1 Defintionen

Definition 1. *Die Menge*

$$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_n\} \tag{1}$$

heisst Stichprobenraum (Ereignisraum), wenn jedem Versuchsausgang höchstens ein Element ω_i aus Ω zugeordnet ist.

Definition 2. *Jede Teilmenge von Ω heisst Ereignis. Die leere Menge $\emptyset$ heisst unmögliches Ereignis und Ω heisst sicheres Ereignis.*
Enthält ein Ereignis $E = \{a\}$ nur ein einziges Element, so heisst E ein Elementarereignis.

Definition 3. *1. Zählprinzip: Es gibt n^k Möglichkeiten um n Elemente auf k Plätze (in Gruppen zu k Elementen) zu verteilen.*

Definition 4. *Wir nennen $P(\Omega)$ den Ereignisraum.*

Definition 5. *Zwei Ereignisse heissen (stochastisch) unabhängig, wenn*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{2}$$

Definition 6. *2. Zählprinzip: Wählen wir k aus n Elementen, so gibt es also*

$$n(n-1)(n-2)...(n-k+1) \tag{3}$$

Möglichkeiten, wenn die Reihenfolge wesentlich ist.

Definition 7. *Gegenwahrscheinlichkeit: Es ist also*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{4}$$

heisst die Gegenwahrscheinlichkeit von A.

Definition 8. *Ist $n \in \mathbb{N}$, so heisst*

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \tag{5}$$

die Fakultät von n. Ausserdem ist $0! = 1$.

Definition 9. *3. Zählprinzip: Es gibt $n!$ Möglichkeiten um n Elemente auf n Plätze zu verteilen.*

Definition 10. *Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ heisst*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \textit{mit } 0 \leq k \leq n \tag{6}$$

ein Binominalkoeffizient ("n tief k").

Definition 11. *4. Zählprinzip: Eine Menge mit n Elementen besitzt $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit genau k ($k \leq n$) Elementen.*

Es gibt $\binom{n}{k}$ Kombinationen, um aus einer Menge mit n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen auszuwählen, wenn die Reihenfolge unwesentlich ist.

Eigenschaften der Binominalkoeffizienten

1. symmetrisch
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{7}$$

2.
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{8}$$

3.
$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \tag{9}$$

4.
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \tag{10}$$

Definition 12. *Eine Zufallsvariable Z ist eine Funktion*

$$Z : \Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R} \tag{11}$$

Als Verteilung oder Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Zufallsvariablen Z bezeichnen wir

$$P(Z = k) \tag{12}$$

Definition 13. *Nimmt eine Zufallsvariable Z die Werte $k_1, k_2, k_3, ..., k_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ an, so heisst*

$$\begin{aligned} E(Z) =& k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3 + ... + k_n p_n \\ =& k_1 P(Z = k_1) + k_2 P(Z = k_2) + ... + k_n P(Z = k_n) \\ =& \sum_{i=1}^{n} k_i P(Z = k_i) \end{aligned}$$

der Erwartungswert.

Definition 14. *In einem Experiment werden n Versuche durchgeführt, wobei bei jedem Versuch das Ereignis A mit der Wahrscheinlichkeit p eintreten oder mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ nicht eintreten kann.*
Sind diese Verscuhe unabhängig, so heisst diese Versuchsreihe vom Umfang a ein Bernoulli-Experiment.

Definition 15. *Eine Zufallsvariable Z, welche die Anzahl der notwendigen Schritte bis zum erstmaligen Eintreten des Ereignis A mit Wahrscheinlichkeit $p = P(A)$ in einem Bernoulli-Experiment bestimmt, heisst geometrisch verteilt.*

Definition 16. *Eine Zufallsvariable Z für welche*

$$P(Z = x) = \frac{\binom{R}{x} \cdot \binom{B}{y}}{\binom{R+B}{x+y}} \tag{13}$$

gilt, heisst hypergeometrisch verteilt. Es ist

$$E(Z) = (x + y) \cdot \frac{B}{B + R} \tag{14}$$

wenn Z die Anzahl blauer Kugeln bestimmt.

Definition 17. *Tritt in einem Bernoulli-Experiment das Ereignis A mit Wahrscheinlichkeit p ein und fragen wir nach der Wahrscheinlichkeit, dass A k-mal in n Versuchen aufgetreten ist, so ist die Wahrscheinlichkeit*

$$P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad , q = 1 - p \tag{15}$$

eine binominalverteilte Zufallsvariable.

Definition 18. *Ist Z eine Zufallsvariable, welche die Werte $0, 1, 2, ..., k$ mit der Wahrscheinlichkeit*

$$P(Z = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \tag{16}$$

annimmt, so heisst Z poisson-verteilt.

Definition 19. *Ist Z eine Zufallsvariable, so heisst*

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0; 1] \text{ mit } F(x) = P(Z \leq x) \tag{17}$$

die Verteilungsfunktion.

Definition 20. *Ist*

$$F(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \tag{18}$$

, so heisst die Funktion f Dichtefunktion und $f(x)$ Dichte.

Definition 21. *Wir nennen*

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \tag{19}$$

ein uneigentliches Integral.

Definition 22. *Produktregel*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{20}$$

kurz:

$$(fg)' = f'g + fg' \tag{21}$$

Definition 23. *Kettenregel: Ist $f(x) = h(g(x))$, so ist*

$$f'(x) = h'(u) \cdot g'(x) \tag{22}$$

wobei $u = g(x)$ ist. $g'(x)$ heisst innere Ableitung.

Definition 24. *Eine stetige Zufallsvariable Z mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ heisst normalverteilt, wenn*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{23}$$

ihre Dichtefunktion ist.

Definition 25.

$$r := \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} \tag{24}$$

heisst Korrelationskoeffizient.
Dabei sind s_x, s_y die Standardabweichungen der beiden Stichproben und

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \tag{25}$$

heisst Kovarianz.

1.1 Komposition

$$g(x) = x^2, h(x) = e^x \tag{26}$$

so $(h \circ g)(x) = e^{x^2}$
und $(g \circ h)(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$

2 Laplace-Würfel: Augensummen

2.1 2 Würfel

Summe	Wahrscheinlichkeit
2	1/36 = 2,78 %
3	2/36 = 5,56 %
4	3/36 = 8,33 %
5	4/36 = 11,11 %
6	5/36 = 13,89 %
7	6/36 = 16,67 %
8	5/36 = 13,89 %
9	4/36 = 11,11 %
10	3/36 = 8,33 %
11	2/36 = 5,56 %
12	1/36 = 2,78 %

Denn es ist (mit allen Permutationen):
2 = 1/1
3 = 1/2 = 2/1
4 = 1/3 = 2/2 = 3/1
5 = 1/4 = 2/3 = 3/2 = 4/1
6 = 1/5 = 2/4 = 3/3 = 4/2 = 5/1
7 = 1/6 = 2/5 = 3/4 = 4/3 = 5/2 = 6/1
8 = 2/6 = 3/5 = 4/4 = 5/3 = 6/2
9 = 3/6 = 4/5 = 5/4 = 6/3
10 = 4/6 = 5/5 = 6/4
11 = 5/6 = 6/5
12 = 6/6

2.2 3 Würfel

Summe	Wahrscheinlichkeit
3	1/216
4	2/216
5	6/216
6	10/216
7	15/216
8	21/216
9	25/216
10	27/216
11	27/216
12	25/216
13	21/216
14	15/216
15	10/216
16	6/216
17	3/216
18	1/216

Denn es ist (Achtung, nicht alle Permutationen):
3 = 1/1/1
4 = 1/1/2
5 = 1/1/3 = 2/2/1
6 = 1/1/4 = 1/2/3 = 2/2/2
7 = 1/1/5 = 2/2/3 = 3/3/1 = 1/2/4
8 = 1/1/6 = 2/3/3 = 4/3/1 = 1/2/5 = 2/2/4
9 = 6/2/1 = 4/3/2 = 3/3/3 = 2/2/5 = 1/3/5 = 1/4/4
10 = 6/3/1 = 6/2/2 = 5/3/2 = 4/4/2 = 4/3/3 = 1/4/5
11 = 6/4/1 = 1/5/5 = 5/4/2 = 3/3/5 = 4/3/4 = 6/3/2
12 = 6/5/1 = 4/3/5 = 4/4/4 = 5/2/5 = 6/4/2 = 6/3/3
13 = 6/6/1 = 5/4/4 = 3/4/6 = 6/5/2 = 5/5/3
14 = 6/6/2 = 5/5/4 = 4/4/6 = 6/5/3
15 = 6/6/3 = 6/5/4 = 5/5/5
16 = 6/6/4 = 5/5/6
17 = 6/6/5
18 = 6/6/6

3 Spiele

3.1 Lotto

Schweizer Lotto (6 aus 42 und 6 Glückszahlen)
Ein Sechser: Günstiger Fall 1

$$p = \frac{1}{\binom{42}{6}} = 1,9 * 10^{-7} \tag{27}$$

Ein Fünfer: 5 der 6 und noch eine zusätzliche, aber nicht diejenige die einen Sechser gibt

$$p = \frac{\binom{6}{5} \cdot 36}{\binom{42}{6}} = 4,1 * 10^{-5} \tag{28}$$

Ein Vierer:

$$p = \frac{\binom{6}{4} \cdot \binom{36}{2}}{\binom{42}{6}} = 0.0018 \tag{29}$$

3.2 Jass

Vier Bauern (Asse, Könige, Damen, ...) : 4 Bauern und noch 5 Karten vom Rest

$$p = \frac{\binom{32}{5}}{\binom{36}{9}} = 0.002 \tag{30}$$

Ein Dreiblatt vom Herz-As: Das Dreiblatt und dann noch 6 vom Rest, aber nicht Herz-Bube

$$p = \frac{\binom{33-1}{6}}{\binom{36}{9}} = 0.009 \tag{31}$$

Ein Dreiblatt vom Pik-König: Nicht das As und 10 von Pik

$$p = \frac{\binom{31}{6}}{\binom{36}{9}} = 0.007 \tag{32}$$

50 vom Kreuz-König weisen: Nicht das As und nicht die 9

$$p = \frac{\binom{30}{5}}{\binom{36}{9}} \tag{33}$$

100 vom Kreuz-König weisen: Nicht das As und nicht die 8

$$p = \frac{\binom{29}{4}}{\binom{36}{9}} = \frac{117}{463670} = 0.000252 \tag{34}$$

3.3 Poker

Jeder Spieler erhält 5 von 52 Karten. Das sind $\binom{52}{5} = 2598960$ mögliche Fälle.

Royal Flush: Karten A, K, Q, J, 10 der gleichen Farbe

$$p = \frac{4}{\binom{52}{5}} = 0.0000015 \tag{35}$$

Straight Flush: Fünf aufeinanderfolgende Karten derselben Farbe. Es gibt 9 solche Strassen pro Farbe

$$p = \frac{4 \cdot 9}{\binom{52}{5}} = 0.000014 \tag{36}$$

Four of a kind (Vierling, Poker): Vier gleiche Karten

$$p = \frac{13 \cdot \binom{48}{1}}{\binom{52}{5}} = 0.00024 \tag{37}$$

Full House: Drilling und ein Paar (13 Karten zur Auswahl, also $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten. Für das Tripel haben wir dann noch 12 Kartentypen zur Auswahl und so $\binom{4}{3} = 4$ Möglichkeiten. Es gibt somit $13 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 4 = 3744$ verschiedene Full Houses.

$$p = \frac{13 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 4}{\binom{52}{5}} = \frac{3744}{\binom{52}{5}} = 0.0014 \tag{38}$$

Flush: Fünf Karten derselben Farbe

$$p = \frac{4 \cdot (\binom{13}{5} - 1 - 9)}{\binom{52}{5}} = 0.002 \tag{39}$$

Straight: Fünf aufeinanderfolgende Karten mit verschiedenen Farben. Es gibt 10 solche Straights pro Figur und pro Platz eine der 4 Farben, also $10 \cdot 4^5$ wovon die Flushes zu subtrahieren sind.

$$p = \frac{10 \cot 4^5 - 40}{\binom{52}{5}} = \frac{10200}{\binom{52}{5}} = 0.0039 \tag{40}$$

Drilling: Nicht vierte der Drillingskarten und kein Paar mehr (Full House)

$$p = \frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot (\binom{48}{2} - 12\binom{4}{2})}{\binom{52}{5}} = 0.021 \tag{41}$$

Zwei Paare

$$p = \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2} \cdot 44}{\binom{52}{5}} = 0.047 \tag{42}$$

Ein Paar: 13 Kartentypen für das Paar mit 2 von 4 Karten, also $13 \cdot \binom{4}{2}$ Möglichkeiten. Die restlichen so, dass kein Full House und kein zweites Paar entsteht.

$$p = \frac{13 \cdot \binom{4}{2}\binom{12}{3} \cdot 4^3}{\binom{52}{5}} = 0.42 \tag{43}$$

High Card

$$p = \frac{1302540}{\binom{52}{5}} = 0.501 \tag{44}$$