Lineare Algebra

Simon Krenger

May 22, 2012

Chapter 1

Vektoren

1.1 Vektorrechnung

Vektor von Punkt A zu Punkt B

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} \tag{1.1}$$

Nullvektor

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \tag{1.2}$$

Kommutativität (+)

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \tag{1.3}$$

Assoziativität (+)

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \tag{1.4}$$

Neutrales Element (+)

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u} \tag{1.5}$$

Inverses Element (+)

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} \tag{1.6}$$

Assozativität (·)

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u} \tag{1.7}$$

Distributiv I

$$\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{u}) = (\alpha \cdot \vec{u}) + (\alpha \cdot \vec{v}) \tag{1.8}$$

Betrag

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} \tag{1.9}$$

Vektor mit Länge 1

$$\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{1}{\vec{w}} \cdot \vec{w} \tag{1.10}$$

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ heissen linear unabhängig, wenn aus

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0} \quad \text{also} \quad \alpha = \beta = \gamma = 0 \tag{1.11}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \tag{1.12}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\phi \tag{1.13}$$

Der Betrag von $\vec{u}$ gleich der Quadratwurzel des Skalarprodukts von $\vec{u}$ mit sich selbst

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \tag{1.14}$$

Orthogonalprojektion von $\vec{u}$ auf $\vec{a}$

$$proj_a \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \tag{1.15}$$

Vektorprodukt (nur $\mathbb{R}^3$)

$$\vec{a} \times \vec{b} = det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3 \tag{1.16}$$

Spatprodukt

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{1.17}$$

Volumen eines Spates

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \tag{1.18}$$

1.2 Vektorgeometrie

1.2.1 Gerade

Vektorielle Gleichung der Geraden

$$g : \vec{s} = \vec{p} + \lambda(\vec{q} - \vec{p}) \wedge \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.19}$$

Koordinatengleichung der Geraden (Kartesische Form)

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{Normale} \quad \vec{n} = (A, B) \tag{1.20}$$

Gerade aus zwei Punkten A und B

$$s = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \tag{1.21}$$

Abstand von (0,0) von der Geraden

1. Normalform berechnen ($Ax + By + C = 0$)
2. Normale bestimmen ($\vec{n} = (A, B)$)
3. Alle Koeffizienten durch Länge der Normalen dividieren
4. Koeffizient C ist nun der Vektor von $(0, 0)$ zur Geraden
5. h aus C berechnen ($h = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$)

Abstand von P zu g

$$d(R, g) = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}(r^2 - p^2) \tag{1.22}$$

Abstand von P zu g ($\mathbb{R}^3$)

$g : P, Q$ und $R \notin g$ und $\vec{q} - \vec{p} = \vec{u}$

$$d(R, g) = h = \frac{|(\vec{r} \cdot \vec{p}) \times (\vec{q} - \vec{p})|}{|\vec{q} - \vec{p}|} = \frac{|(\vec{r} \cdot \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \tag{1.23}$$

Abstand zwischen zwei Geraden

Spat zwischen den Geraden aufspannen

$$h = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (p_1 - p_0)|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \tag{1.24}$$

1.2.2 Ebene im Raum

Vektorform: $\vec{s} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) + \alpha(\vec{c} - \vec{a})$
Kartesische Form: $Ax + By + Cz + D = 0$
Normale: $\vec{n} = (A, B, C) \perp \Sigma$

Bestimmung der Normalform: Zuerst $\vec{n}$ bestimmen aus $\vec{n} = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})$, anschliessend Punkt einsetzen und D ausrechnen.

Abstand vom Ursprung

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1.25}$$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \tag{1.26}$$

Damit ist $h = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Abstand eines Punktes zu einer Ebene

Mit $P = (p_1, p_2, p_3)$

$$h = d(P, \Sigma) = \frac{A \cdot p_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{B \cdot p_2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{C \cdot p_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{1.27}$$

Schnittpunkt Gerade und Ebene

$g : \vec{s} = p + \lambda\vec{u} \quad \wedge \quad \vec{u} = \vec{q} - \vec{p}$
$\Sigma : Ax + By + Cz + D = 0$
$g : x = p_1 + \lambda u_1 \quad y = p_2 + \lambda u_2 \quad z = p_3 + \lambda u_3$

Anschliessend einsetzen in Σ:

$$A(p_1 + \lambda u_1) + B(p_2 + \lambda u_2) + C(p_3 + \lambda u_3) + D = 0 \tag{1.28}$$

Das errechnete λ dann in $\vec{s}$ einsetzen und Punkt berechnen.

Reflexion Gerade an der Ebene

$g : \vec{s} = \vec{p} + \lambda\vec{u} \quad \wedge \quad \vec{u} = \vec{q} - \vec{p}$
$\Sigma : Ax + By + Cz + D = 0$
Schnittpunkt $S = g \cap \Sigma$ und Spiegelpunkt $p' = \vec{p} + 2\mu\vec{n} \quad \wedge \quad \vec{n} = (A, B, C)^T$

1. Normale $\vec{n}$ bestimmen: $\vec{n} = (A, B, C)^T$
2. Schnittpunkt Gerade / Ebene bestimmen ($\vec{s}$)
3. Anschliessend Normale von P auf Σ bestimmen (Punkt $T : \vec{t} = \vec{p} + \mu\vec{n}$)
4. Mit dem λ aus der vorherigen Rechnung können wir p' berechnen: $p' = \vec{p} + 2 \cdot \lambda\vec{n}$
5. Damit ist die gespiegelte Gerade: $g' : \vec{s} + \alpha(\vec{p} - \vec{s})$

Winkel zwischen zwei Ebenen

$$\cos\Phi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2 + {C_1}^2}\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2 + {C_2}^2}} \tag{1.29}$$

1.2.3 Kugel

Gleichung der Kugel

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = R^2 \tag{1.30}$$

oder
Kreismittelpunkt M, Punkt auf Kreis s

$$(\vec{s} - \vec{m}) \cdot (\vec{s} - \vec{m}) = R^2 = |\vec{s} - \vec{m}|^2 \tag{1.31}$$

In $\mathbb{R}^3$

$$(x-\frac{A}{2})^2+(y-\frac{B}{2})^2+(z-\frac{C}{2})^2=R^2 \tag{1.32}$$

Schnitt Gerade mit Kugel

$g:\vec{s}=\vec{p}+\lambda\vec{u}$
$K:(\vec{s}-\vec{m})(\vec{s}-\vec{m})=R^2$

$$F=g\cap K:[(\vec{p}+\lambda\vec{u})-\vec{m}][(\vec{p}+\lambda\vec{u})-\vec{m}]=R^2 \tag{1.33}$$

$$\lambda^2(\vec{u}\cdot\vec{u})+2\lambda(\vec{p}-\vec{m})+(\vec{p}-\vec{m})-R^2=0 \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned}
(\vec{s}-\vec{m})\cdot(\vec{s}-\vec{m}) &= R^2=|\vec{s}-\vec{m}|^2 && (1.35)\\
\vec{s}\cdot\vec{s}-2(\vec{s}\cdot\vec{m})+\vec{m}\cdot\vec{m} &= R^2 && (1.36)\\
(\vec{p}+\lambda\vec{u})^2-2(\vec{p}+\lambda\vec{u}\cdot\vec{m})+\vec{m}^2 &= R^2 && (1.37)
\end{aligned}$$

1.2.4 Andere geometrische Figuren

Tetraeder

$$V_{Tetraeder}=\frac{1}{6}[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\frac{1}{6}[\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})] \tag{1.38}$$

Chapter 2

Matrizen

2.1 Einleitung

Matrix A vom Typ (m, n) ist ein Zahlenschema mit m Zeilen und n Spalten, auch $A_{m \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & a_{ij} & ... \\ a_{m1} & ... & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

2.2 Lineare Gleichungssysteme

Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Inhomogenität

$$b = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$[A, b] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Vorgehen zur Lösung linearer Gleichungssysteme mit Matrizen

1. Matrizen aufstellen
2. Reduktion der Matrix
3. Bestimmen Anzahl Lösungen
4. Berechnung der Lösungen

2.3 Spezielle Matrizen

2.3.1 Nullmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & 0 & ... \\ 0 & ... & ... & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

2.3.2 Einheitsmatrix

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Dabei gilt: $A \cdot I = I \cdot A = A$

2.4 Matrizenoperationen

2.4.1 Addition

Zwischen Matrizen gleichen Types

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = C_{m\times n} \tag{2.7}$$

2.4.2 Skalare Multiplikation

$$B = \lambda A \quad \rightarrow \quad b_{ij} = \lambda \cdot A_{ij} \tag{2.8}$$

B entspricht dem gleichen Typ wie A, Typ wird nicht geändert.

2.4.3 Multiplikation

$A_{m\times n}$ multipliziert mit $B_{p\times q}$, nur möglich falls "Anzahl Spalten von A = Anzahl Zeilen von B" ist.

$$C_{n\times p} = A_{m\times n} \cdot B_{p\times q} \tag{2.9}$$

mit

$$c_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{b}_j \quad \wedge \quad \vec{a}_i = \text{i-te Zeilenvektor von A} \tag{2.10}$$

$$\wedge \quad \vec{b}_j = \text{j-te Spaltenvektor von B} \tag{2.11}$$

$$\cdot \quad \text{Skalarprodukt analog Vektoren} \tag{2.12}$$

2.4.4 Lineare Gleichungssysteme als Matrizen

Wenn $A\vec{x} = \vec{b}$, gesucht ist $\vec{x} = (x, y, z)^T$
Es gilt: $A \cdot A^{-1} = I$, damit ist $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$
D.h. bei 2x2 Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

2.4.5 Determinanten

$$det(A) = |A| = ad - bc \quad \text{, falls} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Die Matrix A ist invertierbar, falls $det(A) \neq 0$
DIe Determinante ist bis auf das Vorzeichen die Fläche des Parallelogramms, welches von den Vektoren $\vec{p} = (a, c)^T$ und $\vec{q} = (b, d)^T$ aufgespannt wird.

2.5 Cramersche Regel

Wenn

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

ist nach der Cramerschen Regel:
$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}$
und damit
$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} \quad x_2 = \frac{det(A_2)}{det(A)} \quad x_3 = \frac{det(A_3)}{det(A)}$
Wann ist eine Determinante $= 0$?

1. A enthält eine Zeile (oder Spalte) mit lauter 0
2. Zwei Zeilen (oder Spalten) sind gleich
3. Zwei Zeilen (oder Spalten) sind zueinander proportional
4. Eine Zeile (oder Spalte) ist eine Linearkombination der übrigen Zeilen / Spalten

2.5.1 Inverse bestimmen

Gauss-Jordan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Dann nach unten mit Gauss reduzieren und nach oben mit Gauss reduzieren, bis linke Seite der Identitätsmatrix entspricht.