prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Badania operacyjne

Problem

Znaleźć optymalny program produkcji.

Model matematyczny

Zmaksymalizować

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad (1)$$

Przy ograniczeniach

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7 \qquad (2)$$

$$-2x_1 + 4x_2 \leq 12 \qquad (3)$$

$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10 \qquad (4)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \qquad (5)$$

Metoda rozwiązania

- Algorytm simplex
- Metoda Chaczijana
- Algorytm programowania dynamicznego

2018-02-26 8

Programowanie liniowe

Algorytm sympleks

2018-02-26 9

Plan wykładu

- Problem programowania liniowego
  - Postać kanoniczna
  - Postać standardowa
- Algorytm sympleks
  - Początkowa baza dopuszczalna
  - Tablica sympleks
  - Warunek optymalności rozwiązania
  - Zmiana bazy
  - Transformacja tablicy
- Metoda sztucznej bazy
- Metoda graficzna

Przykład zastosowania PL

Mały warsztat naprawia trzy rodzaje urządzeń B1, B2, B3. Każde urządzenie zawiera trzy podstawowe elementy: E_1, E_2, E_3. Naprawa polega na demontażu i/lub montażu elementów E_1, E_2, E_3 według określonej technologii. Tabela przedstawia przebieg każdej naprawy, zysk z naprawy urządzenia określonego typu oraz zapas elementów E_1, E_2, E_3 w firmie.

Przykład zastosowania PL

Urządzenie	Element			
	E1	E2	E3	zysk [$/szt]
B1	3	-2	-4	-1
B2	-1	4	3	3
B3	2	0	8	-2
Zapas [szt.]	7	12	10	

Aby określić optymalny z punktu widzenia maksymalizacji zysku zakres napraw budujemy model liniowy problemu.

Sformułowanie problemu

Niech x_1 oznacza planowaną liczbę sztuk urządzenia B1
x_2 oznacza planowaną liczbę sztuk urządzenia B2
x_3 oznacza planowaną liczbę sztuk urządzenia B3

Całkowity zysk z naprawy urządzeń:

$$-x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

Liczba sztuk elementu E1 potrzebna do realizacji produkcji:

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7$$

Zakład ma zapas 7 sztuk elementu E1

Podobnie dla elementów E2 i E3:

$$-2x_1 + 4x_2 \leq 12$$
$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10$$

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Sformułowanie problemu

Zmaksymalizować	$-x_1 + 3x_2 - 2x_3$	(1)
Przy ograniczeniach	$3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7$	(2)
	$-2x_1 + 4x_2 \leq 12$	(3)
	$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10$	(4)
	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$	(5)

2018-02-26 14

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Model liniowy

funkcja celu (kryterium)

zmaksymalizować $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

przy ograniczeniach $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \; i = 1, \ldots, m$

$x_j \geq 0, \; j = 1, \ldots, n$

ograniczenia

2018-02-26 15

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Model liniowy

zmienna decyzyjna

zmaksymalizować $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ (i)

przy ograniczeniach $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1,\ldots,m$ (ii)

parametry

$x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n$ (iii)

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Model liniowy – postać kanoniczna

zmaksymalizować $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

przy ograniczeniach $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = 1,\ldots,m$

$x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n$

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Model liniowy

zminimalizować $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

przy ograniczeniach $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i = 1,\ldots,m$

$$x_j \geq 0,\ j = 1,\ldots,n$$

2018-02-26 18

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Model liniowy – postać standardowa

zmaksymalizować $\mathbf{cx}$

przy ograniczeniach $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{x} \geq 0$$

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \ldots, c_n] \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

2018-02-26 19

Podstawowe definicje

Rozwiązaniem dopuszczalnym zagadnienia programowania liniowego jest wektor $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, spełniający warunki (ii) oraz (iii).
Rozwiązaniem bazowym układu równań (ii) nazywamy rozwiązanie układu powstałego przez przyrównanie do zera $n - m$ zmiennych przy założeniu, że wyznacznik współczynników pozostałych m zmiennych jest niezerowy. Te m zmiennych nazywamy zmiennymi bazowymi.
Niezdegenerowanym rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym nazywamy bazowe rozwiązanie dopuszczalne, w którym wszystkie zmienne bazowe są dodatnie.
Maksymalnym (minimalnym) rozwiązaniem dopuszczalnym jest rozwiązanie dopuszczalne, które maksymalizuje (minimalizuje) funkcję celu (i).

Algorytm sympleks

1. sprowadzić problem do postaci standardowej;
2. znaleźć dopuszczalne rozwiązanie bazowe;
3. zbudować początkową tablicę sympleks;
4. wybrać największy element wiersza wskaźnikowego ($x_{m+1,k}$);
5. jeżeli jego wartość jest dodatnia, to
   a. wyznaczyć element x_{lk} o najmniejszym ilorazie b_{ik}/x_{ik} dla $x_{ik}>0$, $i \in B$;
   b. przekształcić tablicę sympleks przyjmując element x_{lk} za element centralny przekształcenia stosując następujące wzory:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} x_{lj} \qquad x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}$$

   c. wrócić do kroku 4.

Joanna Józefowska

Algorytm sympleks

1. sprowadzić problem do postaci standardowej;
2. znaleźć dopuszczalne rozwiązanie bazowe;
3. zbudować początkową tablicę sympleks;
4. wybrać największy element wiersza wskaźnikowego ($x_{m+1,k}$);
5. jeżeli jego wartość jest dodatnia, to
   a. wyznaczyć element x_{lk} o najmniejszym ilorazie b_{ik}/x_{ik} dla $x_{ik} \geq 0$, $i \in B$;
   b. przekształcić tablicę sympleks przyjmując element x_{lk} za element centralny przekształcenia stosując następujące wzory:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} x_{lj} \qquad x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}$$

   c. wrócić do kroku 4.

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Postać kanoniczna problemu PL

Zmaksymalizować: $-x_1 + 3x_2 - 2x_3$

Przy ograniczeniach:

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7$$

$$-2x_1 + 4x_2 \leq 12$$

$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Postać standardowa problemu PL

- Wszystkie ograniczenia mają postać równań
  - dodajemy zmienne osłabiające ($s_i \ge 0$) z zerowymi współczynnikami w funkcji celu
- Wektor prawych stron ograniczeń jest nieujemny (**b** ≥ 0)
  - mnożymy obustronnie równanie przez (–1)
- Funkcja celu jest maksymalizowana
  - mnożymy funkcję celu przez (–1)

Jak to zrobić?

Jak to zrobić?

Jak to zrobić?

2018-02-26 24

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Sprowadzenie ograniczeń do postaci równań

Funkcja celu jest maksymalizowana

Zmaksymalizować: $-x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

Przy ograniczeniach:

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + s_1 = 7$$

$$-2x_1 + 4x_2 + s_2 = 12$$

$$-4x_1 + 3x_2 + \ldots x_3 + s_3 = 10$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \ge 0$$

Wektor prawych stron ograniczeń jest dodatni

2018-02-26 25

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Problem w postaci standardowej

Zmaksymalizować: $-x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

Przy ograniczeniach:

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + s_1 = 7$$
$$-2x_1 + 4x_2 + s_2 = 12$$
$$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + s_3 = 10$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Joanna Józefowska

Algorytm sympleks

1. sprowadzić problem do postaci standardowej;
2. znaleźć dopuszczalne rozwiązanie bazowe;
3. zbudować początkową tablicę sympleks;
4. wybrać największy element wiersza wskaźnikowego ($x_{m+1,k}$);
5. jeżeli jego wartość jest dodatnia, to
   a. Wyznaczyć element x_{lk} o najmniejszym ilorazie b_{ik}/x_{ik} dla $x_{ik} \geq 0$, $i \in B$;
   b. Przekształcić tablicę sympleks przyjmując element x_{lk} za element centralny przekształcenia stosując następujące wzory:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} x_{lj} \qquad x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}$$

   c. wrócić do kroku 4.

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Dopuszczalne rozwiązanie bazowe

Rozwiązaniem bazowym jest rozwiązanie, które powstaje przez przyrównanie do zera n – m zmiennych i rozwiązanie powstałego układu równań.

Uwaga: w postaci standardowej zawsze n>m

Jeżeli w rozwiązaniu baz wszystkich zmiennych są ni jest ono rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym.

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Znalezienie bazy początkowej

Zmaksymalizować: $-x_1 + 3x_2 - 2x_3$

Przy ograniczeniach:

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + s_1 \quad &= 7 \\ -2x_1 + 4x_2 \quad + s_2 \quad &= 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \quad + s_3 &= 10 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

Niech $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Znalezienie bazy początkowej

s_1		$= 7$
	s_2	$= 12$
		$s_3 = 10$

Niech $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

Jest to rozwiązanie bazowe dopuszczalne

Joanna Józefowska

Algorytm sympleks

1. sprowadzić problem do postaci standardowej;
2. znaleźć dopuszczalne rozwiązanie bazowe;
3. zbudować początkową tablicę sympleks;
4. wybrać największy element wiersza wskaźnikowego ($x_{m+1,k}$);
5. jeżeli jego wartość jest dodatnia, to
   a. Wyznaczyć element x_{lk} o najmniejszym ilorazie b_{ik}/x_{ik} dla $x_{ik} \geq 0$, $i \in B$;
   b. Przekształcić tablicę sympleks przyjmując element x_{lk} za element centralny przekształcenia stosując następujące wzory:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} x_{lj} \qquad x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}$$

   c. wrócić do kroku 4.

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

i									
1									
2									
3									
4									

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

i									
1									
2									
3									
4									

Numer wiersza tablicy.
Liczba wierszy: m+1.

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

i	B								
1	s_1								
2	s_2								
3	s_3								
4									

Nazwy wektorów tworzących bazę.

2018-02-26 34

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

i	B	c^B							
1	s_1	0							
2	s_2	0							
3	s_3	0							
4									

Współczynniki przy zmiennych bazowych w funkcji celu.

2018-02-26 35

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

i	B	c^B							RHS
1	s_1	0							7
2	s_2	0							12
3	s_3	0							10
4									

Wartości zmiennych bazowych w bieżącym rozwiązaniu.

2018-02-26 36

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

i	B	c^B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
1	s_1	0							7
2	s_2	0							12
3	s_3	0							10
4									

Nazwy wszystkich zmiennych.

2018-02-26 37

Początkowa tablica sympleks

Współczynniki przy zmiennych w funkcji celu.

			1	3	–2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0							7
2	s_2	0							12
3	s_3	0							10
4									

Początkowa tablica sympleks

Współczynniki przy zmiennych w ograniczeniach.

				3	–2	0	0	0	RHS
			x_1		x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	3	–1	2	1	0	0	7
2	s_2	0	–2	4	0	0	1	0	12
3	s_3	0	–4	3	8	0	0	1	10
4									

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sy

$$z_j = \sum_{i \in B} c_i x_{ij}$$

i	B	c^B	−1	3	−2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	3	−1	2	1	0	0	7
2	s_2	0	−2	4	0	0	1	0	12
3	s_3	0	−4	3	8	0	0	1	10
4									

Wiersz wskaźnikowy.
Wartości $c_j - z_j$

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sy

$$z_j = \sum_{i \in B} c_i x_{ij}$$

i	B	c^B	−1	3	−2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	3	−1	2	1	0	0	7
2	s_2	0	−2	4	0	0	1	0	12
3	s_3	0	−4	3	8	0	0	1	10
4			−1	3	−2	0	0	0	

Wiersz wskaźnikowy.
Wartości $c_j - z_j$

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

i	B	c^B	−1	3	−2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	3	−1	2	1	0	0	7
2	s_2	0	−2	4	0	0	1	0	12
3	s_3	0	−4	3	8	0	0	1	10
4			−1	3	−2	0	0	0	0

Wartość funkcji celu
w bieżącym
rozwiązaniu.

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

i	B	c^B	−1	3	−2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	3	−1	2	1	0	0	7
2	s_2	0	−2	4	0	0	1	0	12
3	s_3	0	−4	3	8	0	0	1	10
4			−1	3	−2	0	0	0	0

Joanna Józefowska

Algorytm sympleks

1. sprowadzić problem do postaci standardowej;
2. znaleźć dopuszczalne rozwiązanie bazowe;
3. zbudować początkową tablicę sympleks;
4. wybrać największy element wiersza wskaźnikowego ($x_{m+1,k}$);
5. jeżeli jego wartość jest dodatnia, to
   a. Wyznaczyć element x_{lk} o najmniejszym ilorazie b_{ik}/x_{ik} dla $x_{ik} \geq 0$, $i \in B$;
   b. Przekształcić tablicę sympleks przyjmując element x_{lk} za element centralny przekształcenia stosując następujące wzory:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} x_{lj} \qquad x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}$$

   c. wrócić do kroku 4.

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

i	B	c^B	–1	3	–2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	3	–1	2	1	0	0	7
2	s_2	0	–2	4	0	0	1	0	12
3	s_3	0	–4	3	8	0	0	1	10
4			–1	3	–2	0	0	0	0

Początkowa tablica sympleks

i	B	c^B	–1	3	–2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	3	–1	2	1	0	0	7
2	s_2	0	–2	4	0	0	1	0	12
3	s_3	0	–4	3	8	0	0	1	10
4			–1	3	–2	0	0	0	0

Algorytm sympleks

1. sprowadzić problem do postaci standardowej;
2. znaleźć dopuszczalne rozwiązanie bazowe;
3. zbudować początkową tablicę sympleks;
4. wybrać największy element wiersza wskaźnikowego ($x_{m+1,k}$);
5. jeżeli jego wartość jest dodatnia, to
   a. Wyznaczyć element x_{lk} o najmniejszym ilorazie b_{ik}/x_{ik} dla $x_{ik}>0$, $i \in B$;
   b. Przekształcić tablicę sympleks przyjmując element x_{lk} za element centralny przekształcenia stosując następujące wzory:

$$x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}$$

   c.

Jeżeli wszystkie $x_{ik} \le 0$, $i \in B$, to funkcja celu może przyjmować dowolnie duże wartości (rozwiązanie nieograniczone).

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

kolumna k

i	B	c^B	−1		−2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	3	−1	2	1	0	0	7
2	s_2	0	−2	4	0	0	1	0	12
3	s_3	0	−4	3	8	0	0	1	10
4			−1	3	−2	0	0	0	0

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

kolumna k

i	B	c^B	−1		−2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	3	−1	2	1	0	0	7
2	s_2	0	−2	4	0	0	1	0	12
3	s_3	0	−4	3	8	0	0	1	10
4			−1	3	−2	0	0	0	0

$12/4 < 10/3$

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

kolumna k

i	B	c^B	−1		−2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	3	−1	2	1	0	0	7
2	s_2	0	−2	4	0	0	1	0	12
3	s_3	0	−4	3	8	0	0	1	10
4			−1	3	−2		0	0	0

wiersz l

element centralny przekształcenia

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

kolumna k

i	B	c^B	−1	3	−2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	3	−1	2	1	0	0	7
2	x_2	3	−2	4	0	0	1	0	12
3	s_3	0	−4	3	8	0	0	1	10
4			[illegible]	3	−2	0	0	0	0

wiersz l

zmienna x_2 (z kolumny k) zastępuje w bazie zmienną s_2 (z wiersza l)

Joanna Józefowska

Algorytm sympleks

1. sprowadzić problem do postaci standardowej;
2. znaleźć dopuszczalne rozwiązanie bazowe;
3. zbudować początkową tablicę sympleks;
4. wybrać największy element wiersza wskaźnikowego ($x_{m+1,k}$);
5. jeżeli jego wartość jest dodatnia, to
   a. Wyznaczyć element x_{lk} o najmniejszym ilorazie b_{ik}/x_{ik} dla $x_{ik} \geq 0$, $i \in B$;
   b. Przekształcić tablicę sympleks przyjmując element x_{lk} za element centralny przekształcenia stosując następujące wzory:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} x_{lj} \qquad x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}$$

   c. wrócić do kroku 4.

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

kolumna j

kolumna k

wiersz i

wiersz l

i	B	c^B	−[illegible]	[illegible]	−2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	3	−1	2	1	0	0	7
2	x_2	3	−2	4	0	0	1	0	12
3	s_3	0	−4	3	8	0	0	1	10
4			−1	3	−2	0	0	0	0

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

kolumna j   kolumna k

wiersz i   wiersz l

i	B	c^B	–[illegible]	[illegible]	–2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	3	–1	2	1	0	0	7
2	x_2	3	–2	4	0	0	1	0	12
3	s_3	0	–4	3	8	0	0	1	10
4			–1	3					

_ * =2,5

2018-02-26

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

kolumna k

wiersz l

i	B	c^B	–1	[illegible]	–2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	5/2	0	2	1	1/4	0	10
2	x_2	3	–2	4	0	0	1	0	12
3	s_3	0	–5/2	0	8	0	–3/4	1	1
4			1/2	0	–2	0	–3/4	0	

2018-02-26 55

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

kolumna k

wiersz l

i	B	c^B	−1		−2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	5/2	0	2	1	1/4	0	10
2	x_2	3	−1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	s_3	0	−5/2	0	8	0	−3/4	1	1
4			1/2	0	−2	0	−3/4	0	

Joanna Józefowska

Algorytm sympleks

1. sprowadzić problem do postaci standardowej;
2. znaleźć dopuszczalne rozwiązanie bazowe;
3. zbudować początkową tablicę sympleks;
4. wybrać największy element wiersza wskaźnikowego ($x_{m+1,k}$);
5. jeżeli jego wartość jest dodatnia, to
   a. Wyznaczyć element x_{lk} o najmniejszym ilorazie b_{ik}/x_{ik} dla $x_{ik} \geq 0$, $i \in B$;
   b. Przekształcić tablicę sympleks przyjmując element x_{lk} za element centralny przekształcenia stosując następujące wzory:

$$x'_{ij} = x_{ij} - \frac{x_{ik}}{x_{lk}} x_{lj} \qquad x'_{lj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}$$

   c. wrócić do kroku 4.

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Tablica sympleks

i	B	c^B	–1	3	–2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	5/2	0	2	1	1/4	0	10
2	x_2	3	–1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	s_3	0	–5/2	0	8	0	–3/4	1	1
4			1/2	0	–2	0	–3/4	0	9

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Tablica sympleks

i	B	c^B	–1	3	–2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	5/2	0	2	1	1/4	0	10
2	x_2	3	–1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	s_3	0	–5/2	0	8	0	–3/4	1	1
4			1/2	0	–2	0	–3/4	0	9

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Tablica sympleks

i	B	c^B	−1	3	−2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	5/2	0	2	1	1/4	0	10
2	x_2	3	−1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	s_3	0	−5/2	0	8	0	−3/4	1	1
4			1/2	0	−2	0	−3/4	0	9

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Tablica sympleks

i	B	c^B	−1	3	−2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	s_1	0	5/2	0	2	1	1/4	0	10
2	x_2	3	−1/2	1	0	0	1/4	0	3
3	s_3	0	−5/2	0	8	0	−3/4	1	1
4			1/2	0	−2	0	−3/4	0	9

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Końcowa tablica sympleks

i	B	c^B	–1	3	–2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
1	x_1	–1	1	0	4/5	2/5	1/10	0	4
2	x_2	3	0	1	2/5	1/5	3/10	0	5
3	s_3	0	0	0	10	1	-1/2	1	11
4			0	0	-12/5	-1/5	-4/5	0	11

$x_1=4$
$x_2=5$
$x_3=0$
z=11
$s_1=0$
$s_2=0$
$s_3=11$

iązanie optymalne

i	B	c^B	–1	3	–2	0	0	0	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	
[illegible]	x_1	–1	1	[illegible]	4/5	2/5	1/10	0	4
2	x_2	3	0	1	2/5	1/5	3/10	0	5
3	s_3	0	0	0	10	1	-1/2	1	11
4			0	0	-12/5	-1/5	-4/5	0	11

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Interpretacja rozwiązania

- Maksymalny zysk to 11$.
- Należy naprawić 4 szt. urządzenia B1 i 5 szt. urządzenia B2, natomiast nie należy przyjmować zleceń na naprawę urządzenia B3.
- Wartości zmiennych uzupełniających oznaczają zapas części, który pozostanie w magazynie po zakończeniu produkcji.
- Elementy E1 i E2 zostaną zużyte, natomiast pozostanie 11 szt. Elementu E3.

2018-02-26 64

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Problem w postaci standardowej

Zmaksymalizować: $-x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

Przy ograniczeniach:

$$
\begin{aligned}
3x_1 - x_2 + 2x_3 + s_1 &= 7 \\
-2x_1 + 4x_2 + s_2 &= 12 \\
-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + s_3 &= 10 \\
x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

2018-02-26 65

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Przykład 2

Zminimalizować: $2x_1 + x_2 + x_3$

Przy ograniczeniach:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 3$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 5$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

2018-02-26 66

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Postać standardowa

Zmaksymalizować: $-(2x_1 + x_2 + x_3)$

Przy ograniczeniach:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 - s_1 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 5$$
$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - s_3 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Baza dopuszczalna?

2018-02-26 67

Metoda sztucznej bazy

Algorytm sympleks

Joanna Józefowska

Metoda sztucznej bazy

I. Wprowadzamy $k \le m$ zmiennych sztucznych. Zmienne te są nieujemne, a ich współczynniki w funkcji celu przyjmują wartość (–M), gdzie M jest dużą liczbą dodatnią.
II. Tablicę sympleks ze sztucznymi wektorami przekształcamy jak zwykłą tablicę, dopóki:
   1. wszystkie sztuczne wektory zostaną wyeliminowane z bazy, tj. mamy bazę dopuszczalną pierwotnego zagadnienia;
   2. brak dodatnich współczynników przy M w wierszu wskaźnikowym
      a. jeżeli sztuczna część funkcji celu jest dodatnia, to zagadnienie nie ma rozwiązania dopuszczalnego;
      b. jeśli sztuczna część funkcji celu jest równa zero, to mamy zdegenerowane rozwiązanie dopuszczalne pierwotnego zagadnienia, które zawiera co najwyżej jeden sztuczny wektor. Przekształcamy tablicę sympleks wprowadzając do bazy wektor, który odpowiada największemu dodatniemu elementowi wiersza wskaźnikowego przy zerowej wartości współczynnika przy M.
III. Kolumny odpowiadające zmiennym sztucznym, które opuściły bazę można eliminować z obliczeń.
IV. Po otrzymaniu bazy dopuszczalnej zagadnienia pierwotnego kontynuujemy realizację algorytmu sympleks aż do otrzymania rozwiązania problemu pierwotnego.

Sztuczna baza

Zmaksymalizować: $-(2x_1 + x_2 + x_3) - Ma_1 - Ma_3$

Przy ograniczeniach:

$$x_1 + 3x_2 + x_3 - s_1 + a_1 = 3$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 5$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 - s_3 + a_3 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, a_1, a_3 \geq 0$$

$x_1 = x_2 = x_3 = s_1 = s_3 = 0$

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Sztuczna baza

Zmaksymalizować: $2x_1 + x_2 + x_3 - Ma_1 - Ma_3$

Przy ograniczeniach:

$$a_1 = 3$$

$$s_2 = 5$$

$$a_3 = 2$$

$x_1 = x_2 = x_3 = s_1 = s_3 = 0$

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Początkowa tablica sympleks

i	B	c^B	2	1	1	0	0	0	-M	-M	RHS
			x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	a_1	a_3	
1	a_1	-M	1	3	1	-1	0	0	1	0	3
2	s_2	0	2	1	2	0	1	0	0	0	5
3	a_3	-M	2	2	1	0	0	-1	0	1	2
4			2+3M	1+5M	1+2M	-M	0	-M	0	0	-5M

2018-02-26 72

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Rozwiązanie

ExploreLP.exe

2018-02-26 73

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Przykład 3

Zminimalizować: $2x_1 + 3x_2$

Przy ograniczeniach:

$$x_1 + 3x_2 \geq 5$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$5x_1 + x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Rozwiązanie

ExploreLP.exe

prof. dr hab. inż. Joanna Józefowska

Podsumowanie

- Sformułowanie problemu PL w postaci standardowej
- Algorytm sympleks
- Metoda sztucznej bazy
- Metoda graficzna