Metody probabilistyczne
Rozwiązania zadań

11. Twierdzenia graniczne

19.12.2017

Zadanie 1*. *(Słabe prawo wielkich liczb Czebyszewa) Niech $X_1, X_2, \ldots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych z wartościami oczekiwanymi $EX_i = \mu_i$ i wariancjami $D^2(X_i) = \sigma_i^2$, wspólnie ograniczonymi przez σ^2 (tzn. $\sigma_i^2 \leqslant \sigma^2$ dla wszystkich i). Pokaż, że:*

$$\overline{X}_n - \overline{\mu}_n \xrightarrow{P} 0$$

gdzie $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ oraz $\overline{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu_i$.

Odpowiedź: Zgodnie z definicją zbieżności według prawdopodobieństwo, $\overline{X}_n - \overline{\mu}_n \xrightarrow{P} 0$ oznacza, że dla dowolnego $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\big(|\overline{X}_n - \overline{\mu}_n| > \epsilon\big) = 0, \tag{1}$$

co musimy teraz udowodnić. Wyznaczamy wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $\overline{X}_n$:

$$\begin{aligned} E\overline{X}_n &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \overline{\mu}_n, \\ D^2(\overline{X}_n) &= D^2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n D^2(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \end{aligned}$$

przy czym przy liczeniu wariancji wykorzystaliśmy niezależność zmiennych $X_1, X_2, \ldots$. Stosujemy do $\overline{X}_n$ nierówność Czebyszewa:

$$P\big(|\overline{X}_n - E\overline{X}_n| > \epsilon\big) \leqslant \frac{D^2(\overline{X}_n)}{\epsilon^2},$$

co po podstawieniu wartości oczekiwanej i wariancji daje:

$$P\big(|\overline{X}_n - \overline{\mu}_n| > \epsilon\big) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2},$$

Biorą $n \to \infty$, prawa strona dąży do 0, co implikuje (1) i kończy dowód.

Zadanie 2*. *Pokaż, że zbieżność z prawdopodobieństwem jeden implikuje zbieżność według prawdopodobieństwa:*

$$X_n \xrightarrow{z\ pr.\ 1} X \qquad \Longrightarrow \qquad X_n \xrightarrow{P} X$$

Odpowiedź: Zacznijmy od przypomnienia definicji zbieżności:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1 \qquad \left(X_n \xrightarrow{\text{z pr. 1}} X\right) \tag{2}$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \epsilon) = 0 \qquad \left(X_n \xrightarrow{P} X\right) \tag{3}$$

Musimy wykazać, że jeśli (2) jest spełnione, to również spełnione jest (3). Zbieżność (3) można przepisać w równoważny sposób jako:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \leqslant \epsilon) = 1.$$

Rozważmy zdarzenie losowe:

$$A_n \;=\; \{\omega \in \Omega\colon\; |X_n(\omega) - X(\omega)| \leqslant \epsilon\}.$$

Aby udowodnić (3) wystarczy więc pokazać, że dla każdego $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) \;=\; 1, \tag{4}$$

W tym celu rozważymy jeszcze jeden rodzaj zdarzenia:

$$B_n \;=\; \{\omega \in \Omega\colon\; \forall m \geqslant n\; |X_m(\omega) - X(\omega)| \leqslant \epsilon\}.$$

Zdarzenie B_n jest *silniejsze* od A_n, tzn. jeśli $\omega \in B_n$, to również $\omega \in A_n$, a więc $B_n \subseteq A_n$. Wynika to z faktu, że w zdarzeniu B_n warunek $|X_m(\omega) - X(\omega)| \leqslant \epsilon$ musi zajść nie tylko dla $m = n$ (jak w zdarzeniu A_n), ale również *dla wszystkich* $m > n$. Pokażemy, że zbieżność z prawdopodobieństwem jeden (2) implikuje:

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) \;=\; 1. \tag{5}$$

Ponieważ $B_n \subseteq A_n$, z monotoniczności miary prawdopodobieństwa mamy $P(B_n) \leqslant P(A_n)$, a więc skoro $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 1$, to również $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 1$; tym samym zajdzie (4) i udowodnimy (3). Pozostaje więc nam pokazać, że zachodzi (5).

W tym celu zauważmy, że ciąg zdarzeń $B_1, B_2, B_3, \ldots$ jest ciągiem *wstępującym*, tzn:

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \ldots$$

Wynika to z tego, że jeśli np. $\omega \in B_1$ („dla wszystkich $m \geqslant 1$ zachodzi $|X_m(\omega) - X(\omega)| \leqslant \epsilon$"), to również $\omega \in B_2$ („dla wszystkich $m \geqslant 2$ zachodzi $|X_m(\omega) - X(\omega)| \leqslant \epsilon$"), itp. Definiując teraz zdarzenie:

$$B \;=\; \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

z ciągłości miary prawdopodobieństwa dla ciągów wstępujących (patrz: wykład II o aksjomatycznej definicji prawdopodobieństwa) wynika, że:

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) \;=\; P(B). \tag{6}$$

Czy jest zdarzenie B? Należą do niego zdarzenia elementarne ω, które znajdują się w *którymkolwiek* ze zdarzeń B_n (z definicji sumy zdarzeń). Innymi słowy $\omega \in B$, jeśli istnieje takie n, że dla wszystkich $m \geqslant n$ zachodzi $|X_m(\omega) - X(\omega)| \leqslant \epsilon$. Ale z definicji granicy, to są *dokładnie te zdarzenia*, dla których mamy $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$:

$$B = \{\omega \in \Omega\colon\; \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}.$$

Ponieważ zbieżność z prawdopodobieństwem jeden (2) mówi, że $P(B) = 1$, z (6) wynika, że $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = 1$, a więc pokazaliśmy, że zachodzi (5), co kończy dowód.

Zadanie 3. *Pokaż, że dla dowolnej zmiennej losowej X, zmienna:*

$$U \;=\; \frac{X - EX}{D(X)},$$

jest zmienną standaryzowaną, tzn. $EU = 0$ oraz $D^2(U) = 1$.

Odpowiedź: Zgodnie ze wzorem $E(aX + b) = aEX + b$, dla $a = \frac{1}{D(X)}$ oraz $b = -\frac{EX}{D(X)}$ mamy:

$$EU \;=\; E\left(\frac{X}{D(X)} - \frac{EX}{D(X)}\right) \;=\; \frac{EX}{D(X)} - \frac{EX}{D(X)} \;=\; 0.$$

Podobnie, zgodnie ze wzorem $D^2(aX + b) = a^2 D^2(X)$, dla a, b jak powyżej, mamy:

$$D^2(U) \;=\; D^2\left(\frac{X}{D(X)} - \frac{EX}{D(X)}\right) \;=\; \frac{D^2(X)}{D^2(X)} \;=\; 1.$$