

# Lineare Algebra

Simon Krenger

July 8, 2012

# Chapter 1

## Vektoren

### 1.1 Vektoralgebra

Vektor von Punkt A zu Punkt B

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} \quad (1.1)$$

Nullvektor

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \quad (1.2)$$

Kommutativität (+)

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (1.3)$$

Assoziativität (+)

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (1.4)$$

Neutrales Element (+)

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u} \quad (1.5)$$

Inverses Element (+)

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} \quad (1.6)$$

Assoziativität ( $\cdot$ )

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u} \quad (1.7)$$

Distributiv I

$$\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) + (\alpha \cdot \vec{v}) \quad (1.8)$$

Betrag

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.9)$$

Vektor mit Länge 1

$$\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{1}{|\vec{w}|} \cdot \vec{w} \quad (1.10)$$

Die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  heissen linear unabhängig, wenn aus

$$\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c} = \vec{0} \quad \text{also} \quad \alpha = \beta = \gamma = 0 \quad (1.11)$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (1.12)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \phi \quad (1.13)$$

Der Betrag von  $\vec{u}$  gleich der Quadratwurzel des Skalarprodukts von  $\vec{u}$  mit sich selbst

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \quad (1.14)$$

Orthogonalprojektion von  $\vec{u}$  auf  $\vec{a}$

$$proj_a \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \quad (1.15)$$

Vektorprodukt (nur  $\mathbb{R}^3$ )

$$\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3 \quad (1.16)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \phi \quad (1.17)$$

Spatprodukt

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \quad (1.18)$$

Volumen eines Spates

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \quad (1.19)$$

## 1.2 Vektorgeometrie

### 1.2.1 Gerade

Vektorielle Gleichung der Geraden

$$g : \vec{s} = \vec{p} + \lambda(\vec{q} - \vec{p}) \wedge \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.20)$$

Koordinatengleichung der Geraden (Kartesische Form)

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{Normale} \quad \vec{n} = (A, B) \quad (1.21)$$

Gerade aus zwei Punkten A und B

$$s = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) \quad (1.22)$$

#### Abstand von (0,0) von der Geraden

1. Normalform berechnen ( $Ax + By + C = 0$ )
2. Normale bestimmen ( $\vec{n} = (A, B)$ )
3. Alle Koeffizienten durch Länge der Normalen dividieren
4. Koeffizient C ist nun der Vektor von (0,0) zur Geraden
5. h aus C berechnen ( $h = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$ )

#### Abstand von P zu g

$$d(R, g) = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}(r^2 - p^2) \quad (1.23)$$

#### Abstand von P zu g ( $\mathbb{R}^3$ )

$g : P, Q$  und  $R \notin g$  und  $\vec{q} - \vec{p} = \vec{u}$

$$d(R, g) = h = \frac{|(\vec{r} \cdot \vec{p}) \times (\vec{q} - \vec{p})|}{|\vec{q} - \vec{p}|} = \frac{|(\vec{r} \cdot \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} \quad (1.24)$$

#### Abstand zwischen zwei Geraden

Spat zwischen den Geraden aufspannen

$$h = \frac{|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (p_1 - p_0)|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \quad (1.25)$$

### 1.2.2 Ebene im Raum

Vektorform:  $\vec{s} = \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) + \alpha(\vec{c} - \vec{a})$

Kartesische Form:  $Ax + By + Cz + D = 0$

Normale:  $\vec{n} = (A, B, C) \perp \Sigma$

Bestimmung der Normalform: Zuerst  $\vec{n}$  bestimmen aus  $\vec{n} = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})$ , anschliessend Punkt einsetzen und  $D$  ausrechnen.

### Abstand vom Ursprung

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1.26)$$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}z + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0 \quad (1.27)$$

Damit ist

$$h = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (1.28)$$

### Abstand eines Punktes zu einer Ebene

Mit  $P = (p_1, p_2, p_3)$

$$h = d(P, \Sigma) = \frac{A \cdot p_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{B \cdot p_2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{C \cdot p_3}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (1.29)$$

### Schnittpunkt Gerade und Ebene

$$g : \vec{s} = \vec{p} + \lambda \vec{u} \quad \wedge \quad \vec{u} = \vec{q} - \vec{p}$$

$$\Sigma : Ax + By + Cz + D = 0$$

$$g : x = p_1 + \lambda u_1 \quad y = p_2 + \lambda u_2 \quad z = p_3 + \lambda u_3$$

Anschließend einsetzen in  $\Sigma$ :

$$A(p_1 + \lambda u_1) + B(p_2 + \lambda u_2) + C(p_3 + \lambda u_3) + D = 0 \quad (1.30)$$

Das errechnete  $\lambda$  dann in  $\vec{s}$  einsetzen und Punkt berechnen.

### Reflexion Gerade an der Ebene

$$g : \vec{s} = \vec{p} + \lambda \vec{u} \quad \wedge \quad \vec{u} = \vec{q} - \vec{p}$$

$$\Sigma : Ax + By + Cz + D = 0$$

Schnittpunkt  $S = g \cap \Sigma$  und Spiegelpunkt  $p' = \vec{p} + 2\mu\vec{n} \quad \wedge \quad \vec{n} = (A, B, C)^T$

1. Normale  $\vec{n}$  bestimmen:  $\vec{n} = (A, B, C)^T$

2. Schnittpunkt Gerade / Ebene bestimmen ( $\vec{s}$ )

3. Anschließend Normale von P auf  $\Sigma$  bestimmen (Punkt  $T : \vec{t} = \vec{p} + \mu\vec{n}$ )

4. Mit dem  $\lambda$  aus der vorherigen Rechnung können wir  $p'$  berechnen:  $p' = \vec{p} + 2 \cdot \lambda \vec{n}$

5. Damit ist die gespiegelte Gerade:  $g' : \vec{s} + \alpha(\vec{p} - \vec{s})$

### Winkel zwischen zwei Ebenen

$$\cos \Phi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (1.31)$$

### 1.2.3 Kugel

Gleichung der Kugel

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = R^2 \quad (1.32)$$

oder

Kreismittelpunkt  $M$ , Punkt auf Kreis  $s$

$$(\vec{s} - \vec{m}) \cdot (\vec{s} - \vec{m}) = R^2 = |\vec{s} - \vec{m}|^2 \quad (1.33)$$

In  $\mathbb{R}^3$

$$(x - \frac{A}{2})^2 + (y - \frac{B}{2})^2 + (z - \frac{C}{2})^2 = R^2 \quad (1.34)$$

### Schnitt Gerade mit Kugel

$$g : \vec{s} = \vec{p} + \lambda \vec{u}$$

$$K : (\vec{s} - \vec{m})(\vec{s} - \vec{m}) = R^2$$

$$F = g \cap K : [(\vec{p} + \lambda \vec{u}) - \vec{m}][(\vec{p} + \lambda \vec{u}) - \vec{m}] = R^2 \quad (1.35)$$

$$\lambda^2(\vec{u} \cdot \vec{u}) + 2\lambda(\vec{p} - \vec{m}) \cdot \vec{u} + (\vec{p} - \vec{m}) \cdot (\vec{p} - \vec{m}) - R^2 = 0 \quad (1.36)$$

$$(\vec{s} - \vec{m}) \cdot (\vec{s} - \vec{m}) = R^2 = |\vec{s} - \vec{m}|^2 \quad (1.37)$$

$$\vec{s} \cdot \vec{s} - 2(\vec{s} \cdot \vec{m}) + \vec{m} \cdot \vec{m} = R^2 \quad (1.38)$$

$$(\vec{p} + \lambda \vec{u}) \cdot (\vec{p} + \lambda \vec{u}) - 2(\vec{p} + \lambda \vec{u}) \cdot \vec{m} + \vec{m} \cdot \vec{m} = R^2 \quad (1.39)$$

### 1.2.4 Andere geometrische Figuren

#### Tetraeder

$$V_{Tetraeder} = \frac{1}{6} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \frac{1}{6} [\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})] \quad (1.40)$$

## Chapter 2

# Lineare Gleichungssysteme

Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Inhomogenität

$$b = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$[A, b] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11} \\ a_{21} & a_{22} & b_{21} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

### 2.1 Elementare Zeilenoperationen

1. Zeilenaustausch
2. Multiplikation mit Skalar  $\neq 0$
3. Addition eines Vielfachen einer Zeile

#### 2.1.1 Gauss-Jordan Verfahren

1. Reduktion der erweiterten Koeffizientenmatrix
2. Lösung mit Rückwärtssubstitution

#### 2.1.2 Rang

Wir bezeichnen:  $n$  = Anzahl Variablen  
 $m$  = Anzahl Gleichungen

$\text{Rg}(A)$ : Rang einer Matrix

$\text{Rg}(A) \neq \text{Rg}(A-b)$ : Keine Lösung

$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A-b) \wedge \text{Rg}(A) = n$ : Genau 1 Lösung

$\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A-b) \wedge \text{Rg}(A) < n$ : Unendlich viele Lösungen

Mit Anzahl freie Parameter:  $\text{Null}(A) = n - \text{Rg}(A)$

## Chapter 3

# Matrizen

Matrix  $A$  vom Typ  $(m, n)$  ist ein Zahlenschema mit  $m$  Zeilen und  $n$  Spalten, auch  $A_{m \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

### 3.1 Spezielle Matrizen

#### 3.1.1 Nullmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

#### 3.1.2 Einheitsmatrix

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Dabei gilt:  $A \cdot I = I \cdot A = A$

### 3.2 Matrizenoperationen

#### 3.2.1 Addition

Zwischen Matrizen gleichen Types

$$A_{m \times n} \pm B_{m \times n} = C_{m \times n} \quad (3.4)$$

#### 3.2.2 Skalare Multiplikation

$$B = \lambda A \quad \rightarrow \quad b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij} \quad (3.5)$$

B entspricht dem gleichen Typ wie A, Typ wird nicht geändert.



### 3.2.3 Multiplikation

$A_{m \times n}$  multipliziert mit  $B_{p \times q}$ , nur möglich falls "Anzahl Spalten von A = Anzahl Zeilen von B" ist.

$$C_{n \times p} = A_{m \times n} \cdot B_{p \times q} \quad (3.6)$$

mit

$$c_{ij} = \vec{a}_i \cdot \vec{b}_j \quad \wedge \quad \vec{a}_i = i\text{-te Zeilenvektor von A} \quad (3.7)$$

$$\wedge \quad \vec{b}_j = j\text{-te Spaltenvektor von B} \quad (3.8)$$

$$\cdot \quad \text{Skalarprodukt analog Vektoren} \quad (3.9)$$

## 3.3 Lineare Gleichungssysteme als Matrizen

Wenn  $A\vec{x} = \vec{b}$ , gesucht ist  $\vec{x} = (x, y, z)^T$

Es gilt:  $A \cdot A^{-1} = I$ , damit ist  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

D.h. bei 2x2 Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

### 3.3.1 Determinanten

$$\det(A) = |A| = ad - bc \quad , \text{ falls } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Die Matrix A ist invertierbar, falls  $\det(A) \neq 0$

Die Determinante ist bis auf das Vorzeichen die Fläche des Parallelogramms, welches von den Vektoren  $\vec{p} = (a, c)^T$  und  $\vec{q} = (b, d)^T$  aufgespannt wird.

### 3.3.2 Cramersche Regel

Wenn

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

ist nach der Cramerschen Regel:

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

und damit

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$

Wann ist eine Determinante = 0?

1. A enthält eine Zeile (oder Spalte) mit lauter 0
2. Zwei Zeilen (oder Spalten) sind gleich
3. Zwei Zeilen (oder Spalten) sind zueinander proportional
4. Eine Zeile (oder Spalte) ist eine Linearkombination der übrigen Zeilen / Spalten

### 3.3.3 Inversion

Eine Matrix  $A$  ist invertierbar, falls  $\det(A) \neq 0$ . Gesucht ist die Inverse zur Matrix  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Die Einheitsmatrix wird angehängt  $(A|E)$ :

$$(A|E) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Dann nach unten mit Gauss reduzieren und nach oben mit Gauss reduzieren, bis linke Seite der Identitätsmatrix entspricht.

## Chapter 4

# Lineare Abbildungen

### 4.1 Streckung um Faktor A

$$A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Mit  $c = 1$  ergibt sich die Identitätsmatrix

### 4.2 Rotation

$$A = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad A_{90} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

### 4.3 Spiegelung an Achse durch Ursprung

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix} \quad A_{x=y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

### 4.4 Scherung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

#### 4.4.1 Homogene Koordinaten

Jedem Punkt eine zusätzliche Koordinate  $h$  zugewiesen. Die Transformationsmatrizen werden um eine Zeile und eine Spalte mit Einheitswerten erweitert.

Rotation:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Skalierung:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

Translation:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

So kann beispielsweise ein Ablauf aus "Verschiebung zum Zentrum (3, -2)", "Rotation um 90 Grad" und "Verschiebung zurück" folgendermassen beschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Die resultierende Matrix kann dann auf jeden Punkt angewendet werden (und muss nicht immer neu berechnet werden).

## Chapter 5

# Komplexe Zahlen

### 5.1 Definitionen

$i$  = Imaginäre Einheit

$$i^0 = 1 \quad (5.1)$$

$$i^1 = i \quad (5.2)$$

$$i^2 = -1 \quad (5.3)$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i \quad (5.4)$$

$$i^4 = (i^2)^2 = 1 \quad (5.5)$$

Eine komplexe Zahl setzt sich aus einem Realanteil  $a$  und einem Imaginäranteil  $b$  zusammen:

$$z = a + bi \quad (5.6)$$

#### 5.1.1 Grundoperationen

Konjugation von  $z = a + bi$ :

$$\bar{z} = \overline{(a + bi)} = a - bi \quad (5.7)$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \overline{\bar{c}} &= c \\ \overline{c_1 \pm c_2} &= \overline{c_1} \pm \overline{c_2} \\ \overline{c_1 \cdot c_2} &= \overline{c_1} \cdot \overline{c_2} \\ \overline{\frac{c_1}{c_2}} &= \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}} \end{aligned}$$

Betrag von  $z$  ( $abs()$ ):

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \quad (5.8)$$

$$|a \cdot b| = |a| |b| \quad (5.9)$$

Addition:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i \quad (5.10)$$

Differenz:

$$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i \quad (5.11)$$

Multiplikation:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i \quad (5.12)$$

Division:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left( \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) + \left( \frac{-a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2} \right) i \quad (5.13)$$

## Spezialfälle der Grundoperationen

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (b - b)i = 2a \quad (5.14)$$

$$z - \bar{z} = (a + bi) - (a - bi) = (a - a) + (b - (-b))i = 2ib \quad (5.15)$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 \quad (5.16)$$

## 5.2 Polarform

Die Polarform einer komplexen Zahl ist definiert durch einen Winkel ( $\phi$ ) und einen Betrag  $r$ . Mit  $z = a + bi$  ist damit:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (5.17)$$

Weiter ist der Winkel ( $\arg()$ ):

$$\tan \phi = \frac{b}{a} \quad (5.18)$$

Dies gilt in Quadrant I und IV. Für Quadrant II und III gilt:  $\phi = \arctan \frac{b}{a} + \pi$ .  
Damit gilt:

$$z = a + bi = r \cos \phi + ir \sin \phi = r \cdot (\cos \phi + i \sin \phi) \quad (5.19)$$

Dies ergibt dann die Polarform:

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi) \quad (5.20)$$

### 5.2.1 Operationen mit der Polarform

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)] \quad (5.21)$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot [\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2)] \quad (5.22)$$

Potenzen

$$z^n = z_1 \cdot z_2 \cdot \dots \cdot z_n = r^n (\cos \phi + i \sin \phi)^n \quad (5.23)$$

Wurzeln

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} [\cos(\frac{\phi}{n} + k \frac{2\pi}{n}) + i \sin(\frac{\phi}{n} + k \frac{2\pi}{n})] \quad \wedge \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.24)$$

## 5.3 Exponentialschreibweise

$$z = r e^{i\phi} \quad (5.25)$$

Dabei stellt  $r$  den Betrag und  $\phi$  das Argument von  $z$  dar.

Multiplikation

$$c_1 \cdot c_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\phi_1 + \phi_2)} \quad (5.26)$$

Division

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\phi_1 - \phi_2)} \quad (5.27)$$

Potenzen

$$c^n = (r e^{i\phi})^n = r^n e^{in\phi} \quad (5.28)$$

Wurzeln

$$c^{\frac{1}{n}} = (r e^{i\phi})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\phi}{n} + k \cdot \frac{360}{n}} \quad (5.29)$$