

Pracownia z Analizy Numerycznej (M)

Sprawozdanie do zadania P3.5

Mateusz Basiak

nr indeksu: 300487

Wrocław, 17.01.2019r.

1. Wstęp

Równania różniczkowe zwyczajne znajdują rozliczne zastosowania, zarówno w technice, jak i fizyce i matematyce. Te pierwszego rzędu są najlepiej poznane i często najprostsze, ale mimo to nie da się ich często rozwiązać analitycznie. W takich sytuacjach należy sięgnąć do metod numerycznych. Ze względu na ważne zastosowania istotne jest, by metody te były możliwie najbardziej dokładne. W tej pracy pokażę dwa często używane w przybliżeniach wzory - Adamsa-Bashfortha i Adamsa-Moultona i przeanalizuję doświadczalnie ich dokładność.

2. Opis teoretyczny

2.1. Równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu

Formalnie, rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego pierwszego rzędu to rozwiązanie **zagadnienia Cauchy'ego** [1] znalezienia takiej funkcji $g(s)$, że $g(s_0) = g_0$ oraz zachodzi:

$$\frac{dg}{ds} = F(s, g) \quad (1)$$

gdzie F jest zadaną funkcją zależną od s oraz $g(s)$.

Zdefiniujmy sobie teraz dla zadanego przedziału $[t, t+h]$ oraz stałej b prostokąt R na płaszczyźnie $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ argumentów funkcji F jako:

$$R = [t, t+h] \times \{y : |y - g_0| \leq b\} \quad (2)$$

Jest to zbiór punktów o odciętych z przedziału $[t, t+h]$, oraz rzędnych odległych od g_0 o co najwyżej b . Dalej zdefiniujmy M jako supremum funkcji g na prostokącie R : $M = \sup_{(s,g) \in R} |g(s)|$

Założmy teraz, że $\frac{\delta F}{\delta g}$ oraz F są ciągłe w prostokącie R . Z twierdzeń Peano i Picarda-Lindelöfa wynika wtedy od razu, że rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego istnieje na odcinku $[t, t+a]$ (gdzie $a = \min(h, \frac{b}{M})$) i jest na nim wyznaczone jednoznacznie. [1]

Zauważmy, że gdy b rośnie do nieskończoności, prostokąt R zamienia się w podpłaszczyznę $[t, t+h] \times \mathbb{R}$ płaszczyzny $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wtedy M staje się supremum $|g(s)|$ na przedziale $[t, t+h]$. Dodatkowo $\frac{b}{M}$ również rośnie wówczas do nieskończoności, czyli $a = h$. Oznacza to, że powyższy argument przyjmuje wtedy postać:

Lemat 1. *Jeśli funkcje F oraz $\frac{\delta F}{\delta s}$ są ciągłe na przedziale $[t, t+h]$ zmiennej s , to zagadnienie Cauchy'ego (1) ma na nim jednoznaczne rozwiązanie.*

2.2. Związek równań różniczkowych z kwadraturami

W dalszej części rozważań będę brał pod uwagę tylko funkcje $F(s, g)$ ciągłe o pierwszej pochodnej ciągłej. Z poprzedniego podrozdziału wiemy, że gwarantuje to, że istnieje jednoznaczne rozwiązanie zadanego równania różniczkowego.

Skoro już ustaliliśmy, że równanie (1) ma jednoznaczne rozwiązanie na przedziale $[s_0, s_0+h]$, to spróbujmy je znaleźć. Całkując je obustronnie w tym przedziale otrzymujemy:

$$\int_{s_0}^{s_0+h} \frac{dg}{ds} ds = g|_{s_0}^{s_0+h} = g(s_0+h) - g(s_0) = g(s_0+h) - g_0 = \int_{s_0}^{s_0+h} F(s, g) ds$$

Zauważmy, że h jest zmienną wolną w naszym równaniu, otrzymujemy więc wzór na funkcję g w dowolnym punkcie $s = s_0 + h$:

$$g(s) = g(s_0 + h) = g_0 + \int_{s_0}^{s_0+h} F(s, g) ds \quad (3)$$

Do rozwiązania brakuje nam tylko umiejętności policzenia całki $\int_{s_0}^{s_0+h} F(s, g) ds$. Bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia Peano jest, że zagadnienie Cauchy'ego ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy da się policzyć tę całkę. Założyliśmy jednak wcześniej, że funkcja ta jest ciągła, a skoro liczymy całkę oznaczoną, to funkcja ta jest ograniczona, a więc jest całkowalna.

Niestety, mimo że dowiedliśmy, że funkcja F jest całkowalna, całka ta nie zawsze jest możliwa do policzenia analitycznie. W tym miejscu należy odwołać się do metod numerycznych. Załóżmy, że chcemy wyznaczyć funkcję g na pewnym określonym przedziale. Jeśli weźmiemy wówczas zbiór równoodległych punktów s_1, s_2, \dots, s_n i obliczymy wartość $g(s_i)$ dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$ to będzie można aproksymować funkcję g jako przechodzącą przez te punkty. Jeśli zbiór tych punktów będzie odpowiednio gęsty, to przybliżenie to będzie bardzo dokładne.

Pozostaje więc problem obliczenia całki z $F(s, g)$ na pewnym konkretnym przedziale $[s_i, s_i + h]$. Tu z pomocą przychodzą nam kwadratury typu Newtona-Cotesa, a konkretnie metody Adamsa-Bashfortha i Adamsa-Moultona.

2.3. Kwadratura Adamsa-Bashfortha

Założmy, że obliczyliśmy już wartości g dla punktów s_1, s_2, \dots, s_{i-1} . Zdefiniujmy h jako odległość między dwoma sąsiednimi punktami s_j oraz s_{j-1} . Chcemy teraz obliczyć $g(s_i)$. Mamy więc:

$$g(s_{i+1}) = g(s_i) + \int_{s_i}^{s_{i+1}} F(s, g) ds$$

Zauważmy, że skoro znamy wartość g w jakimś punkcie s_j , oraz mamy dany wzór jawny funkcji F zależnej od g oraz s , to można szybko obliczyć wartość funkcji $F(s_j, g(s_j))$. Do obliczenia powyższej całki można użyć wzoru Adamsa-Bashfortha [2] postaci:

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} F(s, g) ds = h \left(A_0 F(s_i, g(s_i)) + A_1 F(s_{i-1}, g(s_{i-1})) + \dots \right) = h \sum_{k=0}^{\infty} A_k F(s_{i-k}, g(s_{i-k})) \quad (4)$$

Można go teraz ograniczyć do czterech składników, uzyskując przybliżenie:

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} F(s, g) ds \approx h \sum_{k=0}^3 A_k F(s_{i-k}, g(s_{i-k}))$$

Pozostaje znaleźć współczynniki A_0, A_1, A_2, A_3 . Wyznamy je tak, aby wartość tej całki była dokładna, gdy F jest wielomianem zmiennej t stopnia co najwyżej 3. Oczywiście wystarczy, by tą własność miały wielomiany z bazy tej przestrzeni (każdy wielomian to kombinacja wielomianów bazowych, więc jest to prosty wniosek z rozdzielnosci operacji całkowania względem dodawania). Wybierzmy więc bazę:

$$\begin{cases} p_0(s) = 1 \\ p_n(s) = \prod_{j=0}^{n-1} (s + j), \quad n > 0 \end{cases} \quad (5)$$

Pierwsze cztery wielomiany tego ciągu tworzą bazę, choćby dlatego że są różnych stopni, więc są liniowo niezależne. Zbiór czterech liniowo niezależnych elementów przestrzeni czterowymiarowej jest bazą.

Obliczanie całek na przedziale $[s_i, s_{i+1}]$ jest dość niewygodne, dlatego posłużę się następującym lematem.

Lemat 2. *Jeśli wzór:*

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \sum_{k=-i}^0 A_i f(i) \quad (6)$$

jest dokładny dla każdego $f \in \Pi_3$, to tę samą własność ma wzór:

$$\int_a^{a+h} f(x) dx \approx h \sum_{k=-i}^0 A_i f(a + ih) \quad (7)$$

Dowód.

$$\begin{aligned}\int_a^{a+h} f(x)dx &= \int_a^{a+h} f(y)dy = \int_0^1 f\left(z = \frac{1}{h}y\right)h dz = h \int_0^1 f(z)dz \approx \\ &\approx h \sum_{k=-i}^0 A_k f(a + ih)\end{aligned}$$

W ostatniej równości $f(a+ih)$ wynika z faktu, że jeśli z wynosi i , to zgodnie z podstawieniem $y = zh = ih$, natomiast $x = a + y = a + ih$. \square

Mając ten lemat możemy zapisać całki, dla których nasze przybliżenie ma być dokładne:

$$\int_0^1 p_n(s)ds = A_0 p_n(0) + A_1 p_n(-1) + A_2 p_n(-2) + A_3 p_n(-3)$$

Rozpisując takie równania dla czterech możliwych wartości n i obliczając wartości p_n otrzymujemy układ czterech równań, z którego można wyliczyć interesujące nas współczynniki:

$$\begin{cases} A_0 + A_1 + A_2 + A_3 = 1 \\ -A_1 - 2A_2 - 3A_3 = \frac{1}{2} \\ 2A_2 + 6A_3 = \frac{5}{6} \\ -6A_3 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu otrzymujemy współczynniki: $A_0 = \frac{55}{24}, A_1 = -\frac{59}{24}, A_2 = \frac{37}{24}, A_3 = -\frac{3}{8}$. Ostatecznie dostajemy więc wzór Adamsa-Bashfortha:

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} F(s, g)ds \approx \frac{h}{24} \left(55F(s_i, g(s_i)) - 59F(s_{i-1}, g(s_{i-1})) + 37F(s_{i-2}, g(s_{i-2})) - 9F(s_{i-3}, g(s_{i-3})) \right) \quad (8)$$

Jest to kwadratura rzędu cztery.

2.4. Kwadratura Adamsa-Moultona

Zauważmy, że we wzorze Adamsa-Bashfortha wartość $g(s_{i+1})$ nie zależy od wartości funkcji F w tym punkcie. Może to powodować niedokładności. Dlatego często stosuje się go razem ze wzorem Adamsa-Moultona [2], który ma taką samą postać jak wzór (4), rozszerzony o jeden składnik na początku:

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} F(s, g)ds = h \sum_{k=-1}^{\infty} A_k F(s_{i-k}, g(s_{i-k})) \quad (9)$$

Oczywiście do obliczenia wartości $F(s_{i+1}, g(s_{i+1}))$ musimy już znać wartość $g(s_{i+1})$, dlatego najpierw zastosujemy wzór Adamsa-Bashfortha do uzyskania pewnego jej przybliżenia, a potem z pomocą wzoru Adamsa-Moultona je poprawimy.

Ponownie jak w przypadku poprzedniego wzoru, ograniczmy go do czterech składników, uzyskując kwadraturę rzędu cztery. **Lemat 2** nadal ma tu zastosowanie. Możemy również skorzystać z bazy wyznaczonej wcześniej (5). Otrzymujemy równanie:

$$\int_0^1 p_n(s)ds = A_{-1} p_n(1) + A_0 p_n(0) + A_1 p_n(-1) + A_2 p_n(-2)$$

Ponownie z czterech takich równań po podstawieniu wartości wielomianów p_n otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} A_{-1} + A_0 + A_1 + A_2 = 1 \\ A_{-1} - A_1 - 2A_2 = \frac{1}{2} \\ 2A_{-1} + 2A_2 = \frac{5}{6} \\ 6A_{-1} = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Z którego otrzymujemy współczynniki: $A_{-1} = \frac{9}{24}$, $A_0 = \frac{19}{24}$, $A_1 = -\frac{5}{24}$, $A_2 = \frac{1}{24}$. Ostatecznie kwadratura ta ma postać:

$$\int_{s_i}^{s_{i+1}} F(s, g) ds \approx \frac{h}{24} (9F(s_{i+1}, g(s_{i+1})) + 19F(s_i, g(s_i)) - 5F(s_{i-1}, g(s_{i-1})) + F(s_{i-2}, g(s_{i-2}))) \quad (10)$$

2.5. Wzory Rungego-Kutty

Ostatnim problemem jest fakt, że we wzorze (8) używamy wartości $g(s_i), g(s_{i-1}), g(s_{i-2}), g(s_{i-3})$. Na początku działania naszego algorytmu, do wyliczenia $g(s_4)$ będą nam więc potrzebne $g(s_3), g(s_2), g(s_1), g(s_0)$, a tylko ta ostatnia jest dana w założeniach. Należy więc z jak najlepszym przybliżeniem znaleźć trzy pierwsze wartości g . Jest na to kilka sposobów. Jednym z nich jest metoda Rungego-Kutty rzędu czwartego. [2] [3] Jest ona dobrze udokumentowana w źródłach, a jej dowód jest dość prosty i nie jest częścią zadania, dlatego go pominię i ograniczę się do podania wzorów:

$$g(s_0 + kh) \approx g(s_0) + \frac{1}{6}(G_1 + 2G_2 + 2G_3 + G_4) \quad (11)$$

$$\begin{cases} G_1 = khF(s_0, g(s_0)) \\ G_2 = khF(s_0 + \frac{1}{2}kh, g(s_0) + \frac{1}{2}G_1) \\ G_3 = khF(s_0 + \frac{1}{2}kh, g(s_0) + \frac{1}{2}G_2) \\ G_4 = khF(s_0 + kh, g(s_0) + G_3) \end{cases}$$

Ze wzoru (11) można obliczyć wszystkie trzy potrzebne współczynniki.

3. Opis programu

Wszystkie doświadczenia wykonywane były za pomocą programu zaimplementowanego w języku Julia v.1.0.1. Program ten uruchamiano na komputerze z procesorem Intel Core i5, 1.60GHz, 4 GB RAM, długość słowa maszynowego 64 bit. Precyzja arytmetyki to $u = 1,11 \cdot 10^{-16}$. Program, umieszczony w pliku "program.jl", składa się z następujących funkcji:

algorithm(F, s_0, g_0, l, n)

Główna funkcja algorytmu. Wywołuje ona pozostałe funkcje z odpowiednimi argumentami. Przyjmuje ona argumenty: F - funkcja $F(s, g)$; s_0 - początek przedziału; l - jego długość; n - liczba równoodległych punktów tworzących podział odcinka $[s_0, s_0 + l]$, w których należy policzyć wartość funkcji g ; g_0 - wartość $g(s_0)$. Funkcja zwraca tablicę rozmiaru $n + 1$ z obliczonymi wartościami funkcji g w kolejnych punktach.

Runge_Kutta(F, s_0, g_0, kh)

Funkcja pomocnicza obliczająca przybliżoną wartość $g(s_0 + kh)$ metodą Rungego-Kutty.

next_point($F, h, s_1, F0, F1, F2, F3, g_0$)

Funkcja obliczająca przybliżoną wartość funkcji g w punkcie s_1 wzorami Adamsa-Bashforth i Adamsa-Moultona. Argumenty $F0, F1, F2, F3$ to wartości funkcji $F(s, g)$ odpowiednio w punktach $(s_i, g(s_i)), (s_{i-1}, g(s_{i-1})), (s_{i-2}, g(s_{i-2})), (s_{i-3}, g(s_{i-3}))$, argument g_0 to wartość $g(s)$ w punkcie $s_1 - h$.

Adams_Bashforth($h, F0, F1, F2, F3$)

Funkcja pomocnicza implementująca wzór Adamsa-Bashforth.

Adams_Moulton($h, F_{-1}, F0, F1, F2$)

Funkcja pomocnicza implementująca wzór Adamsa-Moultona.

4. Doświadczenia

Jako że zadanie, polegające na obliczaniu całki, ma w założeniu być tylko częścią większego algorytmu numerycznego obliczania funkcji $g(s)$, skupię się na sprawdzaniu dokładności tego ostatniego. Na początek jednak przetestuję na kilku prostych funkcjach dokładność obliczania całek.

4.1. Dokładność funkcji *Adams_Bashforth* i *Adams_Moulton*

Zacznijmy od przetestowania samych funkcji bazujących na wzorach *Adamsa – Bashfortha* i *Adamsa – Moultona* dla kilku podstawowych funkcji F . Dla każdej z nich mogę obliczyć ręcznie wynik i porównać go z tym otrzymanym z zastosowania tych wzorów.

Wzór Adamsa-Bashfortha

Funkcja F	Przedział	Wynik dokładny	Wynik otrzymany	Błąd względny
$F_1 = x^2 - 3x + 10$	$[-1, 2]$	28.5	28.5	0.0
$F_2 = x^3 - 7x^2 - 13x + 28$	$[-10, 10]$	-4106.7	-4106.666667	0.000008
$F_3 = \cos(x)$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	2	0.000000	1.0
$F_4 = x \cdot 3^{2x^2+3}$	$[0, 2]$	$\frac{54}{\ln 3} \approx 49.152918238$	$1.87823 \cdot 10^{247}$	$3.8212 \cdot 10^{245}$
$F_5 = \begin{cases} x^2 - 2 & x \leq -2 \\ 2x^3 + 4x^2 - 7 & -2 < x \leq 1 \\ 5x^2 - 3x - 1 & x > 1 \end{cases}$	$[-5, 5]$	$183\frac{1}{6} \approx 183.166667$	63.333333	0.654231
$F_6 = x^6 - 6x^4 + 10x + 30$	$[3, 10]$	1309215.6	-69498115.166667	54.083782

Wzór Adamsa-Moultona

Funkcja F	Przedział	Wynik dokładny	Wynik otrzymany	Błąd względny
$F_1 = x^2 - 3x + 10$	$[-1, 2]$	28.5	28.5	0.0
$F_2 = x^3 - 7x^2 - 13x + 28$	$[-10, 10]$	-4106.7	-4106.666667	0.000008
$F_3 = \cos(x)$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	2	0.000000	1.0
$F_4 = x \cdot 3^{2x^2+3}$	$[0, 2]$	$\frac{54}{\ln 3} \approx 49.152918238$	$-1.79289 \cdot 10^{97}$	$3.64758 \cdot 10^{95}$
$F_5 = \begin{cases} x^2 - 2 & x \leq -2 \\ 2x^3 + 4x^2 - 7 & -2 < x \leq 1 \\ 5x^2 - 3x - 1 & x > 1 \end{cases}$	$[-5, 5]$	$183\frac{1}{6} \approx 183.16667$	385.833333	1.106460
$F_6 = x^6 - 6x^4 + 10x + 30$	$[3, 10]$	1309215.6	2956861.83333	1.258499

Z powyższych doświadczeń wynika jasno, że wzory Adamsa-Bashfortha i Adamsa-Moultona nie dają dobrych rezultatów dla dowolnych funkcji $F(x)$. W szczególności, jak wynika z doświadczeń dla funkcji F_1 i F_2 są one dokładne dla funkcji należących do Π_3 . Obserwacja ta jest zgodna z założeniami dotyczącymi rzędu tych kwadratur. Dla pozostałych funkcji, jak pokazuje np. przykład F_4 , oba wzory mogą dawać bardzo duże błędy, choć wzór Adamsa-Moultona jest precyzyjniejszy. Warunek ciągłości $g(x)$ (jak i jej pierwszej pochodnej), który cały czas zakładaliśmy w naszych rozważaniach również okazuje się istotny, co pokazuje przykład F_5 . Funkcja ta jest funkcją sklejaną nieciągłą, której części należą do Π_3 , ale błąd względny jej obliczania jest znacząco większy niż dla F_1 i F_2 , a błąd bezwzględny jest rzędu wyniku.

4.2. Wyznaczanie rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu

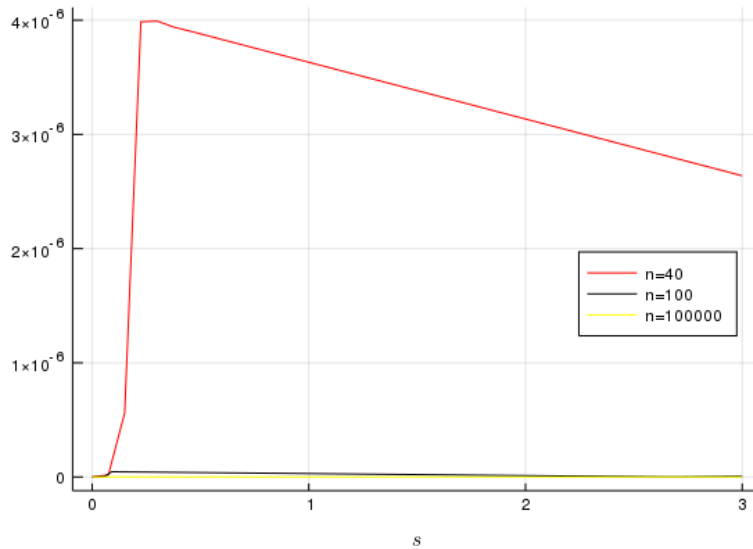
W tej części zbadamy, jak dokładny jest cały algorytm, wyznaczający funkcję $g(s)$ na podstawie funkcji $F(s, g)$, korzystający ze wzorów Adamsa-Bashfortha, Adamsa-Moultona i Rungego-Kutty. Aby wyniku nie zakłócały niedokładności, które zaobserwowaliśmy w rozdziale 4.1., będziemy rozważali wyłącznie takie funkcje F , które są wielomianem dwóch zmiennych s oraz g i sumaryczny stopień obu zmiennych w pojedynczym składniku tego wielomianu nie przekracza trzech.

Zauważmy przy tym, że w żadnym miejscu nie czynimy założeń na temat funkcji $g(s)$ (poza tym, że istnieje ona na zadanym przedziale), więc nie musi ona być wielomianem.

Jako że rozwiązywanie analityczne równań różniczkowych nie jest przedmiotem tej pracy, będziemy posługiwali się przykładami równań zamieszczonymi w literaturze. [1]

4.2.1. $F(s, g) = g$

Na początek weźmy funkcję $F(s, g) = g$, oraz przedział $[0, 3]$. Ustalmy $g(0) = 2$. Wówczas rozwiązaniem równania jest $g(s) = 2e^s$.

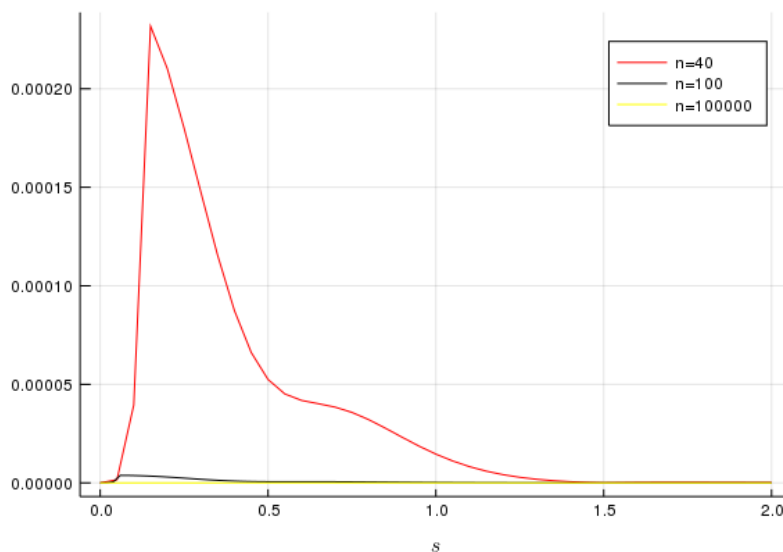


Rysunek 1: Błąd względny obliczania wartości funkcji $g(s)$

Na wykresie pokazany jest błąd względny przybliżenia $g(s)$, a nie wykres samej funkcji i jej przybliżenia, gdyż te dwa ostatnie leżą zbyt blisko siebie i taki wykres byłby nieczytelny. Z ryciny powyżej widać, że błąd względny przybliżenia maleje bardzo szybko w zależności od zagęszczenia punktów, w których funkcja $g(s)$ jest przybliżana. Dla $n = 100$ maksymalny błąd przybliżenia na tym przedziale wynosi $4.56556 \cdot 10^{-8}$, zaś dla $n = 100000$ już tylko $2.94667 \cdot 10^{-14}$.

4.2.2. $F(s, g) = g(5 - g)$

Rozważmy równanie $F(s, g) = g(5 - g)$ na przedziale $[0, 2]$ dla warunku początkowego $g(0) = 1$. Jego rozwiązaniem jest $g(s) = 5 \cdot \frac{e^{5s}}{4 + e^{5s}}$.

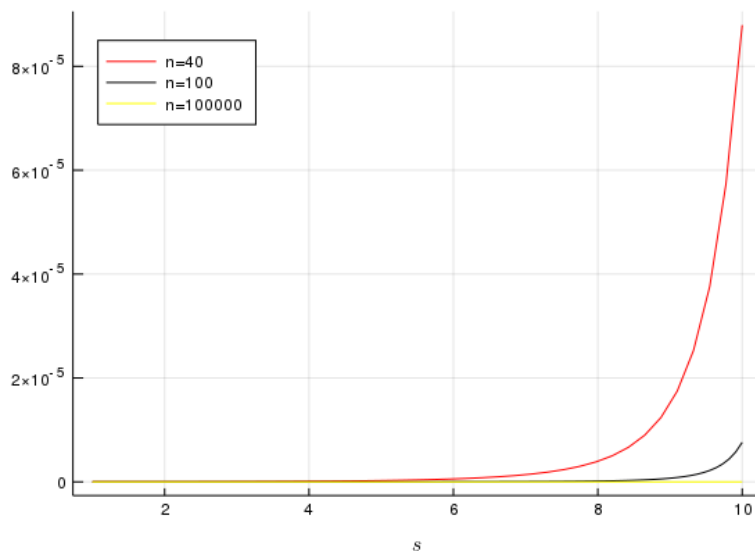


Rysunek 2: Błąd względny obliczania wartości funkcji $g(s)$

Na powyższym wykresie ponownie błąd dla $n = 40$ jest znacząco większy od pozostałych. Jest on rzędu 10^{-4} , co może już poważnie zakłócać wynik. Tak duże rozbieżności w porównaniu do poprzedniego przykładu mogą wynikać np. z bardziej skomplikowanej formy funkcji $g(s)$, czy z wyższego stopnia wielomianu $F(s, g)$. Jednak zwiększanie liczby punktów węzłowych przybliżenia pozwala wygładzić wykres i w konsekwencji znacząco zmniejszyć błąd przybliżenia. Dla $n = 100000$ jest on równy maksymalnie $8.05046 \cdot 10^{-15}$, czyli zaledwie jeden rząd wielkości więcej, niż precyzja arytmetyki. Jest to bardzo dobre przybliżenie i świadczy o dużej precyzji zarówno algorytmu, jak i jego implementacji.

4.2.3. $F(s, g) = g^3$

Rozważmy równanie $F(s, g) = g^3$ na przedziale $[1, 10]$ dla warunku początkowego $g(1) = \frac{1}{\sqrt{20}}$. Jego rozwiązaniem jest $g(s) = \frac{1}{\sqrt{2(11-s)}}$.



Rysunek 3: Błąd względný obliczania wartości funkcji $g(s)$

Zauważmy, że zarówno funkcja $g(s)$, jak i $F(s, g)$ są bardzo małe przy początku badanego przedziału, lecz potem rosną coraz szybciej w kierunku jego końca. Dlatego również błąd, początkowo będąc bliski precyzji arytmetyki nawet przy niewielkim zagęszczeniu punktów węzłowych, rośnie bardzo szybko. Mimo to dla $n = 100000$ wzrost $g(s)$ udało się opanować i przybliżenie pozostało precyzyjne, jego maksymalny błąd względný wyniósł $4.85834 \cdot 10^{-14}$.

5. Wnioski

Wzory Adamsa-Bashfortha i Adamsa-Moultona są przydatne do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Mimo, że nie są one zawsze dokładne, to dla pewnej klasy funkcji (wielomiany stopnia co najwyżej o jeden mniejszego, niż stopień tych kwadratur, które nie są funkcjami sklejanymi) dają bardzo precyzyjne wyniki. Jeśli funkcja F należy do tej klasy, to przy użyciu odpowiednio wielu (rzędu 100000) punktów węzłowych, algorytm bazujący na tychże wzorach przybliża g z precyzją bliską precyzji arytmetyki. Dzieje się tak niezależnie od skomplikowania funkcji g . Jest to więc bardzo dobre narzędzie do rozwiązywania tego typu problemów i może być z powodzeniem używane w praktyce.

Literatura

- [1] F. Przytycki, Równania Różniczkowe Zwyczajne, skrypt, Uniwersytet Warszawski, 2001 <https://www.mimuw.edu.pl/~radamcz/teaching/skrypt.pdf>
- [2] W.Cheney, D. Kincaid, Numerical mathematics and computing, sixth edition, Brooks/Cole: Cengage Learning, 2007
- [3] Za Wikipedią: https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta_methods#Second-order_methods_with_two_stages