Wahrscheinlichkeitsrechung und Statistik

Simon Krenger

April 28, 2014

Contents

Chapter 1

Wahrscheinlichkeitsrechnung

1.1 Definitionen

Wir führen ein Experiment wie

- werfen von 2 Münzen
- werfen von 3 Würfeln
- ziehen einer Zahl aus einer Urne

durch und fragen nach möglichen Ereignissen. Also schreiben wir diese als Menge auf

$$M = \{KK, KZ, ZK, ZZ\} \tag{1.1}$$

oder

$$M = \{KK, KZ, ZZ\} \tag{1.2}$$

Definition 1. *Die Menge*

$$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_n\} \tag{1.3}$$

heisst Stichprobenraum (Ereignisraum), wenn jedem Versuchsausgang höchstens ein Element ω_i aus Ω zugeordnet ist.

Beim Werfen eines Würfels sind

- $\Omega_1 = \{gerade, \quad ungerade\}$
- $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\Omega_3 = \{4, \quad keine \quad 4\}$

mögliche Stichprobenräume.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit beim Werfen von 2 (idealen) Würfeln zwei Sechsen zu erhalten? Als Stichprobenräume können wir

$$\begin{aligned}\Omega_1 =&\{(1/1),(1/2),(1/3),(1/4),(1/5),(1/6),\\&(2/2),(2/3),...,(2/6),\\&(3/3),(3/4),...,(3/6),\\&(4/4),(4/5),(4/6),\\&(5/5),(5/6),\\&(6/6)\}\end{aligned}$$

wählen. Wir unterscheiden also z.B. (2/3) und (3/2) nicht.

Auch

$$\begin{aligned}\Omega_1 =&\{(1/1),(1/2),(1/3),(1/4),(1/5),(1/6),\\&(2/1),(2/2),(2/3),...,(2/6),\\&(3/1),(3/2),(3/3),...,(3/6),\\&...\\&(6/1),(6/2),(6/3),...,(6/6)\}\end{aligned}$$

ist ein möglicher Stichprobenraum.

Im ersten Fall ist $|\Omega_1| = 21$ und im zweiten Fall ist $|\Omega_2| = 36$. Sind alle Ereignisse gleichwahrscheinlich, so ist die Wahrscheinlichkeit zwei 6 zu würfeln

- im 1. Fall $p = \frac{1}{21}$
- im 2. Fall $p = \frac{1}{36}$

Welches Modell entspricht der Praxis? (Im Praxisversuch finden wir, dass $\frac{1}{36}$, also der zweite Fall, der Praxis entspricht)

Definition 2. *Jede Teilmenge von Ω heisst Ereignis. Die leere Menge $\emptyset$ heisst unmögliches Ereignis und Ω heisst sicheres Ereignis.*
Enthält ein Ereignis $E = \{a\}$ nur ein einziges Element, so heisst E ein Elementarereignis.

Beispiel 1. *Beim Werfen von 2 Würfeln ist*

$$\Omega = \{(1/1),(1/2),...,(6/6)\} \tag{1.4}$$

und

A: zwei Sechsen würfeln,
also $A = \{(6/6)\}$ ein Elementarereignis.

B: nur Primzahlen würfeln,
also $B = \{(2/2), (2/3), (2/5), (3/2), (3/3), (3/5), (5/2), (5/3), (5/5)\}$
C: Augensumme 9 würfeln,
also $C = \{(3/6), (4/5), (5/4), (6/3)\}$
D: zweimal 7 würfeln,
also $D = \emptyset$

sind mögliche Ereignisse.

Welches ist nun die Wahrscheinlichkeit für eines dieser Ereignisse?

1.2 Definition von Laplace

(Pierre Simon Laplace, 1749 bis 1827, Paris)

Hat in $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, ..., A_n\}$ jedes Ereignis die gleiche Wahrscheinlichkeit, so ist die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis $E = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k (k \leq n)$ bestimmt durch

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} \tag{1.5}$$

Es werden also die günstigen Fälle durch die möglichen Fälle dividiert:

("günstige Fälle" : "mögliche Fälle")

Für die oben genannten Ereignisse ist also $|\Omega| = 36$,

$$|A| = 1 \quad \longrightarrow \quad p = \frac{1}{36} \tag{1.6}$$

$$|B| = 9 \quad \longrightarrow \quad p = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \tag{1.7}$$

$$|C| = 4 \quad \longrightarrow \quad p = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \tag{1.8}$$

$$|D| = 0 \quad \longrightarrow \quad p = 0 \tag{1.9}$$

Definition 3. *1. Zählprinzip: Es gibt n^k Möglichkeiten um n Elemente auf k Plätze (in Gruppen zu k Elementen) zu verteilen.*

- 2 Würfel: $|\Omega| = 6^2$
- 3 Würfel: $|\Omega| = 6^3$
- 3 Münzen: $|\Omega| = 2^3$
- 4 Münzen: $|\Omega| = 2^4$

Beispiel 2. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit*

1. *Beim Werfen von 4 Münzen dreimal Zahl und einmal Kopf zu erhalten?*

$$\begin{aligned} |\Omega| &= 2^4 = 16 \\ A &= \{ZZZK, ZZKZ, ZKZZ, KZZZ\} \\ \rightarrow |A| &= 4 \end{aligned}$$

2. *Beim Werfen von 5 Würfeln vier mal eine 1 und einmal eine 6 zu erhalten?*

$$\begin{aligned} |\Omega| &= 6^5 \\ B &= \{11116, 11161, 11611, 16111, 61111\} \\ \rightarrow |B| &= 5 \end{aligned}$$

3. *Beim Toto zu gewinnen?*
   Bei 13 Spielen ist

   $|\Omega| = 3^{13} = 1594323$

   und einer dieser Tipps ist richtig, also

   $p = \frac{1}{3^{13}} = 6.27 * 10^{-7}$

1.3 Axiome von Kolmogorow

(Andrej Nikolajewitsch Kolmogorow, 25. April 1903 bis 20. Oktober 1987, Moskau)

Betrachten wir den Stichprobenraum Ω, so sind bekanntlich alle Teilmengen von Ω die Ereignisse. Die Menge aller Teilmengen ist die Potenzmenge $P(\Omega)$.

Definition 4. *Wir nennen $P(\Omega)$ den Ereignisraum.*

Axiom 1. *Die Wahrscheinlichkeit p ist eine Funktion über $P(\Omega)$ mit den Eigenschaften*

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ *für alle* $A \in P(\Omega)$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $A, B \in P(\Omega)$ *und* $A \cap B = \emptyset$, *so* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Axiom 3 sagt uns, dass die Ereignisse A und B unvereinbar sind.
Für $P(A \cup B)$ sagen wir "Die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B eintrifft..."

Beispiel 3. *1. Die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen eines Würfels eine 2 oder eine ungerade Zahl zu erhalten*

$$A = \{2\} \longrightarrow |A| = 1 \longrightarrow P(A) = \frac{1}{6} \tag{1.10}$$

$$B = \{1, 3, 5\} \longrightarrow |B| = 3 \longrightarrow P(B) = \frac{3}{6} \tag{1.11}$$

Es ist $A \cap B = \emptyset$, also

$$P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \tag{1.12}$$

2. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit beim Würfeln von 2 Würfeln die Augensumme 10 zu erhalten?

10 = 4 + 6 = 6 + 4 oder 10 = 5 + 5

$$A = \{(4/6), (6/4)\} \longrightarrow P(A) = \frac{2}{36} \tag{1.13}$$

$$B = \{(5/5)\} \longrightarrow P(B) = \frac{1}{36} \tag{1.14}$$

Es ist $A \cap B = \emptyset$, also

$$P(A \cup B) = \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \tag{1.15}$$

Wie ist es nun, wenn $A \cap B \neq \emptyset$? Es ist $A \cup B = A \cup (\overline{A} \cap B)$ und $B = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$.

TODO: Grafik

Wir sehen, dass

A und $\overline{A} \cap B$ disjunkt und $A \cap B$ und $\overline{A} \cap B$ disjunkt sind. Nach Axiom 3 ist also

$$P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B) \tag{1.16}$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \tag{1.17}$$

$$P(A \cup B) - P(B) = P(A) - P(A \cap B) \tag{1.18}$$

und damit

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1.19}$$

Beispiel 4. *Wahrscheinlichkeit, dass beim Werfen von 2 Würfeln beide Zahlen ungerade oder gleich sind.*

$$\begin{aligned} A =& \{(1/1), (1/3), (1/5), ..., (5/5)\} \\ B =& \{(1/1), (2/2), (3/3), (4/4), (5/5), (6/6)\} \\ \rightarrow A \cap B =& \{(1/1), (3/3), (5/5)\} \end{aligned}$$

Es ist $A = \{1, 3, 5\} \times \{1, 3, 5\}$ *also*

$$A = 3 \cdot 3 = 9 \longrightarrow P(A) = \frac{9}{36} \tag{1.20}$$

Also

$$P(A \cup B) = \frac{9}{36} + \frac{6}{36} - \frac{3}{36} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \tag{1.21}$$

Definition 5. *Zwei Ereignisse heissen (stochastisch) unabhängig, wenn*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{1.22}$$

Wir sagen für $P(A \cap B)$, die Wahrscheinlichkeit, dass A und B eintreten.

Beispiel 5. *Beispiele zur stochastischen Unabhängigkeit:*

1. *Zwei Münzen werden geworfen und*

   A: Höchstens einmal "Zahl"
   B: Jede Seite mindestens einmal

   Sind die Ereignisse unabhängig?

$$\begin{aligned} A =& \{KK, KZ, ZK\} \longrightarrow P(A) = \frac{3}{4} \\ B =& \{KZ, ZK\} \longrightarrow P(B) = \frac{2}{4} \\ A \cap B =& \{(KZ, ZK)\} \longrightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{4} \end{aligned}$$

   also $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ *und* $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$, *also*

$$P(A) \cdot P(B) \neq P(A \cap B) \tag{1.23}$$

   also sind die Ereignisse A und B nicht unabhängig

2. *2 Würfel werfen und*

   A: Augensumme ist ungerade
   B: Augensumme ist gerade

$$\begin{aligned} A =& \{3,5,7,9,11\} \longrightarrow P(A) = \frac{18}{36} \\ B =& \{2,4,6,8,10,12\} \longrightarrow P(B) = \frac{18}{36} \end{aligned}$$

somit $A \cap B = \emptyset$, *dann ist*

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \tag{1.24}$$

und $P(A \cap B) = 0$, *also sind die Ereignisse nicht unabhängig!*

1.4 Baumdiagramm, Urnenmodell

Wenn unser Experiment aus mehreren Schritten besteht, so eignet sich das Baumdiagramm, um die Lösung zu finden.

Beispiel 6. *In einer Urne sind 4 Zettel mit den Buchstaben* A, N, B, E. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen dieser Zettel mit Zurücklegen, dass Wort* $ANNA$ *zu erhalten?*

TODO: Grafik

Wir benötigen also

> *A und A und N und N*
> *oder*
> *A und N und A und N*
> *oder ...*

Genauso berechnen wir die Wahrscheinlichkeit: Längs eines Weges multiplizieren wir und alle diese so erhaltenen Wahrscheinlichkeiten addieren wir dann:

$$p = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + ... = 6 \cdot \frac{1}{4^4} = \frac{3}{128} \tag{1.25}$$

1.4.1 Urnenmodell

Allgemein betrachten wir eine Urne, in welcher verschiedenartige Kugeln sind. Ziehen wir nun Kugeln, so können wir dies entweder mit Zurücklegen oder ohne Zurücklegen machen.

Beispiel 7. *In einer Urne sind 4 blaue und 3 rote Kugeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass wir beim Ziehen*

1. *mit Zurücklegen*
2. *ohne Zurücklegen*

2 blaue und eine rote Kugel erhalten?

1. *TODO: Grafik mit Zurücklegen*

$$p = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} \tag{1.26}$$

$$p = 3 \left(\frac{4}{7}\right)^2 \left(\frac{3}{7}\right)^1 = 3 \cdot \frac{16}{49} \cdot \frac{3}{7} = \frac{144}{343} \tag{1.27}$$

2. *TODO: Grafik*

$$p = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \tag{1.28}$$

$$p = 3 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{32}{5 \cdot 6} = \frac{108}{210} = \frac{54}{105} = \frac{18}{35} \tag{1.29}$$

Das Baumdiagramm hilft uns auch, wenn wir fragen, wieviele Möglichkeiten es gibt aus einer Menge mit n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen ($k \leq n$) auszuwählen und die Reihenfolge wesentlich ist:

$$abc \neq bac \neq cab \tag{1.30}$$

TODO: Grafik

Für die Wahl des 1. Elementes haben wir 5 Möglichkeiten, für die Wahl des 2. Elementes haben wir 4 Möglichkeiten und dann noch 3 Möglichkeiten für das 3. Element also

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ Möglichkeiten} \tag{1.31}$$

Beispiel 8. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von 3 Würfeln lauter verschiedener Zahlen zu erhalten?*

> *Günstige Fälle:* $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$
> *Mögliche Fälle:* 6^4

Also

$$p = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6^3} = \frac{5 \cdot 4}{6^2 \cdot 2} = \frac{5}{18} \tag{1.32}$$

Definition 6. *2. Zählprinzip: Wählen wir k aus n Elementen, so gibt es also*

$$n(n-1)(n-2)...(n-k+1) \tag{1.33}$$

Möglichkeiten, wenn die Reihenfolge wesentlich ist.

Beispiel 9. *Wieviele fünfstellige Zahlen*

(a) mit lauter ungeraden Ziffern

(b) mit lauter verschiedener geraden Ziffern

gibt es?

(a) 1. Zählprinzip: Für jede Ziffer eine der 5 Zahlen $1, 3, 5, 7, 9$, *also* 5^5 *Möglichkeiten.*

(b) 2. Zählprinzip: An erster Stelle eine der Zahlen $2, 4, 6, 8$, *an zweiter Stelle* $0, 2, 4, 6, 8$, *aber nicht dieselbe wie schon an erster Stelle etc. Also*

$$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96 \text{ Möglichkeiten} \tag{1.34}$$

1.5 Gegenwahrscheinlichkeit

Oft ist es einfacher, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass A nicht eintrifft.

Beispiel 10. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit beim Würfeln von 3 Münzen mindestens einmal "Zahl" zu erhalten?*

Mindestens einmal "Zahl" bedeutet:

Einmal, zweimal oder dreimal "Zahl"

,also ist

$$A = \{ZKK, ..., ZZK, ..., ZZZ\} \tag{1.35}$$

und das Gegenereignis ist

$$\overline{A} = \{KKK\} \tag{1.36}$$

TODO: Grafik

Es ist also $A \cup \overline{A} = \Omega$ und $A \cap \overline{A} = \emptyset$. Nach Axiom (3) ist also

$$\begin{aligned} P(A \cup \overline{A}) =& P(A) + P(\overline{A}) \\ \longrightarrow P(\Omega) =& P(A) + P(\overline{A}) \\ 1 =& P(A) + P(\overline{A}) \end{aligned}$$

Definition 7. *Es ist also*

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{1.37}$$

heisst die Gegenwahrscheinlichkeit von A.

Im Beispiel ist also $P(\overline{A}) = \frac{1}{8}$ und damit ist $P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Beispiel 11. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit beim Werfen von 3 Würfeln nicht 3 gleiche Zahlen zu erhalten?*

$$\begin{aligned} A =& \{(1/1/1), (2/2/2), ..., (6/6/6)\} \\ \longrightarrow |A| =& 6 \text{ und } |\Omega| = 6^3 \end{aligned}$$

ist

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{6}{6^3} = 1 - \frac{1}{6^2} = \frac{35}{36} \tag{1.38}$$

Wir wählen in Zukunft die Schreibweise

1. $P(S = 15)$ für die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme 15 ist.
2. $P(Z \geq 1)$ für die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einmal "Zahl" auftritt.
3. $P(K \leq 3)$ für die Warhscheinlichkeit, dass höchstens dreimal "Kopf" vorkommt.

1.5.1 Geburtstagsproblem

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter n Personen ($n \leq 366$) mindestens 2 am gleichen Tag Geburtstag haben?

Mögliche Fälle: An erster Stelle kann eines der 365 Daten stehen, an zweiter, dritter, vierter, ... Stelle ebenso. Also gibt es

$$365^n \text{ mögliche Fälle} \tag{1.39}$$

Günstige Fälle: Es ist einfacher, diejenigen Mengen zu suchen, die lauter verschiedene Daten enthalten.

An erster Stelle sind dann 365, an zweiter Stelle noch 364, an dritter Stelle noch 363, ... Daten möglich. Also gibt es für das Gegenereignis

$$365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot ... \cdot (365 - n + 1) \tag{1.40}$$

günstige Fälle. Damit

$$p = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot ... \cdot (365 - n + 1)}{365^n} \tag{1.41}$$

Beispiel 12. *Ein Schütze trifft die Scheibe mit einer Wahrscheinlichkeit $p = \frac{5}{6}$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er bei 4 Schüssen mindestens einmal trifft?*

Mindestens einmal bedeutet $P(T = 1) + P(T = 2) + P(T = 3) + ...$
Gegenereignis: Keinmal treffen, d.h. $P(T = 0) = \frac{1}{6}$

So ist dann

$$P(T \geq 1) = 1 - P(T = 0) \tag{1.42}$$

in 4 Schüssen, also

$$\begin{aligned} P(T \geq 1) =& 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^4 \\ =& 1 - \frac{1}{1296} = \frac{1293}{1296} \end{aligned}$$

Ein anderer Schütze trifft die Scheibe mit $p = \frac{3}{5}$. Wie oft muss er schiessen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.99 *einmal zu treffen?*

$$P(T \geq 1) = 1 - P(T = 0) \tag{1.43}$$

In x Schüssen also

$$\begin{aligned}
P(T \geq 1) =& 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^x \\
\longrightarrow 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^x \geq& 0.99 \\
\longrightarrow 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^x \geq& \frac{99}{100} \\
\longrightarrow \frac{1}{100} \geq& \left(\frac{2}{5}\right)^x \\
\longrightarrow \log \frac{1}{100} \geq& x \cdot \log \frac{2}{5} \\
\longrightarrow -2 \geq& x \cdot \log \frac{2}{5} \\
\longrightarrow -\frac{2}{log \frac{2}{5}} \geq& x
\end{aligned}$$

, was falsch ist, denn $\log \frac{2}{5}$ *ist negativ! Also*

$$\frac{-2}{\log \frac{2}{5}} \geq x \approx 5.03 \tag{1.44}$$

Also mindestens 6 Schüsse.

1.6 Kombinatorik

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit beim Werfen von 6 Würfeln 6 verschiedene Zahlen zu erhalten?

> Mögliche Fälle: $|\Omega| = 6^6$
> Günstige Fälle: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

also

$$p = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6^6} = \frac{120}{6^5} = \frac{20}{6^4} = \frac{10}{3 \cdot 6^3} = \frac{5}{3 \cdot 3 \cdot 6^2} = \frac{5}{324} \tag{1.45}$$

Wieviele sinnvolle oder sinnlose Worte können wir mit den Buchstaben von $DIENSTAG$ bilden?

> An erster Stelle stehen 8 Möglichkeiten,
> an zweiter Stelle stehen 7 Möglichkeiten, ...

also

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \tag{1.46}$$

Worte.

Definition 8. *Ist $n \in \mathbb{N}$, so heisst*

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \tag{1.47}$$

die Fakultät von n.
Ausserdem ist $0! = 1$.

Die Fakultäten wachsen sehr schnell:

$$\begin{aligned} 4! =& 24 \\ 5! =& 120 \\ 6! =& 720 \\ 7! =& 5040 \end{aligned}$$

Wieviele Nullen stehen am Schluss von 100! ? Eine 0 entsteht durch Multiplikation mit 10 und $10 = 2 \cdot 5$. Es ist

$$100! = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \tag{1.48}$$

und durch 5 dividierbar sind

5, 10, 15, 20, 25, 30, ..., 95, 100

Das sind 20 Zahlen, aber

$$25 = 5 \cdot 5, \quad 50 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \text{ und } 75 = 3 \cdot 5 \cdot 5 \tag{1.49}$$

somit sind 24 Nullen am Schluss von 100!.
Aufpassen:

$$3! \cdot 4! \neq 12! \text{ und } \frac{16!}{4!} \neq 2! \tag{1.50}$$

Definition 9. *3. Zählprinzip: Es gibt $n!$ Möglichkeiten um n Elemente auf n Plätze zu verteilen.*

Wieviele Sitzordnungen gibt es in der I3q?
Es gibt 19! Sitzordnungen (für 19 Sitzordnungen auf 19 Stühlen). Wechseln wir jede Minute, so dauert es 19! Minuten, also ≈ 1 Trillion Jahre.

Suchen wir alle Worte, die sich mit

STRASSE

bilden lassen, so wären dies

7! Worte

aber

$$\begin{aligned} &STRASSE \\ =&STRASSE \\ =&STRASSE \end{aligned}$$

das Vertauschen der S ergibt kein neues Wort. Mit 3 Buchstaben sind dies 3! Möglichkeiten. Also gibt es

$$\frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 \cdot 7 = 840 \tag{1.51}$$

Wir untersuchen nun das folgende Wort (4-mal S_1, 4-mal S_2 und 2-mal P):

MISSISSIPPI

Es gibt

$$\frac{11!}{4! \cdot 4! \cdot 2!} = 34650 \text{ Worte} \tag{1.52}$$

Beispiel 13. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von 5 Münzen*

(a) dreimal "Zahl"

(b) höchstens zweimal "Zahl"

(c) mindestens viermal "Zahl"

zu erhalten?

(a)

$$\begin{aligned} A =& \{ZZZKK, ZZKKZ, ...\} \\ \longrightarrow |A| =& \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2!} = 10 \\ \longrightarrow P(Z = 3) =& \frac{10}{2^5} = \frac{5}{16} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(Z \leq 2) =& P(Z = 2) + P(Z = 1) + P(Z = 0) \\ =& \frac{10}{2^5} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^5} = \frac{16}{2^5} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(Z \geq 4) =& P(Z = 4) + P(Z = 5) \\ =& \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^5} = \frac{6}{2^5} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

Wieviele Möglichkeiten gibt es, um aus einer Menge von n Elementen, deren k ($k < n$) auszuwählen, wenn die Reihenfolge nicht wesentlich ist?
Nach dem 2. Zählprinzip gibt es

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot (n-k+1) \tag{1.53}$$

Möglichkeiten. Die Reihenfolge ist unwesentlich, d.h.

$$\text{abc} = \text{acb} = \text{bac} = \text{bca} = \text{cab} = \text{cba}$$

Dies sind also 3! Möglichkeiten. Enthält die Teilmenge k Elemente, so fallen $k!$ Möglichkeiten weg, also gibt es

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} \tag{1.54}$$

Möglichkeiten.

Beispiel 14. *Eine Gruppe von 4 Personen aus einer Menge von 10 Personen auszuwählen. Es gibt*

$$\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4!} = 210 \textit{ Möglichkeiten} \tag{1.55}$$

Wir erweitern

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \tag{1.56}$$

Definition 10. *Für $k, n \in \mathbb{N}_0$ heisst*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \textit{mit } 0 \leq k \leq n \tag{1.57}$$

ein Binominalkoeffizient ("n tief k").

Beispiel 15.

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10 \tag{1.58}$$

$$\binom{11}{11} = \frac{11!}{11! \cdot 0!} = 1 \tag{1.59}$$

$$\binom{7}{0} = \frac{7!}{0! \cdot 7!} = 1 \tag{1.60}$$

Der Name stammt vom Binom. Der binomische Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, n \in \mathbb{N} \tag{1.61}$$

sagt aus, wie Binome berechnet werden.

Beispiel 16.

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 \tag{1.62}$$

Also stehen die Binominalkoeffizienten im Pascal'schen Dreieck.

Definition 11. *4. Zählprinzip: Eine Menge mit n Elementen besitzt* $\binom{n}{k}$ *Teilmengen mit genau k* $(k \leq n)$ *Elementen.*

Es gibt $\binom{n}{k}$ *Kombinationen, um aus einer Menge mit n Elementen eine Teilmenge mit k Elementen auszuwählen, wenn die Reihenfolge unwesentlich ist.*

1.6.1 Eigenschaften der Binominalkoeffizienten

1. symmetrisch
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{1.63}$$

2.
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \tag{1.64}$$

3.
$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \tag{1.65}$$

4.
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \tag{1.66}$$

Für die praktische Rechnung ist

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.67}$$

zu umfangreich. Aber durch Kürzen wird

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} \tag{1.68}$$

d.h. im Zähler und im Nenner stehen k Faktoren. Also

$$\binom{9}{4} = \frac{}{4!} \tag{1.69}$$

also auch 4 Faktoren im Zähler, d.h.

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 7 \cdot 2 = 126 \tag{1.70}$$

1.7 Urnenmodell 2

MIt Hilfe der Binominalkoeffizienten können wir das Ziehen von Kugeln aus einer Urne schneller berechnen. Sind in einer Urne 4 rote und 5 blaue Kugeln und werden ohne Zurücklegen Kugeln gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit zwei rote und drei blaue Kugeln zu ziehen

$$p = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{9}{5}} = \frac{6 \cdot 10}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{6 \cdot 10}{126} = \frac{10}{21} \tag{1.71}$$

Allgemein: In einer Urne sind R rote und B blaue Kugeln. Es werden x rote und y blaue ohne zurücklegen gezogen. Dann ist

$$p = \frac{\binom{R}{x} \cdot \binom{B}{y}}{\binom{R+B}{x+y}} \tag{1.72}$$

Beispiel 17. *In einer Kiste sind 10 Werkstücke, wovon 4 fehlerhaft sind. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 2 zufällig gewählten Werkstücken 2 fehlerhafte befinden?*

$$P(F = 2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{6 \cdot 1}{45} = \frac{2}{15} \tag{1.73}$$

Ziehen wir mit Zurücklegen wieder wie vorhin zwei rote und drei blaue aus einer Urne mit 4 roten und 5 blauen Kugeln

TODO: Grafik

Die Kugeln rot-rot-blau-blau-blau können auf $\frac{5!}{2! \cdot 3!}$ Arten angeordnet werden. Aber $\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \binom{5}{2}$, also

$$p = \binom{5}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^2 \left(\frac{5}{9}\right)^3 \tag{1.74}$$

Chapter 2

Verteilungen

2.1 Zufallsvariablen

Werfen wir zwei Münzen und fragen, wie oft "Zahl" vorgekommen ist

A	KK	KZ	ZK	ZZ
m	0	1	1	2

so schreiben wir für die Wahrscheinlichkeit $P(Z = m)$, also zum Beispiel

$$P(Z = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \tag{2.1}$$

Werfen wir zwei Münzen und fragen wir nach den Möglichkeiten die Augensumme A zu würfeln,

A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

so schreiben wir $P(A = m)$ für die Wahrscheinlichkeit, also zum Beispiel

$$P(A = 8) = \frac{5}{36} \tag{2.2}$$

Wir haben also jedem Ereignis A des Stichprobenraums Ω eine reelle Zahl zugeordnet.

Definition 12. *Eine Zufallsvariable Z ist eine Funktion*

$$Z : \Omega \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R} \tag{2.3}$$

Als Verteilung oder Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Zufallsvariablen Z bezeichnen wir

$$P(Z = k) \tag{2.4}$$

Beispiel 18. *1. Zufallsvariable Z beim Werfen zweier Münzen ist*

$$Z : \Omega \quad \longrightarrow \{0, 1, 2\} \tag{2.5}$$

wenn wir nach der Anzahl "Zahl" fragen. Die Verteilung ist dann

k	*0*	*1*	*2*
$P(Z = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2. Bei einem Spiel mit 2 Würfeln beträgt der Gewinn 10.- für eine Doppelsechs und 2.- für eine Sechs. Dann ist

$$Z : \Omega \quad \longrightarrow \{10, 2, 0\} \tag{2.6}$$

mit der Verteilung

k	*10*	*2*	*0*
$P(Z = k)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{25}{36}$

denn eine Sechs erhalten wir mit

$$(6, x), \text{ wobei } x \in \{1, 2, ..., 5\} \text{ oder } (x, 6), \text{ wobei } x \in \{1, 2, ..., 5\}$$

Verteilungen einer Zufallsvariable werden graphisch dargestellt

TODO: Grafik

Definition 13. *Nimmt eine Zufallsvariable Z die Werte $k_1, k_2, k_3, ..., k_n$ mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ an, so heisst*

$$\begin{aligned} E(Z) =& k_1 p_1 + k_2 p_2 + k_3 p_3 + ... + k_n p_n \\ =& k_1 P(Z = k_1) + k_2 P(Z = k_2) + ... + k_n P(Z = k_n) \\ =& \sum_{i=1}^{n} k_i P(Z = k_i) \end{aligned}$$

der Erwartungswert.

Beispiel 19. *Erwartungswert beim Werfen eines Würfels*

k	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
$P(Z = k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ist dann

$$E(Z) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + ... + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}(1 + 2 + ... + 6) = \frac{21}{6} = 3.5 \tag{2.7}$$

Wir finden sofort, dass der Erwartungswert linear ist.

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) \tag{2.8}$$

Beispiel 20. *Wie gross ist der Erwartungswert beim Werfen von 4 Würfeln? Es ist $E(Z) = 3.5$ für einen Würfel und dadurch wird*

$$E(x) = 4 \cdot 3.5 = 14 \tag{2.9}$$

der Erwartungswert (für die Augensumme) bei 4 Würfeln.

2.2 Bernoulli-Experiment

(Jacob I. Bernoulli von Basel, 1654 bis 1705, Verfasser von "ars conjectandi", die Kunst des Zufalls)

Wernn wir einen Würfel 100-mal werfen und fragen wann zum ersten mal die Sechs aufgetreten ist, wenn wir eine Münze fünfzigmal werden und fragen wie oft "Zahl" vorgekommen ist, wenn wir aus einer Sendung 100 Werksücke wählen und fragen, wieviele davon fehlerhaft sind, so machen wir ein Zufallsexperiment mit n Versuchen.

Definition 14. *In einem Experiment werden n Versuche durchgeführt, wobei bei jedem Versuch das Ereignis A mit der Wahrscheinlichkeit p eintreten oder mit der Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ nicht eintreten kann.*
Sind diese Verscuhe unabhängig, so heisst diese Versuchsreihe vom Umfang a ein Bernoulli-Experiment.

Wir können also das Experiment direkt mit den Wahrscheinlichkeiten

W'keit: qqpqppq...q
binär: 00101001...1

beschreiben und sprechen von einer Bernoulli-Kette.

Definition 15. *Eine Zufallsvariable Z, welche die Anzahl der notwendigen Schritte bis zum erstmaligen Eintreten des Ereignis A mit Wahrscheinlichkeit $p = P(A)$ in einem Bernoulli-Experiment bestimmt, heisst geometrisch verteilt.*

Es ist also

$$P(Z = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \tag{2.10}$$

Weiter ist also

$$E(Z) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p \tag{2.11}$$

mit $q = 1 - p$ wird

$$E(Z) = p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = p \cdot (1 + 2q + 3q^2 + ...) \tag{2.12}$$

Es ist $1, q, q^2, q^3, ...$ eine geometrische Folge mit der Teilsumme

$$s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} = \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} \tag{2.13}$$

Damit wird die geometrische Reihe

$$1 + q + q^2 + q^3 + ... = \lim_{n\to\infty} \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} = \frac{-1}{q - 1} \tag{2.14}$$

falls $-1 < q < 1$, was für die Wahrscheinlichkeit q zutrifft. Also ist

$$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + ... = \frac{1}{1 - q} \tag{2.15}$$

So wird

$$\begin{aligned}
E(Z) =& p(1 + q + q^2 + q^3 + ...) + p(q + 2q^2 + ...) \\
=& p(1 + q + q^2 + ...) + p(q + q^2 + q^3 + ...) + p(q^2 + 2q^3 + 3q^4 + ...) \\
=& p(1 + q + q^2 + ...) + p(q + q^2 + q^3 + ...) + p(q^2 + q^3 + ...) + p(q^3 + 2q^4 + ...) \\
=& p \cdot \frac{1}{1 - q} + pq\frac{1}{1 - q} + pq^2\frac{1}{1 - q} + pq^3\frac{1}{1 - q} + ... \\
=& \frac{1}{1 - q}(p + pq + pq^2 + pq^3 + ...) \\
=& \frac{1}{1 - q} \cdot \frac{p}{1 - q} \\
=& \frac{p}{(1 - q)^2} \text{ und 1-q=p}
\end{aligned}$$

also

$$E(Z) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \tag{2.16}$$

Beim Würfeln ist also

$$E(Z) = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6 \tag{2.17}$$

Das bedeutet also, dass man im Schnitt 6-mal würfeln muss, damit man eine 6 würfelt.

Definition 16. *Eine Zufallsvariable Z für welche*

$$P(Z = x) = \frac{\binom{R}{x} \cdot \binom{B}{y}}{\binom{R+B}{x+y}} \tag{2.18}$$

gilt, heisst hypergeometrisch verteilt. Es ist

$$E(Z) = (x + y) \cdot \frac{B}{B + R} \tag{2.19}$$

wenn Z die Anzahl blauer Kugeln bestimmt.

2.3 Varianz

Wir betrachten zwei Zufallsvariablen X und Y mit

1. X:

k	-1	0	1
$P(Z=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

2. Y:

m	-4	-2	0	2	4
$P(Z=m)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$

besitzen die Verteilung

TODO: Grafik

und die Erwartungswerte

$$E(x) = (-1) \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} = 0 \tag{2.20}$$

$$E(x) = (-4) \cdot \frac{1}{4} + (-2) \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} = 0 \tag{2.21}$$

Kennen wir also nur die Erwartungswerte, so wissen wir nicht wie die Werte verteilt sind.
Wir wählen deshalb für jeden Wert x_i die Abweichung von $E(x)$ und bestimmen dadurch den Durchschnitt. Bis X wäre dies also

$$\frac{(0+1)+(0-0)+(0-1)}{3} = 0 \;!? \tag{2.22}$$

Besser ist es also mit

$$\frac{|0+1|+|0-0|+|0-1|}{3} = \frac{2}{3} \tag{2.23}$$

Historisch gesehen war es einfacher mit $\sqrt{a^2}$ zu rechnen, anstatt mit $|a|$. Deshalb definieren wir unser Mass für die Streuung mit

$$\sigma^2 := Var(Z) := \sum_{i=1}^{n} (k_i - E(Z))^2 \cdot p_i \tag{2.24}$$

die Varianz der Zufallsvariablen Z, wenn

$$P_i = P(Z = k_i) \tag{2.25}$$

σ heisst Standardabweichung.
Im Beispiel wird so

$$Var(x) = \sigma_x^2 = \frac{1}{4}(0-(-1))^2 + \frac{1}{2}(0-0)^2 + \frac{1}{4}(0-1)^2 = \frac{1}{2} \tag{2.26}$$

also

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707 \tag{2.27}$$

und weiter

$$\begin{aligned} Var(Y) =& \sigma_y^2 = \left(\frac{1}{4}(0-(-4))^2 + \frac{1}{5}(0-(-2))^2 + \frac{1}{10}(0-0)^2\right) \cdot 2 \\ &= \left(4 + \frac{4}{5}\right) \cdot 2 = \frac{48}{5} = 9.6 \end{aligned}$$

also

$$\sigma = \sqrt{9.6} = 3.1 \tag{2.28}$$

Bei einer geometrisch verteilten Zufallsvariable wird

$$Var(Z) = \frac{q}{p^2} \tag{2.29}$$

also bei "Eine mit Weile" ist

$$Var(Z) = \frac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{36}{1} = 30 \tag{2.30}$$

und damit wird $\sigma = 5.47$

2.4 Binomialverteilung

Bei einem Bernoulli-Experiment fragen wir, wie oft das von uns gewünschte Ereignis aufgetreten ist.

Beispiel 21. *Wie oft ist "Zahl" beim Werfen von 50 Münzen aufgetreten?*

Wir betrachten Familien mit Kindern (M: Mädchen, K: Knaben), die wir dem Alter nach ordnen.
Bei einer Familie mit

1. 2 Kindern sind
   KK, MM, KM, MK

2. 3 Kindern sind
   KKK, MMM, MKK, KMK, KKM, MMK, MKM, KMM

die Möglichkeiten. Zählen wir nach Geschlecht, so gibt es bei

1. 2 Kindern: 1,1,2

2. 3 Kindern: 1,1,3,3

Möglichkeiten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Familie mit 3 Kindern genau 2 Mädchen sind.

$$p = \frac{3}{8} \tag{2.31}$$

Wir finden (erneut) die Zahlen des Pascalschen Dreiecks

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

So finden wir sofort die Wahrscheinlichkeit für 4 Knaben in einer Familie mit 7 Kindern

$$P(K=4) = \binom{7}{4} \cdot p^4 q^3 \tag{2.32}$$

wenn

- p: Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt
- q: Wahrscheinlichkeit für eine Mädchengeburt

ist. Denn die Bernoulli-Kette ist

ppqpqqp

mit allen Vertauschungen.

Definition 17. *Tritt in einem Bernoulli-Experiment das Ereignis A mit Wahrscheinlichkeit p ein und fragen wir nach der Wahrscheinlichkeit, dass A k-mal in n Versuchen aufgetreten ist, so ist die Wahrscheinlichkeit*

$$P(Z=k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad , q = 1-p \tag{2.33}$$

eine binominalverteilte Zufallsvariable.

Beispiel 22. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen von 23 Münzen genau 11-mal "Kopf" zu erhalten?*

$$P(K=11) = \binom{23}{11} p^{11} q^{12} \tag{2.34}$$

mit $p = \frac{1}{2}$ *(und* $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$*), also*

$$P(K=11) = \binom{23}{11} \left(\frac{1}{2}\right)^{23} = 0.161 \tag{2.35}$$

Erwartungswert: Nach der Definition ist

$$E(Z) = \sum_{i=1}^{n} k_i \cdot P(Z = k_i) \tag{2.36}$$

also für die Binominalverteilung

$$E(Z) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{2.37}$$

Der Ausdruck $k \cdot p^k$ erinnert an $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ (Ableitung). Wir wählen eine Funktion f mit

$$f(p) = (p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{2.38}$$

nach dem binomischen Lehrsatz. So wird

$$f'(p) = n \cdot (p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k \cdot p^{k-1} q^{n-k} \tag{2.39}$$

und wir multiplizieren mit p:

$$\begin{aligned} pn(p+q)^{n-1} =& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k p^k q^{n-k} \\ pn(p+q)^{n-1} =& E(Z) \end{aligned}$$

Mit $q = 1 - p$ wird

$$E(Z) = pn(p + 1 - p)^{n-1} \tag{2.40}$$

und so wird

$$E(Z) = n \cdot p \tag{2.41}$$

Erwartungswert: Da $Var(Z) = E(Z - E(Z))^2$ und E linear ist, wird

$$\begin{aligned} Var(Z) =& E(Z^2) - (E(Z))^2 \\ =& np - np^2 \\ =& np(1-p) \end{aligned}$$

wird

$$Var(Z) = n \cdot p \cdot q \tag{2.42}$$

2.5 Poisson-Verteilung

(Simon Denis Poisson, 1781 bis 1840, Paris)

Für grosse n und kleines p soll die Binominalverteilung angenähert werden. Es ist

$$P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{2.43}$$

und es sei

$$\lambda := n \cdot p \tag{2.44}$$

Dann ist

$$p = \frac{\lambda}{n}, q = 1 - \frac{\lambda}{n} \tag{2.45}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}
P(Z = k) =& \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
=& \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
=& \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
=& \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
=& \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot ... \cdot \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
=& (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})...(1 - \frac{k-1}{n}) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}
\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ wird

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{1}{n}\right) \longrightarrow& 1, \left(1 - \frac{2}{n}\right) \longrightarrow 1, ... \\
\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \longrightarrow& 1 \quad \text{und} \\
\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k \longrightarrow& 1 \quad \text{und} \\
\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \longrightarrow& ?
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck erinnert an

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e \quad \text{also} \\
\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n &= e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Damit wird

$$P(Z = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \tag{2.46}$$

für $n \to \infty$.

Definition 18. *Ist Z eine Zufallsvariable, welche die Werte $0, 1, 2, ..., k$ mit der Wahrscheinlichkeit*

$$P(Z = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \tag{2.47}$$

annimmt, so heisst Z poisson-verteilt.

Wie gut nähert die Poisson-Verteilung die Binomialverteilung?

1. Ereignis A tritt mit $p = 0.3$ ein. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, das bei 30 Versuchen genau 10-mal A eintritt?

   $P(Z = 10)$ mit Binomialverteilung ist

   $$P(Z = 10) = \binom{30}{10} 0.3^{10} 0.7^{20} \tag{2.48}$$

   und mit Poisson-Verteilung ist

   $$\lambda = n \cdot p = 30 \cdot 0.3 = 9 \tag{2.49}$$

   und so

   $$P(Z = 10) = e^{-9} \frac{9^{10}}{10!} \tag{2.50}$$

2. Das Ereignis B tritt mit $p = \frac{1}{100}$ ein. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 5000 Versuchen genau 70-mal das Ereignis eintritt?

   $$P(Z = 70) = \binom{5000}{70} \left(\frac{1}{100}\right)^{70} \left(\frac{99}{100}\right)^{4930} \tag{2.51}$$

   und mit $\lambda = n \cdot p = 5000 \cdot \frac{1}{100} = 50$ wird

   $$P(Z = 70) = e^{-50} \frac{50^{70}}{70!} \tag{2.52}$$

Die Poisson-Verteilung ist die Verteilung der seltenen Ereignisse; wir wählen sie, wenn entweder "$n > 10$ und $p < 0.05$" oder "$n > 100$ und $p < 0.1$".

2.6 Dichte

Eine diskrete Zufallsvariable nimmt endlich oder abzählbar-unendlich viele Werte $k_1, k_2, k_3, ...$ an.
Eine stetige Zufallsvariable nimmt überabzählbar-unendlich viele Werte $k \in \mathbb{R}$

an.
Wir suchen eine stetige Zufallsvariable, welche die Binomialverteilung annähert. Welche Bedingungen muss die Zufallsvariable erfüllen?

Es muss $f(x) \geq 0$ sein.

Definition 19. *Ist Z eine Zufallsvariable, so heisst*

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0;1] \text{ mit } F(x) = P(Z \leq x) \tag{2.53}$$

die Verteilungsfunktion.

Wir können mit einer stetigen Zufallsvariable nicht $P(Z = x)$ berechnen, da könnte der Wert sogar > 1 werden und müssen deshalb $P(Z \leq x)$ bestimmen. Bei der Binomialverteilung ist

$$\begin{aligned} P(Z \leq x) =& P(Z = 0) + P(Z = 1) + ... + P(Z = x) \\ =& \sum_{k=0}^{x} P(Z = x) \\ =& \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \end{aligned}$$

und

$$P(Z \leq n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1 \tag{2.54}$$

, denn $(p + q)^n = (p + 1 - p)^n = 1^n$.
Bei einer stetigen Zufallsvariable ist also

$$P(Z \leq x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \tag{2.55}$$

und damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1 \tag{2.56}$$

die zweite Bedingung.

Definition 20. *Ist*

$$F(x) = P(Z \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \tag{2.57}$$

, so heisst die Funktion f Dichtefunktion und $f(x)$ Dichte.