Metody probabilistyczne
Rozwiązania zadań

4. Niezależność

17.10.2017

Zadanie 1. *Pokaż, że dowolne zdarzenie na pierwszej kostce jest niezależne od dowolnego zdarzenia na drugiej kostce.*

Odpowiedź: Niech $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,5),(6,6)\}$ będzie przestrzenią zdarzeń elementarnych ($|\Omega| = 36$). Niech A_1 oznacza dowolne zdarzenie związane z pierwszą z kostek, a A_2 – z drugą z kostek. Załóżmy, że zdarzenie A_1 obejmuje n_1 spośród 6 wyników na pierwszej kostce (i dowolny wynik na drugiej, bo nic o niej nie mówi); podobnie, niech zdarzenie A_2 obejmuje n_2 spośród 6 wyników na drugiej kostce (i dowolny wynik na pierwszej). Np. jeśli A_1 – „wypadło jedno lub dwa oczka na pierwszej kostce", to $n_1 = 2$. Ponieważ wtedy $A_1 = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),(2,2),\ldots,(2,6)\}$, mamy więc $|A_1| = 6n_1$. Podobnie, $|A_2| = 6n_2$. Tym samym:

$$P(A_1) = \frac{6n_1}{36} = \frac{n_1}{6}, \qquad P(A_2) = \frac{6n_2}{36} = \frac{n_2}{6}.$$

Z kolei zdarzenie $A_1 \cap A_2$ obejmuje wszystkie zdarzenia elementarne, dla których wynik na pierwszej kostce jest wśród n_1 wartości obejmowanych przez A_1, a wynik na drugiej kostce – wśród n_2 wartości obejmowanych przez A_2. Mamy więc $|A_1 \cap A_2| = n_1 n_2$ i stąd:

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{n_1 n_2}{36} = \frac{n_1}{6} \cdot \frac{n_2}{6} = P(A_1)P(A_2).$$

Zadanie 2*. *Pokaż, że jeśli $A_1, \ldots, A_n$ – niezależne, to również są niezależne $B_1, \ldots, B_n$, gdzie $B_i = A_i$ lub $B_i = A'_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.*

Odpowiedź: Pokażemy wpierw, że jeśli $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne, to również:

$$A_1, \ldots, A_{i-1}, A'_i, A_{i+1}, \ldots, A_n \qquad \text{są niezależne,} \tag{1}$$

dla dowolnego $i = 1, \ldots, n$. Ponieważ problem jest zupełnie symetryczny ze względu na indeksy $1, \ldots, n$, wystarczy udowodnić własność (1) dla $i = n$, tzn. pokazać, że:

$$A_1, \ldots, A_{n-1}, A'_n \qquad \text{są niezależne,} \tag{2}$$

Zrobimy to przez indukcję po n. Przypadek bazowy dla $n = 2$ został pokazany na wykładzie: z niezależności A_1 i A_2 wynika niezależność A_1 i A'_2. Załóżmy teraz, że własność (2) zachodzi dla dowolnych $n-1$ (lub mniej) zdarzeń (założenie indukcyjne) i udowodnimy ją dla n zdarzeń. Oznaczmy $B_i = A_i$ dla $i < n$, oraz $B_n = A'_n$. Musimy pokazać, że

$$P(B_{i_1} \cap B_{i_2} \ldots \cap B_{i_k}) = P(B_{i_1}) \cdot P(B_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(B_{i_k}),$$

dla dowolnych indeksów $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ i dowolnego $k = 2, \ldots, n$. Ale biorąc $k < n$, ten wniosek wynika z założenia indukcyjnego, ponieważ wybrany ciąg $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ składa się z $k < n$ zdarzeń, o których wiemy (z założenia indukcyjnego), że są niezależne. Stąd jedyne, co musimy pokazać, to przypadek $k = n$, czyli (wracając do starej notacji):

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A'_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_{n-1}) \cdot P(A'_n).$$

Oznaczmy $C = A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}$. Ponieważ:

$$P(C \cap A_n) = P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n) = P(A_1 \cap \ldots A_{n-1}) \cdot P(A_n) = P(C) \cdot P(A_n),$$

czyli C i A_n są niezależne. A więc, używając niezależności dla dwóch zdarzeń, wynika z tego, że C i A'_n są również niezależne. Tym samym:

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A'_n) = P(C \cap A'_n) = P(C) \cdot P(A'_n) = P(A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_{n-1}) \cdot P(A'_n),$$

co kończy dowód własności (2). To z kolei przez symetrię implikuje (1).

Powyższy wynik wystarcza do zakończenia zadania, ponieważ można go stosować *wielokrotnie*, zamieniając kolejne A_i na A'_i, za każdym razem korzystając z faktu, że zbiór zdarzeń wciąż jest niezależny.