prof. Joanna Józefowska

Modele sieciowe

Badania operacyjne

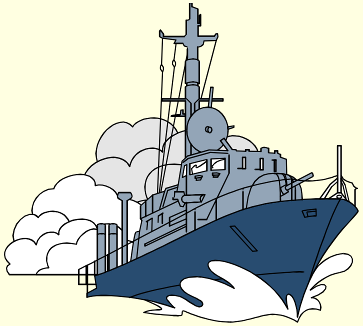
Wykład 6

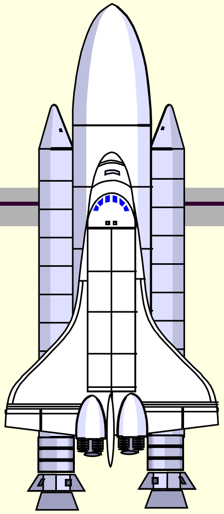
prof. Joanna Józefowska

Plan wykładu

- Zarządzanie złożonymi przedsięwzięciami
- Metoda ścieżki krytycznej
- Metoda PERT
- Projekty z ograniczonymi zasobami
- Modele z kontrolą czasu wykonania czynności

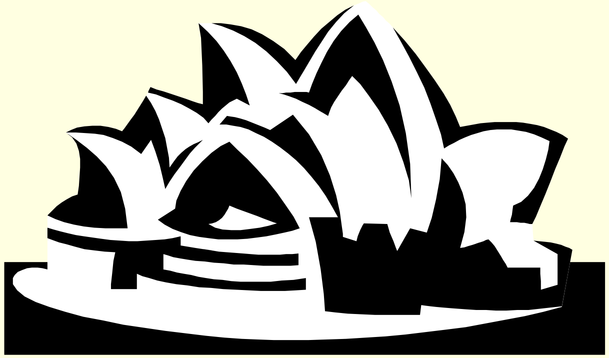
Projekt





Projekt jest to jednorazowe niepowtarzalne przedsięwzięcie wieloczynnościowe o nietypowej strukturze i przebiegu, którego realizacja wymaga zwykle czasu oraz ograniczonych zasobów

(Neumann i in. 2002)



Obszary projektów

- produkcja oprogramowania,
- wdrażanie systemów informatycznych,
- procesy technicznego przygotowania produkcji,
- przedsięwzięcia badawczo-rozwojowe,
- modernizacja zakładów przemysłowych,
- duże przedsięwzięcia inwestycyjne,
- produkcja złożonego wyrobu na zamówienie,
- ……………………………………………

Słynne projekty

Pocisk Polaris (Marynarka wojenna USA) 1958

CONCORDE 1964-1972

GIOTTO
(statek kosmiczny do obserwacji komety Halley'a) 1984

Sala koncertowa europejskiej stolicy kulturalnej w Porto
(Portugalia) 2001

Jak modelować projekty?
(Battersby 1967)

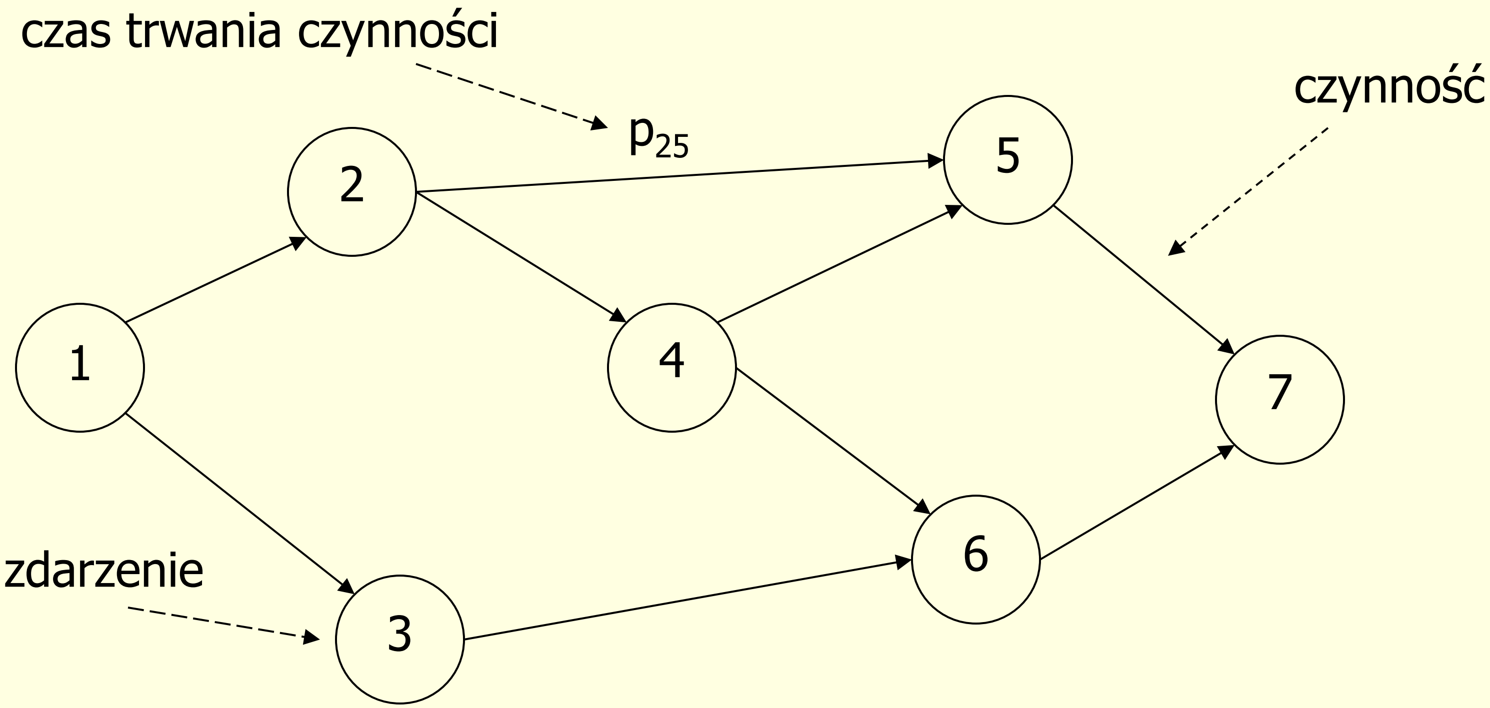
- Dyskretny i skończony zbiór czynności (zadań)
- Zbiór ograniczeń kolejnościowych
- Dyskretny i skończony zbiór atrybutów opisujących każdą czynność, takich jak:
  - czas realizacji,
  - koszt realizacji,
  - zapotrzebowanie na zasoby

Jak oceniać projekty?

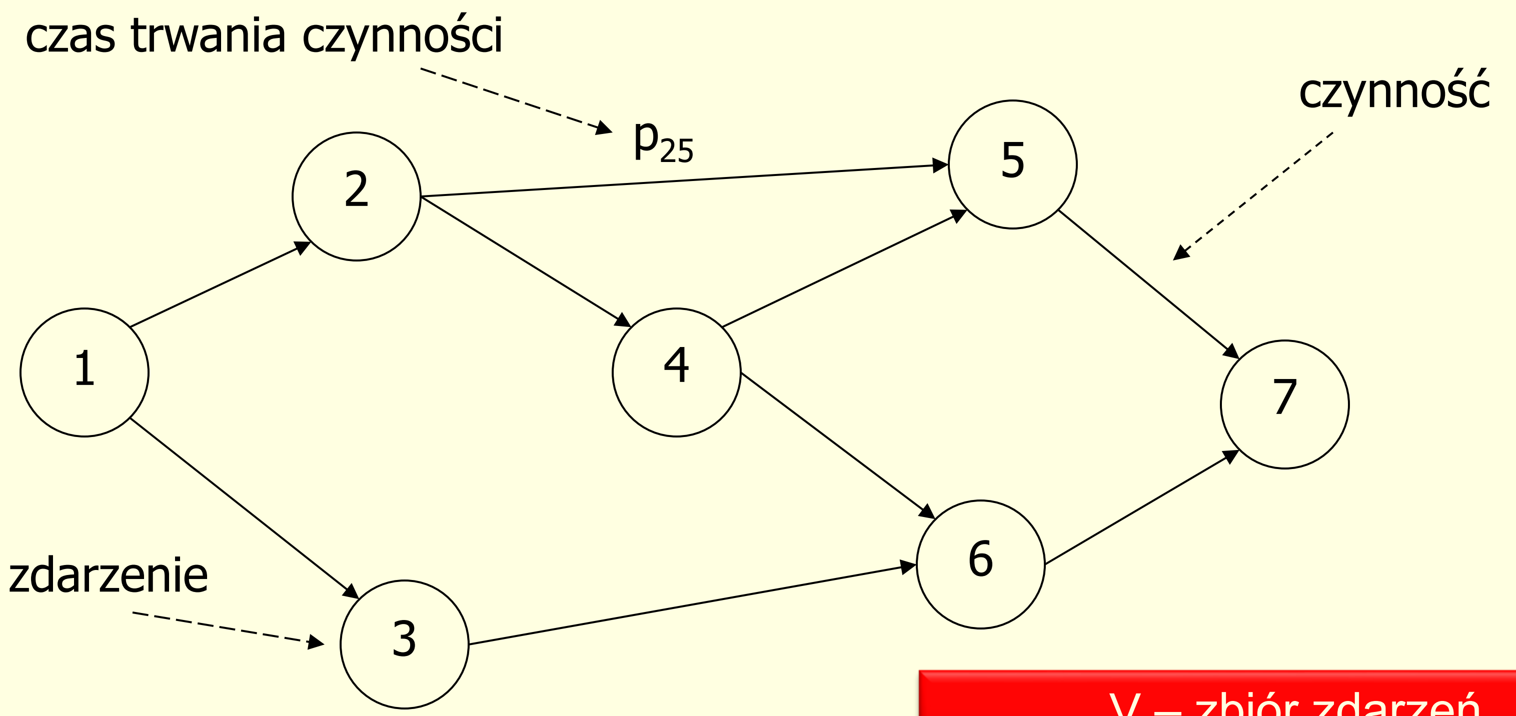
prof. Joanna Józefowska

- Dyskretny i skończony zbiór kryteriów, np.:
  - całkowity czas realizacji,
  - całkowity koszt realizacji,
  - ryzyko,
  - zaktualizowana wartość netto (NPV).

Sieć czynności



Sieć czynności



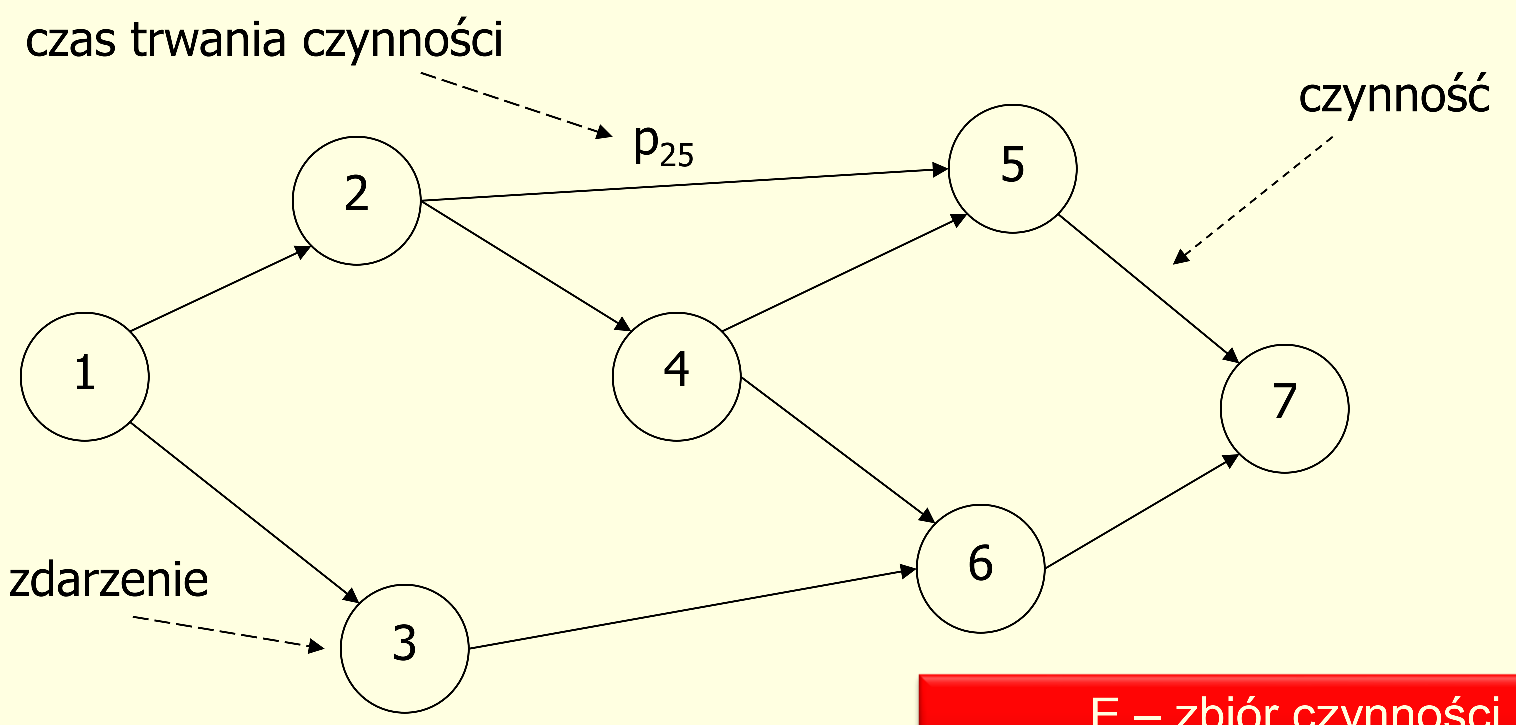
V – zbiór zdarzeń

n – liczba zdarzeń w projekcie

G = (V, E) – graf zależności kolejnościowych

p_{ij} – czas trwania czynności <i,j> i, j = 1, 2, ..., n

Sieć czynności



E – zbiór czynności

n – liczba czynności w projekcie

G = (V, E) – graf zależności kolejnościowych

p_{ij} – czas trwania czynności <i,j> i, j = 1, 2, ..., n

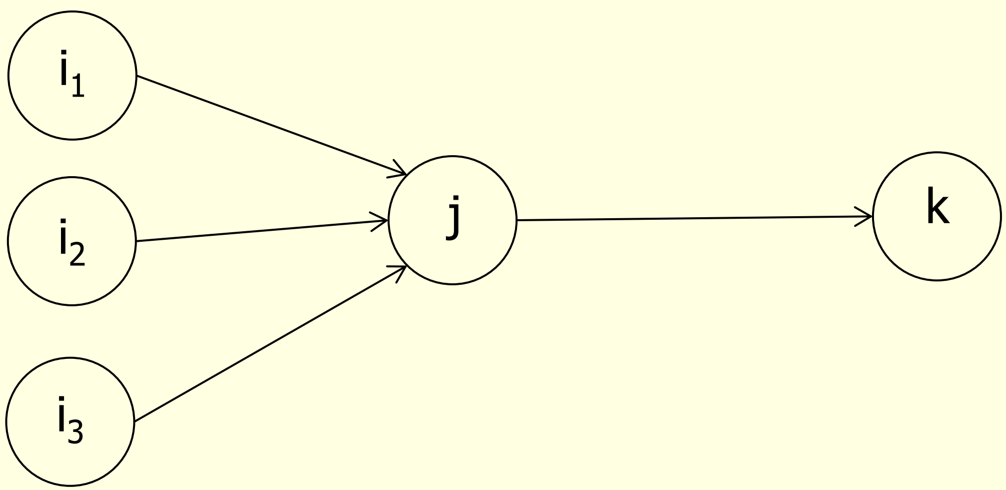
Sieć czynności

- Sieć czynności jest to sieć, której graf przedstawia strukturę kolejności realizacji poszczególnych czynności projektu, a funkcje określone na zbiorze łuków i wierzchołków tego grafu reprezentują informacje o charakterze techniczno-ekonomicznym związane z realizacją projektu.
- Czynność <i,j> to czynność, której zdarzeniem początkowym jest zdarzenie i, końcowym – zdarzenie j.

prof. Joanna Józefowska

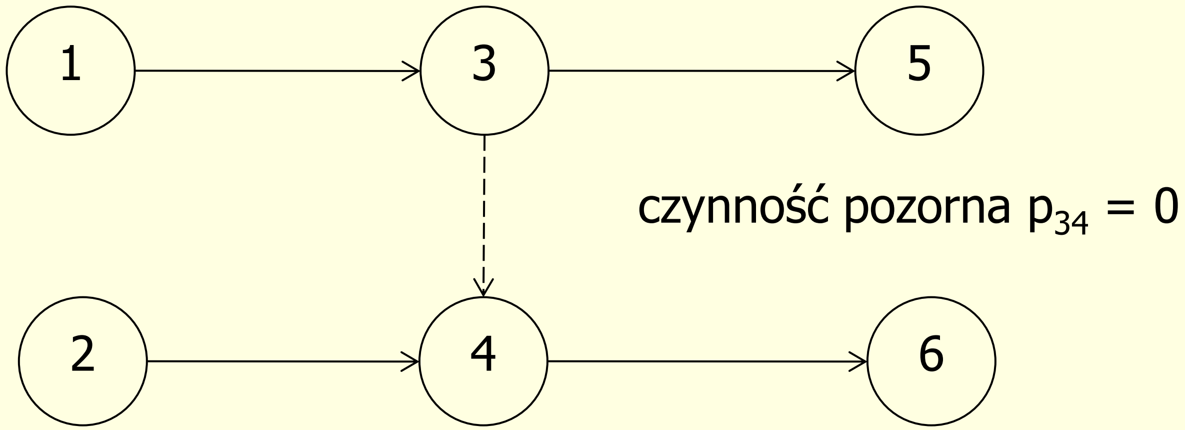
Następstwo zdarzeń w sieci

- Zdarzenie o numerze k wystąpi, gdy zostanie zakończona realizacja wszystkich czynności, dla których k jest zdarzeniem końcowym.
- Rozpoczęcie czynności <i,j> jest możliwe, gdy wystąpi zdarzenie i.



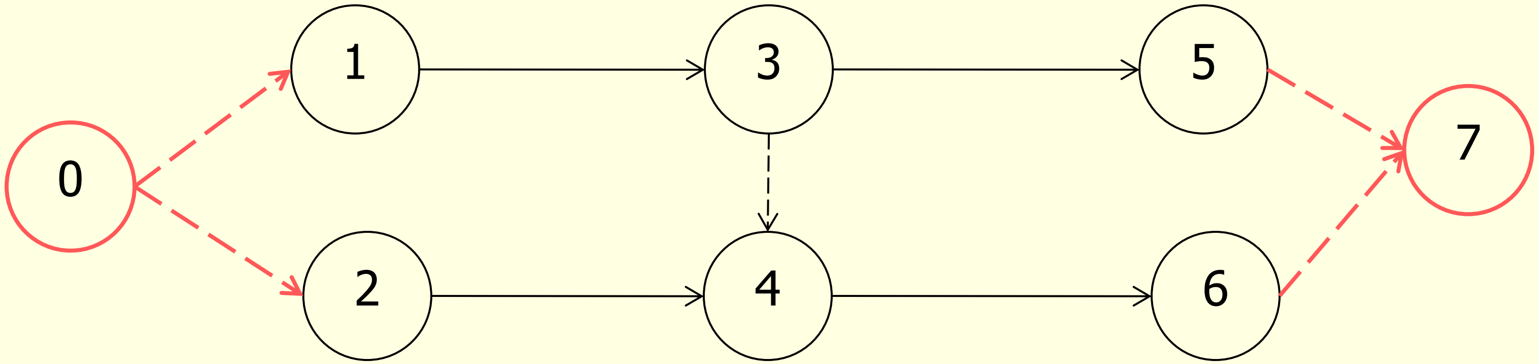
Czynności $<i_1, j>$, $<i_2, j>$, $<i_3, j>$ poprzedzają czynność $<j,k>$.

Następstwo zdarzeń w sieci



Sieć czynności jako graf

- Sieć czynności jest grafem
  - unigrafem (między dowolną parą wierzchołków występuje co najwyżej jeden łuk),
  - spójnym,
  - skierowanym,
  - nie zawierającym pętli ani dróg cyklicznych,
  - ma jedno zdarzenie początkowe i jedno zdarzenie końcowe.



Sieć czynności jako graf

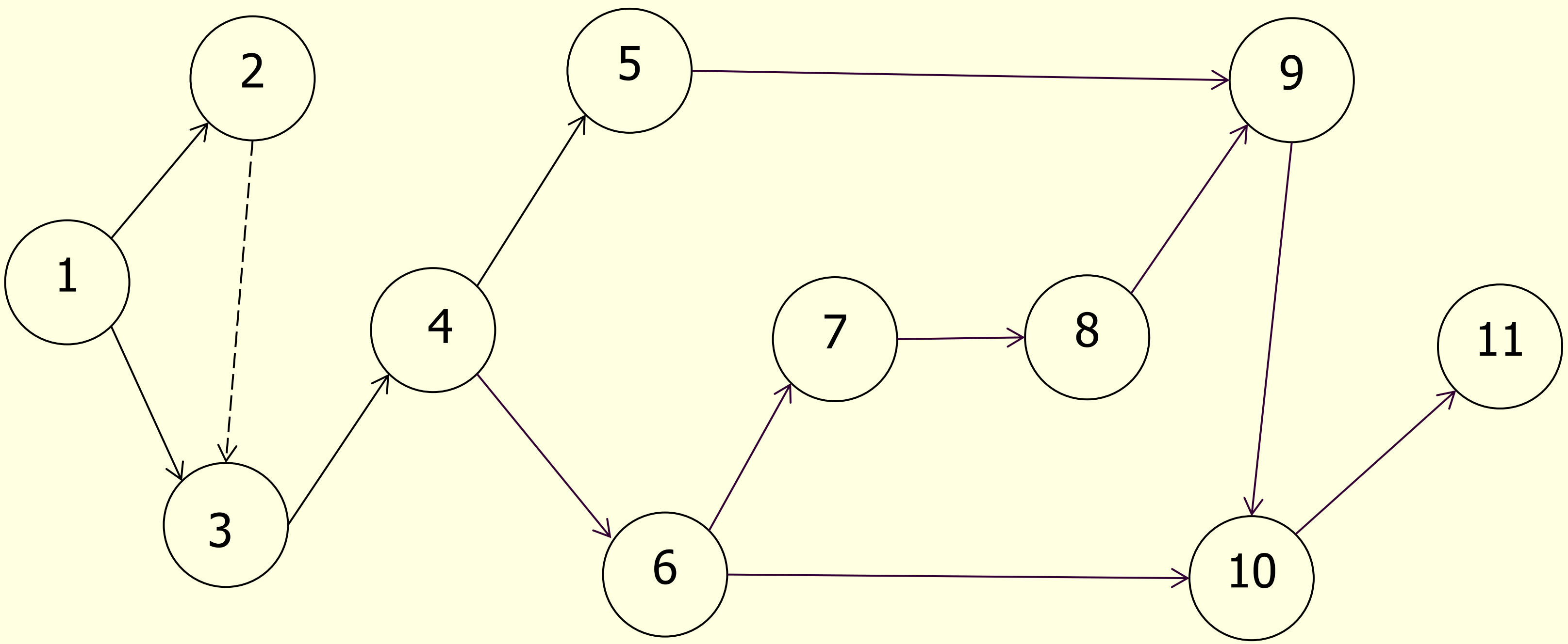
- Kolejność czynności w sieci wynika z ograniczeń modelowanego projektu. Mogą to być ograniczenia:
  - technologiczne,
  - o charakterze czasowym,
  - wynikające z niepodzielności i niesubstytucyjności zasobów,
  - o charakterze bilansowym.

Przykład
wprowadzenie na rynek nowego wyrobu

- <1,3> badanie popytu na wyroby
- <1,2> nabycie surowców na prototypy
- <3,4> wyprodukowanie prototypów i ocena ich jakości
- <4,5> wybór opakowań
- <4,6> nabycie surowców do produkcji
- <5,9> nabycie opakowań
- <6,7> analiza kosztów produkcji
- <6,10> reklama i zbieranie zamówień
- <7,8> analiza ekonomicznych parametrów decyzji
- <8,9> proces produkcji wyrobu
- <9,10> pakowanie wyrobu gotowego
- <10,11> wysyłka do handlu

Przykład

<1,3>	badanie popytu na wyroby
<1,2>	nabycie surowców na prototypy
<3,4>	wyprodukowanie prototypów i ocena ich jakości
<4,5>	wybór opakowań
<4,6>	nabycie surowców do produkcji
<5,9>	nabycie opakowań
<6,7>	analiza kosztów produkcji
<6,10>	reklama i zbieranie zamówień
<7,8>	analiza ekonomicznych parametrów decyzji
<8,9>	proces produkcji wyrobu
<9,10>	pakowanie wyrobu gotowego
<10,11>	wysyłka do handlu



Analiza czasu realizacji projektu

- Metoda ścieżki krytycznej – Critical Path Method (CPM)
- Metoda PERT – Project Evaluation and Review Technique

Algorytm porządkowania warstwowego

prof. Joanna Józefowska

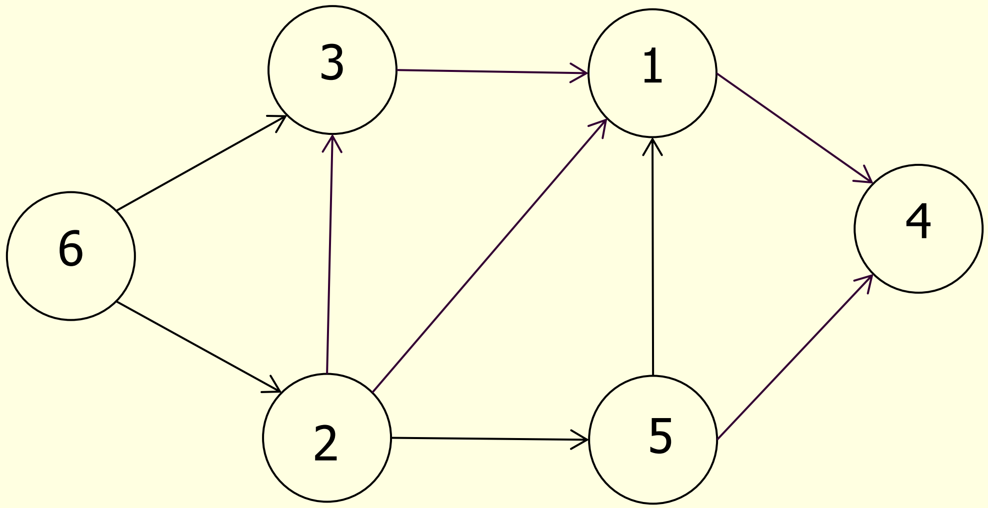
1. Zbuduj binarną macierz przejść dla sieci czynności.
2. k:=0;
3. Do warstwy w_k zalicz zdarzenia odpowiadające zerowym kolumnom aktualnej macierzy przejść; k:=k+1;
4. Wykreśl z macierzy przejść zerowe kolumny oraz wiersze o tych samych numerach.
5. Jeżeli są jeszcze niewykreślone kolumny, to wróć do kroku 3 w przeciwnym razie stop.

prof. Joanna Józefowska

Algorytm porządkowania warstwowego

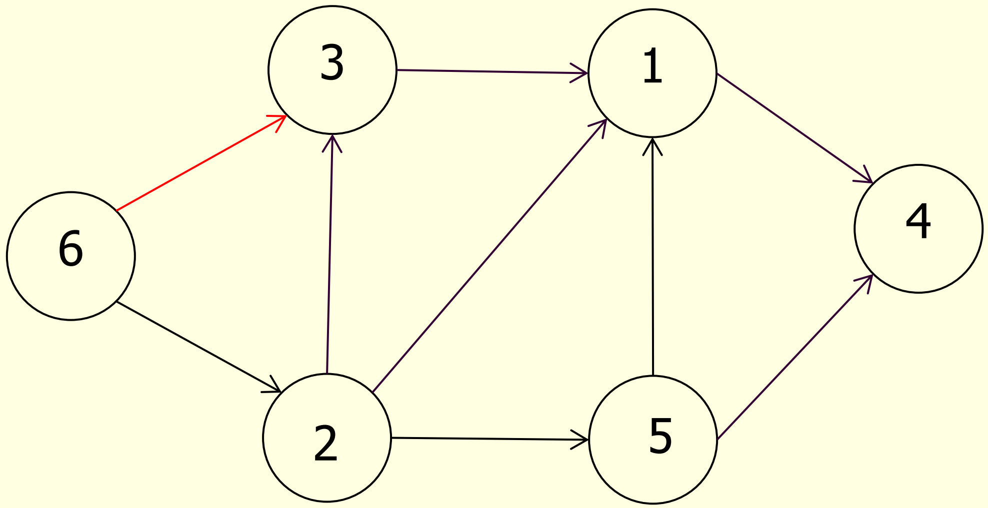
1. Zbuduj binarną macierz przejść dla sieci czynności.
2. k:=0;
3. Do warstwy w_k zalicz zdarzenia odpowiadające zerowym kolumnom aktualnej macierzy przejść; k:=k+1;
4. Wykreśl z macierzy przejść zerowe kolumny oraz wiersze o tych samych numerach.
5. Jeżeli są jeszcze niewykreślone kolumny, to wróć do kroku 3 w przeciwnym razie stop.

Przykład



	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

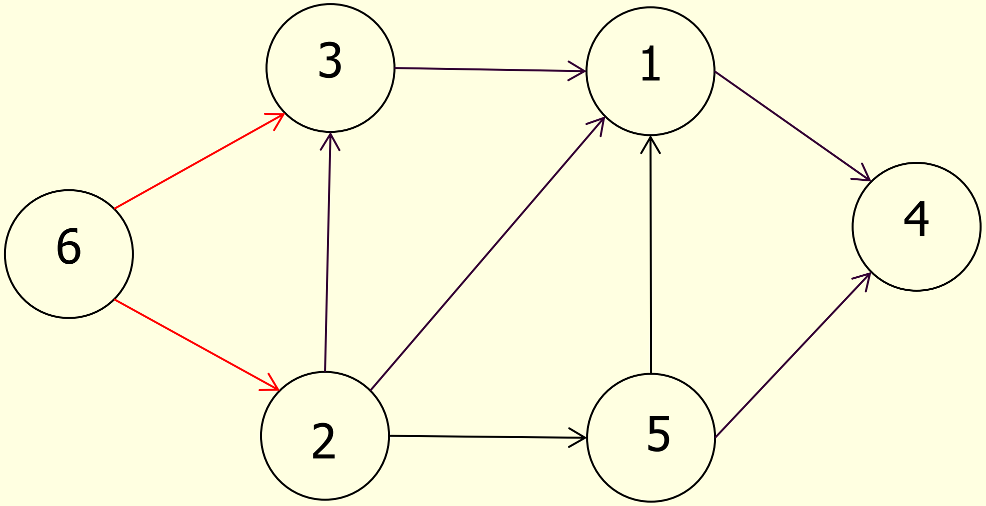
Przykład



	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6			1			

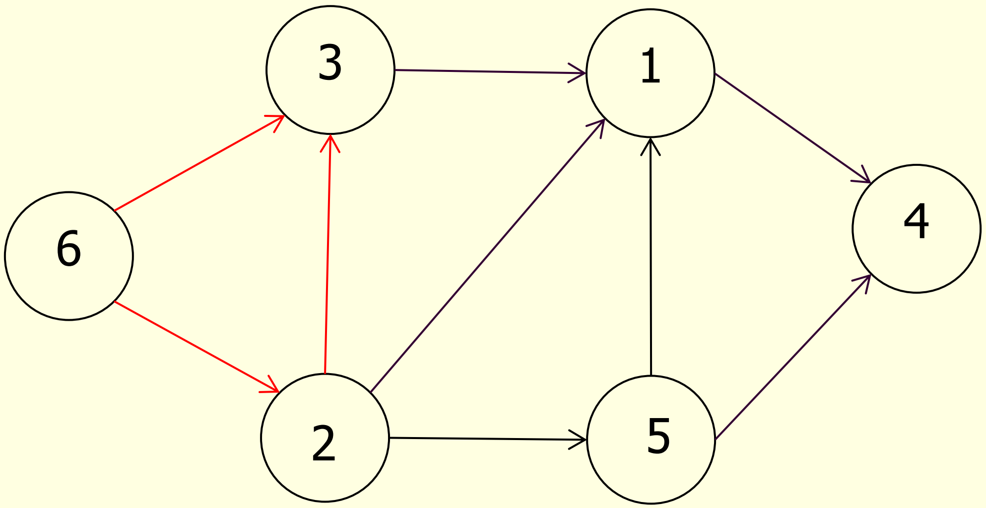
prof. Joanna Józefowska

Przykład



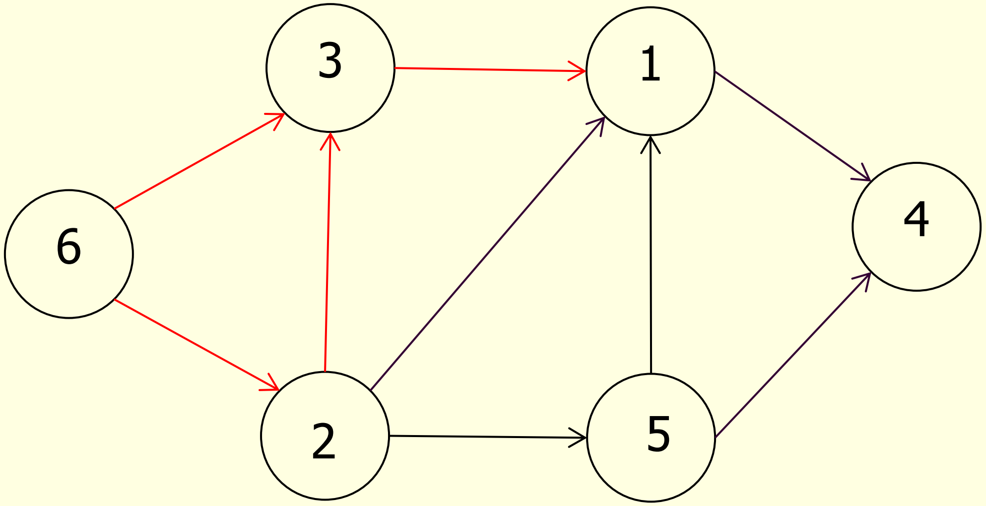
	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6		1	1			

Przykład



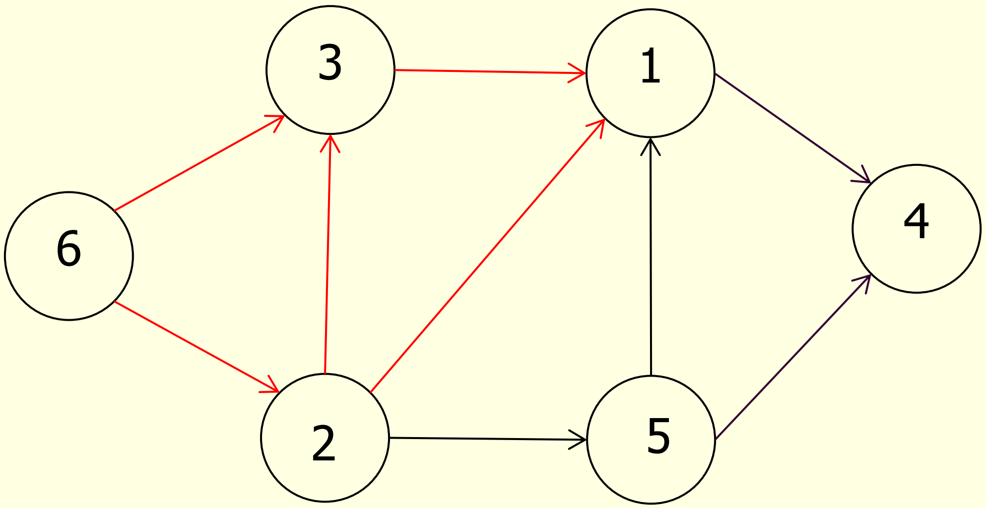
	1	2	3	4	5	6
1						
2			1			
3						
4						
5						
6		1	1			

Przykład



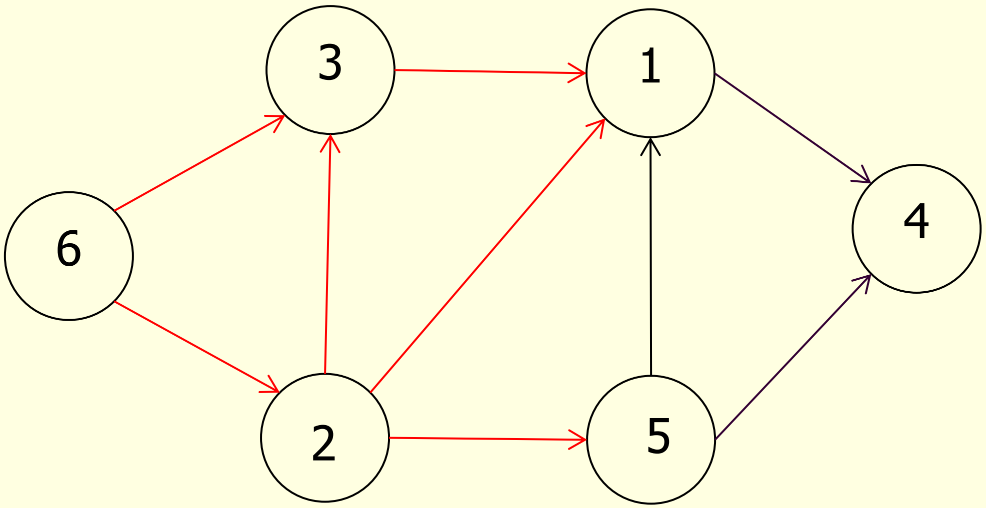
	1	2	3	4	5	6
1						
2			1			
3	1					
4						
5						
6		1	1			

Przykład



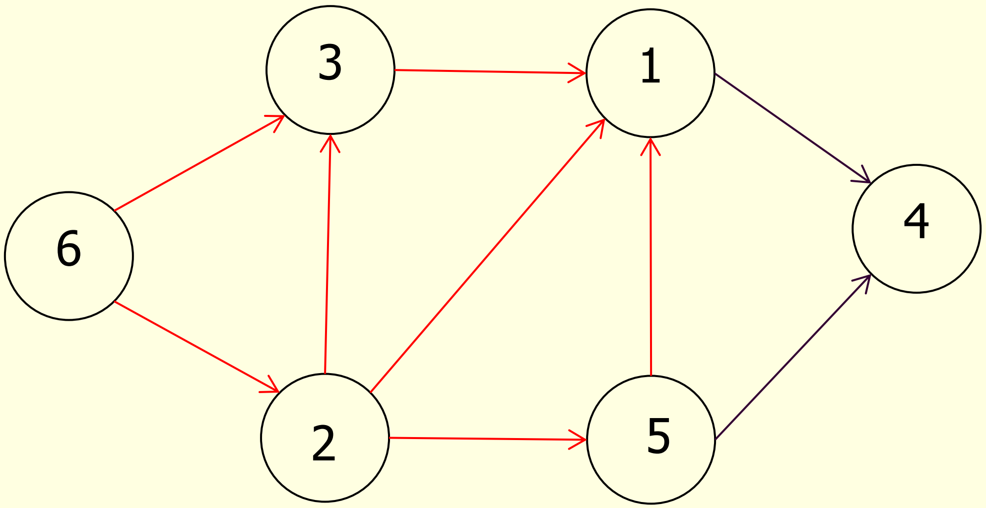
	1	2	3	4	5	6
1						
2	1		1			
3	1					
4						
5						
6		1	1			

Przykład



	1	2	3	4	5	6
1						
2	1		1		1	
3	1					
4						
5						
6		1	1			

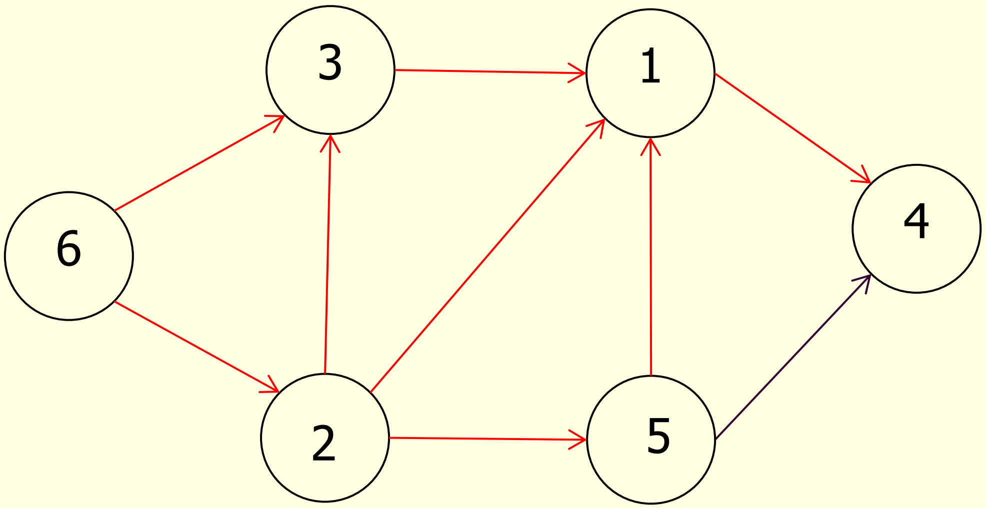
Przykład



	1	2	3	4	5	6
1						
2	1		1		1	
3	1					
4						
5	1					
6		1	1			

prof. Joanna Józefowska

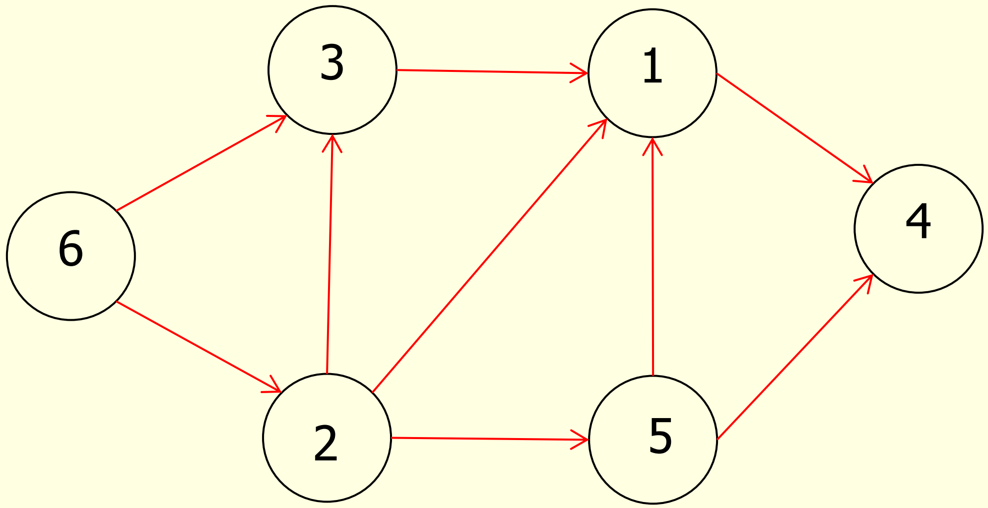
Przykład



	1	2	3	4	5	6
1				1		
2	1		1		1	
3	1					
4						
5	1					
6		1	1			

prof. Joanna Józefowska

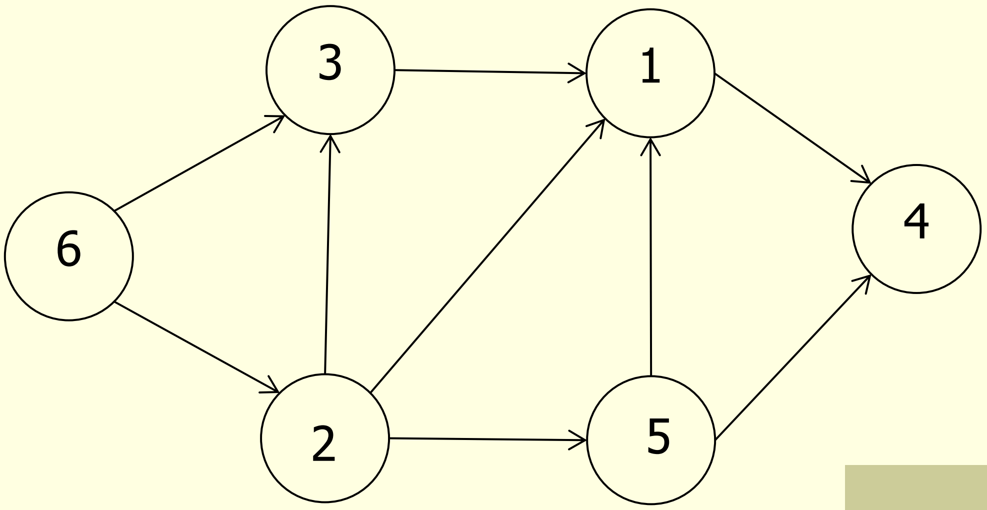
Przykład



	1	2	3	4	5	6
1				1		
2	1		1		1	
3	1					
4						
5	1			1		
6		1	1			

prof. Joanna Józefowska

Przykład



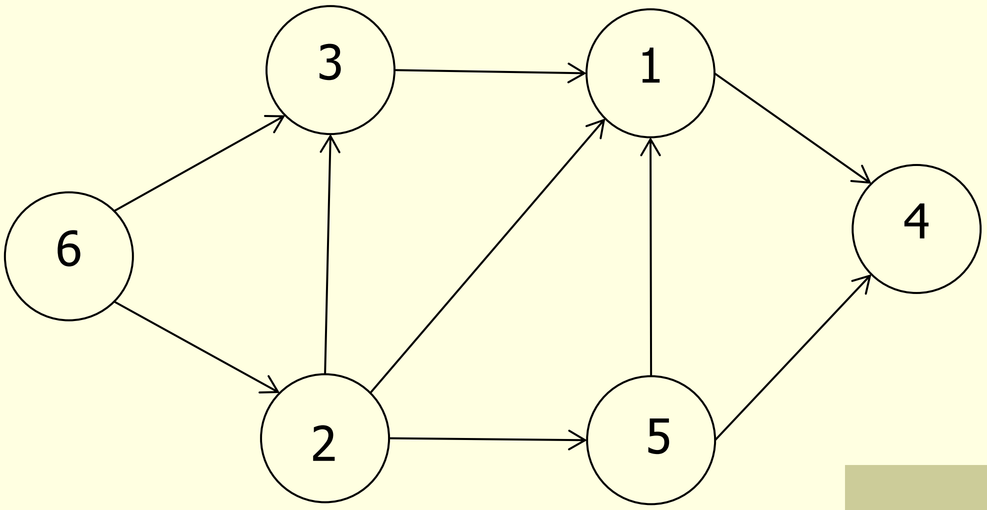
Binarna macierz przejść						
	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0

prof. Joanna Józefowska

Algorytm porządkowania warstwowego

1. Zbuduj binarną macierz przejść dla sieci czynności.
2. k:=0;
3. Do warstwy w_k zalicz zdarzenia odpowiadające zerowym kolumnom aktualnej macierzy przejść; k:=k+1;
4. Wykreśl z macierzy przejść zerowe kolumny oraz wiersze o tych samych numerach.
5. Jeżeli są jeszcze niewykreślone kolumny, to wróć do kroku 3 w przeciwnym razie stop.

Przykład



$k = 0$ $\qquad w_0 = \{6\}$

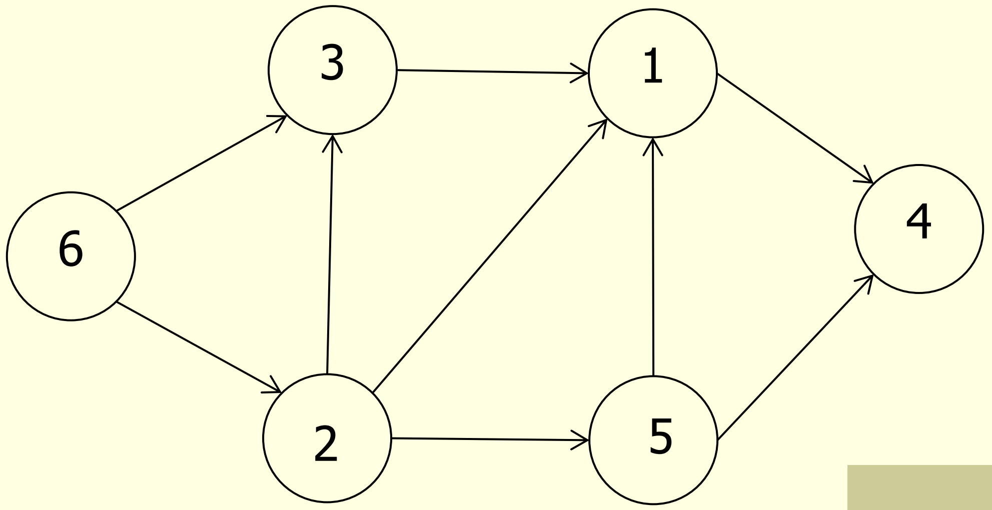
$k = 1$

Binarna macierz przejść						
	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0

Algorytm porządkowania warstwowego

1. Zbuduj binarną macierz przejść dla sieci czynności.
2. k:=0;
3. Do warstwy w_k zalicz zdarzenia odpowiadające zerowym kolumnom aktualnej macierzy przejść; k:=k+1;
4. Wykreśl z macierzy przejść zerowe kolumny oraz wiersze o tych samych numerach.
5. Jeżeli są jeszcze niewykreślone kolumny, to wróć do kroku 3 w przeciwnym razie stop.

Przykład



$w_0 = \{6\}$

k = 1

Binarna macierz przejść						
	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0

prof. Joanna Józefowska

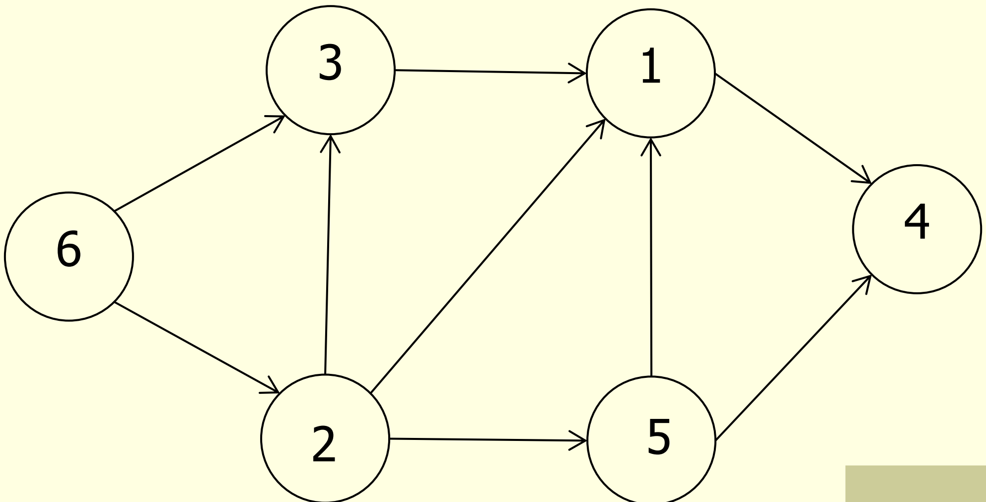
Algorytm porządkowania warstwowego

1. Zbuduj binarną macierz przejść dla sieci czynności.
2. k:=0;
3. Do warstwy w_k zalicz zdarzenia odpowiadające zerowym kolumnom aktualnej macierzy przejść; k:=k+1;
4. Wykreśl z macierzy przejść zerowe kolumny oraz wiersze o tych samych numerach.
5. Jeżeli są jeszcze niewykreślone kolumny, to wróć do kroku 3 w przeciwnym razie stop.

Algorytm porządkowania warstwowego

1. Zbuduj binarną macierz przejść dla sieci czynności.
2. k:=0;
3. Do warstwy w_k zalicz zdarzenia odpowiadające zerowym kolumnom aktualnej macierzy przejść; k:=k+1;
4. Wykreśl z macierzy przejść zerowe kolumny oraz wiersze o tych samych numerach.
5. Jeżeli są jeszcze niewykreślone kolumny, to wróć do kroku 3 w przeciwnym razie stop.

Przykład



$w_0 = \{6\}$

$w_1 = \{2\}$

k = 1

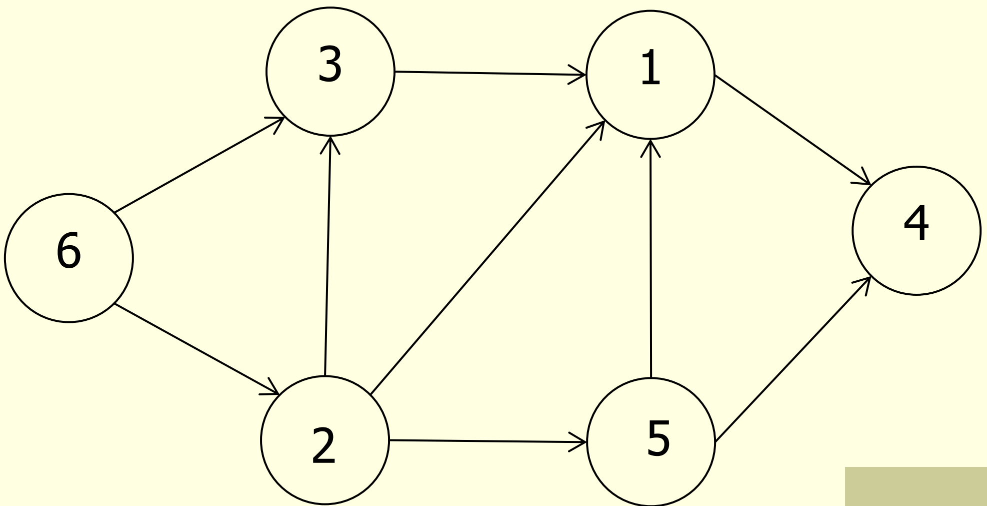
k = 2

Binarna macierz przejść						
	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0

Algorytm porządkowania warstwowego

1. Zbuduj binarną macierz przejść dla sieci czynności.
2. k:=0;
3. Do warstwy w_k zalicz zdarzenia odpowiadające zerowym kolumnom aktualnej macierzy przejść; k:=k+1;
4. Wykreśl z macierzy przejść zerowe kolumny oraz wiersze o tych samych numerach.
5. Jeżeli są jeszcze niewykreślone kolumny, to wróć do kroku 3 w przeciwnym razie stop.

Przykład



$w_0 = \{6\}$

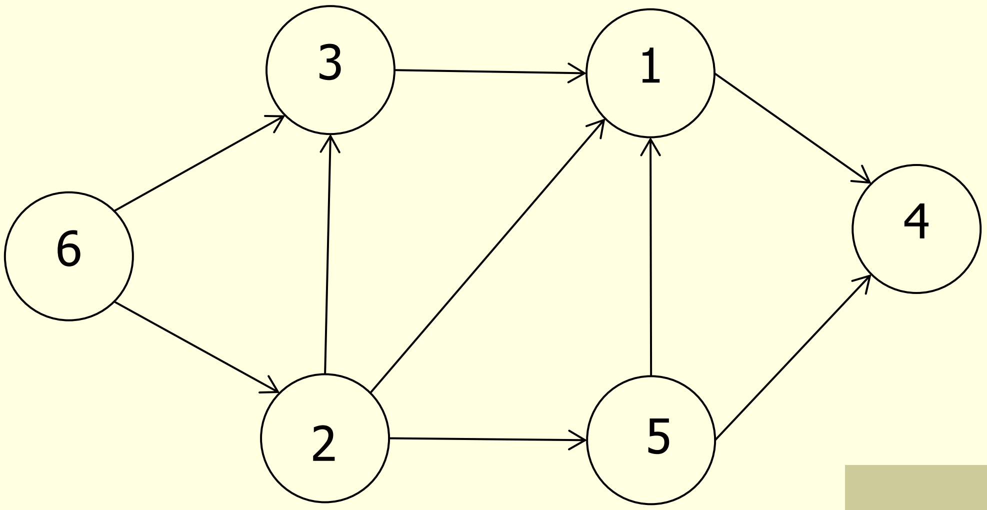
$w_1 = \{2\}$

k = 2

Binarna macierz przejść						
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	0	0	1	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0

prof. Joanna Józefowska

Przykład



$w_0 = \{6\}$

$w_1 = \{2\}$

$w_2 = \{3, 5\}$

k = 2

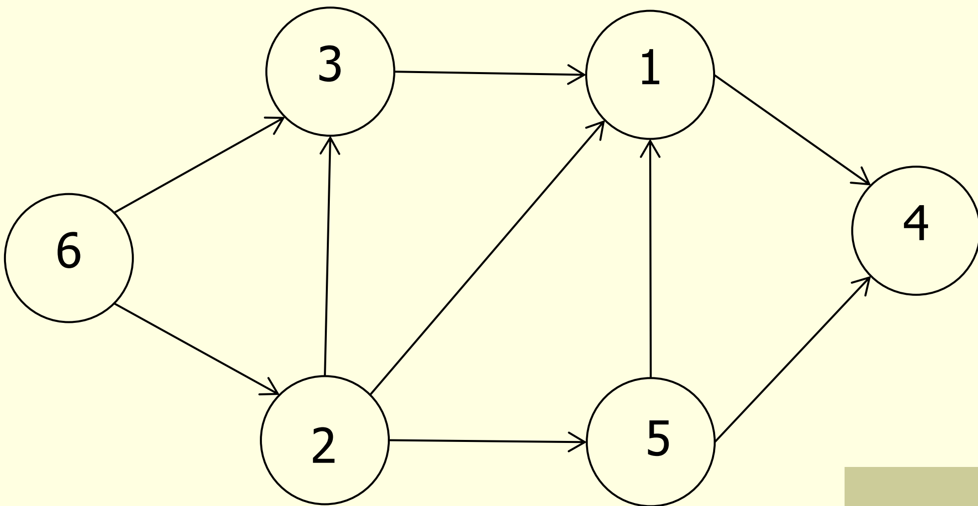
k = 3

Binarna macierz przejść

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0

prof. Joanna Józefowska

Przykład



$w_0 = \{6\}$

$w_1 = \{2\}$

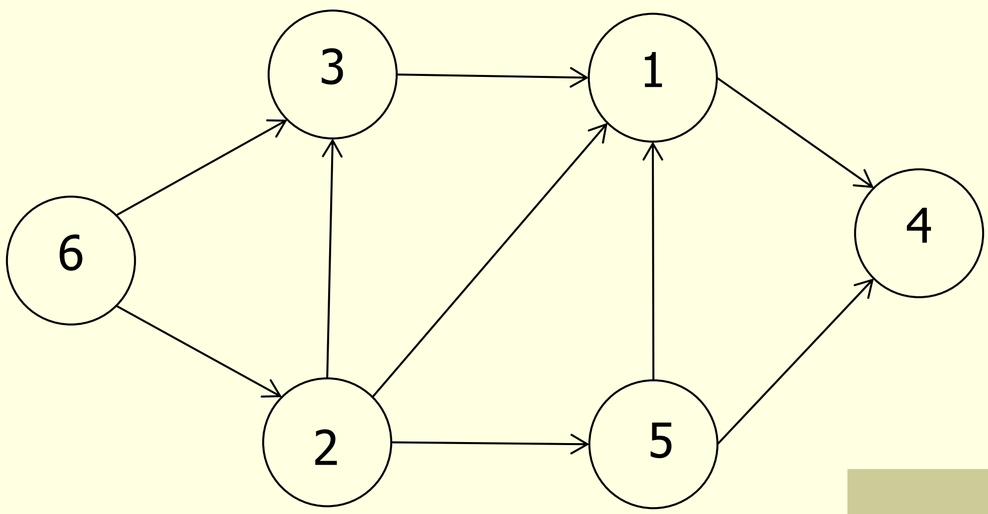
$w_2 = \{3, 5\}$

$k = 3$

Binarna macierz przejść						
	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0

prof. Joanna Józefowska

Przykład



Binarna macierz przejść

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0

$w_0 = \{6\}$

$w_1 = \{2\}$

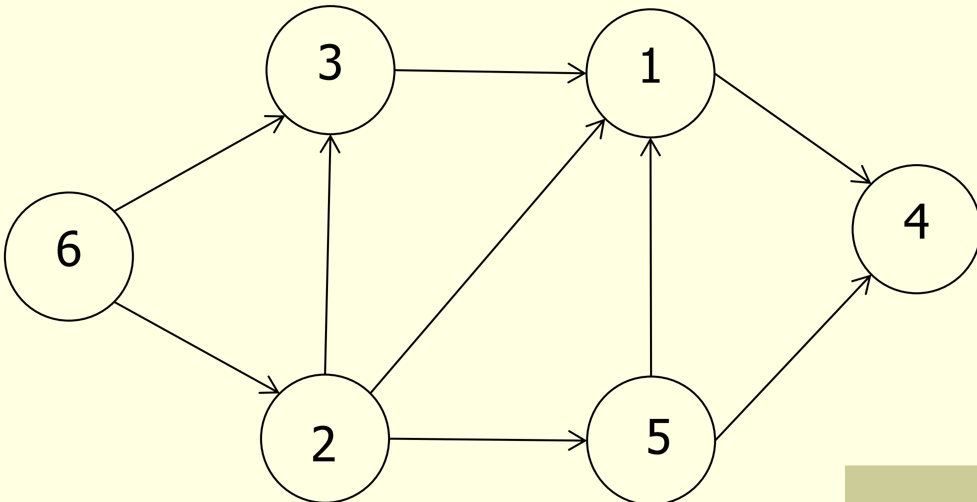
$w_2 = \{3, 5\}$

$k = 3 \qquad w_3 = \{1\}$

$k = 4 \qquad w_4 = \{4\}$

prof. Joanna Józefowska

Przykład



$w_0 = \{6\}$

$w_1 = \{2\}$

$w_2 = \{3, 5\}$

$w_3 = \{1\}$

$k = 4$

$w_4 = \{4\}$

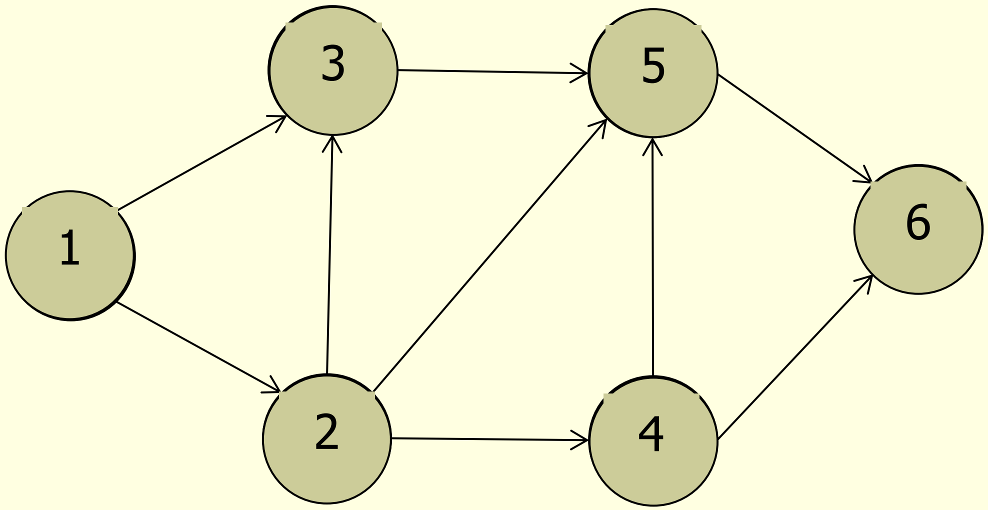
Binarna macierz przejść

	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	1	0	0	1	0	0
6	0	1	1	0	0	0

Algorytm porządkowania warstwowego

1. Zbuduj binarną macierz przejść dla sieci czynności.
2. k:=0;
3. Do warstwy w_k zalicz zdarzenia odpowiadające zerowym kolumnom aktualnej macierzy przejść; k:=k+1;
4. Wykreśl z macierzy przejść zerowe kolumny oraz wiersze o tych samych numerach.
5. Jeżeli są jeszcze niewykreślone kolumny, to wróć do kroku 3 w przeciwnym razie stop.

Przykład



$w_0 = \{6\}$

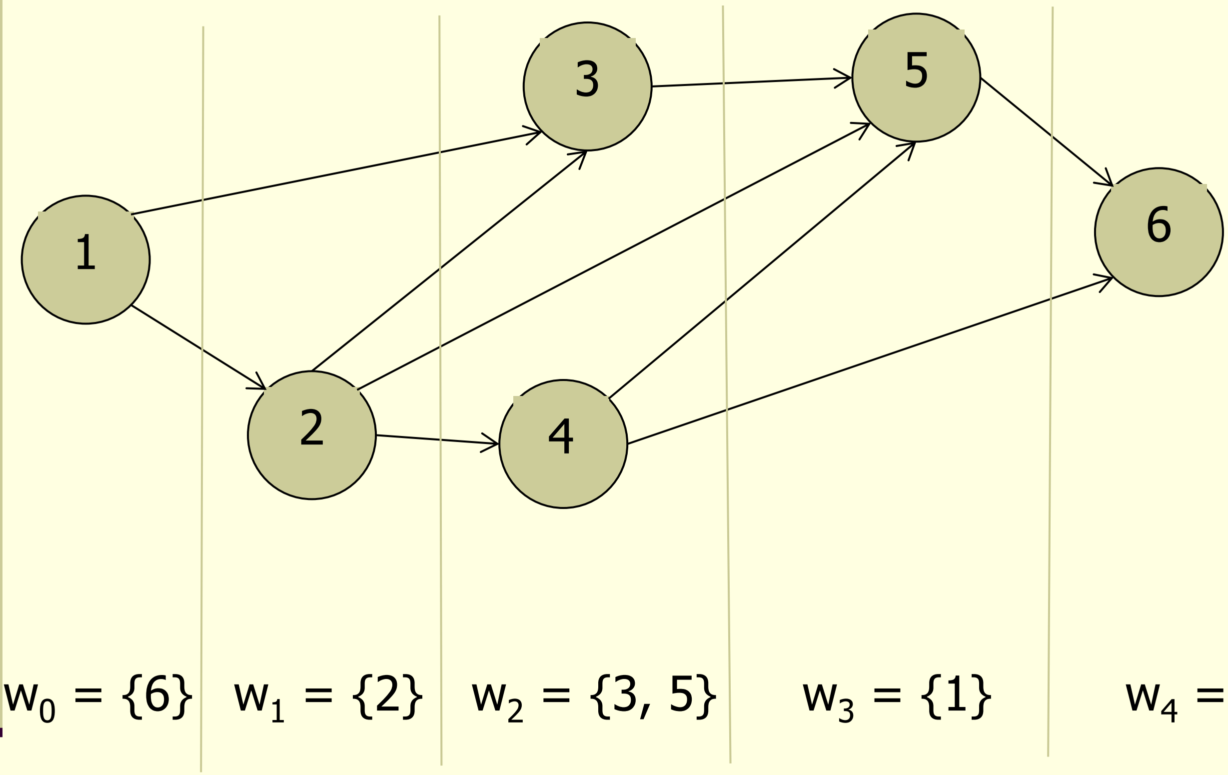
$w_1 = \{2\}$

$w_2 = \{3, 5\}$

$w_3 = \{1\}$

$w_4 = \{4\}$

Przykład



$w_0 = \{6\}$ $w_1 = \{2\}$ $w_2 = \{3, 5\}$ $w_3 = \{1\}$ $w_4 = \{4\}$

prof. Joanna Józefowska

Analiza projektu

- czas realizacji przedsięwzięcia,
- stopień równomierności wykorzystania zasobów w czasie
  - zamrożenie środków obrotowych,
  - wielkość przestojów maszyn i urządzeń
- całkowity koszt realizacji przedsięwzięcia,
- ryzyko przekroczenia terminu realizacji lub budżetu,
- odporność harmonogramu na zakłócenia.

kryteria optymalności

Metoda ścieżki krytycznej (CPM)

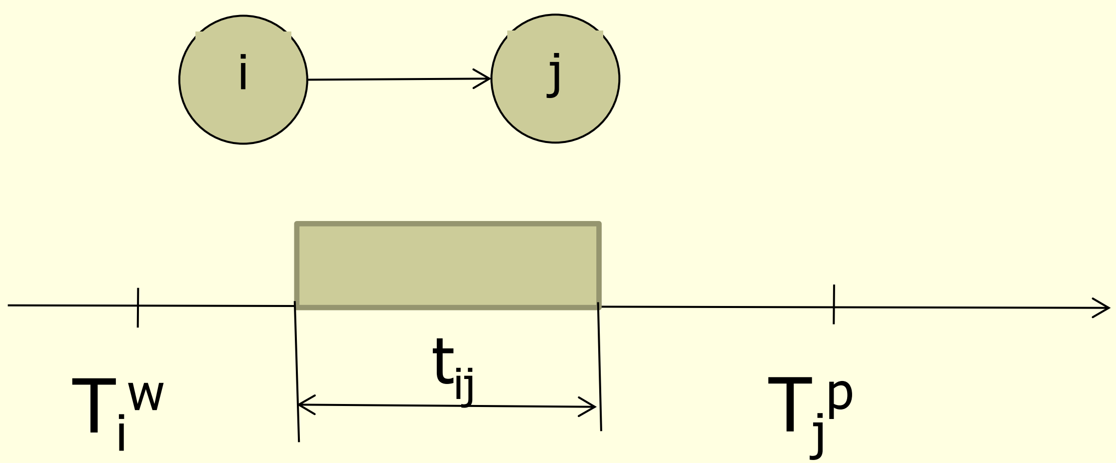
- CPM – Critical Path Method
- pierwsza metoda analizy sieciowej (ok. 1956)
- sieć jest w postaci kanonicznej (deterministyczna struktura sieci i czasy trwania czynności)
- znajduje najkrótszy możliwy czas realizacji projektu

CPM – oznaczenia

przedział na osi czasu

punkt na osi czasu

- t_{ij} – czas trwania czynności <i, j>
- T_i^w – najwcześniejszy możliwy termin wystąpienia zdarzenia i
- T_j^p – najpóźniejszy dopuszczalny termin wystąpienia zdarzenia i



prof. Joanna Józefowska

prof. Joanna Józefowska

CPM - założenia

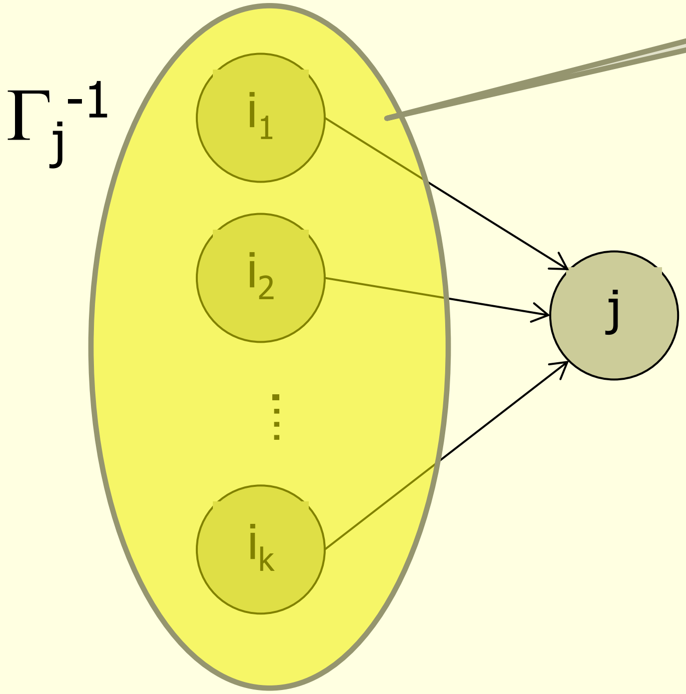
- jedno zdarzenie początkowe
- jedno zdarzenie końcowe
- zdarzenia ponumerowane zgodnie z ich następstwem w czasie (algorytm porządkowania warstwowego)
- $T_1^w = 0$
- $T_n^p = T_n^w$

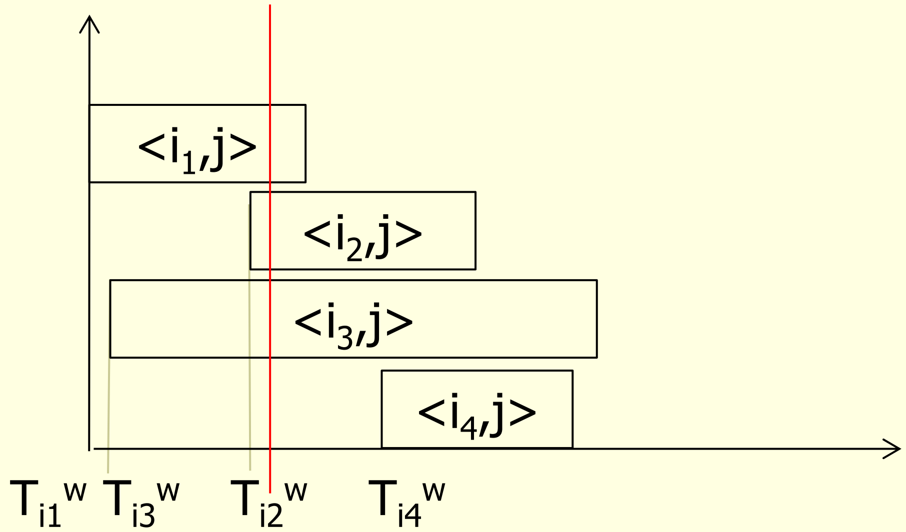
CPM - założenia

- jedno zdarzenie początkowe
- jedno zdarzenie końcowe
- zdarzenia ponumerowane zgodnie z ich następstwem w czasie (algorytm porządkowania warstwowego)
- $T_1^w = 0$
- $T_n^p = T_n^w$

CPM – obliczanie T_j^w

Zbiór poprzedników zdarzenia j



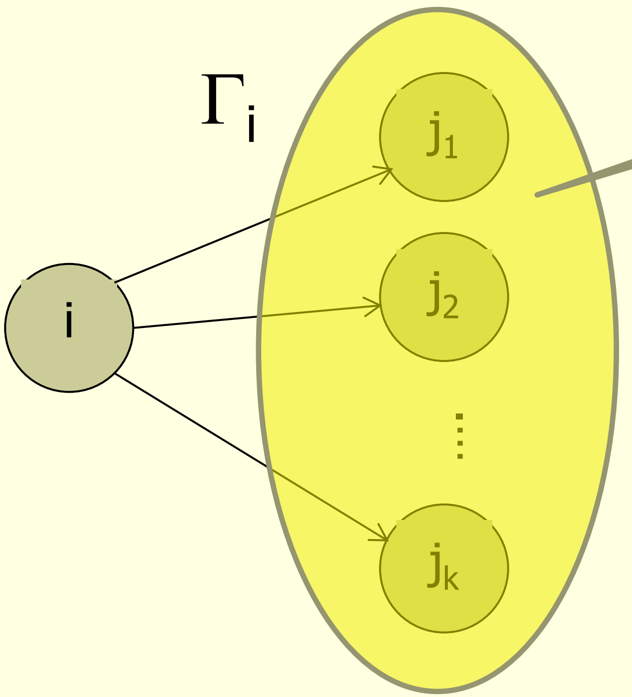


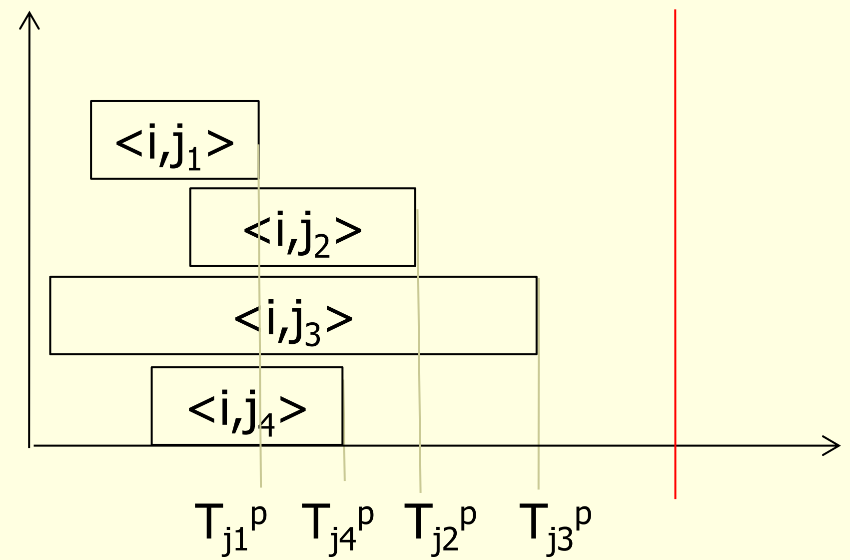
$$T_j^w = \max_{i \in \Gamma_j^{-1}} \left\{ T_i^w + t_{ij} \right\}, \quad j = 2, \ldots, n$$

CPM - założenia

- jedno zdarzenie początkowe
- jedno zdarzenie końcowe
- zdarzenia ponumerowane zgodnie z ich następstwem w czasie (algorytm porządkowania warstwowego)
- $T_1^w = 0$
- $T_n^p = T_n^w$

CPM – obliczanie T_i^p

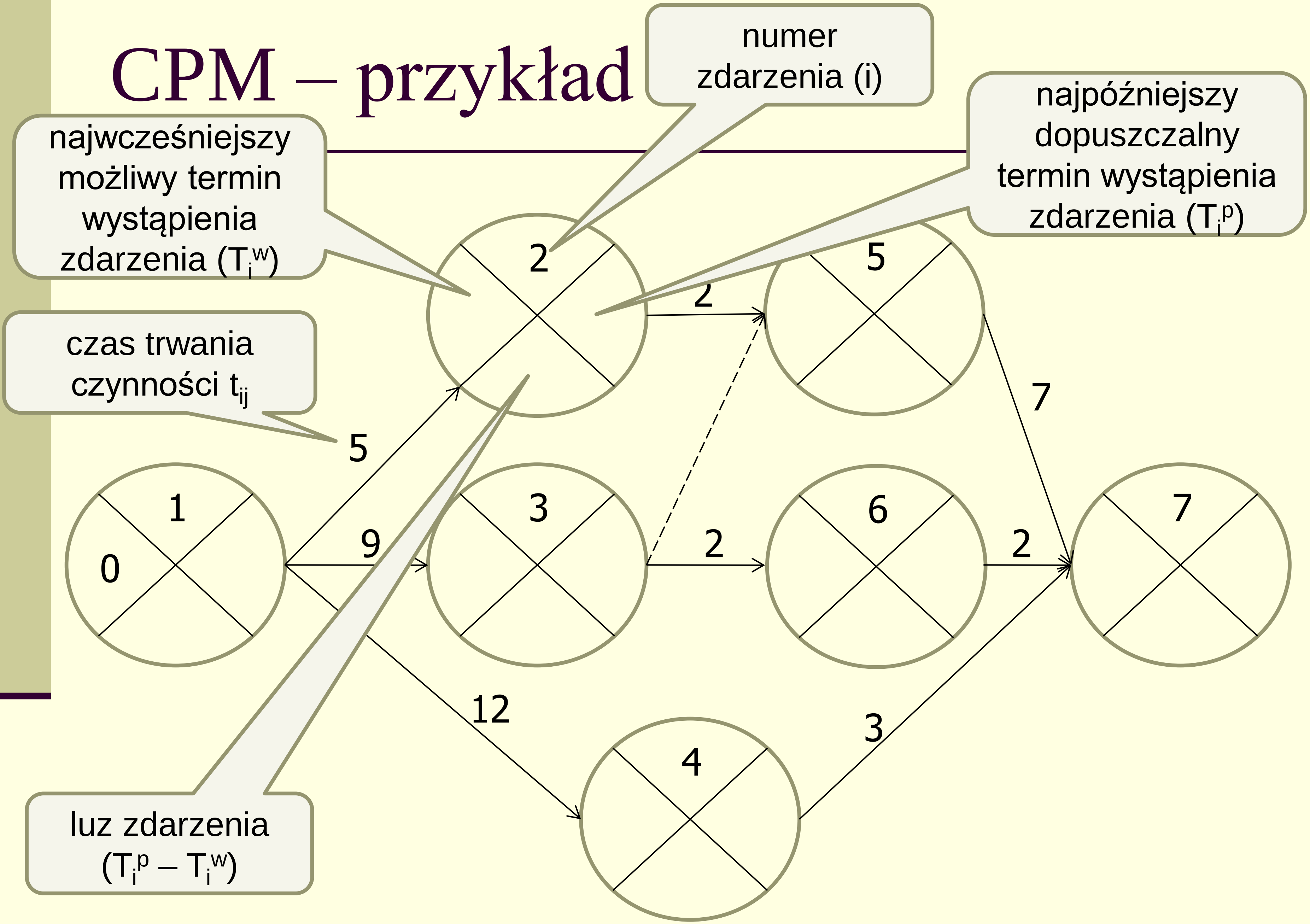




$$T_i^p = \min_{j \in \Gamma_i} \left\{ T_j^p - t_{ij} \right\},\ i = 1,2,\ldots,n-1$$

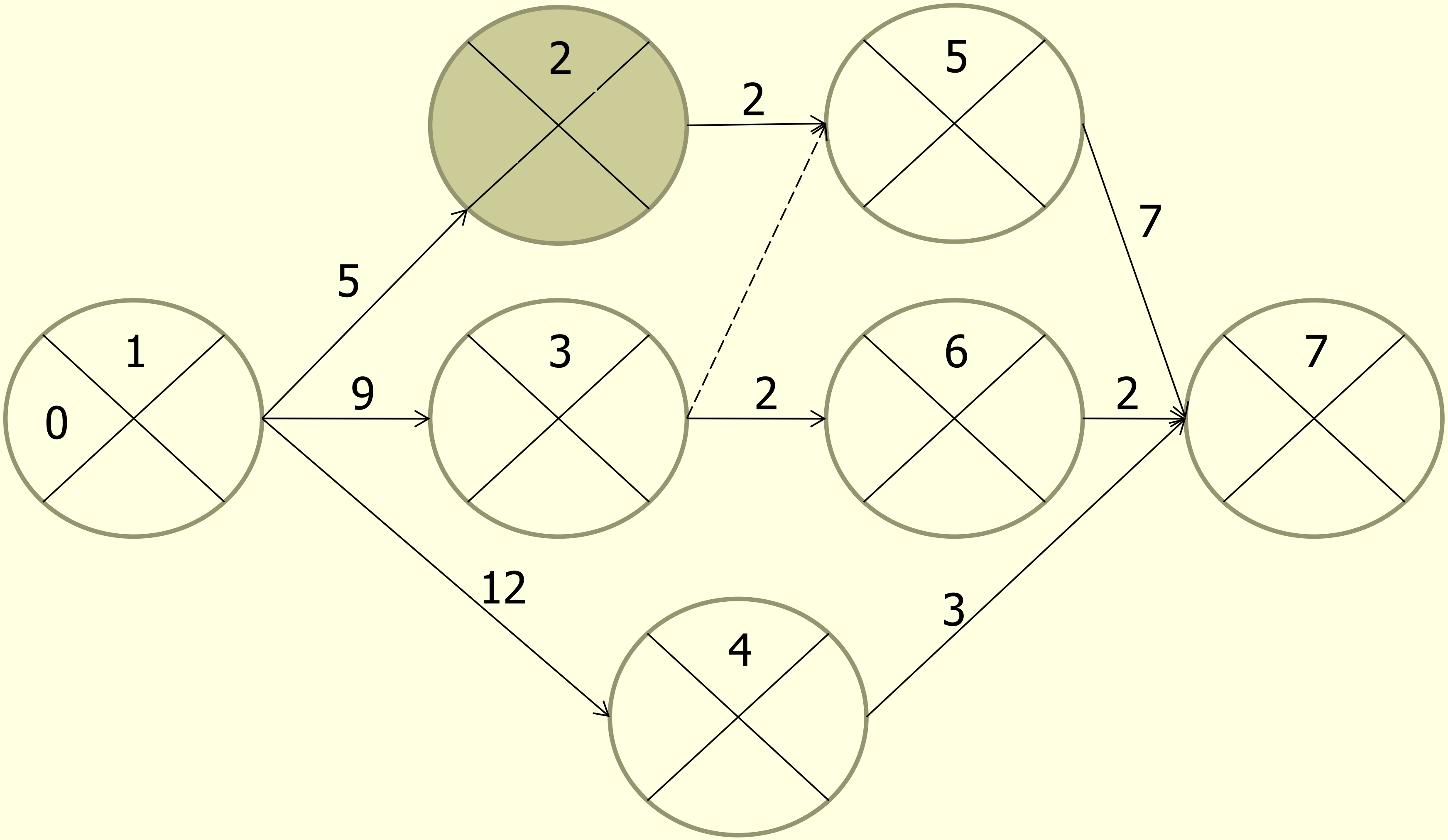
Luzem zdarzenia nazywamy liczbę $L_i = T_i^p - T_i^w$.

CPM – przykład



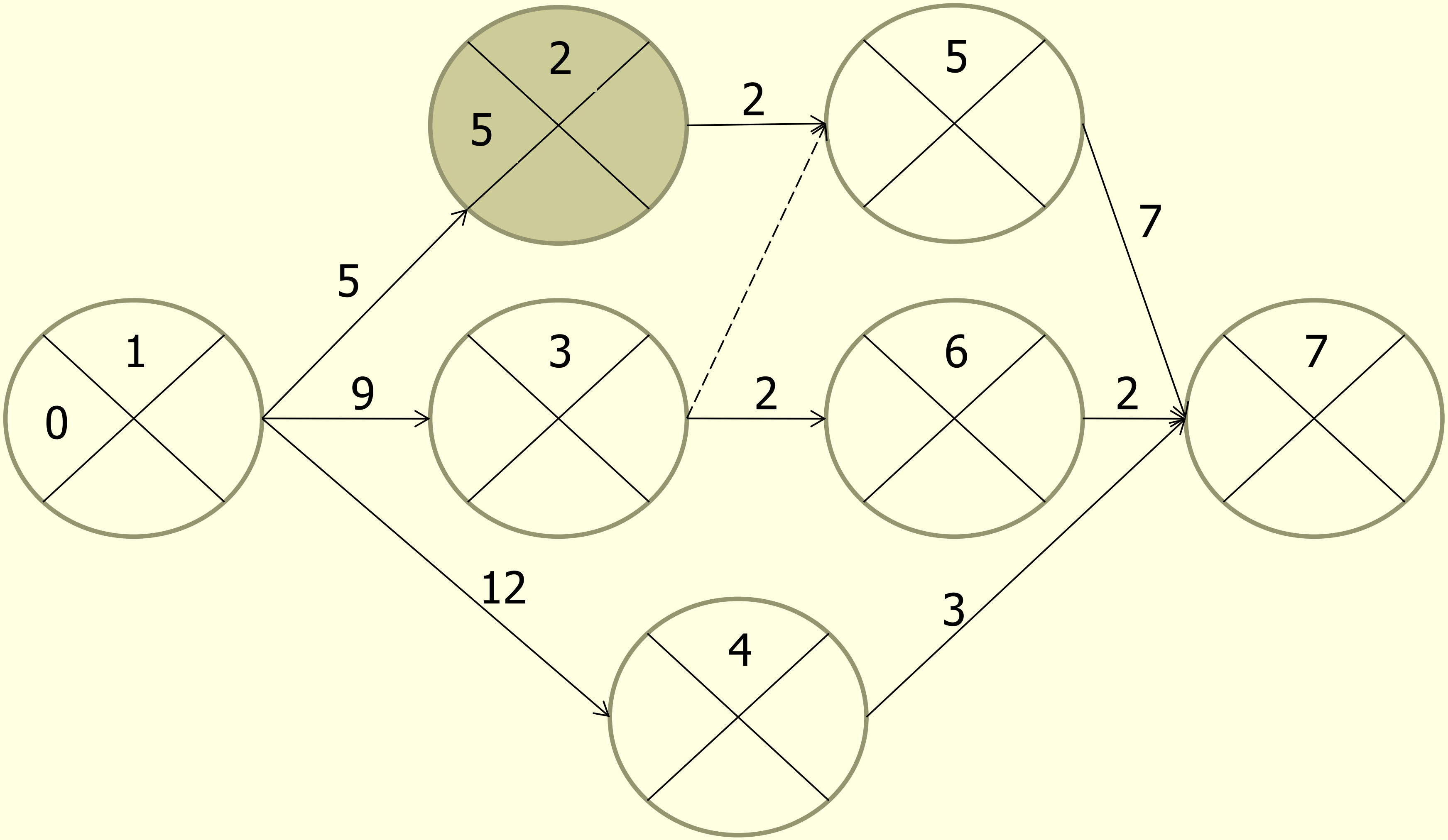
prof. Joanna Józefowska

CPM – przykład



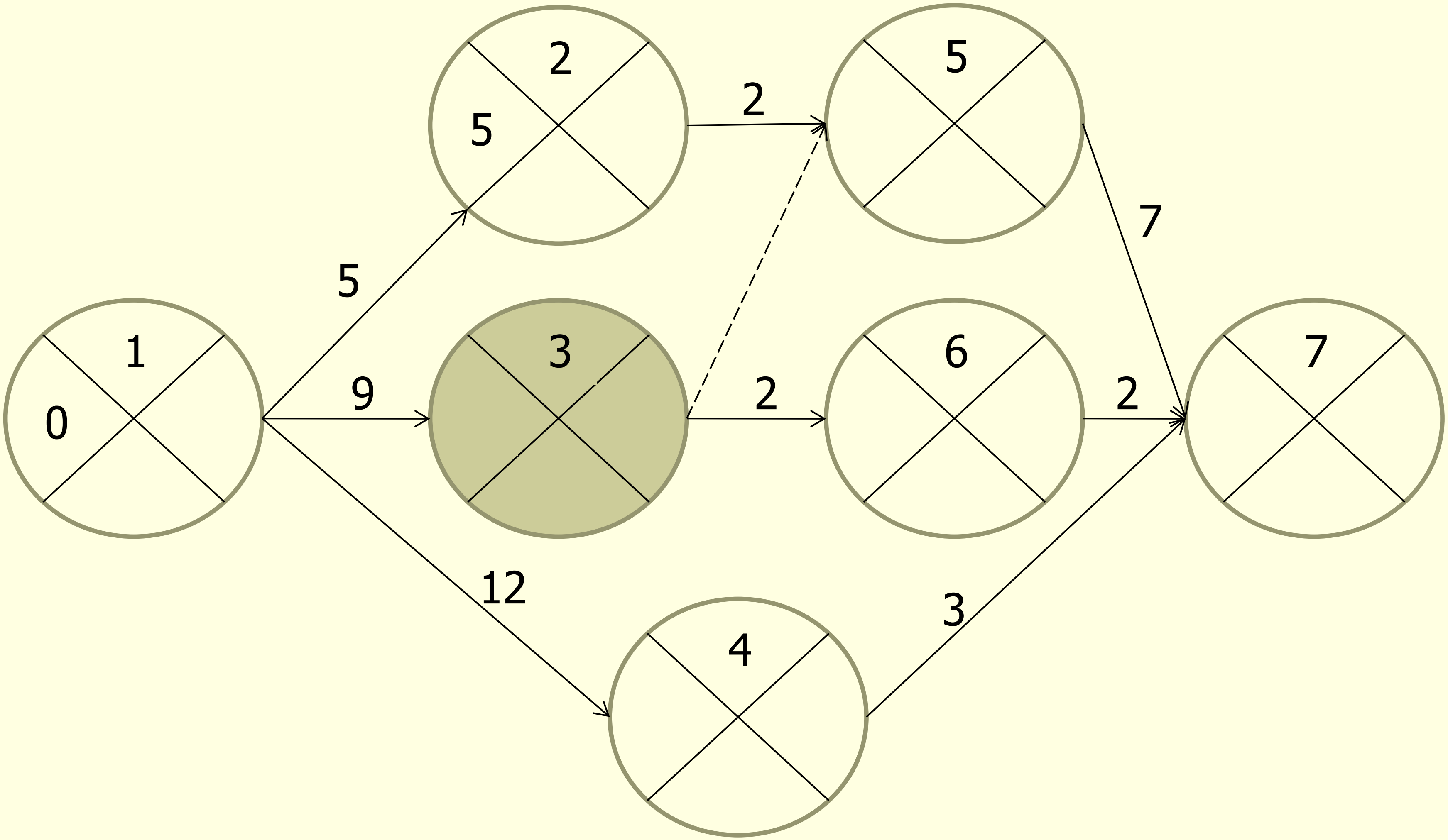
prof. Joanna Józefowska

CPM – przykład

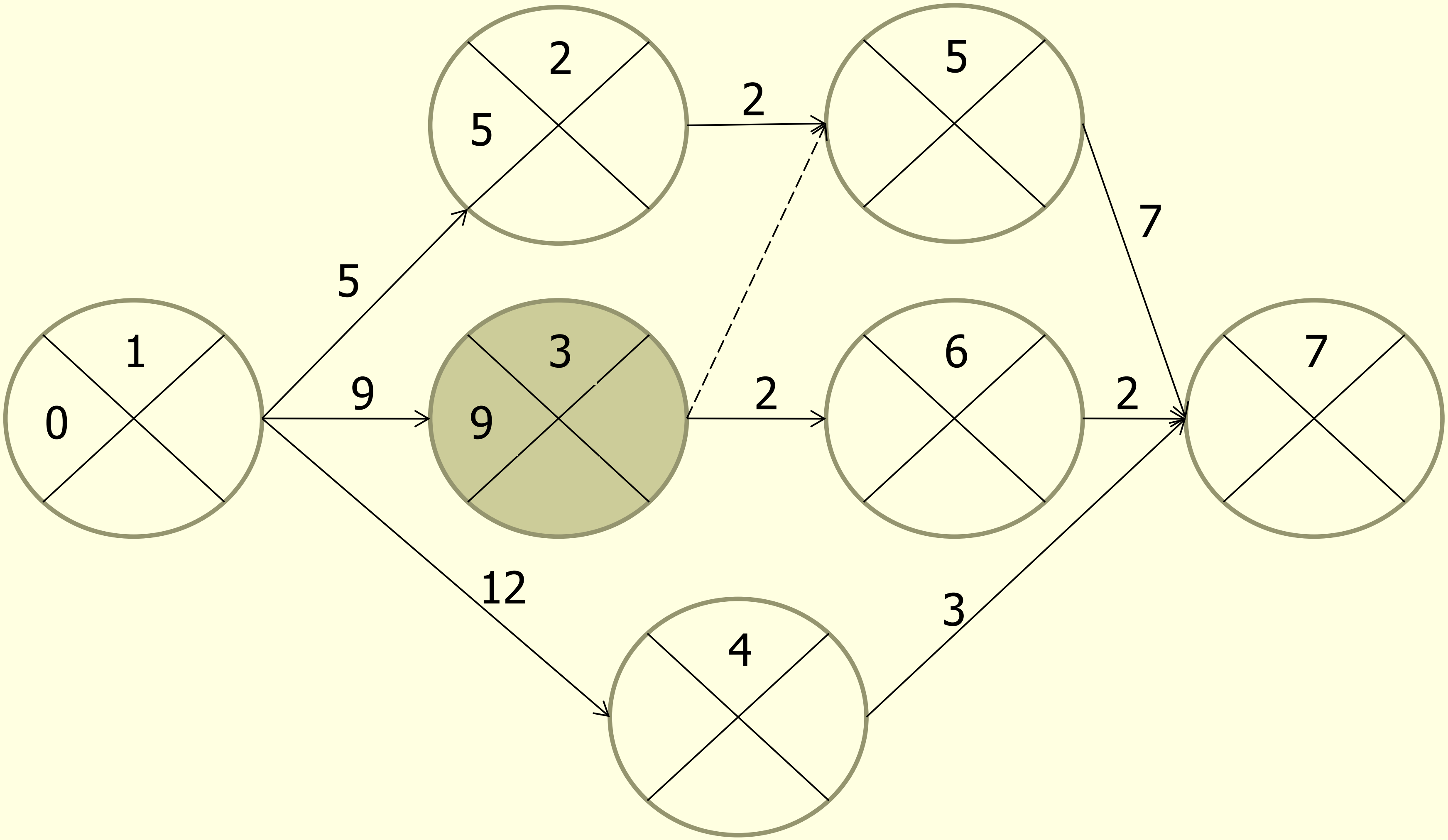


prof. Joanna Józefowska

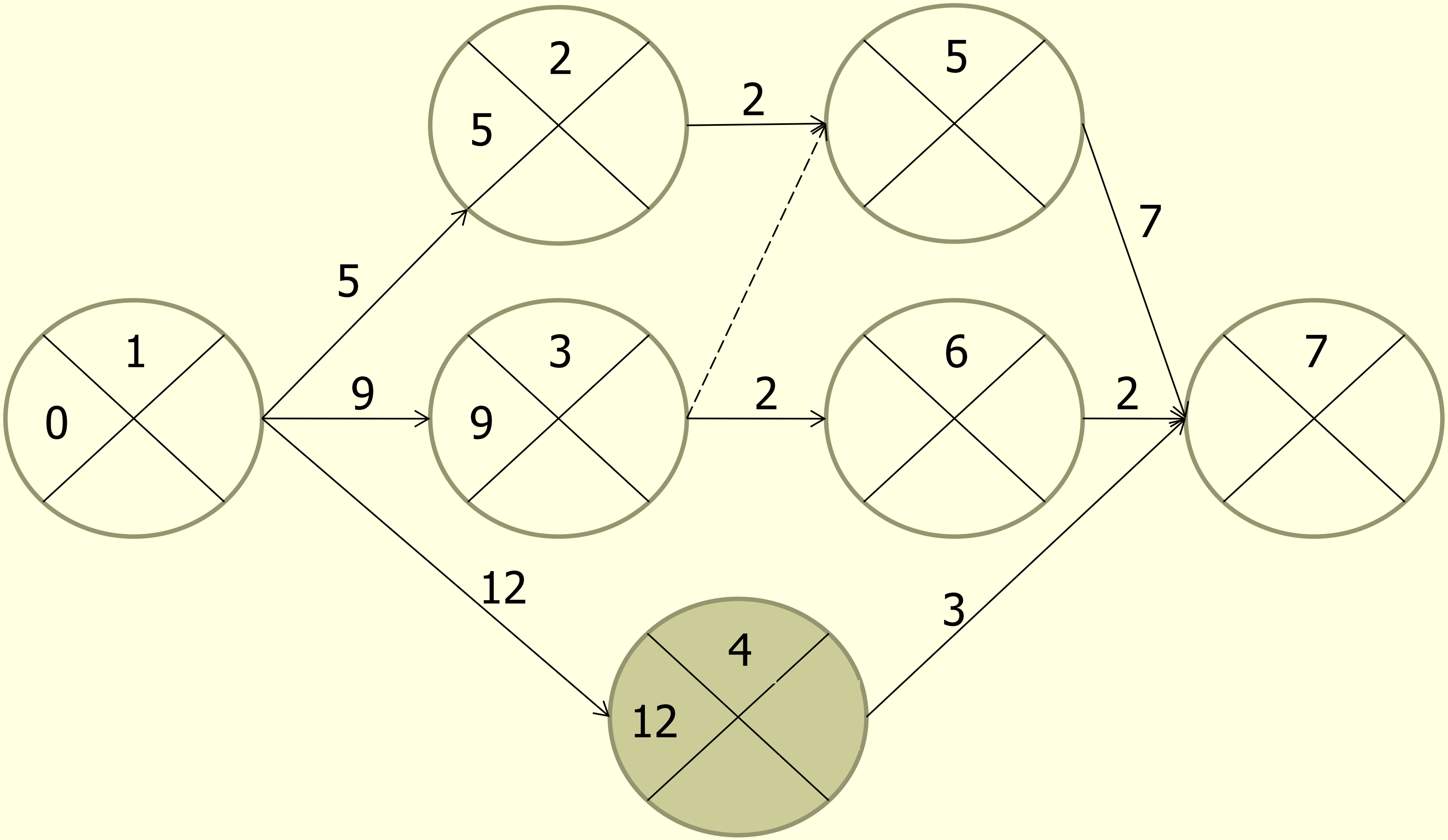
CPM – przykład



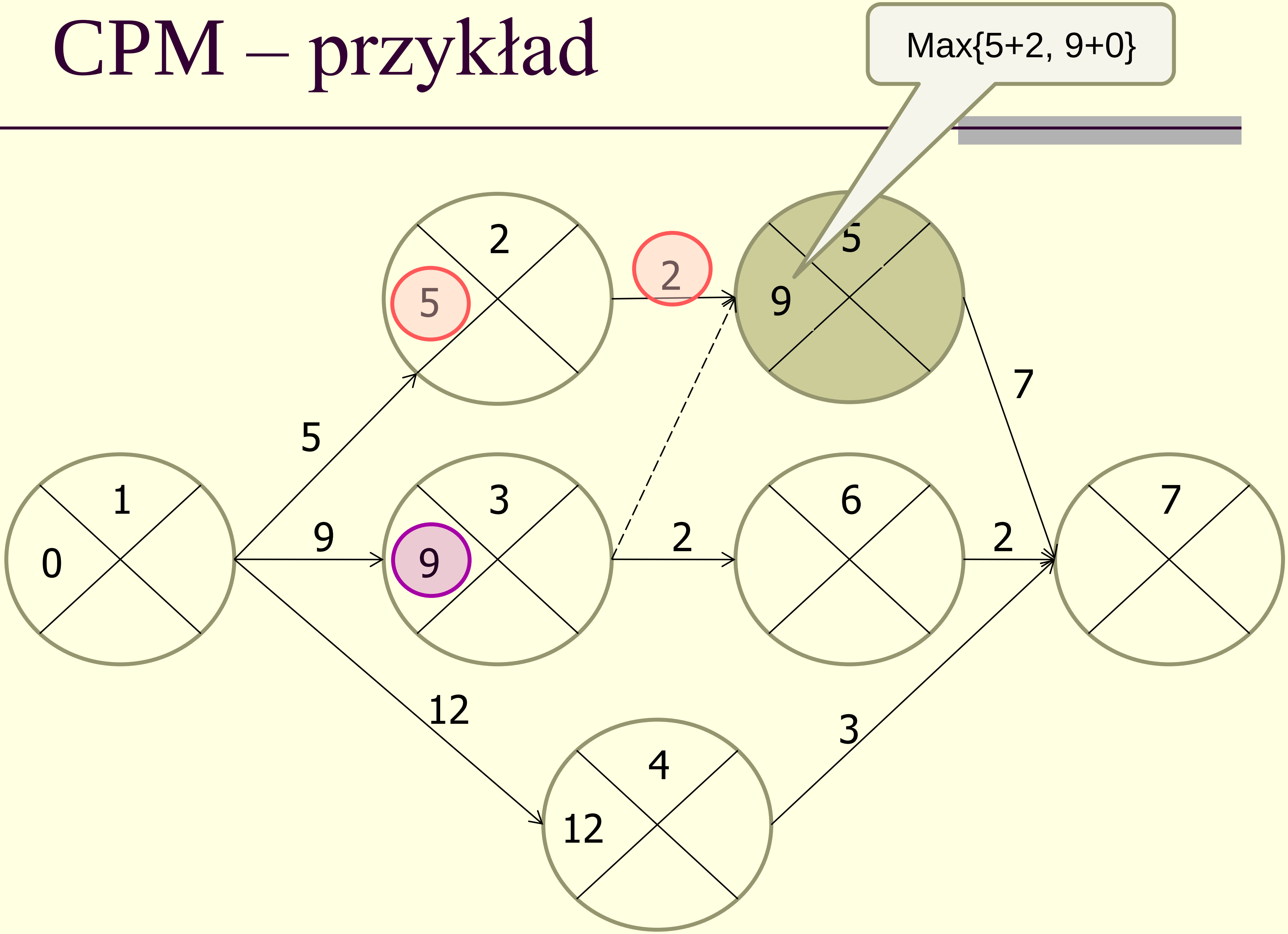
CPM – przykład



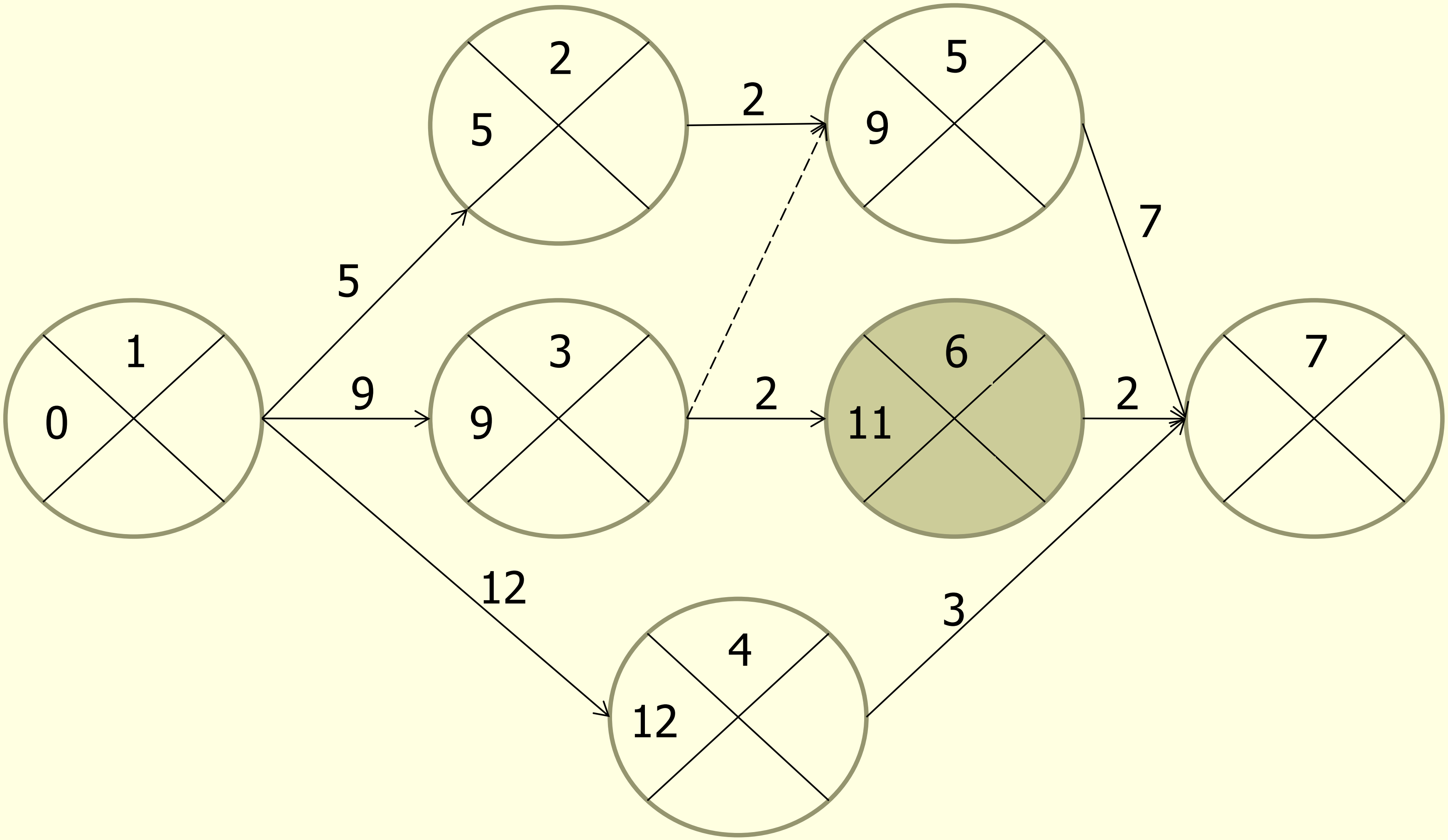
CPM – przykład



CPM – przykład

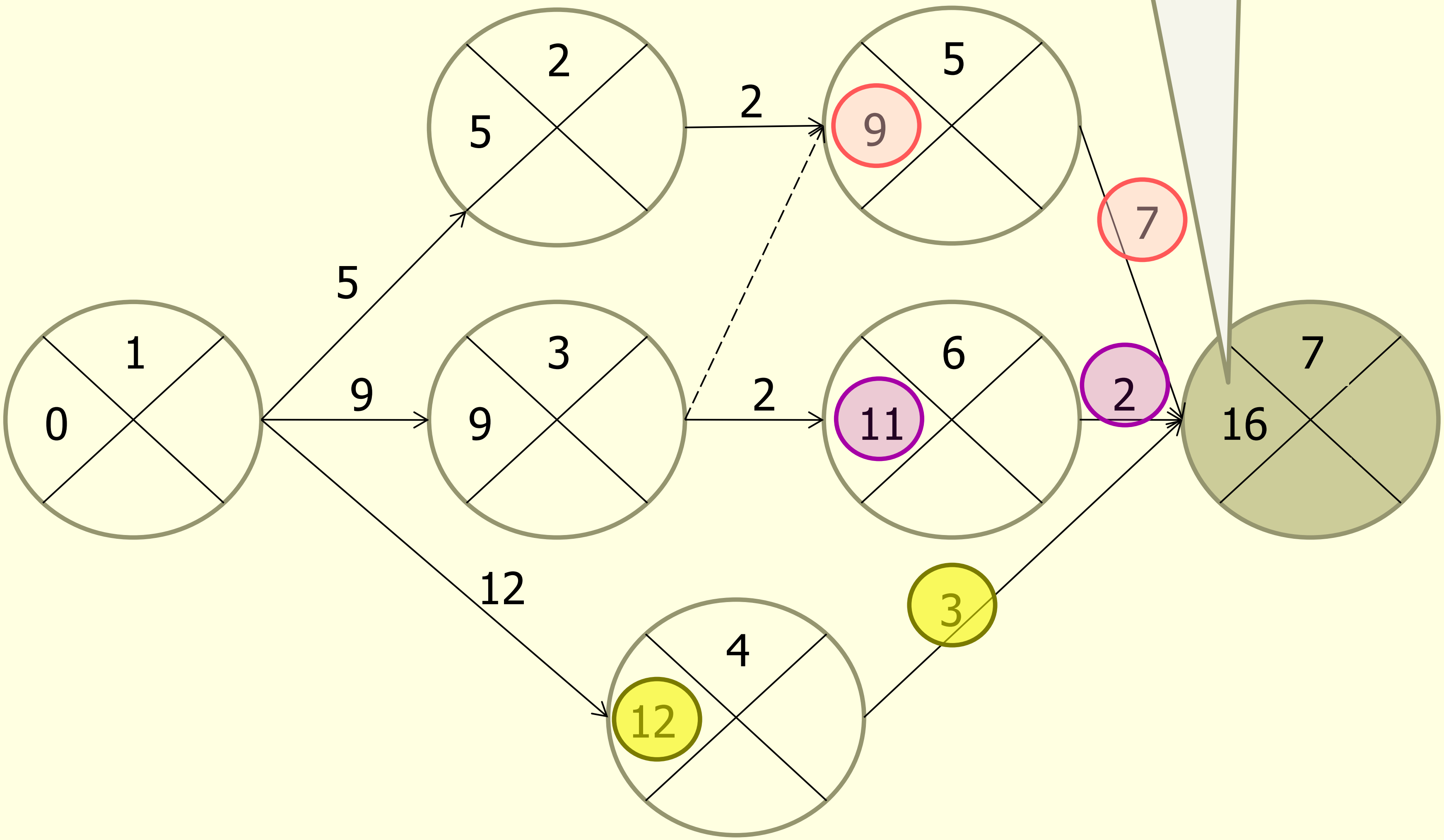


CPM – przykład

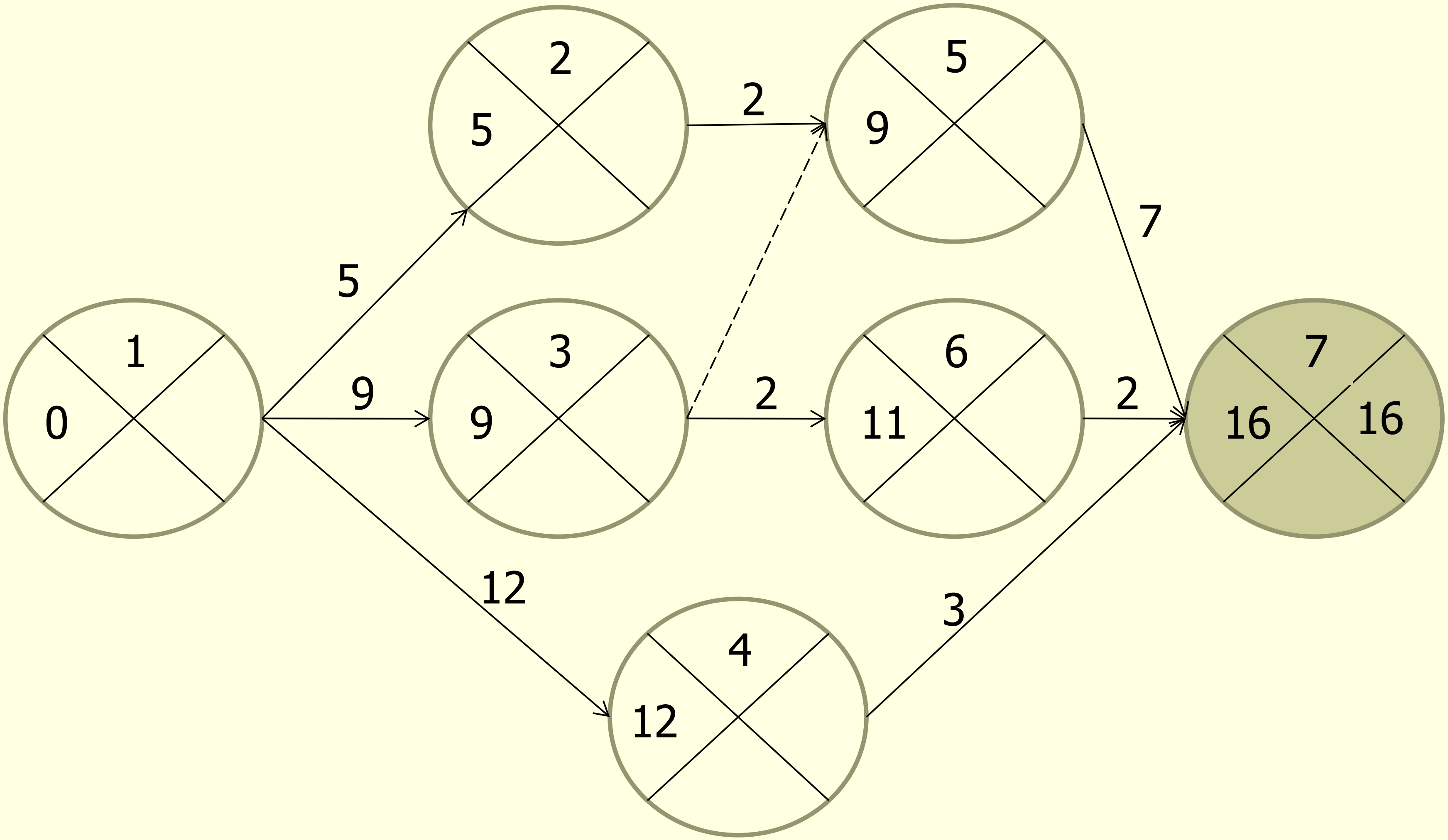


CPM – przykład

max{9+7, 11+2, 12+3}

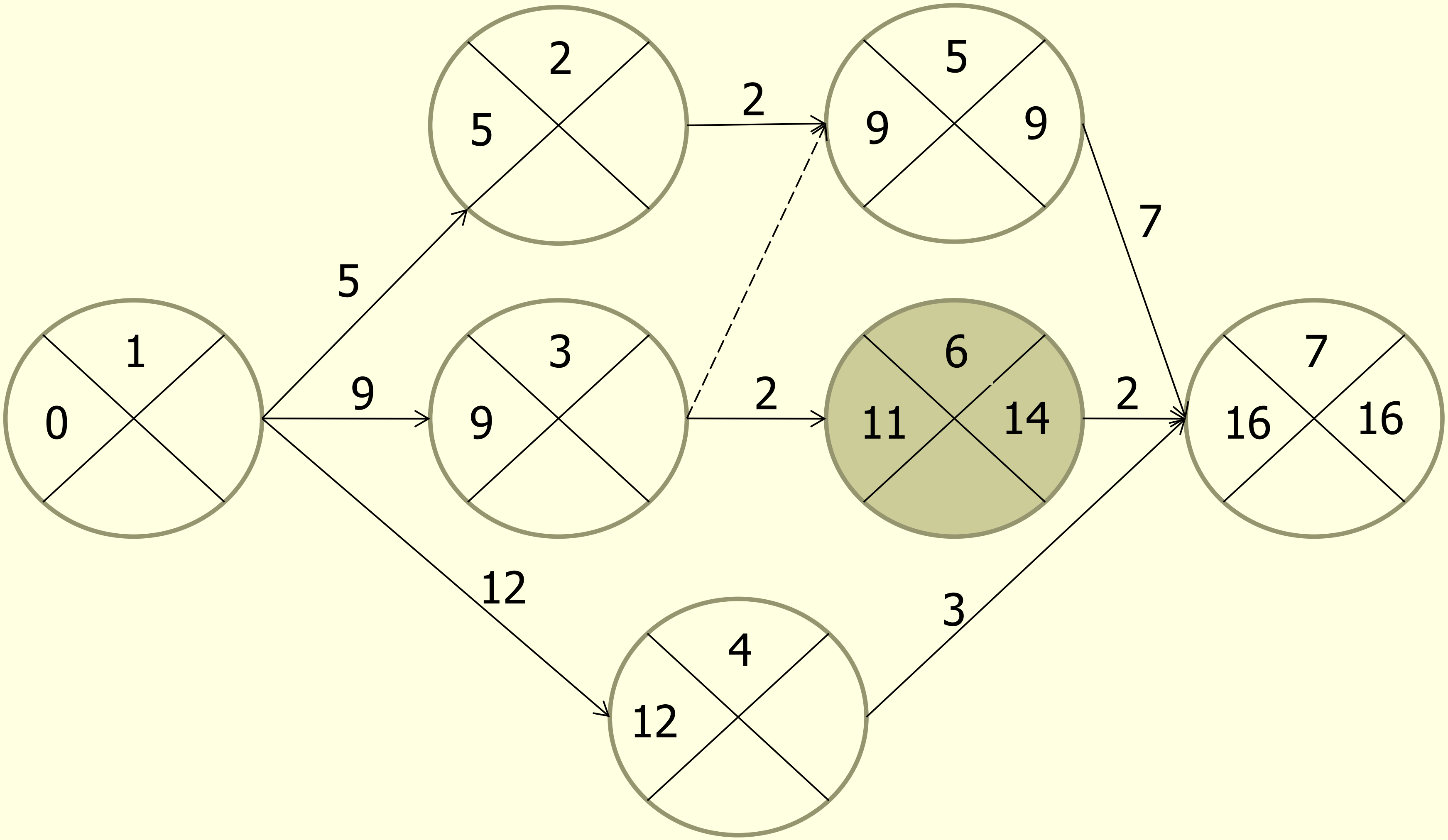


CPM – przykład

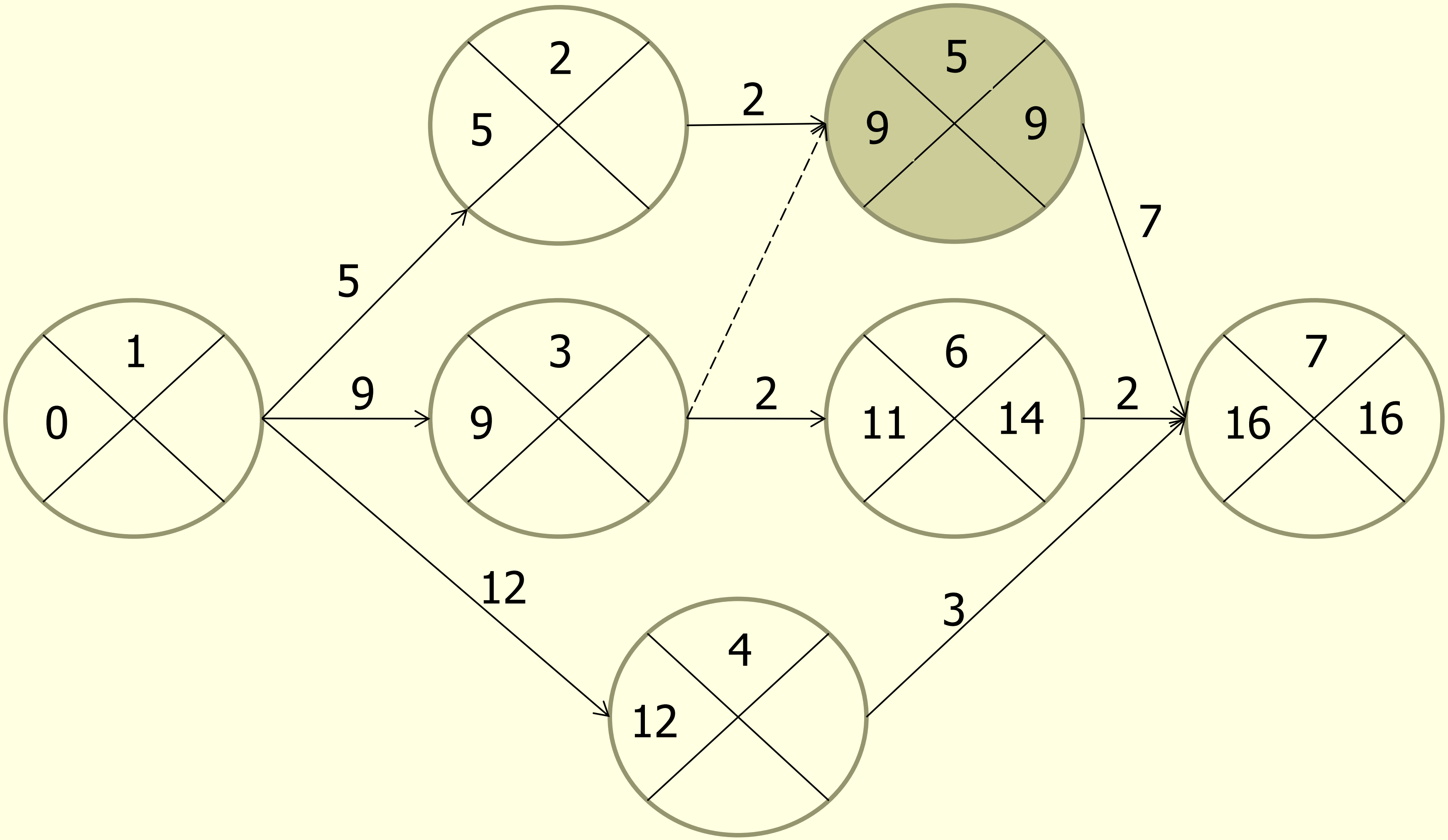


prof. Joanna Józefowska

CPM – przykład

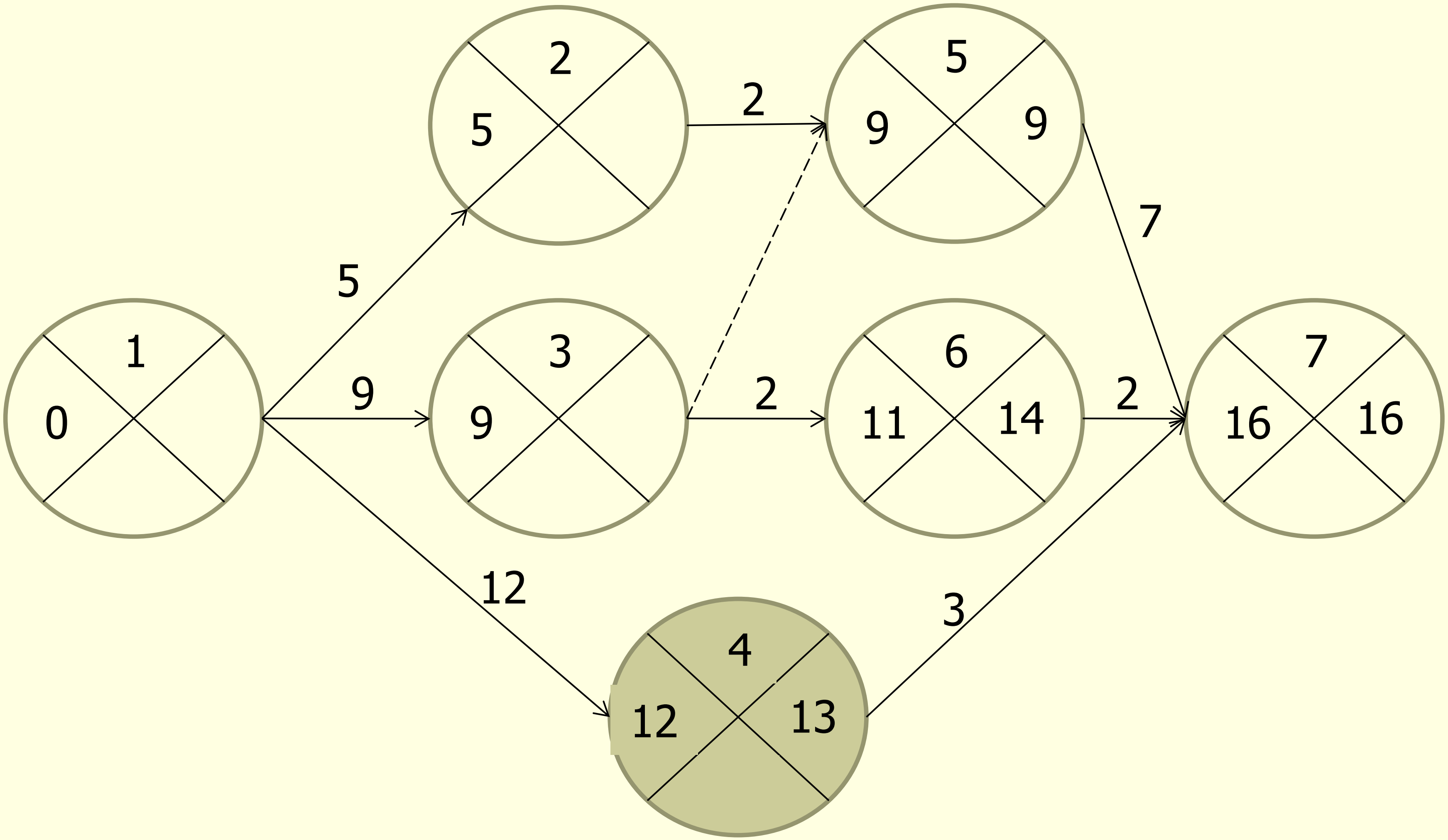


CPM – przykład

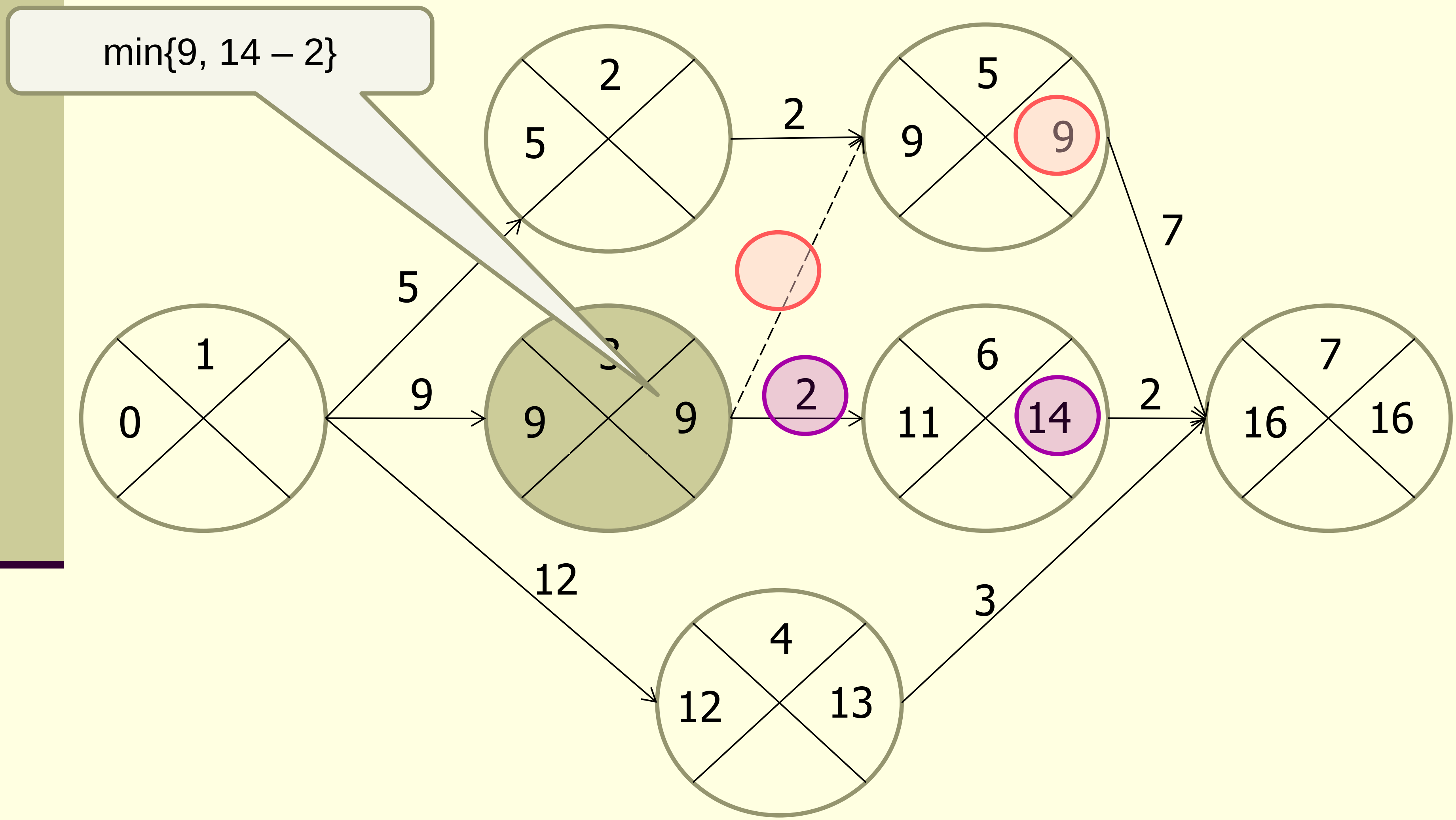


prof. Joanna Józefowska

CPM – przykład

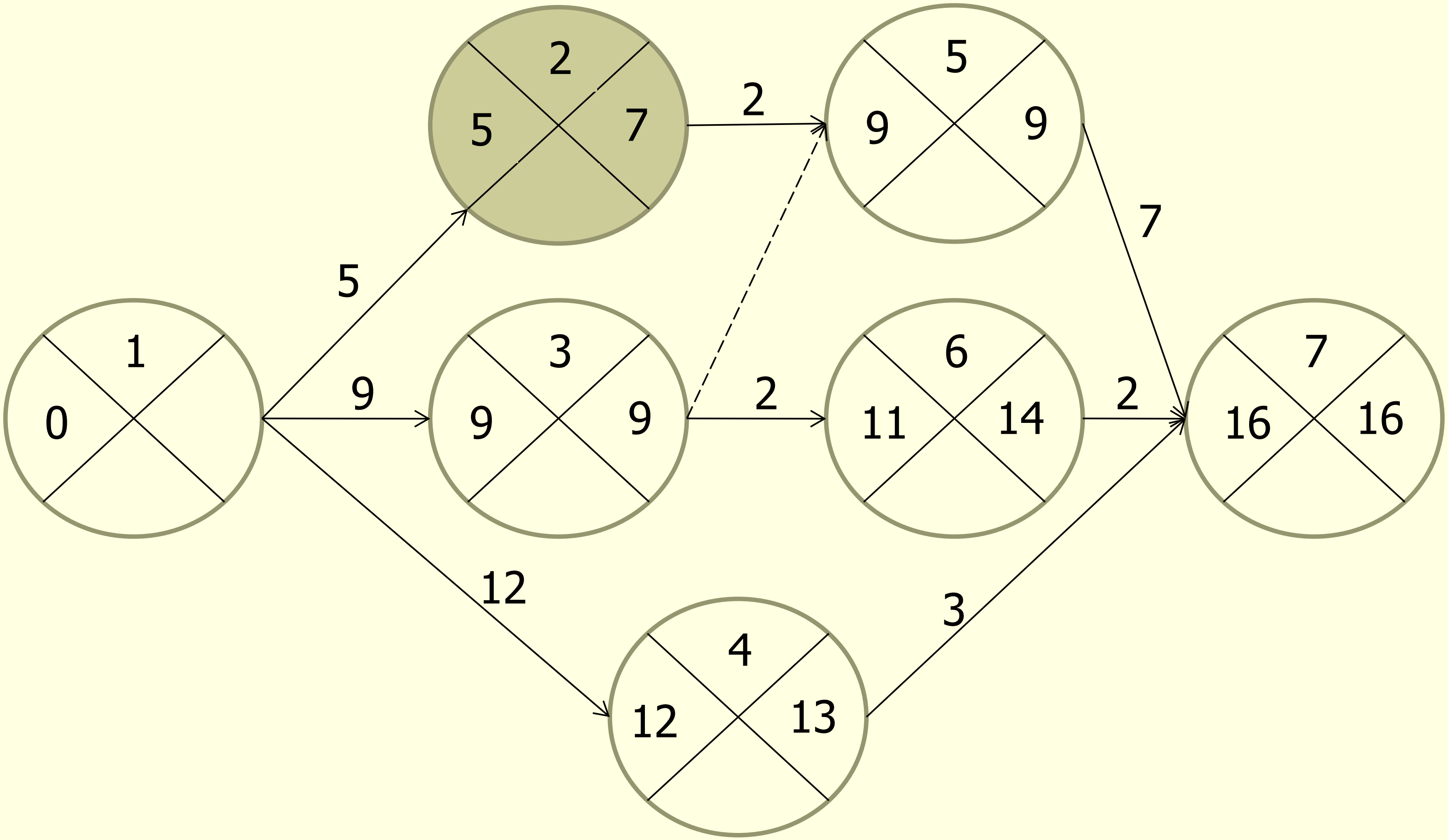


CPM – przykład

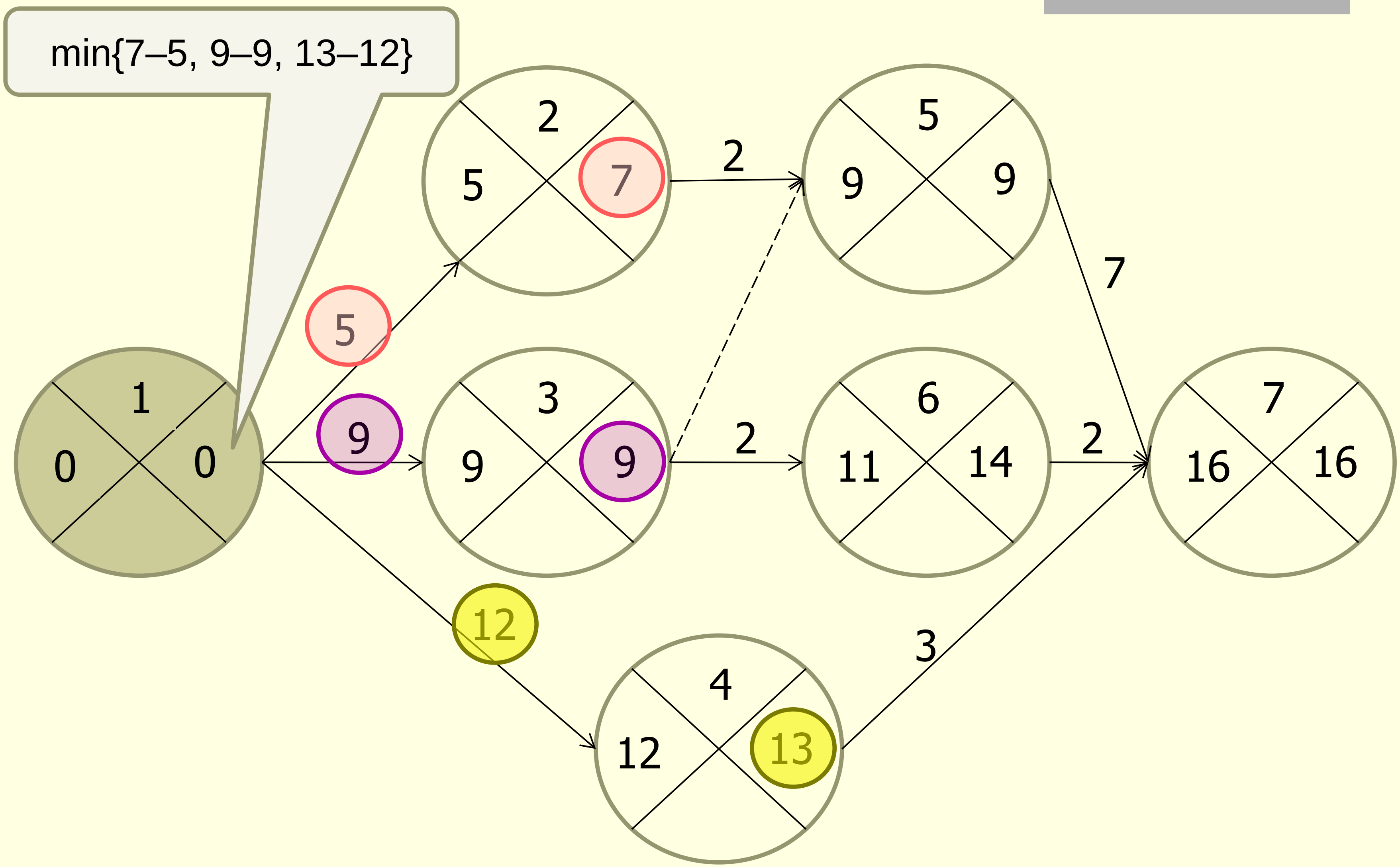


prof. Joanna Józefowska

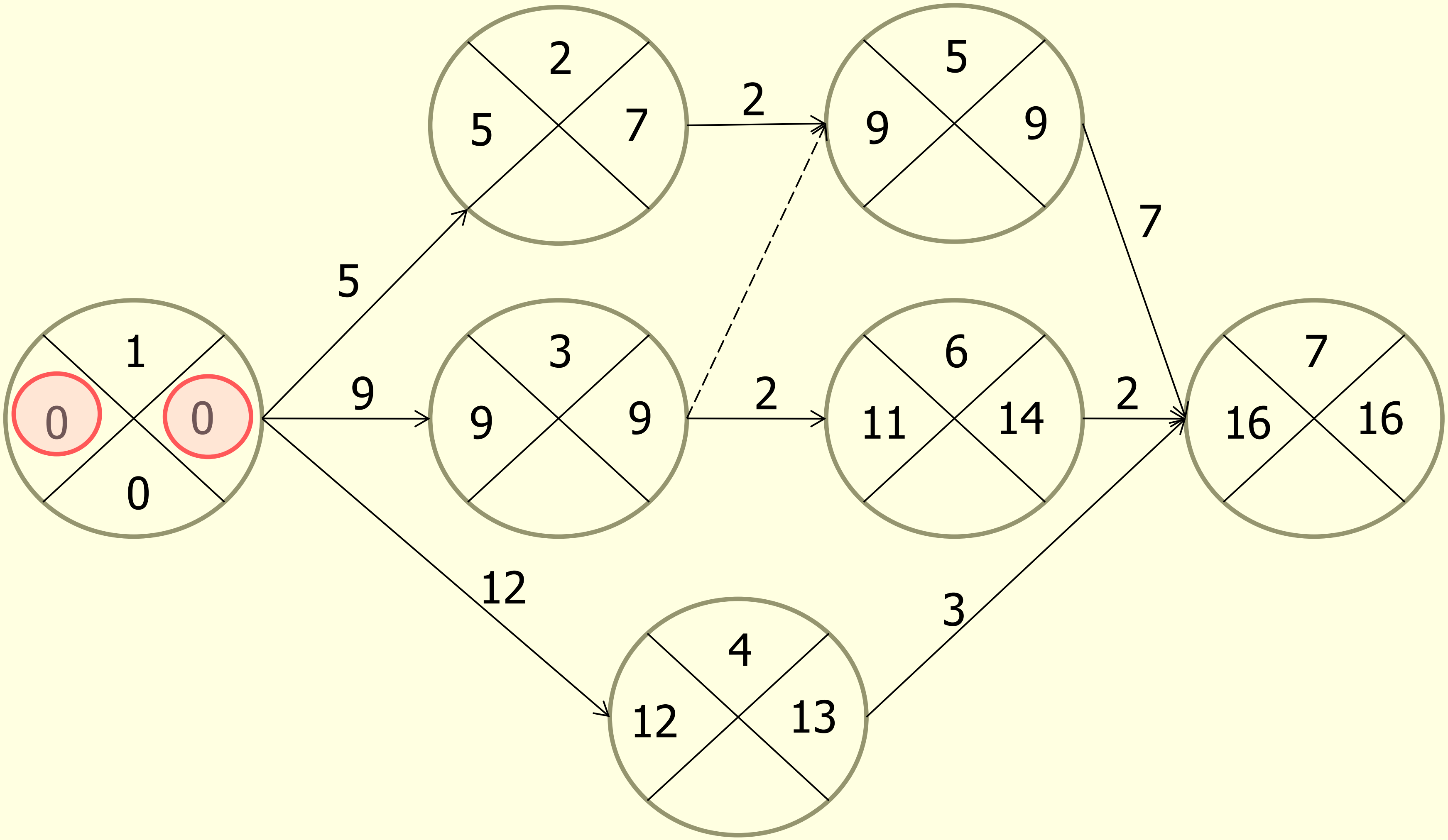
CPM – przykład



CPM – przykład

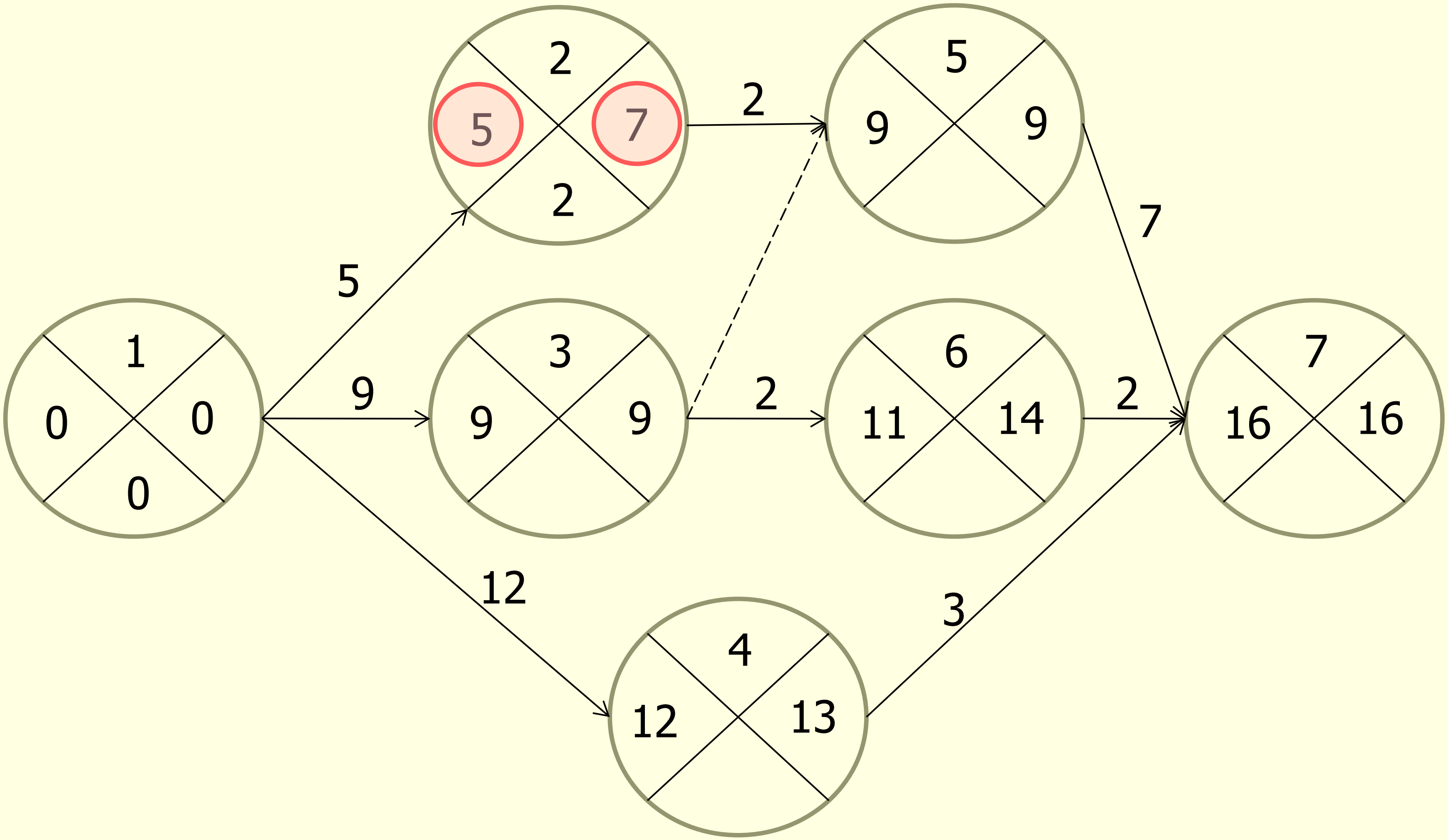


CPM – przykład



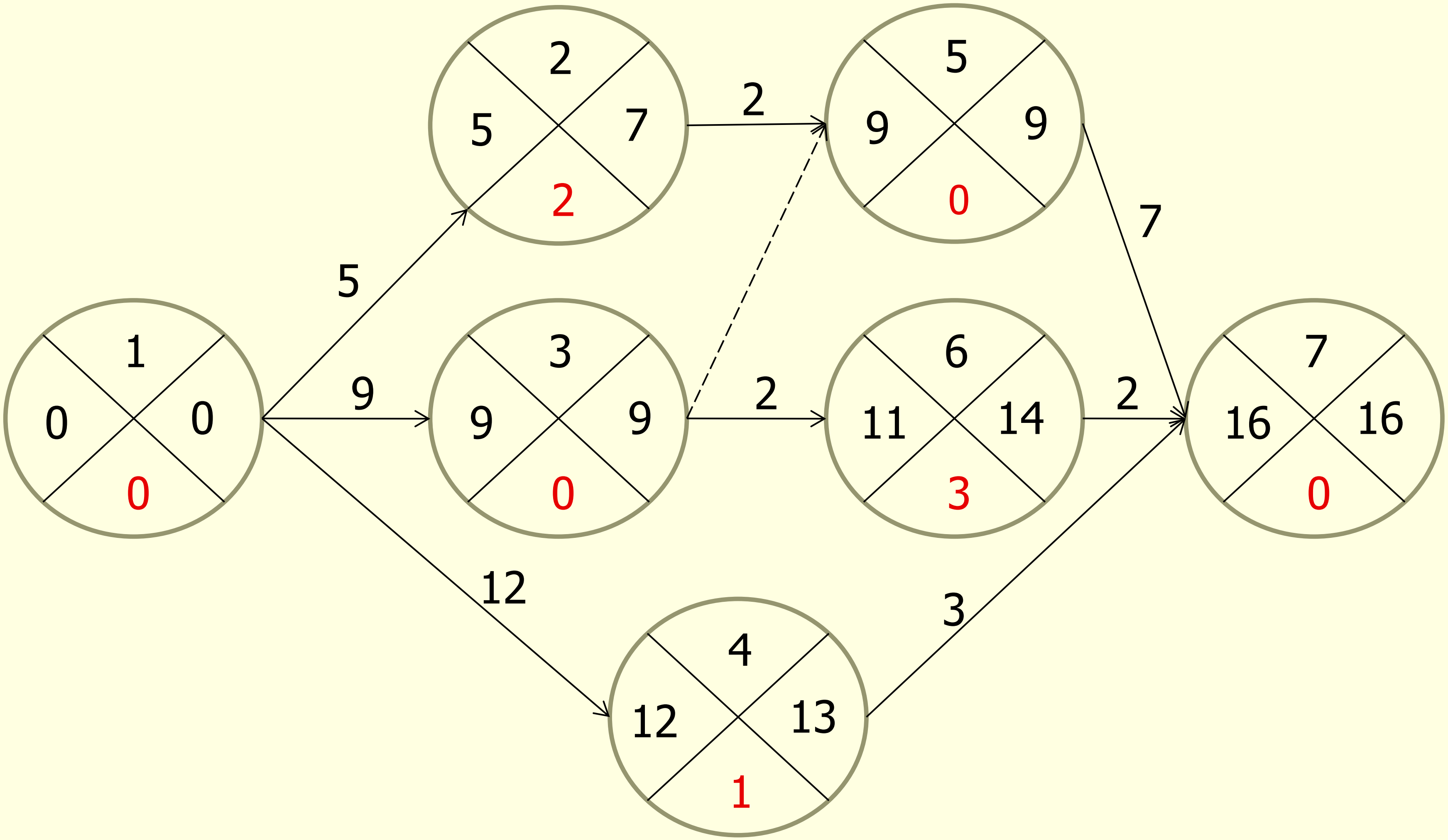
prof. Joanna Józefowska

CPM – przykład



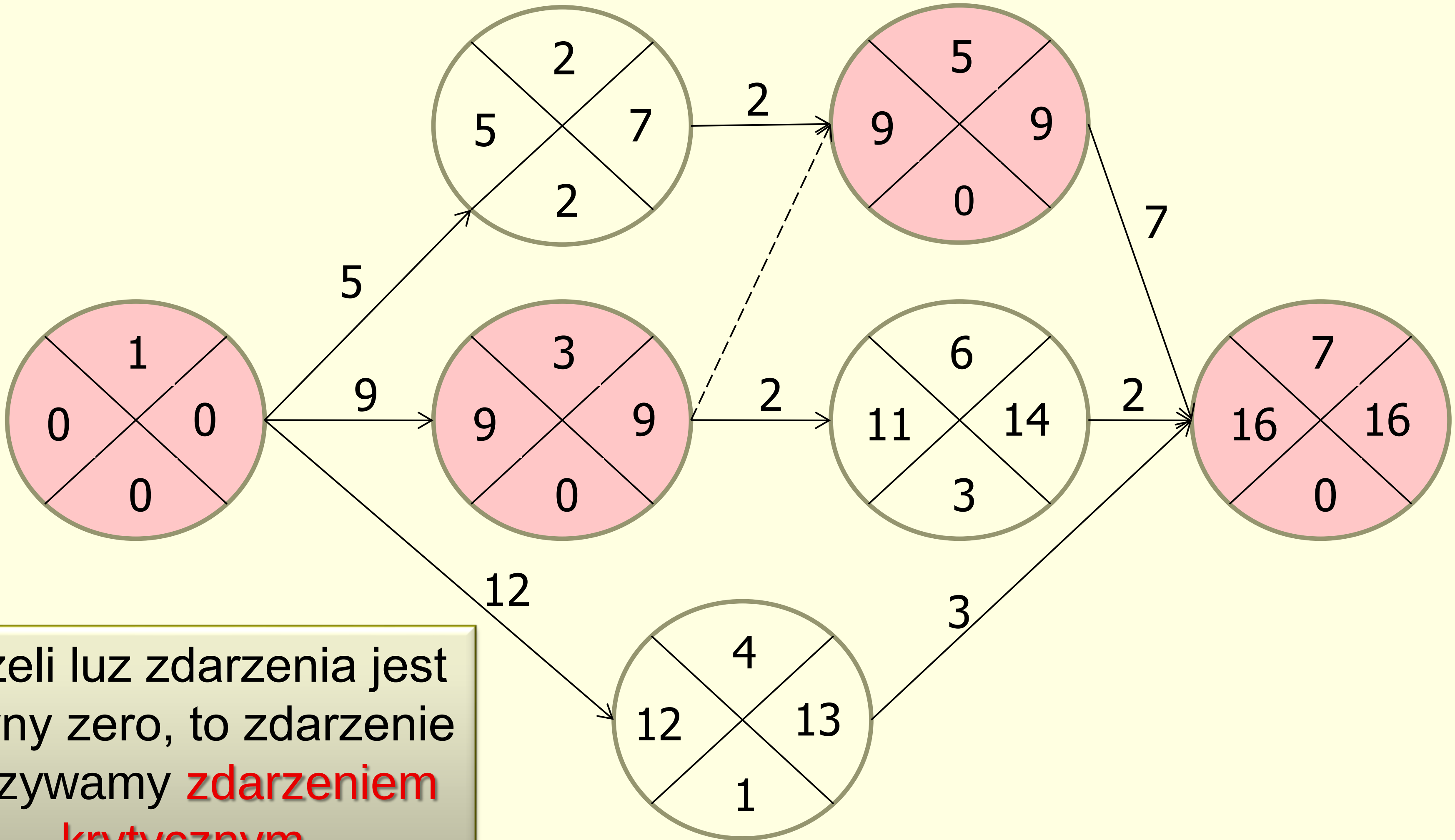
prof. Joanna Józefowska

CPM – przykład



prof. Joanna Józefowska

CPM – przykład



Jeżeli luz zdarzenia jest równy zero, to zdarzenie nazywamy **zdarzeniem krytycznym**.

prof. Joanna Józefowska

Ścieżka krytyczna - definicja

Ścieżką krytyczną nazywamy taką drogę

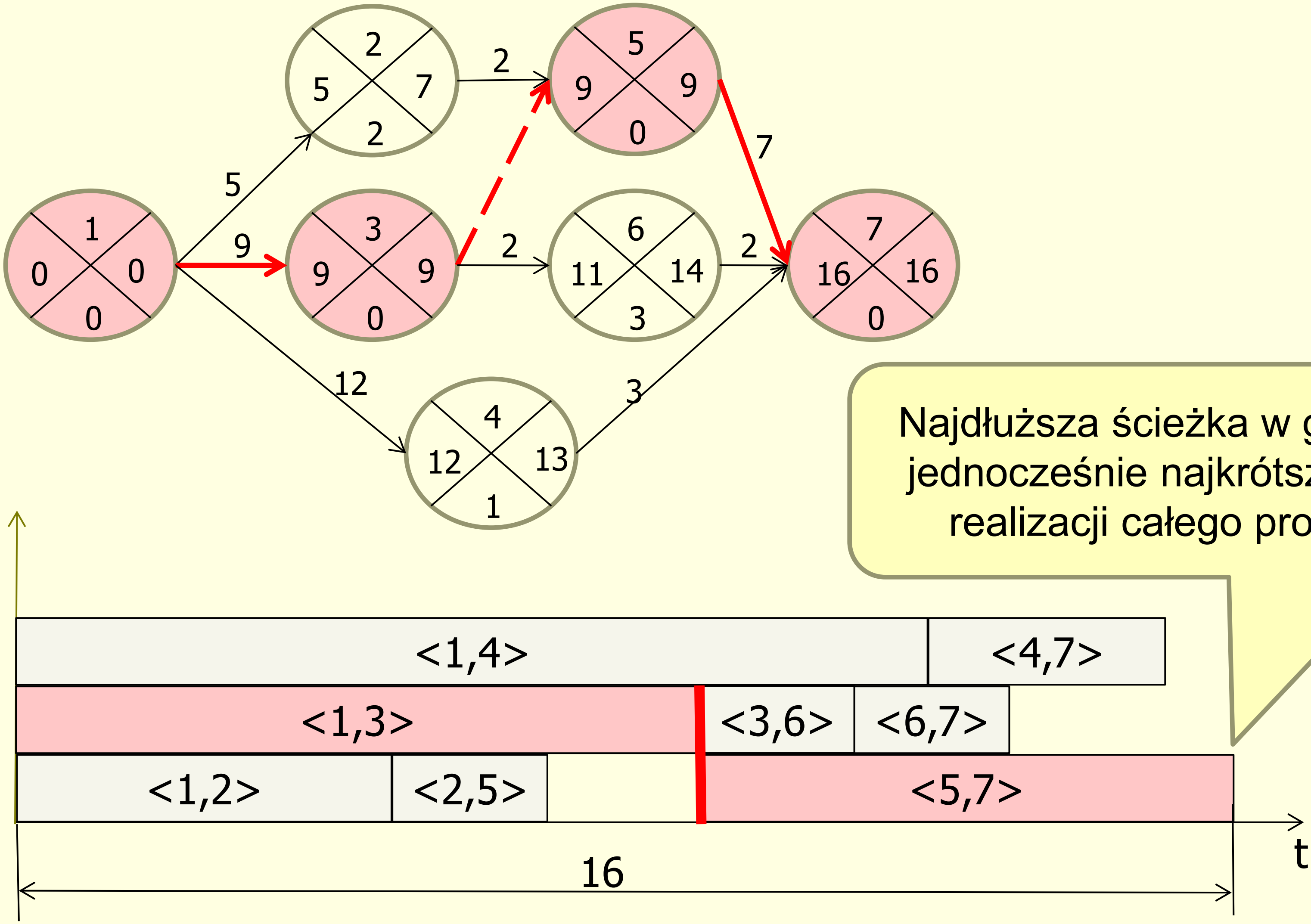
$<i_0, i_1> <i_1, i_2> \ldots <i_{p-1}, i_p>$

łączącą zdarzenie początkowe $i_0 = 1$

ze zdarzeniem końcowym $i_p = n$,

dla której czas $\tau = \sum_{k=1}^{p} t_{i_{k-1} i_k}$ jest najdłuższy.

Ścieżka krytyczna - przykład



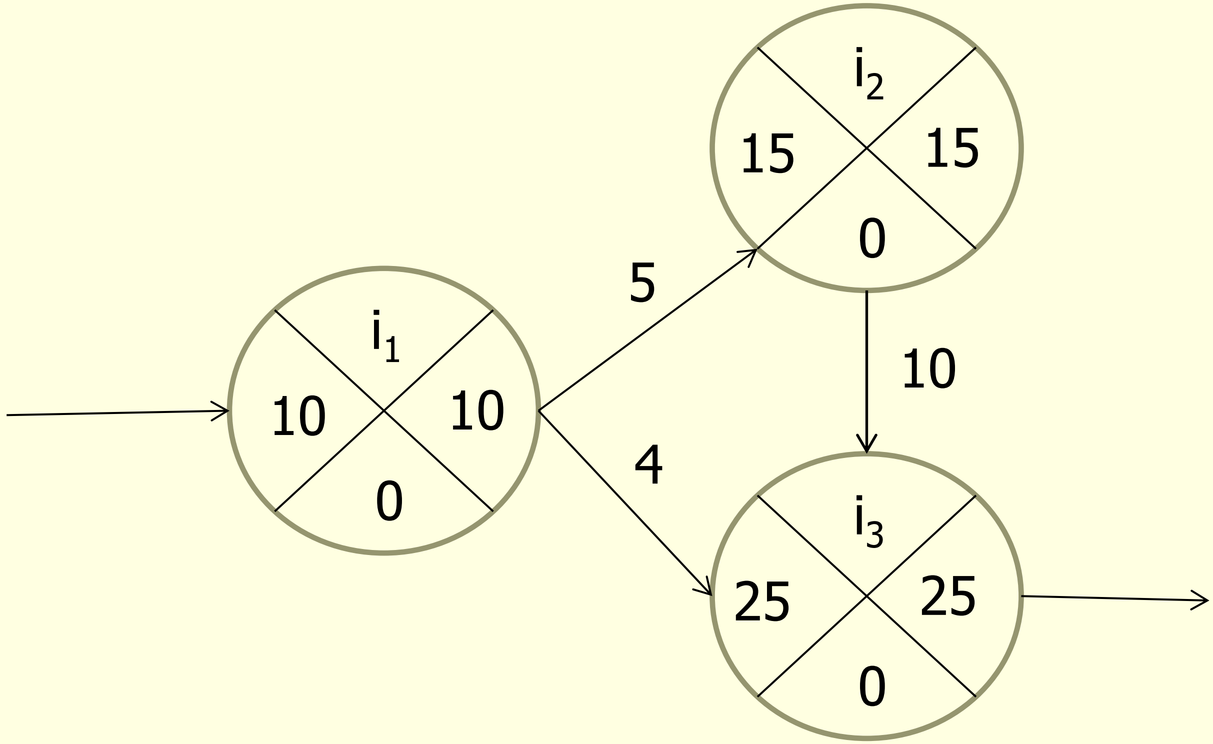
Najdłuższa ścieżka w grafie, a jednocześnie najkrótszy czas realizacji całego projektu

prof. Joanna Józefowska

Ścieżka krytyczna - własności

- W danej sieci może istnieć jedna lub więcej ścieżek krytycznych.
- Czynności leżące na ścieżce krytycznej nazywamy czynnościami krytycznymi.
- Suma czasów wykonania czynności krytycznych ogranicza od dołu czas realizacji projektu.
- Czas ten można wyznaczyć jako $\tau = T_n^p = T_n^w$.

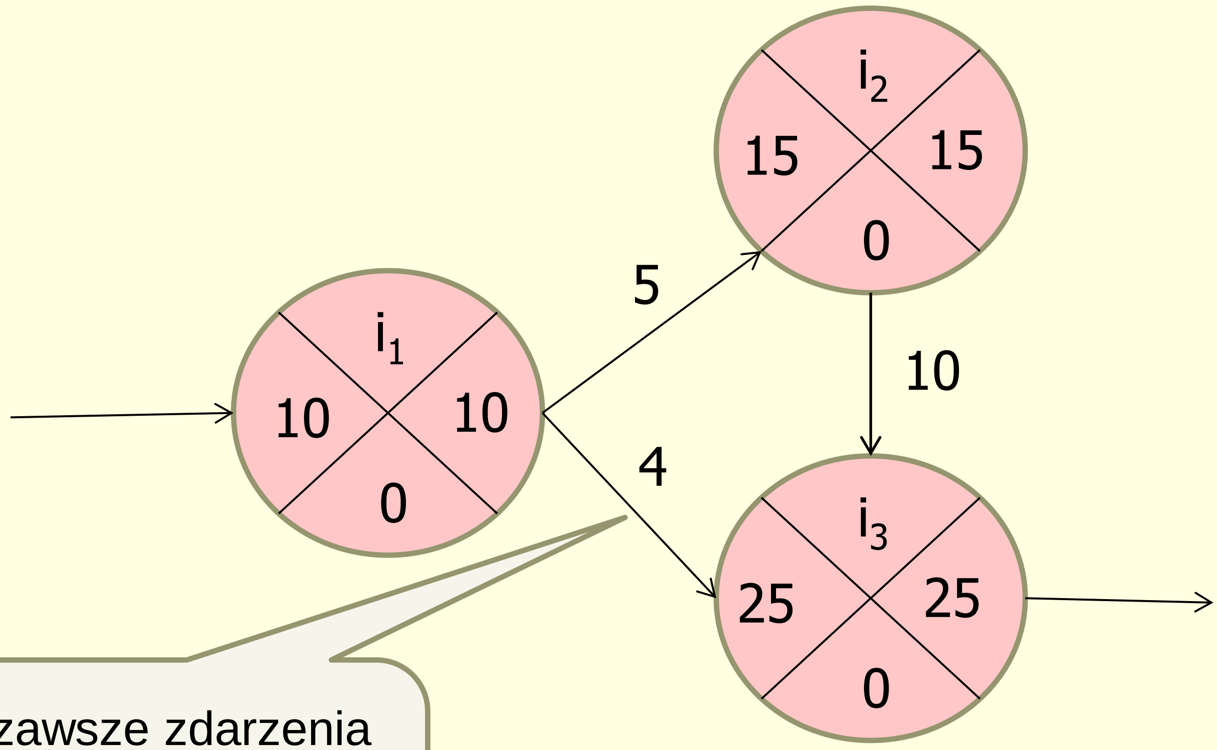
Ścieżka krytyczna - wyznaczanie



prof. Joanna Józefowska

prof. Joanna Józefowska

Ścieżka krytyczna - wyznaczanie

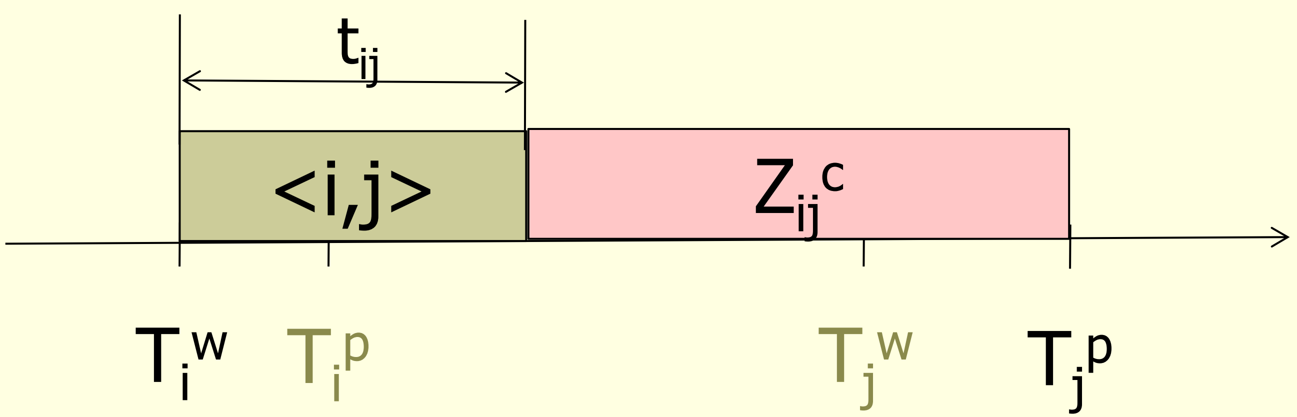


Nie zawsze zdarzenia krytyczne wyznaczają jednoznacznie ścieżkę krytyczną!

Zapas czasu (luz) czynności

- Zapasem **całkowitym** czasu czynności <i,j> nazywamy wielkość

$$Z_{ij}^{c} = T_j^p - T_i^w - t_{ij}.$$



Ścieżka krytyczna - wyznaczanie

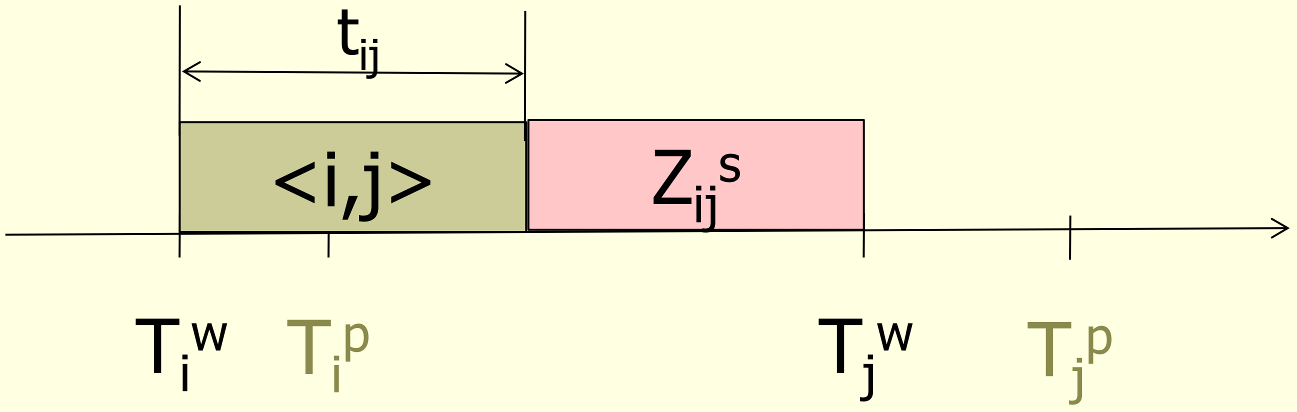
Twierdzenie

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby czynność <i,j> była czynnością krytyczną jest równość $Z_{ij}^{c} = 0$.

Zapas czasu (luz) czynności

- Zapasem **swobodnym** czasu czynności <i,j> nazywamy wielkość

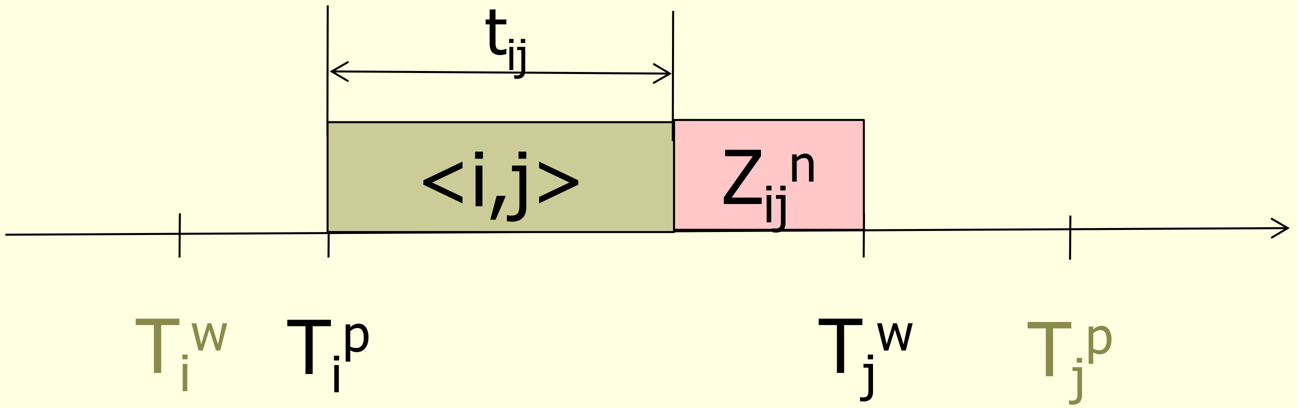
$$Z_{ij}^{s} = T_j^{w} - T_i^{w} - t_{ij}.$$



Zapas czasu (luz) czynności

- Zapasem **niezależnym** czasu czynności <i,j> nazywamy wielkość

$$Z_{ij}^{n} = T_j^{w} - T_i^{p} - t_{ij}.$$



Zapasy czasu czynności

Twierdzenie

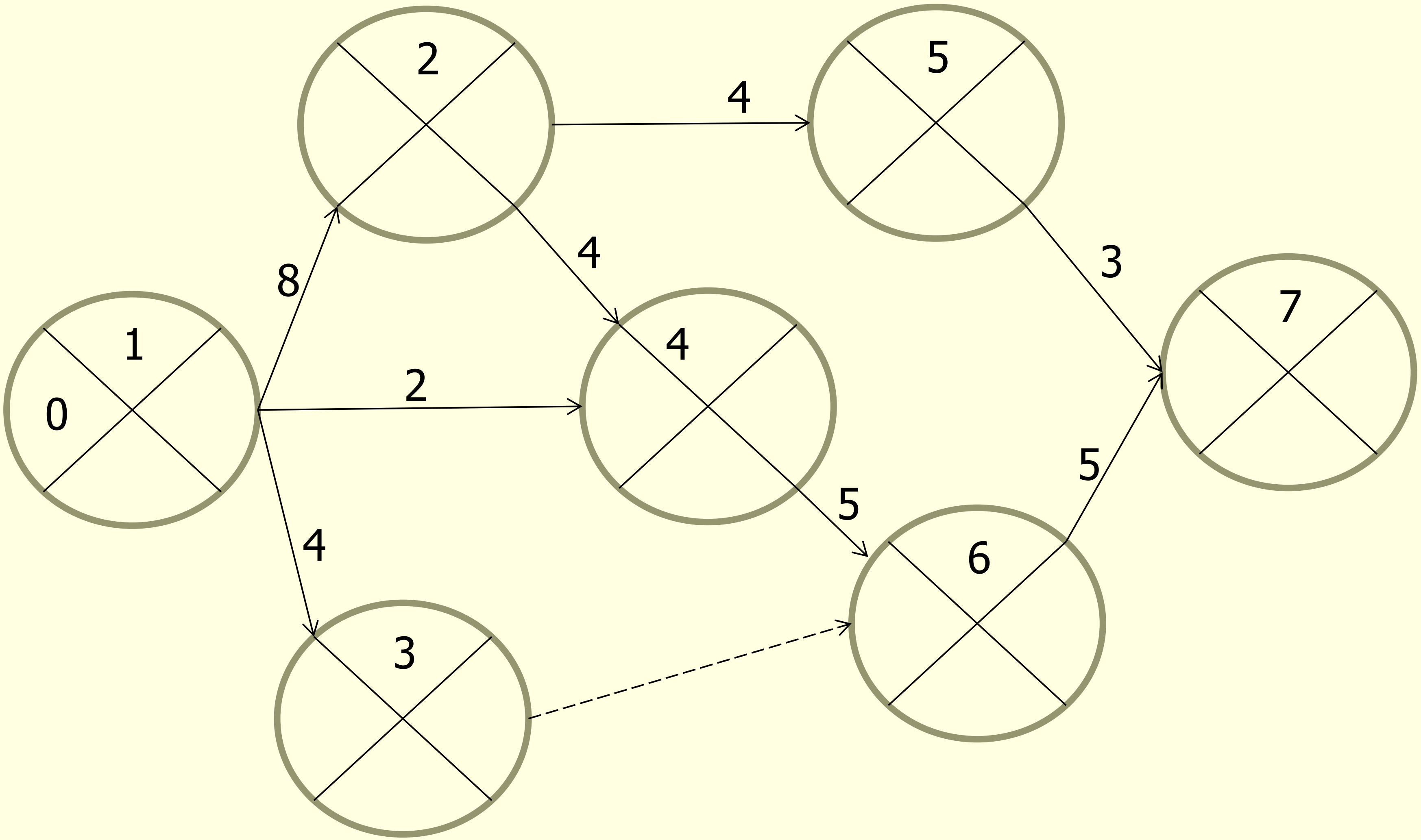
Między zapasami całkowitym, swobodnym i niezależnym zachodzą następujące relacje:

$$Z_{ij}^{n} \leq Z_{ij}^{s} \leq Z_{ij}^{c}.$$

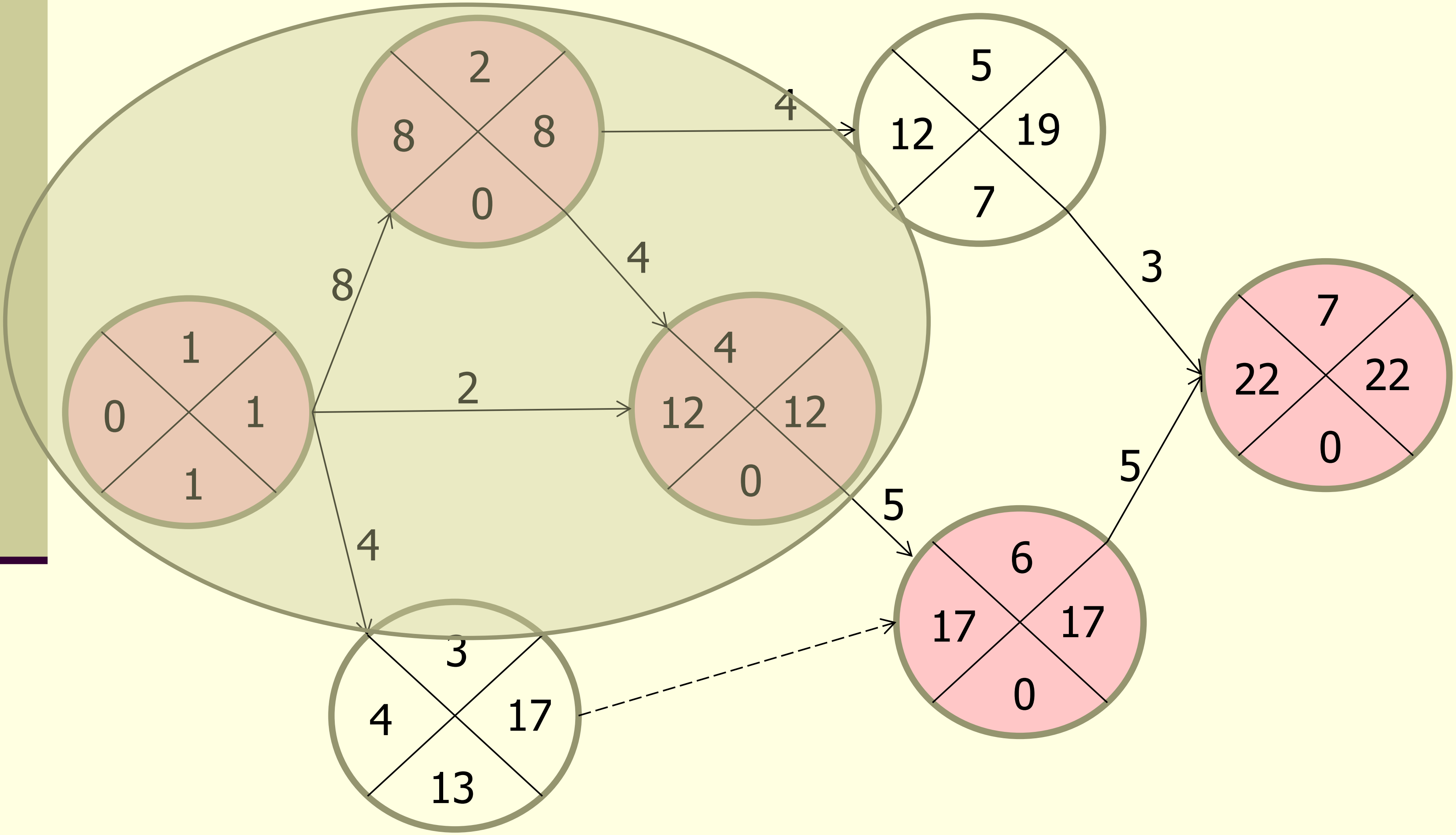
Wniosek

Dla czynności krytycznych wszystkie rodzaje zapasu są równe zero.

Ścieżka krytyczna - przykład

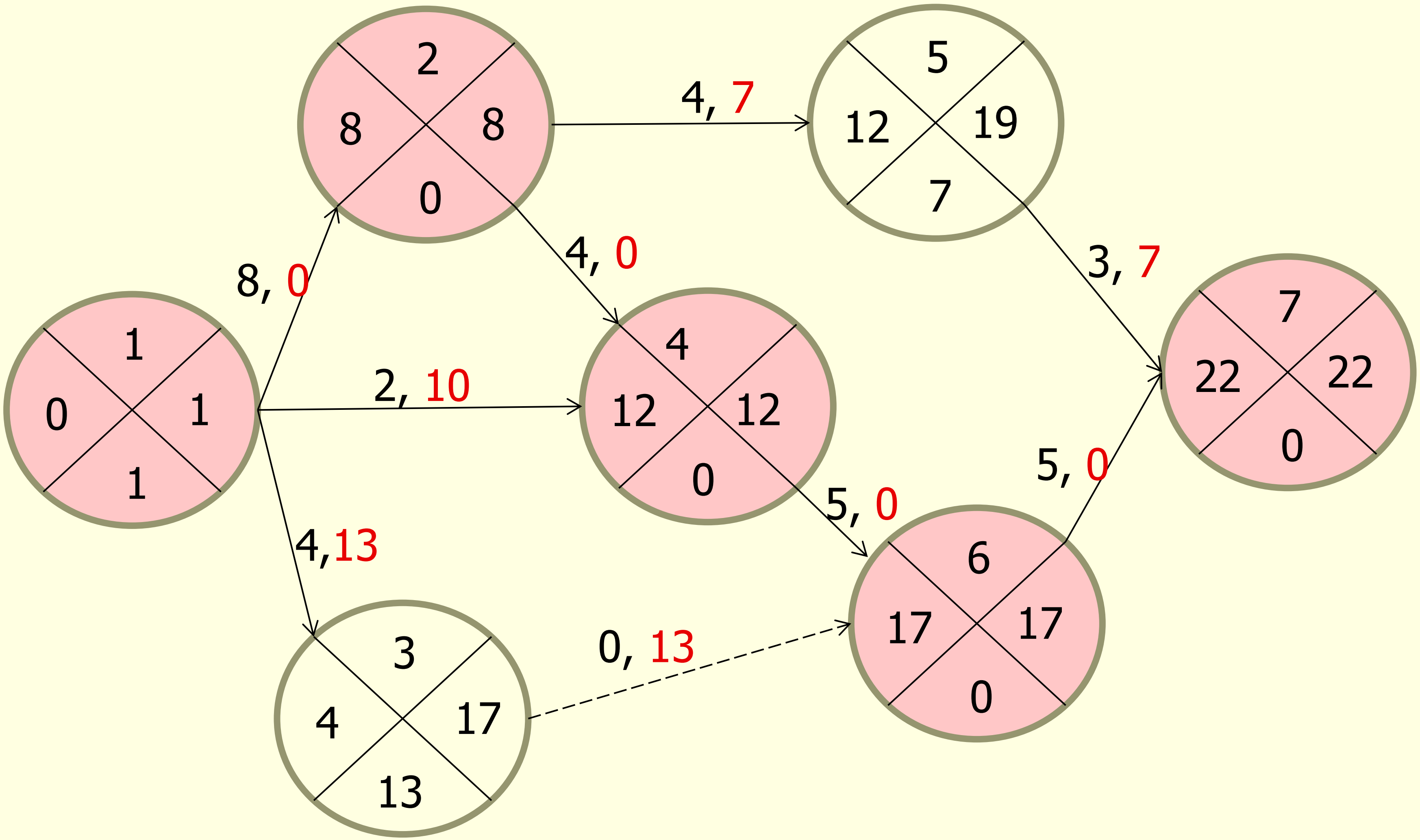


Ścieżka krytyczna - przykład



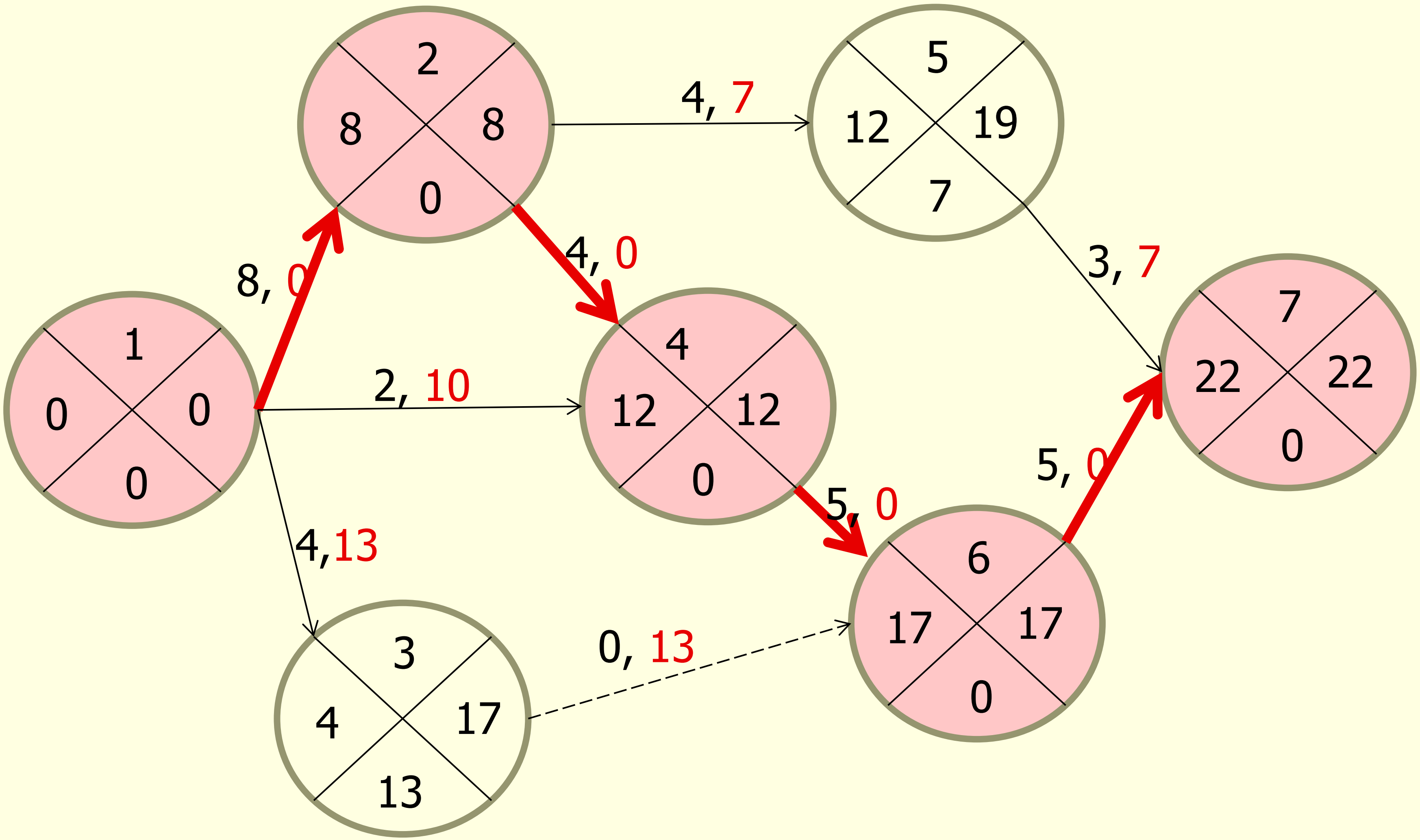
Ścieżka krytyczna - przykład

prof. Joanna Józefowska



prof. Joanna Józefowska

Ścieżka krytyczna - przykład



Metoda PERT

- Rozkład beta
  - $f(t) = H(t - a)^{p-1}(b - t)^{q-1}$
- Wartość średnia i wariancja czasu trwania czynności

$$t_e = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b - a)^2}{36}$$

  - a - wartość optymistyczna czasu trwania czynności
  - b - wartość pesymistyczna czasu trwania czynności
  - m - najbardziej prawdopodobna wartość czasu trwania czynności

Metoda PERT

- Luz zdarzenia ma rozkład normalny o parametrach:

$$N\left(\bar{T}_i^{(p)} - \bar{T}_i^{(w)}, \sqrt{\sigma^2_{T_i^{(p)}} + \sigma^2_{T_i^{(w)}}}\right)$$

$$\bar{T}_i^{(w)} = \sum_{k=1}^{m} t_k^e \qquad \bar{T}_i^{(p)} = \sum_{k=1}^{l} t_k^e$$

$$\sigma_{T_i^{(w)}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} \sigma^2_{t_k}} \qquad \sigma_{T_i^{(p)}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{l} \sigma^2_{t_k}}$$

Metoda PERT

- Prawdopodobieństwo ujemnego luzu zdarzenia i

$$P\{L_i<0\}=P\left\{T_i^{(p)}-T_i^{(w)}<0\right\}=\Phi\left(-\frac{\overline{T}_i^{(p)}-\overline{T}_i^{(w)}}{\sqrt{\sigma^2_{T_i^{(p)}}+\sigma^2_{T_i^{(w)}}}}\right)$$

- Φ - dystrybuanta rozkładu normalnego o parametrach N(0,1)

Przykład

Czynność	a	m	b	t_{ij}^{e}	σ_{ij}
$\langle 0,1 \rangle$	1	4	5	3,67	0,44
$\langle 0,2 \rangle$	3	5	7	5,00	0,44
$\langle 1,3 \rangle$	2	5	10	5,33	1,78
$\langle 1,5 \rangle$	5	7	14	7,83	2,25
$\langle 2,4 \rangle$	1	8	9	7,00	1,28
$\langle 3,4 \rangle$	3	9	12	8,50	2,25
$\langle 3,5 \rangle$	5	8	14	8,50	2,25
$\langle 4,6 \rangle$	5	7	10	7,17	0,69
$\langle 5,6 \rangle$	5	5	10	5,83	0,69

Przykład c.d.

prof. Joanna Józefowska

i	$\overline{T}_i^w$		$\overline{T}_i^p$				
0	0,00		1,33				
1	3,67		5,00				
2	5,00		11,83				
3	9,00		10,33				
4	17,50		18,83				
5	17,50		20,17				
6	24,67		26,00				

Przykład c.d.

i	$\overline{T}_i^w$	$\sigma^2_{T_i^w}$	$\overline{T}_i^p$	$\sigma^2_{T_i^p}$			
0	0,00	0,00	1,33	2,98			
1	3,67	0,44	5,00	2,95			
2	5,00	0,44	11,83	1,91			
3	9,00	1,83	10,33	2,35			
4	17,50	2,90	18,83	0,69			
5	17,50	2,90	20,17	0,69			
6	24,67	2,98	26,00	0,00			

Przykład c.d.

i	$\bar{T}_i^w$	$\sigma^2_{T_i^w}$	$\bar{T}_i^p$	$\sigma^2_{T_i^p}$	$\bar{T}_i^p - \bar{T}_i^w$		
0	0,00	0,00	1,33	2,98	1,33		
1	3,67	0,44	5,00	2,95	1,33		
2	5,00	0,44	11,83	1,91	6,83		
3	9,00	1,83	10,33	2,35	1,33		
4	17,50	2,90	18,83	0,69	1,33		
5	17,50	2,90	20,17	0,69	2,67		
6	24,67	2,98	26,00	0,00	1,33		

Przykład c.d.

$$u_i = \left(\frac{T_i^{(p)} - T_i^{(w)}}{\sqrt{\sigma^2_{T_i^{(p)}} + \sigma^2_{T_i^{(w)}}}} \right)$$

i	$\overline{T}_i^w$	$\sigma^2_{T_i^w}$	$\overline{T}_i^p$	$\sigma^2_{T_i^p}$	$\overline{T}_i^p - \overline{T}_i^w$	u_i	
0	0,00	0,00	1,33	2,98	1,33	0,45	
1	3,67	0,44	5,00	2,95	1,33	0,45	
2	5,00	0,44	11,83	1,91	6,83	3,49	
3	9,00	1,83	10,33	2,35	1,33	0,45	
4	17,50	2,90	18,83	0,69	1,33	0,45	
5	17,50	2,90	20,17	0,69	2,67	0,90	
6	24,67	2,98	26,00	0,00	1,33	0,45	

prof. Joanna Józefowska

Przykład c.d.

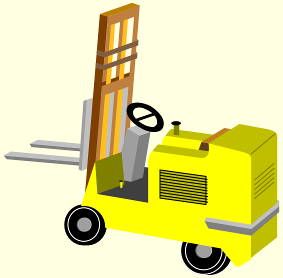
$$u_i = \left(\frac{T_i^{(p)} - T_i^{(w)}}{\sqrt{\sigma^2_{T_i^{(p)}} + \sigma^2_{T_i^{(w)}}}} \right)$$

i	$\overline{T}_i^w$	$\sigma^2_{T_i^w}$	$\overline{T}_i^p$	$\sigma^2_{T_i^p}$	$\overline{T}_i^p - \overline{T}_i^w$	u_i	$\Phi(-u_i)$
0	0,00	0,00	1,33	2,98	1,33	0,45	0,3263
1	3,67	0,44	5,00	2,95	1,33	0,45	0,3263
2	5,00	0,44	11,83	1,91	6,83	3,49	0,0002
3	9,00	1,83	10,33	2,35	1,33	0,45	0,3263
4	17,50	2,90	18,83	0,69	1,33	0,45	0,3263
5	17,50	2,90	20,17	0,69	2,67	0,90	0,1840
6	24,67	2,98	26,00	0,00	1,33	0,45	0,3263

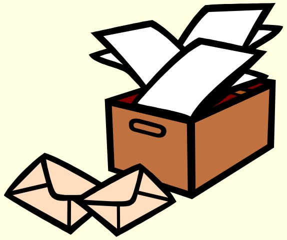
prof. Joanna Józefowska

Zasoby

- Zasoby odnawialne



- Zasoby nieodnawialne



- Zasoby podwójnie ograniczone

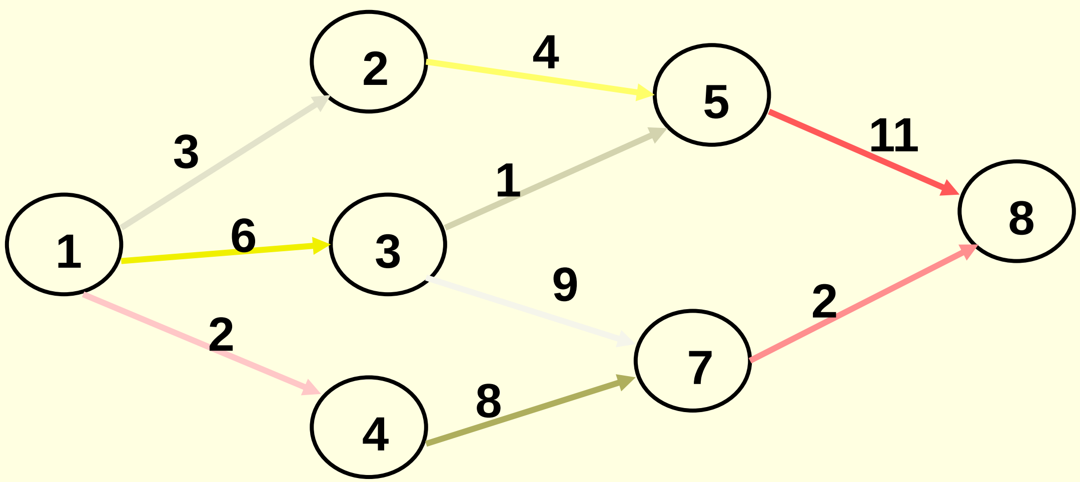
Problem rozdziału zasobów

- R –liczba zasobów odnawialnych
- N – liczba zasobów nieodnawialnych
- R_k – liczba jednostek k-tego zasobu odnawialnego, $k = 1, 2, ..., R$
- N_l – liczba jednostek l-tego zasobu nieodnawialnego, $l = 1, 2, ..., N$
- r_{jk} – liczba jednostek zasobu k żądanych przez czynność j
- n_{jl} - liczba jednostek zasobu l zużywanych przez czynność j

prof. Joanna Józefowska

Problemy rozdziału zasobów

Zadanie / Zasób	<1,2>	<1,3>	<1.4>	<2,5>	<3,5>	<3,7>	<4,7>	<5,8>	<7,8>	dostępne
1	1	0	2	0	3	2	1	1	0	3
2	2	4	1	3	1	2	1	5	4	5
3	0	2	0	3	0	0	2	3	2	4



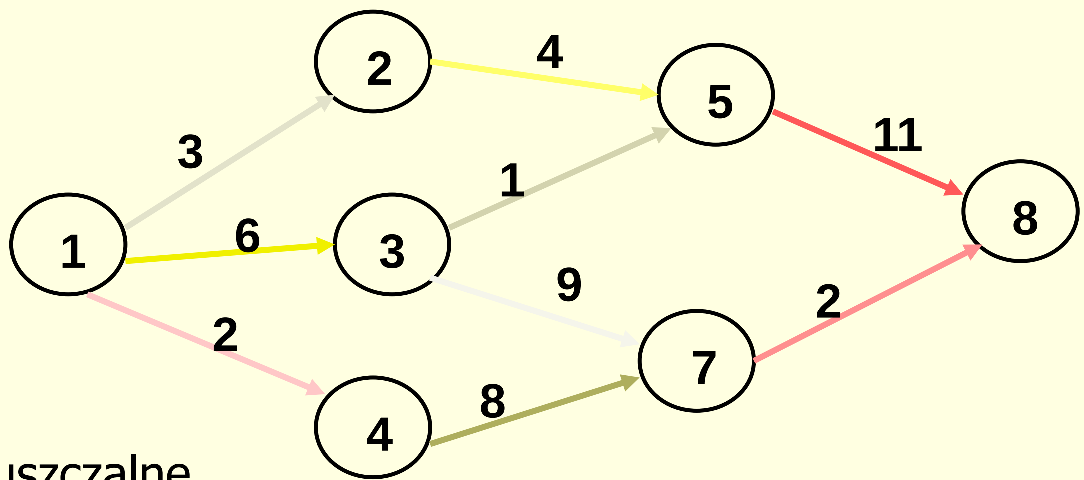
CPM

1-2			2-5				5-8											
1-4		4-7																
1-3						3-5	3-7									7-8		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

prof. Joanna Józefowska

Problemy rozdziału zasobów

Zadanie / Zasób	<1,2>	<1,3>	<1.4>	<2,5>	<3,5>	<3,7>	<4,7>	<5,8>	<7,8>	dostępne
1	1	0	2	0	3	2	1	1	0	3
2	2	4	1	3	1	2	1	5	4	5
3	0	2	0	3	0	0	2	3	2	4



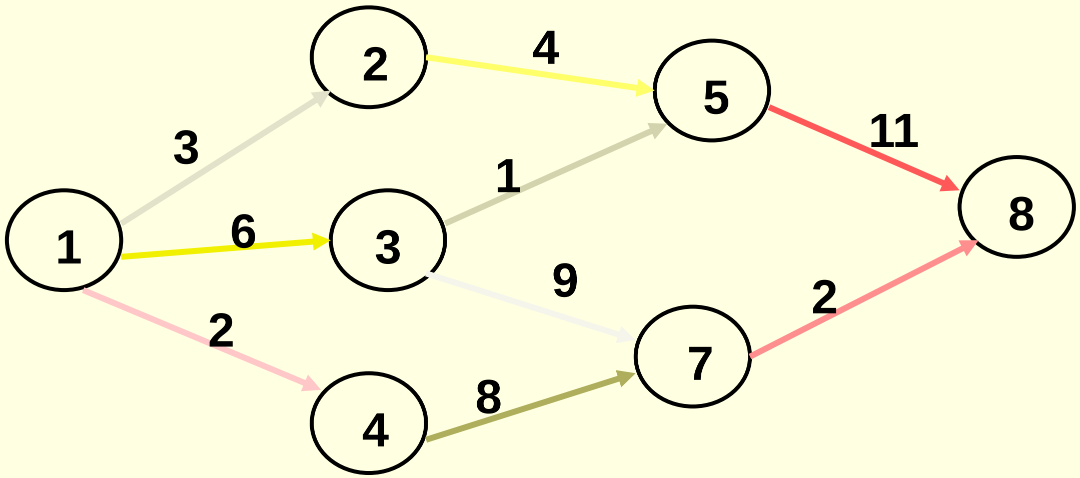
Uszeregowanie dopuszczalne

1-2										2-5									3-5		5-8
1-4			1-3							3-7									7-8		
		4-7																			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

prof. Joanna Józefowska

Problemy rozdziału zasobów

Zadanie / Zasób	<1,2>	<1,3>	<1.4>	<2,5>	<3,5>	<3,7>	<4,7>	<5,8>	<7,8>	dostępne
1	1	0	2	0	3	2	1	1	0	3
2	2	4	1	3	1	2	1	5	4	5
3	0	2	0	3	0	0	2	3	2	4



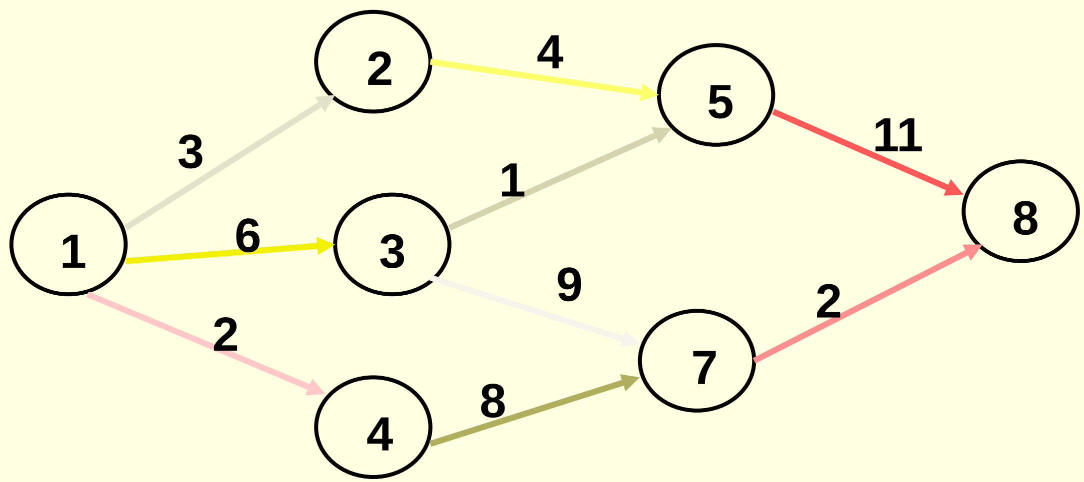
Zasób 1

1-2										3-7									3-5		5-8
1-4		4-7																			

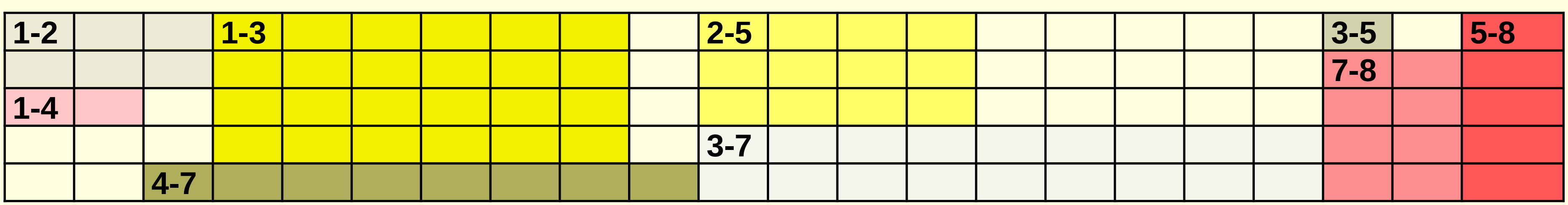
prof. Joanna Józefowska

Problemy rozdziału zasobów

Zadanie / Zasób	<1,2>	<1,3>	<1.4>	<2,5>	<3,5>	<3,7>	<4,7>	<5,8>	<7,8>	dostępne
1	1	0	2	0	3	2	1	1	0	3
2	2	4	1	3	1	2	1	5	4	5
3	0	2	0	3	0	0	2	3	2	4



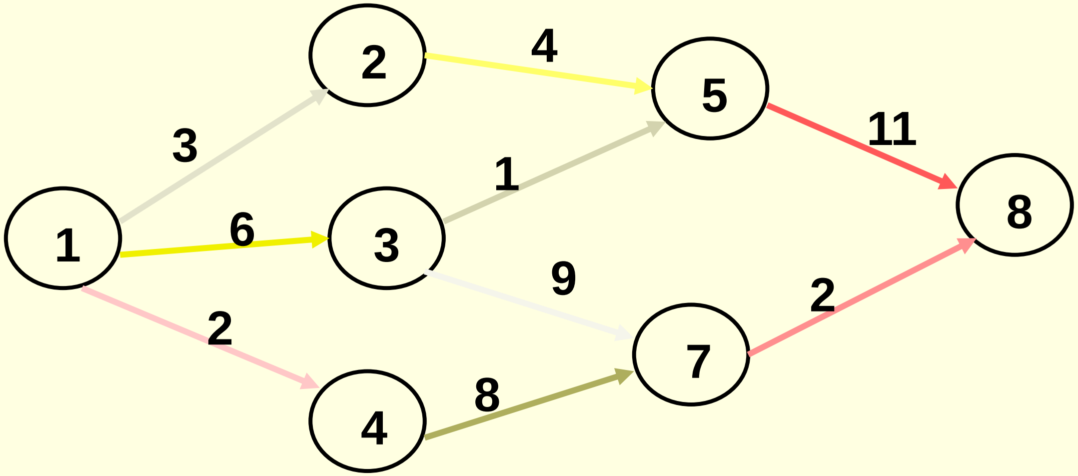
Zasób 2



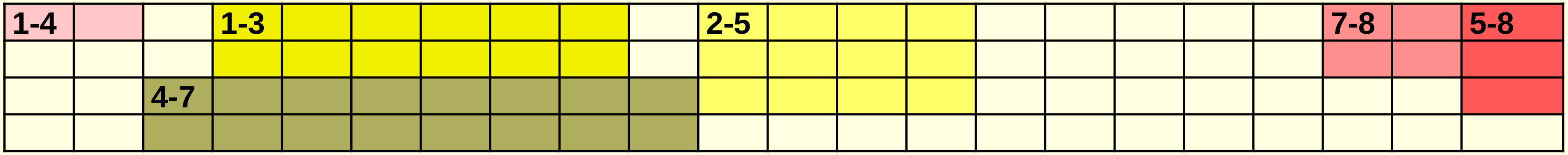
prof. Joanna Józefowska

Problemy rozdziału zasobów

Zadanie Zasób	<1,2>	<1,3>	<1.4>	<2,5>	<3,5>	<3,7>	<4,7>	<5,8>	<7,8>	dostępne
1	1	0	2	0	3	2	1	1	0	3
2	2	4	1	3	1	2	1	5	4	5
3	0	2	0	3	0	0	2	3	2	4



Zasób 3



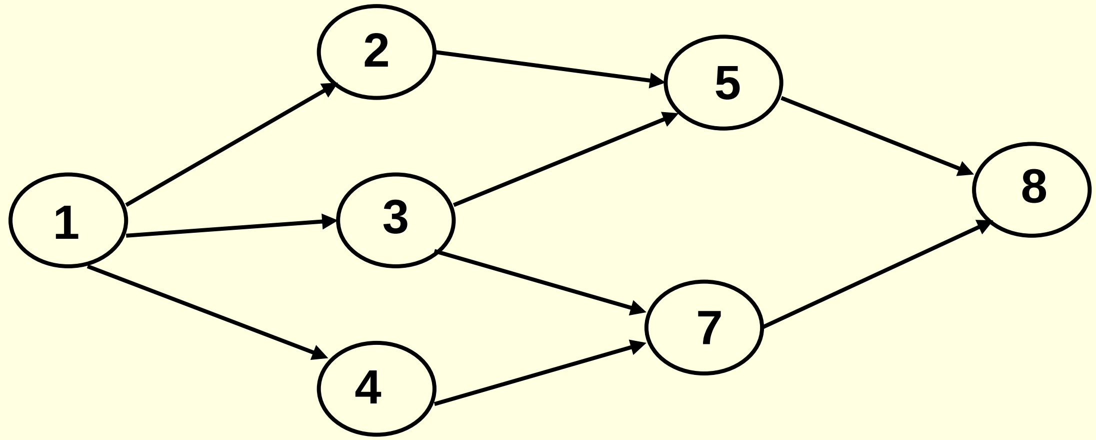
Problem rozdziału zasobów z wieloma sposobami wykonywania czynności

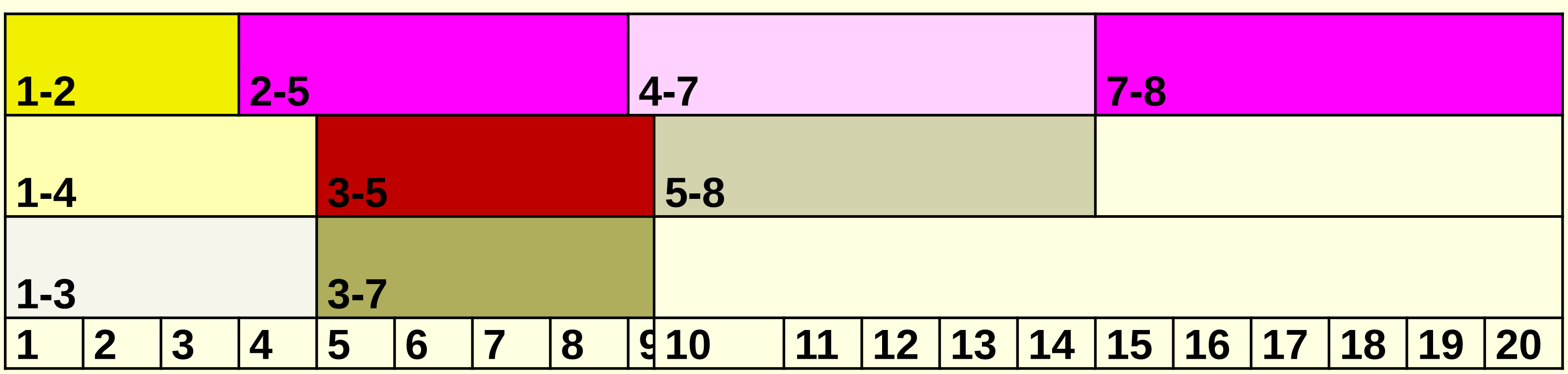
- M_j – liczba sposobów wykonania czynności j
- d_{jm} – czas trwania czynności j wykonywanej sposobem m,
- r_{jmk} – liczba jednostek zasobu odnawialnego k wymaganych do wykonania czynności j sposobem m,
- n_{jml} - liczba jednostek zasobu nieodnawialnego l wymaganych do wykonania czynności j sposobem m,

dla więcej niż jednego zasobu znalezienie rozwiązania **dopuszczalnego** jest silnie NP-trudne (Kolish 1995)

Problem rozdziału zasobów z wieloma sposobami wykonywania czynności

Zadanie / Ilość zasobu	<1,2>	<1,3>	<1.4>	<2,5>	<3,5>	<3,7>	<4,7>	<5,8>	<7,8>
1	3	4	4	5	5	5	6	5	6
2	2	3	2	2	3	3	5	3	4
3	1	2	1	1	2	2	4	2	3





Problem rozdziału zasobów z wieloma sposobami wykonywania czynności

- podejścia dokładne:
  - schematy pełnego przeglądu – do 15 czynności
    - Talbot 1982
    - Patterson 1989
  - algorytm podziału i ograniczeń – do 20 czynności
    - Speranza and Vercellis 1993
    - Demeulemeester and Herroelen 1992
    - Sprecher and Drexl 1998

Problem rozdziału zasobów z wieloma sposobami wykonywania czynności - heurystyki

- algorytm podziału i ograniczeń
  - Talbot 1982
  - Sprecher and Drexl 1998
- losowe próbkowanie
  - Drexl and Grünewald 1993
- symulowane wyżarzanie
  - Słowiński et. al. 1994
  - Bouleimen and Lecocq 1998
  - Józefowska et. al. 2001
- algorytmy genetyczne
  - Özdamar 1999
  - Hartmann 2000
- dekompozycja Bendersa
  - Maniezzo and Mingozzi 1999

Zmienny czas wykonania czynności

$$s = \frac{k_{gr} - k_n}{t_n - t_{gr}}$$

t_n, k_n – czas, koszt normalny

t_{gr}, k_{gr} – czas, koszt graniczny

s – gradient kosztu

Algorytm kompresji

1. Zestawić czynności krytyczne, podać ich gradienty kosztów s oraz czasy graniczne t_{gr}.
2. Wyeliminować z zestawienia te czynności, dla których $t_{gr} = t_n$.
3. Proces skracania rozpocząć od czynności krytycznej o najniższym gradiencie kosztów s.
4. Należy starać się skrócić czas trwania czynności o jak największą liczbę jednostek. Występują tu dwa ograniczenia:
   - czas graniczny danej czynności t_{gr},
   - pojawienie się nowej ścieżki krytycznej.

Algorytm kompresji

5. Przy istnieniu dwóch lub więcej ścieżek krytycznych w sieci należy skracać czas o tę samą wielkość na wszystkich równoległych ścieżkach krytycznych.
6. Najkrótszy termin wykonania programu uzyskuje się, gdy wszystkie czynności na ścieżce krytycznej osiągną czasy graniczne.
7. Koszty przyspieszenia czynności oblicza się mnożąc liczbę jednostek czasu, o które czynność została skrócona przez jej gradient kosztów.

Zaktualizowana wartość netto

$$NPV = CF_0 + \sum_{t=1}^{\infty} CF_1 (1+r)^{-t}$$

- CF_0 - przepływ (wypływ) gotówki występujący na początku realizacji przedsięwzięcia
- CF_1 - przepływ gotówki występujący na końcu okresu t
- r - stopa dyskontowa