{1}{Q + Ws} = \frac{\frac{1}{Q}}{1 + \frac{W}{Q}s}.$$

Po oznaczeniu  $k = 1/Q$  oraz  $T = W/Q$  otrzymamy transmitancję procesu jako członu inercyjnego pierwszego rzędu.

### 2.4.3. Człon inercyjny drugiego rzędu

**D e f i n i c j a 2.14.** Członem inercyjnym drugiego rzędu (z inercją drugiego rzędu) nazywamy układ, którego transmitancja ma postać:

$$G(s) = \frac{k}{(1+sT_1)(1+sT_2)}, \quad (2.18)$$

gdzie:  $k$  – liczba rzeczywista zwana współczynnikiem wzmocnienia,

$T_1, T_2$  – liczby rzeczywiste zwane stałymi czasowymi.

Oznaczenie schematowe członu podano na rys. 2.13a.

**Charakterystyka skokowa.** Ze wzoru (2.7) i zgodnie z definicją otrzymamy:

$$H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{(1+sT_1)(1+sT_2)s}.$$

Bieguny mianownika powyższego wyrażenia są następujące:

$$s_0 = 0, s_1 = -1/T_1, s_2 = -1/T_2.$$

Są to bieguny jednokrotne, z tym że biegun  $s_0$  jest równy zeru. Odpowiedź  $h(t)$  możemy zatem wyznaczyć na podstawie wzoru (2.17) w następujący sposób (rozdział 2.4.2):

$$L(s) = k,$$

$$M(s) = (1+sT_1)(1+sT_2),$$

$$M'(s) = T_1(1+sT_2) + (1+sT_1)T_2,$$

$$h(t) = \frac{k}{1} + \sum_{k=1}^n \frac{L(s_k)}{s_k M'(s_k)} e^{s_k t} = k - \frac{k}{\frac{1}{T_1}(T_1 - T_2)} e^{-t/T_1} - \frac{k}{\frac{1}{T_2}(T_2 - T_1)} e^{-t/T_2},$$

$$h(t) = k \left( 1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-t/T_2} \right) = k \left[ 1 - \frac{1}{T_1 - T_2} (T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2}) \right].$$

Jak wynika z powyższej zależności, charakterystyka skokowa powstaje przez złożenie trzech zależności funkcyjnych czasu:

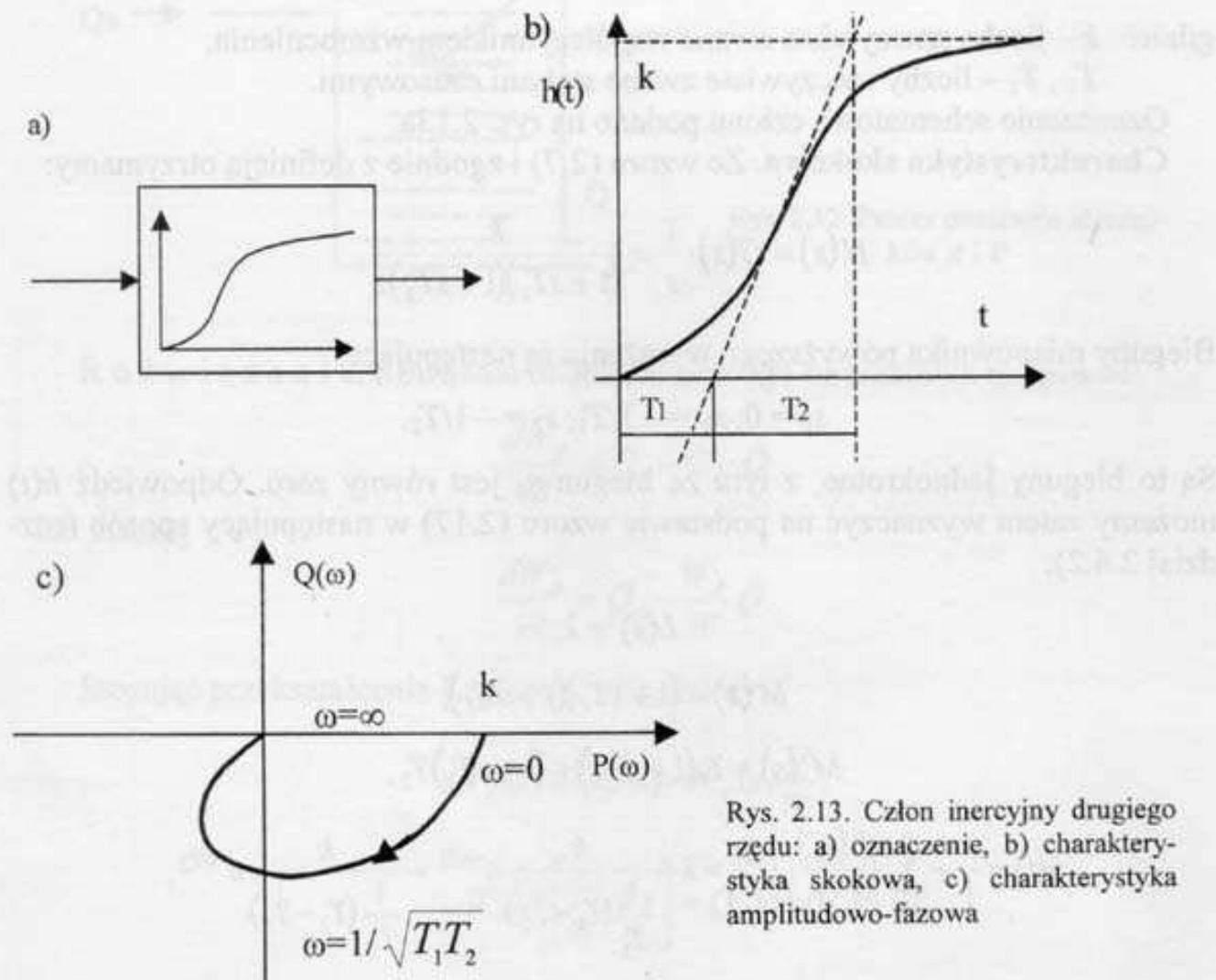
$$h_1(t) = k,$$

$$h_2(t) = -\frac{kT_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1},$$

$$h_3(t) = \frac{kT_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2},$$

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t).$$

Dla  $t \rightarrow \infty$  składowe wykładnicze  $h_2(t)$  i  $h_3(t)$  dążą do zera, a przebieg charakterystyki zbliża się asymptotycznie do prostej  $h_1(t) = k$ . Przebieg charakterystyki skokowej dla członu inercyjnego II rzędu podano na rys. 2.13b.



Rys. 2.13. Człon inercyjny drugiego rzędu: a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa, c) charakterystyka amplitudowo-fazowa

**Charakterystyka amplitudowo-fazowa.** Równanie charakterystyki amplitudowo-fazowej można uzyskać z transmitancji (2.18), lecz wyznaczenie tego równania w postaci zależności  $Q(\omega) = f[P(\omega)]$  byłoby zbyt uciążliwe. Sposób postępowania podaliśmy dla członu inercyjnego I rzędu w rozdziale 2.4.2. Zapiszemy zatem transmitancję widmową naszego członu w postaci:

$$G(j\omega) = G(s)_{s=j\omega} = \frac{k}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}.$$

Przekształcimy zależność na transmitancję widmową do postaci algebraicznej, znosząc niewymierność w mianowniku.

$$\begin{aligned}
 G(j\omega) &= \frac{k}{(1-\omega^2 T_1 T_2) + j\omega(T_1 + T_2)} \cdot \frac{(1-\omega^2 T_1 T_2) - j\omega(T_1 + T_2)}{(1-\omega^2 T_1 T_2) - j\omega(T_1 + T_2)} = \\
 &= \frac{k(1-\omega^2 T_1 T_2) - j\omega k(T_1 + T_2)}{(1-\omega^2 T_1 T_2)^2 + \omega^2 (T_1 + T_2)^2} = \frac{k(1-\omega^2 T_1 T_2) - j\omega k(T_1 + T_2)}{1 - 2\omega^2 T_1 T_2 + \omega^4 T_1^2 T_2^2 + \omega^2 T_1^2 + 2\omega^2 T_1 T_2 + \omega^2 T_2^2} = \\
 &= \frac{k(1-\omega^2 T_1 T_2)}{1 + \omega^2 T_1^2 + \omega^2 T_2^2 + \omega^4 T_1^2 T_2^2} - j \frac{k(T_1 - T_2)}{1 + \omega^2 T_1^2 + \omega^2 T_2^2 + \omega^4 T_1^2 T_2^2}.
 \end{aligned}$$

zatem

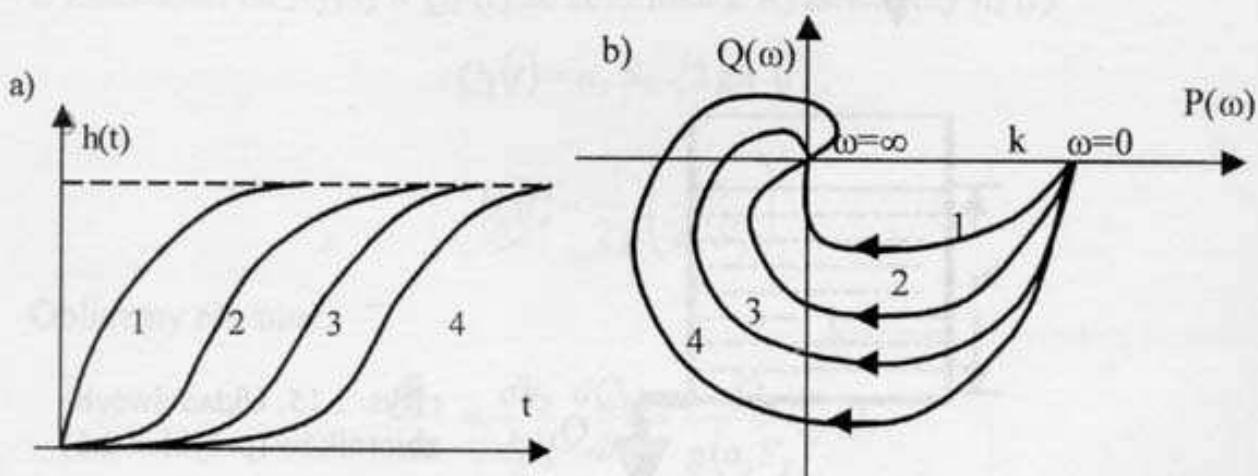
$$\begin{aligned}
 P(\omega) &= \frac{k(1-\omega^2 T_1 T_2)}{1 + \omega^2 T_1^2 + \omega^2 T_2^2 + \omega^4 T_1^2 T_2^2}, \\
 Q(\omega) &= \frac{-\omega k(T_1 + T_2)}{1 + \omega^2 T_1^2 + \omega^2 T_2^2 + \omega^4 T_1^2 T_2^2}.
 \end{aligned}$$

Z powyższych zależności wynika, że charakterystyka przebiega w ćwiartkach, w których  $Q(\omega) < 0$  (poniżej osi rzeczywistej). Najprościej charakterystykę amplitudowo-fazową możemy wyznaczyć wykreślnie, wyliczając współrzędne  $P(\omega)$  oraz  $Q(\omega)$  na płaszczyźnie Gaussa dla kolejnych wartości  $\omega$ . Przebieg tej charakterystyki podano na rys. 2.13b.

Na skutek złożenia wielu członów inercyjnych możemy otrzymać układy inercyjne wyższych rzędów. Ogólna postać transmitancji członu inercyjnego  $n$ -tego rzędu jest opisana wzorem:

$$G(s) = \frac{k}{(1+sT_1)(1+sT_2)\dots(1+sT_n)}. \quad (2.19)$$

Odpowiednie charakterystyki skokowe oraz amplitudowo-fazowe pokazano na rys. 2.14a i b. Oznaczono na nich cyframi arabskimi rząd inercji układu. Na uwagę



Rys. 2.14. Charakterystyki członów inercyjnych wyższych rzędów: a) skokowe, b) amplitudowo-fazowe

zasługuje fakt, że charakterystyka amplitudowo-fazowa przebiega przez taką liczbę ćwiartek płaszczyzny zmiennej zespolonej, jaki jest rząd inercji układu.

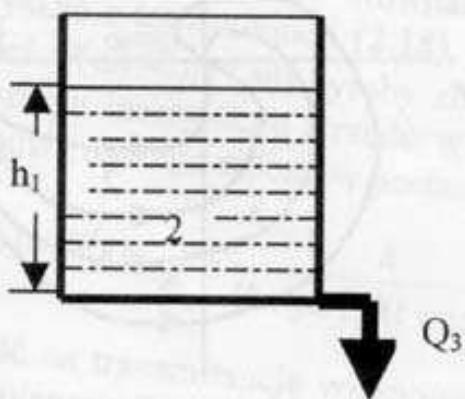
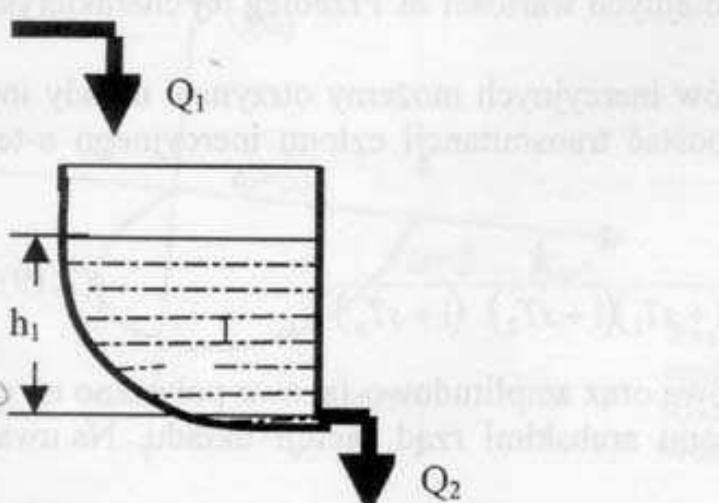
**P r z y k ł a d 2.5.** Wyznaczyć równania dynamiki oraz transmitancję układu dwóch zbiorników pokazanych na rys. 2.15. Jako sygnał wejściowy przyjąć przepływ  $Q_1$ , a wyjściowy – przepływ  $Q_3$ .

**R o z w i ą z a n i e.** Ułóżmy równania bilansowe obu zbiorników. Dla ułatwienia opisu przyjmiemy oznaczenia jak na rys. 2.15 (1 – zbiornik górny, 2 – zbiornik dolny). Dla zbiornika 1 otrzymamy:

$$\frac{dV_1}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t), \quad (a)$$

gdzie  $V_1$  jest objętością zbiornika w danej chwili  $t$ . Podobnie dla zbiornika 2.

$$\frac{dV_2}{dt} = Q_2(t) - Q_3(t). \quad (b)$$



Rys. 2.15. Układ dwóch zbiorników (przykład 2.5)

Zauważmy, że objętość jest funkcją wysokości, czyli

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_1}{dh_1} \frac{dh_1}{dt},$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{dV_2}{dh_2} \frac{dh_2}{dt}.$$

Dla zbiornika 1 zależność  $dV/dh$  jest zależnością nieliniową, określoną przez powierzchnię przekroju dla różnych  $h$ . Natomiast dla zbiornika 2 stosunek  $dV/dh$  jest polem powierzchni  $S$  dna zbiornika (dla dowolnej wartości  $h$  pole jest stałe). Zapiszemy równania (a) i (b) w następującej postaci:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dh_1} \frac{dh_1}{dt} = Q_1(t) - Q_2(t) \\ S_d \frac{dh_2}{dt} = Q_2(t) - Q_3(t). \end{cases}$$

Wykorzystamy również równanie swobodnego wypływu cieczy ze zbiornika, które ma postać:

$$Q_2(t) = a_2 S_2 \sqrt{2gh_1(t)},$$

gdzie:  $a_2$  – współczynnik wypływu zależny m.in. od kształtu przewodu wypływu oraz jego gładkości,

$S_2$  – powierzchnia przekroju wypływu cieczy,

$g$  – przyspieszenie ziemskie.

Zależność nieliniową dla zbiornika 1 oznaczamy przez

$$\frac{dV_1}{dh_1} = b_1(h).$$

Z zależności na wypływ  $Q_3(t)$  ze zbiornika 2 wyznaczamy  $h_2(t)$ .

$$Q_3(t) = a_3 S_3 \sqrt{2gh_2(t)},$$

$$h_2(t) = \frac{1}{2g} \left( \frac{Q_3}{a_3 S_3} \right)^2.$$

Obliczmy również:

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{dh_2}{dQ_3} \frac{dQ_3}{dt} = \frac{Q_3}{g(a_3 S_3)^2} Q_3.$$

Wstawiając powyższe zależności do układu równań, otrzymamy:

$$\begin{cases} b_1(h_1) \cdot h_1 = Q_1 - a_2 S_2 \sqrt{2gh_1} \\ S_d \frac{Q_3}{g(a_3 S_3)^2} Q_3 = a_2 S_2 \sqrt{2gh_1} - Q_3. \end{cases}$$

Współczynnik przy  $Q_3$  oznaczmy przez  $b_2(Q_3)$ . Uzyskamy zatem układ równań różniczkowych nieliniowych:

$$\begin{cases} b_1(h_1) \cdot h_1 = Q_1 - a_2 S_2 \sqrt{2gh_1} \\ b_2(Q_3) \cdot Q_3 = a_2 S_2 \sqrt{2gh_1} - Q_3. \end{cases}$$

Dla poszczególnych funkcji nieliniowych

$$f_1(h_1, h_1, Q_1) = b_1(h_1) \cdot h_1 - Q_1 + a_2 S_2 \sqrt{2gh_1} = 0,$$

$$f_2(h_1, Q_3, Q_3) = b_2(Q_3) \cdot Q_3 - a_2 S_2 \sqrt{2gh_1} + Q_3 = 0$$

stosujemy linearyzację wokół punktów stacjonarnych  $h_{10}, Q_{10}, Q_{30}$ .

$$\frac{\partial f_1}{\partial h_1} = \frac{\partial b_1}{\partial h_1} h_1 + a_2 S_2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2g}{h_1}} \Big|_0 = a_2 S_2 \sqrt{\frac{g}{2h_{10}}},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial Q_1} = b_1(h_1)_0 = b_1(h_{10}),$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial Q_1} = -1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial h_1} = -a_2 S_2 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2g}{h_1}} \Big|_0 = -a_2 S_2 \sqrt{\frac{g}{2h_{10}}},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial Q_3} = \frac{\partial b_2}{\partial Q_3} \cdot Q_3 + 1 \Big|_0 = 1,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial Q_3} = b_2(Q_3)_0 = b_2(Q_{30})$$

Równania zlinearyzowane mają postać:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial f_1}{\partial h_1} \right|_0 \Delta h_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} \right|_0 \Delta Q_1 + \left. \frac{\partial f_1}{\partial Q_3} \right|_0 \Delta Q_3 = 0 \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial h_1} \right|_0 \Delta h_1 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial Q_3} \right|_0 \Delta Q_3 + \left. \frac{\partial f_2}{\partial Q_3} \right|_0 \Delta Q_3 = 0. \end{cases}$$

Po uzupełnieniu powyższych równań wyznaczonymi wcześniej zależnościami otrzymamy:

$$\begin{cases} a_2 S_2 \sqrt{\frac{g}{2 h_{l_0}}} \cdot \Delta h_l + b_1(h_{l_0}) \Delta h_l - \Delta Q_1 = 0 \\ -a_2 S_2 \sqrt{\frac{g}{2 h_{l_0}}} \cdot \Delta h_l + \Delta Q_3 + b_2(Q_{3_0}) \cdot \Delta Q_3 = 0. \end{cases}$$

Oznaczmy:

$$k_1 = \frac{1}{a_2 S_2} \sqrt{\frac{2 h_{l_0}}{g}},$$

$$k_2 = a_2 S_2 \sqrt{\frac{g}{2 h_{l_0}}},$$

$$T_1 = b_1(h_{l_0}) k_1,$$

$$T_2 = b_2(Q_{3_0}).$$

Układ równań przyjmie wtedy postać:

$$\begin{cases} \frac{1}{k_1} \cdot \Delta h_l + \frac{T_1}{k_1} \cdot \Delta h_l - \Delta Q_1 = 0 / \cdot k_1, \\ -k_2 \cdot \Delta h_l + \Delta Q_3 + T_2 \cdot \Delta Q_3 = 0. \end{cases}$$

Do obu równań stosujemy przekształcenie Laplace'a:

$$\Delta H_1(s) + T_1 \cdot s \cdot \Delta H_1(s) - k_1 \cdot \Delta Q_1(s) = 0,$$

$$-k_2 \cdot \Delta H_1(s) + \Delta Q_3(s) + T_2 \cdot s \cdot \Delta Q_3(s) = 0.$$

Wyznaczmy z pierwszego równania zależność:

$$\frac{\Delta H_1(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{k_1}{1 + s T_1},$$

natomiast z drugiego

$$\frac{\Delta Q_3(s)}{\Delta H_1(s)} = \frac{k_2}{1 + s T_2}.$$

Transmitancja układu przyjmie zatem postać:

$$G(s) = \frac{\Delta H_1(s)}{\Delta Q_1(s)} \cdot \frac{\Delta Q_3(s)}{\Delta H_1(s)} = \frac{k_1 \cdot k_2}{(1 + s T_1)(1 + s T_2)}.$$

Jak widać, układ zbiorników przedstawiony na rys. 2.15 może być traktowany jako układ z inercją II rzędu, przy założeniu, że opis ten dotyczy otoczenia punktu pracy o współrzędnych  $h_{10}, Q_{10}, Q_{30}$ .

#### 2.4.4. Idealny człon różniczkujący

**D e f i n i c j a 2.15.** Idealnym członem różniczkującym nazywamy układ, którego transmitancja ma postać:

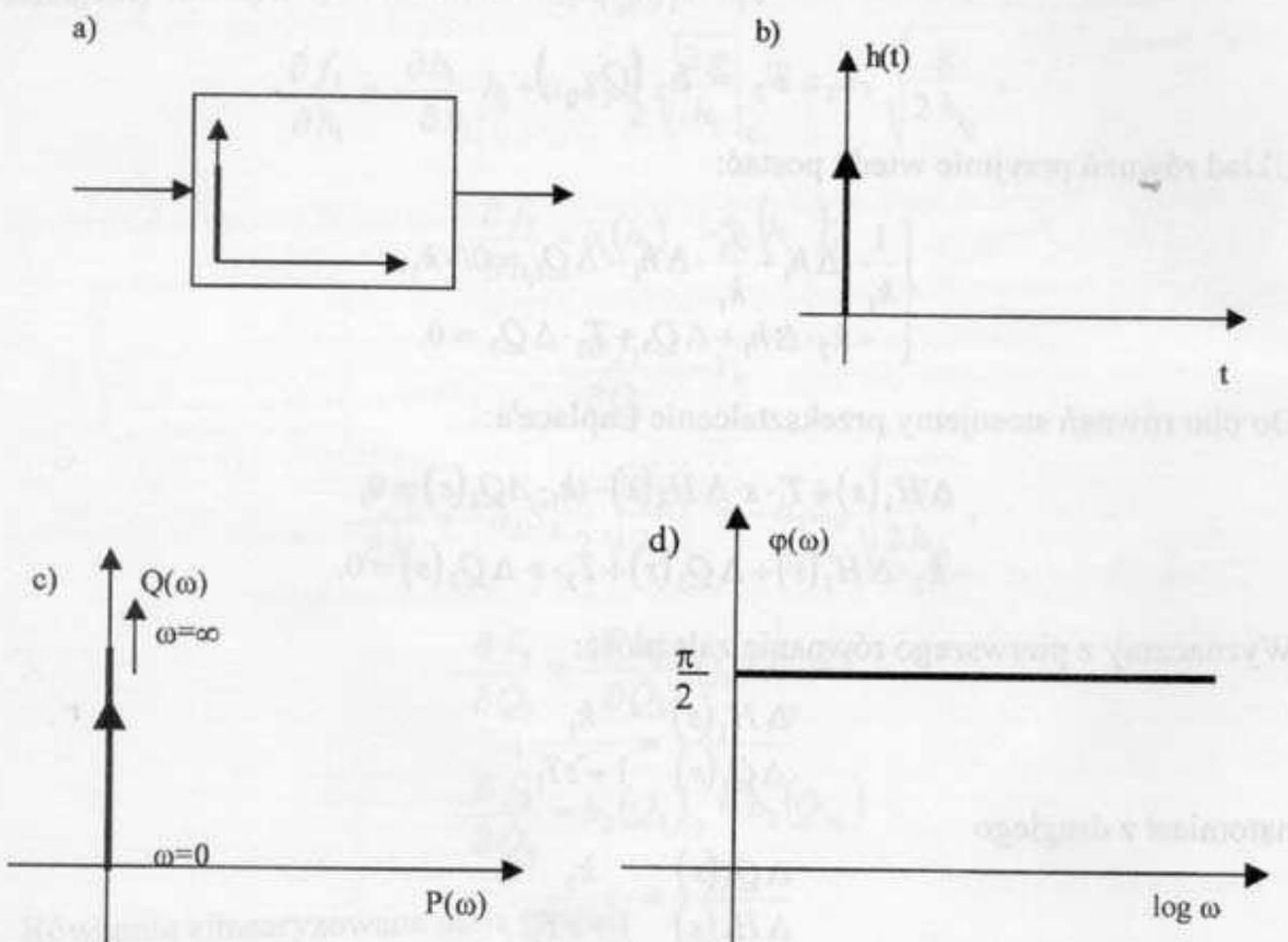
$$G(s) = ks, \quad (2.20)$$

gdzie  $k$  jest współczynnikiem wzmacnienia.

Oznaczenie członu stosowane na schematach podano na rys. 2.16a.

**Charakterystyka skokowa.** Z definicji 2.5 oraz ze wzoru (2.7) otrzymamy:

$$H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = k \cdot s \cdot \frac{1}{s} = k.$$



Rys. 2.16. Charakterystyki czlonu różniczkujacego idealnego: a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa, c) charakterystyka amplitudowo-fazowa, d) charakterystyka fazowa

Odpowiedź skokowa idealnego członu różniczkującego ma zatem postać:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[k] = k \mathcal{L}^{-1}[1(t)] = k \cdot \delta(t),$$

gdzie  $\delta(t)$  jest impulsem Diraca. Wykres odpowiedzi przedstawiono na rys. 2.16b.

**Charakterystyka amplitudowo-fazowa.** Wyznaczmy ją ze wzoru (2.20).

$$G(j\omega) = k j\omega = j(k\omega). \quad (2.21)$$

Jak wynika ze wzoru (2.21), charakterystyka amplitudowo-fazowa przyjmuje wyłącznie wartości urojone, natomiast część rzeczywista jest równa零. Oznacza to, że pokrywa się ona z osią urojoną. Zwróćmy również uwagę, że przesunięcie fazowe

$$\phi(\omega) = \arg[G(j\omega)]$$

jest stałe i wynosi  $+\pi/2$ , co pokazano na wykresie (rys. 2.16d).

Analiza idealnego członu różniczkującego ma charakter wyłącznie teoretyczny, gdyż nie istnieje fizyczny odpowiednik tego członu. Jest to zresztą zgodne z warunkiem realizowalności fizycznej układu, który podano w rozdziale 2.2.3 (stopień licznika transmitancji powinien być nie większy niż stopień mianownika). Fizycznie można zrealizować rzeczywisty człon różniczkujący.

#### 2.4.5. Rzeczywisty człon różniczkujący

**D e f i n i c j a 2.16.** Rzeczywistym członem różniczkującym (członem różniczkującym z inercją) nazywamy układ, którego transmitancja ma postać:

$$G(s) = \frac{ks}{1+sT}, \quad (2.22)$$

gdzie  $k, T$  są nazywane odpowiednio współczynnikiem wzmacnienia i stałą czasową.

Oznaczenie schematowe układu podano na rys. 2.17a.

**Charakterystyka skokowa.** Charakterystykę tę wyznaczamy jako transformatę odwrotną funkcji

$$H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{ks}{1+sT} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{1+sT}.$$

Wtedy ze wzoru (2.17) otrzymamy:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{1+sT}\right] = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}.$$

Przebieg charakterystyki podano na rys. 2.17b.

**Charakterystyka amplitudowo-fazowa.** Wyznaczmy równanie opisujące transmitancję widmową:

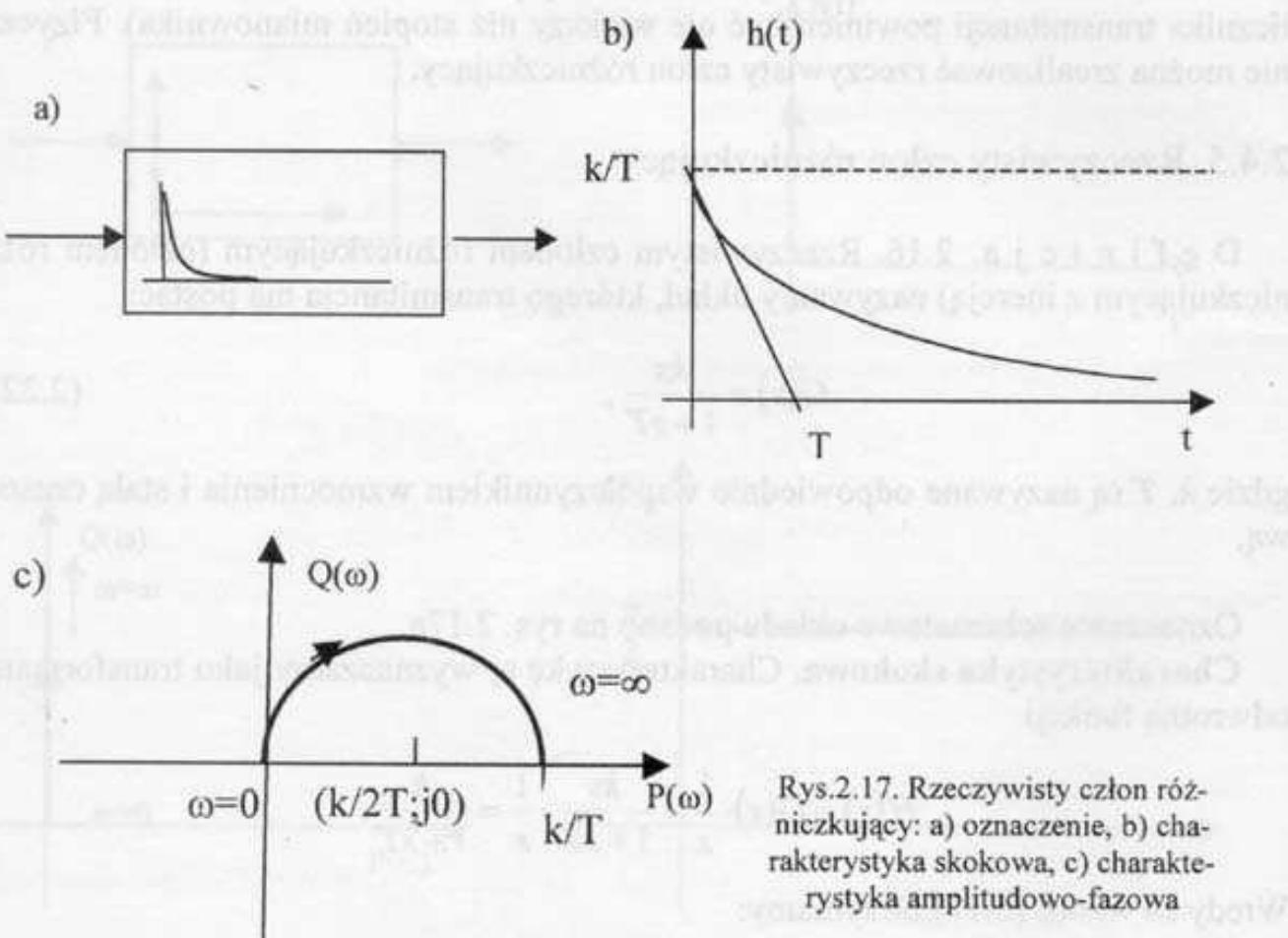
$$G(j\omega) = \frac{k \cdot j\omega}{1 + j\omega t}. \quad (2.23)$$

Przekształcimy wzór (2.23) do postaci dogodnej do wyznaczenia charakterystyki amplitudowo-fazowej.

$$G(j\omega) = \frac{j k \omega}{1 + j\omega T} \frac{1 - j\omega T}{1 - j\omega T} = \frac{\omega^2 k T}{1 + (\omega T)^2} + j \frac{k \omega}{1 + (\omega T)^2} = P(\omega) + j Q(\omega),$$

gdzie:

$$P(\omega) = \frac{\omega^2 k T}{1 + (\omega T)^2}, \quad Q(\omega) = \frac{k \omega}{1 + (\omega T)^2}.$$



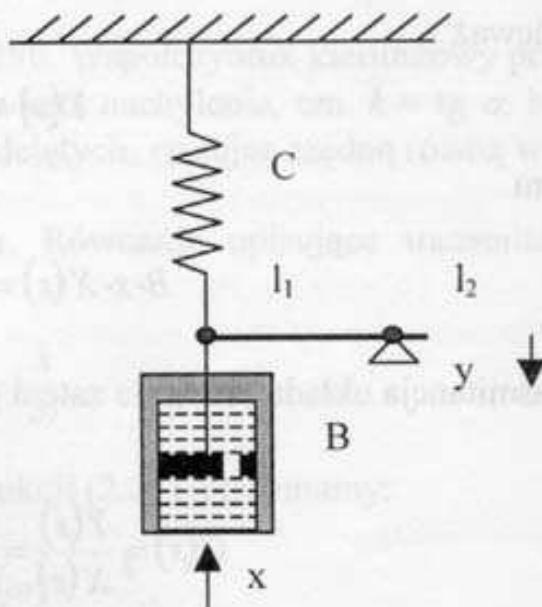
Rys.2.17. Rzeczywisty człon różniczkujący: a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa, c) charakterystyka amplitudowo-fazowa

Podobnie jak dla członu inercyjnego (rozdział 2.4.2) można wykazać, że na płaszczyźnie Gaussa powyższe zależności opisują część okręgu o środku w punkcie  $(k/2T, j0)$  i promieniu  $k/2T$ . Ponieważ  $P(\omega) > 0$  i  $Q(\omega) > 0$  dla całego przedziału zmienności, zatem jest to część okręgu leżąca w I ćwiartce. Przebieg charakterystyki amplitudowo-fazowej podano na rys. 2.17c. Jak widać, punkty charakterystyczne wykresu, tzn. środek okręgu i jego promień, nie zależą od pulsacji  $\omega$ . Rzeczywisty człon różniczkujący wprowadza dodatnie przesunięcie fazowe w zakresie od 0 do  $+\pi/2$ , które jest funkcją  $\omega$ . Argument transmitancji możemy zapisać następująco:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \frac{\omega k}{\omega^2 k T} = \arctg \frac{1}{\omega T}.$$

Jak wynika z powyższej zależności, przesunięcie fazowe  $\varphi(\omega)$  będzie bliskie  $+\pi/2$  dla  $\omega = 0$ , natomiast będzie maleć dla wzrastających wartości  $\omega$ .

**Przykład 2.6.** Wyznaczyć transmitancję układu mechaniczno-hydraulicznego podanego na rys. 2.18. Przyjąć, że wielkość wejściową stanowi przesunięcie  $x$ , natomiast wielkość wyjściową przesunięcie  $y$ .



Rys. 2.18. Schemat rzeczywistego układu różniczkującego (mechaniczno-hydraulicznego) (przykład 2.6)

**Rozwiązańe.** Na tłok o powierzchni  $P$  działają dwie siły:

- siła sprężystości sprężyny –  $F_1$ ,
- siła tłumienia –  $F_2$ .

Siła sprężystości sprężyny dla małych wychyleń może być opisana zależnością liniową w postaci:

$$F_1 = c \cdot u,$$

gdzie:  $c$  – sztywność sprężyny,

$u$  – wychylenie od położenia równowagi.

W zapisie operatorowym powyższe równanie przyjmie postać:

$$F_1(s) = c \cdot U(s)$$

Siła tłumienia zależy od rodzaju cieczy i oporu hydraulicznego tłumika oraz jest proporcjonalna do prędkości tłoka względem obudowy. Odnośne równanie przyjmie postać:

$$F_2 = B \cdot (x - u),$$

gdzie  $B$  – współczynnik oporu hydraulicznego.

Po zapisaniu tego równania w wersji operatorowej otrzymamy:

$$F_2(s) = Bs[X(s) - U(s)]$$

Z warunku równowagi sił:

$$F_1(s) = F_2(s)$$

otrzymamy:

$$cU(s) = Bs[X(s) - U(s)]$$

Ponieważ

$$Y(s) \cdot l_1 = U(s) \cdot l_2,$$

zatem

$$B \cdot s \cdot X(s) = (c + Bs) \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot Y(s).$$

Transmitancja układu przyjmie zatem postać:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Bs}{(c + Bs)} \frac{l_2}{l_1} = \frac{\frac{B}{c} \cdot \frac{l_2}{l_1} s}{1 + \frac{B}{c} s}$$

lub inaczej

$$G(s) = \frac{ks}{1 + sT},$$

gdzie:

$$k = \frac{B \cdot l_2}{c \cdot l_1}, \quad T = \frac{B}{c}.$$

Analizowany układ jest przykładem rzeczywistego członu różniczkującego.

#### 2.4.6. Idealny człon całkujący

**D e f i n i c j a 2.17.** Idealnym członem całkującym nazywamy układ, którego transmitancja ma postać:

$$G(s) = \frac{k}{s} = \frac{1}{T_i \cdot s}, \quad (2.24)$$

gdzie  $k$  jest współczynnikiem wzmacnienia, a jego odwrotność  $T_i$  zwana jest stałą całkowania.

Oznaczenie schematowe podano na rys. 2.19a.

**Charakterystyka skokowa.** Transformata odwrotna funkcji

$$H(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{s^2}$$

ma postać (por. dodatek – tablica transformat Laplace'a):

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s^2}\right] = k \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = k \cdot t.$$

Przebieg charakterystyki podano na rys. 2.19b. Współczynnik kierunkowy prostej  $k$  można wyznaczyć z wykresu jako tangens kąta nachylenia, tzn.  $k = \operatorname{tg} \alpha$ . Natomiast stałą całkowania  $T_i$  uzyskamy na osi odciętych, rzutując rzędną równą wartości skoku jednostkowego na prostą  $h(t) = kt$ .

**Charakterystyka amplitudowo-fazowa.** Równanie opisujące transmitancję widmową ma postać:

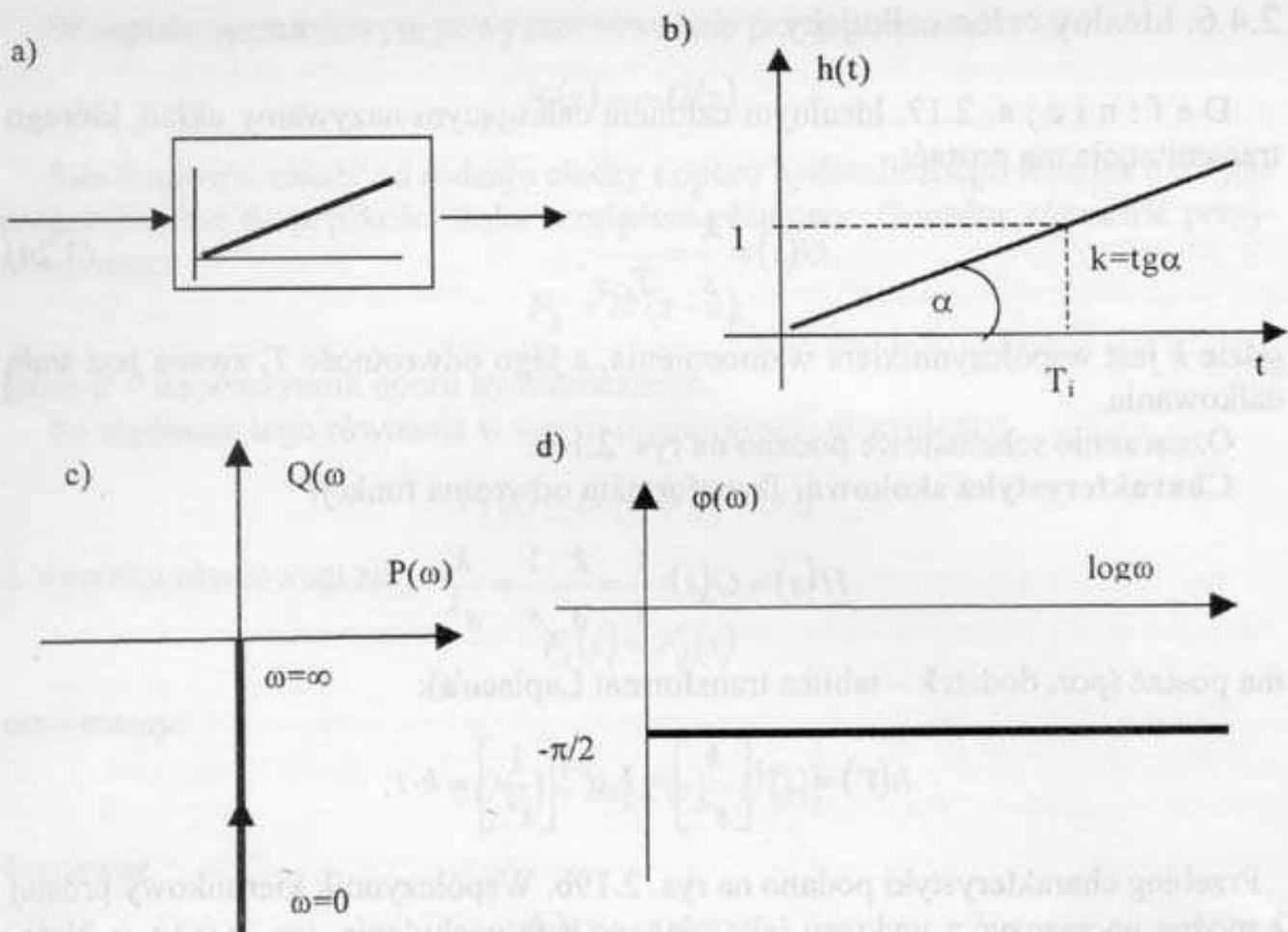
$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}. \quad (2.25)$$

Wyróżniwszy część rzeczywistą i urojoną funkcji (2.25), otrzymamy:

$$P(\omega) = 0, \quad Q(\omega) = -\frac{k}{\omega}.$$

Wykresem charakterystyki jest prosta pokrywająca się z ujemną półosią urojoną; dla  $\omega \rightarrow 0$  przebieg  $Q(\omega) \rightarrow \infty$ , natomiast dla  $\omega \rightarrow \infty$  przebieg  $Q(\omega) \rightarrow 0$ . Wykres przedstawiono na rys. 2.19c. Omawiany człon charakteryzuje się stałym (niezależnym od  $\omega$ ) przesunięciem fazowym równym  $-\pi/2$ . Odpowiednią charakterystykę fazową przedstawiono na rys. 2.19d.

**P r z y k ł a d 2.7.** Wyznaczyć transmitancję zbiornika, przyjmując za sygnał wejściowy dopływ  $Q$ , a za sygnał wyjściowy – wysokość słupa cieczy w zbiorniku.



Rys. 2.19. Idealny człon całkujący: a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa, c) charakterystyka amplitudowo-fazowa, d) logarytmiczna charakterystyka fazowa

**Rozwiązańe.** Równanie dynamiki zbiornika ma postać (przy założeniu zerowych warunków początkowych):

$$\frac{dW}{dt} = Q.$$

Przekształcimy powyższe równania (por. przykład 2.5) następująco:

$$\frac{dW}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = Q, \quad (a)$$

gdzie pole powierzchni przekroju poprzecznego

$$\frac{dW}{dh} = P.$$

Otrzymamy zatem:  $P \cdot h = Q$ . Stosując przekształcenie Laplace'a do równania (a), otrzymamy:  $sPH(s) = Q(s)$ . Transmitancja układu ma zatem postać:

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{1}{Ps} = \frac{k}{s},$$

gdzie  $k = 1/P$ .

#### 2.4.7. Rzeczywisty człon całkujący

**D e f i n i c j a 2.18.** Rzeczywistym członem całkującym (członem całkującym z inercją) nazywamy układ, którego transmitancja ma postać:

$$G(s) = \frac{k}{s(1+sT)}, \quad (2.26)$$

gdzie  $k, T$  są odpowiednio współczynnikiem wzmacnienia i stałą czasową inercji.

Oznaczenie schematowe podano na rys. 2.20a.

**Charakterystyka skokowa.** Wyznaczmy ją jako transformatę odwrotną funkcji

$$H(s) = G(s) \cdot X(s) = \frac{k}{s(1+sT)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k}{s^2(1+sT)}.$$

Ponieważ znamy transformaty odwrotne funkcji  $1/s^2$  oraz  $1/(1+sT)$ , zatem rozłożymy funkcję  $H(s)$  na ułamki proste w następujący sposób:

$$\frac{k}{s^2(1+sT)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{1+sT},$$

$$k = (As+B)(1+sT) + Cs^2,$$

$$k = As + B + TBs + ATs^2 + Cs^2,$$

$$k = B + (A+TB)s + (AT+C)s^2.$$

Z porównania współczynników przy jednakowych potęgach uzyskamy układ równań

$$\begin{cases} B = k \\ A + BT = 0 \\ AT + C = 0. \end{cases}$$

Rozwiązujeając powyższy układ, otrzymamy:

$$B = k, \quad A = -kT, \quad C = kT^2.$$

Funkcja  $H(s)$  może być zatem przedstawiona jako suma ułamków prostych:

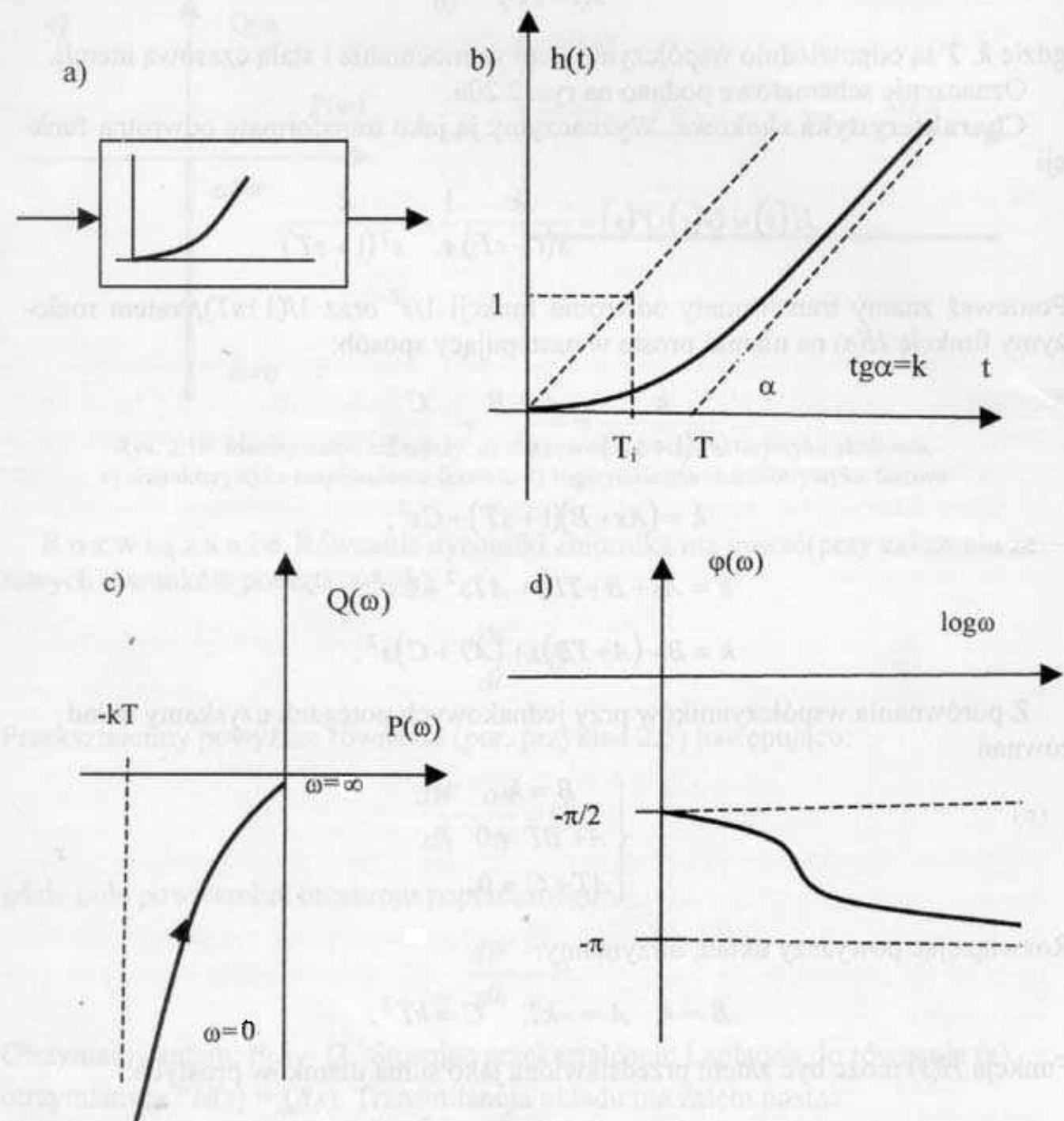
$$H(s) = \frac{k}{s^2} - \frac{kT}{s} + \frac{kT^2}{1+sT}.$$

Oryginał funkcji  $H(s)$  uzyskamy jako sumę oryginałów poszczególnych ułamków (por. wyznaczanie oryginałów dla członów inercyjnego oraz całkującego idealnego), tzn.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s^2}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{kT}{s}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{kT^2}{1+sT}\right] = k \cdot t - kT + kT e^{-t/T}.$$

Zapiszemy charakterystykę skokową w postaci:

$$h(t) = k[t - T + T e^{-t/T}]$$



Rys. 2.20. Rzeczywisty człon całkujący: a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa, c) charakterystyka amplitudowo-fazowa, d) logarytmiczna charakterystyka fazowa

Z powyższej zależności wynika, że dla  $t \rightarrow \infty$  przebieg  $h(t)$  dąży asymptotycznie do prostej o równaniu  $k(t - T)$ , przesuniętej o  $T$  względem początku układu współrzędnych. Przebieg charakterystyki skokowej pokazano na rys. 2.20b.

**Charakterystyka amplitudowo-fazowa.** Równanie charakterystyki wyznaczamy z zależności (2.26) w sposób następujący:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{k}{j\omega(1+j\omega T)} = \frac{k}{j\omega - \omega^2 T} \cdot \frac{-\omega^2 T - j\omega}{-\omega^2 T - j\omega} = \frac{k(-\omega^2 T - j\omega)}{(\omega^2 T)^2 + \omega^2} = \\ &= \frac{-k\omega^2 T - jk\omega}{\omega^2 [(\omega T)^2 + 1]} = \frac{-k\omega^2 T}{\omega^2 [(\omega T)^2 + 1]} - j \frac{k\omega}{\omega^2 [(\omega T)^2 + 1]}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$P(\omega) = -\frac{kT}{(\omega T)^2 + 1}, \quad Q(\omega) = \frac{-k}{\omega [(\omega T)^2 + 1]}.$$

Jak wynika z powyższych zależności, charakterystyka amplitudowo-fazowa członu całkującego z inercją przebiega dla ujemnych wartości  $P$  i  $Q$ . Dla  $\omega \rightarrow \infty$  osiąga ona początek układu współrzędnych. Gdy  $\omega \rightarrow 0$ , wówczas  $P(\omega) \rightarrow kT$ , a  $Q(\omega) \rightarrow \infty$ . Przebieg charakterystyki przedstawia rys. 2.20c. Wektor wodzący  $G(j\omega)$  przy zmianie pulsacji od zera do nieskończoności wyznacza kąt w granicach  $(-\pi/2, -\pi)$ , określający przesunięcie fazowe wprowadzane przez układ. Charakterystyka fazowa zapisana jest następująco:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctg \frac{k\omega}{k\omega^2 T} = \arctg \frac{1}{\omega T}.$$

Przebieg charakterystyki fazowej podano na rys. 2.20d.

**Przykład 2.8.** Wyznaczyć transmitancję układu dwóch zbiorników przedstawionych na rys. 2.15. Wejściem jest przepływ  $Q_1$  do zbiornika, a wyjściem wysokość  $h$  cieczy w zbiorniku dolnym.

**Rozwiązanie.** Równanie opisujące dynamikę zbiornika dolnego zostało wyznaczone w przykładzie 2.5. Uzyskana transmitancja ma postać:

$$G(s) = \frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{k}{s}, \quad (a)$$

gdzie  $k = 1/P$ . Zbiornik górnny opiszemy równaniem:

$$\frac{dW}{dt} = Q - Q_1$$

lub inaczej

$$\frac{dW}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = Q - Q_1, \quad (\text{b})$$

gdzie  $dW/dh = P_1$  jest powierzchnią przekroju poprzecznego zbiornika.

Zmienną  $h$  wyrazimy za pomocą  $Q_1$ , korzystając z równania swobodnego wypływu cieczy (por. przykład 2.5):

$$Q_1 = aS\sqrt{2gh}.$$

Zatem

$$h = \frac{Q_1^2}{2g(aS)^2},$$

gdzie:  $a$  – współczynnik wypływu,

$S$  – przekrój poprzeczny wypływu.

Pochodna  $h$  przyjmie postać:

$$h = \frac{2Q_1}{2g(aS)^2} Q_1,$$

$$h = \frac{Q_1}{g(aS)^2} Q_1.$$

Uwzględniając powyższe, zapiszemy równanie (b) w następującej postaci:

$$P_1 \frac{Q_1}{g(aS)^2} Q_1 = Q - Q_1.$$

Jest to równanie nieliniowe. Dokonamy linearyzacji tego równania wokół punktu pracy  $Q_{10}$ . Nasza funkcja nieliniowa ma postać:

$$f(Q, Q_1, Q_1) = Q - Q_1 - P_1 \frac{Q_1}{g(aS)^2} \cdot Q_1 = 0.$$

Pochodne cząstkowe są następujące:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial Q_1} \right|_0 = -1 - \left. \frac{P_1}{g(aS)^2} Q_1 \right|_0 = -1,$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial Q_1} \right|_0 = -P_1 \left. \frac{Q_1}{g(aS)^2} \right|_0 = \frac{-P_1 Q_{10}}{g(aS)^2},$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial Q} \right|_0 = 1.$$

Równanie zlinearyzowane ma postać:

$$-\Delta Q_1 - \frac{P_1 Q_{l_0}}{g(aS)^2} \Delta Q_1 + \Delta Q = 0.$$

Stosując przekształcenie Laplace'a do powyższego równania, otrzymamy:

$$-\Delta Q_1(s) - s \cdot \frac{P_1 Q_{l_0}}{g(aS)} \Delta Q_1(s) + \Delta Q(s) = 0.$$

Transmitancja zbiornika górnego przyjmie postać:

$$G_1(s) = \frac{\Delta Q(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{1}{1 + \frac{P_1 Q_{l_0}}{g(aS)^2} \cdot s} = \frac{1}{1 + sT},$$

gdzie

$$T = \frac{P_1 Q_{l_0}}{g(aS)^2}.$$

Transmitancja układu zbiorników będzie odpowiadała transmitancji rzeczywistego członu całkującego:

$$G(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta Q(s)} \cdot \frac{\Delta Q(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{\Delta H(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{k}{s(1+sT)},$$

gdzie  $k=1/P$  oraz

$$T = \frac{P_1 Q_{l_0}}{g(aS)^2}.$$

#### 2.4.8. Człon oscylacyjny

**D e f i n i c j a 2.19.** Członem oscylacyjnym nazywamy układ, którego transmitancja ma postać:

$$G(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}, \quad (2.28)$$

gdzie:  $k$  – współczynnik wzmacniania,

$\omega_0$  – pulsacja oscylacji własnych,

$\xi$  – względny współczynnik tłumienia ( $0 < \xi < 1$ ).

Oznaczenie stosowane na schematach podano na rys. 2.21a.

**Charakterystyka skokowa.** Transformata odpowiedzi skokowej układu ma postać:

$$H(s) = G(s) \cdot X(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \cdot \frac{1}{s}.$$

Wyznaczmy biegunki funkcji  $H(s)$  z równania:

$$s(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2) = 0.$$

Są to:

$$s_0 = 0$$

$$s_1 = -\xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\xi^2},$$

$$s_2 = -\xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}.$$

W celu wyznaczenia oryginału funkcji  $H(s)$  skorzystamy ze wzoru Heaviside'a:

$$h(t) = \frac{L(0)}{M(0)} + \sum_{i=1}^2 \frac{L(s_i)}{s_i M'(s_i)} e^{s_i t} = \frac{k\omega_0^2}{\omega_0^2} +$$

$$+ \frac{k\omega_0^2 e^{-j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t}}{\left(-\xi\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\right)\left(\left(-2\xi\omega_0 - 2j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\right) + 2\xi\omega_0\right)^+}$$

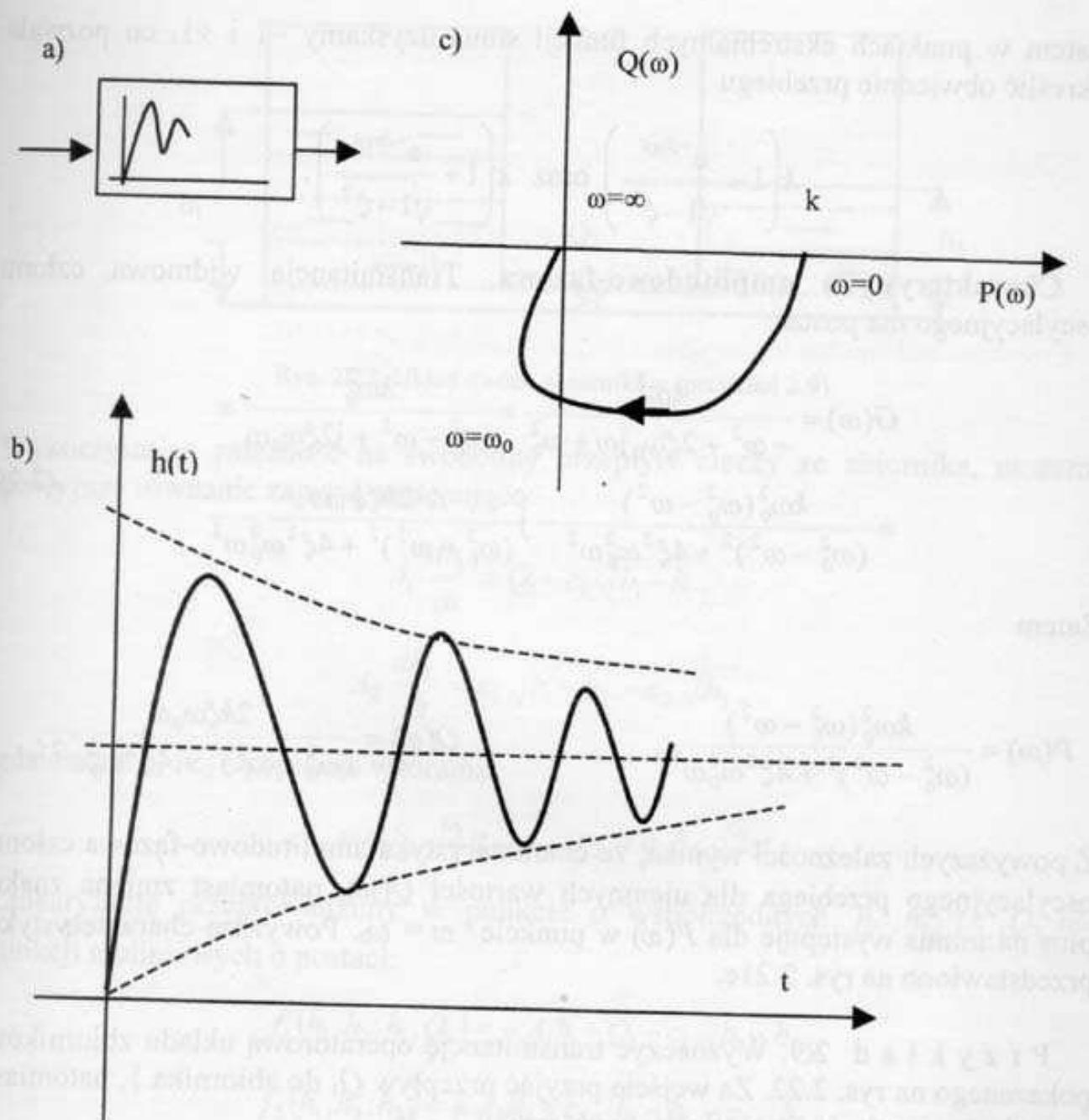
$$+ \frac{k\omega_0^2 e^{+j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t}}{\left(-\xi\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\right)\left(\left(-2\xi\omega_0 + 2j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\right) + 2\xi\omega_0\right)^+} =$$

$$= k + \left[ \frac{k e^{-j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t}}{\left(\xi + j\sqrt{1-\xi^2}\right)\left(2j\sqrt{1-\xi^2}\right)} + \frac{k e^{+j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t}}{\left(\xi - j\sqrt{1-\xi^2}\right)\left(2j\sqrt{1-\xi^2}\right)} \right] e^{-\xi\omega_0 t} =$$

$$= k \left[ 1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{2\sqrt{1-\xi^2}} \left( \frac{e^{-j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t}}{\sqrt{1-\xi^2} + j\xi} - \frac{e^{+j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t}}{\sqrt{1-\xi^2} - j\xi} \right) \right].$$

Korzystając z zależności na funkcje trygonometryczne, wyrażone za pomocą funkcji wykładniczych z wykładnikami urojonymi, możemy w następujący sposób zapisać odpowiedź skokową członu oscylacyjnego:

$$h(t) = k \left[ 1 - \frac{e^{-\zeta \omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t + \varphi) \right]$$



Rys. 2.21. Cząłon oscylacyjny: a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa, c) charakterystyka amplitudowo-fazowa

Przebieg charakterystyki przedstawia rys. 2.21b. Sinusoida na wykresie ma okres równy

$$\frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}$$

i zmienną amplitudę

$$k \frac{e^{-\zeta \omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Zatem w punktach ekstremalnych funkcji sinus uzyskamy  $-1$  i  $+1$ , co pozwala określić obwiednie przebiegu

$$\left(1 - \frac{e^{-\zeta \omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \text{ oraz } k \left(1 + \frac{e^{-\zeta \omega_0 t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right).$$


**Charakterystyka amplitudowo-fazowa.** Transmitancja widmowa członu oscylacyjnego ma postać:

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{k\omega_0^2}{-\omega^2 + 2\zeta\omega_0 j\omega + \omega_0^2} = \frac{k\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_0\omega} = \\ &= \frac{k\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2} - j \frac{2k\zeta\omega_0\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Zatem

$$P(\omega) = \frac{k\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2}, \quad Q(\omega) = \frac{2k\zeta\omega_0\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\zeta^2\omega_0^2\omega^2}.$$

Z powyższych zależności wynika, że charakterystyka amplitudowo-fazowa członu oscylacyjnego przebiega dla ujemnych wartości  $Q(\omega)$ , natomiast zmiana znaku plus na minus występuje dla  $P(\omega)$  w punkcie  $\omega = \omega_0$ . Powyższą charakterystykę przedstawiono na rys. 2.21c.

**P r z y k ł a d 2.9.** Wyznaczyć transmitancję operatorową układu zbiorników pokazanego na rys. 2.22. Za wejście przyjąć przepływ  $Q_1$  do zbiornika 1, natomiast za wyjście wysokość słupa cieczy w zbiorniku 2 –  $h_2$ .

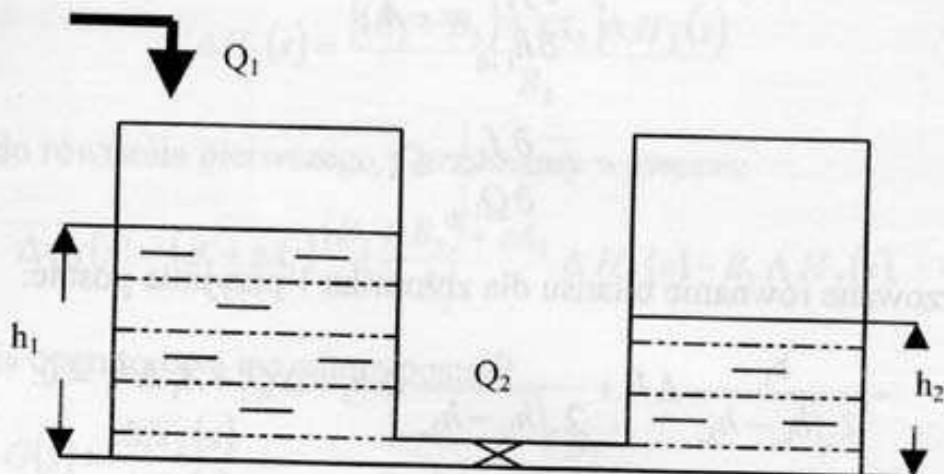
**R o z w i ą z a n i e.** Zapiszmy równania bilansu wody dla obu zbiorników.

## Zbiornik 1

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = Q_1 - Q_2 = Q_1 - Q_2(h_1, h_2)$$

## Zbiornik 2

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = Q_2 - Q_3 = Q_2(h_1, h_2) - Q_3(h_2)$$



Rys. 2.22. Układ dwóch zbiorników (przykład 2.9)

Wykorzystując zależność na swobodny przepływ cieczy ze zbiornika, możemy powyższe równanie zapisać następująco:

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = Q_1 - c_1 \sqrt{h_1 - h_1},$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = c_1 \sqrt{h_1 - h_2} - c_2 \sqrt{h_2},$$

gdzie stałe  $c_1$  i  $c_2$  są opisane wzorami:

$$c_1 = a_1 S_1 \sqrt{2g}, \quad c_2 = a_2 S_2 \sqrt{2g}.$$

Linearyzację przeprowadzimy w punkcie o współrzędnych  $h_{1_0}, h_{2_0}, Q_{1_0}, Q_{2_0}$  dla funkcji nieliniowych o postaci:

$$f_1(h_1, h_2, h_1, Q_1) = -A_1 \dot{h}_1 + Q_1 - c_1 \sqrt{h_1 - h_2},$$

$$f_2(h_1, h_2, h_2) = -A_2 \dot{h}_2 + c_1 \sqrt{h_1 - h_2} - c_2 \sqrt{h_2}.$$

Wyznaczmy współczynniki równania zlinearyzowanego.

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial h_1} \right|_0 = -c_1 \frac{1}{2\sqrt{h_1 - h_2}} = -\frac{c_1}{2\sqrt{h_{l_0} - h_{2_0}}},$$

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial h_2} \right|_0 = \frac{c_1}{2\sqrt{h_{l_0} - h_{2_0}}},$$

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial h_1} \right|_0 = -A_1,$$

$$\left. \frac{\partial f_1}{\partial Q_1} \right|_0 = 1.$$

Zlinearyzowane równanie bilansu dla zbiornika 1 przyjmie postać:

$$-\frac{c_1}{2\sqrt{h_{l_0} - h_{2_0}}} \Delta h_1 + \frac{c_1}{2\sqrt{h_{l_0} - h_{2_0}}} \Delta h_2 + \Delta Q_1 - A_1 \Delta h_1 = 0.$$

Podobnie dokonamy linearyzacji funkcji nieliniowej  $f_2$ .

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial h_1} \right|_0 = \frac{c_2}{2\sqrt{h_{l_0} - h_{2_0}}},$$

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial h_2} \right|_0 = \frac{c_2}{2\sqrt{h_{l_0} - h_{2_0}}} - \frac{c_2}{2\sqrt{h_{2_0}}},$$

$$\left. \frac{\partial f_2}{\partial h_2} \right|_0 = -A_2,$$

$$\frac{c_2}{2\sqrt{h_{l_0} - h_{2_0}}} \Delta h_1 - \left( \frac{c_2}{2\sqrt{h_{l_0} - h_{2_0}}} + \frac{c_2}{2\sqrt{h_{2_0}}} \right) \Delta h_2 - A_2 \Delta h_2 = 0.$$

Oznaczmy:

$$B_1 = \frac{c_1}{2\sqrt{h_{l_0} - h_{2_0}}}, \quad B_2 = \frac{c_2}{2\sqrt{h_{l_0} - h_{2_0}}}, \quad B_3 = \frac{c_2}{2\sqrt{h_{2_0}}}.$$

Równania zlinearyzowane przyjmą wtedy postać:

$$-B_1 \Delta h_1 + B_1 \Delta h_2 - A_1 \Delta h_1 + \Delta Q_1 = 0,$$

$$B_2 \Delta h_1 - (B_2 + B_3) \Delta h_2 - A_2 \Delta h_2 = 0.$$

Do powyższych równań stosujemy przekształcenia Laplace'a. Otrzymamy wówczas równania operatorowe:

$$\begin{aligned}\Delta Q_1(s) &= B_1 \Delta H_1(s) + sA_1 \Delta H_1(s) - B_1 \Delta H_2(s), \\ B_2 \Delta H_1(s) - sA_2 \Delta H_2(s) &= (B_2 + B_3) \Delta H_2(s).\end{aligned}$$

Wyznaczmy z drugiego równania  $\Delta H_1(s)$ .

$$\Delta H_1(s) = \frac{[(B_2 + B_3) + sA_2] \Delta H_2(s)}{B_2}$$

i wstawimy do równania pierwszego. Otrzymamy wówczas:

$$\Delta Q_1(s) = (B_1 + sA_1) \frac{(B_2 + B_3) + sA_2}{B_2} \Delta H_2(s) - B_1 \Delta H_2(s).$$

Transmitancja operatorowa ma zatem postać:

$$G(s) = \frac{\Delta H_2(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{B_2}{A_1 A_2 s^2 + [A_1(B_2 + B_3) + A_2 B_1]s + B_1 B_3}.$$

Oznaczmy:

$$T_1 \cdot T_2 = \frac{A_1 A_2}{B_1 B_3},$$

$$T_1 + T_2 = \frac{A_1(B_2 + B_3) + A_2 B_1}{B_1 B_3},$$

$$k = \frac{B_2}{B_1 B_3}.$$

Transmitancja operatorowa opisana jest wtedy zależnością:

$$G(s) = \frac{k}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}.$$

#### 2.4.9. Człon opóźniający

**D e f i n i c j a 2.20.** Członem opóźniającym nazywamy układ, którego transmitancja ma postać

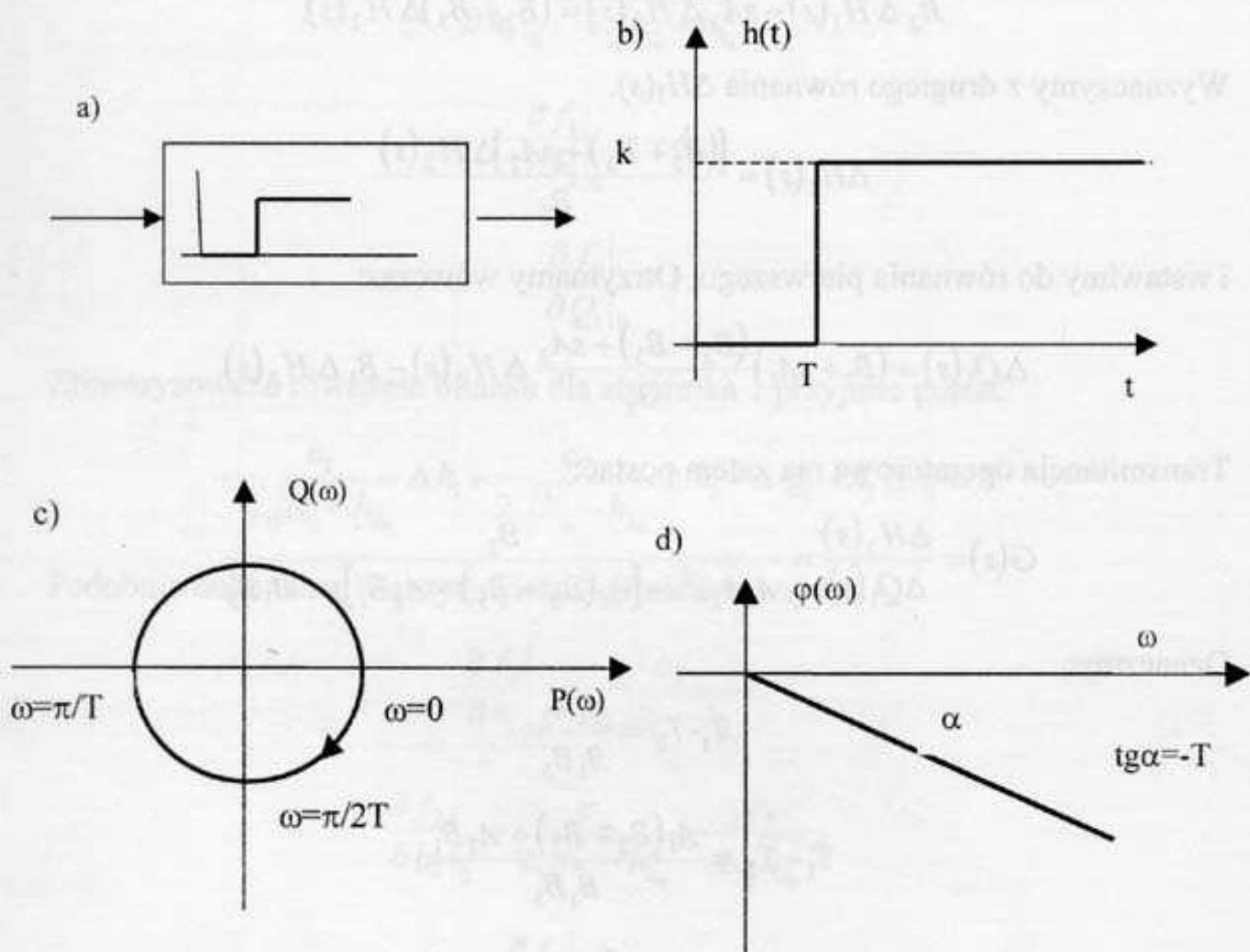
$$G(s) = e^{-sT} \quad (2.30)$$

gdzie  $T$  jest czasem opóźnienia.

Oznaczenie stosowane na schematach podano na rys. 2.23a.

**Charakterystyka skokowa.** Funkcja operatorowa odpowiedzi układu na skok jednostkowy ma postać

$$H(s) = e^{-sT} \frac{1}{s}$$



Rys. 2.23. Człon opóźniający: a) oznaczenie, b) charakterystyka skokowa, c) charakterystyka amplitudowo-fazowa, d) charakterystyka fazowa

Przebieg czasowy wyznaczmy, korzystając z twierdzenia o przesunięciu (patrz dodatek). Wówczas

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} [e^{-sT}] \cdot \frac{1}{s} = \mathbf{1}(t-T).$$

Przebieg charakterystyki przedstawia rys. 2.23b.

**Charakterystyka amplitudowo-fazowa.** Transmitancja widmowa członu opóźniającego ma postać:

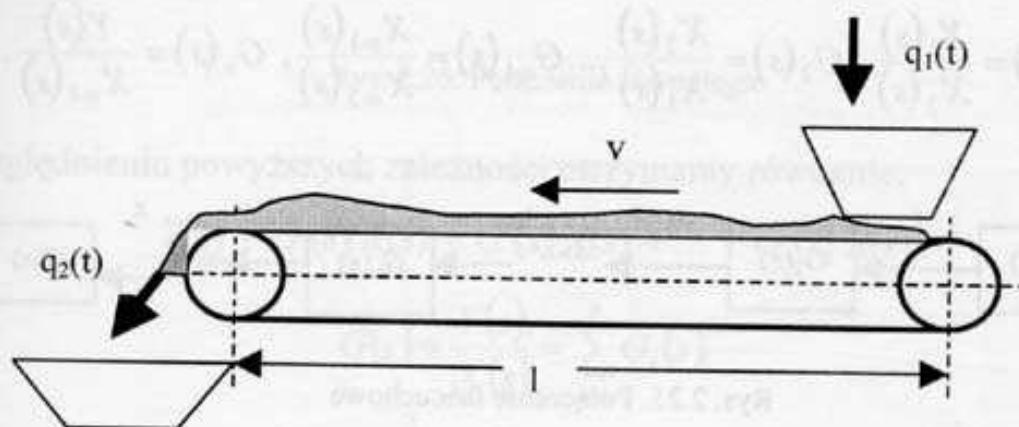
$$G(j\omega) = e^{-j\omega T}. \quad (2.31)$$

Jest to zatem funkcja, dla której promień wodzący jest równy jedności (moduł wyrażenia (2.31) jest równy jeden), a kąt, jaki tworzy promień wodzący z dodatnią

pólosią  $P$ , wyraża wzór:  $\varphi(\omega) = -\omega T$ . Inaczej mówiąc, promień wodzący zakreśla okrąg jednostkowy. Przesunięcie fazowe zależy od opóźnienia  $T$  oraz jest funkcją  $\omega$ . Przebiegi charakterystyki amplitudowo-fazowej oraz fazowej zamieszczone są na rys. 2.23c i d.

Na koniec zwróćmy uwagę, że w praktyce często mamy do czynienia z obiektami, których opis jest złożeniem omówionych wyżej podstawowych członów. Podany wykaz członów i ich elementarnych własności pozwala na opis każdego obiektu z omawianej klasy, tzn. obiektu liniowego, ciągłego, o parametrach stałych i skupionych.

**Przykład 2.10.** Wyznaczyć transmitancję przenośnika taśmowego o stałej prędkości ruchu  $v$ . Sygnałem wejściowym jest ilość  $q_1(t)$  materiału podawana na przenośniku w danej chwili  $t$ , a wyjściowym – odbierana z przenośnika  $q_2(t)$  (rys. 2.24).



Rys. 2.24. Przenośnik taśmowy jako człon opóźniający (przykład 2.10)

**Rozwinięcie.** Czas przesyłu materiału  $\tau$  zależy od długości  $l$  przenośnika i wynosi  $l/v$ . Materiał podawany na przenośnik pojawi się na jego końcu po czasie  $\tau$ , zatem równanie przenośnika przyjmie postać:

$$q_2(t) = q_1(t - \tau)$$

Stosując przekształcenie Laplace'a oraz twierdzenia o przesunięciu, otrzymamy:

$$Q_2(s) = Q_1(s) e^{-s\tau}.$$

Transmitancja przenośnika ma zatem postać:

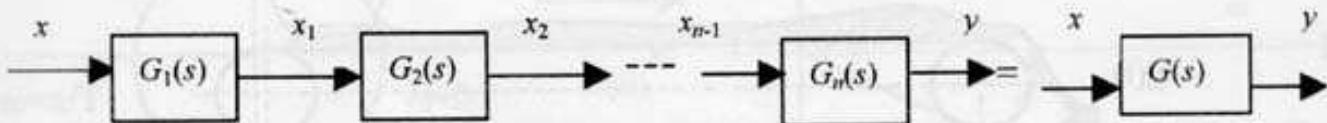
$$G(s) = \frac{Q_2(s)}{Q_1(s)} = e^{-sT},$$

gdzie  $T$  jest czasem opóźnienia.

## 2.5. Schematy blokowe i ich uproszczenia

Schemat blokowy (schemat strukturalny) jest równoważny równaniom opisującym układ dla każdej chwili czasu  $t$ . Przez przekształcenia takich schematów można uzyskać transmitancję całego układu, tzw. transmitancję zastępczą. Schemat blokowy tworzy się na podstawie znajomości działania układu, a ściślej na podstawie równań liniowych lub zlinearyzowanych opisujących układ. Schemat strukturalny może również zawierać bloki nieliniowe, lecz wówczas konieczne jest stosowanie innych zasad upraszczania takiego schematu. Zasady podane dalej dotyczą przekształcania schematów strukturalnych opisujących układy liniowe. Na rysunku 2.25 przedstawiono połączenie łańcuchowe, w którym wejście każdego następnego bloku jest połączone z wyjściem bloku poprzedzającego. Zgodnie z oznaczeniami (rys. 2.25) transmitancje poszczególnych bloków można zapisać następująco:

$$G_1(s) = \frac{X_1(s)}{X_2(s)}, G_2(s) = \frac{X_2(s)}{X_1(s)}, \dots, G_{n-1}(s) = \frac{X_{n-1}(s)}{X_{n-2}(s)}, G_n(s) = \frac{Y(s)}{X_{n-1}(s)}.$$



Rys. 2.25. Połączenie łańcuchowe

Po pomnożeniu prawych i lewych stron powyższych równań otrzymamy wyrażenie:

$$\frac{X_1(s)}{X(s)} \frac{X_2(s)}{X_1(s)} \frac{X_3(s)}{X_2(s)} \dots \frac{X_{n-1}(s)}{X_{n-2}(s)} \frac{Y(s)}{X_{n-1}(s)} = G_1(s) G_2(s) G_3(s) \dots G_{n-1}(s) G_n(s).$$

Lewe strony powyższego wyrażenia po uproszczeniu wyrażają transmitancję zastępczą układu, którą oznaczymy przez  $G(s)$ .

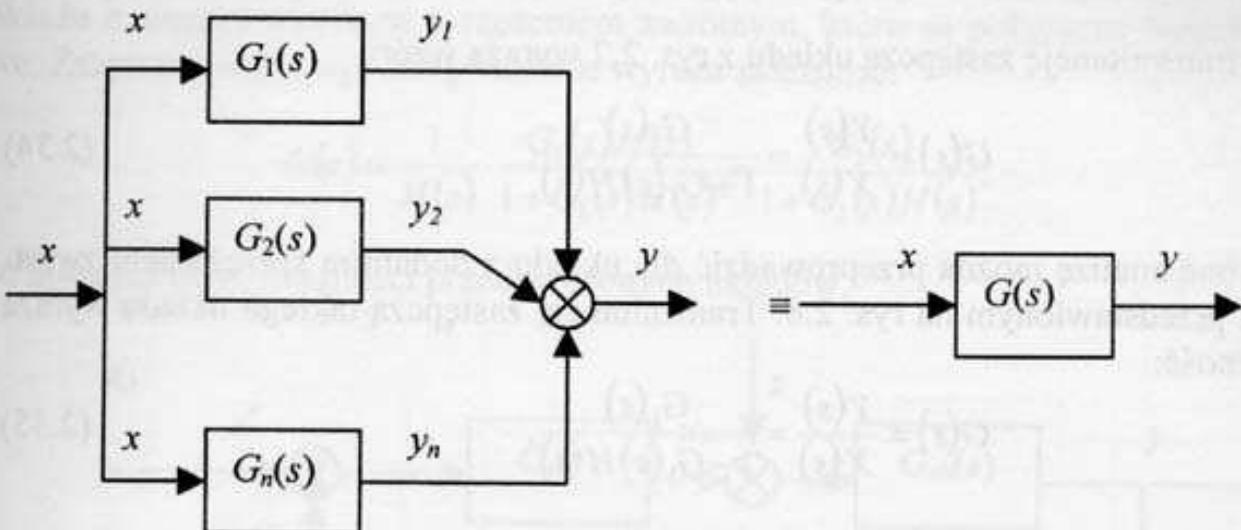
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \prod_{i=1}^n G_i(s). \quad (2.32)$$

Weźmy pod uwagę układ przedstawiony na rys. 2.26, w którym wyjścia poszczególnych członów są wyprowadzone do węzła sumacyjnego. Mówimy, że człony te są połączone równolegle. Równania operatorowe opisujące poszczególne człony mają postać:

$$Y_1(s) = G_1(s) X(s), Y_2(s) = G_2(s) X(s), \dots, Y_n(s) = G_n(s) X(s).$$

Natomiast równanie dla węzła zapiszemy następująco:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) + \dots + Y_n(s).$$



Rys. 2.26. Połączenie równoległe

Po uwzględnieniu powyższych zależności otrzymamy równanie:

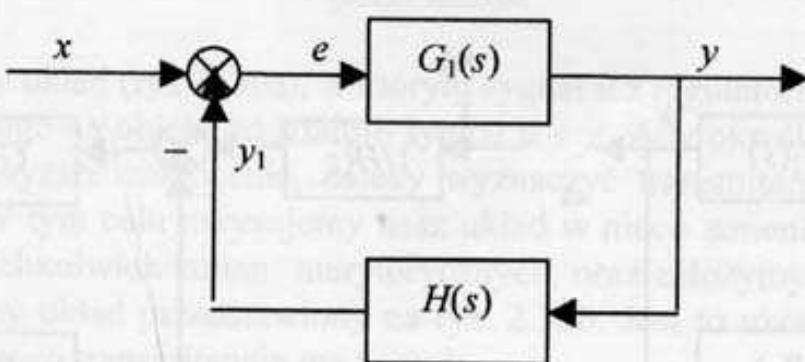
$$Y(s) = G_1(s)X(s) + G_2(s)X(s) + \dots + G_n(s)X(s).$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sum_{i=1}^n G_i(s) \quad (2.33)$$

Rozpatrzymy teraz układ z ujemnym sprzężeniem zwrotnym, przedstawiony na rys. 2.7. Równania operatorowe opisujące nasz układ mają postać:

$$Y(s) = E(s)G_1(s) = G_1(s)[X(s) - Y_1(s)],$$

$$Y_1(s) = Y(s)H(s).$$



Rys. 2.27. Układ z ujemnym sprzężeniem zwrotnym

Po wyeliminowaniu z powyższych równań  $Y_1(s)$  otrzymamy:

$$Y(s) = G_1(s)X(s) - Y(s)H(s)G_1(s)$$

lub inaczej

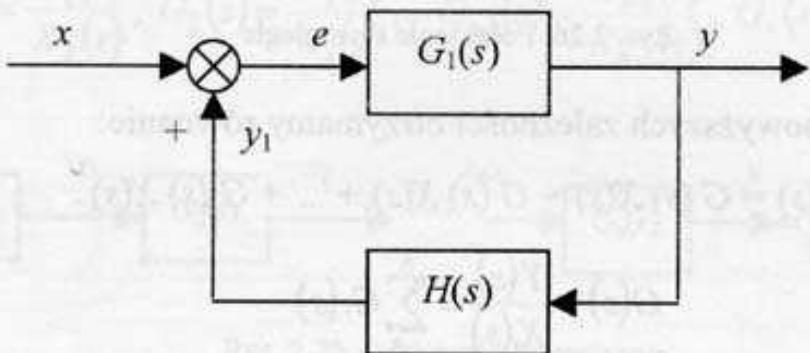
$$Y(s)[1 + G_1(s)H(s)] = G_1(s)X(s).$$

Stąd transmitancję zastępczą układu z rys. 2.7 wyraża wzór:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)H(s)}. \quad (2.34)$$

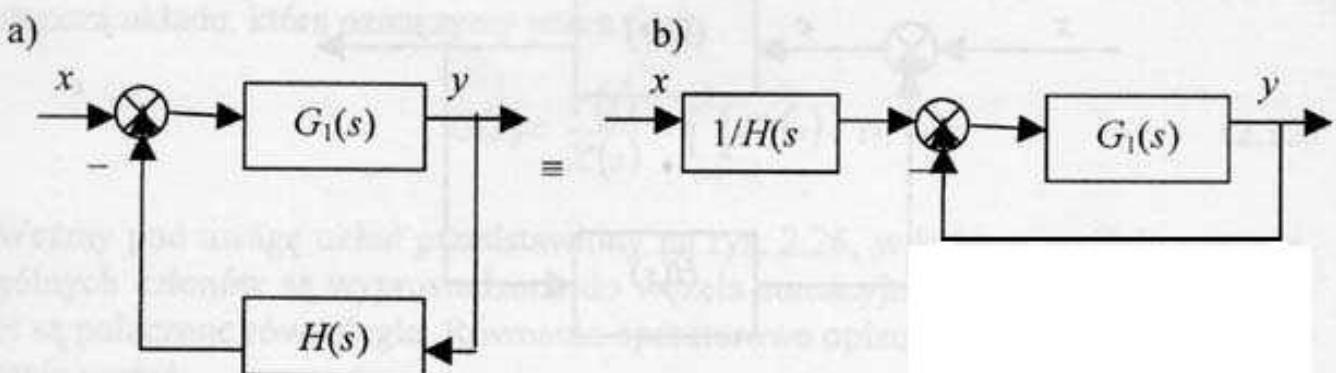
Podobną analizę można przeprowadzić dla układu z dodatnim sprzężeniem zwrotnym, przedstawionym na rys. 2.8. Transmitancję zastępczą takiego układu wyraża zależność:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)H(s)}. \quad (2.35)$$



Rys. 2.28. Układ z dodatnim sprzężeniem zwrotnym

W analizie układu regulacji często zależy nam na uzyskaniu pełnego sprzężenia zwrotnego, dla którego transmitancja toru sprzężenia zwrotnego  $H(s)=1$ . Na rysunku 2.29 przedstawiono zamianę niepełnego sprzężenia zwrotnego w pełne. Zgodnie ze wzorem (2.34) transmitancję układu z rys. 2.29a wyraża zależność:



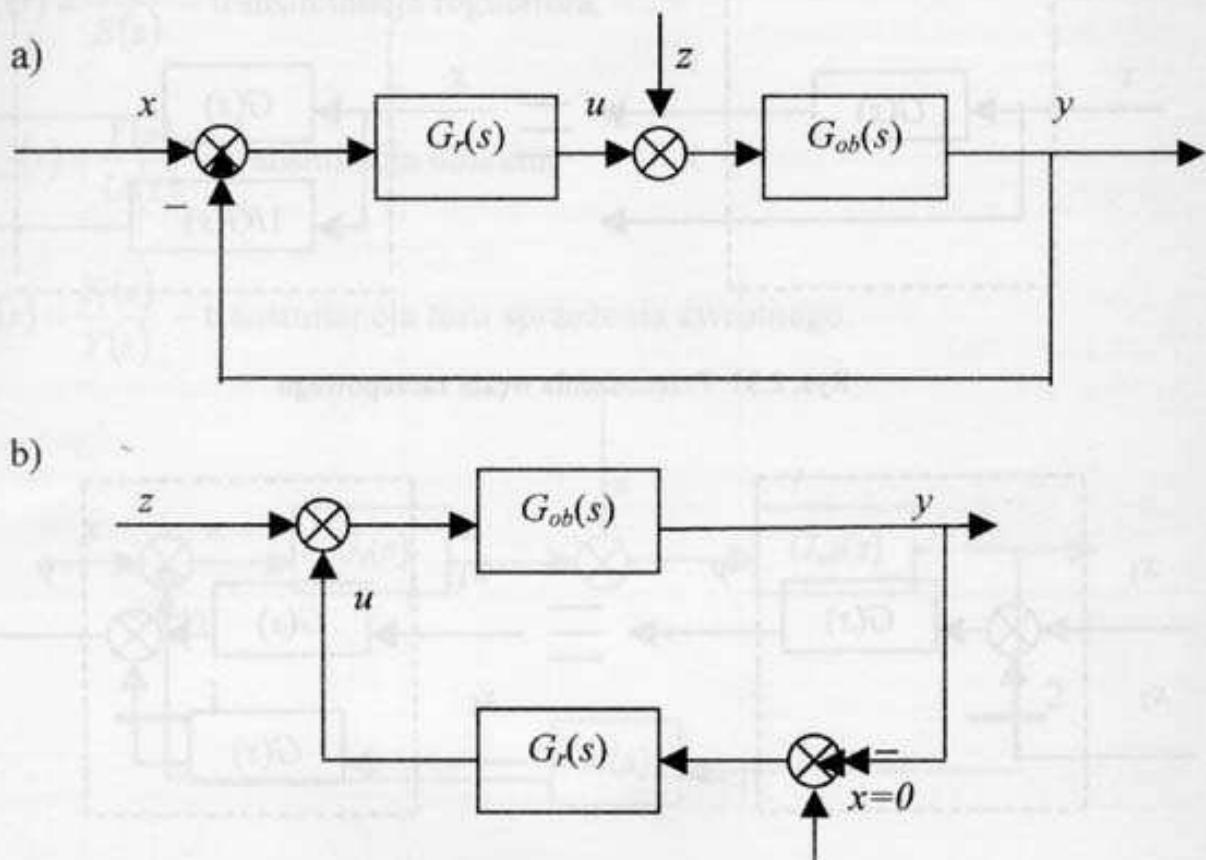
Rys. 2.29. Zamiana niepełnego sprzężenia w pełne: a) układ z niepełnym sprzężeniem zwrotnym, b) układ z pełnym sprzężeniem zwrotnym

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)H(s)}.$$

Układ przedstawiony na rys. 2.29b składa się z bloku o transmitancji  $1/H(s)$  oraz układu z ujemnym pełnym sprzężeniem zwrotnym, które są połączone łańcuchowo. Zatem transmitancję całego układu wyraża zależność:

$$G(s) = \frac{1}{H(s)} \cdot \frac{G_1(s)H(s)}{1 + G_1(s)H(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)H(s)},$$

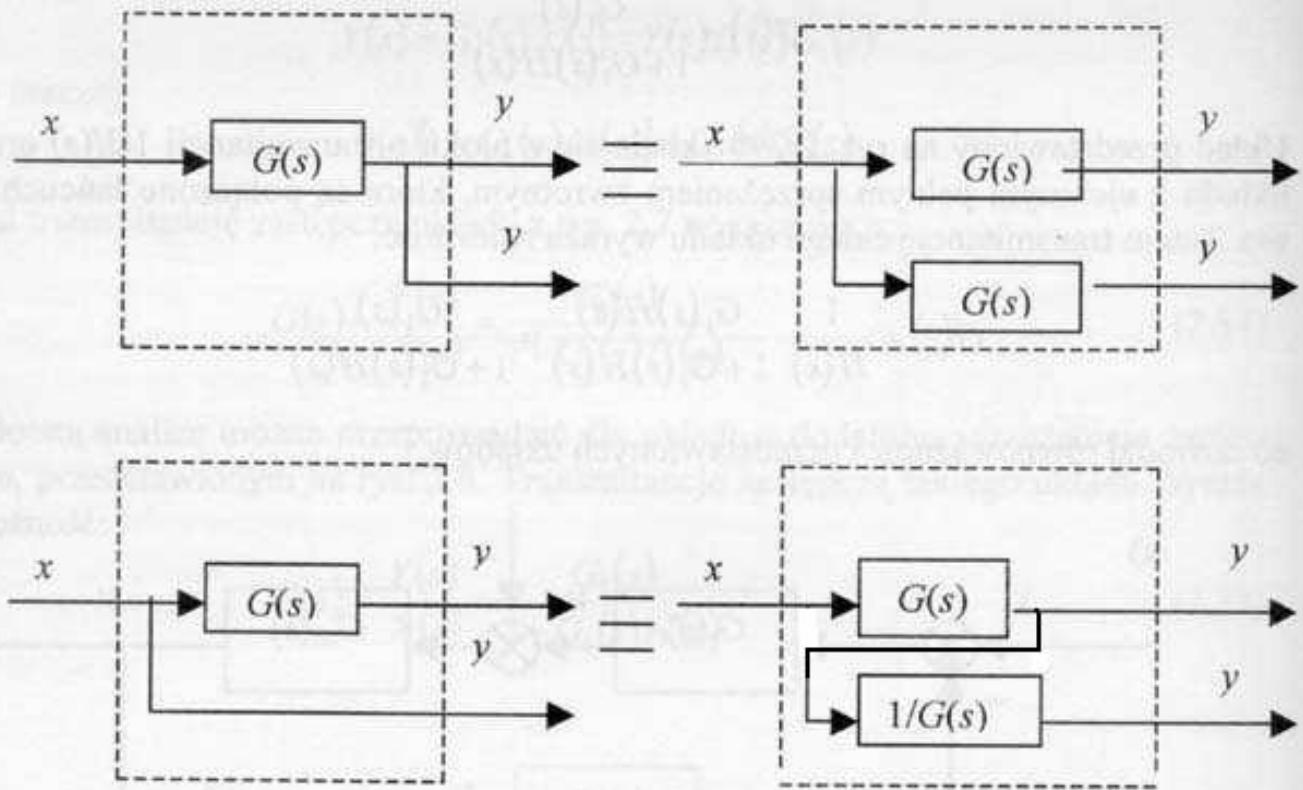
co dowodzi równoważności przedstawionych układów.



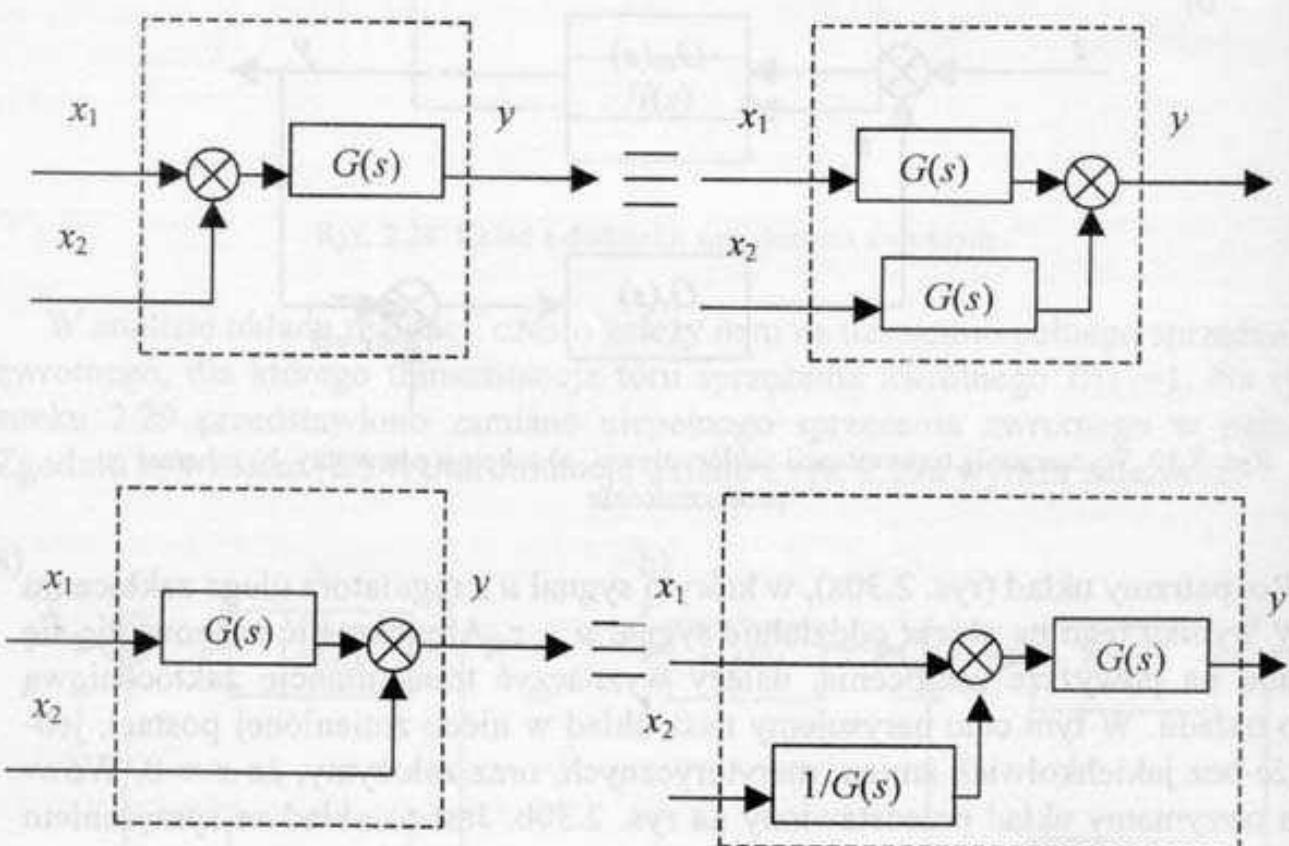
Rys. 2.30. Wyznaczanie transmitancji zakłóceniowej: a) schemat pierwotny, b) schemat po przekształceniu

Rozpatrzmy układ (rys. 2.30a), w którym sygnał  $u$  z regulatora ulega zakłóceniu  $z$ . W wyniku tego na obiekt oddziałuje sygnał  $u + z$ . Aby określić zachowanie się układu na powyższe zakłócenia, należy wyznaczyć transmitancję zakłóceniową tego układu. W tym celu narysujemy nasz układ w nieco zmienionej postaci, jednakże bez jakichkolwiek zmian merytorycznych, oraz założymy, że  $x = 0$ . Wówczas otrzymamy układ przedstawiony na rys. 2.30b. Jest to układ ze sprzężeniem zwrotnym, którego transmitancja ma postać:

$$G(s) = \frac{G_{ob}(s)}{1 + G_{ob}(s)G_r(s)}. \quad (2.36)$$



Rys. 2.31. Przenoszenie węzła zaczepowego



Rys. 2.32. Przenoszenie węzła sumacyjnego

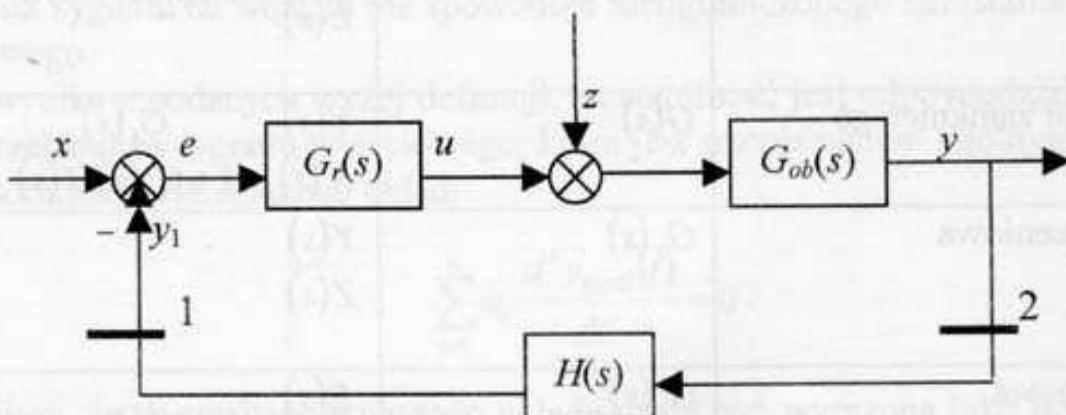
W bardziej złożonych schematach strukturalnych konieczne jest przesuwanie węzłów zaczepowych i sumacyjnych. Zasady te wynikają wprost z rysunków i nie wymagają specjalnego komentarza. Na rysunku 2.31 podano zasady przenoszenia węzła zaczepowego, a na rys. 2.32 zasady przenoszenia węzła sumacyjnego. Pełny zestaw reguł przekształcania schematów blokowych można znaleźć w literaturze [1, 4].

Na koniec podamy pewne związki, które wraz z oznaczeniami transmitancji z rys. 2.33 będziemy najczęściej wykorzystywać w dalszej analizie.

$$G_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)} \text{ -- transmitancja regulatora,}$$

$$G_{ob}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \text{ -- transmitancja obiektu,}$$

$$H(s) = \frac{Y_1(s)}{Y(s)} \text{ -- transmitancja toru sprzężenia zwrotnego.}$$



Rys. 2.33. Schemat blokowy układu regulacji automatycznej

W tablicy 2.2 podano wzory charakterystycznych transmitancji układu. Wyjaśnienia wymagają pojęcia transmitancji układu otwartego oraz transmitancji toru głównego. Układ otwarty uzyskamy, przerywając sprzężenie zwrotne w punkcie oznaczonym 1 na rys. 2.33 i traktując sygnał  $y$  jako wyjściowy. Tor główny natomiast jest wyznaczony przez bloki układu leżące na linii od wejścia z pominięciem sprzężenia zwrotnego (przerwa w punkcie 2). W ostatnich wierszach tablicy 2.2 podano zależności dla układu z pełnym sprzężeniem zwrotnym.

T a b l i c a 2.2. Wzory charakterystycznych transmitancji układu

Transmitancja	Oznaczenie	Wzór
Regulatora	$G_r(s)$	$\frac{U(s)}{E(s)}$
Obiektu	$G_{ob}(s)$	$\frac{Y(s)}{U(s)}$
Toru sprzężenia zwrotnego	$H(s)$	$\frac{Y_1(s)}{Y(s)}$
Układu otwartego	$G_0(s)$	$\frac{Y_1(s)}{X(s)} = G_r(s)G_{ob}(s)H(s)$
Toru głównego	$G_1(s)$	$\frac{Y(s)}{E(s)} = G_r(s)G_{ob}(s)$
Układu zamkniętego	$G(s)$	$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)H(s)}$
Zakłóceniowa	$G_z(s)$	$\frac{Y(s)}{Z(s)}$
Uchybowa	$G_e(s)$	$\frac{E(s)}{X(s)} = 1 - G(s)$
Dla układu z pełnym sprzężeniem zwrotnym $H(s) = 1$		
Zakłóceniowa	$G_z(s)$	$\frac{G_{ob}(s)}{1 + G_{ob}(s)G_r(s)}$
Uchybowa	$G_e(s)$	$\frac{1}{1 + G_o(s)}$

## 2.6. Stabilność układów regulacji

**D e f i n i c j a 2.21.** Układ liniowy nazywamy stabilnym, jeżeli składowa przejściowa sygnału  $y_{\text{przej}}(t)$  jest ograniczona lub nie istnieje. Powyższy warunek formalnie możemy zapisać następująco:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{przej}}(t) < \infty \text{ lub } y_{\text{przej}} \text{ nie istnieje.} \quad (2.37)$$

**D e f i n i c j a 2.22.** Układ liniowy nazywamy stabilnym asymptotycznie, jeżeli składowa przejściowa sygnału wyjściowego  $y(t)$  dąży do zera dla  $t \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\text{przej}}(t) = 0. \quad (2.38)$$

O układzie stabilnym (w sensie definicji 2.21) mówimy, że znajduje się na granicy stabilności. W układach automatycznej regulacji (UAR) wymagamy stabilności asymptotycznej, która zapewni, że:

- dla ograniczonego sygnału wejściowego sygnał wyjściowy jest również ograniczony,
- zanik sygnału na wejściu nie spowoduje nieograniczonego narastania sygnału wyjściowego.

Jak wynika z podanych wyżej definicji, za stabilność jest odpowiedzialna składowa przejściowa sygnału wyjściowego, która jest rozwiązaniem ogólnym równania jednorodnego opisującego układ:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i y_{\text{przej}}(t)}{dt^i} = 0. \quad (2.39)$$

Przymijmy, że transmitancja naszego układu może być wyrażona jako iloraz wielomianów  $L(s)$  i  $M(s)$ :

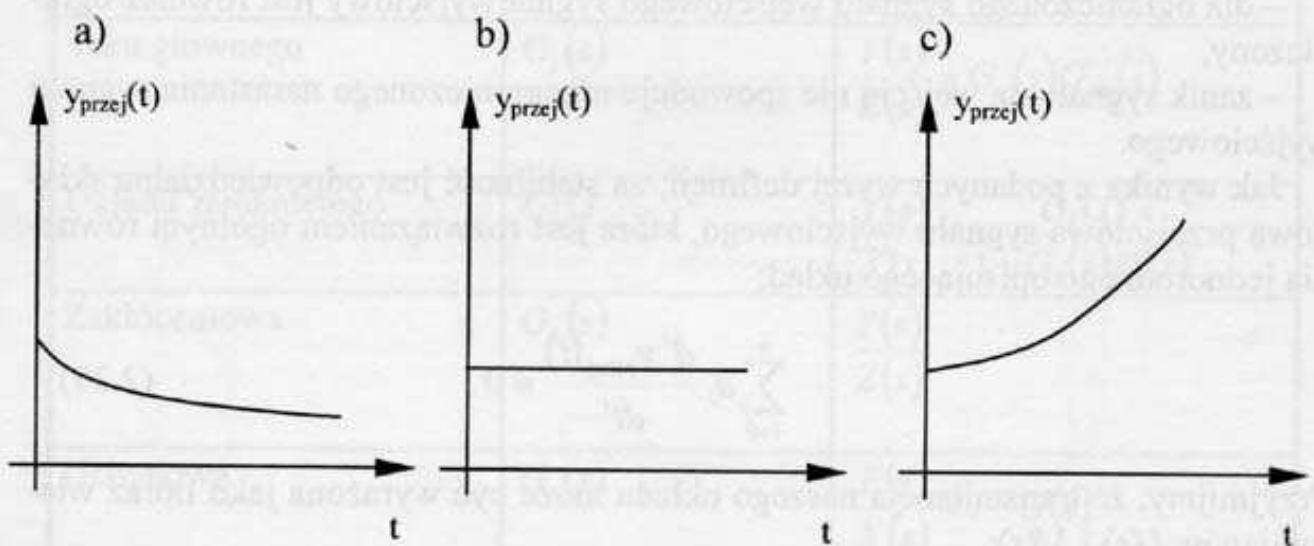
$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)}. \quad (2.40)$$

**D e f i n i c j a 2.23.** Wielomian  $M(s)$  nazywamy wielomianem charakterystycznym układu, natomiast równanie  $M(s) = 0$  równaniem charakterystycznym układu.

O stabilności układu decydują zatem pierwiastki równania charakterystycznego układu. Rozpatrzymy najpierw charakter rozwiązań równania (2.39), gdy rzad równania jest równy jedności. Jak wiadomo, rozwiązaniem równania różniczkowego pierwszego rzędu jest funkcja wykładnicza

$$y = C e^{rt}, \quad (2.41)$$

gdzie  $C$  jest stałą, a  $r$  jest pierwiastkiem rzeczywistym równania charakterystycznego, który może przyjmować następujące wartości:  $r < 0$ ,  $r = 0$ ,  $r > 0$ . Dla poszczególnych przypadków na rys. 2.34 naszkicowano charakter krzywych  $y_{\text{przej}}(t)$ . Jak widać, gdy  $r < 0$ ,  $y_{\text{przej}}(t) \rightarrow 0$ , czyli w myśl definicji 2.22 jest to przebieg charakterystyczny dla układu stabilnego. Dla  $r = 0$  uzyskujemy ograniczony sygnał wyjściowy, zatem mamy do czynienia z układem znajdującym się na granicy stabilności. Przypadek  $r > 0$  jest charakterystyczny dla układu niestabilnego, w którym  $y_{\text{przej}}(t)$  rośnie nieograniczenie. Podobną analizę możemy przeprowadzić w odniesieniu do równania II rzędu. Rozpatrzymy dwa przypadki ogólne: pierwszy dla pierwiastków rzeczywistych, a drugi dla zespolonych. Pierwszy przypadek jest złożeniem rozpatrywanych przebiegów dla równania I rzędu. Wynika to z faktu, że równanie charakterystyczne można przedstawić w postaci iloczynowej, a tym samym transmitancję można przedstawić jako sumę ułamków prostych. Przebieg  $y_{\text{przej}}(t)$  otrzymamy wówczas, sumując przebiegi dla poszczególnych ułamków prostych.



Rys. 2.34. Przebiegi składowej przejściowej sygnału wyjściowego dla równania I rzędu: a)  $r < 0$ , b)  $r = 0$ , c)  $r > 0$

Inaczej przedstawia się problem w przypadku pierwiastków zespolonych. Założymy najpierw, że rozwiązaniem równania charakterystycznego są pierwiastki zespolone sprzężone o ujemnej części rzeczywistej. Położenie ich zaznaczono na rys. 2.35a (przypadek 1). Przewidywanym rozwiązaniem równania różniczkowego (2.39) jest funkcja:

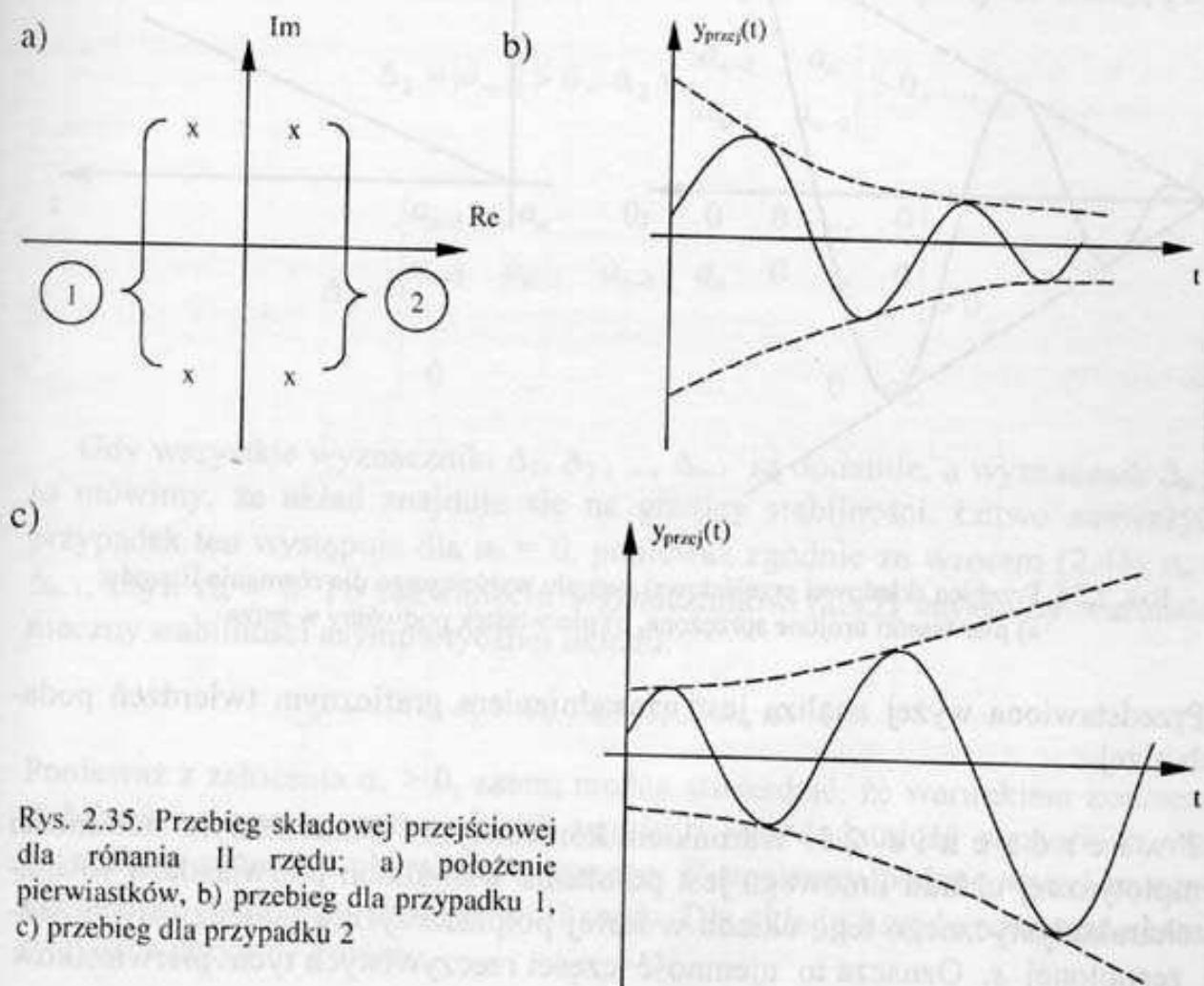
$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad (2.42)$$

gdzie  $r_1, r_2$  są pierwiastkami naszego równania.

Niech  $r_1 = -a + jb$  oraz  $r_2 = -a - jb$  (zgodnie z rys. 2.35a). Wówczas rozwiązań przyjmie postać:

$$y = c_1 e^{(-a+jb)t} + c_2 e^{(-a-jb)t} = c_1 e^{-at} e^{jbt} + c_2 e^{-at} e^{-jbt} = e^{-at} (c_1 e^{jbt} + c_2 e^{-jbt}) \quad (2.43)$$

Można wykazać, że wyrażenie w nawiasie we wzorze (2.43) opisuje funkcję sinusoidalną, natomiast amplituda tej funkcji zmienia się według zależności  $e^{-at}$ . Przebieg zależności (2.43) podano na rys. 2.35b.



Rys. 2.35. Przebieg składowej przejściowej dla równania II rzędu; a) położenie pierwiastków, b) przebieg dla przypadku 1, c) przebieg dla przypadku 2

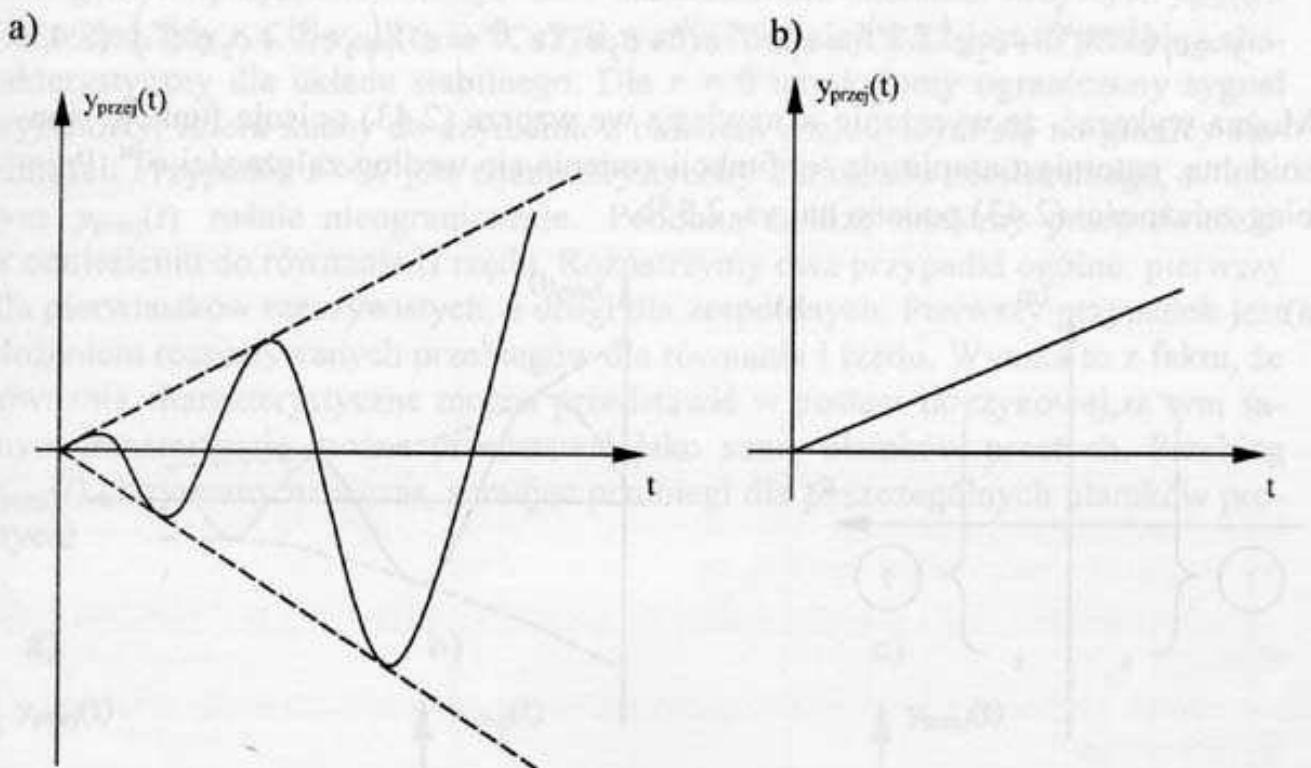
W przypadku oznaczonym na rys. 2.35a jako 2 pierwiastki wynoszą:  $r = a + jb$  oraz  $r = a - jb$ . Podobnie jak w wyrażeniu (2.43) uzyskamy przebieg sinusoidalny, którego amplituda będzie się zmieniać zgodnie z funkcją  $y = e^{-at}$ . Oznacza to na wykresie przebieg (rys. 2.35c), w którym amplituda rośnie wykładniczo.

Dla pełnej analizy równania II rzędu pozostały nam do rozpatrzenia dwa przypadki:

- pierwiastki ujęte sprzężone,
- pierwiastki rzeczywiste podwójne.

Odnośne przebiegi podano na rys. 2.36. Przebieg wielkości wyjściowej dla pierwiastków ujętych sprzężonych przedstawiono na rys. 2.36a, natomiast prze-

bieg dla pierwiastka podwójnego w zerze – na rys. 2.36b. Dla pierwiastków  $r_{1,2} \neq 0$  wykres ulegnie jedynie przesunięciu o wartość  $r_{1,2}$ .



Rys. 2.36. Przebieg składowej przejściowej sygnału wyjściowego dla równania II rzędu:  
a) pierwiastki urojone sprzężone, b) pierwiastek podwójny w zerze

Przedstawiona wyżej analiza jest uzasadnieniem graficznym twierdzeń podanych niżej.

**T w i e r d z e n i e 2.1.** Warunkiem koniecznym i dostatecznym stabilności asymptotycznej układu liniowego jest położenie wszystkich pierwiastków równania charakterystycznego tego układu w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej  $s$ . Oznacza to ujemność części rzeczywistych tych pierwiastków z wyłączeniem osi urojonej.

**T w i e r d z e n i e 2.2.** Układ liniowy jest na granicy stabilności, jeśli ma pojedyncze pierwiastki położone na osi urojonej, a wszystkie pozostałe w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej  $s$ .

W świetle powyższych twierdzeń można uznać, że badanie stabilności układu liniowego polega na badaniu położenia pierwiastków jego równania charakterystycznego. Rozwiązywanie równania charakterystycznego może być niekiedy zbyt uciążliwe, stąd zależy nam na sformułowaniu twierdzeń pozwalających na badanie stabilności bez rozwiązywania równania charakterystycznego. Twierdzenia takie

nazywamy kryteriami stabilności. Omówimy wybrane kryteria: jedno z grupy kryteriów analitycznych, a drugie z grupy kryteriów analityczno-graficznych.

### Kryterium Hurwitz'a

**Twierdzenie 2.3.** Układ o równaniu charakterystycznym

$$M(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0, \quad (2.44)$$

przy założeniu, że  $a_n > 0$ , jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Delta_1 = |a_{n-1}| > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad (2.45)$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_0 \end{vmatrix} > 0.$$

Gdy wszystkie wyznaczniki  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$  są dodatnie, a wyznacznik  $\Delta_n = 0$ , to mówimy, że układ znajduje się na granicy stabilności. Łatwo zauważyć, że przypadek ten występuje dla  $a_0 = 0$ , ponieważ zgodnie ze wzorem (2.45)  $\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}$ , czyli  $\Delta_n > 0$ . Po rozwinięciu wyznaczników (2.45) uzyskamy warunek konieczny stabilności asymptotycznej układu:

$$a_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.46)$$

Ponieważ z założenia  $a_n > 0$ , zatem można stwierdzić, że warunkiem koniecznym stabilności asymptotycznej układu regulacji jest dodatniość wszystkich współczynników równania charakterystycznego. Rozpatrzmy podane wyżej zależności dla analizy stabilności układów I i II rzędu. Dla układu I rzędu równanie charakterystyczne przyjmie postać:

$$M(s) = a_1 s + a_0 = 0.$$

Warunek konieczny stabilności:  $a_1 > 0, a_0 > 0$  jest równoważny warunkowi dośćecznemu:  $\Delta_1 = |a_0| > 0$ . Dla układu II rzędu mamy:

$$M(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

oraz warunek konieczny  $a_2 > 0, a_1 > 0, a_0 > 0$ . Wyznaczniki (2.45) przyjmą postać zależności:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0 > 0, \quad \Delta_1 = |a_1| > 0,$$

które są spełnione na podstawie warunku koniecznego. Możemy zatem sformułować następujący wniosek ogólny w postaci twierdzenia.

**Wniosek 2.4.** Dla układów liniowych I i II stopnia warunek konieczny stabilności jest zarazem warunkiem dostatecznym.

**Przykład 2.11.** Określić stabilność układu regulacji, jeżeli transmitancja układu otwartego ma postać:

$$G_0(s) = \frac{2s^2 + 1}{s^3 + s + 2}.$$

**Rozwiązańe.** Z zależności na transmitancję zastępczą zamkniętego układu regulacji (układu z pełnym sprzężeniem zwrotnym) równanie charakterystyczne układu regulacji przyjmie postać:

$$M(s) = L_0(s) + M_0(s) = 2s^2 + 1 + s^3 + s + 2 = 0,$$

$$M(s) = s^3 + 2s^2 + s + 3 = 0.$$

Warunek konieczny jest spełniony, ponieważ

$$a_0 = 3 > 0, \quad a_1 = 1 > 0, \quad a_2 = 2 > 0, \quad a_3 = 1 > 0.$$

**Sprawdzenie warunku dostatecznego:**

$$\Delta_1 = |a_2| = 2 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1 < 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \Delta_2 = 3 \cdot (-1) = -3 < 0.$$

Ponieważ wartości wyznaczników stopnia drugiego i trzeciego są ujemne (nie spełniają warunku dostatecznego), zatem układ regulacji jest niestabilny.

Warto zwrócić uwagę, że dla celów analizy stabilności wystarczy badać, oprócz warunku koniecznego, podwyznaczniki II rzędu i wyższych, aż do  $(n-1)$ . Wynika to z faktu, że wyznacznik  $\Delta_0 > 0$  pokrywa się z warunkiem koniecznym ( $a_0 > 0$ ),

a wyznacznik  $\Delta_n$  jest równy  $a_0 \Delta_{n-1}$  i zarazem  $a_0 > 0$  z warunku koniecznego (np. dla układu IV rzędu sprawdzamy, oprócz warunku koniecznego, znaki wyznaczników  $\Delta_2$  i  $\Delta_3$ ).

**Kryterium Nyquista.** Kryterium to służy do badania stabilności układu regulacji na podstawie znajomości zachowania się układu otwartego i jego charakterystyki amplitudowo-fazowej. Rozpatrzmy układ regulacji podany na rys. 2.37. Niech transmitancja układu otwartego ma postać:

$$G_0(s) = \frac{L_0(s)}{M_0(s)},$$

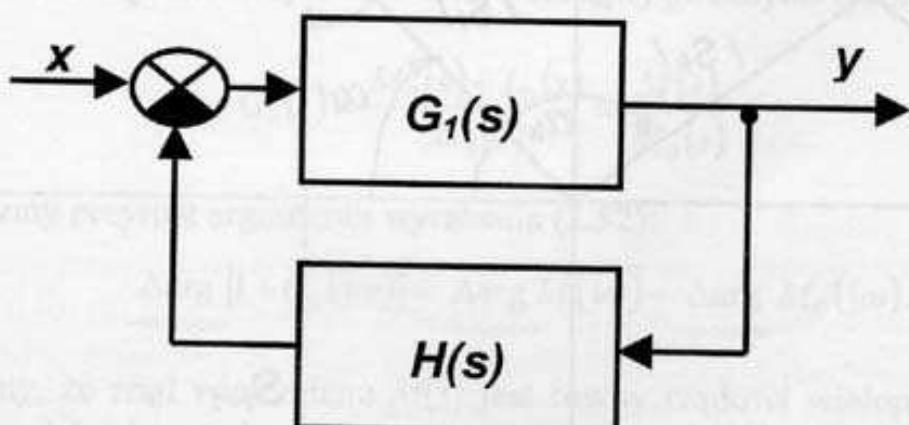
wtedy

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{G_1(s)M_0(s)}{L_0(s) + M_0(s)}.$$

Równanie charakterystyczne naszego układu regulacji ma zatem postać:

$$M(s) = L_0(s) + M_0(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0. \quad (2.47)$$

Sformułujemy na wstępie twierdzenie pomocnicze (zwane często kryterium Michajłowa).



Rys. 2.37. Analizowany układ regulacji

**T w i e r d z e n i e 2.5.** Równanie (2.47) dla  $a_n > 0$  ma wszystkie pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy przyrost argumentu  $M(j\omega)$  przy zmianie pulsacji od  $-\infty$  do  $+\infty$  wynosi  $n\pi$ .

Formalnie twierdzenie 2.5 możemy zapisać następująco:

$$\underset{-\infty < \omega < \infty}{\Delta \arg M(j\omega)} = n\pi. \quad (2.48)$$

D o w ó d . Założymy, że pierwiastkami równania (2.47) są  $s_1, s_2 \dots, s_n$ , przy czym nie muszą to być pierwiastki różne. Równanie charakterystyczne możemy wtedy zapisać w postaci iloczynowej:

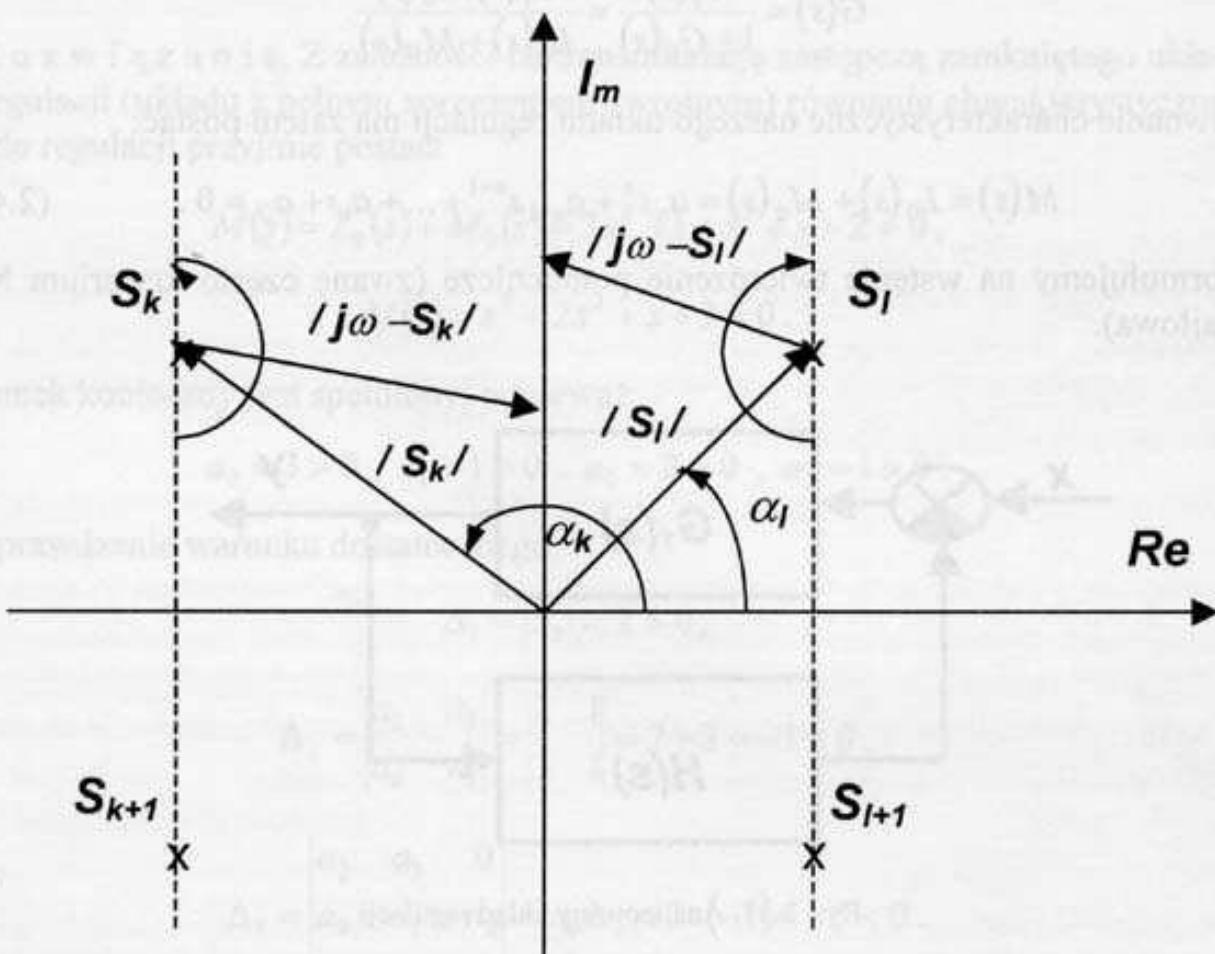
$$M(s) = a_n(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = 0$$

lub

$$M(j\omega) = a_n(j\omega - s_1)(j\omega - s_2) \dots (j\omega - s_n) = 0.$$

Przyrost argumentu wyrażenia  $M(j\omega)$  jest zatem sumą poszczególnych przyrostów.

$$\Delta \arg M(j\omega) = \sum_{i=1}^n \Delta \arg (j\omega - s_i). \quad (2.49)$$



Rys. 2.38. Analiza przyrostu argumentu równania charakterystycznego w zależności od położenia pierwiastków

Na rysunku 2.38 zaznaczono zmianę argumentu dla pierwiastków położonych w lewej w prawej półpłaszczyźnie. Punkt  $s_k$  leży w lewej półpłaszczyźnie, a jego położenie określa wektor wodzący o długości  $|s_k|$  i kącie  $\alpha_k$ . Na rysunku 2.38 zaznaczono również różnicę  $(j\omega - s_k)$ . Dla różnych wartości  $\omega$  koniec wektora różniwy przesuwa się po osi urojonej. Przy zmianie pulsacji od  $-\infty$  do  $+\infty$  zakreśla on

kąt równy  $+\pi$  (zgodnie z kierunkiem matematycznie dodatnim – przeciwnym do ruchu wskazówek zegara). Podobna sytuacja zachodzi dla wszystkich pierwiastków leżących w lewej półpłaszczyźnie. Dla pierwiastków leżących w prawej półpłaszczyźnie analogiczna analiza prowadzi do wniosku, że przy zmianie pulsacji od  $-\infty$  do  $+\infty$  wektor różnicy  $(j\omega - s_i)$  zakreśla kąt równy  $-\pi$ . Założymy, że nasze równanie charakterystyczne (2.47) ma  $k$  pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie, a resztę, tzn.  $(n-k)$ , w lewej. Możemy wtedy zapisać, że

$$\underset{-\infty < \omega < \infty}{\Delta \arg M(j\omega)} = -k\pi + (n-k)\pi = (n-2k)\pi. \quad (2.50)$$

Z zależności (2.50) wynika dowód twierdzenia 2.5 w obie strony, ponieważ dla  $k=0$  otrzymujemy zależność (2.48); także odwrotnie, zakładając słuszność tezy (zależność 2.48), otrzymamy  $k=0$ , co należało dowieść.

Na podstawie udowodnionego wyżej twierdzenia możemy dowieść prawdziwości kryterium Nyquista.

**T w i e r d z e n i e 2.6.** Układ automatycznej regulacji jest stabilny asymptotycznie (przy założeniu, że jest on stabilny w stanie otwartym) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\underset{-\infty < \omega < \infty}{\Delta \arg [1+G_0(j\omega)]} = 0. \quad (2.51)$$

**D o w ó d.** Zgodnie z rys. 2.37 oraz wcześniej podanymi założeniami otrzymamy:

$$1+G_0(s) = \frac{M_0(s)+L_0(s)}{M_0(s)} = \frac{M(s)}{M_0(s)}. \quad (2.52)$$

Wyznaczmy przyrost argumentu wyrażenia (2.52):

$$\underset{-\infty < \omega < \infty}{\Delta \arg [1+G_0(j\omega)]} = \underset{-\infty < \omega < \infty}{\Delta \arg M(j\omega)} - \underset{-\infty < \omega < \infty}{\Delta \arg M_0(j\omega)}.$$

Zauważmy, że rząd wielomianu  $M(s)$  jest równy rzadowi wielomianu  $M_0(s)$ , ponieważ rząd  $L_0(s)$  jest nie większy od rzędu  $M_0(s)$ , i przyjmijmy, że jest on równy  $n$ . Założymy, że równanie charakterystyczne układu regulacji  $M(s)=0$  ma  $k$  pierwiastków w prawej płaszczyźnie. Wówczas w myśl twierdzenia 2.5 otrzymamy:

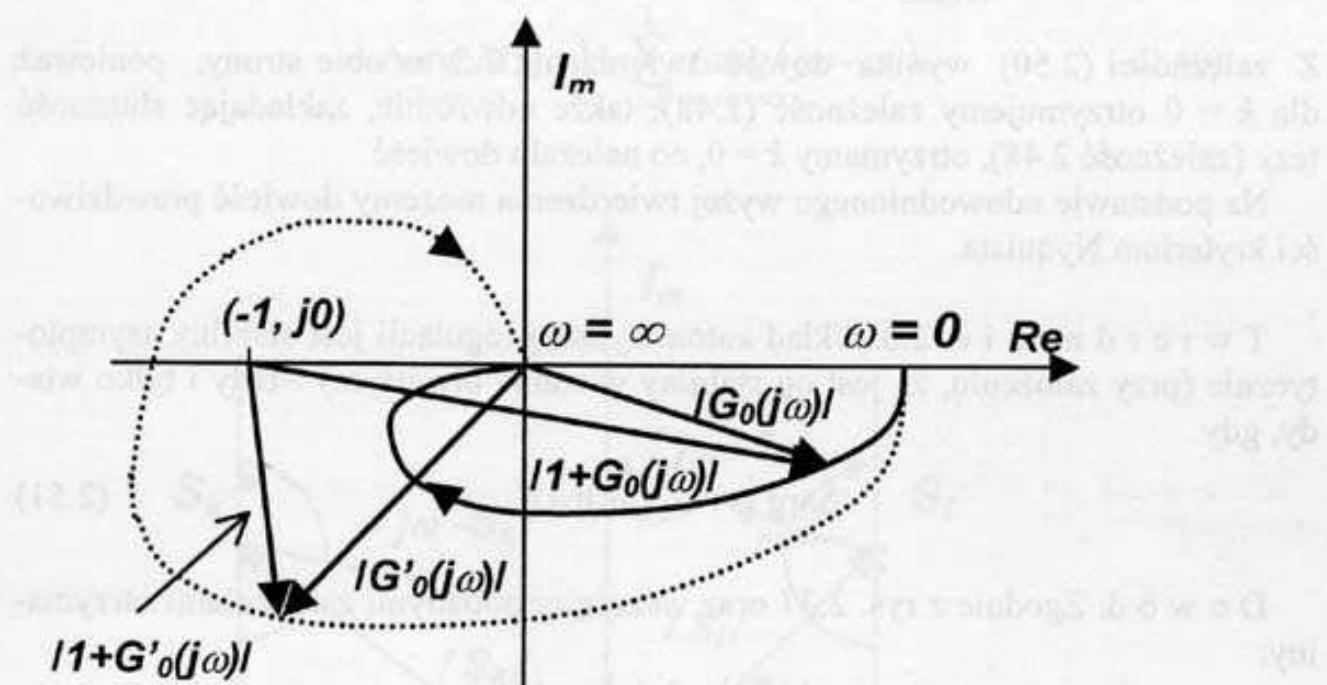
$$\underset{-\infty < \omega < \infty}{\Delta \arg [1+G_0(j\omega)]} = (n-2k)\pi - n\pi = -2k\pi. \quad (2.53)$$

Z powyższej zależności wynika dowód twierdzenia w obie strony (z warunku koniecznego i dostatecznego – twierdzenie 2.3  $k=0$ ), co należało dowieść.

To sformułowanie kryterium Nyquista jest w praktyce rzadko stosowane. Częściej wykorzystuje się sformułowanie podane niżej.

**T w i e r d z e n i e 2.7.** Układ automatycznej regulacji jest stabilny asymptotycznie, przy założeniu jego stabilności asymptotycznej w stanie otwartym, wtedy i tylko wtedy, gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego przy zmianie pulsacji od 0 do  $\infty$  nie obejmuje punktu o współrzędnych  $(-1, j0)$ .

Twierdzenie 2.7 wynika bezpośrednio z twierdzenia 2.6. W celu bliższego wyjaśnienia tego związku przeanalizujemy rys. 2.39 przedstawiający charakterystykę amplitudowo-fazową układu otwartego.



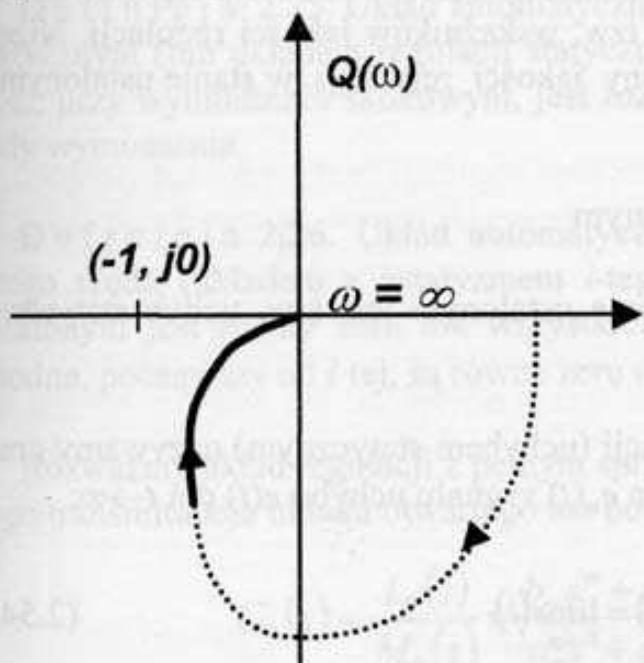
Rys. 2.39. Graficzna analiza kryterium Nyquista

Przy zmianie pulsacji  $\omega$  od 0 do  $\infty$  zmieniają swoje położenie wektory  $G_0(j\omega)$  oraz  $1+G_0(j\omega)$ . Dla podanej na rys. 2.39 charakterystyki oznaczonej linią ciągłą wektor  $1+G(j\omega)$  zakreśla kąt, który dla całego przedziału pulsacji  $(0, \infty)$  jest równy zero. W przypadku charakterystyki oznaczonej linią przerywaną, obejmującej punkt  $(-1, j0)$ , wektor  $1+G_0(j\omega)$  zatoczy kąt równy  $-2\pi$ . W myśl sformułowania zgodnego z twierdzeniem 2.7 układ regulacji, którego charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego  $G_0(j\omega)$  jest oznaczona linią ciągłą, będzie stabilny, natomiast układ, którego odnośna charakterystyka jest wykreślona linią przerywaną, będzie niestabilny.

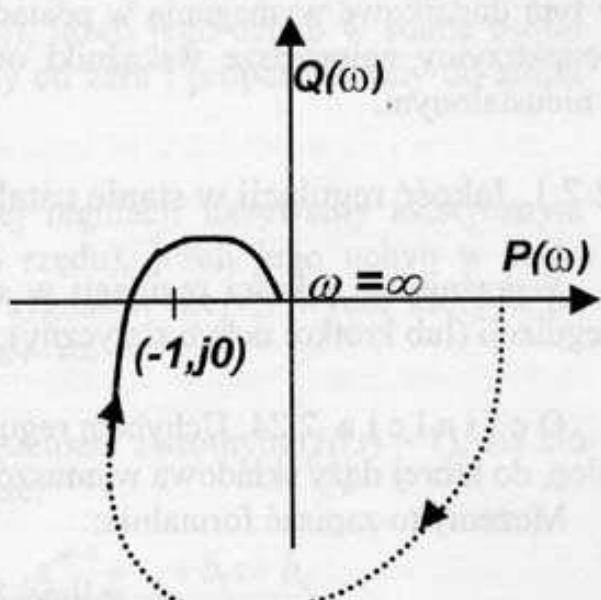
W praktyce częsty jest przypadek, że transmitancja układu otwartego ma  $k$ -krotny biegum zerowy. Wówczas zaliczamy ten biegum do lewej półpłaszczyzny, co odpowiada zamknięciu wykresu transmitancji widmowej tego układu łukiem okręgu o nieskończonym promieniu i kącie  $-k\pi/2$  dla  $\omega = 0$ . Na rysunku 2.40 przedstawiono uzupełnienie charakterystyki (linia przerywana) dla bieguna jednokrotnego ( $k = 1$ ), natomiast na rys. 2.41 dla bieguna dwukrotnego ( $k = 2$ ). W obu

przypadkach wariant a) odpowiada stabilnemu układowi regulacji, a wariant b) niestabilnemu.

a)

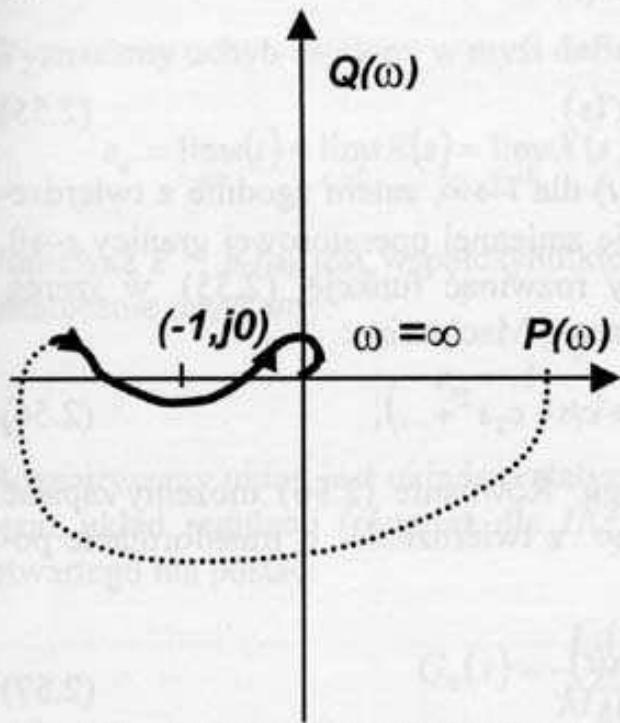


b)

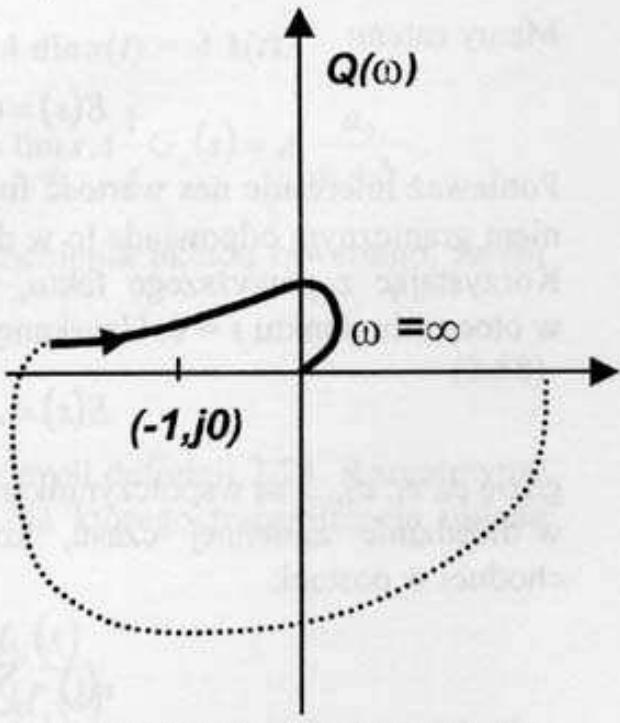


Rys. 2.40. Zamknięcie wykresu transmitancji widmowej dla jednokrotnego bieguna: a) układ stabilny, b) układ niestabilny

a)



b)



Rys. 2.41. Zamknięcie wykresu transmitancji widmowej dla bieguna dwukrotnego: a) układ stabilny, b) układ niestabilny

## 2.7. Jakość regulacji

Stabilność asymptotyczna układów regulacji automatycznej jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym, przydatności UAR. Formułuje się w związku z tym dodatkowe wymagania w postaci tzw. wskaźników jakości regulacji. Niżej rozpatrzmy najprostsze wskaźniki oceny jakości regulacji w stanie ustalonym i nieustalonym.

### 2.7.1. Jakość regulacji w stanie ustalonym

Wskaźnikiem jakości regulacji w stanie ustalonym jest tzw. uchyb statyczny regulacji (lub krótko: uchyb statyczny).

**D e f i n i c j a 2.24.** Uchybem regulacji (uchybem statycznym) nazywamy granicę, do której dąży składowa wymuszona  $e_w(t)$  sygnału uchybu  $e(t)$  dla  $t \rightarrow \infty$ .

Możemy to zapisać formalnie:

$$e_u = \lim_{t \rightarrow \infty} e_w(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t). \quad (2.54)$$

Przebieg  $e(t)$  można wyznaczyć jako oryginał funkcji  $E(s)$  uzyskanej z transmitancji uchybowej:

$$G_e(s) = \frac{E(s)}{X(s)}.$$

Mamy zatem:

$$E(s) = G_e(s) \cdot X(s). \quad (2.55)$$

Ponieważ interesuje nas wartość funkcji  $e(t)$  dla  $t \rightarrow \infty$ , zatem zgodnie z twierdzeniem granicznym odpowiada to w dziedzinie zmiennej operatorowej granicy  $s \rightarrow 0$ . Korzystając z powyższego faktu, możemy rozwinąć funkcję (2.55) w szereg w otoczeniu punktu  $s = 0$ . Uzyskamy tzw. szereg Maclaurina:

$$E(s) = X(s)(c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots), \quad (2.56)$$

gdzie  $c_0, c_1, c_2, \dots$  są współczynnikami szeregu. Równanie (2.56) możemy zapisać w dziedzinie zmiennej czasu, korzystając z twierdzenia o transformacie pochodnej w postaci:

$$e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \quad (2.57)$$

Współczynniki  $c_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , nazywamy współczynnikami uchybu. W zależności od wartości uchybu ustalonego wyróżnimy statyczne i astatyczne układy regulacji automatycznej.

**Definicja 2.25.** Układ automatycznej regulacji (UAR) nazywamy układem statycznym (lub układem regulacji statycznej), jeżeli jego uchyb w stanie ustalonym, przy wymuszeniu skokowym, jest różny od zera i proporcjonalny do amplitudy wymuszenia.

**Definicja 2.26.** Układ automatycznej regulacji nazywamy astatycznym  $l$ -tego rzędu (układem z astatyzmem  $l$ -tego rzędu), jeżeli jego uchyb w stanie ustalonym jest równy zeru dla wszystkich sygnałów wejściowych, których pochodne, począwszy od  $l$ -tej, są równe zeru dla  $t \rightarrow \infty$ .

Rozważmy układ regulacji z pełnym sprzężeniem zwrotnym ( $H(s) = 1$ ), dla którego transmitancja układu otwartego ma postać:

$$G_0(s) = \frac{L_0(s)}{M_0(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Wówczas transmitancję uchybową wyraża wzór:

$$G_e(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} = \frac{M_0(s)}{L_0(s) + M_0(s)}.$$

Wyznaczmy uchyb ustalony w myśl definicji 2.24 dla  $x(t) = A \mathbf{1}(t)$ .

$$e_u = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} X(s) G_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s A \frac{1}{s} G_e(s) = A \frac{a_0}{a_0 + b_0}.$$

Ponieważ  $k = b_0/a_0$  jest współczynnikiem wzmacnienia układu otwartego, zatem ostatecznie uzyskamy:

$$e_u = A \frac{1}{1 + k}. \quad (2.58)$$

Rozpatrywany układ jest układem statycznym w myśl definicji 2.24. Rozpatrzymy teraz układ regulacji (również dla  $H(s) = 1$ ), dla którego transmitancja układu otwartego ma postać:

$$G_0(s) = \frac{L_0(s)}{M_0(s)} = \frac{L_0(s)}{s' M_1(s)},$$

natomiast odpowiednią transmitancję uchybową wyraża wzór:

$$G_e(s) = \frac{1}{1+G_0(s)} = \frac{s^l M_1(s)}{s^l M_1(s) + L_0(s)}.$$

Ponieważ w liczniku powyższego wyrażenia wyrazy przy  $s^0, s^1, s^2, \dots, s^{l-1}$  są równe zeru, zatem współczynniki uchybu  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{l-1}$  również będą równe zeru.

Z powyższych rozważań wynikają następujące definicje dla układów z pełnym sprzężeniem zwrotnym.

**Definicja 2.27.** Układ automatycznej regulacji nazywamy statycznym, jeżeli jego transmitancja w stanie otwartym nie ma biegunków zerowych (w układzie nie występują człony całkujące).

**Definicja 2.28.** Układ automatycznej regulacji nazywamy astatycznym  $l$ -tego rzędu, jeżeli jego transmitancja w stanie otwartym ma  $l$ -krotny biegun zerowy.

Założmy

$$G_0(s) = \frac{L_0(s)}{s^l M_1(s)}$$

oraz wymuszenie  $l$ -tego rzędu  $x(t) = t^l$ . Transmitancja uchybową ma postać:

$$G_e(s) = \frac{s^l M_1(s)}{L_0(s) + s^l M_1(s)}.$$

Uchyb ustalony wyznaczamy zgodnie z definicją 2.24 następująco:

$$\begin{aligned} e_u &= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)G_e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{l!}{s^{l+1}} \frac{s^l M_1(s)}{L_0(s) + s^l M_1(s)} = \\ &= l! \lim_{s \rightarrow 0} \frac{M_1(s)}{L_0(s) + s^l M_1(s)} = l! \frac{a_l}{b_0} = l! \frac{1}{k}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

gdzie  $k = b_0/a_l$ .

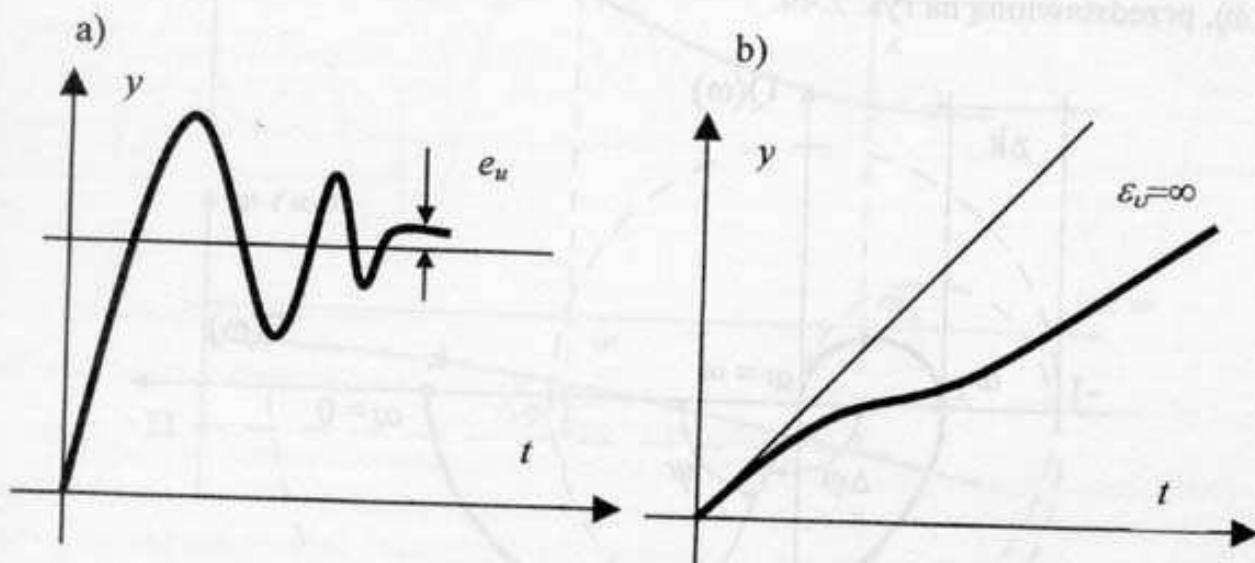
Podsumujmy rozważania dotyczące uchybu statycznego w zależności od rzędu wymuszenia  $i$  oraz rzędu astatyzmu  $l$  układu.

Jeżeli  $i < l$ , to  $e_u = 0$ ;

$$\text{jeżeli } i = l, \text{ to } e_u = \begin{cases} A \frac{1}{1+k} & \text{dla } l = 0 \\ l! \frac{1}{k} & \text{dla } l \neq 0; \end{cases} \quad (2.60)$$

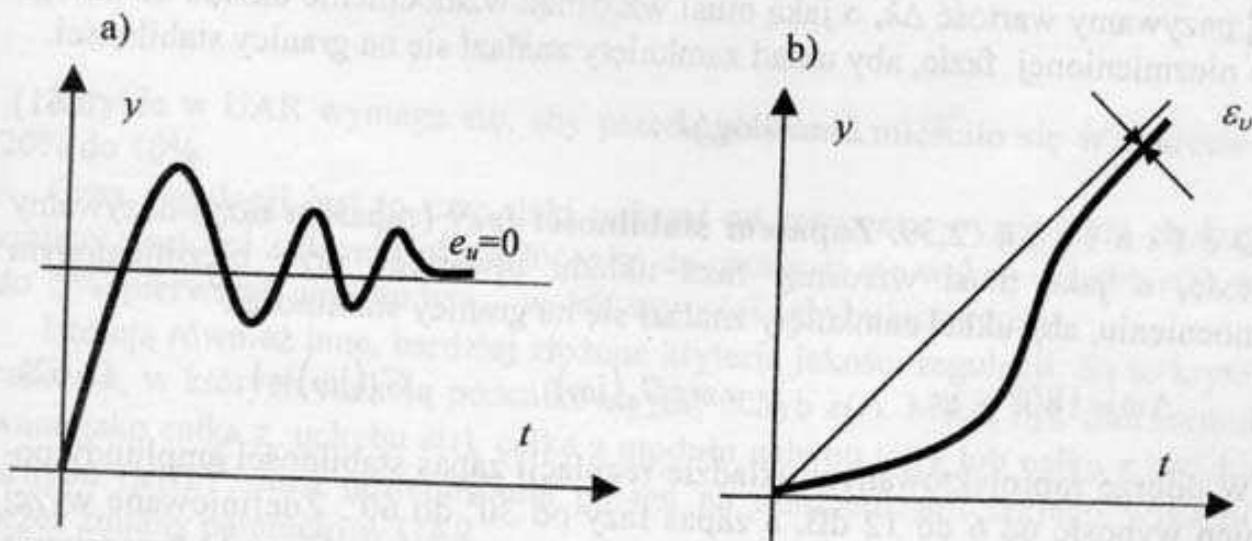
jeżeli  $i > l$ , to  $e_u = \infty$ .

Na rysunku 2.42 przedstawiono przebiegi sygnału wyjściowego  $y(t)$  dla układu statycznego przy założeniu, że na wejście podano sygnał skoku jednostkowego (rys. 2.42a) lub sygnał narastający liniowo (rys. 2.42b). Podobnie na rys. 2.43a przedstawiono analogiczne przebiegi dla układu regulacji z astatyzmem I rzędu ( $I = 1$ ).



Rys. 2.42. Przebiegi sygnału wyjściowego  $y(t)$  dla układu statycznego: a) przy wymuszeniu skokowym, b) przy wymuszeniu narastającym liniowo

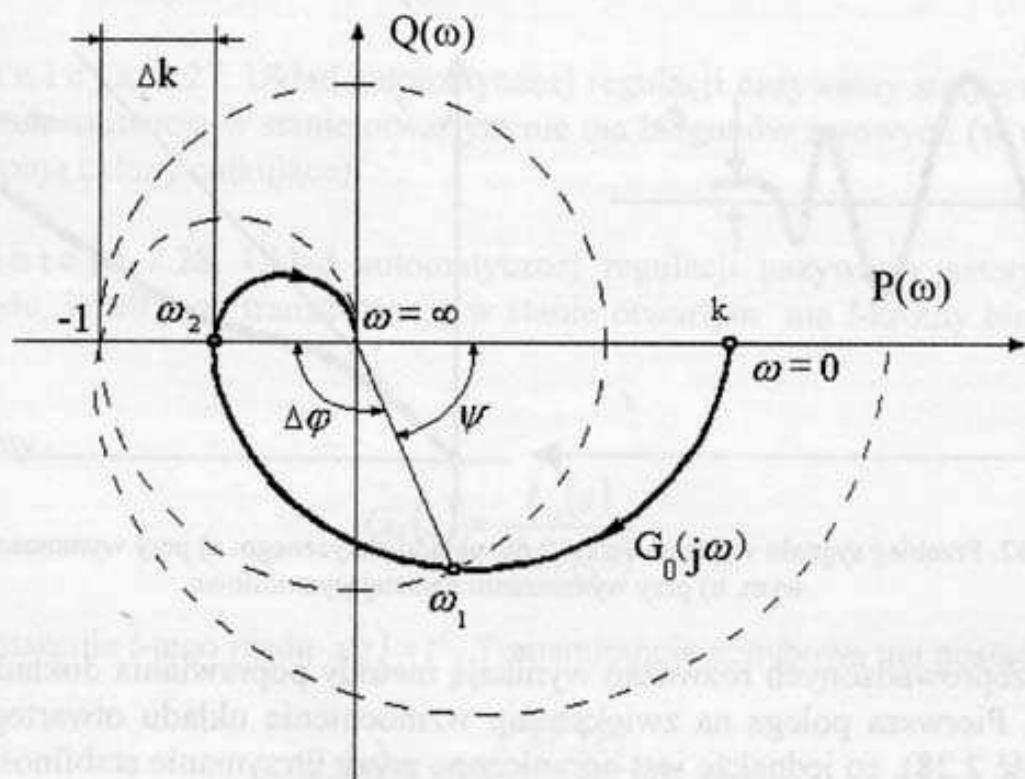
Z przeprowadzonych rozważań wynikają metody poprawiania dokładności statycznej. Pierwsza polega na zwiększeniu wzmocnienia układu otwartego  $k$  (por. zależność 2.28), co jednakże jest ograniczone przez utrzymanie stabilności układu. Druga polega na zwiększeniu astatyzmu układu przezłączenie członów całkujących. Powyższy zabieg może niekiedy powodować strukturalną niestabilność układu i wówczas zamiast członów całkujących wprowadza się człony o transmitemancji  $(1 + k/s)$ .



Rys. 2.43. Przebiegi sygnału wyjściowego  $y(t)$  dla układu astatycznego  $I$ -tego rzędu: a) przy wymuszeniu skokowym, b) przy wymuszeniu narastającym liniowo

### 2.7.2. Jakość regulacji w stanie nieustalonym

Omówimy podstawowe wskaźniki jakości regulacji w stanie nieustalonym. Rozpatrzmy przykładową charakterystykę amplitudowo-fazową układu otwartego  $G_0(j\omega)$ , przedstawioną na rys. 2.44.



Rys. 2.44. Wyznaczenie zapasu stabilności amplitudy i fazy

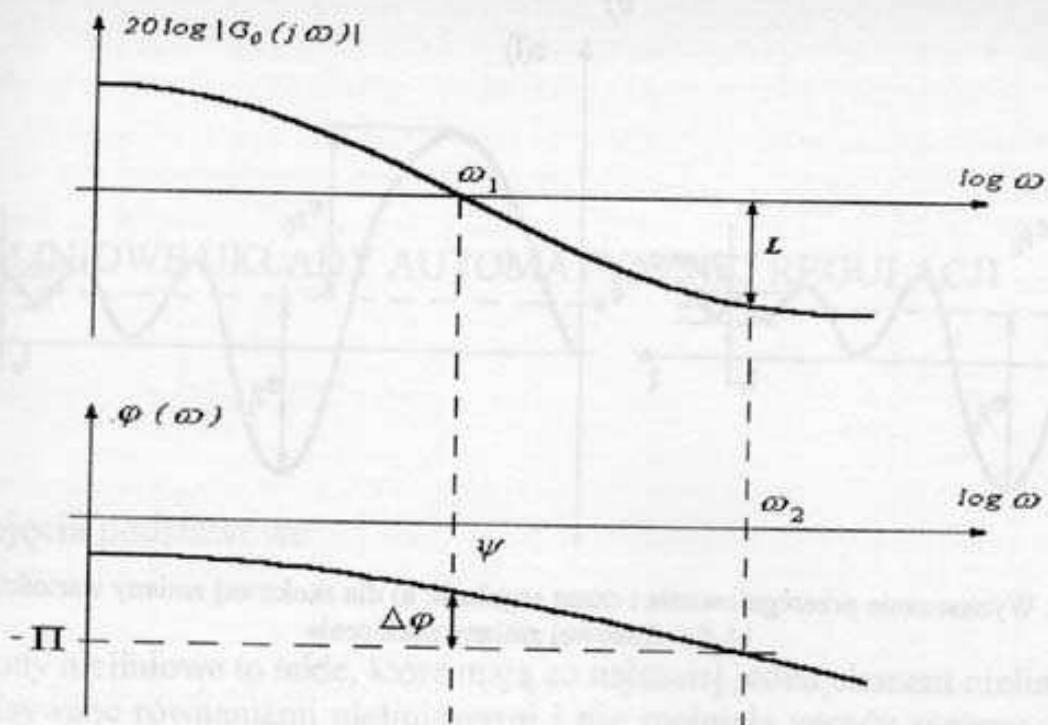
**Definicja 2.29. Zapasem stabilności amplitudy** (zapasem amplitudy)  $L$  [dB] nazywamy wartość  $\Delta k$ , o jaką musi wzrosnąć wzmocnienie układu otwartego przy niezmienionej fazie, aby układ zamknięty znalazł się na granicy stabilności.

$$L = 20 \log \Delta k. \quad (2.61)$$

**Definicja 2.30. Zapasem stabilności fazy** (zapasem fazy) nazywamy wartość, o jaką musi wzrosnąć faza układu otwartego przy niezmienionym wzmocnieniu, aby układ zamknięty znalazł się na granicy stabilności.

$$\Delta\varphi = 180^\circ + \psi, \quad \psi = \arg G_0(j\omega), \quad G_0(j\omega) = 1. \quad (2.62)$$

W dobrze zaprojektowanym układzie regulacji zapas stabilności amplitudy powinien wynosić od 6 do 12 dB, a zapas fazy od  $30^\circ$  do  $60^\circ$ . Zdefiniowane wyżej parametry można również uzyskać z charakterystyk logarytmicznych. Przedstawia to rys. 2.45.



Rys. 2.45. Wyznaczanie zapasu stabilności amplitudy i fazy na charakterystykach logarytmicznych

Omówione wyżej wskaźniki jakości regulacji (zapas amplitudy i fazy) stanowią wymagania dotyczące stabilnej pracy układu. Zajmiemy się teraz następnymi wskaźnikami jakości w stanie nieustalonym. Są to: przeregulowanie i czas regulacji. Wskaźniki te zdefiniujemy na podstawie rys. 2.46.

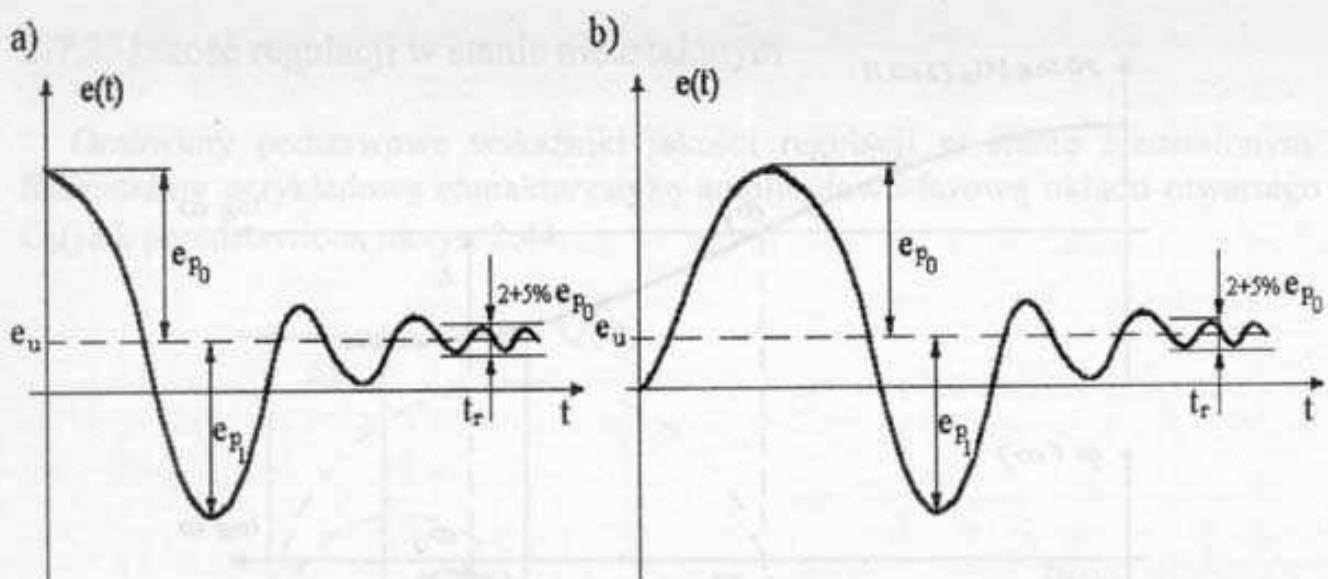
**Przeregulowaniem** nazwiemy wyrażony w procentach stosunek drugiej amplitudy  $e_{p1}$  uchybu  $e(t)$  do pierwszej  $e_{p0}$ . Zapiszemy to następująco:

$$\sigma = \frac{e_{p1}}{e_{p0}} 100\%. \quad (2.63)$$

Zwykle w UAR wymaga się, aby przeregulowanie mieściło się w zakresie od 20% do 40%.

**Czas regulacji** jest to czas, jaki upłynął od momentu wystąpienia skokowej zmiany wartości zadanej (lub zakłócenia) do ustalenia się wahań uchybu  $e(t)$  od 2 do 5% pierwszej amplitudy  $e_{p0}$  wokół wartości uchybu ustalonego.

Istnieją również inne, bardziej złożone kryteria jakości regulacji. Są to kryteria całkowe, w których funkcją podcałkową jest uchyb  $e(t)$ . Mogą być one formułowane jako całka z uchybu  $e(t)$ , całka z modułu uchybu  $|e(t)|$  lub całka z kwadratu uchybu ( $|e(t)|^2$ ). Idea postępowania polega na minimalizacji takiego wskaźnika przez zmiany parametrów UAR.



Rys. 2.46. Wyznaczanie przeregulowania i czasu regulacji: a) dla skokowej zmiany wartości zadanej,  
b) dla skokowej zmiany zakłócenia

## Literatura

- [1] Amborski K., Marusak A., Teoria sterowania w ćwiczeniach, PWN, Warszawa 1978.
- [2] Dorf R.C., Bishop R.H., Modern control systems, Addison-Wesley 1995.
- [3] Kaczorek T., Teoria sterowania i systemów, PWN, Warszawa 1999.
- [4] Urbanik A., Automatyzacja w inżynierii sanitarnej, wyd. 3, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1991.

### 3. NIELINIOWE UKŁADY AUTOMATYCZNEJ REGULACJI

#### 3.1. Pojęcia podstawowe

Układy nieliniowe to takie, które mają co najmniej jeden element nieliniowy. Są one opisywane równaniami nieliniowymi i nie spełniają zasady superpozycji. Będziemy się zajmować układami nieliniowymi o parametrach stałych w czasie i skupionych. Zapiszmy następujące równanie (patrz rozdział 2.2.3).

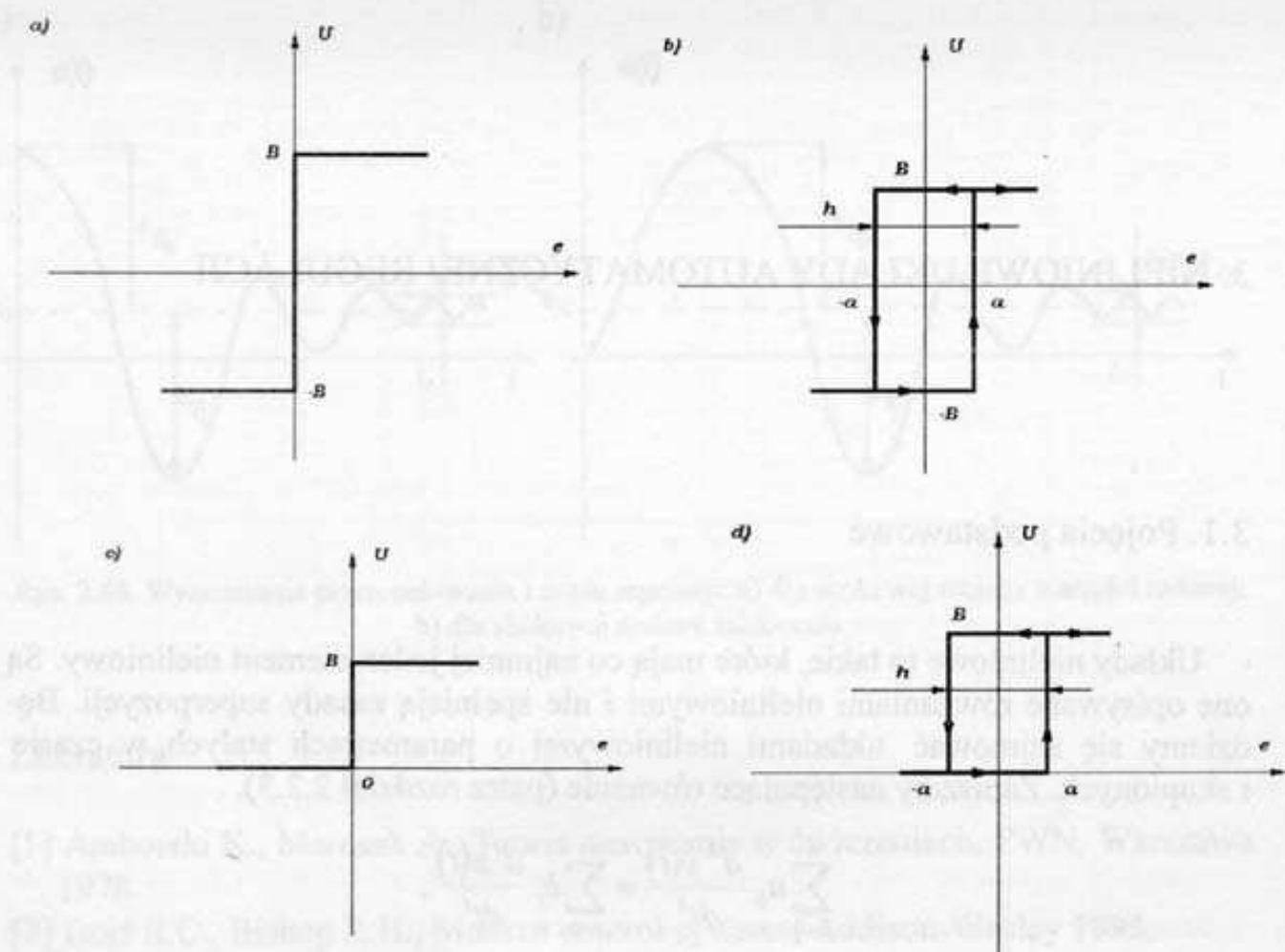
$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}.$$

Równanie to jest równaniem nieliniowym, jeżeli przynajmniej jeden ze współczynników  $a_k, b_i$  jest zależny od zmiennych  $x, y$  lub ich pochodnych.

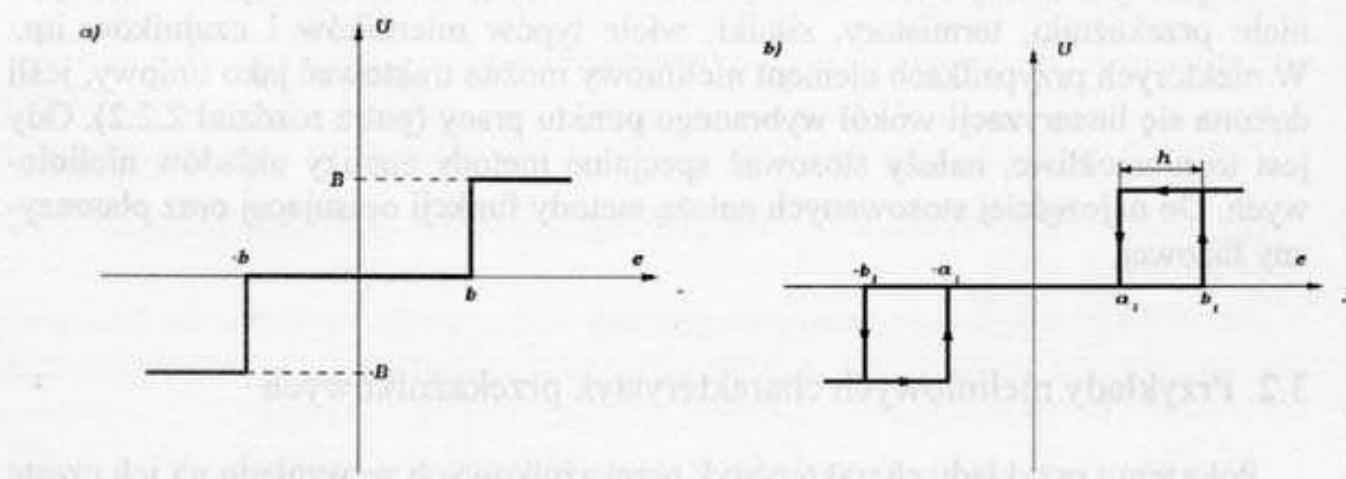
W praktyce mamy często do czynienia z elementami nieliniowymi. Należą do nich: przekaźniki, termistory, silniki, wiele typów mierników i czujników itp. W niektórych przypadkach element nieliniowy można traktować jako liniowy, jeśli dokona się linearyzacji wokół wybranego punktu pracy (patrz rozdział 2.2.2). Gdy jest to niemożliwe, należy stosować specjalne metody analizy układów nieliniowych. Do najczęściej stosowanych należą metody funkcji opisującej oraz płaszczyzny fazowej.

#### 3.2. Przykłady nieliniowych charakterystyk przekaźnikowych

Pokażemy przykłady charakterystyk przekaźnikowych ze względu na ich częste występowanie w praktyce. Przekaźniki są stosowane głównie w układach regulacji temperatury, poziomu oraz do sterowania załączaniem i wyłączaniem maszyn i urządzeń (np. wentylatorów i silników). Na rysunku 3.1 przedstawiono charakterystyki statyczne (oś rzędnych – wyjście przekaźnika, oś odciętych – wejście) przekaźników dwupołożeniowych. Przez  $h$  oznaczono szerokość pętli histerezy przekaźnika. Podane charakterystyki mogą być przesunięte względem osi rzęd-



Rys. 3.1. Charakterystyki przekaźników dwupołożeniowych: a) idealnego symetrycznego, b) symetrycznego z histerezą, c) idealnego z położeniem zerowym, d) z histerezą i położeniem zerowym



Rys. 3.2. Charakterystyki przekaźników trójpołożeniowych: a) idealnego, b) z histerezą

nich (w prawo lub w lewo), lecz ich postać pozostaje taka sama. Rodzinę charakterystyk trójpołożeniowych pokazano na rys. 3.2. Rysunek 3.2a przedstawia idealną charakterystykę trójpołożeniową. Odcinek  $(-b, b)$  nosi nazwę strefy nieczułości.

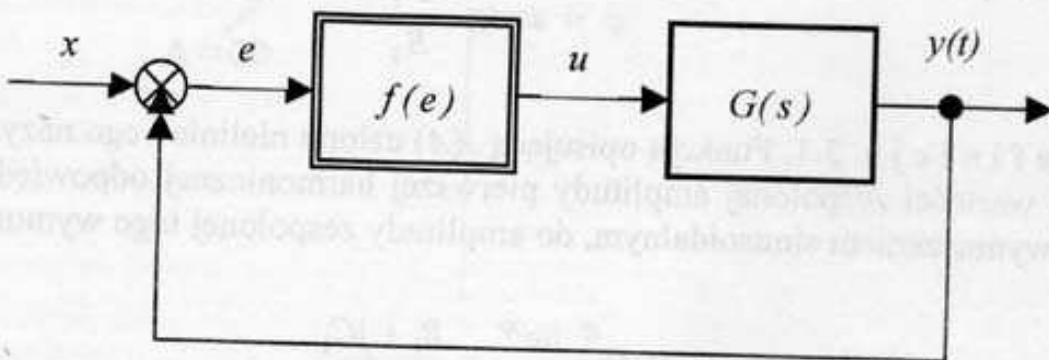
Podobna charakterystyka, lecz z histerezą, jest zamieszczona na rys. 3.2b. Można również spotkać charakterystyki niesymetryczne względem jednej lub obu osi układu współrzędnych. Należy nadmienić, że w wielu przypadkach w praktyce pionowe odcinki charakterystyk mogą być nachylone pod kątem ostrym i wówczas wyjście nie jest wyraźnie dwu- lub trójpołożeniowe (może przyjmować również wartości pośrednie). Dotyczy to głównie "przekaźników" elektronicznych (diody, tranzystory).

### 3.3. Metoda funkcji opisującej

Weźmy pod uwagę układ regulacji składający się z części nieliniowej o charakterystyce  $f(e)$  oraz części liniowej o transmitancji  $G(s)$ , przedstawiony na rys. 3.3. Załóżmy, że uchyb

$$e(t) = A \sin \psi,$$

gdzie  $\psi = \omega \cdot t$ .



Rys. 3.3. Nieliniowy układ automatycznej regulacji

Przyjmiemy, że wielkość wyściowa  $u$  jest funkcją okresową niesinusoidalną, którą można rozwinać w szereg Fouriera:

$$u(t) = B_0 + \sum B_k \sin k\psi + C_k \cos k\psi, \quad (3.1)$$

przy czym:

$$B_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi) d\psi,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi) \sin k\psi d\psi, \quad C_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi) \cos k\psi d\psi.$$

Załóżmy dalej, że składowa stała  $B_0 = 0$ , oraz że funkcję  $y$  opisujemy z pewną wystarczającą dokładnością za pomocą pierwszej harmonicznej szeregu (pozostałe są pomijane). Otrzymamy wówczas

$$y(t) = B_1 \sin \psi + C_1 \cos \psi = B \sin(\psi + \phi) = \operatorname{Im}[B e^{j\phi} e^{j\psi}],$$

gdzie

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi) \sin \psi d\psi, \quad (3.2)$$

$$C_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi) \cos \psi d\psi,$$

$$B = \sqrt{B_1^2 + C_1^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{C_1}{B_1}.$$

**Definicja 3.1.** Funkcją opisującą  $J(A)$  członu nieliniowego nazywamy stosunek wartości zespolonej amplitudy pierwszej harmonicznej odpowiedzi, wywołanej wymuszeniem sinusoidalnym, do amplitudy zespolonej tego wymuszenia:

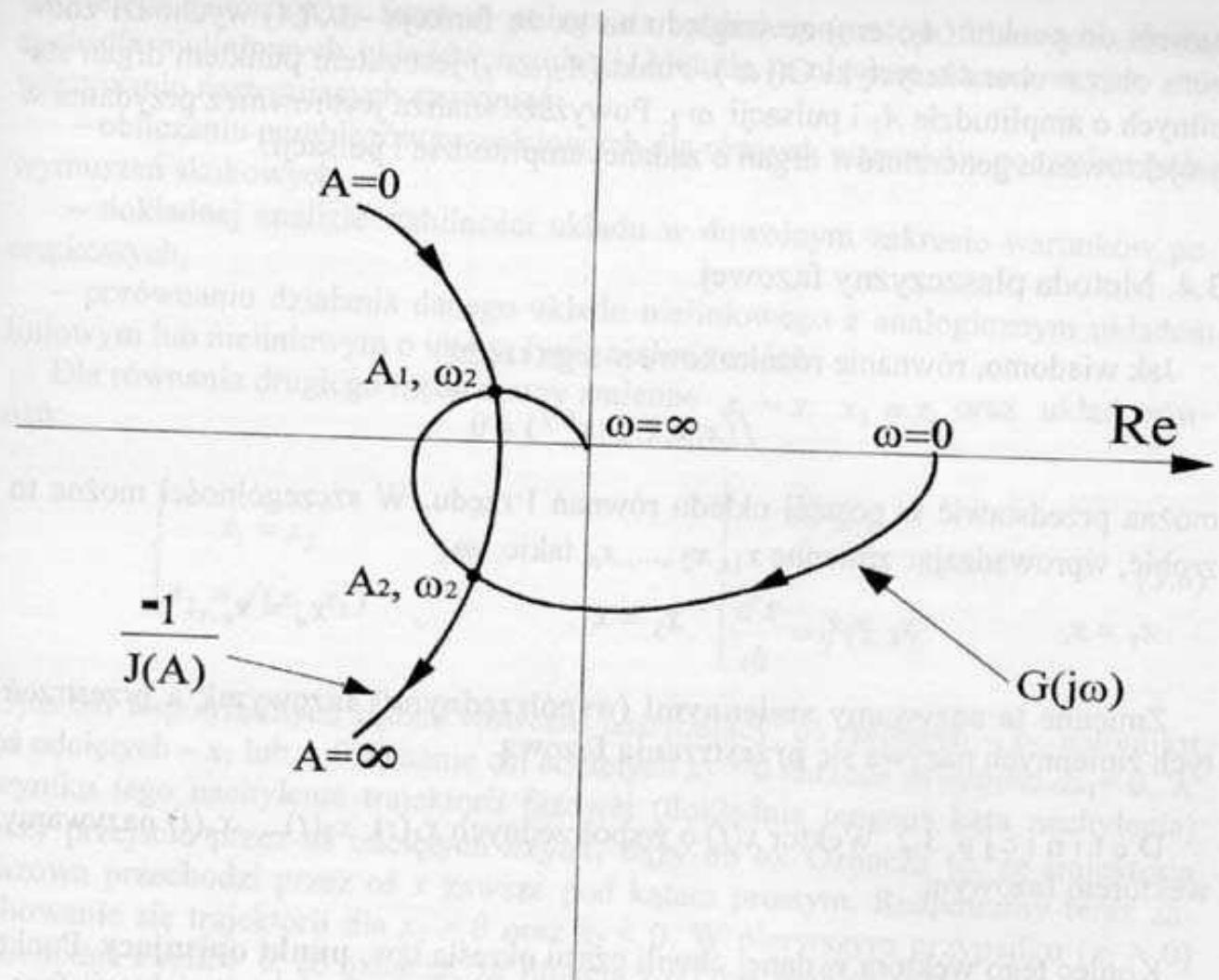
$$J(A) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{B e^{j\phi}}{A} = \frac{B_1 + jC_1}{A}. \quad (3.3)$$

Funkcja opisująca jest zatem odpowiednikiem transmitancji widmowej członu liniowego. Wykorzystując wzory (3.2) i (3.3), można funkcję opisującą przestawić za pomocą zależności:

$$J(A) = \frac{j}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \psi) e^{-j\psi} d\psi. \quad (3.4)$$

Z pomocą funkcji opisującej można oceniać stabilność układów nieliniowych. Z kryterium Nyquista dla układów liniowych wynikało, że układ jest na granicy stabilności (w układzie występują drgania o stałej amplitudzie), gdy charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego przechodzi przez punkt  $(-1, j0)$ . Oznacza to, że iloczyn zespolony transmitancji części liniowej  $G(j\omega)$  i funkcji opisującej  $J(A)$  musi być równy  $-1$ . Zapiszmy to następująco:

$$G(j\omega) = -\frac{1}{J(A)}. \quad (3.5)$$



Rys. 3.4. Ocena stabilności układu nieliniowego za pomocą funkcji opisującej

Obraz zależności (3.5) podano na rys. 3.4. Wykreślono na nim charakterystykę amplitudowo-fazową części liniowej  $G(j\omega)$  oraz funkcję  $-1/J(A)$ . Punkty przecięcia obu charakterystyk wyznaczają charakterystyczne wartości amplitud  $A_1, A_2$  i odpowiadające im pulsacje  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Jeżeli charakterystyka  $G(j\omega)$  nie przecina się z krzywą  $-1/J(A)$  oraz charakterystyka ta nie obejmuje krzywej, to układ jest stabilny dla wszystkich wartości amplitudy  $A$ . Jeżeli krzywa  $-1/J(A)$  znajduje się całkowicie we wnętrzu obszaru zakreślonego przez charakterystykę  $G(j\omega)$ , to układ jest niestabilny dla wszystkich wartości amplitudy  $A$ . Na rysunku 3.4 część krzywej  $-1/J(A)$  znajduje się we wnętrzu obszaru – jest to zatem zakres pracy niestabilnej układu dla amplitud od  $A_1$  do  $A_2$ . Gdy amplituda jest mniejsza od  $A_1$ , znajdująmy się w obszarze pracy stabilnej, tzn. że amplituda drgań maleje do zera. Dla amplitud większych od  $A_1$  mamy obszar pracy niestabilnej, tzn. że amplituda rośnie do wartości  $A_2$ . Dalszy wzrost amplitudy spowoduje sprowadzenie układu na

powrót do punktu ( $A_2$ ,  $\omega_2$ ) ze względu na to, że funkcja  $-1/J(A)$  wychodzi znów poza obszar charakterystyki  $G(j\omega)$ ). Punkt ( $A_2$ ,  $\omega_2$ ) jest zatem punktem drgań stabilnych o amplitudzie  $A_2$  i pulsacji  $\omega_2$ . Powyższa analiza jest również przydatna w projektowaniu generatorów drgań o zadanej amplitudzie i pulsacji.

### 3.4. Metoda płaszczyzny fazowej

Jak wiadomo, równanie różniczkowe  $n$ -tego rzędu

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n)}) = 0$$

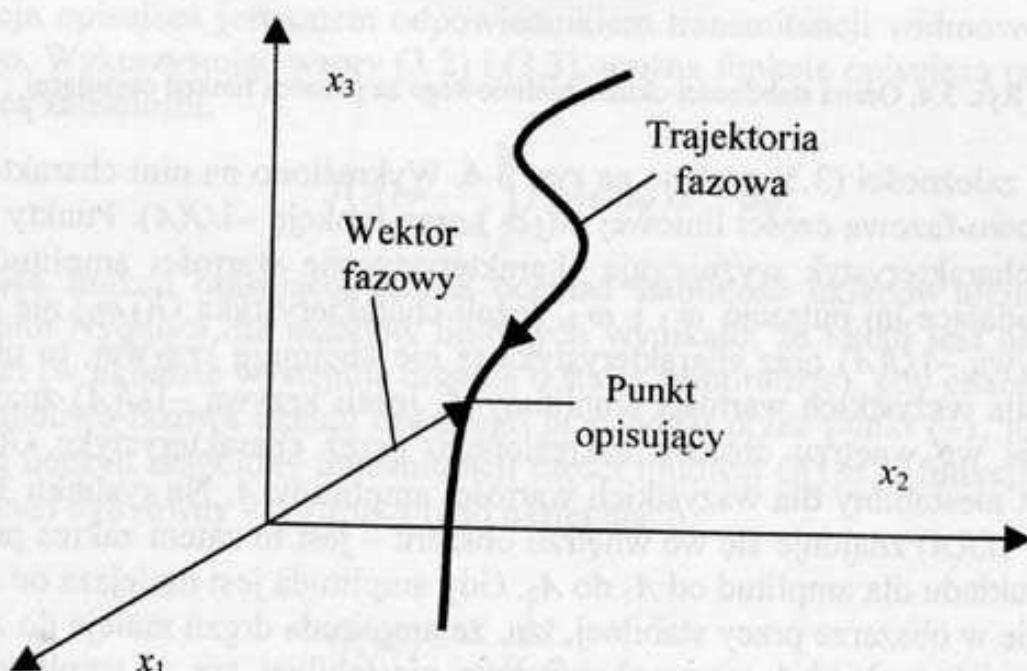
można przedstawić w postaci układu równań I rzędu. W szczególności można to zrobić, wprowadzając zmienne  $x_1, x_2, \dots, x_n$  takie, że

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}_1, \quad x_3 = \dot{x}_2, \quad \dots, \quad x_n = \dot{x}_{n-1}.$$

Zmienne te nazywamy **zmiennymi (współrzędnymi) fazowymi**, a przestrzeń tych zmiennych nazywa się **przestrzenią fazową**.

**Definicja 3.2.** Wektor  $x(t)$  o współrzędnych  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  nazywamy wektorem fazowym.

Koniec tego wektora w danej chwili czasu określa tzw. **punkt opisujący**. Punkt ten porusza się w czasie, zakreślając trajektorię fazową. Rodzinę trajektorii fazowych nazywamy **portretem fazowym**. Na rysunku 3.5 zaznaczono powyższe elementy dla przypadku trójwymiarowej przestrzeni fazowej.



Rys. 3.5. Elementy opisu układu w przestrzeni fazowej

Metoda płaszczyzny fazowej polega na analizie portretów fazowych uzyskanych dla nieliniowych układów regulacji. Metoda ta nie jest skuteczna przy rozwiązywaniu następujących zagadnień:

- obliczaniu przebiegów przejściowych dla różnych warunków początkowych i wymuszeń skokowych,
- dokładnej analizie stabilności układu w dowolnym zakresie warunków początkowych,
- porównaniu działania danego układu nieliniowego z analogicznym układem liniowym lub nieliniowym o innym typie nieliniowości.

Dla równania drugiego rzędu mamy zmienne  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}_1$  oraz układ równań:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = f(x_1, x_2) \end{array} \right. \quad \text{lub} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{d\dot{x}}{dt} = f(x, \dot{x}) \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Opis osi współrzędnych będzie wówczas następujący: oś rzędnych –  $x_2$ , natomiast oś odciętych –  $x_1$  lub  $x$ . Równanie osi odciętych  $x_2 = 0$  narzuca zależność  $dx_1 = 0$ . W wyniku tego nachylenie trajektorii fazowej (dokładnie tangens kąta nachylenia) przy przejściu przez oś odciętych  $dx_2/dx_1$  dąży do  $\infty$ . Oznacza to, że trajektoria fazowa przechodzi przez oś  $x$  zawsze pod kątem prostym. Rozpatrzmy teraz zachowanie się trajektorii dla  $x_2 > 0$  oraz  $x_2 < 0$ . W pierwszym przypadku ( $x_2 > 0$ ) pochodna  $dx_1/dt > 0$ , co oznacza, że funkcja  $x_1(t)$  jest funkcją rosnącą. Innymi słowy, w górnej półpłaszczyźnie (dla  $x_2 > 0$ ) punkt opisujący trajektorię fazową porusza się z lewej strony do prawej. Dla  $x_2 < 0$  pochodna funkcji  $x_1(t)$  jest ujemna, zatem sytuacja jest odwrotna.

Zbierzmy powyższe wnioski ogólne, które możemy nazwać własnościami trajektorii fazowych.

1. Trajektoria fazowa przecina oś  $x$  zawsze pod kątem prostym.
2. Ruch po trajektorii odbywa się zawsze zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Metodę płaszczyzny fazowej najwygodniej jest stosować, gdy dysponuje się maszyną analogową z ploterem lub oscyloskopem. Można wówczas natychmiast uzyskać trajektorię fazową układu. W pozostałych przypadkach należy wyznaczyć trajektorie fazowe za pomocą metod analitycznych lub graficzno-analitycznych.

### 3.4.1. Wyznaczanie trajektorii fazowych metodą izoklin

Jest to metoda graficzno-analityczna. Polega ona na wyznaczeniu równania izoklin, tzn. równania linii stałego kąta. Oznacza to uzyskanie zależności na linie (najczęściej proste), przez które trajektorie przechodzą pod określonym kątem. Część graficzna polega na wyrysowaniu tych linii i naniesieniu przebiegu trajektorii

zgodnie z warunkami początkowymi. W równaniu różniczkowym opisującym układ dokonujemy przekształceń i zapisujemy je w postaci

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}}. \quad (3.7)$$

Lewa strona równania (3.7) stanowi tangens kąta nachylenia trajektorii fazowej i ustalamy ją dla danego kąta  $\alpha$ , przyjmując  $\operatorname{tg} \alpha = c$ . Uzyskamy w ten sposób równanie izoklin:

$$\frac{f(x, \dot{x})}{\dot{x}} = c. \quad (3.8)$$

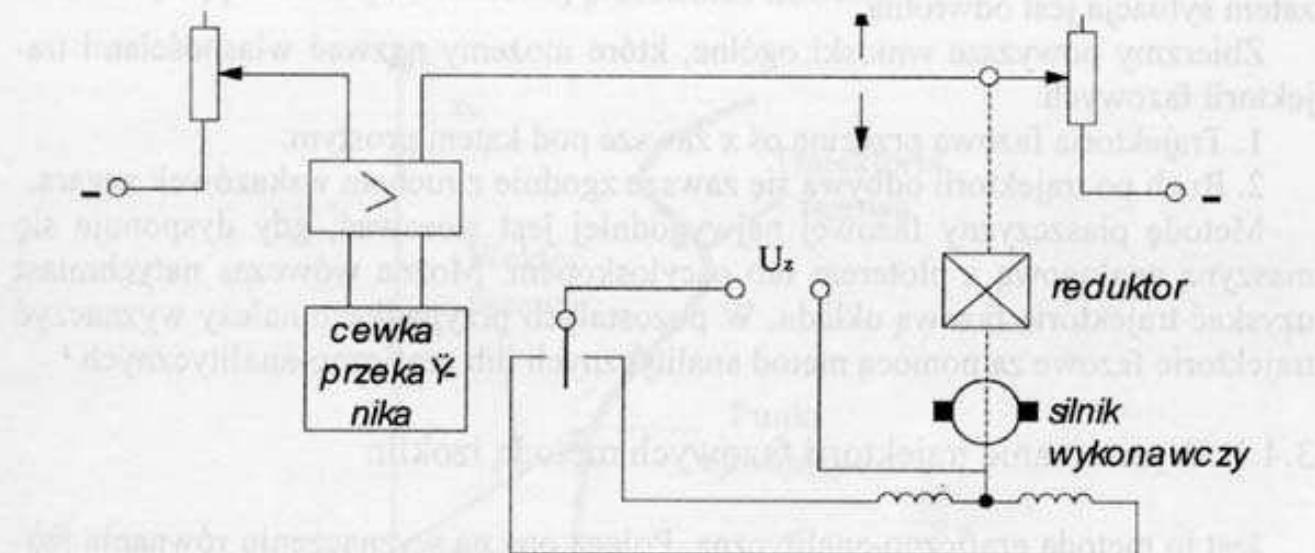
Postępując tak dla różnych wartości  $c$ , możemy z dowolną dokładnością znaleźć portret fazowy.

### 3.4.2. Regulacja dwu- i trójpołożeniowa

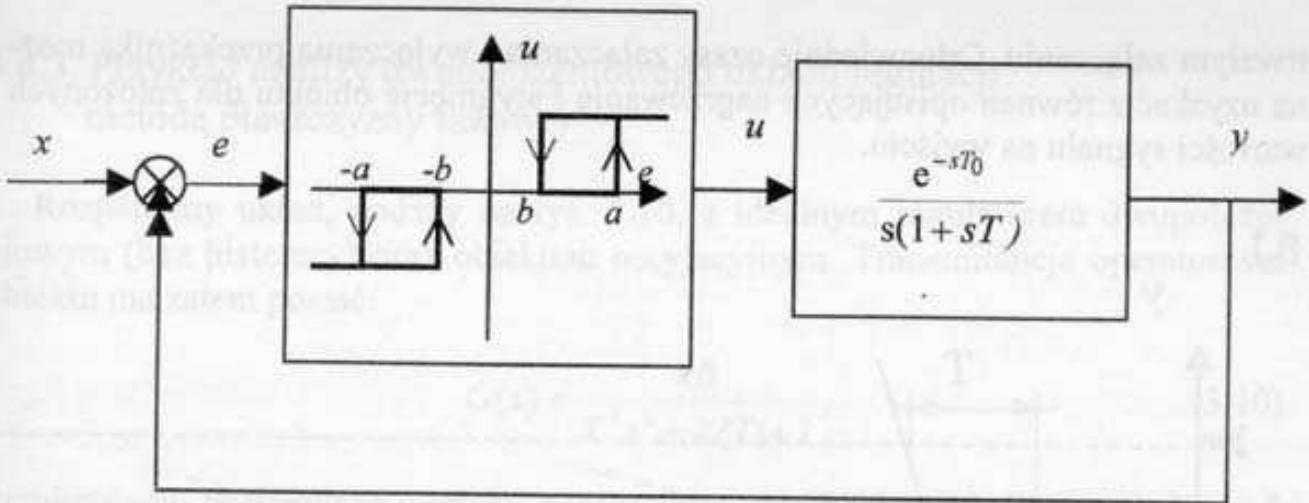
Schemat regulacji trójpołożeniowej napięcia przedstawiono na rys. 3.6. Układ oparto na przekaźniku trójpołożeniowym z histerezą, a jako element wykonawczy wykorzystano silnik rewersyjny. Na rysunku 3.7 podano schemat blokowy układu regulacji. Przyjęto, że transmitancja silnika łącznie z reduktorem i potencjometrem suwakowym może być opisana zależnością:

$$G(s) = \frac{k}{s(1+sT)},$$

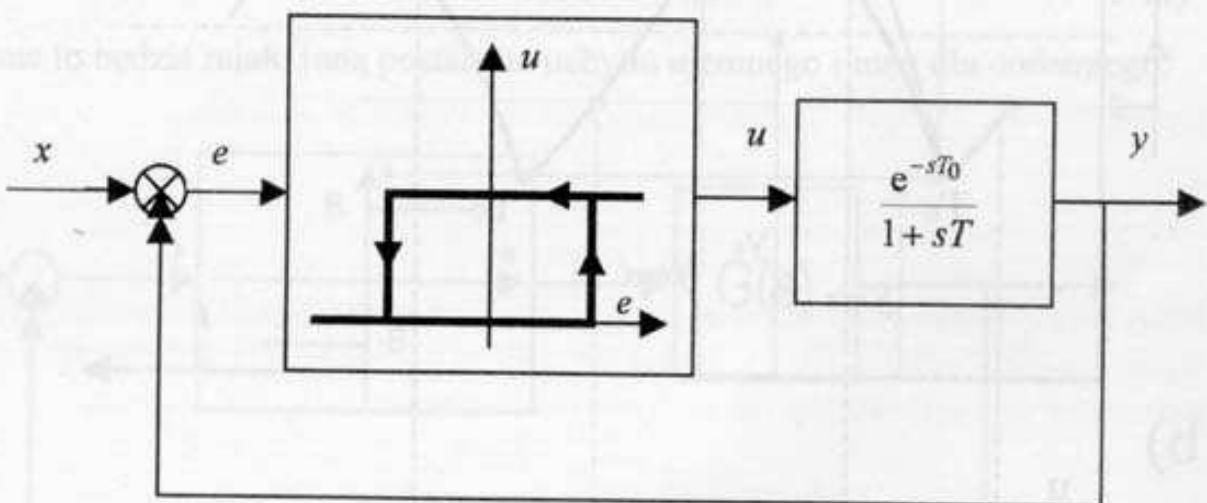
odpowiadającą członowi całkującemu z inercją I rzędu.



Rys. 3.6. Schemat układu regulacji napięcia z regulatorem trójpołożeniowym



Rys. 3.7. Schemat blokowy układu regulacji z rys. 3.6



Rys. 3.8. Układ regulacji dwupołożeniowej

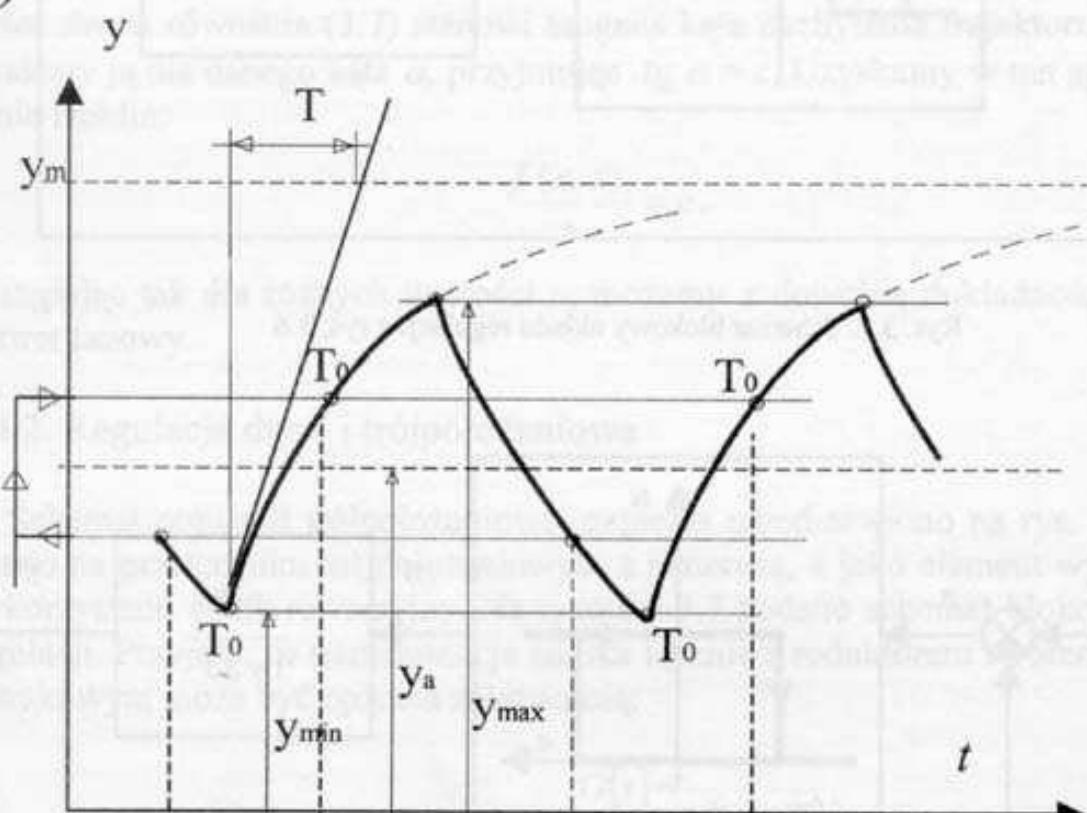
Podamy obecnie opis i dokonamy analizy układu regulacji dwupołożeniowej, przedstawionego na rys. 3.8. Schemat ten odpowiada np. regulacji temperatury żelazka elektrycznego z wykorzystaniem bimetalicznego regulatora dwupołożeniowego. Żelazko jest traktowane jako obiekt inercyjny z opóźnieniem  $T_0$ . Kolejne przełączania przekaźnika można traktować jako wymuszenie skokowe podawane na obiekt. Odpowiedzi na te wymuszenia będą funkcjami wykładniczymi opóźnionymi o stałą czasową  $T_0$ . Na rysunku 3.9 przedstawiono przebiegi czasowe układu regulacji. Wielkość wyjściowa  $y$  wynosi od  $y_{\min}$  do  $y_{\max}$  z amplitudą  $\Delta y = y_{\max} - y_{\min}$ . Przebieg drgań wyznacza linię środkową:

$$y_a = \frac{1}{2}(y_{\max} + y_{\min}). \quad (3.9)$$

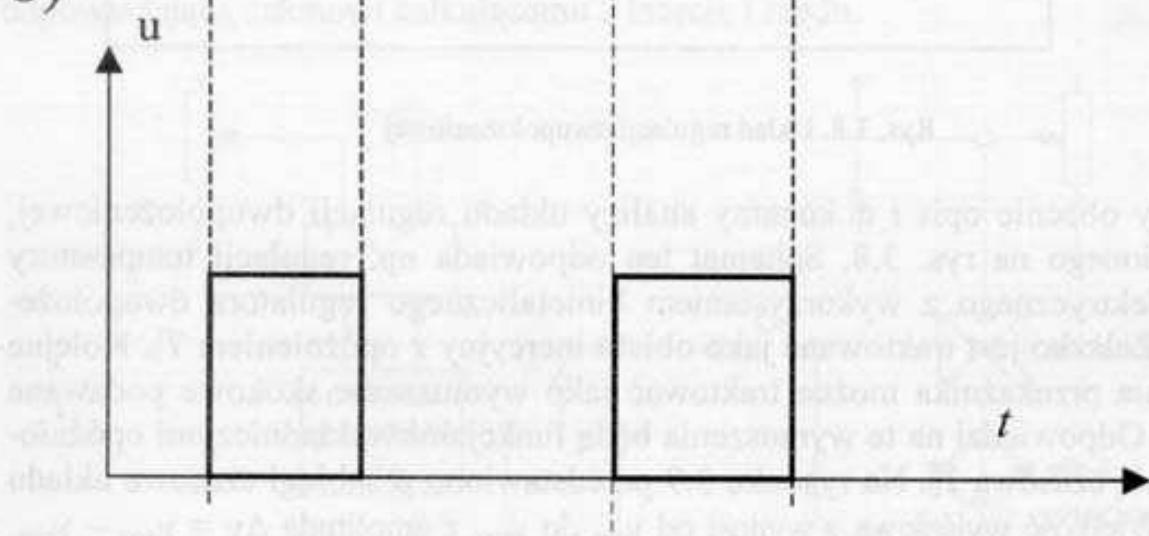
Wartość średnia  $y_{\text{sr}}$  różni się od wartości zadanej o uchybę średnią  $e_{\text{sr}}$ . Przez  $y_m$  oznaczono maksymalną wartość wielkości wyjściowej, jaką osiągnąłby układ przy

trwałyym załączeniu. Odpowiednie czasy załączania i wyłączania przekaźnika można uzyskać z równań opisujących nagrzewanie i stygnięcie obiektu dla założonych wartości sygnału na wyjściu.

a)



b)



Rys. 3.9. Przebiegi czasowe w układzie regulacji dwupołożeniowej:  
a) wielkości wyjściowej, b) sygnału sterującego

### 3.4.3. Przykład analizy dwupołożeniowego układu regulacji metodą płaszczyzny fazowej

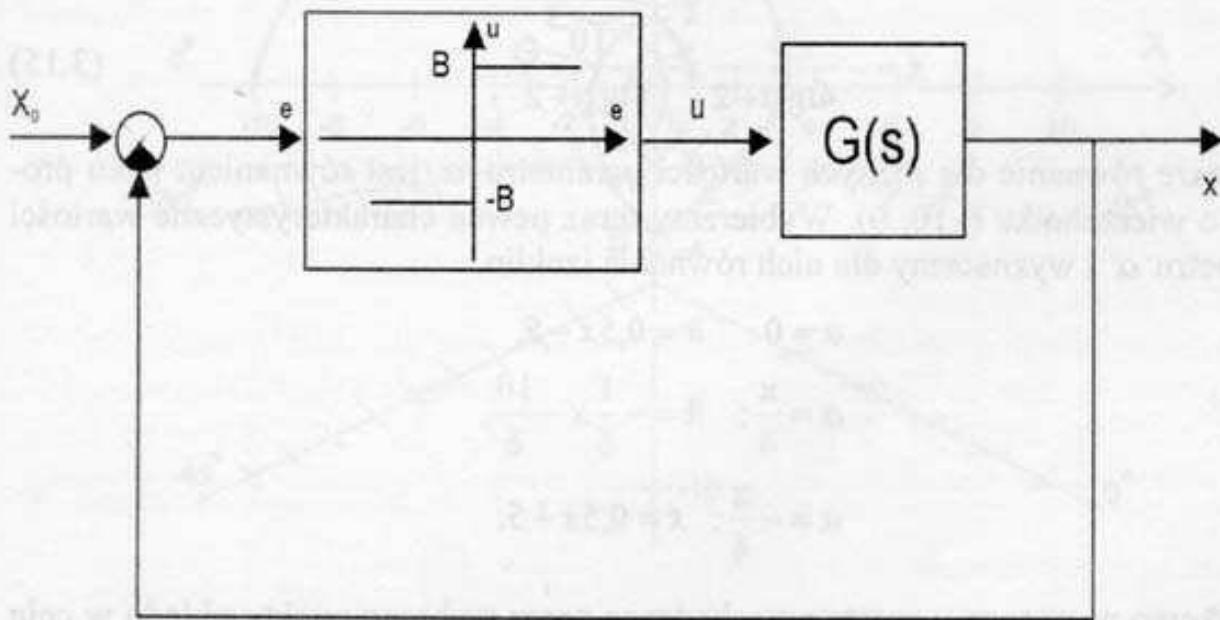
Rozpatrzmy układ, podany na rys. 3.10, z idealnym regulatorem dwupołożeniowym (bez histerezy) oraz obiektem oscylacyjnym. Transmitancja operatorowa obiektu ma zatem postać:

$$G(s) = \frac{kB}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}. \quad (3.10)$$

Przyjmujemy następujące wartości parametrów układu:  $k = 10$ ,  $T = 2$  s,  $\xi = 0,5$  oraz  $B = 1$ . Zależności (3.10) odpowiada opis w dziedzinie zmiennej czasu w postaci równania różniczkowego II rzędu.

$$T^2 x + 2\xi T \dot{x} + x = ku. \quad (3.11)$$

Równanie to będzie miało inną postać dla uchybu ujemnego i inną dla dodatniego.



Rys. 3.10. Schemat blokowy dwupołożeniowego układu regulacji

Gdy  $e < 0$ , to  $y(t) = -B$ , zatem równanie (3.11) przyjmie postać:

$$T^2 x + 2\xi T \dot{x} + x = -kB. \quad (3.12)$$

Dokonamy przekształcenia tego równania w celu otrzymania równania izoklin. Dzielimy obie strony przez  $T^2$  i otrzymujemy:

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{-kB - 2\xi T \dot{x} - x}{T^2 \dot{x}},$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{-kB - 2\xi T \dot{x} - x}{T^2 \ddot{x}}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= \frac{-kB - 2\xi T \dot{x} - x}{T^2 \ddot{x}}.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Otrzymane równanie (3.13) jest szukanym równaniem izoklin. Ustalamy lewą jego stronę, wiedząc, że  $\operatorname{tg}\alpha = d\dot{x}/dx$ , gdzie  $\alpha$  jest kątem nachylenia trajektorii. Otrzymamy wówczas równanie:

$$T^2 \ddot{x} \operatorname{tg}\alpha = -kB - 2\xi T \dot{x} - x$$

lub inaczej

$$\ddot{x} = -\frac{1}{T^2 \operatorname{tg}\alpha + 2\xi T} x - \frac{kB}{T^2 \operatorname{tg}\alpha + 2\xi T}. \quad (3.14)$$

Po wstawieniu wartości liczbowych uzyskamy równanie izoklin:

$$\ddot{x} = -\frac{1}{4\operatorname{tg}\alpha + 2} x - \frac{10}{4\operatorname{tg}\alpha + 2}. \quad (3.15)$$

Powyższe równanie dla różnych wartości parametru  $\alpha$  jest równaniem pęku prostych o wierzchołku  $(-10, 0)$ . Wybierzmy teraz pewne charakterystyczne wartości parametru  $\alpha$  i wyznaczmy dla nich równania izoklin.

$$\alpha = 0 : \quad \ddot{x} = 0,5x - 5,$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} : \quad \ddot{x} = -\frac{1}{6}x - \frac{10}{6},$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{4} : \quad \ddot{x} = 0,5x + 5.$$

Dodatkowo wyznaczmy proste przechodzące przez wybrane punkty układu w celu określenia izoklin w wybranym obszarze płaszczyzny fazowej (rys. 3.11). Dla punktu o współrzędnych  $(0, 2)$  otrzymamy równanie:

$$2 = -\frac{10}{4\operatorname{tg}\alpha + 2}.$$

zatem

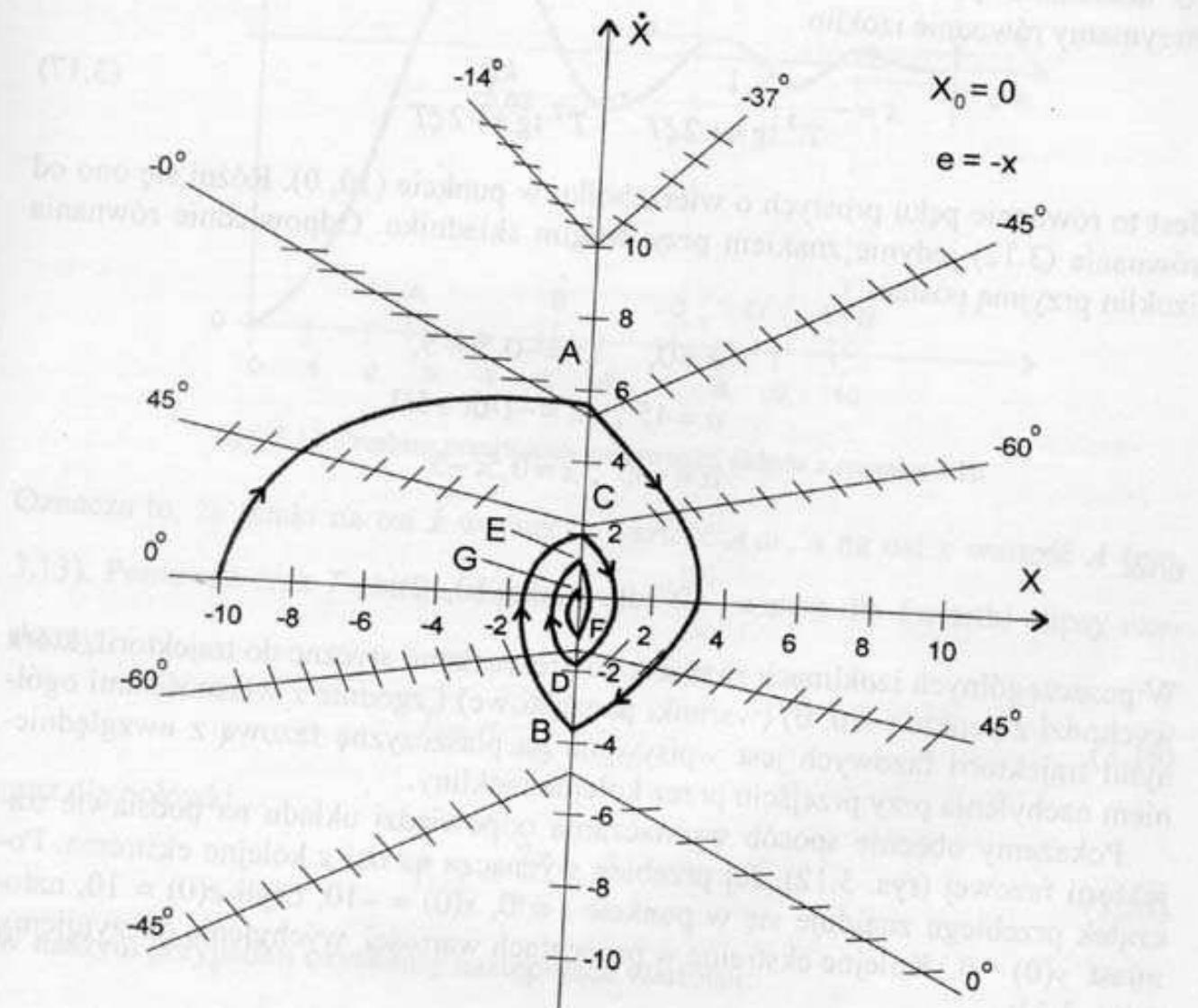
$$4\operatorname{tg}\alpha + 2 = -5, \quad \operatorname{tg}\alpha = -1,75, \quad \alpha = -60^\circ.$$

Podobnie dla punktu  $(0, 10)$

$$4\operatorname{tg}\alpha + 2 = -1, \quad \operatorname{tg}\alpha = -0,75, \quad \alpha = -37^\circ$$

oraz dla punktu  $(0, -10)$

$$4\tan\alpha + 2 = 1, \quad \tan\alpha = -0,25, \quad \alpha = -14^\circ.$$



Rys. 3.11. Trajektoria fazowa układu regulacji dwupołożeniowej z rysunku 3.10

Opisane wyżej izokliny nanosimy na płaszczyznę fazową w zakresie  $e < 0$ . Dla uproszczenia rysunku przyjmiemy również, że wymuszenie  $x_0 = 0$ , a warunki początkowe są następujące:  $x(0) = -10$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ . Innymi słowy, wymuszenie o amplitudzie 10 zastąpiło niezerowym warunkiem początkowym. Na rysunku oznacza to, że trajektoria będzie zmierzała do początku układu współrzędnych, a nie do punktu  $(10, 0)$ . Przy tych założeniach warunek  $e < 0$  jest równoznaczny z warunkiem  $x > 0$  (ponieważ  $e = y - x$ ).

Wyznaczmy teraz równanie izoklin dla  $e > 0$ .

$$T^2 \dot{x} + 2T\zeta x + x = kB. \quad (3.16)$$

Po dokonaniu przekształceń analogicznych do przekształceń równania (3.12) otrzymamy równanie izoklin:

$$\dot{x} = -\frac{1}{T^2 \operatorname{tg} \alpha + 2\zeta T} x + \frac{kB}{T^2 \operatorname{tg} \alpha + 2\zeta T}. \quad (3.17)$$

Jest to równanie pęku prostych o wierzchołku w punkcie  $(10, 0)$ . Różni się ono od równania (3.12) jedynie znakiem przy drugim składniku. Odpowiednie równania izoklin przyjmą postać:

$$\alpha = 0; \quad x = -0,5x + 5,$$

$$\alpha = 45^\circ; \quad x = -1/6x + 5/3,$$

$$\alpha = -45^\circ; \quad x = 0,5x - 5$$

oraz

$$\alpha = -60^\circ \text{ dla punktu } (0, -2).$$

W poszczególnych izoklinach zaznaczono kreseczkami styczne do trajektorii, która wychodzi z punktu  $(-10, 0)$  (warunki początkowe) i zgodnie z własnościami ogólnymi trajektorii fazowych jest wpisywana na płaszczyznę fazową z uwzględnieniem nachylenia przy przejściu przez kolejne izokliny.

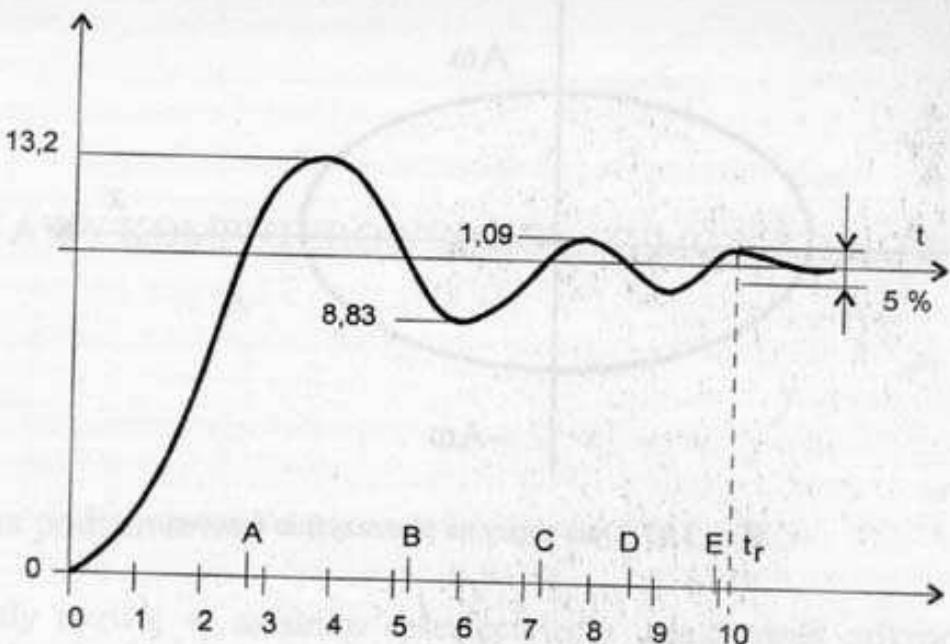
Pokażemy obecnie sposób wyznaczania odpowiedzi układu na podstawie trajektorii fazowej (rys. 3.12). Jej przebieg wyznacza na osi  $x$  kolejne ekstrema. Początek przebiegu znajduje się w punkcie  $t = 0, x(0) = -10$ , czyli  $e(0) = 10$ , natomiast  $y(0) = 0$ . Kolejne ekstrema w procentach wartości wychylenia odczytujemy z rys. 3.11:

- pierwsze ekstremum 32%,
- drugie -17%,
- trzecie 9%,
- czwarte -6%,
- piąte 4%.

Następnie odczytujemy czasy przejścia poszczególnych odcinków trajektorii. Wyznaczmy je, korzystając z własności elipsy, która może być przybliżonym przebiegiem odcinków trajektorii. Na płaszczyźnie fazowej równanie elipsy przyjmie postać:

$$x = A \sin \omega t, \quad (3.18)$$

$$\dot{x} = \omega A \cos \omega t.$$



Rys. 3.12. Przebieg przejściowy odpowiedzi układu z rysunku 3.10

Oznacza to, że punkt na osi  $\dot{x}$  wyznacza wartość  $A\omega$ , a na osi  $x$  wartość  $A$  (rys. 3.13). Ponieważ czas  $T$  obiegu elipsy wynosi  $\frac{2\pi}{\omega}$ , zatem dla ćwiartki elipsy uzyskamy:

$$T_{1/4} = \frac{2\pi}{4\omega} = \frac{\pi}{2\omega} \quad (3.19)$$

oraz dla połówki

$$T_{1/2} = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}. \quad (3.20)$$

W naszym przypadku uzyskamy następujące wartości:

– odcinek  $\overline{OA}$

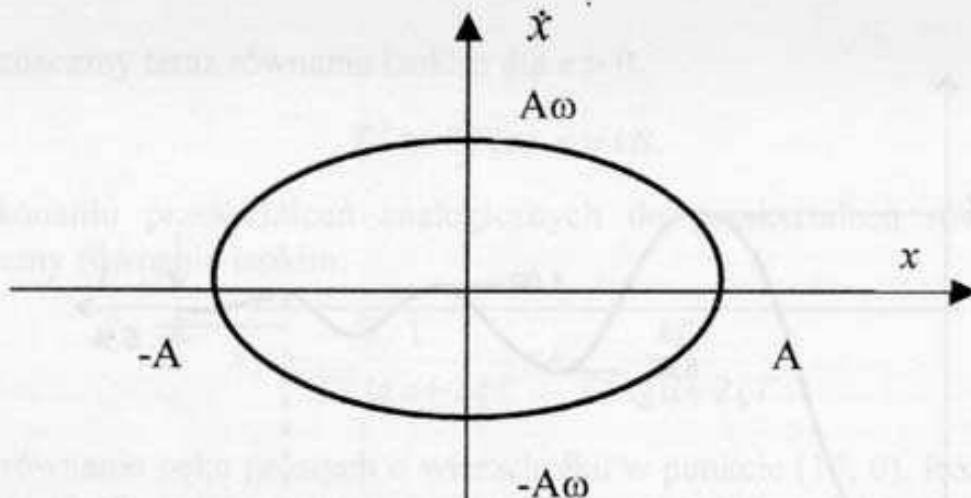
$$\omega = \frac{5,5}{10} = 0,55, \quad t_{OA} = T_{1/4} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2 \cdot 0,55} \approx 2,85 \text{ s},$$

– odcinek  $\overline{AB}$

$$\omega = \frac{4}{3,2}, \quad t_{AB} = T_{1/2} = \frac{\pi}{\omega} \approx 2,5 \text{ s},$$

– odcinek  $\overline{BC} \quad t_{BC} \approx 2 \text{ s},$

– odcinek  $\overline{CD} \quad t_{CD} \approx 1,5 \text{ s},$



Rys. 3.13. Opis elipsy na płaszczyźnie fazowej

- odcinek  $\overline{DE}$      $t_{DE} \approx 1\text{s}$ ,
- odcinek  $\overline{EF}$      $t_{EF} \approx 0,9\text{s}$ .

Na podstawie podanych wyżej wielkości wyznaczono przebieg i określono czas regulacji układu (dla 5% wartości  $e_{p_0}$ ). Czas regulacji  $t_e$  wynosi 10,35s.

Zbierzemy obecnie wnioski wynikające z analizy przykładowego układu regulacji.

- Przebieg trajektorii fazowej jednoznacznie określa, że układ jest stabilny dla przyjętych warunków początkowych (drgania są gasnące).
- Wykreślona trajektoria fazowa pozwala wyznaczyć przebieg czasowy wielkości wyjściowej, a tym samym można określić podstawowe parametry jakości regulacji (czas regulacji, przeregulowanie).
- Wykreślenie trajektorii fazowej dla nowych warunków początkowych jest prostym powtórzeniem pokazanej analizy na podstawie tej samej sieci izoklin.

## Literatura

- [1] Amborski K., Marusak A., Ćwiczenia z automatyki, cz. 2. Układy nieliniowe, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1977.
- [2] Kaczorek T., Podstawy automatyki, cz. 2, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1970.
- [3] Kaczorek T., Teoria sterowania, t. 2, PWN, Warszawa 1977.
- [4] Martinek J., Rumiatowski K., Woźniak A., Podstawy automatyki, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1978.
- [5] Żelazny M., Podstawy automatyki, PWN, Warszawa 1976.

## 4. PODSTAWY KOMPUTEROWYCH SYSTEMÓW STEROWANIA

### 4.1. Pojęcia podstawowe

Wspaniały rozwój w ostatnim dziesięcioleciu zastosowań mikroprocesorów w sterowaniu umożliwia realizację postulatów stawianych sterowaniu złożonymi procesami, w których występują ścisłe współzależności między poszczególnymi wielkościami procesu. Najogólniej postulaty te są następujące:

- dokładniejsza identyfikacja procesu, głównie przez zbieranie i obróbkę informacji o jego stanach,
- trafniejszy wybór wielkości sterujących i dokładniejsze wyznaczanie ich wartości, zgodnie ze sprawdzonymi algorytmami dostosowanymi do danego typu procesu,
- pełna kontrola stanu procesu dostosowana do możliwości percepcyjnych operatora,
- duża szybkość obróbki, możliwość przechowywania i dostępność dużej liczby informacji,
- możliwość uwzględnienia w sterowaniu wszystkich powiązań między wielkościami procesu.

Wielofunkcyjnym regulatorem jest system cyfrowy (komputer, mikrokomputer), którego wyposażenie sprzętowe i programowe pozwala realizować powyższe postulaty.

Na wstępie wprowadzimy najważniejsze pojęcia związane z systemem cyfrowym.

Na **system cyfrowy** składają się sprzęt i oprogramowanie służące do wykonywania określonych operacji przetwarzania danych. **Sprzęt** to ogólna nazwa zestawu urządzeń do automatycznego przetwarzania danych. **Oprogramowanie** to całokształt środków programowych związanych z określonym typem systemu cyfrowego. **Komputerowym systemem sterowania** (KSS) nazywa się system cyfrowy wraz z procesem sterowanym.

Pokróćce omówimy podstawowe cechy sprzętu i oprogramowania komputerowych systemów sterowania.

Strukturę sprzętu KSS podano na rys. 4.1. Sprzęt systemu cyfrowego obejmuje **jednostkę centralną i urządzenia zewnętrzne** połączone z nią za pomocą jednostek sterujących. W skład jednostki centralnej wchodzi urządzenie sterujące, jednostka arytmetyczno-logiczna, kanały wejścia/wyjścia oraz pamięć wewnętrzna.

**Urządzenie sterujące** na podstawie kodu operacji, która ma być wykonana, generuje sygnały sterujące wykonywaniem tej operacji. W skład urządzenia sterującego wchodzą układy pamiętające, tzw. rejstry, z których na specjalną uwagę zasługuje **licznik rozkazów**. Przechowuje on adres komórki pamięci operacyjnej zawierającej następny rozkaz.

**Jednostka arytmetyczno-logiczna** wykonuje rozkazy arytmetyczne i logiczne, wykorzystując zespół rejestrów (zwykle o długości jednego słowa) zdolnych do przechowywania i reprezentowania liczb. Rejestrem o szczególnym znaczeniu jest **akumulator**, w którym przed wykonaniem operacji umieszcza się jeden z argumentów i w którym po jej wykonaniu pozostaje wynik.

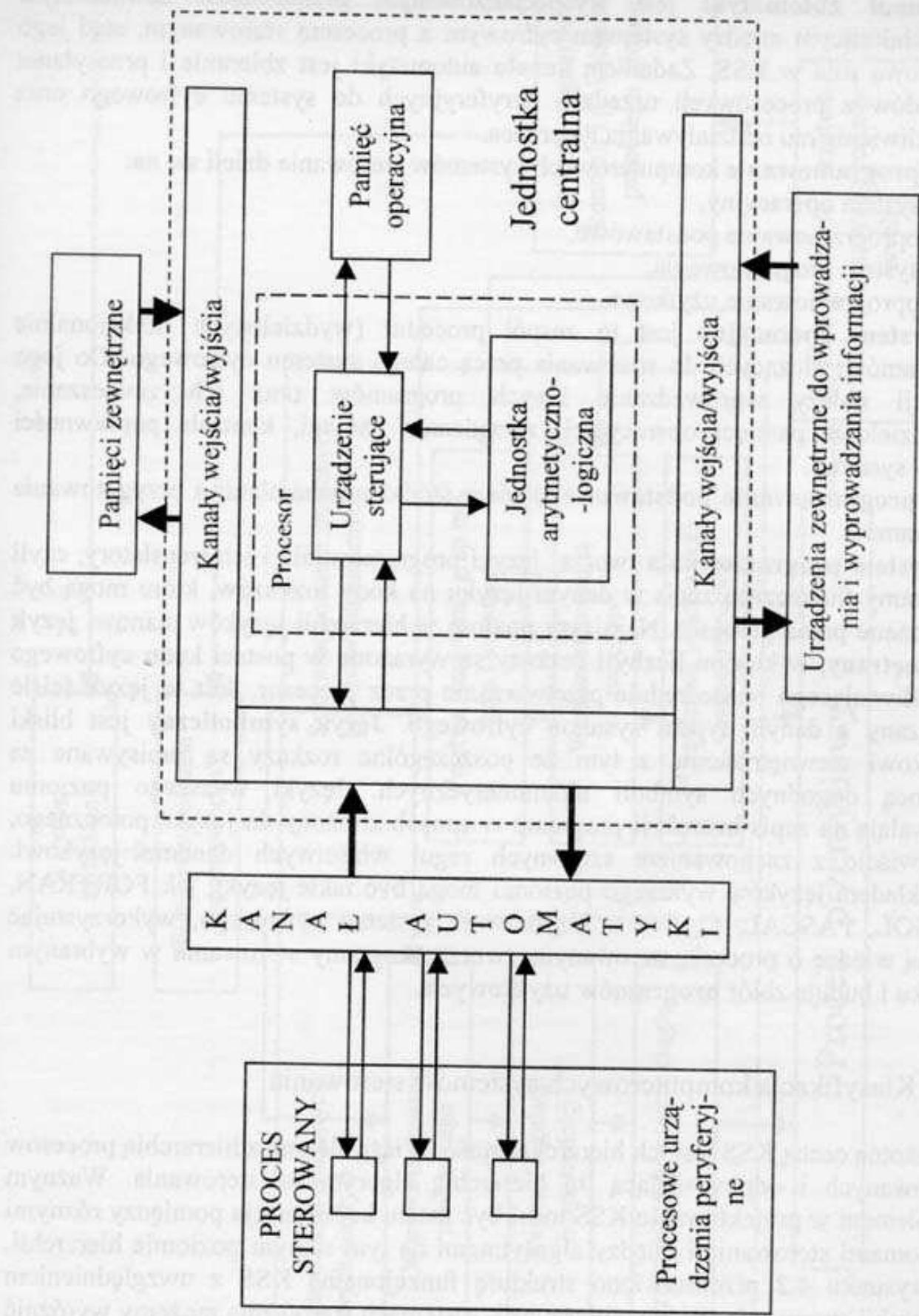
**Procesor** tworzą łącznie urządzenie sterujące i jednostka arytmetyczno-logiczna. Jest on zdolny do automatycznego wykonywania ciągu rozkazów.

**Kanały wejścia/wyjścia** umożliwiają transmisję pomiędzy jednostką centralną a poszczególnymi jednostkami sterującymi urządzeń zewnętrznych.

**Pamięć wewnętrzna** służy do przechowywania liczb binarnych, które mogą być interpretowane jako rozkazy lub dane. Każda liczba jest przechowywana w pojedynczej komórce o stałej długości bitów, właściwej dla danej pamięci. Każda komórka jest identyfikowana przez adres. Pamięć wewnętrzna zwana jest często **pamięcią operacyjną** ze względu na to, że bezpośrednio na niej operuje procesor. Oznacza to, że każda komórka pamięci operacyjnej może być bezpośrednio adresowana przez urządzenie sterujące.

Do urządzeń peryferyjnych systemu cyfrowego zalicza się urządzenia do wprowadzania i wyprowadzania danych, pamięci zewnętrzne oraz kanał automatyki. Funkcje poszczególnych urządzeń do wprowadzania i wyprowadzania danych są oczywiste i nie wymagają oddzielnego wyjaśnienia. Zatrzymamy się natomiast przy pamięciach zewnętrznych i kanale automatyki.

**Pamięci zewnętrzne** służą do przechowywania i archiwizowania programów i danych. Mają one znaczenie większą pojemność niż pamięć operacyjna, a więc operacje zapisu i odczytu trwają znacznie dłużej. Najwolniejszym typem pamięci jest zapis na taśmie magnetycznej (PT). Ten rodzaj pamięci najczęściej jest stosowany do rejestracji sekwencji zdarzeń jako tzw. pamięć strumieniowa (streamer). Obecnie częściej stosowanymi typami pamięci są pamięci dyskowe, wśród których wyróżnia się dyski twarde (stałe) i dyski elastyczne (wymienne), zwane często dyskietkami. Pamięć w formie dysków twardych łączy w sobie cechy nośników o bardzo dużej pojemności i dużej prędkości dostępu.



Rys. 4.1. Struktura sprzętowa komputerowych systemów sterowania

**Kanał automatyki** jest wyspecjalizowanym urządzeniem zewnętrznym pośredniczącym między systemem cyfrowym a procesem sterowanym, stąd jego kluczowa rola w KSS. Zadaniem kanału automatyki jest zbieranie i przesyłanie sygnałów z procesowych urządzeń peryferyjnych do systemu cyfrowego oraz umożliwienie mu oddziaływanego na proces.

**Oprogramowanie** komputerowych systemów sterowania dzieli się na:

- system operacyjny,
- oprogramowanie podstawowe,
- system programowania,
- oprogramowanie użytkowe.

**System operacyjny** jest to zespół procedur (wydzielonych funkcjonalnie programów) służących do sterowania pracą całego systemu cyfrowego. Do jego funkcji należy wprowadzenie innych programów oraz ich zawieszanie, przydzielanie pamięci operacyjnej, zarządzanie danymi, kontrola poprawności pracy systemu.

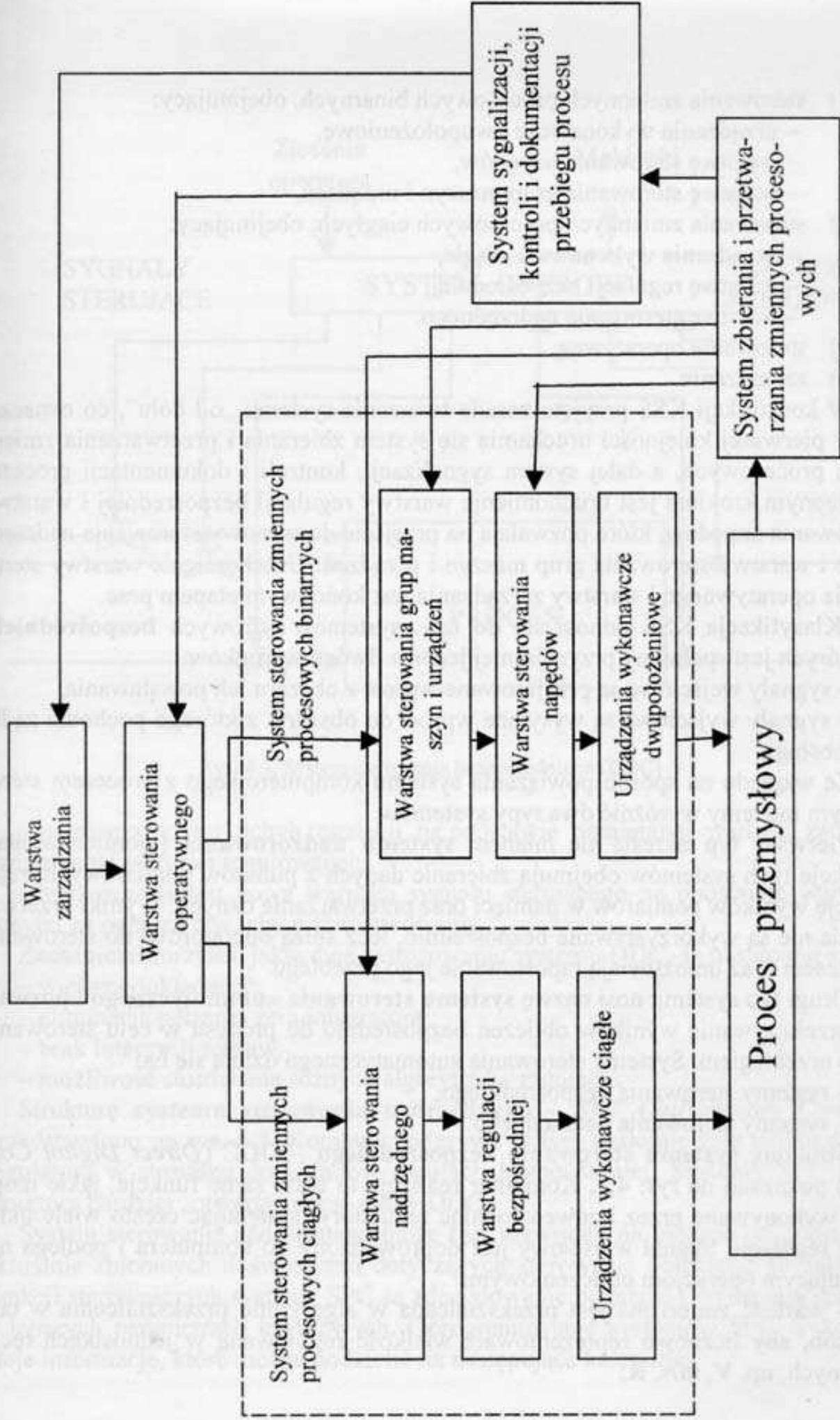
**Oprogramowanie podstawowe** zawiera środki uruchamiania i przygotowania programów.

**System programowania** tworzą języki programowania i ich translatory, czyli programy tłumaczące zapis w danym języku na kody rozkazów, które mogą być wykonane przez procesor. Najniższy poziom w hierarchii języków stanowi **język wewnętrzny**, w którym liczby i rozkazy są wyrażone w postaci kodu cyfrowego umożliwiającego bezpośrednie przetwarzanie przez procesor. Jest to język ściśle związany z danym typem systemu cyfrowego. **Język symboliczny** jest bliski językowi wewnętrznemu, z tym że poszczególne rozkazy są zapisywane za pomocą dogodnych symboli alfanumerycznych. Języki wyższego poziomu pozwalają na zapis instrukcji programu w sposób zbliżony do języka potocznego, oczywiście z zachowaniem sztywnych reguł właściwych danemu językowi. Przykładem języków wyższego poziomu mogą być takie języki, jak FORTRAN, ALGOL, PASCAL, C, C++. Użytkownik systemu cyfrowego, wykorzystując swoją wiedzę o procesie sterowanym, tworzy programy sterowania w wybranym języku i buduje zbiór **programów użytkowych**.

## 4.2. Klasyfikacja komputerowych systemów sterowania

Istotną cechą KSS jest ich hierarchiczność. Wiąże się ona z hierarchią procesów sterowanych i odpowiadającą im hierarchią algorytmów sterowania. Ważnym problemem w projektowaniu KSS musi być zatem koordynacja pomiędzy różnymi poziomami sterowania i między algorytmami na tym samym poziomie hierarchii. Na rysunku 4.2 przedstawiono strukturę funkcjonalną KSS z uwzględnieniem hierarchii sterowania. W komputerowych systemach sterowania możemy wyróżnić następujące podsystemy:

- 1) zbierania i przetwarzania zmiennych stanu procesu,
- 2) sygnalizacji, kontroli i dokumentacji procesu,



Rys. 4.2 Struktura funkcjonalna KSS

- 3) sterowania zmiennych procesowych binarnych, obejmujący:
  - urządzenia wykonawcze dwupołożeniowe,
  - warstwę sterowania napędów,
  - warstwę sterowania grup maszyn i urządzeń,
- 4) sterowania zmiennych procesowych ciągłych, obejmujący:
  - urządzenia wykonawcze ciągłe,
  - warstwę regulacji bezpośredniej,
  - warstwę sterowania nadzecznego.
- 5) sterowanie operatywne,
- 6) zarządzanie.

W konstrukcji KSS przyjęto zasadę tworzenia systemu „od dołu”, co oznacza, że w pierwszej kolejności uruchamia się system zbierania i przetwarzania zmiennych procesowych, a dalej system sygnalizacji, kontroli i dokumentacji procesu. Nastepnym krokiem jest uruchomienie warstwy regulacji bezpośredniej i warstwy sterowania napędów, które pozwalają na przejście do warstwy sterowania nadzecznego i warstwy sterowania grup maszyn i urządzeń. Uruchomienie warstwy sterowania operatywnego i warstwy zarządzania jest końcowym etapem prac.

Klasyfikacja KSS odnosi się do tzw. systemów cyfrowych **bezpośrednich**, w których jest spełniony przynajmniej jeden z dwóch warunków:

- sygnały wejściowe są przyjmowane wprost z obszaru ich powstawania,
- sygnały wyjściowe są wysyłane wprost do obszaru, z którego pochodzi żądanie obsługi.

Ze względu na sposób powiązania systemu komputerowego z procesem sterowanym możemy wyróżnić dwa typy systemów.

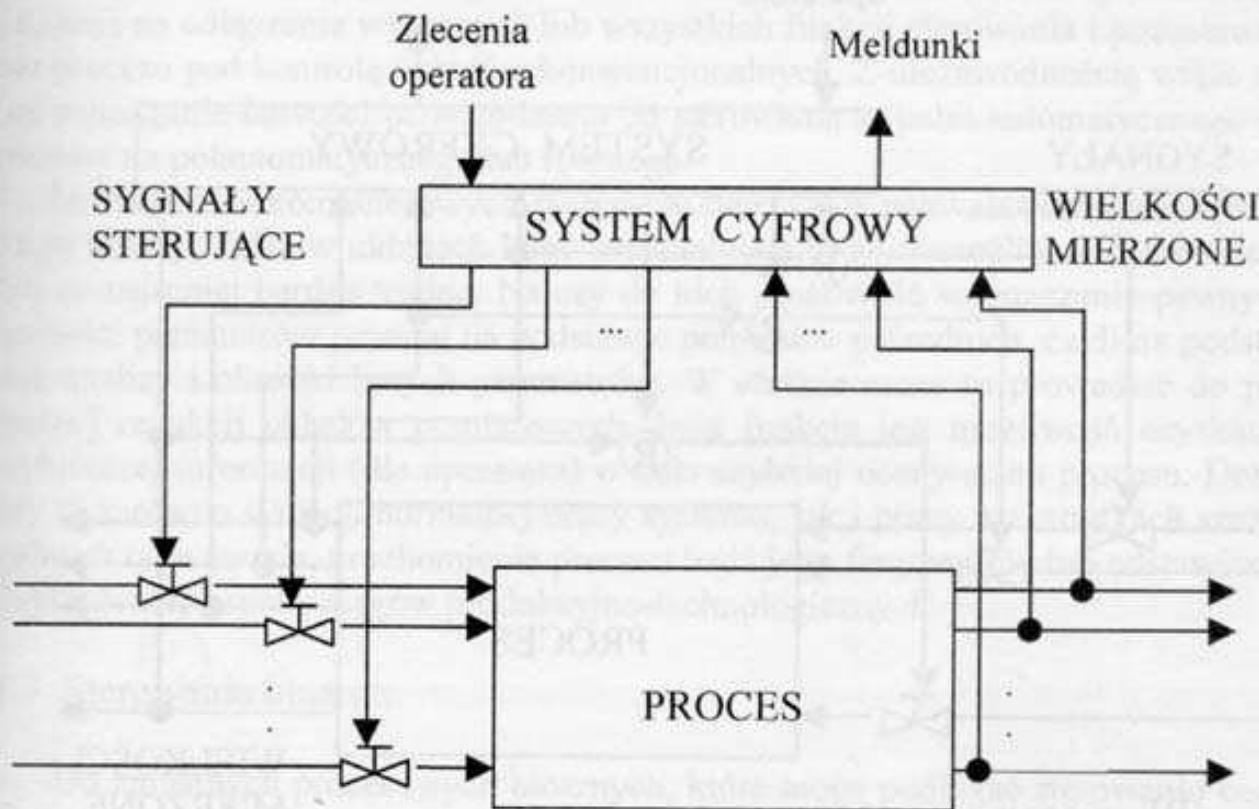
Pierwszy typ określa się mianem **systemu nadzorowania** (monitorowania). Funkcje tych systemów obejmują zbieranie danych z punktów pomiarowych, rejestrację wyników pomiarów w pamięci oraz przetwarzanie danych. Wyniki przetwarzania nie są wykorzystywane bezpośrednio, lecz służą operatorowi do sterowania procesem oraz umożliwiają raportowanie jego przebiegu.

Drugi typ systemu nosi nazwę **systemu sterowania automatycznego** i pozwala na przekazywanie wyników obliczeń bezpośrednio do procesu w celu sterowania jego przebiegiem. Systemy sterowania automatycznego dzielą się na:

- systemy sterowania bezpośredniego,
- systemy sterowania nadzecznego.

Strukturę **systemu sterowania bezpośredniego** – DDC (*Direct Digital Control*) pokazano na rys. 4.3. Komputer realizuje tu takie same funkcje, jakie mogą być wykonywane przez konwencjonalne regulatory, zastępując często wiele układów regulacji. Sygnał wejściowy jest doprowadzony do komputera i podlega następującym operacjom obliczeniowym:

- wartość zmierzona jest przekształcana w algorytmie przekształcenia w taki sposób, aby liczbowo reprezentowała wielkość regułowaną w jednostkach technicznych, np. V, mA, K;



Rys. 4.3. System sterowania bezpośredniego (DDC)

– wyznaczany jest uchyb regulacji na podstawie pamiętanej wartości zadanej i zmierzonej wartości regułowanej;

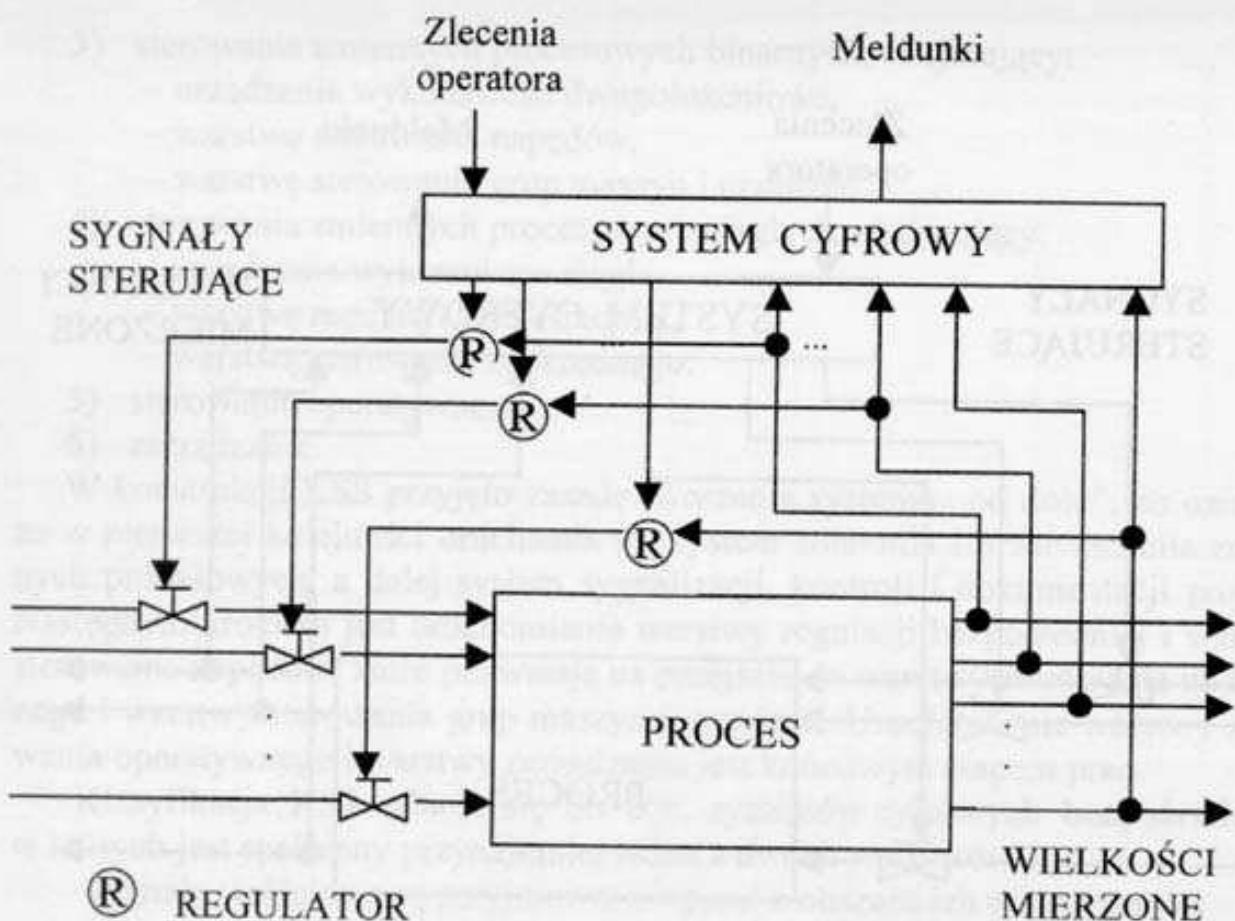
– wyznaczana jest nowa wartość sygnału sterującego na podstawie wartości uchybu za pomocą tzw. algorytmu sterowania.

Zasadnicze korzyści, jakie daje zastosowanie systemu DDC, są następujące:

- większa dokładność,
- eliminacja pełzania zera integratora,
- brak integracji nastaw,
- możliwość stosowania różnych algorytmów regulacji.

Strukturę **systemu sterowania nadzawanego** – SPC (*Supervisory Control*) przedstawiono na rys. 4.4. Komputer odgrywa w tym systemie rolę nadzawanego regulatora w stosunku do układów regulacji bezpośredniej. Systemy SPC mają strukturę bardziej „otwartą” niż systemy DDC.

System sterowania nadzawanego może być rozwijany na bieżąco na podstawie aktualnie zbieranych doświadczeń dotyczących sterowania obiektem. W zakresie funkcji sterowniczych systemy SPC są zdecydowanie bogatsze i wymagają sprzętu o lepszych parametrach użytkowych. Oprogramowanie systemów SPC wykorzystuje informacje, które można podzielić na następujące kategorie:



Rys. 4.4. System sterowania nadzorowanego (SPC)

- program i stałe związane z programem,
- bieżące polecenia kierownictwa,
- bieżące wartości wielkości regulowanych w procesie,
- informacja o bieżących stanach lub położeniach elementów nastawczych,
- dane dotyczące poprzednich wartości wielkości regulowanych,
- dane o stanach elementów nastawczych w przeszłości.

W zakresie obliczeń w systemie są realizowane następujące funkcje:

- wnioskowanie o bieżących wartościach zmiennych procesowych, których nie można bezpośrednio zmierzyć,
- procedury obliczeniowe dotyczące sterowania,
- predykcja stanów procesu,
- zestawianie danych i dokumentacja procesu.

Zwróćmy na koniec uwagę na pewne wymagania niezbędne do poprawnej realizacji komputerowych systemów sterowania. W pierwszej kolejności należy uwzględnić jakość informacji początkowej (wejściowej). Ma ona kapitalne znaczenie dla poprawnego funkcjonowania systemu i uzyskiwania oczekiwanych korzyści. Narzuca to cały szereg wymagań odnośnie do czujników pomiarowych, przetworników i całych układów pomiarowych wielkości procesowych. Innym podsta-

wowym wymaganiem jest duża niezawodność systemu. Łatwo można zauważyć przewagę w tym względzie systemu SPC nad DDC. Nadrzędnosć systemu SPC pozwala na odłączenie wybranych lub wszystkich funkcji sterowania i pozostawienie procesu pod kontrolą układów konwencjonalnych. Z niezawodnością wiąże się też wymaganie łatwości przechodzenia od sterowania w pełni automatycznego do sterowania półautomatycznego lub ręcznego.

Zastosowanie komputerowych systemów sterowania pozwala również na realizację funkcji, które w układach konwencjonalnych były niemożliwe do spełnienia lub co najmniej bardzo trudne. Należy do nich możliwość wyznaczenia pewnych wartości parametrów procesu na podstawie pomiarów pośrednich, czyli na podstawie analizy i obróbki innych parametrów. W efekcie może to prowadzić do poważnej redukcji układów pomiarowych. Inną funkcją jest możliwość uzyskania wybiórczej informacji (dla operatora) w celu szybkiej oceny stanu procesu. Dotyczy to zarówno sytuacji normalnej pracy systemu, jak i pracy w warunkach szczególnych typu awaria, uruchomienie procesu bądź jego fragmentów lub odstawnienie (wyłączenie) z ruchu ciągów produkcyjno-technologicznych.

#### 4.3. Sterowanie binarne

Do zmiennych procesowych binarnych, które mogą podlegać sterowaniu bądź je określają, zaliczamy stany:

- styczników i przekaźników włączających napędy elektryczne, pneumatyczne i hydrauliczne,
- zaworów odcinających i regulacyjnych,
- dozowników i transporterów,
- sygnalizatorów dwupołożeniowych wartości granicznych zmiennych procesowych analogowych,
- pracy maszyn i urządzeń.

Podstawową trudnością wystającą przy projektowaniu układów sterowania binarnego jest bardzo duża liczba zmiennych procesowych binarnych, od których zależy sterowanie, i duża liczba zmiennych binarnych sterujących.

Algorytmy sterowania binarnego są konstruowane modułowo z zachowaniem hierarchii widocznej na rys. 4.2. Najniższą warstwę stanowi warstwa sterowania napędów. Zadaniem algorytmów sterowania w tej warstwie jest doprowadzenie urządzeń i maszyn do pożądanego stanu pracy i utrzymanie ich w tym stanie. Sterowanie w tej warstwie jest określone przez sygnały:

- pochodzące z wyższych warstw sterowania,
- pochodzące od sterowanych urządzeń i napędów.

Algorytmy sterowania są z reguły stałe i można je jednoznacznie zdefiniować w fazie projektowania.

W warstwie sterowania grup maszyn i urządzeń można wyróżnić następujące zadania:

- wypracowanie decyzji co do sposobu włączania i wyłączania grup maszyn i urządzeń,
- podejmowanie decyzji co do włączania urządzeń rezerwowych w przypadku awarii.

Realizacja sterowania w tej warstwie polega na tzw. sekwencyjnym sterowaniu binarnym z użyciem cyfrowych systemów automatyki. Sekwencyjne sterowanie binarne charakteryzuje się:

- ścisłą zależnością zmiennych procesowych binarnych od czasu (np. procesy odstawiania i rozruchu urządzeń),
- możliwością wyodrębnienia w procesie pewnych kroków (etapów).

Z powyższymi cechami wiąże się ściśle konieczność zachowania zadanej kolejności zmian oraz określonych odstępów czasowych.

Najwyższa warstwa sterowania binarnego, zwana warstwą sterowania operatywnego, ma koordynować sterowanie zmiennych procesowych ciągłych. W tym sensie tworzy klamrę spinającą oba bloki sterowania.

Podsumowując rozważania dotyczące sterowania binarnego, należy zwrócić uwagę na:

- elastyczność układu sterowania, szczególnie ważną, gdy zachodzi konieczność częstych zmian profilu produkcji,
- możliwość powiązań z algorytmami sterowania ciągłego,
- możliwość uzyskiwania precyzyjniejszych informacji przez operatora procesu,
- możliwość uzupełnienia układu sterowania o pewne dodatkowe funkcje (arkusze kalkulacyjne, edytory).

Realizacja tych możliwości jest szczególnie efektywna w tzw. programowalnych układach sterowania, wykorzystujących systemy mikroprocesorowe. Do za-programowania sterowania w tego typu urządzeniach wykorzystuje się specjalne języki problemowe o bardzo prostej strukturze, zwierające kilka instrukcji podstawowych, pozwalających w pełni zapisać algorytm sterowania. Przykładem takiego języka może być język programowania układu sterowania CONTROLPAC 600 firmy Eagle Signals. Instrukcje tego języka podano w tablicy 4.1.

T a b l i c a 4.1 Zestaw instrukcji układu sterowania CONTROLPAC 600

Nr	Kod	Adres	Opis funkcji
1	AND	ADRES	Połączenie styku w szereg z poprzednim
2	OR	ADRES	Połączenie styku równolegle z poprzednim
3	CAND	ADRES	Inwersja styku w szereg z poprzednim
4	COR	ADRES	Inwersja styku równolegle z poprzednim
5	INV	ADRES	Inwersja względem poprzedniego obwodu na początku nowej gałęzi
6	LDA	ADRES	Włączenie styku na początku nowej gałęzi układu
7	STO	ADRES	Podłączenie poprzedniego obwodu do cewki przekaźnika o adresie ADRES

#### 4.4. Sterowanie zmiennych procesowych ciągłych

Komputerowe systemy sterowania (KSS) są również wykorzystywane do sterowania procesami, w których występują sygnały ciągłe. Pojawia się wówczas problem dopasowania sygnałów przy zbieraniu ich z obiektu oraz odwrotny – dopasowania sygnałów sterujących wysyłanych do urządzeń wykonawczych. Podstawowe funkcje oprogramowania obejmują następujące czynności:

- linearyzację i korekcję charakterystyki statycznej czujnika pomiarowego,
- przeliczanie na wybrane jednostki techniczne,
- kontrolę wiarygodności,
- filtrację cyfrową,
- kontrolę przekroczenia wartości granicznych,
- obliczanie podstawowych charakterystyk statystycznych,
- całkowanie.

Niektóre czujniki, szczególnie do pomiaru ciśnienia, przepływu, poziomu i temperatury, generują sygnały będące nieliniową funkcją mierzonej zmiennej procesowej. Oznaczmy przez  $I$  wartość cyfrową otrzymaną w wyniku przetwarzania analogowo-cyfrowego sygnału generowanego przez przetwornik. Wówczas dla wybranych typów czujników otrzymamy następujące zależności nieliniowe:

- pomiar natężenia przepływu objętościowego cieczy za pomocą związków:

$$A = \sqrt{I}, \quad (4.1)$$

- pomiar temperatury za pomocą termometru oporowego:

$$A = c_0 + c_1 I + c_2 I^2 + c_3 I^3 + \dots \quad (4.2)$$

Dla bardziej złożonych charakterystyk wykonuje się obliczenia z wykorzystaniem aproksymacji wielomianowej lub logarytmicznej.

Wartości zmiennej pomiarowej są zapamiętywane w pamięci systemu cyfrowego w jednostkach fizycznych uzyskanych z wyznaczonej wartości  $A$ . Dokładność rzędu 0,01% jest zwykle wystarczająca na potrzeby sterowania.

Kolejnym etapem przetwarzania jest kontrola wiarygodności zmiennej. Polega ona najczęściej na sprawdzaniu, czy wartość zmierzona mieści się w zakresie pomiarowym czujnika ( $A_{\min}$ ,  $A_{\max}$ ). Często konieczne jest sprawdzanie szybkości zmian wartości mierzonej w przyjętym przedziale czasu.

W dalszym procesie przetwarzania wynik podlega filtracji cyfrowej w celu usunięcia szumów zakłócających. Istnieje wiele różnych algorytmów filtracji, które dobiera się do konkretnego przypadku przez dobór współczynników tych algorytmów.

W zakresie kontroli przekroczeń wartości granicznych przyjmuje się dwa rodzaje tych wartości: absolutne i względne. W obu przypadkach sygnalizacja przekroczenia tych wartości jest wysyłana do obsługi KSS lub uruchamia przewidziany

sposób postępowania, realizowany według ustalonego algorytmu przekroczeń wartości granicznych.

Zbieranie dużej liczby danych pomiarowych wymaga ich obróbki statystycznej. Najczęściej stosowanymi charakterystykami statystycznymi są:

- średnie arytmetyczne,
- wariancje,
- przedziały ufności.

Wyznaczanie kumulatywnych przepływów masy lub energii wymaga całkowania zmiennych procesowych. Procedury całkowania są czasochłonne i stąd istotnym problemem staje się wybór takiego algorytmu całkowania, który zapewni żądaną dokładność przy wystarczającej szybkości całkowania, narzuconej przez szybkość zmian wielkości procesowych.

Omówione pokrótce podstawowe procesy przetwarzania zmiennych procesowych ciągłych są często uzupełnione przetwarzaniem specjalistycznym.

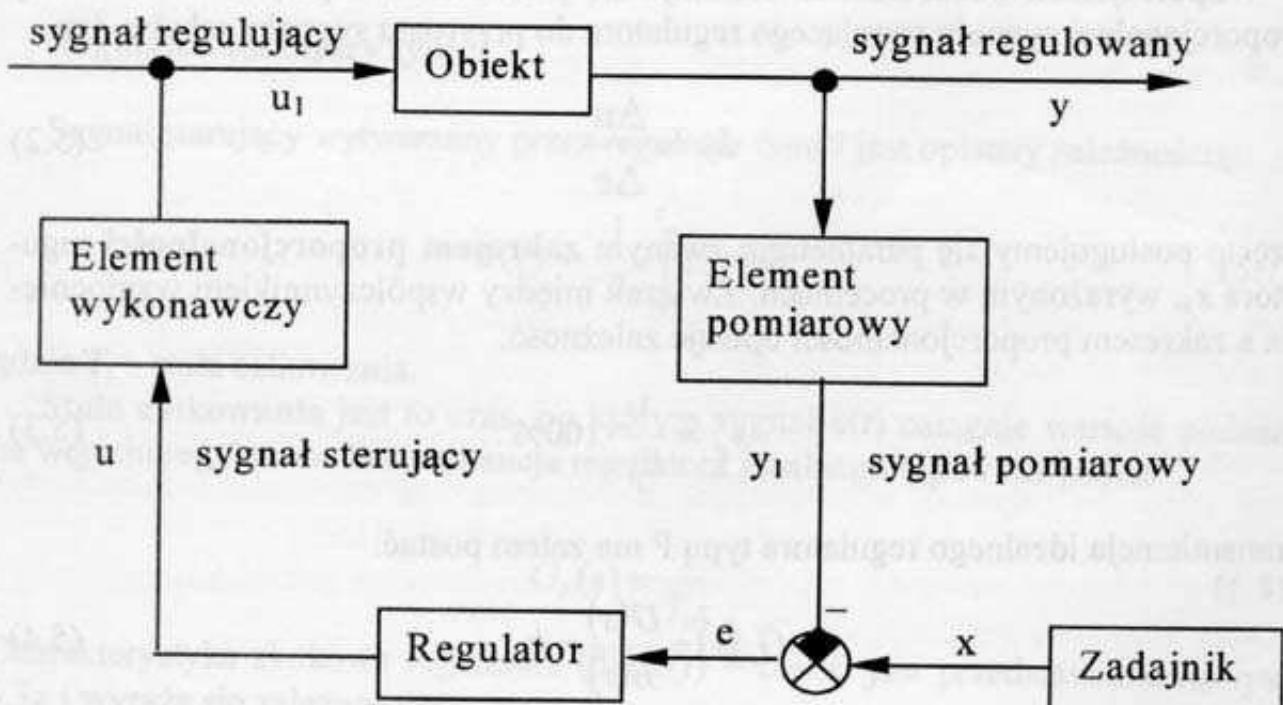
## Literatura

- [1] Algorytmy i programy sterowania, red. H. Górecki, WNT, Warszawa 1980.
- [2] Błażewicz J., Cellary W., Słowiński R., Węglarz J., Przykłady zastosowań maszyn cyfrowych do sterowania, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1978.
- [3] Chorowski B., Wereszko M., Automatyzacja procesów przemysłowych, Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1981.
- [4] Niederliński A., Systemy komputerowe automatyki przemysłowej, WNT, Warszawa 1985.
- [5] Olsson G., Piani G., Computer systems for automation and control, Prentice Hall, New York 1992.
- [6] Orłowski H., Komputerowe układy automatyki, WNT, Warszawa 1987.

## 5. ELEMENTY I URZĄDZENIA AUTOMATYKI

### 5.1. Regulatory

Regulatorem nazywamy urządzenie, którego zadaniem jest porównywanie sygnału pomiarowego z sygnałem zadanym i w zależności od powstałego uchybu wytworzenie sygnału sterującego. Miejsce regulatora w układzie regulacji przedstawia rys. 5.1. W tym układzie regulator zachowuje się biernie w przypadku zerowego uchybu, natomiast reaguje, gdy uchyb  $e \neq 0$ . Ogólnie regulatorzy można podzielić na dwie zasadnicze grupy:



Rys. 5.1. Schemat blokowy układu regulacji z wyszczególnieniem podstawowych elementów automatyki

- bezpośredniego działania, tzn. nie korzystające z energii pomocniczej,
- pośredniego działania, wykorzystujące pomocnicze źródło energii.

W zależności od rodzaju wykorzystywanej energii regulatory pośredniego działania dzieli się na elektryczne, pneumatyczne lub hydrauliczne. Powyższy podział jest związany z budową regulatorów. Innym kryterium podziału regulatorów są ich własności dynamiczne. Możemy mówić o regulatorach przetwarzających sygnał sterujący w sposób ciągły lub nieciągły. Innymi słowy, podział regulatorów ze względu na własności dynamiczne odpowiada ogólnemu podziałowi układów sterowania.

### 5.1.1. Podstawowe typy regulatorów ciągłych

Omówimy podstawowe typy (w sensie własności dynamicznych) regulatorów ciągłych. Podamy główne parametry i charakterystyki tych regulatorów, wyróżniając tzw. regulatory idealne oraz rzeczywiste (z inercją).

#### **Regulator proporcjonalny typu P**

Sygnał sterujący wytwarzany przez regulator typu P jest opisany zależnością

$$u(t) = k_p \cdot e(t), \quad (5.1)$$

gdzie  $k_p$  – współczynnik wzmacnienia regulatora.

**Współczynnik wzmacnienia** definiuje się jako stosunek przyrostu składowej proporcjonalnej sygnału sterującego regulatora do przyrostu sygnału uchybu, tzn.

$$k_p = \frac{\Delta u}{\Delta e}. \quad (5.2)$$

Często posługujemy się parametrem zwanym **zakresem proporcjonalności** regulatora  $x_p$ , wyrażonym w procentach. Związek między współczynnikiem wzmacnienia a zakresem proporcjonalności opisuje zależność:

$$x_p = \frac{1}{k_p} \cdot 100\%. \quad (5.3)$$

Transmitancja idealnego regulatora typu P ma zatem postać:

$$G_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = k_p. \quad (5.4)$$

W praktyce często mamy do czynienia z reglatorem typu P z inercją. Wówczas transmitancja ma postać:

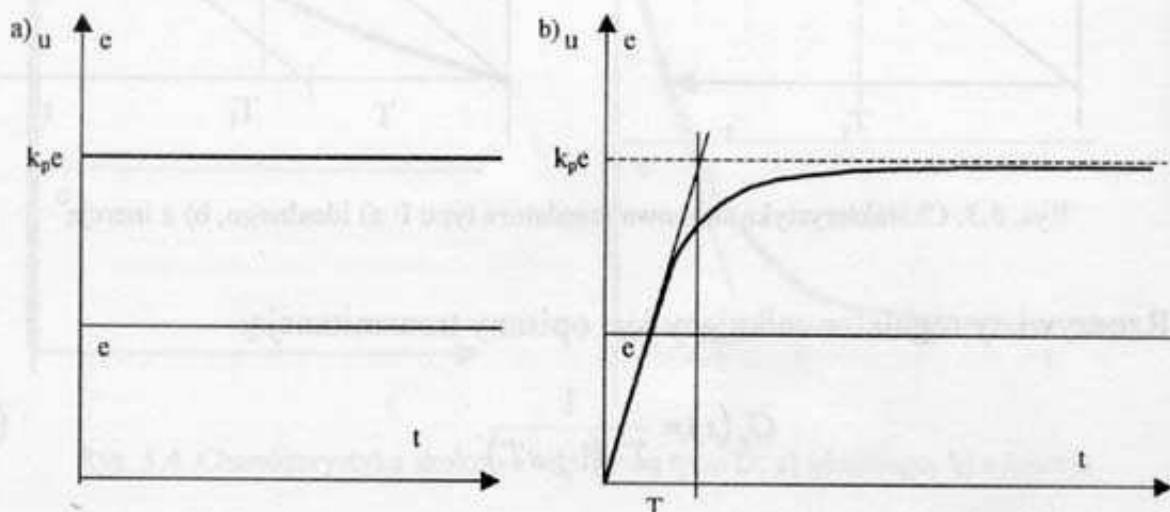
$$G_r(s) = \frac{1}{1 + sT}. \quad (5.5)$$

natomiast sygnał sterujący wytworzony w regulatorze dla  $e(t) = \text{const} = e$  opisuje zależność:

$$u(t) = k_p (1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot e, \quad (5.6)$$

gdzie  $T$  oznacza stałą inercji regulatora.

Na rysunku 5.2 przedstawiono przebieg charakterystyk skokowych idealnego regulatora typu P oraz z inercją I rzędu.



Rys. 5.2. Charakterystyka skokowa regulatora typu P: a) idealnego, b) z inercją I rzędu

### Regulator całkujący typu I

Sygnał sterujący wytwarzany przez regulator typu I jest opisany zależnością:

$$u(t) = \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau, \quad (5.7)$$

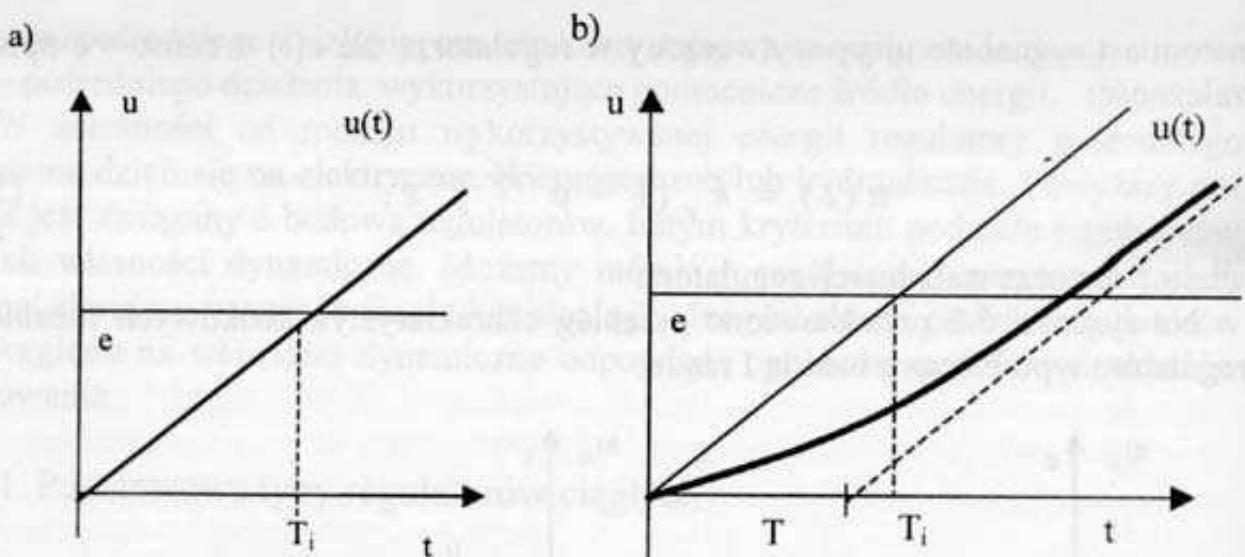
gdzie  $T_i$  – stała całkowania.

**Stała całkowania** jest to czas, po którym sygnał  $u(t)$  osiągnie wartość podaną na wejściu regulatora. Transmitancja regulatora idealnego typu I ma postać:

$$G_r(s) = \frac{1}{T_i s}. \quad (5.8)$$

Charakterystyka skokowa regulatora (dla  $e(t) = \text{const}$ ) jest przedstawiona na rys. 5.3a i wyraża się zależnością:

$$u(t) = \frac{e}{T_i} t. \quad (5.9)$$



Rys. 5.3. Charakterystyka skokowa regulatora typu I: a) idealnego, b) z inercją

Rzeczywisty regulator całkujący jest opisany transmitancją:

$$G_r(s) = \frac{1}{Ts(1+sT)}. \quad (5.10)$$

Odpowiednią charakterystykę skokową przedstawiono na rys. 5.3b.

### Regulator różniczkujący typu D

Sygnał sterujący uzyskiwany w regulatorze typu D opisuje zależność:

$$u(t) = T_d \frac{d}{dt} [e(t)], \quad (5.11)$$

gdzie  $T_d$  jest stałą różniczkowania.

Transmitancja regulatora idealnego typu D przyjmie postać:

$$G_r(s) = T_d s. \quad (5.12)$$

Zauważmy, że regulator idealny typu D nie może być fizycznie zrealizowany (patrz rozdział 2.2.1 – warunek realizowalności fizycznej układu).

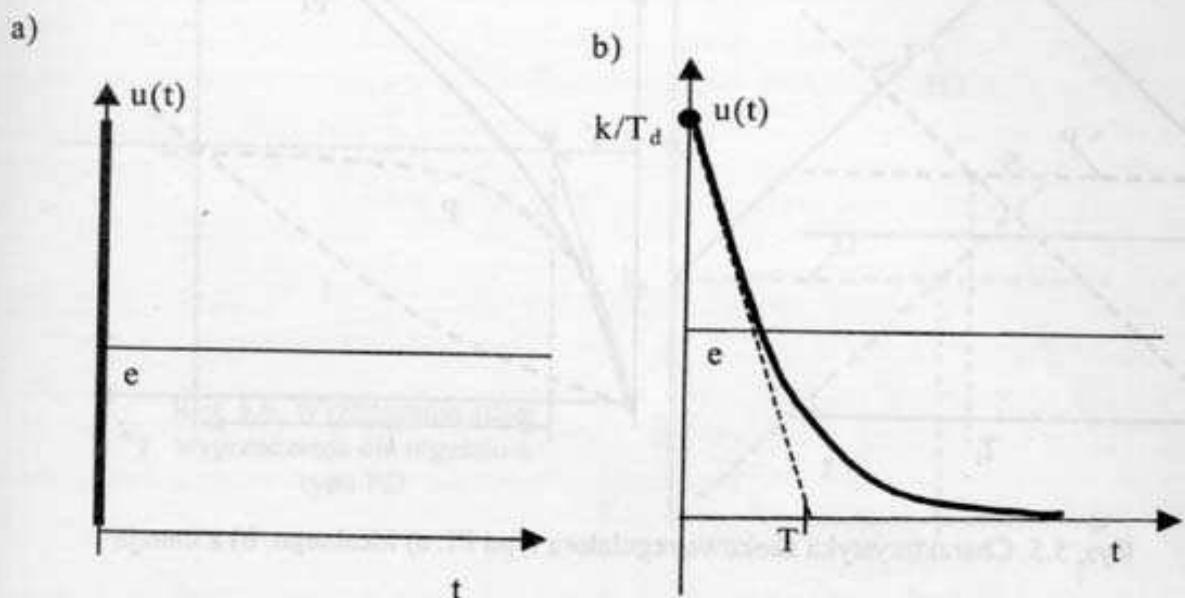
Uzgugleśniając powyższy fakt, zajmiemy się regulatorem różniczkującym z inercją, którego transmitancję wyraża wzór:

$$G_r(s) = \frac{T_d s}{1 + sT}. \quad (5.13)$$

Charakterystykę skokową rzeczywistego regulatora typu D przedstawia zależność:

$$u(t) = e \cdot \frac{T_d}{T} \cdot e^{-\frac{t}{T}} \quad (5.14)$$

Wykres charakterystyki skokowej dla  $e(t) = e = \text{const}$  przedstawiono na rys. 5.4.



Rys. 5.4. Charakterystyka skokowa regulatora typu D: a) idealnego, b) z inercją

### Regulator proporcjonalno-całkujący typu PI

Regulator typu PI realizuje sumaryczne działania proporcjonalne i całkujące. Jego transmitancja ma postać:

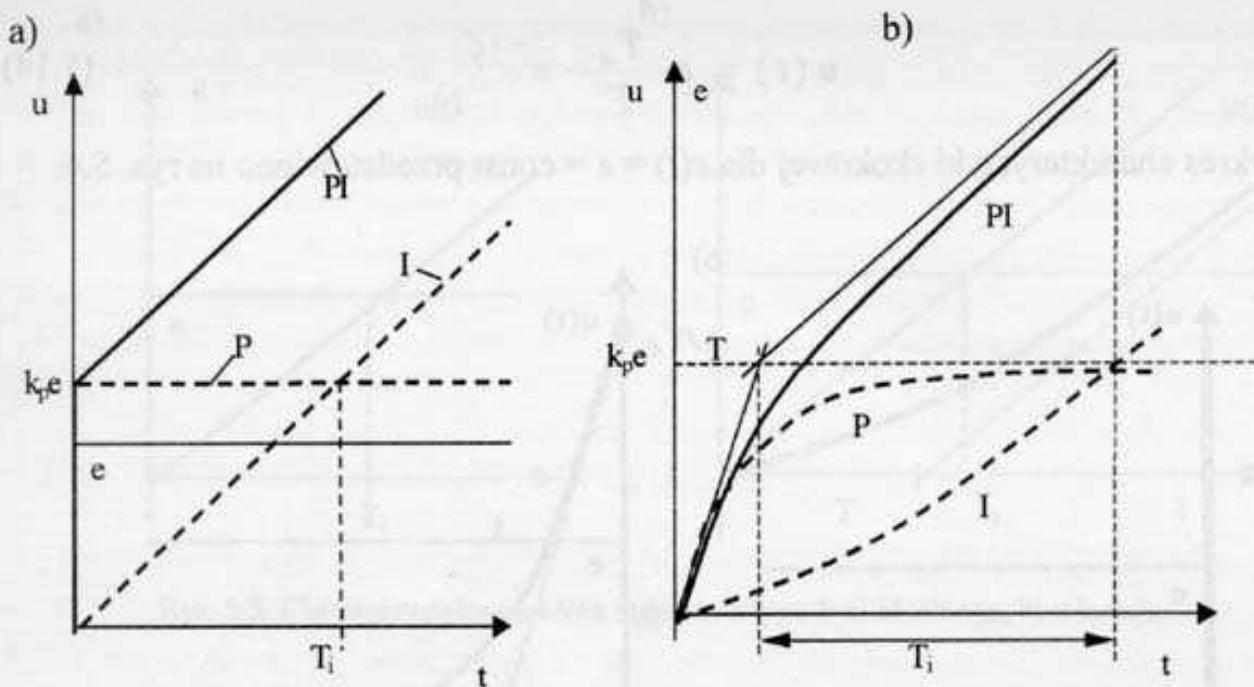
$$G_r(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (5.15)$$

Stała czasowa  $T_i$  nosi nazwę **czasu zdwojenia** i jest to czas, po którym składowa pochodząca z działania całkującego zrówna się ze składową pochodzącą z działania proporcjonalnego, po podaniu skoku na wejście regulatora. Na rysunku 5.5a przedstawiono charakterystykę skokową regulatora PI; linią przerywaną oznaczono poszczególne składowe, a ciągłą – funkcję wypadkową. Sygnał sterujący wytwarzany w regulatorze PI jest opisany zależnością:

$$u(t) = k_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right]. \quad (5.16)$$

Dla regulatora typu PI z inercją mamy transmitancję:

$$G_r(s) = \frac{k_p}{1 + sT} \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right). \quad (5.17)$$



Rys. 5.5. Charakterystyka skokowa regulatora typu PI: a) idealnego, b) z inercją

Przebieg odpowiedzi skokowej dla regulatora proporcjonalno-całkującego z inercją podano na rys. 5.5b; wyróżniono składowe pochodzące z działania proporcjonalnego i całkującego.

### Regulator proporcjonalno-różniczkujący typu PD

Sygnal sterujący uzyskany z regulatora idealnego typu PD opisuje zależność:

$$u(t) = k_p \left[ e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right], \quad (5.18)$$

gdzie  $T_d$  jest stałą wyprzedzenia.

**Stała wyprzedzenia** jest to czas, po którym składowa pochodząca z działania proporcjonalnego zrówna się ze składową pochodzącą z działania różniczkującego po podaniu na wejścia regulatora sygnału narastającego liniowo. Graficzny obraz

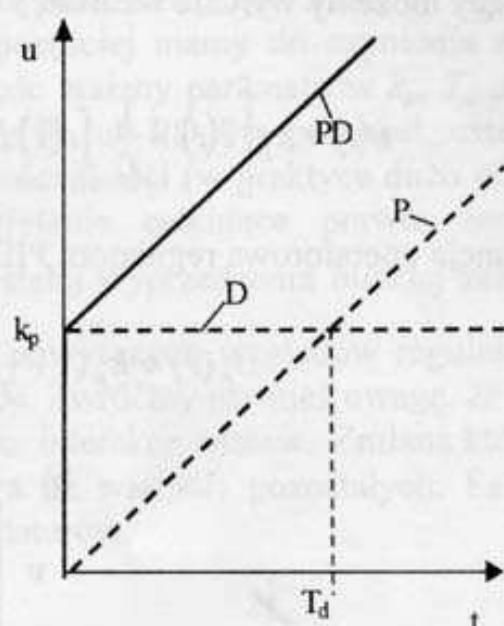
$$G_r(s) = k_p (1 + T_d s). \quad (5.19)$$

wyznaczania czasu wyprzedzenia pokazano na rys. 5.6. Transmitancja operatorowa regulatora idealnego typu PD ma postać:

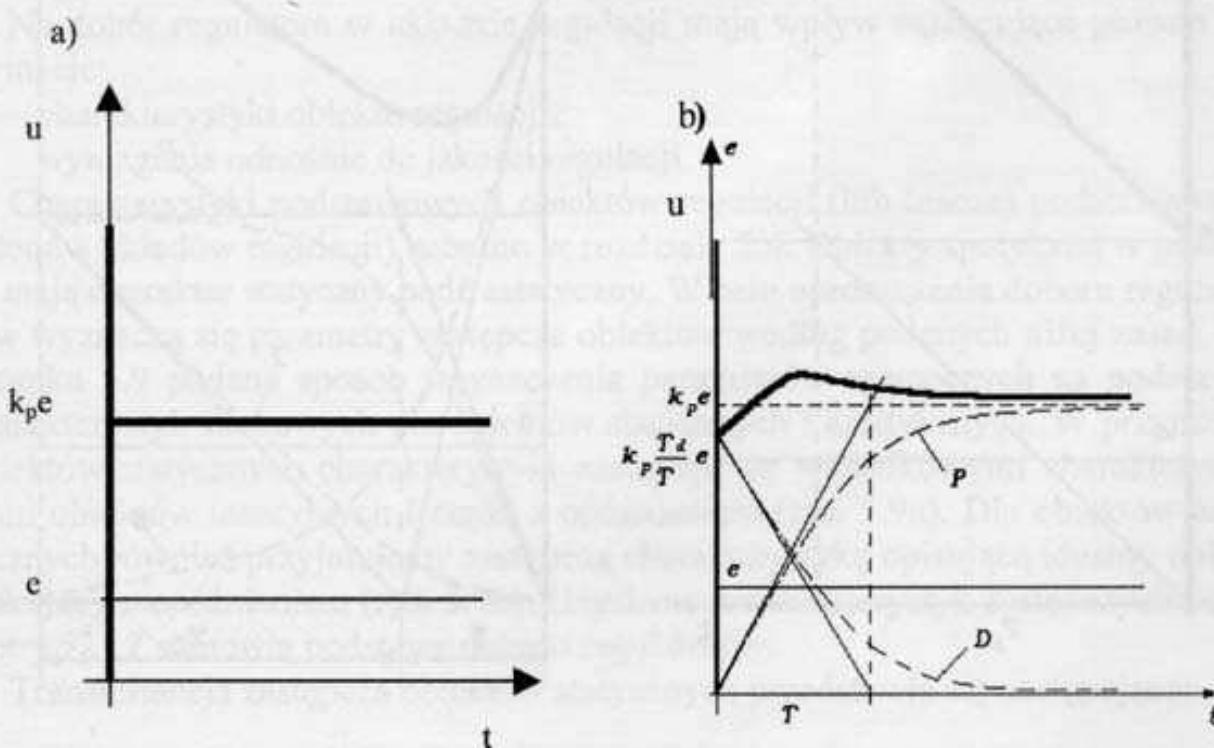
Odpowiednia transmitancja dla regulatora PD z inercją przyjmie postać:

$$G_r(s) = \frac{k_p}{1 + sT} (1 + T_d s). \quad (5.20)$$

Na rysunku 5.7 przedstawiono charakterystyki skokowe dla regulatora typu PD.



Rys. 5.6. Wyznaczanie stałej wyprzedzenia dla regulatora typu PD



Rys. 5.7. Charakterystyka skokowa regulatora typu PD: a) idealnego, b) z inercją

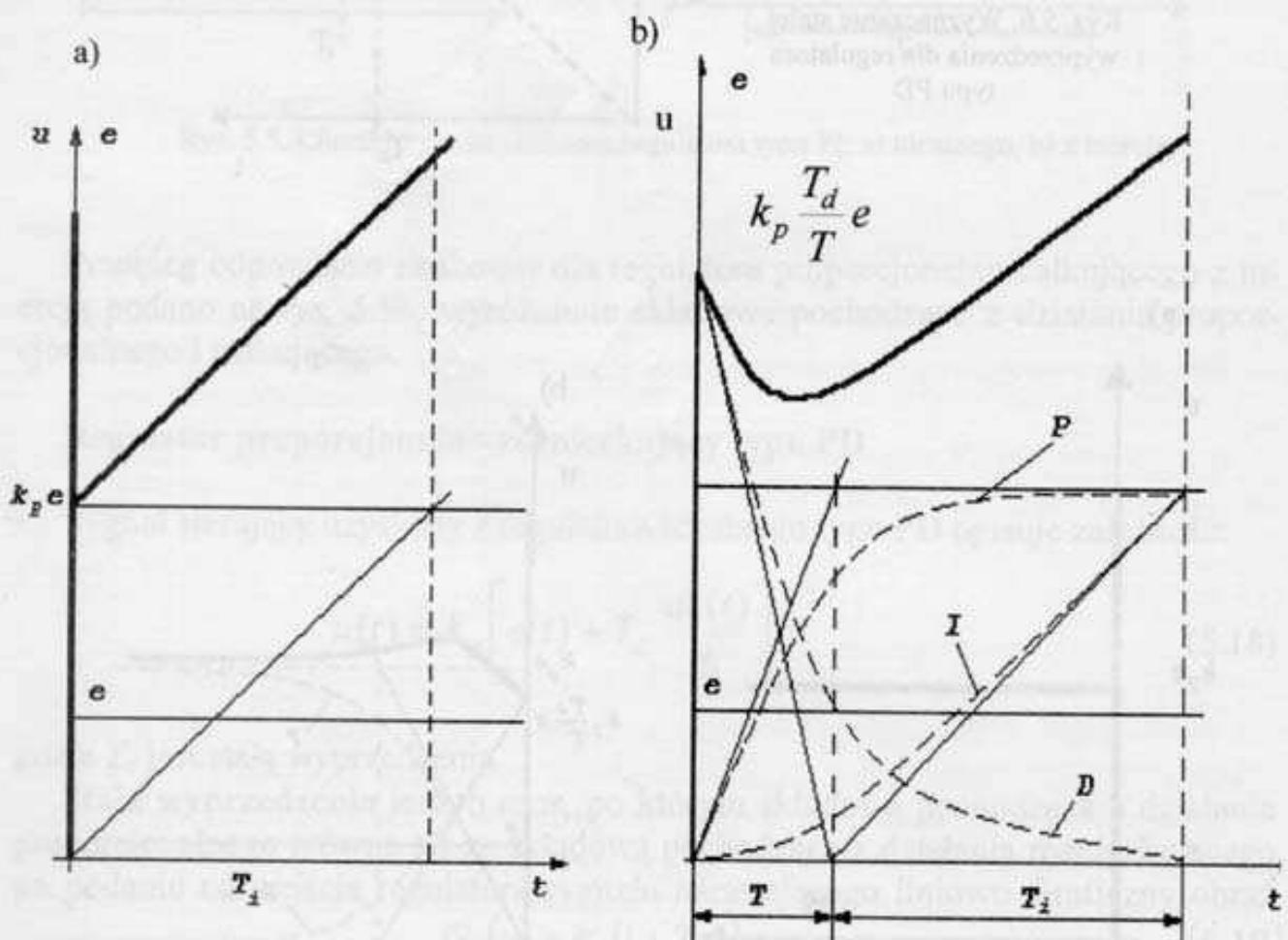
## Regulator proporcjonalno-calkująco-różniczkujący typu PID

Regulator PID realizuje sumaryczne działania regulatorów P, I oraz D i stąd sygnał sterujący możemy wyrazić wzorem:

$$u(t) = k_p \left[ e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]. \quad (5.21)$$

Transmitancja operatorowa regulatora PID przyjmie postać:

$$G_r(s) = k_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right). \quad (5.22)$$



Rys. 5.8. Charakterystyka skokowa regulatora typu PID: a) idealnego, b) z inercją; linie przerywane – charakterystyki składowe P, I, D; linia ciągła – charakterystyka wypadkowa

Parametry  $k_p$ ,  $T_i$  oraz  $T_d$  zostały określone wcześniej. Charakterystykę skokową przedstawiono na rys. 5.8a. W praktyce mamy do czynienia z rzeczywistymi regulatorami, których transmitancję możemy zapisać jako:

$$G_r(s) = \frac{k_p}{1+sT_i} \left(1 + \frac{1}{T_d s} + T_d s\right) \quad (5.23)$$

Odpowiednią charakterystykę skokową przedstawia rys. 5.8b.

W wykonaniach technicznych najczęściej mamy do czynienia z regulatorem typu PID, w którym istnieje możliwość zmiany parametrów  $k_p$ ,  $T_d$  oraz  $T_i$ , dzięki czemu możemy uzyskiwać regulatorы PI lub PD. Na przykład, ustawiszy stałą zdwojenia  $T_i$  na wartość bliską nieskończoności (w praktyce dużo większą od  $T_d$ ), uzyskamy regulator PD, gdyż działanie całkujące prawie zanika (ułamek  $\frac{1}{T_i s} \rightarrow 0$ ). Natomiast po wybraniu stałej wyprzedzenia bliskiej zeru otrzymamy regulator typu PI. Między innymi z powyższych względów regulatorы typu PID mają szerokie zastosowanie w praktyce. Zwróćmy również uwagę, że w większości regulatorów występuje tzw. Zjawisko interakcji nastaw. Zmiana któregokolwiek z parametrów:  $k_p$ ,  $T_i$  lub  $T_d$ , wpływa na wartości pozostałych. Fakt ten należy uwzględnić przy doborze nastaw regulatorów.

### 5.1.2. Dobór regulatorów

Na dobór regulatora w układzie regulacji mają wpływ następujące główne informacje:

- charakterystyki obiektu regulacji,
- wymagania odnośnie do jakości regulacji.

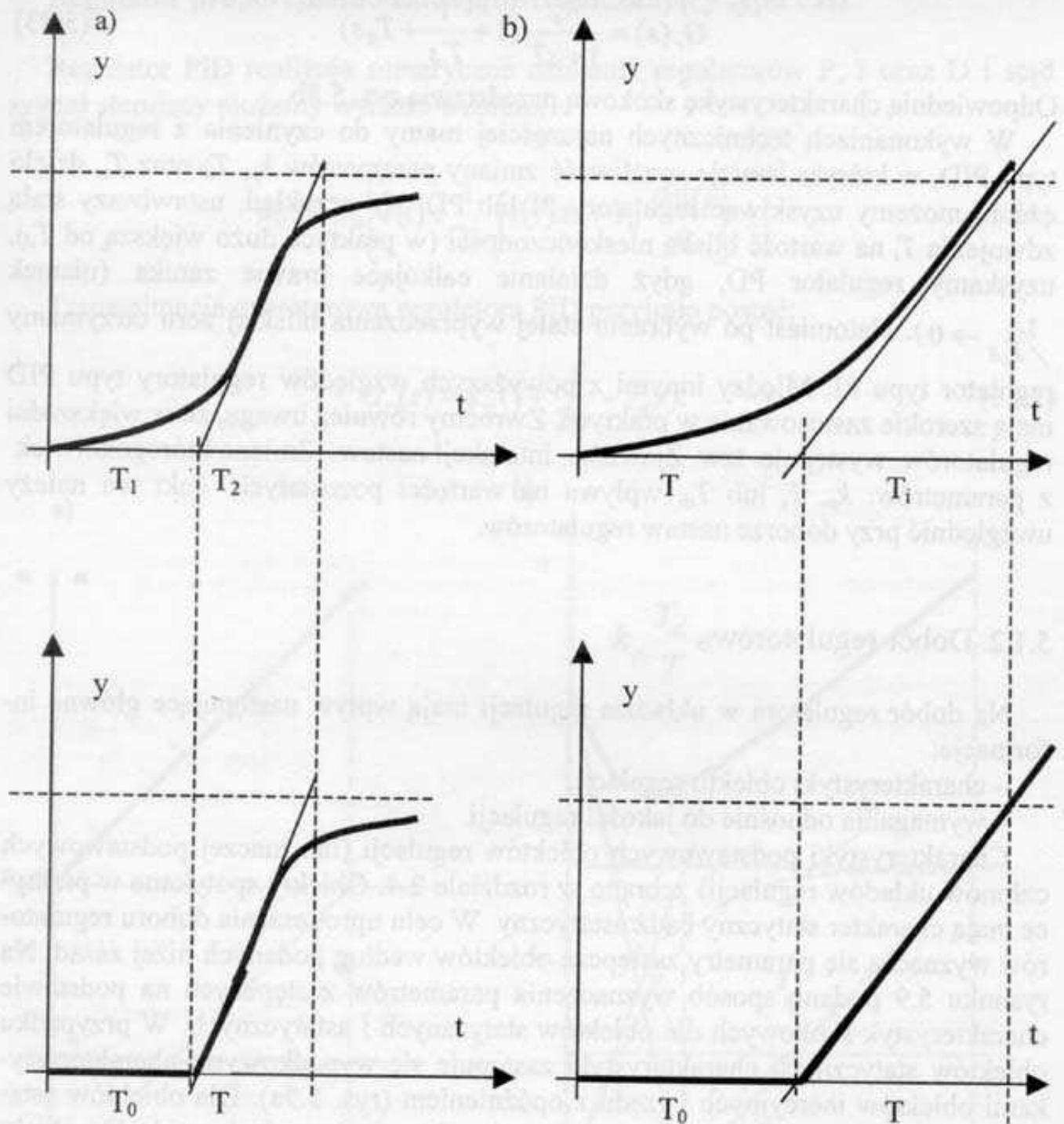
Charakterystyki podstawowych obiektów regulacji (lub inaczej podstawowych członów układów regulacji) zebrane w rozdziale 2.4. Obiekty spotykane w praktyce mają charakter statyczny bądź astatyczny. W celu uproszczenia doboru regulatorów wyznacza się parametry zastępcze obiektów według podanych niżej zasad. Na rysunku 5.9 podano sposób wyznaczenia parametrów zastępczych na podstawie charakterystyk skokowych dla obiektów statycznych i astatycznych. W przypadku obiektów statycznych charakterystyki zastępuje się wypadkowymi charakterystykami obiektów inercyjnych I rzędu z opóźnieniem (rys. 5.9a). Dla obiektów astatycznych również przyjmujemy zastępczą charakterystykę opisującą idealny obiekt całkujący z opóźnieniem (rys. 5.9b). Uzyskane z charakterystyk zastępczych parametry  $T_0$  i  $T$  stanowią podstawę doboru regulatorów.

Transmitancja zastępcza obiektów statycznych przedstawia się następująco:

$$G_{ob}(s) = \frac{k e^{-sT_0}}{1+sT}. \quad (5.24)$$

Dla obiektów astatycznych mamy zależność:

$$G_{ob}(s) = \frac{k e^{-sT_0}}{sT}. \quad (5.25)$$



Rys. 5.9. Wyznaczanie parametrów  $T_0$  i  $T$  dla obiektów: a) statycznych, b) astaticznych

Pełny dobór regulatora wymaga:

- wyboru rodzaju regulatora (ciągły, impulsowy itp.),
- wyboru typu regulatora (P, PI, PD, PID),
- doboru nastaw.

### Wybór rodzaju regulatora

Wyboru rodzaju regulatora dokonuje się na podstawie stosunku  $T_0/T$ .

Dla  $T_0/T < 0,2$  dobiera się regulator dwupołożeniowy lub trójpoleżeniowy. W przypadku, gdy  $0,2 \leq T_0/T \leq 1$ , dobieramy regulator ciągły (jeden z typów podanych w rozdziale 5.1.1). Dla  $T_0/T > 1$  przyjmujemy regulator impulsowy.

### Dobór typu regulatora

Wybór typu regulatora dotyczy wyboru jego własności dynamicznych. Ogólne wskazówki są następujące:

- działanie różniczkujące D wprowadza dodatnie przesunięcie fazowe i zwiększa pasmo przenoszenia układu,
- działanie całkujące I wprowadza ujemne przesunięcie fazowe i zmniejsza pasmo przenoszenia układu,
- działanie całkujące zwiększa rzad astatyzmu układu.

W zależności od wymagań regulacji dokonuje się wyboru typu regulatora spośród typów podanych w rozdziale 5.1.1.

### Dobór nastaw

Istnieje wiele metod doboru nastaw regulatora. Podamy dla przykładu zasady doboru nastaw regulatorów metodą Zieglera-Nicholsa. W tym celu należy wyznaczyć dwa zasadnicze parametry układu regulacji:

- wzmacnienie krytyczne  $k_{kr}$ ,
- okres drgań krytycznych  $t_{kr}$ .

Parametry te wyznaczamy doświadczalnie, włączając regulator na działanie proporcjonalne P i zwiększając wzmacnienie aż do momentu, gdy układ osiągnie granicę stabilności (tzn. w układzie powstaną drgania o stałej amplitudzie i okresie  $t_{kr}$ ). Wartość wzmacnienia, przy której występuje powyższe zjawisko, nazwiemy wzmacnieniem krytycznym  $k_{kr}$ .

Doboru nastaw dokonujemy dla wybranego wcześniej typu regulatora w następujący sposób:

- dla regulatora typu P przyjmujemy

$$k_p = 0,5k_{kr}$$

- dla regulatora typu PI

$$k_p = 0,5k_{kr}, \quad T_i = 0,85t_{kr}$$

- dla regulatora typu PID

$$k_p = 0,5k_{kr}, \quad T_i = 0,85t_{kr}, \quad T_d = 0,12t_{kr}.$$

Dokładniejszego doboru nastaw można dokonać na podstawie znajomości przebiegów uchybu oraz charakterystyk częstotliwościowych (amplitudowo-fazowej i logarytmicznych).

## 5.2. Elementy pomiarowe

Zadaniem elementu pomiarowego jest uzyskanie właściwego dla danego układu regulacji sygnału, którego wartość jest znaną funkcją wielkości regulowanej. Na przykład, sygnał ten powinien być elektryczny dla układu regulacji, w którym informacje (sygnały) są przekazywane za pomocą impulsów elektrycznych, w pneumatycznych układach regulacji żądamy sygnału pneumatycznego itp. Może się również zdarzyć, że w układzie będziemy mieli różne nośniki informacji i wówczas niezbędne będzie przetworzenie sygnałów.

Element pomiarowy składa się najczęściej z dwóch bloków:

- czujnika pomiarowego pozwalającego związać mierzoną wielkość z inną wielkością fizyczną, którą w łatwy sposób można przetwarzanie dalej,
- przetwornika pomiarowego, który pozwala zmienić uzyskaną wielkość na stosowny sygnał (elektryczny, pneumatyczny, hydrauliczny).

Dziedzina zajmująca się metodami pomiarów oraz urządzeniami do pomiarów przemysłowych (na potrzeby automatyki) nosi nazwę miernictwa przemysłowego i ma swoją bogatą literaturę. Zajmiemy się wybranymi działami tej dziedziny, związanymi ściśle z potrzebami inżynierii środowiska. W tym celu na wstępie omówimy podstawowe rodzaje przetworników pomiarowych, w których takie wielkości, jak przesunięcie, kąt, wysokość, siła (naprężenie) są przetwarzane na napięcie lub zmianę rezystancji czy pojemności. W dalszej części omówimy wybrane czujniki pomiarowe takich wielkości fizycznych, jak np. ciśnienie, temperatura, przepływ, wilgotność. Z konieczności ograniczymy się tylko do wybranych metod i urządzeń przydatnych w układach automatyki.

### 5.2.1. Przetworniki pomiarowe

**Przetworniki oporowo-stykowe.** Najprostszym przetwornikiem przesunięcie ( $x$ ) – rezystancja ( $R$ ) jest potencjometr liniowy (drut oporowy) ze ślizgającym się końcem (rys. 5.10). Położenie styku jest ściśle związane z rezystancją mierzoną na zaciskach. Pewną modyfikacją tego układu jest przetwornik przesunięcie–napięcie (rys. 5.11). Układ jest zasilany napięciem  $U_s$ . W zależności od położenia styku na rezystancji  $R_0$  wystąpi odpowiednie napięcie wyjściowe.

Często układy regulacji wymagają informacji o kierunku zmiany wielkości. Wówczas stosuje się przetworniki różnicowe. Przykład takiego przetwornika pokazano na rys. 5.12. Jest to układ w formie mostka. W położeniu środkowym styku napięcie wyjściowe  $U_y = 0$ . Przy wychyleniu styku w jedną stronę wystąpi pewne napięcie niezrównoważone mostka, przy czym znak (kierunek) będzie zależny od kierunku odchylenia.

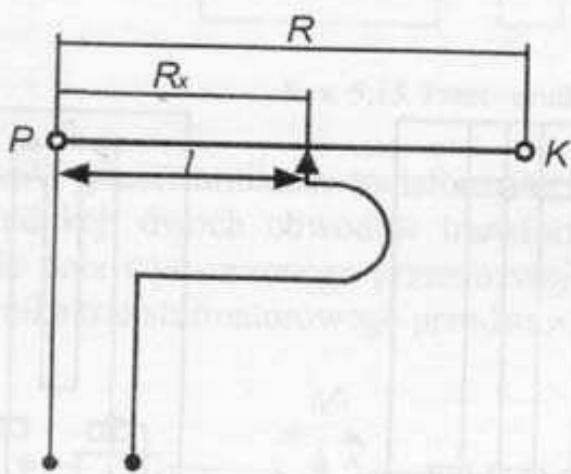
**Przetworniki tensometryczne.** W przetwornikach tensometrycznych wykorzystuje się zjawisko zmian oporu elektrycznego przewodnika metalowego poddawanego

nego naprężeniom mechanicznym. Naprężenia mechaniczne, które powodują odkształcenie sprężystego podłoża, przenoszą się na przyklejone cienkie druciki oporowe. Przyrost oporu drucika jest funkcją wydłużenia podłoża, tzn.

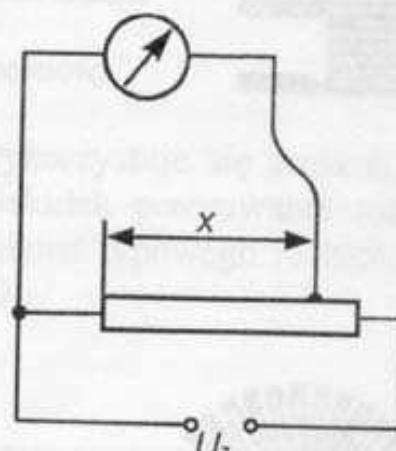
$$\frac{\Delta R}{R} = k\epsilon, \quad (5.26)$$

gdzie  $k$  - stała tensometru.

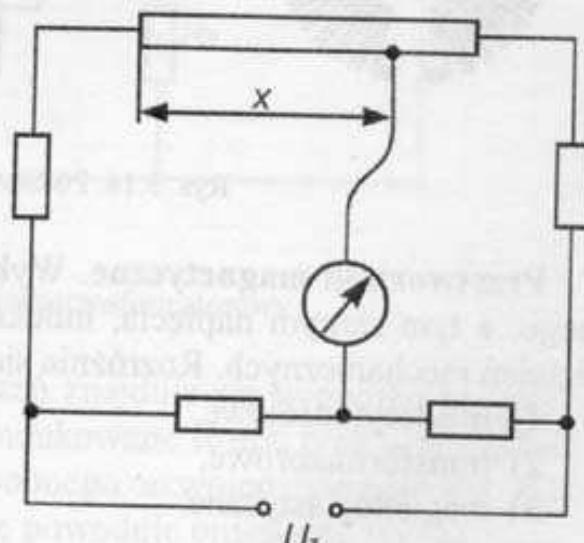
Przetwornik działający na podanej wyżej zasadzie nazywamy tensometryczno-oporowym (rys. 5.13). W zależności od rodzaju mierzonych naprężen wykorzystuje się różne kształty tensometrów. Podstawowe ich rodzaje podano na rys. 5.14. Najlepsze właściwości uzyskuje się, stosując wybrane stopy oporowe, takie jak: konstantan (40% Ni, 60% Cu), nichron (80% Ni, 20% Cr), chromel C (65% Ni, 12% Cr, 23% Fe), alivar, izoelastik (36% Ni, 8% Cr, 55% Fe, 0,5 Mo). Zasadniczą trudnością związaną ze stosowaniem tensometrów jest konieczność kompensacji wpływu temperatury na rezystancję tensometrów. Zjawisko to występuje również w elementach półprzewodnikowych, zwłaszcza krzemowych. Wykorzystuje się je tam, gdzie są małe naprężenia i surowe warunki zewnętrzne.



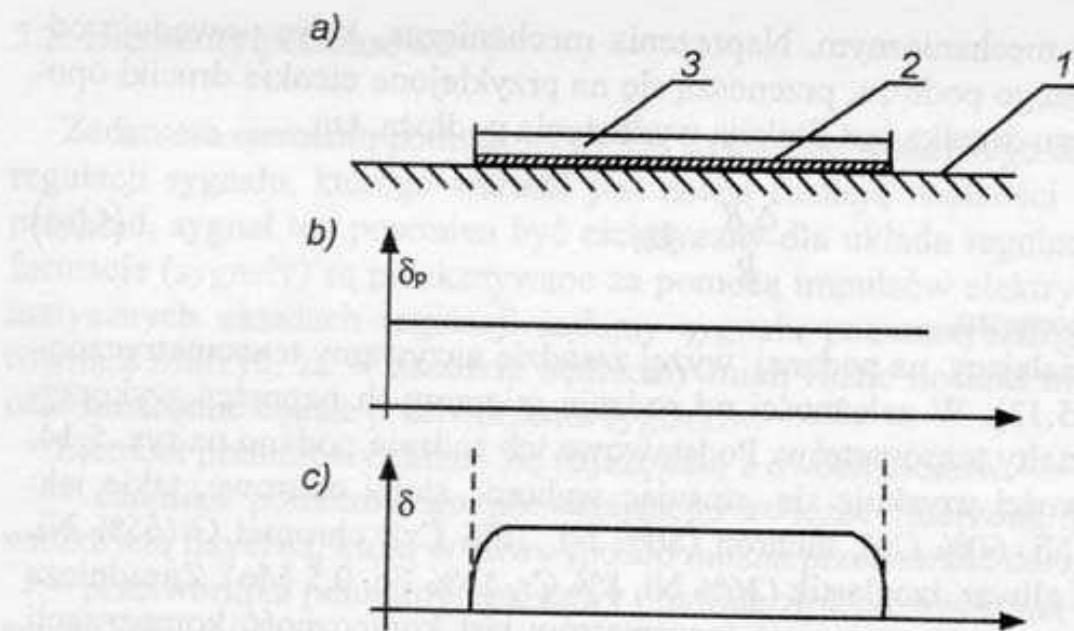
Rys. 5.10. Prosty przetwornik oporowy



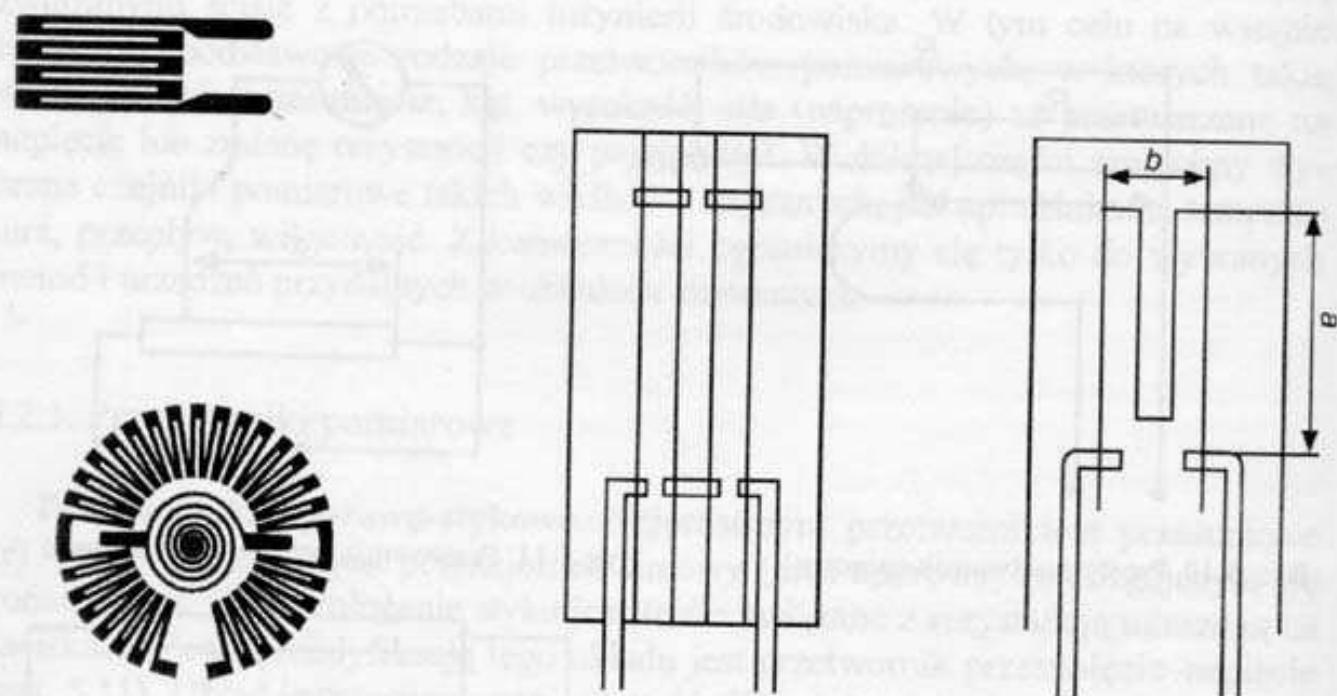
Rys. 5.11. Przetwornik przesunięcie-napięcie



Rys. 5.12. Różnicowy przetwornik przesunięcie-napięcie



Rys. 5.13. Zasada działania przetwornika tensometryczno-oporowego: a) sposób mocowania; 1 – podłożo, 2 – warstwa kleju, 3 – drucik tensometru, b) naprężenia w podłożu, c) naprężenia w druciku tensometru

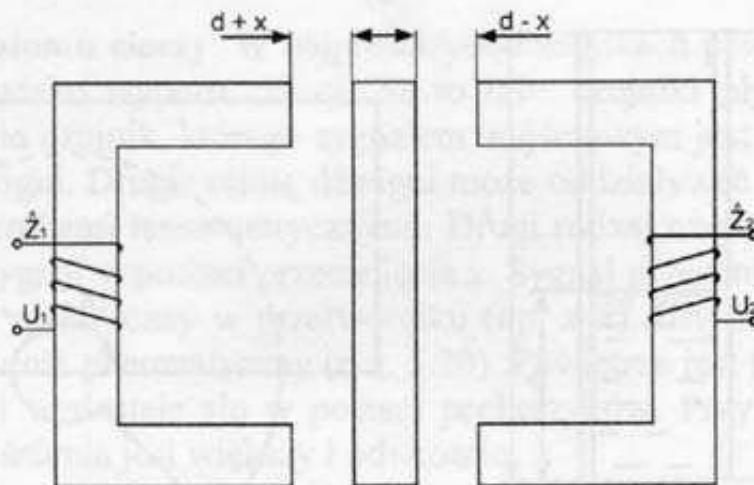


Rys. 5.14. Podstawowe kształty tensometrów

**Przetworniki magnetyczne.** Wykorzystują one zmianę strumienia magnetycznego, a tym samym napięcia, indukowanego w obwodzie elektrycznym wskutek działań mechanicznych. Rozróżnia się trzy rodzaje przetworników magnetycznych:

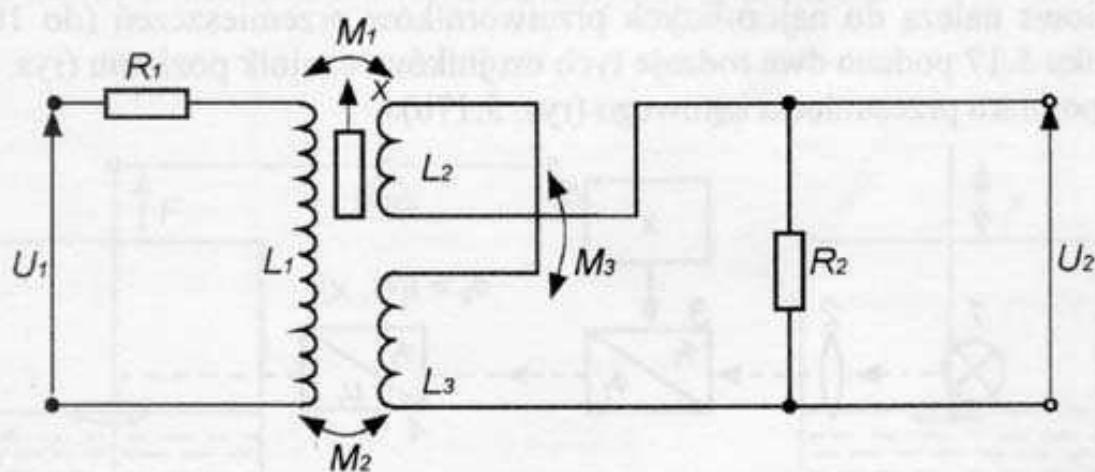
- 1) indukcyjnościowe,
- 2) transformatorowe,
- 3) magnetoelastyczne.

Ad 1. Na rysunku 5.15 przedstawiono schemat czujnika indukcyjnościowego, wykonanego w postaci dwóch dławików z uzwojeniami o impedancji  $Z_1$  i  $Z_2$  oraz wspólnej zwory, która może być przesuwana w pewnym zakresie. Wskutek zmian w obwodzie magnetycznym dławików zmieniają się impedancje, a więc reaktancje uzwojeń. Przy stałej wartości prądu w obwodzie można stwierdzić, że napięcia  $U_1$  oraz  $U_2$  są funkcjami położenia  $x$  rdzenia. Oczywiście, konstrukcja czujnika jest taka, że jeżeli napięcie  $U_1$  wzrasta, to napięcie  $U_2$  maleje i odwrotnie.



Rys. 5.15. Przetwornik indukcyjnościowy

Ad 2. W przetwornikach transformatorowych wykorzystuje się zmianę wzajemnej indukcji dwóch obwodów transformatora wskutek przesuwania rdzenia w obrębie pola wytworzonego przez uzwojenia. Schemat typowego różnicowego przetwornika transformatorowego przedstawia rys. 5.16.



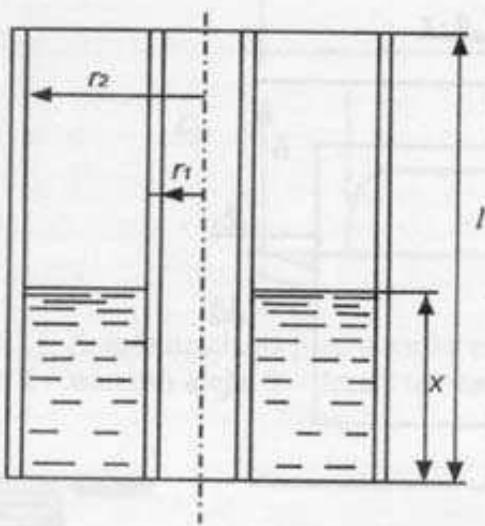
Rys. 5.16. Różnicowy przetwornik transformatorowy

Napięcie  $U_1$  jest wielkością stałą. Jeżeli rdzeń znajduje się w położeniu symetrycznym względem uzwojeń  $L_2$  i  $L_3$ , to SEM indukowane w obu tych uzwojeniach są równe, ale na skutek połączenia przeciwsobnego uzwojeń napięcie  $U_2 = 0$ . Przesunięcie rdzenia w którakolwiek stronę powoduje powstanie wypadkowej

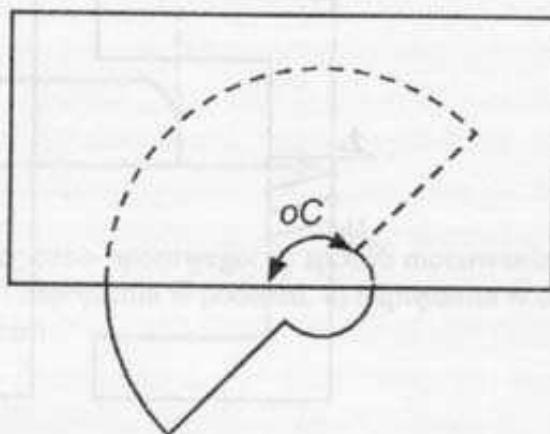
SEM równej różnicy  $E_2$  i  $E_3$  i na zaciskach uzwojenia wtórnego pojawi się napięcie  $U_2(x) \neq 0$ .

Ad 3. W przetwornikach magnetoelastycznych wykorzystuje się zjawisko zmian wektora magnetyzacji poszczególnych domen w ferromagnetyku, który został poddany naprężeniu. Można wykazać, że kąt między wektorem magnetyzacji a wektorem natężenia pola magnetycznego jest funkcją naprężenia  $\sigma$  w ferromagnetyku.

a)

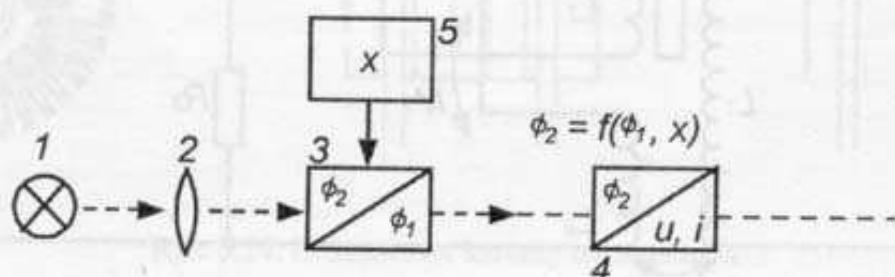


b)



Rys. 5.17. Przetworniki pojemnościowe: a) pojemnościowy czujnik poziomu, b) czujnik przesunięcia kątowego

**Przetworniki pojemnościowe.** Wykorzystuje się w nich zmianę pojemności układu elektrod tworzących kondensator pod wpływem przemieszczania elektrod lub zmiany stałej dielektrycznej przestrzeni między elektrodami. Przetworniki pojemnościowe należą do najczulszych przetworników przemieszczeń (do  $10^{-10}$  m). Na rysunku 5.17 podano dwa rodzaje tych czujników: czujnik poziomu (rys. 5.17a) oraz do pomiaru przesunięcia kątowego (rys. 5.17b).



Rys. 5.18. Przetwornik fotoelektryczny: 1 – źródło promieniowania, 2 – układ optyczny kształtujący wiązkę, 3 – przetwornik właściwy, 4 – przetwornik promieniowania na sygnał elektryczny, 5 – źródło zmian strumienia (wielkość mierzona)

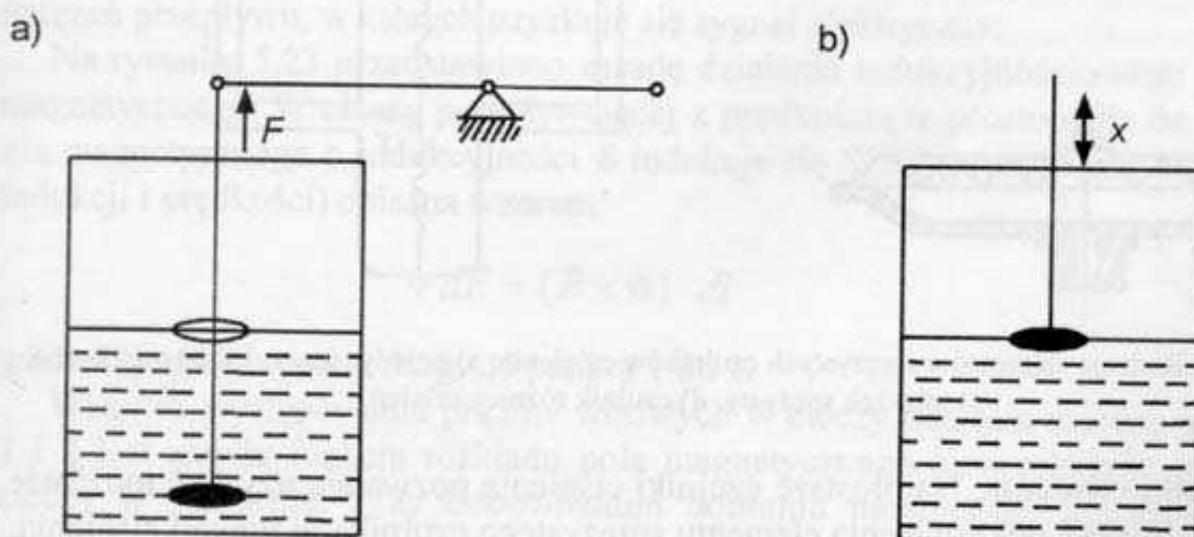
**Przetworniki fotoelektryczne.** Przetworniki fotoelektryczne wykorzystują zmiany strumienia promieniowania w zależności od zmian składu chemicznego, stężenia, zapylenia, zawiesin itp. ośrodka, przez który przechodzi promieniowanie.

Zasadę działania tego typu przetworników pokazano na rys. 5.18. Wytworzony stały strumień świetlny  $\Phi_1$  podlega zmianom zależnym od wielkości mierzonej, oznaczonej na rys. 5.18 przez  $x$ . Efekt tych zmian jest wyrażony przez zmiany strumienia  $\Phi_2$ , który jest dalej przetwarzany w przetworniku 4 na sygnał napięciowy lub prądowy.

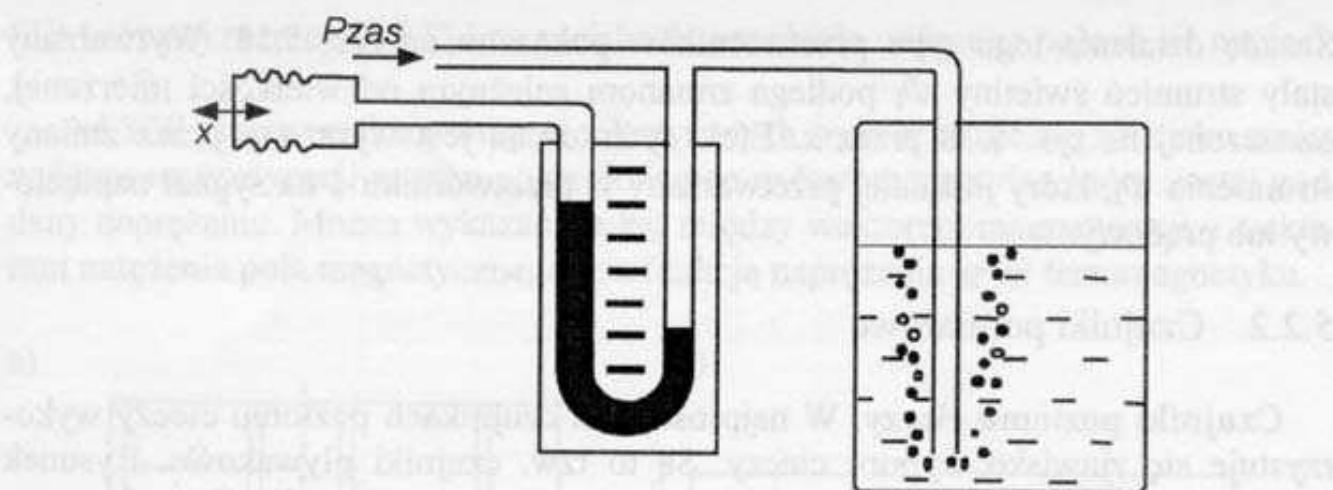
### 5.2.2. Czujniki pomiarowe

**Czujniki poziomu cieczy.** W najprostszych czujnikach poziomu cieczy wykorzystuje się zjawisko wyporu cieczy. Są to tzw. czujniki pływakowe. Rysunek 5.19a przedstawia czujnik, którego sygnałem wyjściowym jest siła  $F$  przekazywana na układ dźwigni. Drugie ramię dźwigni może oddziaływać na membranę sprężystą z przetwornikami tensometrycznymi. Drugi rodzaj czujnika (rys. 5.19b) pozwala uzyskać sygnał w postaci przesunięcia  $x$ . Sygnał przesunięcia  $x$  jest przetwarzany na sygnał elektryczny w przetworniku (np.  $x/R$ ). Innym rodzajem czujnika poziomu jest czujnik pneumatyczny (rys. 5.20). Powietrze jest tłoczone pod stałym ciśnieniem  $p_{zas}$  i wydostaje się w postaci pęcherzyków. Przy większej warstwie cieczy spadek ciśnienia jest większy i odwrotnie.

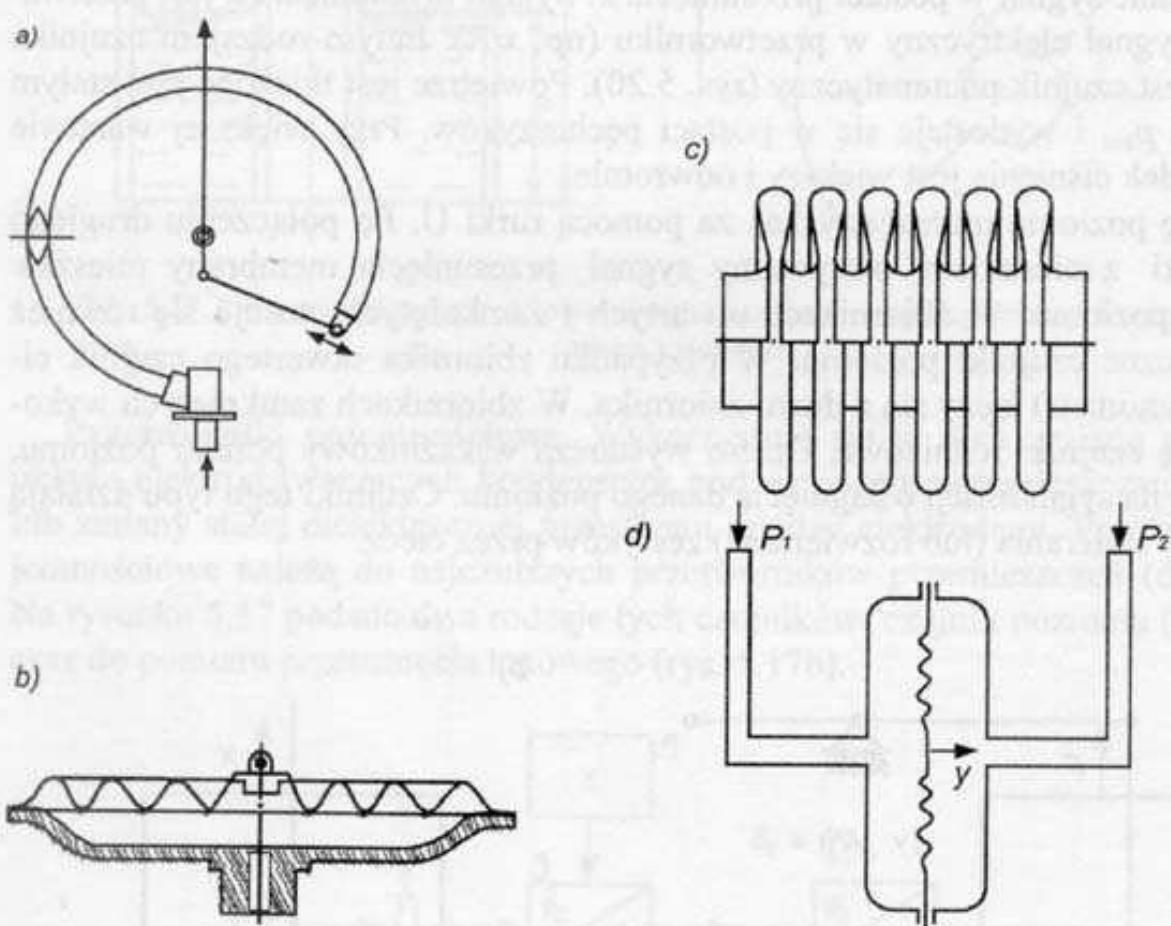
Różnicę poziomu można uzyskać za pomocą rurki U. Po połączeniu drugiego końca rurki z mieszkiem otrzymamy sygnał przesunięcia membrany mieszka w funkcji poziomu. W zbiornikach otwartych i zamkniętych stosuje się również hydrostatyczne czujniki poziomu. W przypadku zbiornika otwartego czujnik ciśnienia (manometr) łączy się z dnem zbiornika. W zbiornikach zamkniętych wykorzystuje się czujniki różnicowe. Często wystarcza wskaźnikowy pomiar poziomu, polegający na sygnalizacji osiągnięcia danego poziomu. Czujniki tego typu działają na zasadzie zwierania (lub rozwierania) zestyków przez ciecz.



Rys. 5.19. Pływakowe czujniki poziomu: a) siłowy, b) przesunięciowy



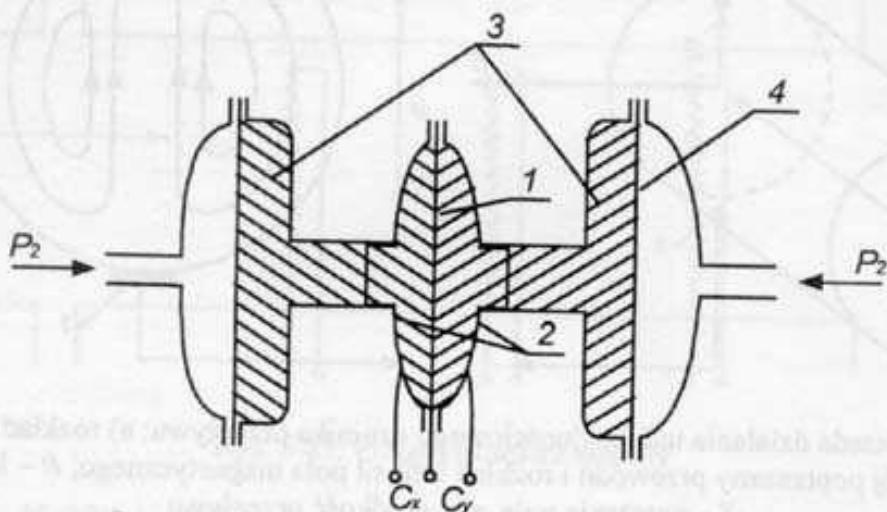
Rys. 5.20. Pneumatyczny czujnik poziomu



Rys. 5.21. Rodzaje elementów sprężystych czujników ciśnienia: a) pojedyncza rurka, b) membrana, c) mieszek sprężysty, d) czujnik różnicowy ciśnienia

**Czujniki ciśnienia.** Najprostsze czujniki ciśnienia pozwalają uzyskać możliwie liniową zależność odkształcenia elementu sprężystego czujnika w funkcji ciśnienia. Innymi słowy, czujniki te dają nam sygnał przesunięcia  $x$ . Podstawowe rodzaje elementów sprężystych pokazano na rys. 5.21. W praktyce wykorzystuje się również różnicowe czujniki, których konstrukcja zawiera dwa (lub więcej)

elementy sprężyste pozwalające na pomiar różnicy ciśnień. Istnieją również czujniki ciśnienia pozwalające uzyskiwać sygnał elektryczny. Przykładem może być czujnik F. Rosemounta oparty na wykorzystaniu zjawiska zmiany pojemności kondensatora na skutek przesunięcia sprężystej przepony znajdującej się między okładkami kondensatora. Uproszczony schemat tego czujnika przedstawiono na rys. 5.22. Okładki wraz z przeponą stanowią kondensator różnicowy, którego pojemności  $C_x$ ,  $C_y$  zależą od ciśnień  $p_1$  i  $p_2$ . Sygnał pojemnościowy może być przetwarzany w układzie mostkowym.



Rys. 5.22. Pojemnościowy czujnik różnic ciśnień: 1 – sprężysta przepona metalowa, 2 – okładki kondensatora różnicowego, 3 – olej silikonowy, 4 – przepony izolujące

**Czujniki natężenia przepływu.** Najbardziej rozpowszechnione pomiary natężen przepływu są oparte na zasadzie różnicy ciśnień (spadku ciśnienia) na odpowiednio ukształtowanej zwężce. Dalsze przetworzenie różnicy ciśnień nie przedstawia już większych trudności. Tutaj zajmiemy się dwoma przykładami czujników natężen przepływu, w których uzyskuje się sygnał elektryczny.

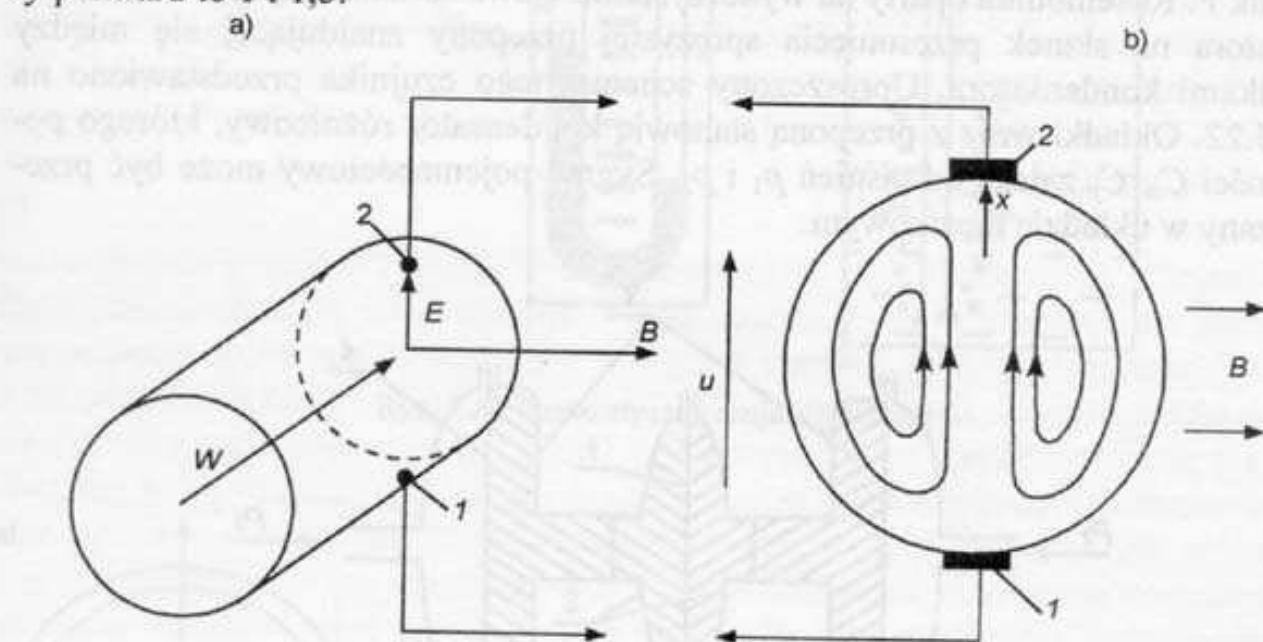
Na rysunku 5.23 przedstawiono zasadę działania indukcyjnego czujnika magnetycznego. W cieczy przepływającej z prędkością  $w$  prostopadle do strumienia magnetycznego o induktywności  $B$  indukuje się SEM (prostopadła do wektora indukcji i prędkości) opisana wzorem:

$$d\vec{E} = (\vec{B} \times \vec{w}) \cdot dl \quad (5.27)$$

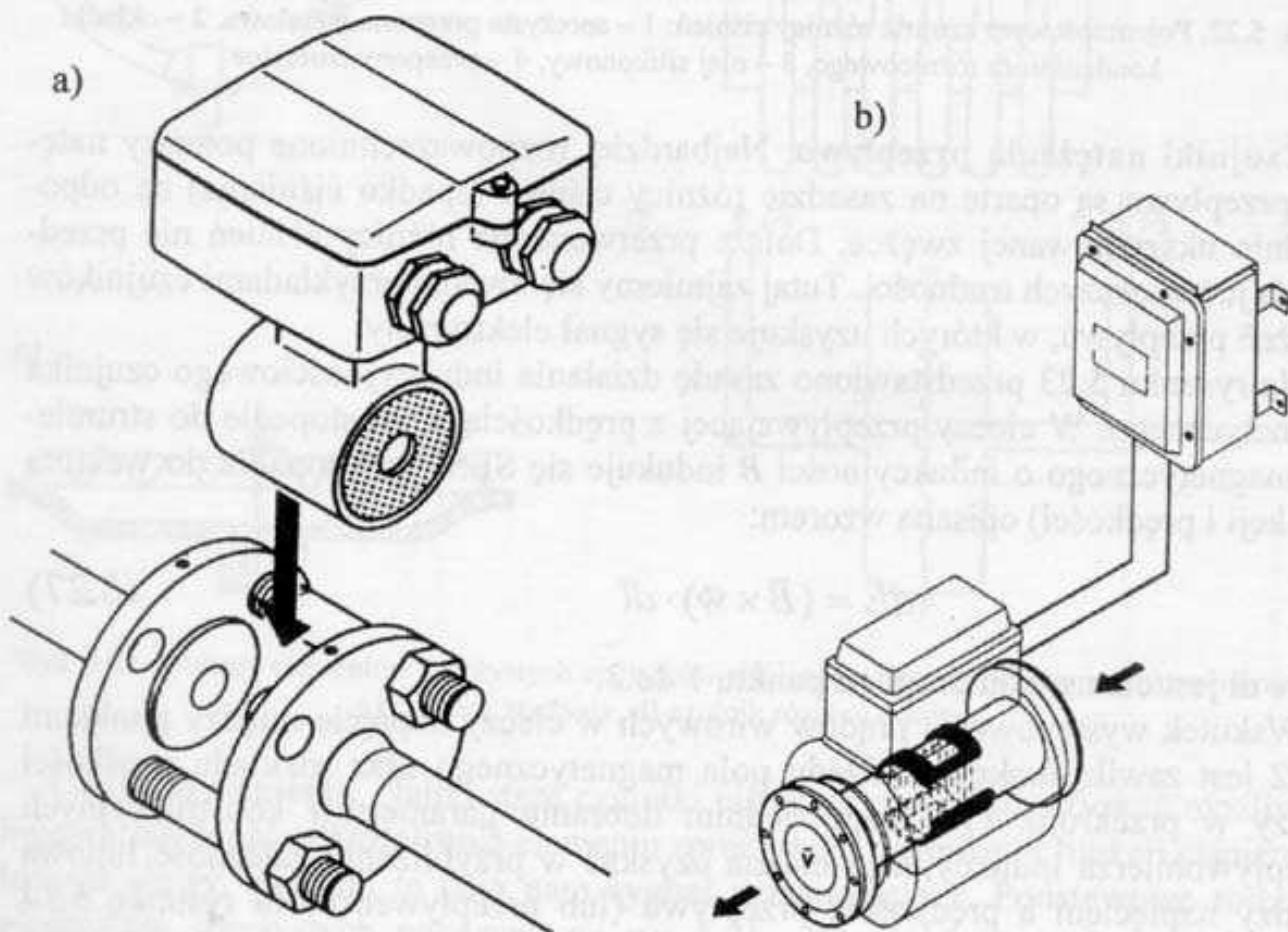
gdzie  $dl$  jest elementem drogi od punktu 1 do 2.

Wskutek występowania prądów wirowych w cieczy napięcie między punktami 1 i 2 jest zawiłą funkcją rozkładu pola magnetycznego oraz rozkładu prędkości cieczy w przekroju. Przy odpowiednim dobraniu parametrów konstrukcyjnych przepływomierza indukcyjnego można uzyskać w przybliżeniu zależność liniową między napięciem a prędkością przepływu (lub przepływu). Na rysunku 5.24 pokazano wygląd ogólny przetwornika. Przetworniki indukcyjne są niezastąpione w pomiarach prędkości cieczy agresywnych oraz tam, gdzie niemożliwe jest

stosowanie przewężeń. Nie ma specjalnych ograniczeń odnośnie do właściwości cieczy. Wystarczy przewodność elektryczna większa niż  $10^{-5} \text{ S}$ , a uzyskiwane klasy pomiaru to 1 i 1,5.



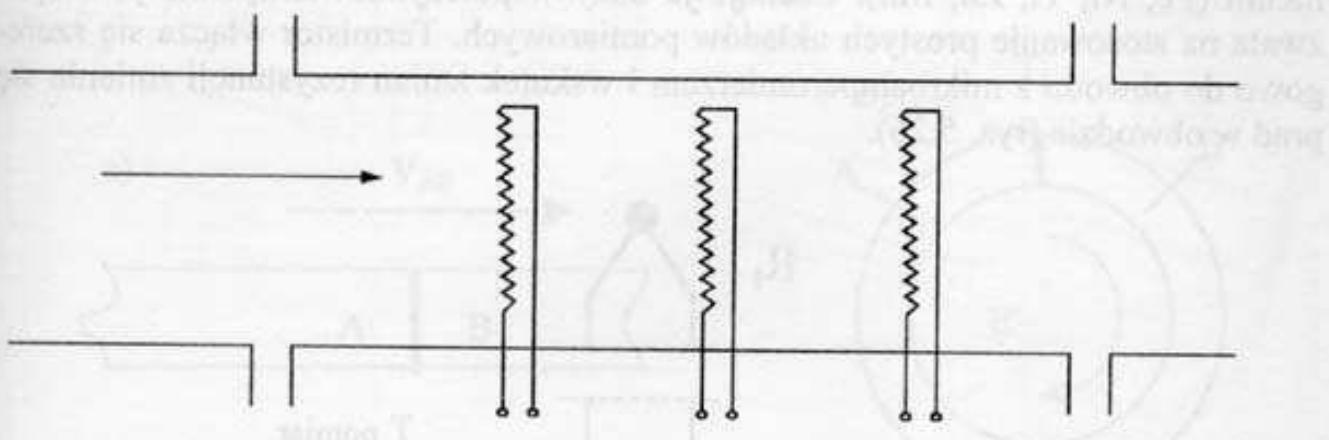
Rys. 5.23. Zasada działania indukcyjnego czujnika przepływu:  
a) rozkład wektorów,  
b) przekrój poprzeczny przewodu i rozkład linii sił pola magnetycznego,  $B$  – indukcja,  
 $E$  – natężenie pola,  $w$  – prędkość przepływu



Rys. 5.24. Indukcyjnościowy czujnik przepływu: a) przekrój, b) sposób montażu

Innym ciekawym sposobem pomiaru przepływu jest metoda kalorymetryczna. Do cieczy o ciepło właściwym  $c$  doprowadza się moc w postaci ciepła  $Q$  i na podstawie pomiaru przyrostu temperatury  $\Delta t$  wyznacza się masowe natężenie przepływu (rys. 5.25).

$$M = \frac{Q}{c\Delta t}. \quad (5.28)$$



Rys. 5.25. Przepływowiernik cieplny

Wyrażenie (5.28) jest słuszne, gdy  $c = \text{const}$  oraz gdy nie ma wymiany ciepła z otoczeniem. Aby uzyskać równomierne ogrzewanie w całym przekroju, stosuje się grzejniki w postaci siatek.

**Termometry oporowe.** Pomiary temperatury są oparte na skali przyjętej w roku 1948 przez Międzynarodowy Komitet Miar i Wag, wyznaczonej przez punkty topnienia lodu  $0^\circ\text{C}$ , wrzenia pary wodnej  $100^\circ\text{C}$  oraz punkty wrzenia siarki, krzepnięcia srebra, krzepnięcia złota i wrzenia tlenu. Sygnał elektryczny, którego wartość zależy od temperatury, uzyskuje się, wykorzystując zależność oporności metali i półprzewodników od temperatury (termometry oporowe).

Dla metali (przewodnictwo elektronowe) zależność rezystancji od temperatury jest następująca:

$$R_T = R_0 \left[ 1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2 + \gamma(T - T_0)^3 + \dots \right] \quad (5.29)$$

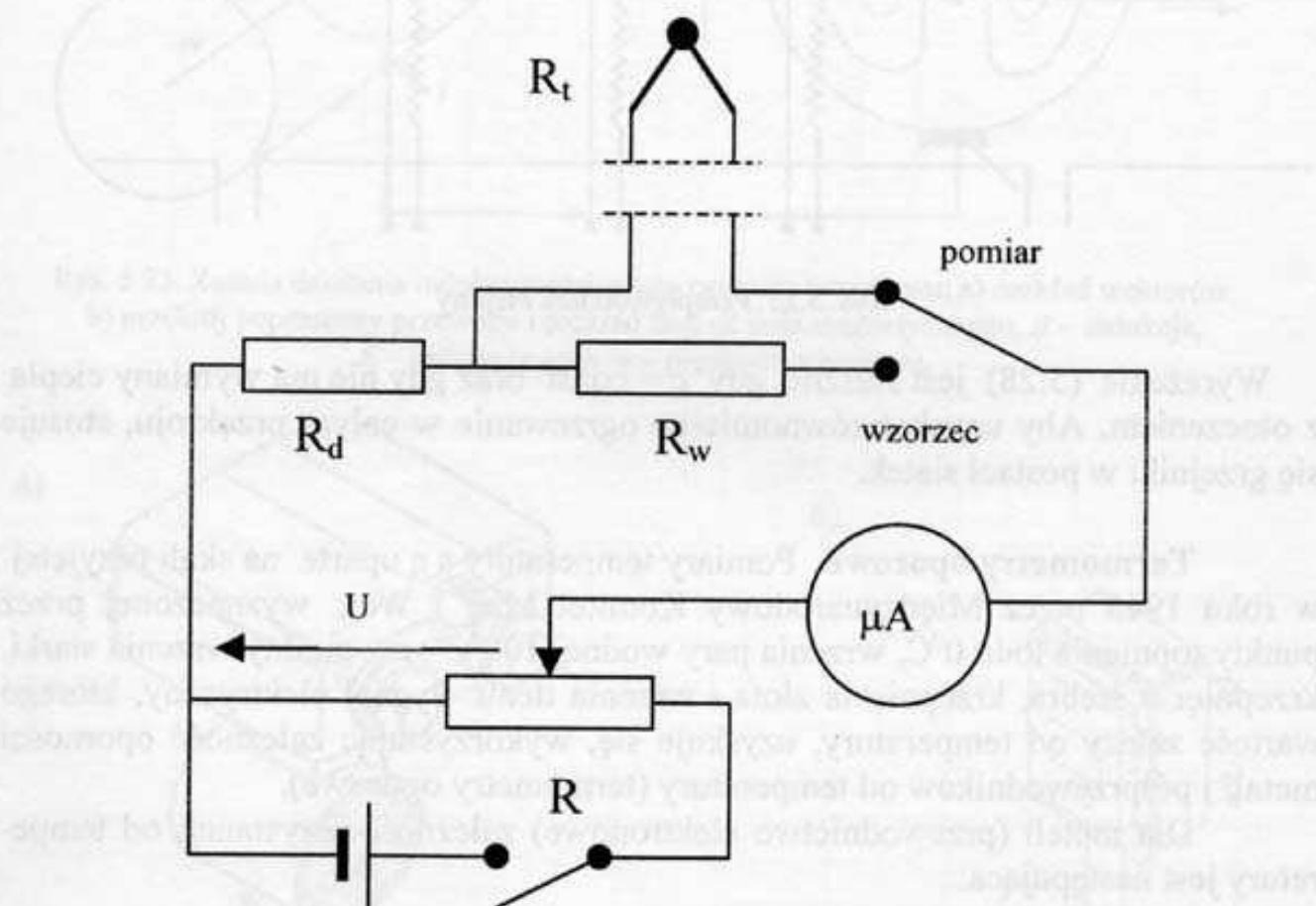
Przetworniki metalowe wykonuje się najczęściej z platyny, niklu lub miedzi. Pomiar rezystancji  $R_T$  dokonuje się w układach mostkowych, co pozwala na uzyskanie odpowiedniej dokładności. Przetworniki oporowe konstruuje się w taki sposób, aby rezystancja  $R_0$  (dla  $0^\circ\text{C}$ ) miała wartość  $100\Omega$ . Do pomiaru niskiej temperatury używa się przetworników o rezystancji  $500\Omega$ .

Półprzewodnikowe przetworniki oporowe (termistory) cechuje przewodnictwo dziurowo-elektronowe. Zależność rezystancji od temperatury opisuje wzór:

$$R = A e^{\frac{B}{T}}, \quad (5.30)$$

gdzie  $A, B$  – stałe termistora.

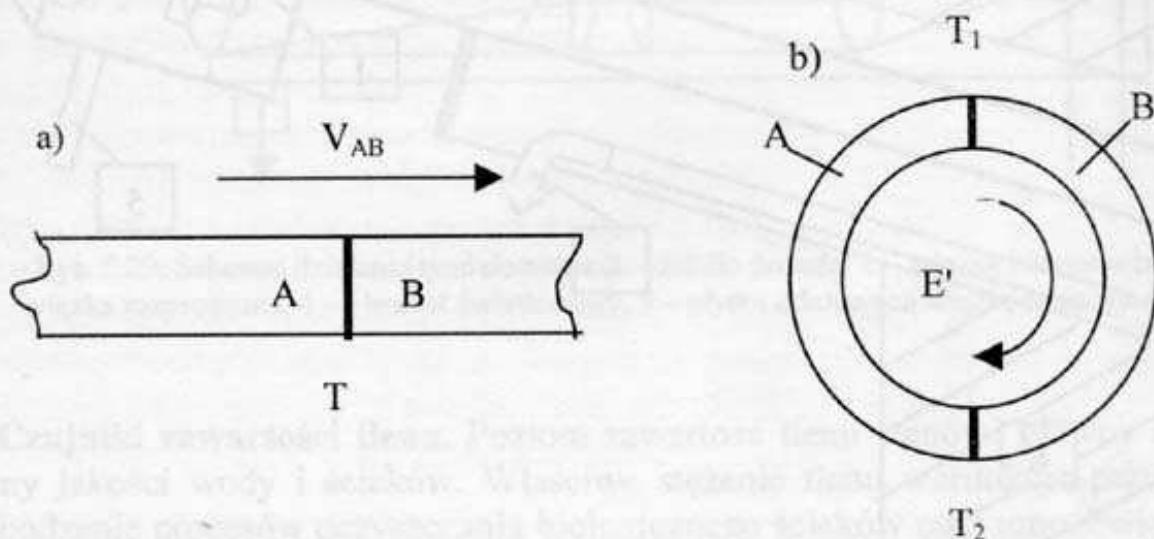
Termistory są wykonywane w postaci płytaków i pręcików z tlenków różnych metali (Fe, Ni, Ti, Zn, Mn). Cechuje je duży współczynnik temperatury, co pozwala na stosowanie prostych układów pomiarowych. Termistor włącza się szeregowo do obwodu z mikroamperometrem i wskutek zmian rezystancji zmienia się prąd w obwodzie (rys. 5.26).



Rys. 5.26. Układ do pomiaru temperatury za pomocą termistora

**Termometry termoelektryczne.** Należą one do najbardziej rozpowszechnionych przyrządów do pomiaru temperatury. Zasada działania termoelementów polega na tzw. zjawisku termoelektrycznym. Na powierzchni styku dwóch metali A i B istnieje kontaktowa różnica potencjałów  $V_{AB}$  (rys. 5.27a). Jeżeli utworzymy obwód zamknięty z dwóch metali o dwóch różnych temperaturach styku  $T_1$  i  $T_2$  (rys. 5.27b), to między punktami styku wytworzy się SEM zwana siłą elektromotoryczną Peltiera. W obwodzie zamkniętym natomiast powstaje SEM ze względu na różnicę temperatury. Zjawisko to nosi nazwę zjawiska Thomsona. Wypadkowa SEM

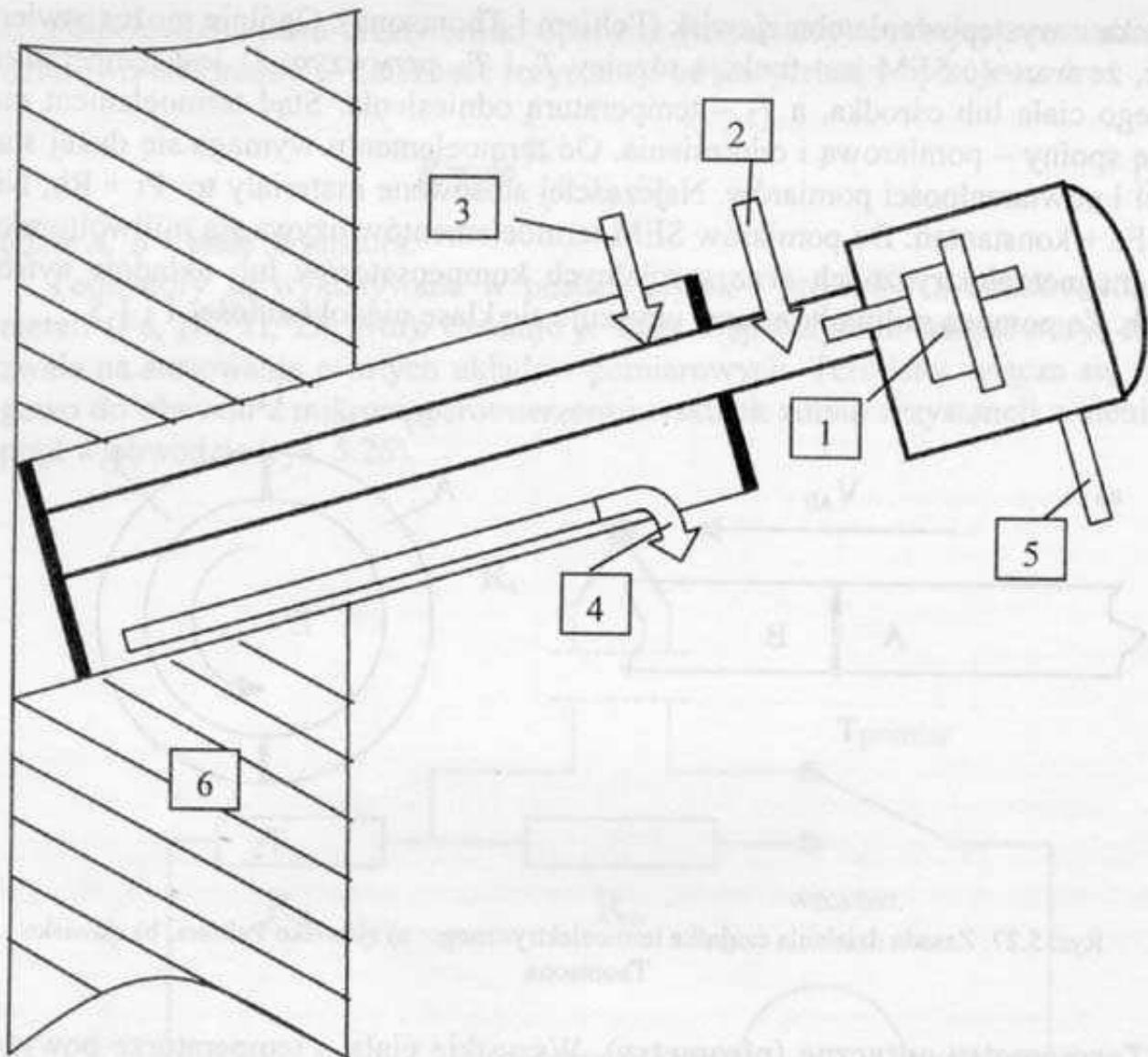
wynika z występowania obu zjawisk (Peltiera i Thomsona). Ogólnie można stwierdzić, że wartość SEM jest funkcją różnicy  $T_1$  i  $T_2$ , przy czym  $T_1$  jest temperaturą danego ciała lub ośrodka, a  $T_2$  – temperaturą odniesienia. Stąd termoelement ma dwie spoiny – pomiarową i odniesienia. Od termoelementu wymaga się dużej stałości i powtarzalności pomiarów. Najczęściej stosowane materiały to: Pt + Rh, Ni, Cr, Fe + konstantan. Do pomiarów SEM termoelementów używa się miliwoltomierzy magnetoelektrycznych oraz specjalnych kompensatorów lub układów cyfrowych. Za pomocą miliwoltomierzy uzyskuje się klasę niedokładności 1 i 1,5.



Rys. 5.27. Zasada działania czujnika termoelektrycznego: a) zjawisko Peltiera, b) zjawisko Thomsona

**Termometry optyczne (pirometry).** Wszystkie ciała o temperaturze powyżej zera absolutnego emitują promieniowanie cieplne. Termometry optyczne wykorzystują to zjawisko w zakresie widma widzialnego oraz bliskiej podczerwieni. Jedyne promieniowanie termiczne ciała doskonale czarnego zależy tylko od temperatury, natomiast promieniowanie termiczne pozostałych ciał zależy od ich składu chemicznego, kształtu i ukształtowania powierzchni. Istnieje wiele rozwiązań przemysłowych pirometrów, które są powszechnie stosowane w technice pomiarowej, szczególnie w hutnictwie (rys. 5.28).

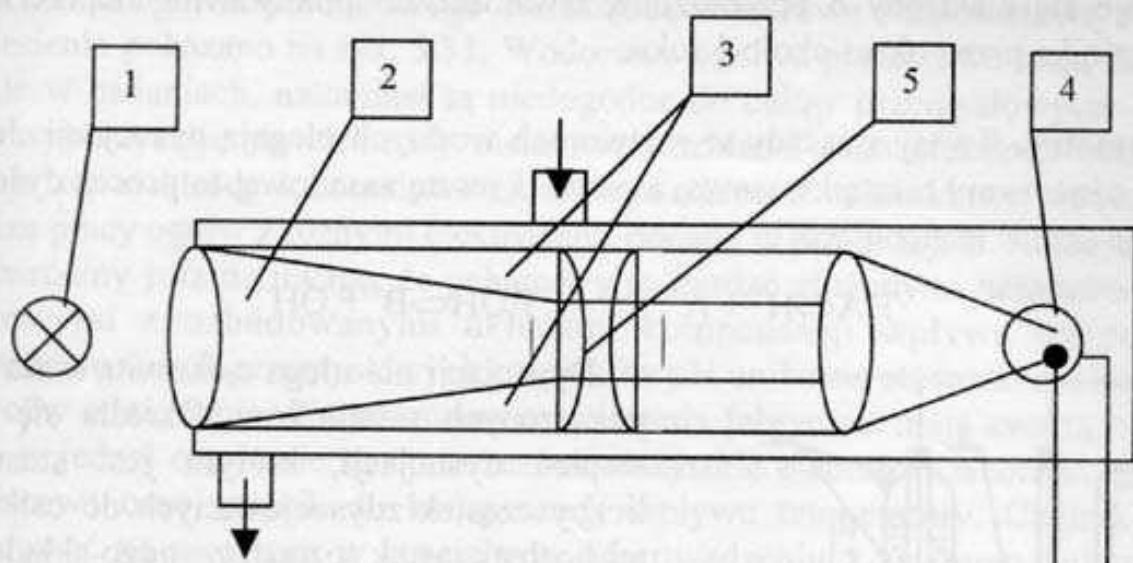
**Czujniki wilgotności.** Klasyczne rozwiązania takich czujników, oparte na zjawisku odparowywania wody, są bardzo rzadko stosowane. W celach przemysłowych wykorzystuje się niekiedy higrometr włosowy, połączony z potencjometrem, co umożliwia uzyskanie sygnału do układów sterowania. Firmy zachodnie produkują również rezystancyjne czujniki wilgotności. Zbudowane są one w kształcie płytka szklanej, na której utrwalono warstwę chlorku litu. Czujniki te mają mały zakres pomiarowy, do kilkunastu procent wilgotności względnej. Dla pokrycia całego zakresu stosuje się zestaw kilku czujników. Firma Honeywell produkuje czujniki, w których wykorzystuje się płytki ze specjalnego tworzywa sztucznego. Zakres tych czujników wynosi 35–95% wilgotności względnej. Innym rodzajem



Rys. 5.28. Termometr optyczny zabudowany w ścianie pieca; 1 – pirometr z układem optycznym, 2 – wlot czystego powietrza, 3, 4 – dopływ i odpływ wody chłodzącej, 5 – wyrowadzenia sygnałów, 6 – osłona pieca

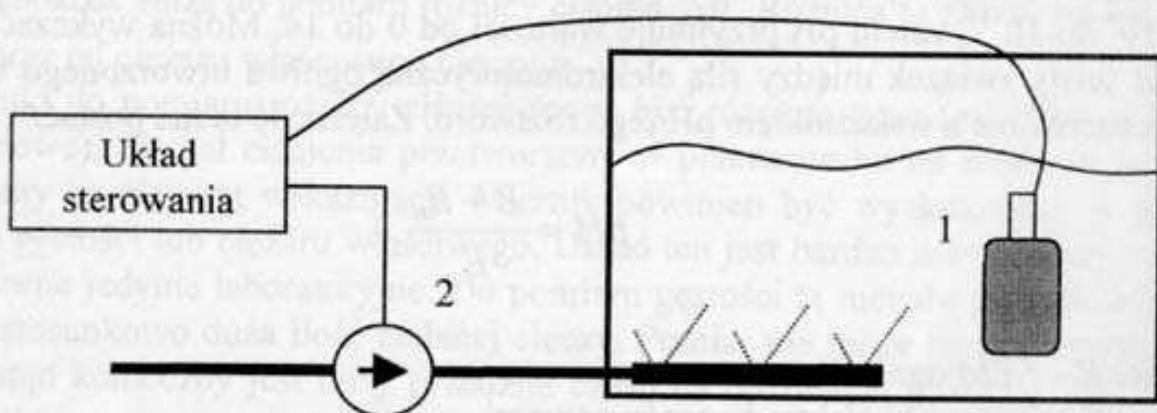
czujnika jest higrometr pracujący na zasadzie prawa przemiany wodnego roztworu chlorku litu w sól. Przemiana ta odbywa się w określonej temperaturze, zależnej od ciśnienia cząstkowego pary w powietrzu. Czujnik ten ma niekorzystne właściwości dynamiczne, gdyż jego stała czasowa wynosi 100 s. W czujniku półprzewodnikowym na płytce umieszcza się element półprzewodnikowy wrażliwy na wilgoć. Czujnik taki ma opóźnienie rzędu kilku sekund, niedokładność 2%, a zakres dopuszczalnej temperatury od 1°C do 100°C.

**Czujniki zmętnienia, zawiesin i zapylenia.** W czujnikach tego typu wykorzystuje się zjawisko rozpraszanego promieniowania (tzw. tyndalometry) oraz zjawisko pochłaniania promieniowania (tzw. turbidometry). Tyndalometry stosuje się głównie w ośrodkach o dużej przejrzystości. Przykładowy schemat tyndalometru pokazano na rys. 5.29.



Rys. 5.29. Schemat działania tyndalometru: 1 – źródło światła, 2 – wiązka bezpośrednią, 3 – wiązka rozproszona, 4 – element światłoczuły, 5 – płytka odcinająca wiązkę bezpośrednią

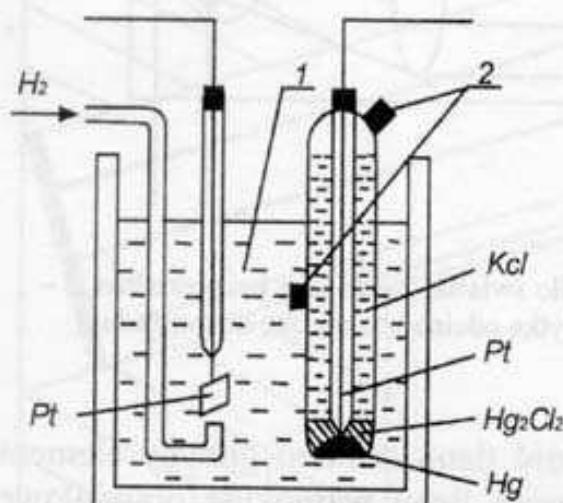
**Czujniki zawartości tlenu.** Poziom zawartość tlenu stanowi główny element oceny jakości wody i ścieków. Właściwe stężenie tlenu warunkuje prawidłowe zachodzenie procesów oczyszczania biologicznego ścieków oraz umożliwia wytrącenie z wody substancji, które wpływają niekorzystnie na procesy odżelaziania i odmanganiania. Czujniki do pomiaru stężenia tlenu stanowią podstawowe wyposażenie stacji uzdatniania wody i oczyszczania ścieków, a sygnały pomiarowe wykorzystuje się do sterowania urządzeniami napowietrzającymi lub natleniającymi (rys. 5.30). Zasada działania przetwornika jest oparta na procesach chemicznych (samopolaryzacja) i wykorzystuje neutralny elektrolit (roztwór NaCl) oraz specjalną membranę izolującą od badanego ośrodka. Czujnik pozwala na pomiar procentowego stężenia tlenu lub wyrażenie go w jednostkach ppm (mg/l). Czujnik zawiera układ do kompensacji wpływu temperatury i zasolenia badanego medium.



Rys. 5.30. Układ sterowania napowietrzaniem wykorzystujący czujnik zawartości tlenu; 1 – czujnik, 2 – dmuchawa

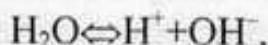
Stosuje się elektrody o przedłużonej trwałości, co pozwala na nieprzerwaną pracę czujnika przez okres około 1 roku.

**Pehametry.** Kwasy i zasady w roztworach wodnych ulegają dysocjacji. Jeżeli przez A oznaczymy resztę kwasową, a przez B resztę zasadową, to proces dysocjacji można opisać następująco:



Rys. 5.31. Schemat ogniwka pomiarowego z elektrodą wodorową i kalomełową elektrodą odniesienia: 1 – badany czynnik, 2 – porowaty korek

Dysocjacji nie ulega całkowita masa rozpuszczonych składników. Określa się tzw. stopień dysocjacji, którym jest stosunek liczby cząstek zdysocjowanych do całkowitej liczby cząstek rozpuszczonego składnika. Stopień dysocjacji zależy od wielu czynników (temperatury, stężenia roztworu, rodzaju kwasu lub zasady) i jest miarą aktywności kwasu lub zasady. Z chemii wiadomo, że w czystej wodzie następuje dysocjacja według zależności:



przy czym stężenie jonów wodorowych  $[\text{H}^+]$  jest równe stężeniu jonów wodorotlenowych  $[\text{OH}^-]$ . Czysta woda jest chemicznie nieaktywna, a wartości stężenia

$$[\text{H}^+] = [\text{OH}^-] = 10^{-7} \text{ mol/l.}$$

Dodanie kwasu lub zasady burzy równowagę. Roztwory o stężeniu  $[\text{H}^+] < 10^{-7}$  są roztworami kwaśnymi, zaś roztwory o  $[\text{H}^+] > 10^{-7}$  są zasadowe. Jako praktyczną skalę określania stężenia jonów wodorowych przyjęto wskaźnik pH, odpowiadający liczbowo  $\log[\text{H}^+]$ . Ponieważ uwzględnia się zakres zmienności  $[\text{H}^+]$  w granicach od  $10^0$  do  $10^{-14}$ , zatem pH przyjmuje wartości od 0 do 14. Można wykazać, że istnieje ścisły związek między siłą elektromotoryczną ogniwka utworzonego w badanym roztworze a wskaźnikiem pH tego roztworu. Zależność ta ma postać:

$$pH = \frac{E - E_0}{E_n}, \quad (5.31)$$

gdzie:  $E$  – SEM ogniwka,

$E_0$  – potencjał elektrody porównawczej,

$E_n$  – współczynnik Nernsta, dla jednowartościowego jonu  $\text{H}^+$  jest on równy  $\ln 10 \cdot RT/F$ .

Schemat ogniw pomiarowego z elektrodą wodorową i kalomelową elektrodą odniesienia pokazano na rys. 5.31. Wodorowe ogniwka pomiarowe mają duże znaczenie w badaniach, natomiast są niedogodne do celów przemysłowych. Zamiast nich wykorzystuje się elektrody metalowe i szklane. Jako elektrody odniesienia stosuje się elektrody kalomelowe chlorowo-srebrne i talomidowe. Szczegółową analizę pracy ogniw z różnymi elektrodami podano w publikacji E. Romera.

Zwróćmy jeszcze uwagę, że pehametry są bardzo złożonymi urządzeniami pomiarowymi z rozbudowanymi układami kompensacji wpływu temperatury. W zastosowaniach przemysłowych czujników pH unika się stosowania cieczowych wzorców odniesienia. Proponowane rozwiązania fabryczne mają zwartą konstrukcję – w jednej obudowie są umieszczone wszystkie elementy: wzorzec, elektroda pomiarowa oraz czujnik do kompensacji wpływu temperatury. Czujnik można zabudować na rurociągu w specjalnym odprowadzeniu z zaworem kulowym, co ułatwia obsługę i ewentualną wymianę bez konieczności zatrzymywania procesu. Elektrody pomiarowe najczęściej są wykonywane z różnego rodzaju szkła (w zależności do środowiska pracy czujnika) lub z antymonu w przypadku mediów o dużych właściwościach ciernych. Poprawna praca czujników wymaga dbałości o czystość elektrod, na których osadzają się produkty elektrolizy i różne zanieczyszczenia występujące w badanym medium.

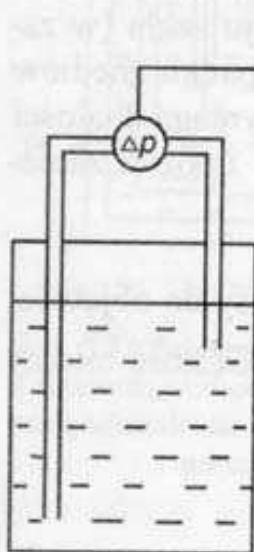
**Czujniki gęstości płynów.** Gęstość określamy jako stosunek masy do objętości jednorodnego ciała:  $\rho = \frac{m}{V}$ , przy stałej temperaturze i ciśnieniu. Gęstość mierzy się następującymi sposobami:

- przez pomiar ciśnienia hydrostatycznego słupa cieczy,
- przez pomiar siły wyporu,
- przez ważenie odmierzonej objętości cieczy,
- przez wykorzystanie zależności częstotliwości drgań od stałej sprężystości c i masy układu  $m$ .

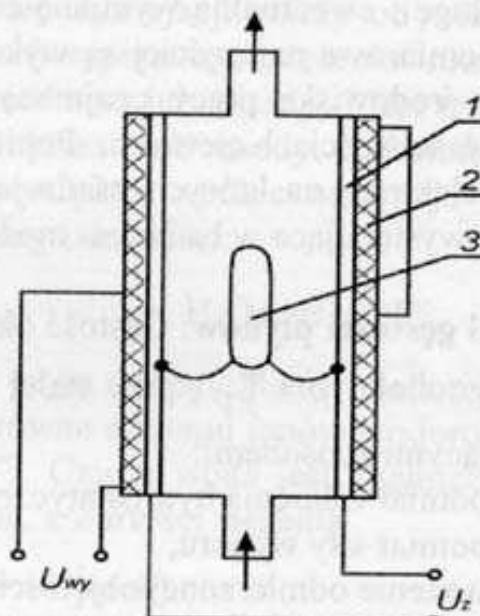
Na rysunku 5.32 pokazano układ służący do wyznaczania gęstości przez pomiar ciśnienia hydrostatycznego słupa cieczy. W układzie tym dwie rurki zanurzone na różną głębokość służą do pomiaru różnicy ciśnień  $\Delta p$ . Różnica ta zależy od wysokości  $h$  oraz od ciężaru właściwego cieczy  $\gamma$ .

Czujniki do pomiaru różnicy ciśnień mogą być różnego typu (mieszkalne lub membranowe). Sygnał ciśnienia przetworzony w przetworniku na napięcie może być podany na element wskazujący. Miernik powinien być wyskalowany w jednostkach gęstości lub ciężaru właściwego. Układ ten jest bardzo niewygodny i ma zastosowanie jedynie laboratoryjne. Do pomiaru gęstości tą metodą potrzebna jest również stosunkowo duża ilość badanej cieczy. Pomiar nie może być prowadzony ciągle i stąd konieczny jest duży przedział czasu na dokonanie pomiaru. Dokładność pomiaru powyższą metodą nie jest duża, a poza tym metoda ta nie nadaje się do wykonania pomiaru cyfrowego.

Układ przedstawiony na rys. 5.33 służy do określenia ciężaru właściwego na podstawie pomiaru siły wyporu ciała zanurzonego w badanej cieczy. Pływak 1 jest umieszczony w cylindrze z badaną cieczą. Na obwodzie cylindra są nawinięte uzwojenia przetwornika. Jedno uzwojenie jest zasilane napięciem  $U_z$ , natomiast napięcie wyjściowe  $U_{wy}$  uzwojenia wtórnego zależy od położenia pływaka w stosunku do cewki. Zmiany napięcia wyjściowego wynikają ze zmian przewodności magnetycznej w cewce czujnika. Pływak 1 zamocowano na łańcuszkach, których długość dobrano w taki sposób, aby zależność napięcia wyjściowego od gęstości była liniowa. Wynika to z tego, że ciężar łańcuszków rozkłada się na ciężar wraz z pływakiem oraz na ciężar przenoszony przez zamocowanie. Dalsze przetwarzanie sygnału nie przedstawia większych trudności. Sygnał wyjściowy jest typu ciągłego i dlatego pomiar tą metodą jest pomiarem analogowym.



Rys. 5.32. Układ do hydrostatycznego pomiaru gęstości



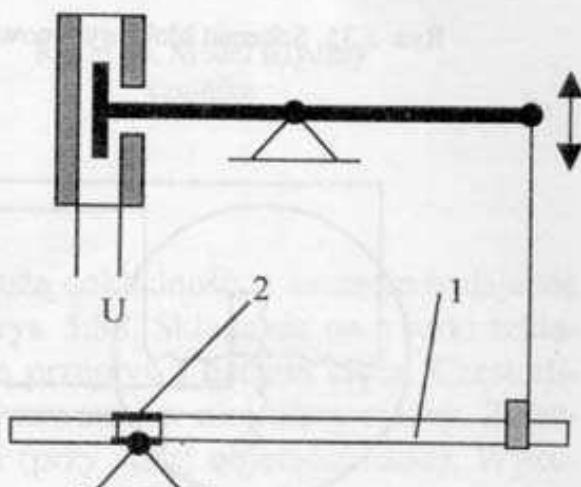
Rys. 5.33. Pomiar ciężaru właściwego na podstawie siły wyporu: 1 – cewka czujnika uzwojenia pierwotnego przetwornika, 2 – cewka uzwojenia wtórnego, 3 – pływak

Na podobnej zasadzie pracują układy, w których przesunięcie pływaka jest przetwarzane nie za pomocą przetwornika transformatorowo-indukcyjnego, ale za pomocą układu dźwigni, która steruje wejściem wzmacniacza pneumatycznego. W kolejnym elemencie układu sygnał jest przetwarzany na sygnał napięciowy, a napięcie jest podawane do miernika wyskalowanego w jednostkach ciężaru właściwego. W powyższych układach istnieje możliwość przepływu badanej cieczy (na rys. 5.33 kierunek przepływu zaznaczono strzałką). Jednak przepływ ten musi być stabilizowany, aby nie było zakłóceń pomiaru wynikających z ruchu cieczy.

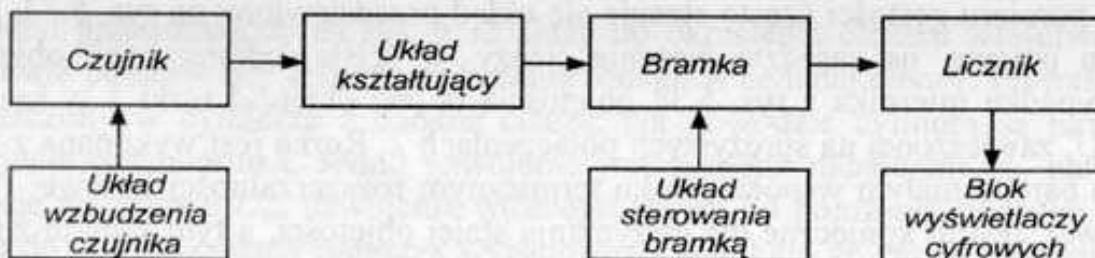
Do pomiaru gęstości często stosuje się układ przedstawiony na rys. 5.34. Miernik ten pracuje na zasadzie ważenia cieczy w ścisłe odmierzonej objętości. W przypadku miernika z rys. 5.34 objętością tą jest objętość rurki 1 w kształcie litery U, zawieszonej na sprężystych połączeniach 2. Rurka jest wykonana z materiału o bardzo małym współczynniku termicznym rozszerzalności liniowej i objętościowej. Jest to konieczne dla otrzymania stałej objętości, a tym samym zmniejszenia błędu wynikającego ze zmiany objętości pod wpływem temperatury. Ugięcie rurki przyrządu jest funkcją ciężaru cieczy w rurce. Przy zachowaniu stałej objętości rurki ugięcie jest funkcją ciężaru właściwego medium. Ugięcie to najczęściej mierzy się tzw. wagą prądową, a sygnałem wyjściowym jest wówczas prąd. Sygnał prądowy podaje się na miernik wyskalowany w jednostkach ciężaru właściwego, a wynik uzyskuje się przez bezpośredni odczyt. Zaletą tego układu jest przede wszystkim możliwość przepływu cieczy, a co za tym idzie, możliwość pomiaru gęstości w dowolnej chwili. Inną zaletą czujnika jest eliminowanie błędu wynikającego z parowania cieczy i z lepkości. Czynniki te nie mają wpływu na wynik pomiaru. Wobec tylu zalet układ znalazł wiele zastosowań praktycznych. Przykładem może być wykorzystanie tego typu czujnika do pomiaru ciężaru właściwego mleka wapiennego w cukrowni. Na podstawie tego pomiaru określa się stężenie mleka wapiennego i poprzez odpowiedni układ regulacji utrzymuje jego żądany poziom.

W układach cyfrowych do pomiaru gęstości wykorzystuje się zależność częstotliwości drgań od stałej sprężystości  $c$  i masy układu  $m$ . Sygnał częstotliwościowy zostaje uformowany w postaci impulsów, które zlicza się w liczniku w ścisłe określonym czasie. Następnie, po zdekodowaniu zawartości licznika otrzymuje się w postaci dziesiętnej wartość gęstości badanej cieczy. Schemat blokowy typowego układu pomiarowego pokazano na rys. 5.35. Przykładowymi rozwiązaniami cyfrowych układów pomiarowych są układy, których schematy podano na rys. 5.36 i 5.37.

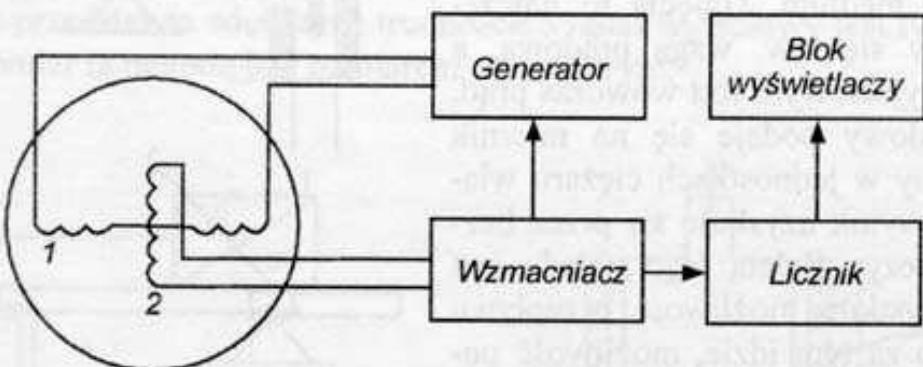
Na rysunku 5.36 pokazano układ, w którym jako czujnika użyto cienkokościenego cylindra stalowego, pobudzonego do drgań przez układ cewek: pobudzającej 1 i sterującej 2. Cewka 1 pobudza cylinder do drgań, przy czym cewka 2 steruje częstotliwością generatora poprzez wzmacniacz. Sygnał częstotliwościowy z wyjścia wzmacniacza wykorzystuje się do mierzenia gęstości ośrodka, w którym jest zanurzony cylinder. Według przykładów podanych w literaturze (katalogi Solartron) błąd temperatury wynosi 0,01% na  $1^{\circ}\text{C}$ , a zmiany lepkości w granicach od 1 do 100 nie mają wpływu na wynik pomiaru.



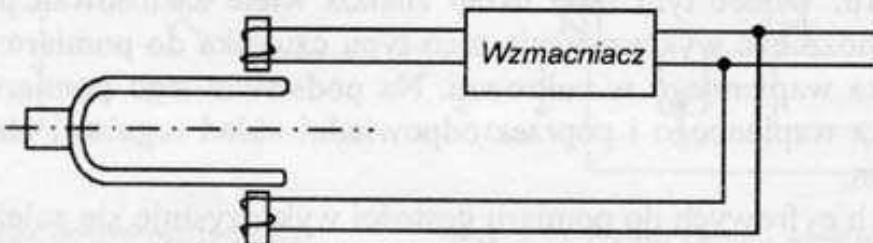
Rys. 5.34. Pomiar gęstości cieczy metodą ważenia: 1 – rurka w kształcie litery U, 2 – połączenie sprężyste



Rys. 5.35. Schemat blokowy typowego układu do cyfrowego pomiaru gęstości

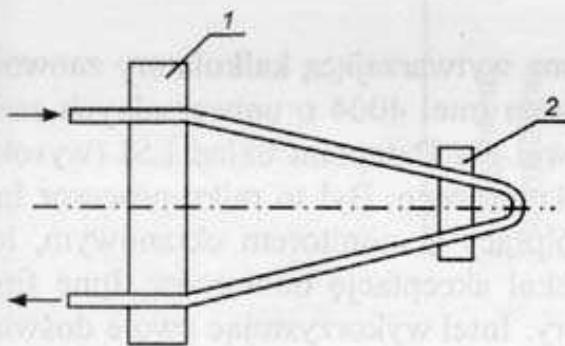


Rys. 5.36. Pomiar gęstości w układzie z cylindrem drgającym: 1 – cewka pobudzająca, 2 – cewka sterująca

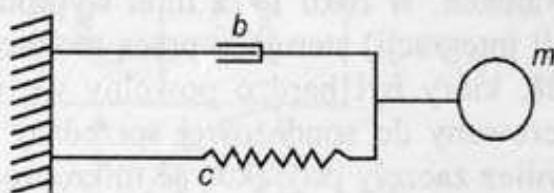


Rys. 5.37. Czujnik kamertonowy z układem wzbudzenia

Na rysunku 5.37 przedstawiono czujnik kamertonowy ze wzmacniaczem wzbudzenia. Kamerton umieszcza się w ośrodku o badanej gęstości i wówczas częstotliwość drgań własnych kamertona jest funkcją gęstości medium. Widełki mocuje się w rurze, przez którą przepływa badane medium i pobudza się je do drgań za pomocą elektromagnesów. Częstotliwość drgań widełek jest funkcją masy układu drgającego, czyli masy widełek oraz przylegającego medium. Zaletą układu jest prawie liniowa zależność – w pewnym zakresie – częstotliwości od gęstości. Metodę tę wykorzystuje się przede wszystkim do pomiaru gęstości gazów, gdyż wpływ lepkości cieczy na wynik pomiaru jest duży.



Rys. 5.38. Czujnik gęstości cieczy w kształcie V-rurki; 1 – zamocowanie czujnika, 2 – metalowa płytka



Rys. 5.39. Model fizyczny czujnika

Czujnik, który pozwala otrzymać równie dużą dokładność, a zarazem nadaje się do zastosowań przemysłowych, pokazano na rys. 5.38. Składa się on z rurki szklanej wygiętej w kształcie litery V, przez którą przepływa badana ciecz. Częstotliwość drgań takiej pobudzonej rurki zależy od zawartej w niej masy cieczy. Zależność tę wykorzystuje się do pomiaru gęstości (przy stałej objętości rurki). Wykorzystanie czujnika szklanego jest podyktowane głównie małą rozszerzalnością cieplną szkła. Poza tym zamknięty układ pomiarowy niweluje błąd spowodowany parowaniem cieczy. Wskutek ścisłego ustalenia objętości cieczy błąd pomiaru zależy tylko od dokładności pomiaru masy. Jak się okazuje, również stała sprężystość szkła ma bardzo mały współczynnik termiczny. Układ drgający czujnika można zastąpić prostym modelem fizycznym przedstawionym na rys. 5.39. Gęstość można wyznaczyć ze wzoru:

$$\rho = AT^2 - B, \quad (5.33)$$

gdzie:  $A, B$  – stałe czujnika,

$T$  – okres drgań rurki.

Gęstość jest zatem kwadratową funkcją okresu drgań rurki. Wyskalowanie czujnika nie jest sprawą prostą. Można tego dokonać stosując metodę odcinkowej linearyzacji charakterystyki.

## 5.3. Sterowniki programowalne

### 5.3.1. Mikroprocesory

Pojawienie się mikroprocesorów na rynkach światowych było związane ze spadkiem popytu na układy scalone w latach siedemdziesiątych i wzrostem popytu na pamięci dynamiczne (do łatwego zapisu i odczytu) o pojemności 1 k bitów. Za-

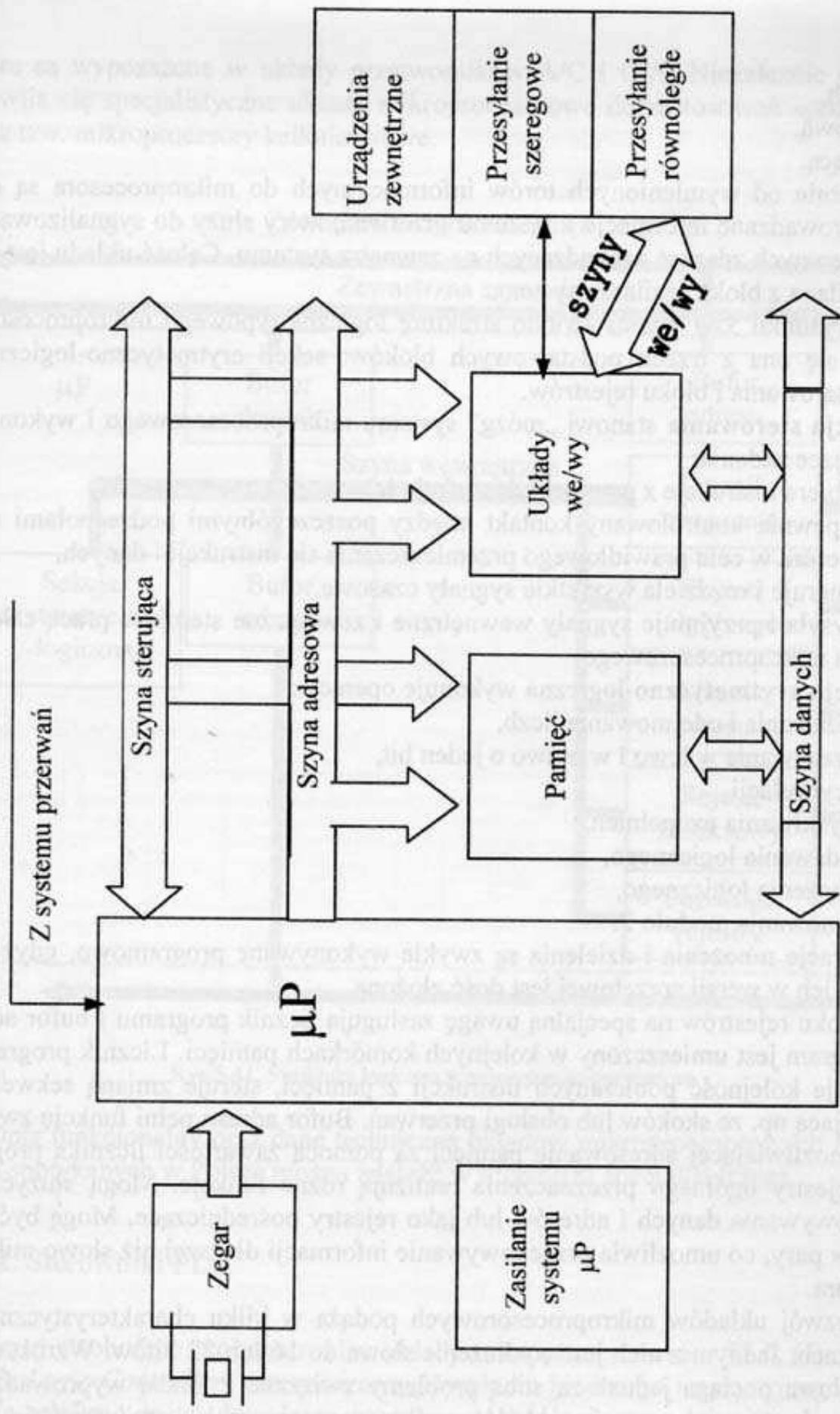
warcie kontraktu przez Intel z japońską firmą wytwarzającą kalkulatory zaowocowało pierwszym 4-bitowym mikroprocesorem Intel 4004 o uniwersalnych zastosowaniach. W roku 1972 Intel wyprodukował dla Datapoint układ LSI (wysokiej skali integracji) sterujący pracą monitora ekranowego. Był to mikroprocesor Intel 8008, który był bardzo powolny we współpracy z monitorem ekranowym, lecz skierowany do sondażowej sprzedaży uzyskał akceptację odbiorców. Inne firmy również zaczęły produkować mikroprocesory. Intel wykorzystując swoje doświadczenia, wprowadził na rynek w 1973 roku 8-bitowy mikroprocesor 8080. Rozwiązań zastosowane w tym mikroprocesorze zostały uznane za wzorcowe i wykorzystały je inne firmy, np. Motorola 6800, Signetics 2660, Rockwell PPP8. Trzecią generację mikroprocesorów rozpoczęły mikroprocesory 8085 produkcji Intel, Z-80 firmy Zilog oraz mikrokomputery jednoukładowe Intel 8048, TMS 1000 Texas Instruments. Następny etap stanowiły mikrokomputery 16-bitowe. Należą do nich 8086 Intel, Z8000 Zilog oraz 68000 Motorola.

Typową strukturę logiczną układu mikroprocesorowego przedstawiono na rys. 5.40. Centralnym elementem układu jest blok mikroprocesora, którego wewnętrzną strukturę logiczną omówiono niżej. Rytym pracy calemu układowi nadaje zegar, umożliwiający wytwarzanie jednostkowych momentów czasowych, zwanych tak-tami pracy układu. Mikroprocesor komunikuje się z pamięcią, w której są przechowywane programy podstawowe, dane oraz programy użytkowe. Programy podstawowe służą do wykonywania pewnych podstawowych operacji wymagających zastosowania kilku instrukcji w języku wewnętrznym procesora. Są to tzw. mikroprogramy, a miejsce ich przechowywania jest nazywane pamięcią mikroprogramów. Dla użytkownika systemu mikroprocesorowego pamięć ta jest pamięcią, z której można czytać informacje, lecz nie można ich zapisywać. Zwykle pamięć ta jest zapisywana u producenta bądź przez użytkownika na etapie tworzenia systemu z uwzględnieniem przewidywanego zastosowania. Z technicznego punktu widzenia pamięć programów zapisuje się w różny sposób i stąd wyróżnia się cztery rodzaje pamięci stałej:

- pamięć typu ROM; zawiera informacje zapisane przez producenta;
- pamięć typu PROM; odmiana pamięci umożliwiająca jednorazowy zapis u użytkownika, na zasadzie przepalania połączeń;
- pamięć typu EPROM; pamięć reprogramowalna, w której informacja jest zapisywana metodą elektryczną, a kasowana przez naświetlanie promieniami nadfioletowymi;
- pamięć typu EEPROM; zarówno zapis, jak i kasowanie zawartości następuje metodą elektryczną.

Pamięć danych i programów użytkowych pozwala na swobodny programowy zapis i kasowanie, stąd często jest nazywana pamięcią o dostępie swobodnym.

Układy wejścia/wyjścia pozwalają na komunikację mikroprocesora z urządzeniami zewnętrznymi. Komunikacja ta może być realizowana w sposób szeregowy, tzn. bit po bicie, lub równoległy, gdy równocześnie (w jednym cyklu) jest przesyłane całe słowo maszynowe. W zależności od rodzaju wszystkie informacje przesyłane w systemie wędrują szynami informacyjnymi:



Rys. 5.40. Struktura logiczna układu mikroprocesorowego

- danych,
- adresową,
- sterującą.

Niezależnie od wymienionych torów informacyjnych do mikroprocesora są doprowadzane informacje z systemu przerwań, który służy do sygnalizowania pewnych zdarzeń zachodzących na zewnątrz systemu. Całość układu jest zasilana z bloku zasilacza systemu.

Na rysunku 5.41 przedstawiono strukturę logiczną typowego mikroprocesora. Składa się ona z trzech podstawowych bloków: sekcji arytmetyczno-logicznej, sekcji sterowania i bloku rejestrów.

**Sekcja sterowania** stanowi „mózg” systemu mikroprocesorowego i wykonuje następujące zadania:

- pobiera instrukcje z pamięci i deszyfruje je,
- zapewnia kontrolowany kontakt między poszczególnymi podzespołami mikroprocesora w celu prawidłowego przemieszczania się instrukcji i danych,
- generuje i rozdziela wszystkie sygnały czasowe,
- wysyła i przyjmuje sygnały wewnętrzne i zewnętrzne sterujące pracą całego systemu mikroprocesorowego.

**Sekcja arytmetyczno-logiczna** wykonuje operacje:

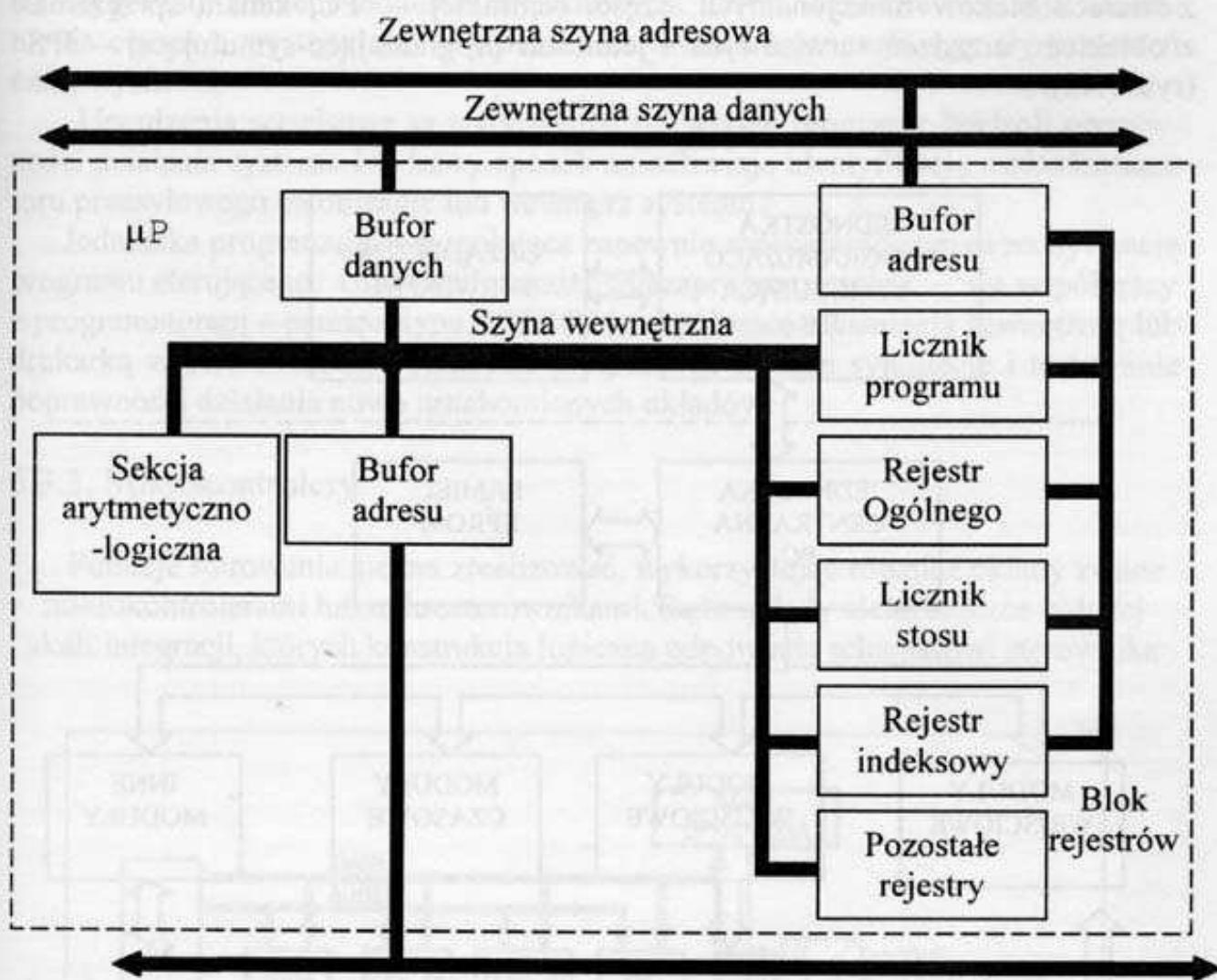
- dodawania i odejmowania liczb,
- przesuwania w lewo i w prawo o jeden bit,
- recyrkulacji,
- uzyskiwania uzupełnień,
- dodawania logicznego,
- mnożenia logicznego,
- sumowania modulo 2.

Operacje mnożenia i dzielenia są zwykle wykonywane programowo, gdyż realizacja ich w wersji sprzętowej jest dość złożona.

Z bloku rejestrów na specjalną uwagę zasługują licznik programu i bufor adresu. Program jest umieszczony w kolejnych komórkach pamięci. Licznik programu nadzoruje kolejność pobieranych instrukcji z pamięci, steruje zmianą sekwencji wynikającą np. ze skoków lub obsługi przerwań. Bufor adresu pełni funkcję zwrotniczą umożliwiającą adresowanie pamięci za pomocą zawartości licznika programu. Rejestry ogólnego przeznaczenia realizują różne funkcje. Mogą służyć do przechowywania danych i adresów lub jako rejesty pośredniczące. Mogą być łączone w pary, co umożliwia przechowywanie informacji dłuższej niż słowo mikroprocesora.

Rozwój układów mikroprocesorowych podąża w kilku charakterystycznych kierunkach. Jednym z nich jest wydłużenie słowa do 16 lub 32 bitów. Wzrost długości słowa pociąga jednak za sobą problemy związane z liczbą wyprowadzeń. Innym symptomem rozwoju układów mikroprocesorowych jest integracja poszczególnych bloków w jednym układzie – powstają wtedy tzw. mikrokomputery jednoukładowe. W zakresie sterowania konstruuje się mikroprocesory analogowe,

które są wyposażone w układy przetworników A/C i C/A. Niezależnie od tego rozwija się specjalistyczne układy mikroprocesorowe do zastosowań specjalnych oraz tzw. mikroprocesory kalkulatorowe.



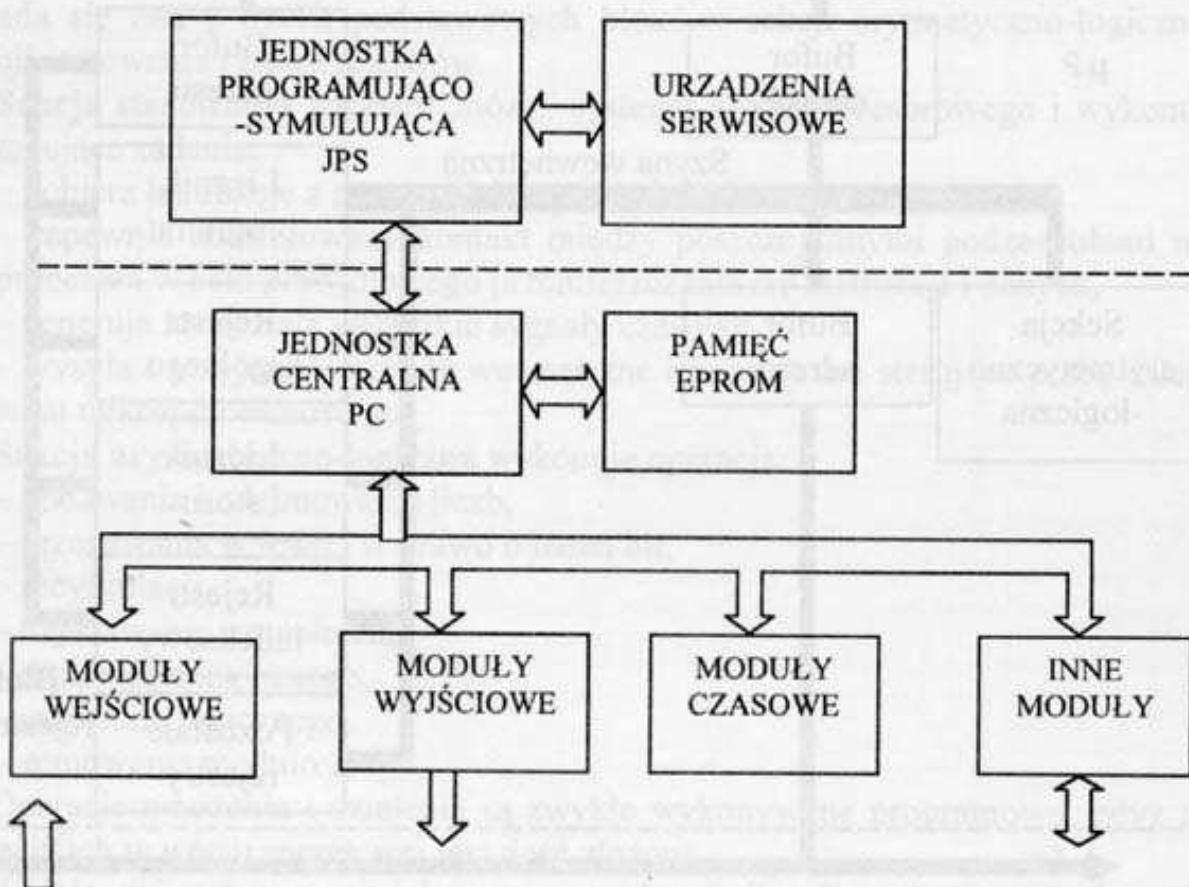
Rys.5.41. Struktura logiczna typowego mikroprocesora

Opis funkcjonalny oraz dane techniczne układów mikroprocesorowych najczęściej spotykanych w Polsce można znaleźć w literaturze specjalistycznej.

### 5.3.2. Sterowniki PLC

Są to swobodnie programowalne układy mikroprocesorowe – PLC (*Programmable Logic Controller*) przeznaczone głównie do binarnego i pozycyjnego sterowania sekwencyjnego dowolnym procesem technologicznym lub zespołem urządzeń. Automatyczne sterowanie odbywa się według wcześniej zadanego programu użytkowego, którego realizacja jest oparta na logicznej kombinacji sygnałów wej-

ścia/wyjścia systemu. Układy te mają budowę modułową. Uniwersalna magistrala systemu pozwala na właściwy dobór jednostek centralnych i innych bloków funkcjonalnych, odpowiednio do potrzeb. Podstawowy zestaw systemu składa się z czterech bloków funkcjonalnych: części centralnej – PC, kanału sprzężenia z obiektem, urządzeń serwisowych i jednostki programująco-symulującej – JPS (rys. 5.42).



Rys. 5.42. Struktura logiczna sterownika

Część centralna, przeznaczona do sterowania systemem, zawiera jednostkę sterującą, pamięć znaczników, pamięć programu oraz interfejs szeregowy.

W skład kanału sprzężenia z obiektem wchodzą moduły wejściowe, wyjściowe oraz członki czasowe. Bloki te zapewniają powiązanie części centralnej systemu z elementami wykonawczymi i sygnalizacyjnymi na obiekcie. Elementem modułów we/wy są przetworniki sygnałów. Przetworniki analogowo-cyfrowe stosuje się w przypadku, gdy zachodzi konieczność wprowadzenia do JC sterownika informacji o wielkości analogowej mierzonej na obiekcie (np. napięciu, prądzie, ciśnieniu, temperaturze). Przetwarzanie takiej informacji wymaga zamiany sygnału analogowego na cyfrowy, gdyż tylko w tej postaci sterownik może te dane wykorzystać. Odwrotna sytuacja występuje w przypadku konieczności wysłania sygnału analogowego do urządzeń wykonawczych na obiekcie (np. silników, zaworów, siłowni-

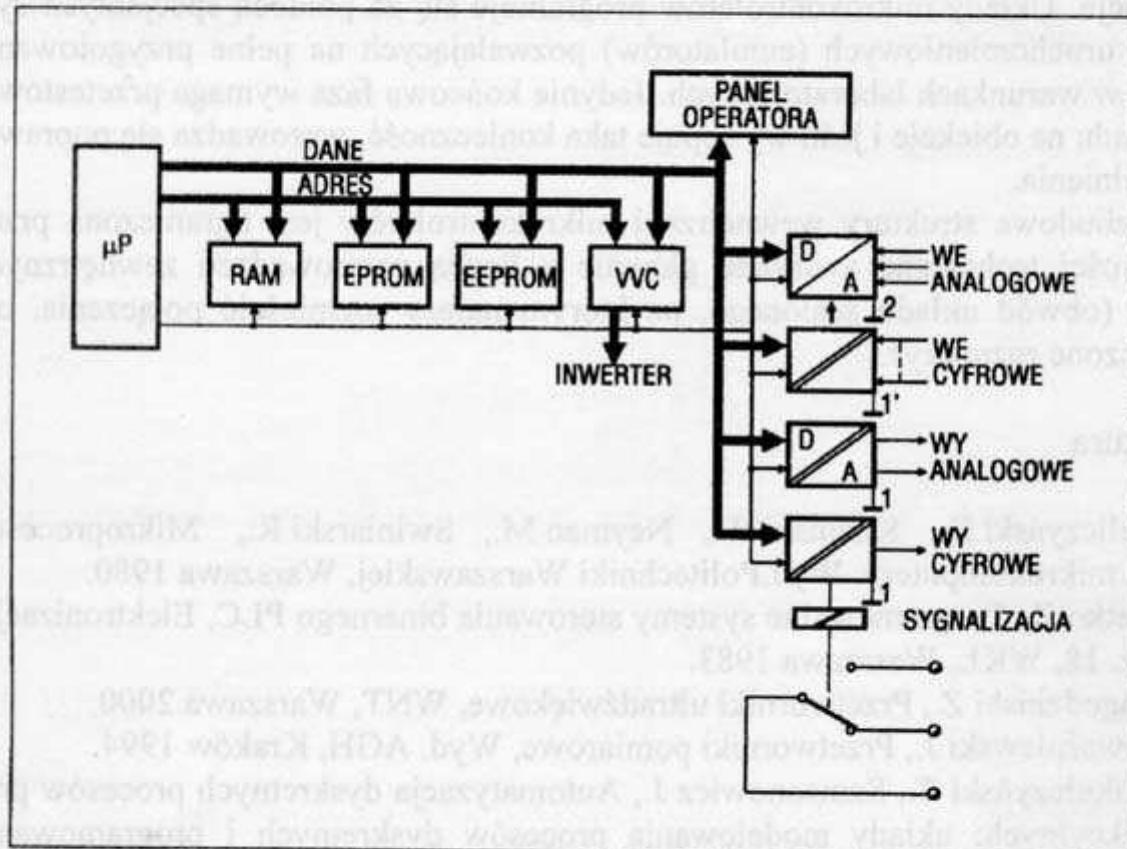
ków hydraulicznych) w celu zmiany ich stanu (obrotów, położenia). Wypracowany wówczas w JC sterownika sygnał cyfrowy należy przetworzyć na sygnał analogowy. Odbywa się to w układach przetworników cyfrowo-analogowych, które stanowią główny element modułów wyjściowych. Członki czasowe realizują uzależnienia czasowe występujące w procesie sterowania i generują sygnały przerwań czasowych.

Urządzenia serwisowe są wyposażone we własne programy kontroli poprawności działania systemu i w łatwy sposób umożliwiają identyfikację uszkodzonego toru przesyłowego na obiekcie lub wewnątrz systemu.

Jednostka programującą-symulującą zapewnia zaprogramowanie i modyfikację programu sterującego. Urządzenie umożliwia zaprogramowanie – we współpracy z programatorem – pamięci typu REPROM, współpracę z pamięcią zewnętrzną lub drukarką w celu tworzenia biblioteki programów, a także symulację i testowanie poprawności działania nowo uruchomionych układów.

### 5.3.3. Mikrokontrolery

Funkcje sterowania można zrealizować, wykorzystując również układy zwane mikrokontrolerami lub mikrosterownikami. Są to układy elektroniczne o dużej skali integracji, których konstrukcja logiczna odpowiada schematowi sterownika



Rys. 5.43. Struktura typowego układu mikrokontrolera

PLC, lecz jest wykonana w postaci jednego układu scalonego. Układ ten zawiera w swojej wewnętrznej strukturze moduły wejścio-wyjściowe, m.in. przetworniki analogowo-cyfrowe i cyfrowo-analogowe. Strukturę typowego układu mikrokontrolera pokazano na rys. 5.43.

Przedstawiony układ, poza podstawowymi elementami układu mikroprocesorowego (mikroprocesor, pamięć RAM, ROM-EPROM), jest wyposażony w dodatkową pamięć EEPROM oraz moduły wejściowo-wyjściowe. Pamięć ta jest przeznaczona do zapisu danych wprowadzanych przez użytkownika, a dane w niej zawarte są pamiętane także po wyłączeniu zasilania. Moduły wejściowo-wyjściowe zapewniają połaczenie systemu z obiektem sterowanym poprzez przetworniki analogowo-cyfrowe (D/A) oraz bloki wejść i wyjść cyfrowych. Układy mikrokontrolerów są wyposażone również w wyspecjalizowane bloki funkcjonalne dobierane w zależności od zastosowań. W prezentowanym układzie na rys. 5.43 występuje układ VVC służący do sterowania prędkością obrotową silnika.

Mikrokontrolery znalazły szerokie zastosowania w tzw. układach wbudowanych w wyspecjalizowane przyrządy pomiarowe, elementy robotów, sterowniki urządzeń wykonawczych itp. Systemy wbudowane stanowią część większego systemu macierzystego spełniającego wiele różnorodnych funkcji. Układy te stanowią urządzenia, do których dostęp jest możliwy poprzez wyspecjalizowane panele operatorskie. Konstrukcja systemów wbudowanych pozwala na wykorzystanie ich w układach, od których wymaga się jest dużej odporności na zakłócenia mechaniczne i wibracje. Układy mikrokontrolerów programuje się za pomocą specjalnych systemów uruchomieniowych (emulatorów) pozwalających na pełne przygotowanie układu w warunkach laboratoryjnych. Jedynie końcowa faza wymaga przetestowania układu na obiekcie i jeśli występuje taka konieczność, wprowadza się poprawki i uzupełnienia.

Rozbudowa struktury wewnętrznej mikrokontrolerów jest ograniczona przez możliwości techniczne związane głównie z liczbą wyprowadzeń zewnętrznych układu (obwód układu scalonego, na którym należy rozmieścić połączenia, ma ograniczone rozmiary).

## Literatura

- [1] Beliczyński B., Koziński W., Neyman M., Swiniarski R., Mikroprocesor i mikrokomputery, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1980.
- [2] Getko Z., Programowalne systemy sterowania binarnego PLC, Elektronizacja, z. 18, WKŁ, Warszawa 1983.
- [3] Jagodziński Z., Przetworniki ultradźwiękowe, WNT, Warszawa 2000.
- [4] Kwaśniewski J., Przetworniki pomiarowe, Wyd. AGH, Kraków 1994.
- [5] Mikulczyński T., Samsonowicz J., Automatyzacja dyskretnych procesów produkcyjnych: układy modelowania procesów dyskretnych i programowania PLC, WNT, Warszawa 1997.

- [6] Miądowicz Z., Stokłosa J., Elementy automatyki. Ćwiczenia laboratoryjne, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1983.
- [7] Olsson G., Piani G., Computer systems for automation and control, Prentice Hall, New York 1992.
- [8] Plassche van de R., Scalone przetworniki analogowo-cyfrowe i cyfrowo-analogowe, WKŁ, Warszawa 1997.
- [9] Romer E., Miernictwo przemysłowe, WNT, Warszawa 1978.
- [10] Trybus L., Regulatory wielofunkcyjne, WNT, Warszawa 1992.
- [11] Urbaniak A., Komputery w oczyszczalni ścieków, w: Poradnik eksploataatora oczyszczalni ścieków, praca zbiorowa, Wyd. PZITS Poznań 1997.

zakresu od zera do nieskończoności. Wówczas X zapisywane jest w postaci całki podwójnej, której przedmiotem jest funkcja f(t) · t. Wartość całki jest równa iloczynowi funkcji f(t) i dystrybuanty S(t). Wykonując taki całkowitek, otrzymujemy wyrażenie kierunkową charakterystykę X(s) na rys. 1.1.

## DODATEK: PODSTAWOWE WŁASNOŚCI PRZEKSZTAŁCENIA LAPLACE'A

### 1. Podstawowe pojęcia i definicje

Podstawową rolę w przekształceniu Laplace'a odgrywa funkcja  $\eta(x)$  określona dla wszystkich rzeczywistych wartości  $x$  w następujący sposób:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Funkcję  $\eta(x)$  nazywamy funkcją Heaviside'a. Funkcja ta jest najprostszym sposobem opisu zjawiska, które pojawia się nagle w chwili przyjętej jako początek miary czasu. Stąd często zmienną niezależną  $x$  zastępuje się zmienną  $t$ , oznaczającą czas. W praktyce wykorzystuje się często iloczyn funkcji  $f(x)$  (określonej również dla  $x$ -ów ujemnych) i funkcji Heaviside'a  $\eta(x)$ , to znaczy  $\eta(x) \cdot f(x)$ . Powoduje to wyzerowanie funkcji dla wartości ujemnych.

Funkcję Heaviside'a nazywa się również funkcją skoku jednostkowego  $\mathbf{1}(t)$  i często upraszcza się zapis (D.1) do postaci następującej:

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases} \quad (\text{D.2})$$

**Definicja 1.** Dla funkcji  $f(t)$  takiej, że całka  $\int_0^\infty e^{-\alpha t} f(t) dt$  dla  $\alpha > 0$  jest zbieżna, definiujemy przekształcenie Laplace'a wzorem

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt \quad (\text{D.3})$$

gdzie:  $s = \alpha + j\omega$ .

Funkcję  $f(t)$  nazywamy **oryginalem**, natomiast funkcję  $F(s)$  **obrazem** (transformatą Laplace'a) funkcji  $f(t)$ . Ponieważ z matematycznego punktu widzenia zależność (C.3) jest operatorem, więc mówimy często o rachunku operatorowym.

Z definicji 1 wynika, że transformowane według Laplace'a są wszystkie takie funkcje  $f(t)$ , które rosną nie szybciej niż funkcja wykładnicza.

## 2. Własności przekształcenia Laplace'a

Podamy poniżej podstawowe twierdzenia (bez dowodów) opisujące własności przekształcenia Laplace'a. Dowody prawdziwości podanych twierdzeń są zamieszczone w podręcznikach z rachunku operatorowego, między innymi w [1].

**T w i e r d z e n i e 1** (o addytywności przekształcenia Laplace'a). Jeżeli

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad \text{i} \quad \mathcal{L}[g(t)] = G(s),$$

to

$$\mathcal{L}[f(t) + g(t)] = F(s) + G(s). \quad (\text{D.4})$$

Innymi słowy, transformata sumy funkcji jest równa sumie ich transformat.

**T w i e r d z e n i e 2** (o jednorodności przekształcenia Laplace'a). Jeżeli

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad \text{i} \quad a \in Z,$$

to

$$\mathcal{L}[a \cdot f(t)] = a \cdot \mathcal{L}[f(t)] = a \cdot F(s), \quad (\text{D.5})$$

gdzie  $Z$  jest zbiorem wszystkich liczb zespolonych.

Innymi słowy, stałą można wyłączyć przed znak operatora.

**T w i e r d z e n i e 3** (o podobieństwie). Jeżeli

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s),$$

to dla  $a > 0$

$$\mathcal{L}[f(a \cdot t)] = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right). \quad (\text{D.6})$$

**T w i e r d z e n i e 4** (o przesunięciu w prawo). Jeżeli

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s),$$

to dla dowolnego  $a > 0$

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as} \cdot \mathcal{L}[f(t)] \quad (\text{D.7})$$

lub inaczej

$$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as} \cdot F(s). \quad (\text{D.8})$$

**T w i e r d z e n i e 5** (o przesunięciu w lewo). Jeżeli

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s),$$

to dla każdego  $a > 0$

$$\mathcal{L}[f(t+a)] = e^{as} \left[ F(s) - \int_0^a f(t) \cdot e^{-st} dt \right]. \quad (\text{D.9})$$

U w a g a. Może się zdarzyć, że funkcja  $f(t+a)$  nie spełni warunków klasy oryginałów (istnienie  $f(t+a) \neq 0$  dla argumentów ujemnych); wówczas rozpatrujemy funkcję

$$\mathbf{1}(t) \cdot f(t+a).$$

**T w i e r d z e n i e 6** (o transformacji funkcji okresowej). Jeżeli funkcja  $f(t)$  z klasy oryginałów jest funkcją okresową o okresie  $T$  dla  $t' > 0$ , to jej transformata jest w postaci

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T f(t) \cdot e^{-st} dt, \quad \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (\text{D.10})$$

**T w i e r d z e n i e 7** (o różniczkowaniu oryginału). Jeżeli  $\alpha$  jest wykładnikiem wzrostu funkcji  $f(t)$  i dla  $\operatorname{Re}(s)$  istnieje transformata funkcji  $F'(t)$  należącej do klasy oryginałów, to

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s \cdot \mathcal{L}[f(t)] - f(0^+) \quad \operatorname{Re}(s) > \alpha. \quad (\text{D.11})$$

**T w i e r d z e n i e 8** (o n-krotnym różniczkowaniu oryginału). Jeżeli  $\alpha$  jest wykładnikiem wzrostu funkcji  $f(t)$ , której pochodne  $n$ -tego rzędu  $f^{(n)}(t)$  należą do klasy oryginałów i dla  $\operatorname{Re}(s) > \alpha$  istnieje transformata tej pochodnej, to

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = s^k \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{\nu=0}^{k-1} s^{k-1-\nu} \cdot f^{(\nu)}(0^+) \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \operatorname{Re}(s) > \alpha. \quad (\text{D.12})$$

**U w a g a.** Dla zerowych warunków początkowych zależności (D.11) i (D.12) przyjmą odpowiednio postać

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s \cdot \mathcal{L}[f(t)], \quad \operatorname{Re}(s) > \alpha \quad (\text{D.11a})$$

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = s^k \cdot \mathcal{L}[f(t)], \quad \operatorname{Re}(s) > \alpha \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{D.12a})$$

**T w i e r d z e n i e 9** (o całkowaniu oryginału). Jeżeli  $\alpha$  jest wykładnikiem wzrostu funkcji  $f(t)$  i istnieje transformata tej funkcji, to istnieje także transformata jej całki i zachodzi zależność

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} \cdot \mathcal{L}[f(t)], \quad \operatorname{Re}(s) > \alpha. \quad (\text{D.13})$$

**T w i e r d z e n i e 10** (o wartości początkowej). Jeżeli istnieje granica  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ , to zachodzi równość

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s). \quad (\text{D.14})$$

**T w i e r d z e n i e 11** (o wartości końcowej). Jeżeli istnieje granica  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ , o zachodzi równość

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s). \quad (\text{D.15})$$

### 3. Odwrotne przekształcenie Laplace'a

W zastosowaniach rachunku operatorowego w teorii sterowania istotną rolę odgrywa wyznaczanie oryginalu  $f(t)$  dla znanej funkcji obrazu  $F(s)$ . Zagadnienie to sprowadza się do rozwiązyania równania całkowego

$$\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt = F(s), \quad (\text{D.16})$$

gdzie  $F(s)$  jest funkcją daną, a  $f(t)$  jest funkcją niewiadomą. Przy określonych założeniach, podanych w pracy [1], można wykazać twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania całkowego (D.16) oraz uzasadnić, że funkcję oryginalu można wyznaczyć ze wzoru

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{s-j\omega}^{s+j\omega} e^{st} \cdot F(s) ds. \quad (\text{D.17})$$

Wzór (D.17) określa tak zwane odwrotne przekształcenie Laplace'a, które zapiszemy symbolicznie:

$$f(t) = L^{-1}[F(s)]. \quad (\text{D.18})$$

Załóżmy, że  $F(s)$  jest funkcją wymierną, to znaczy, że

$$F(s) = \frac{L(s)}{M(s)}, \quad (\text{D.19})$$

gdzie  $L(s)$  i  $M(s)$  są wielomianami odpowiednio stopni  $m$  i  $n$  ( $m \leq n$ ).

Niech wielomian  $M(s)$  ma  $n$  różnych miejsc zerowych (rzeczywistych lub zespolonych)  $s_1, s_2, \dots, s_n$  różnych od zera. Wówczas oryginal funkcji  $F(s)$  możemy wyznaczyć, opierając się na wzorze Heaviside'a

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^n \frac{L(s_k)}{M'(s_k)} \cdot e^{s_k t}. \quad (\text{D.20})$$

Podobnie, jeśli mianownik posiada jeden biegum równy zero (to znaczy  $s_1 = 0$ ), a pozostałe są różne i różne od zera, wówczas wzór Heaviside'a przyjmie postać

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{L(s)}{sM_1(s)}\right] = \frac{L(0)}{M_1(0)} + \sum_{k=2}^n \frac{L(s_k)}{s_k M'_1(s_k)} \cdot e^{s_k t} \quad (\text{D.21})$$

W ogólnym przypadku dla funkcji wymiernych o biegunach wielokrotnych, niekoniecznie różnych od zera, możemy wyznaczyć postać oryginału, korzystając z własności, że jest on sumą residiów funkcji  $F(s) \cdot e^{st}$ , to znaczy

$$f(t) = \sum_{s_k} \text{res}[F(s) \cdot e^{st}], \quad (\text{D.22})$$

gdzie  $s_k$  są biegunami funkcji  $F(s)$ .

Korzystając zatem z zależności na wyznaczanie residiów funkcji wymiernych, otrzymamy wzór

$$f(t) = \sum_{s_k} \text{res}[F(s) \cdot e^{st}] = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k - 1)!} \cdot \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}} [F(s)(s - s_k)^{n_k} e^{st}] \quad (\text{D.23})$$

gdzie:

$l$  – liczba różnych biegunów,

$n_k$  – krotność  $k$ -tego bieguna.

#### 4. Transformaty wybranych funkcji

- Funkcja Heaviside'a

$$f(t) = \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } t = 0, \\ 0 & \text{dla } t < 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \int_0^\infty \mathbf{1}(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s}.$$

- Funkcja wykładnicza

$$f(t) = e^{at}$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^\infty e^{at} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} dt = -\frac{1}{s-a} \cdot e^{-(s-a)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s-a}.$$

- Dystrybucja Diraca.

Pojęcie funkcji zostało uogólnione przez wprowadzenie pojęcia dystrybucji, pozwalającego na określenie procesu różniczkowania również w punktach nieciągłości. Przyjmuje się, że tak zwana „pseudofunkcja”  $\delta(t)$  Diraca opisana jest następująco:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \neq 0 \\ \infty & \text{dla } t = 0 \end{cases} \quad (\text{D.24})$$

oraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt \stackrel{\text{def.}}{=} 1.$$

Można wykazać, że w sensie dystrybucyjnym impuls Diraca  $\delta(t)$  jest pochodną funkcji Heaviside'a, to znaczy

$$[\mathbf{1}(t)]' = \delta(t). \quad (\text{D.25})$$

Aby wyznaczyć transformatę dystrybucji Diraca, skorzystamy z twierdzenia 7 o różniczkowaniu oryginału.

$$\mathcal{L}\{[\mathbf{1}(t)]'\} = s\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = s \frac{1}{s} = 1.$$

W tablicy D.1 zestawiono transformaty wybranych funkcji.

### Literatura

- [1] Bobrowski D., Ratajczak Z., Przekształcenie Laplace'a i jego zastosowania, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1978.

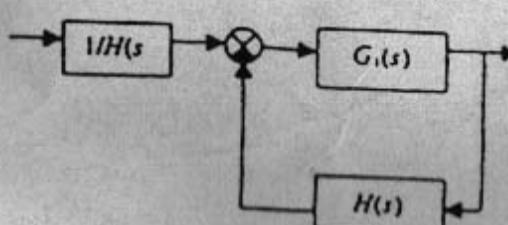
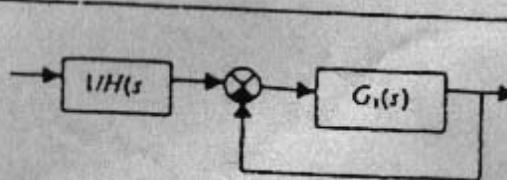
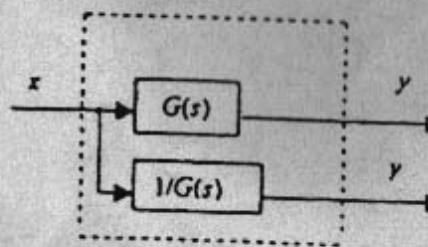
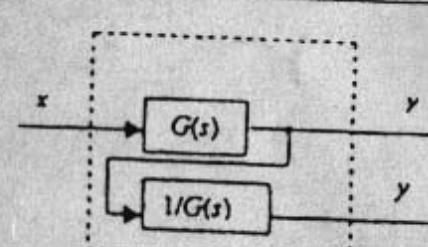
T a b l i c a D.1. Transformaty wybranych funkcji

Oryginał $f(t)$	Transformata $F(s)$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{s(s+a)(s+b)}$
$1 - \left( \cos \frac{at}{T} + \frac{\xi}{a} \sin \frac{at}{T} \right) \cdot e^{-\frac{\xi t}{T}} \quad a = \sqrt{1-\xi^2}$	$\frac{1}{s(T^2 s^2 + 2\xi T s + 1)}, \quad \xi < 1$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$e^{-bt} \sin at$	$\frac{a}{(s+b)^2 + a^2}$
$1 - \cos at$	$\frac{a^2}{s(s^2 + a^2)}$
$t \sin at$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$



ERRATA

Andrzej Urbaniak, Podstawy automatyki, Wyd Politechniki Poznańskiej

Nr błędu	Strona, wiersz	Jest	Powinno być
1	9.11d	$a+a=a, \quad a \cdot a=a$	$a+a=a, \quad a \cdot a=a$
2	32.1d	$(n \leq m)$	$(n \geq m)$
3	33.7g	$n \leq m$	$n \geq m$
4	51.6d	$H(s) = \frac{k}{1 + \sum_{s_i} \frac{L(s_i)}{M'(s_i)}} e^{s_i s} =$	$H(s) = \frac{k}{1 + \sum_{s_i} \frac{L(s_i)}{s_i M'(s_i)}} e^{s_i s} =$
5	65.10g	$H(s) = G(s) \cdot Y(s)$	$H(s) = G(s) \cdot X(s)$
6	66,rys.2.20c	$\omega=0$ $\omega=\infty$	$\omega=\infty$ $\omega=0$
7	67.11d	$\varphi(\omega) = \arctan \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} = \arctan \frac{k\omega^2 T}{k\omega} = \arctan(k\omega)$	$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} = \arctan \frac{k\omega}{k\omega^2 T} = \arctan \frac{1}{\omega T}$
8	72.5g	$\frac{e^{-\theta\omega_0}}{\sqrt{1-\xi^2}}$	$k \frac{e^{-\theta\omega_0}}{\sqrt{1-\xi^2}}$
9	72.12g wzór (2.29)	$\xi_0$	$\omega_0$
10	80,rys.2.29b		
11	82, rys.2.31		
12	89.6g	$a > 0$	$a_n > 0$
13	170.6g	$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$	$\eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } x = 0 \\ 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$