Programación lineal: el problema dual

Rodrigo Maranzana

Repaso problema de programación lineal

Algebraica:

$$Max\ o\ Min \sum_j c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_j a_{ij} x_j \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} b_i \ \forall i$$

$$x_j \geq 0$$

Matricial:

$$Max\ o\ Min\ C^T X$$

s.t.

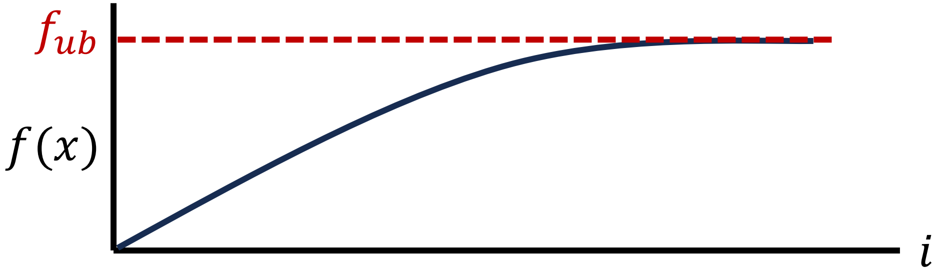
$$AX \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} B$$

$$X \geq 0$$

Cotas de un problema LP

Una cota superior de la función objetivo del problema LP en maximización (f_{ub}) nos daría una información valiosa:

- Durante la optimización, es un límite que no se puede superar.
- Nos da una idea aproximada de la distancia al óptimo.
- Si en un paso de optimización i resulta $f_{ub} = f_i(x)$, entonces encontramos el óptimo.



Nota: Aplica lo mismo para minimización pero con cota inferior.

Cotas de un problema LP

Partiendo del siguiente problema, que vamos a llamar primal:

$$Max\ C^T X$$

s.t.

$$AX \leq B$$

$$X \geq 0$$

Ej: maximizar una ganancia de un mix comercial sujeta a restricciones de recursos disponibles.

Buscamos encontrar una cota superior del problema.

Cotas de un problema LP

En primer lugar, buscamos una cota superior de los coeficientes C (ganancia unitaria de cada producto comercializado) de la función objetivo del primal.

Siendo $\boldsymbol{Y}$ un vector $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}$

Podemos entender y_i como el precio por unidad de cada recurso.

Vamos a usar las variables y_i para ponderar cada coeficiente tecnológico del problema primal y usarlo como cota superior de C.

$$\boxed{A^T Y \geq C}$$

Cotas de un problema LP: intuición

Proveedor de recursos | Vendedor de productos | Cliente

Resuelve problema Primal

Cotas de un problema LP: intuición

$$AX \leq B$$

$$\begin{array}{ll} \text{Recuso 1} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m} \leq b_1 \\ \text{Recuso 2} & a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m} \leq b_2 \\ & \cdots \\ \text{Recuso n} & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm} \leq b_n \\ & \text{Producto 1} \quad \text{Producto 2} \quad \text{Producto m} \end{array}$$

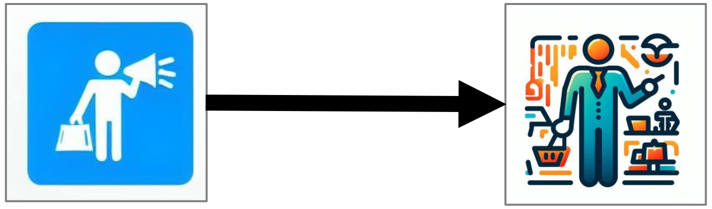
$$A^T Y \geq C$$

$$\begin{array}{ll} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{n1} \geq c_1 & \text{Producto 1} \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{n2} \geq c_2 & \text{Producto 2} \\ \cdots & \\ a_{1m}y_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm} \geq c_m & \text{Producto m} \\ \text{Recuso 1} \quad \text{Recuso 2} \quad \text{Recuso n} & \end{array}$$

Cotas de un problema LP: intuición

$$AX \leq B$$

	Producto 1		Producto 2				Producto m		
Recurso 1	$a_{11}x_1$	$+$	$a_{12}x_2$	$+ \cdots +$			a_{1m}	$\leq$	b_1
Recurso 2	$a_{21}x_1$	$+$	$a_{12}x_2$	$+ \cdots +$			a_{1m}	$\leq$	b_2
				…					
Recurso n	$a_{n1}x_1$	$+$	$a_{n2}x_2$	$+ \cdots +$			a_{nm}	$\leq$	b_n



Vendedor de productos

Cliente

Conceptos:

x_j: cantidad total de producto “j” fabricado.
a_{ij}: u. de recurso “i” por u. de producto “j”.
b_i: cantidad total de recurso “i” disponible.

La multiplicación $a_{ij}\ x_j$ representa todo el recurso “i” que hace falta para fabricar la cantidad necesaria de producto “j”

La suma de $a_{ij}\ x_j$ no puede ser mayor que la capacidad total b_i

Cotas de un problema LP: intuición

Conceptos:

y_i: contribución marginal. \$ por u. de recurso "i"
a_{ji}: u. de recurso "i" por u. de producto "j".
c_i: ganancia unitaria del producto "i".

La multiplicación $a_{ji}\ y_i$ resulta en \$ por u. de producto "j". Es el aporte total en \$ del recurso "i" por cada unidad de producto "j".

La suma de la contribución $a_{ji}\ y_i$ debe ser mayor o igual que la ganancia unitaria c_j de cada producto "j" que saca el vendedor.

De esta forma, el proveedor siempre elige vender los recursos por separado y no dedicarse a vender el producto armado.

$$A^T Y \geq C$$

$$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{n1} \geq c_1 \quad \text{Producto 1}$$

$$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{n2} \geq c_2 \quad \text{Producto 2}$$

$$\cdots$$

$$a_{1m}y_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm} \geq c_m \quad \text{Producto m}$$

Recurso 1 Recurso 2 Recurso n

$$\boxed{A^TY} \longrightarrow \boxed{\geq C}$$

Proveedor de recursos **Vendedor de productos**

Cotas de un problema LP

$$\boxed{C \leq A^T Y}$$

Si reorganizamos:

$$C^T \leq Y^T A$$

Dado que en el primal $X \geq 0$, podemos multiplicar ambos términos por X:

$$C^T X \leq Y^T A X$$

Función objetivo primal

Restricciones primales

$$AX \leq B$$

Cotas de un problema LP

$$C^T\boldsymbol{X} \quad \leq \quad Y^T(AX) \leq Y^T B$$

$$C^T\boldsymbol{X} \leq Y^T(B)$$

$$\boxed{C^T\boldsymbol{X} \leq B^T Y}$$

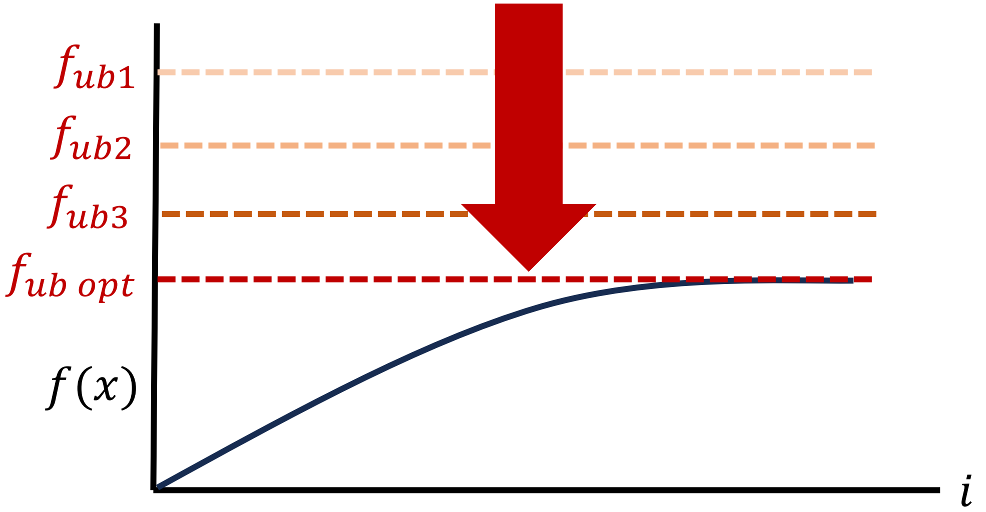
Vemos que $B^T Y$ resulta cota superior de la función objetivo primal.
Pero Y es variable, ¿Qué valor seleccionamos?

Cotas de un problema LP

$$C^T \boldsymbol{X} \leq B^T Y$$

La cota superior más próxima al objetivo primal. Minimizamos.

$$\boxed{Min\ B^T Y}$$



Problema dual LP

El problema de optimización resultante:

$$Min\ B^T Y$$

s.t.

$$A^T Y \geq C$$

$$Y \geq 0$$

Se conoce como problema dual.

Repasamos la intuición

Proveedor de recursos
Resuelve problema Primal

Minimiza el costo total de los recursos.
Sujeto a que la contribución en \$/producto sea mayor que la ganancia unitaria del vendedor.

$Min\ B^T Y$
s.t.
$A^T Y \geq C$
$Y \geq 0$

Vendedor de productos
Resuelve problema Primal

Maximiza la ganancia total de sus productos.
Sujeto a que la cantidad de cada recurso invertido no supere la capacidad total.

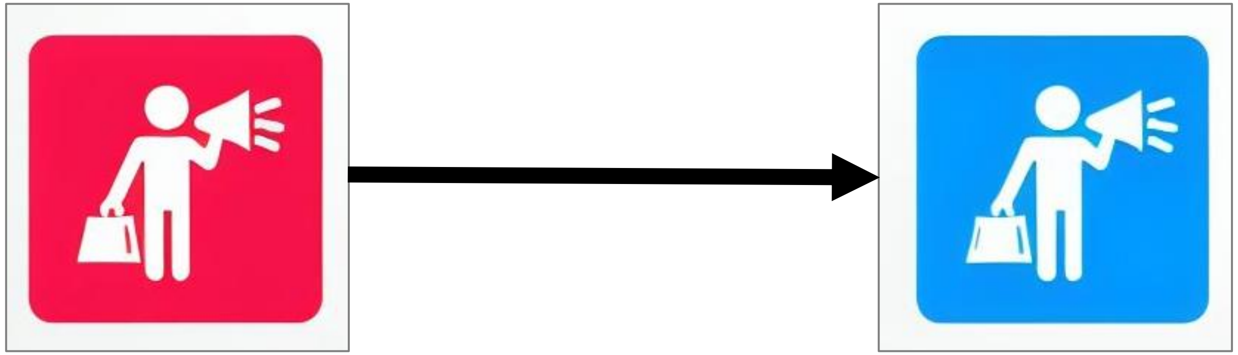
$Max\ C^T X$
s.t.
$AX \leq B$
$X \geq 0$

Cliente

Relación entre el dual y el primal: cotas

Las variables Y (dual) y X (primal) tienen unidades diferentes.

El valor de la función objetivo Z (primal) y W (dual), tiene la misma unidad.



Podemos imaginar como si ambos estuvieran negociando un precio.

- El proveedor intenta minimizar el costo de la venta.
- El vendedor intenta maximizar su ganancia.

Dualidad débil

Concepto de dualidad: un problema tiene dos formas análogas: primal y dual.

Además, se conoce como teorema de dualidad débil (weak duality theorem), a la fórmula derivada en la slide anterior:

$$\underbrace{C^T \boldsymbol{X}}_{\text{Función objetivo del problema primal}} \leq \underbrace{B^T Y}_{\text{Función objetivo del problema dual}}$$

Nota: En caso de estar minimizando en el primal, se voltea el signo, y el dual pasa a ser una cota inferior.

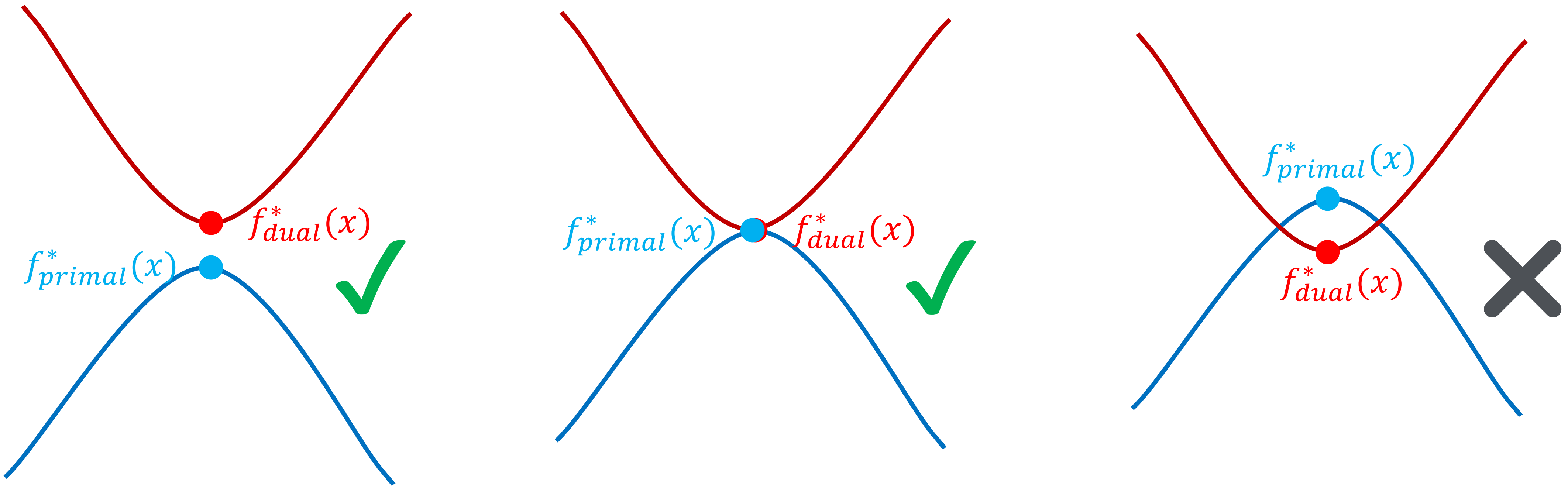
Dualidad débil

La dualidad débil implica que no puede conseguirse un óptimo primal por encima del óptimo dual:

$$C^T \boldsymbol{X} \leq B^T Y$$

Función objetivo del problema primal

Función objetivo del problema dual

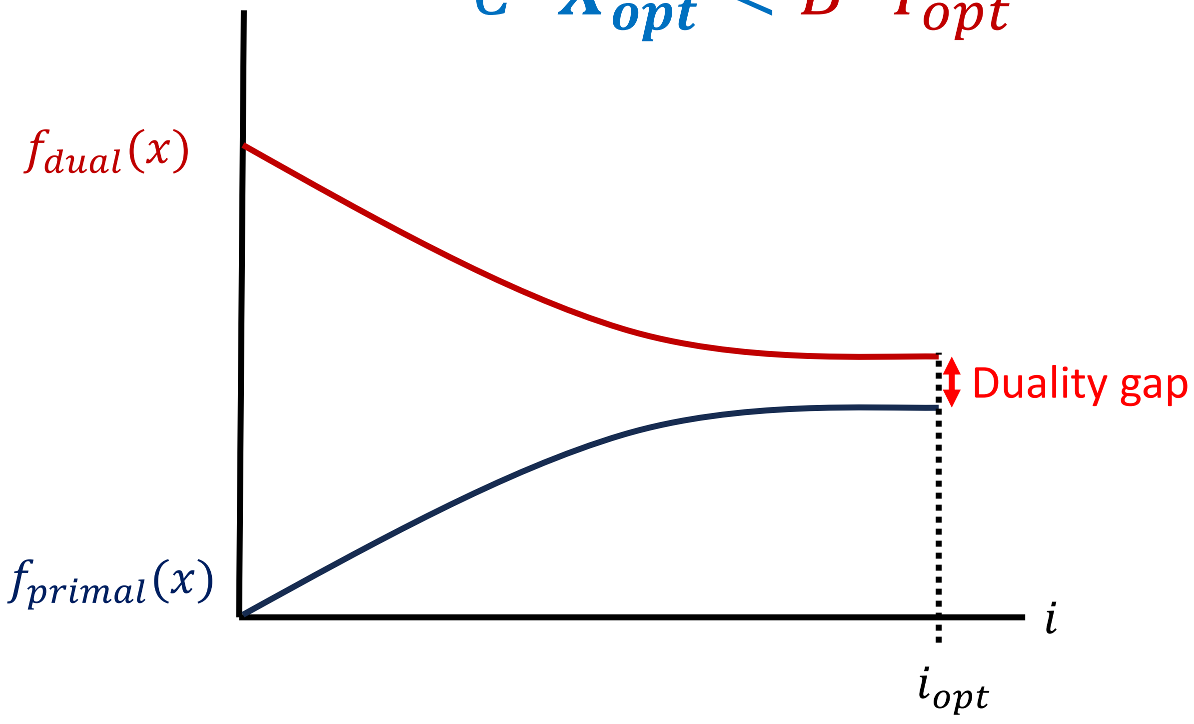


Duality gap

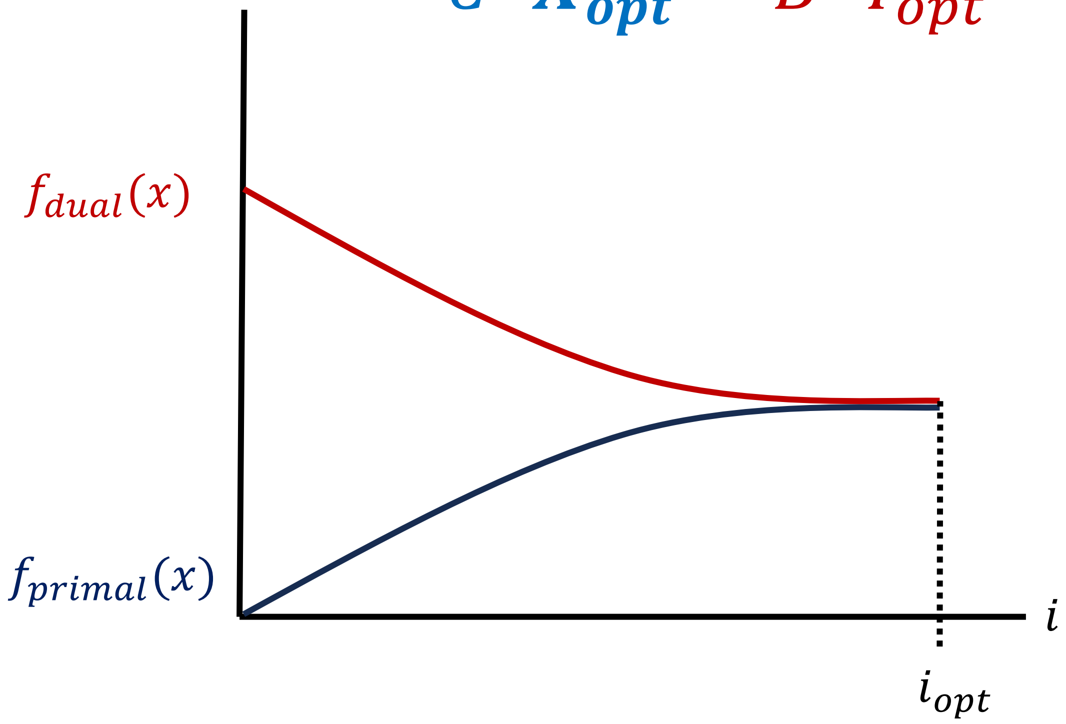
Tanto en primal como dual, siempre estoy resolviendo un problema LP que implica maximización o minimización. Uno es la cota del otro.

Duality gap es la diferencia entre ambos funcionales primal y dual en el óptimo.

$$C^T \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{opt}} < B^T Y_{opt}$$



$$C^T \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{opt}} = B^T Y_{opt}$$

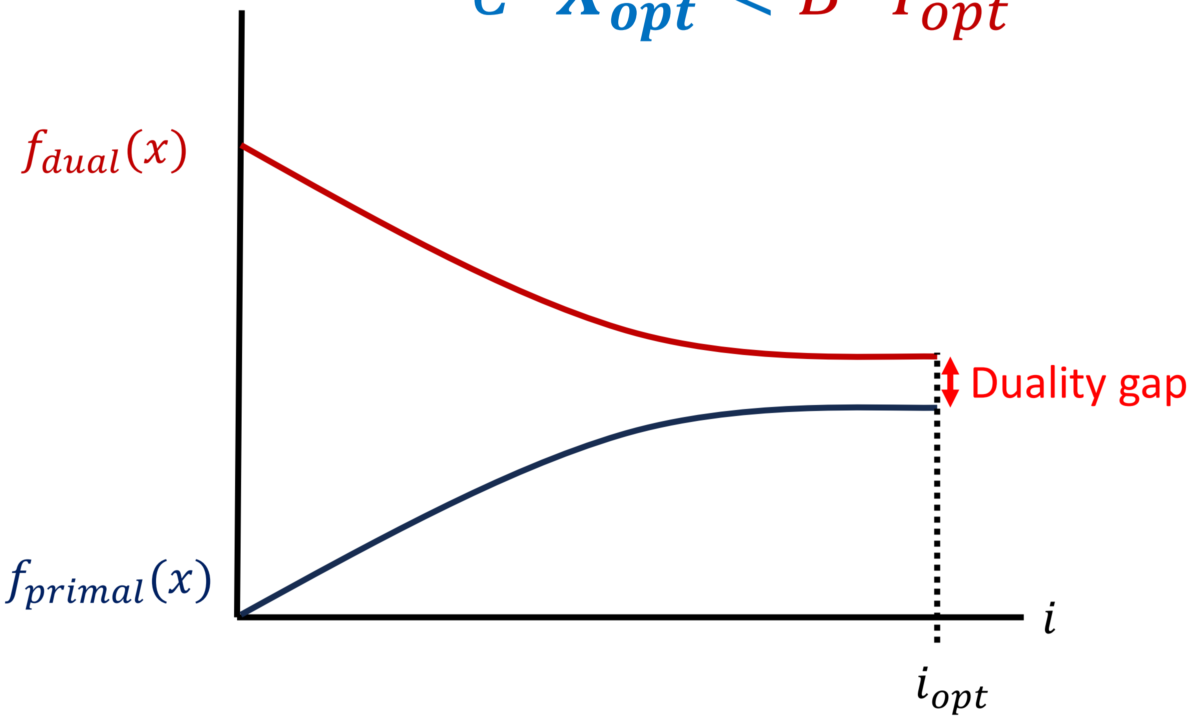


Duality gap

Si existe Duality Gap implica que para resolver un problema, debe conocerse el resultado del primal y el dual.

Es decir, resolver 2 problemas por separado.

$$C^T \boldsymbol{X_{opt}} < B^T Y_{opt}$$



Dualidad fuerte

Se conoce como dualidad fuerte (strong duality) al caso en el que no existe duality gap:

$$C^T \boldsymbol{X}_{\boldsymbol{opt}} = B^T Y_{opt}$$

En programación lineal:

Si el primal tiene solución óptima factible, entonces el dual también y es la misma. Es decir cumple con la dualidad fuerte.

Nota: la demostración se puede lograr mediante el lema de Farkas*.

*Strong Duality, École Polytechnique Fédérale de Lausanne https://sma.epfl.ch/~niemeier/opt09/opt09_ch05.pdf

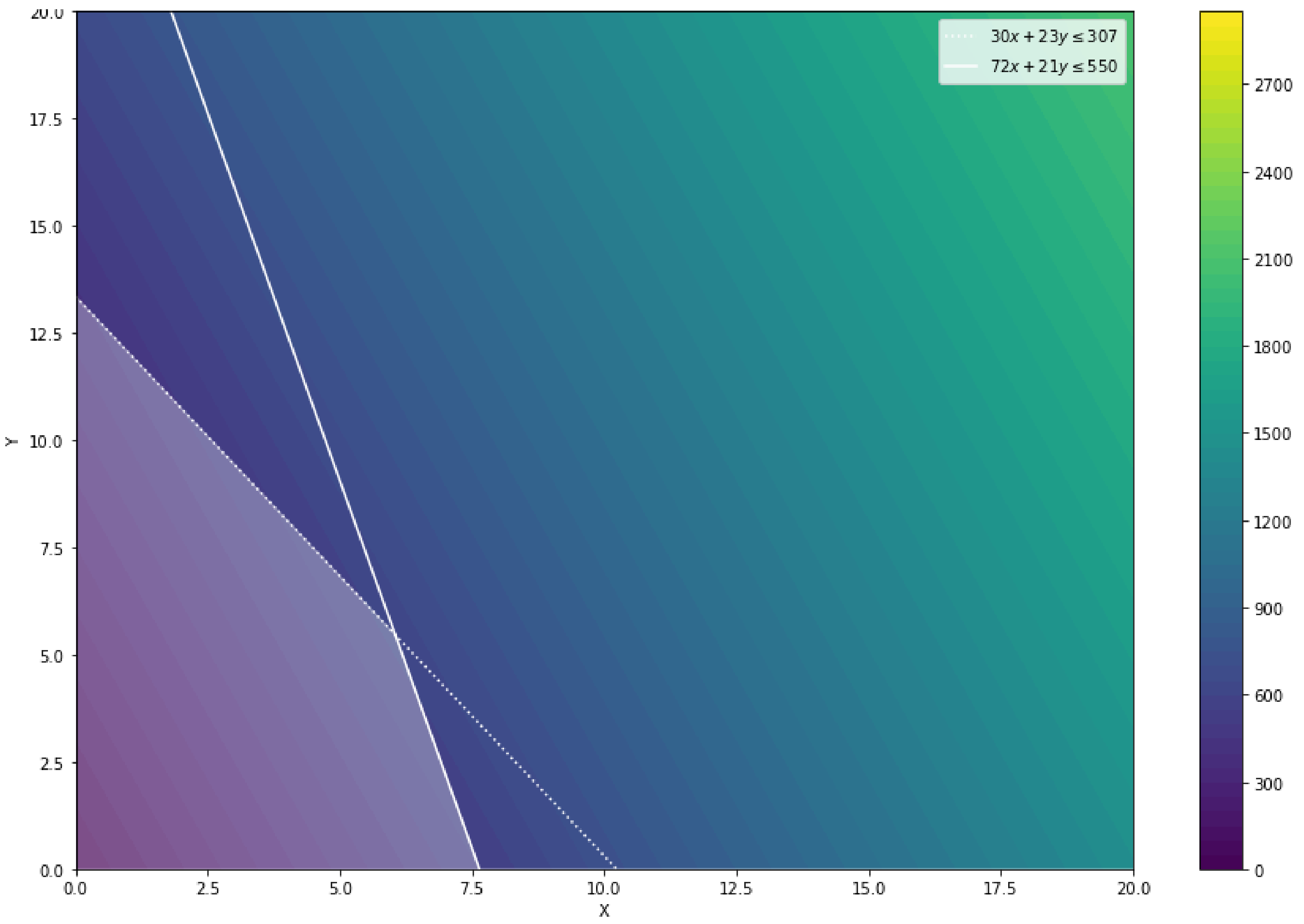
Ejemplo construcción dual con max

$$\mathbf{max}\, z = 72x_1 + 33x_2$$

s.t.

$$30x_1 + 23x_2 \leq 307$$
$$72\,x_1 + 21x_2 \leq 550$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

A este problema lo vamos a llamar: problema LP primal



Ejemplo construcción dual con max

Función objetivo primal $\max z = \boxed{72}x_1 + \boxed{33}x_2$

$30x_1 + 23x_2 \leq 307$

$30\mathbf{y_1} + 72\mathbf{y_2} \geq 72$

$23\mathbf{y_1} + 21\mathbf{y_2} \geq 33$

$72x_1 + 21x_2 \leq 550$

Restricción 1 primal

Restricción 2 primal

Ejemplo construcción dual con max

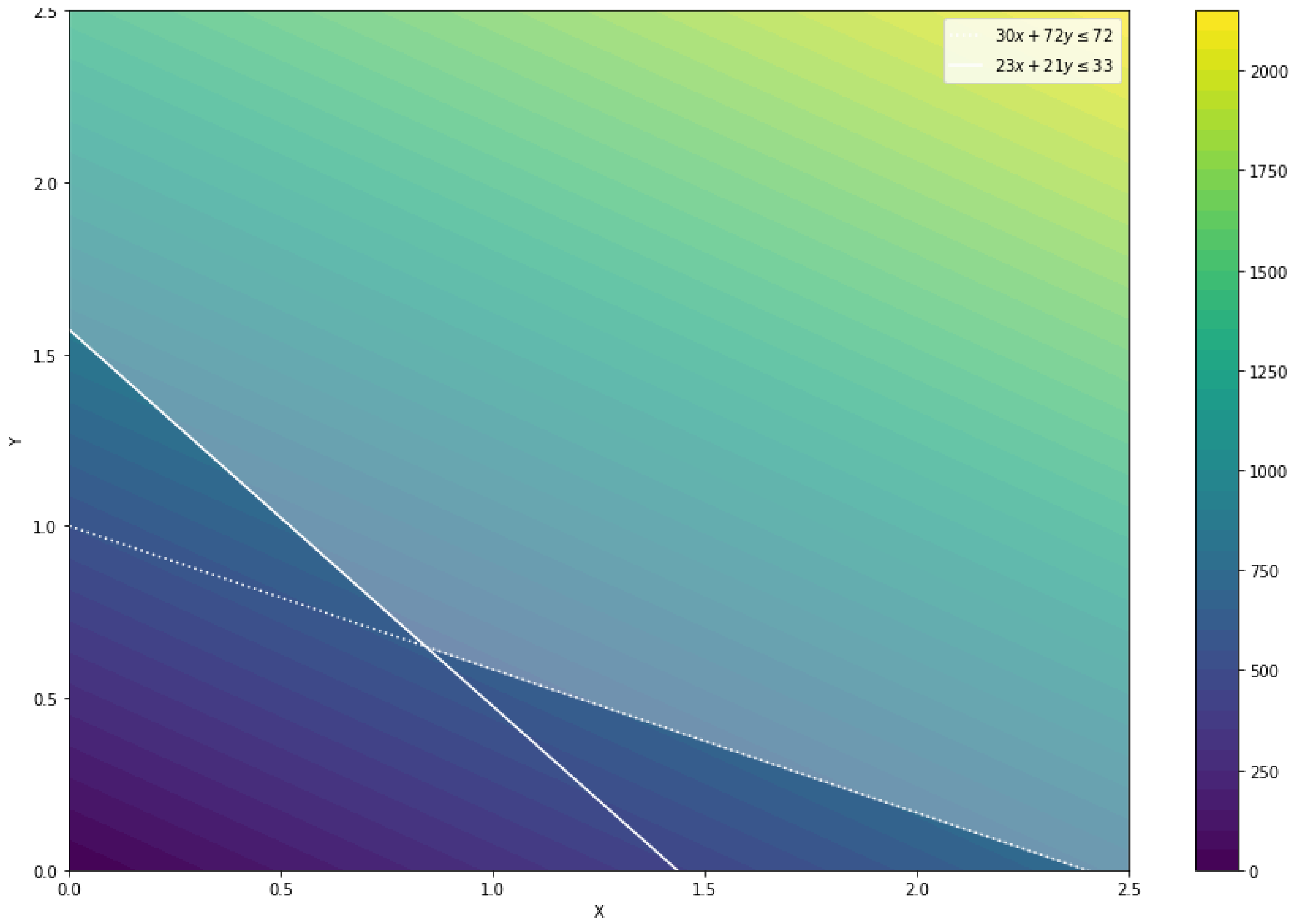
Ejemplo: construcción de problema dual.

$$\mathbf{max}\, z = 307y_1 + 550y_2$$

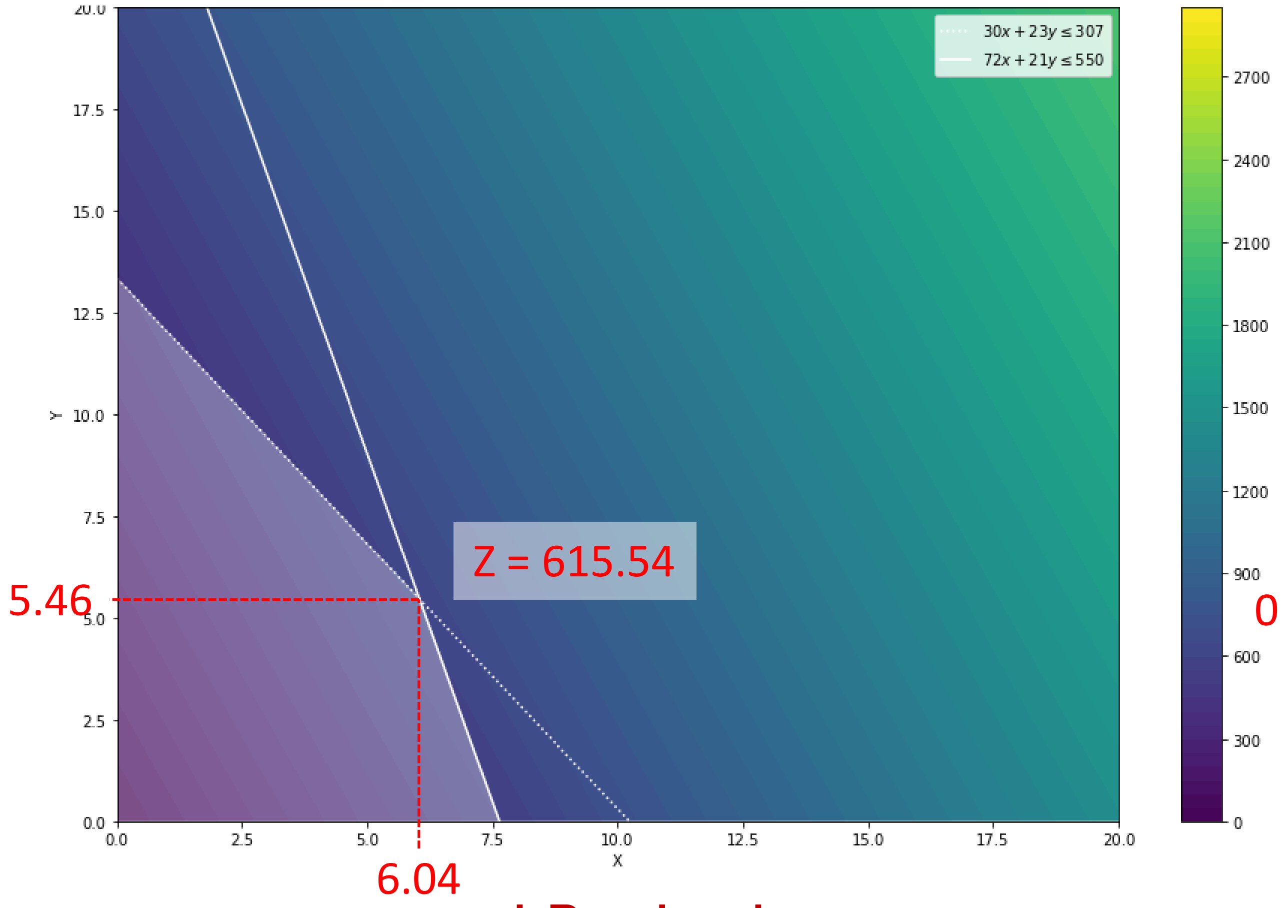
s.t.

$$30y_1 + 72y_2 \geq 72$$
$$23\, y_1 + 21y_2 \geq 33$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

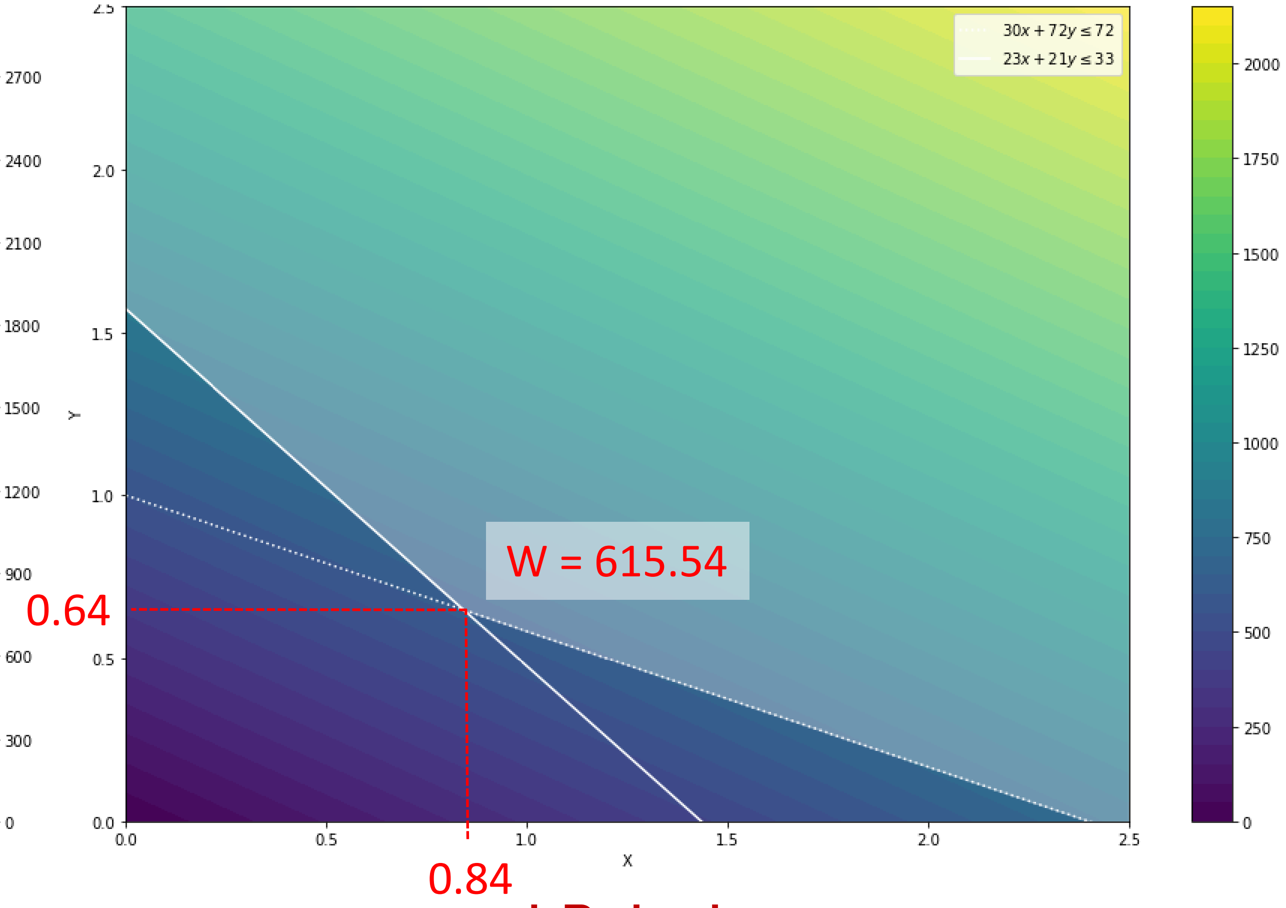
A este problema lo vamos a llamar: problema LP dual



Ejemplo construcción dual con max



LP primal



LP dual

Transformación primal/dual

Primal (maximización)	Dual (minimización)
restricción "i"	variable "i"
$\leq$	≥ 0
$\geq$	≤ 0
$=$	$irrestricta$
variable "j"	restricción "j"
≥ 0	$\geq$
≤ 0	$\leq$
$irrestricta$	$=$

Posibles resultados

Primal	Dual	Dualidad
Factible	Factible	Dualidad fuerte
No acotado	Incompatible	X
Incompatible	No acotado	X
Soluciones alternativas	Solución degenerada	X
Solución degenerada	Soluciones alternativas	X

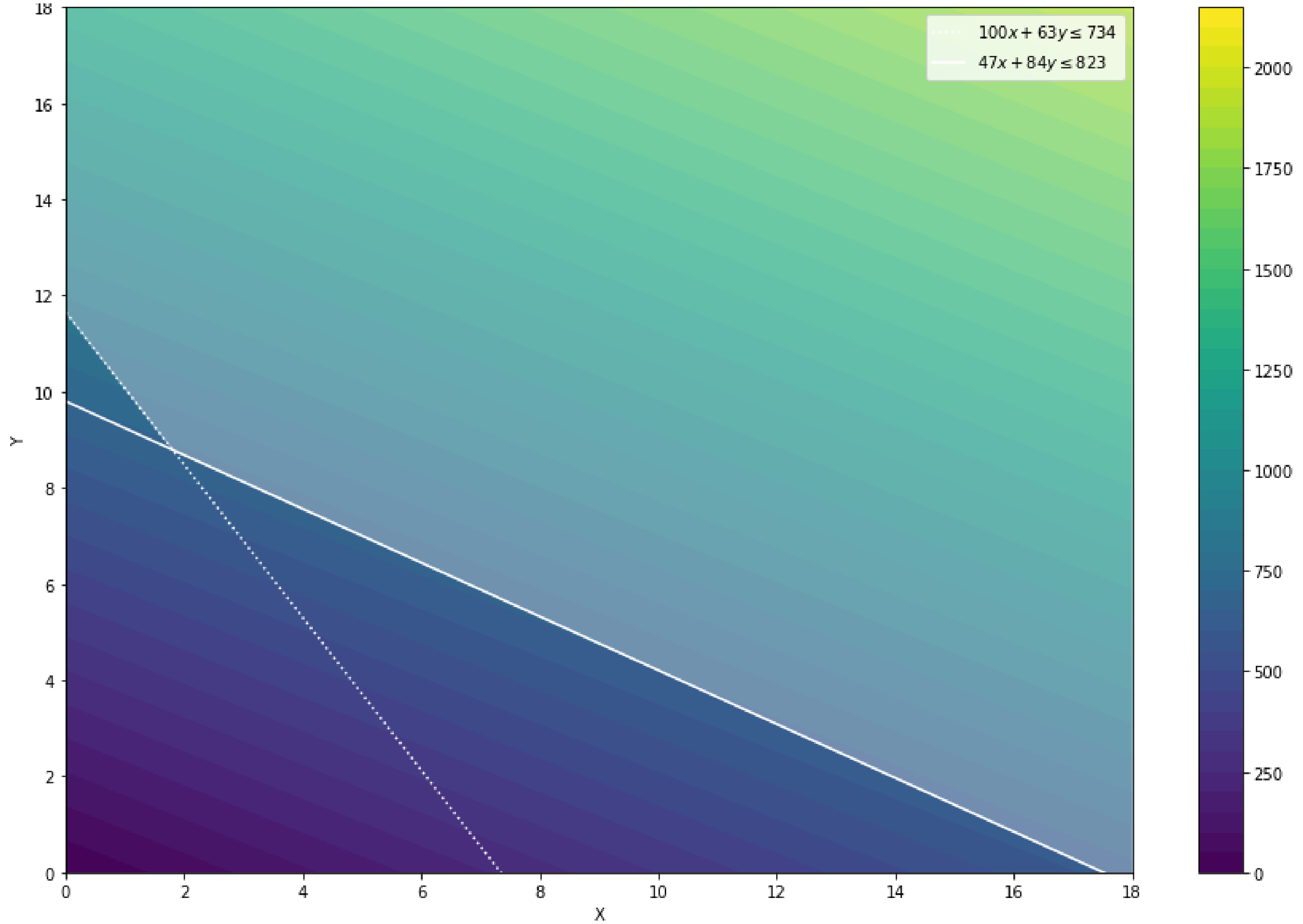
Ejemplo construcción dual con min

$$\mathbf{min}\, z = 35x_1 + 71x_2$$

s.t.

$$100x_1 + 63x_2 \geq 734$$
$$47\, x_1 + 84x_2 \geq 823$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

A este problema lo vamos a llamar: problema LP primal



Ejemplo construcción dual con min

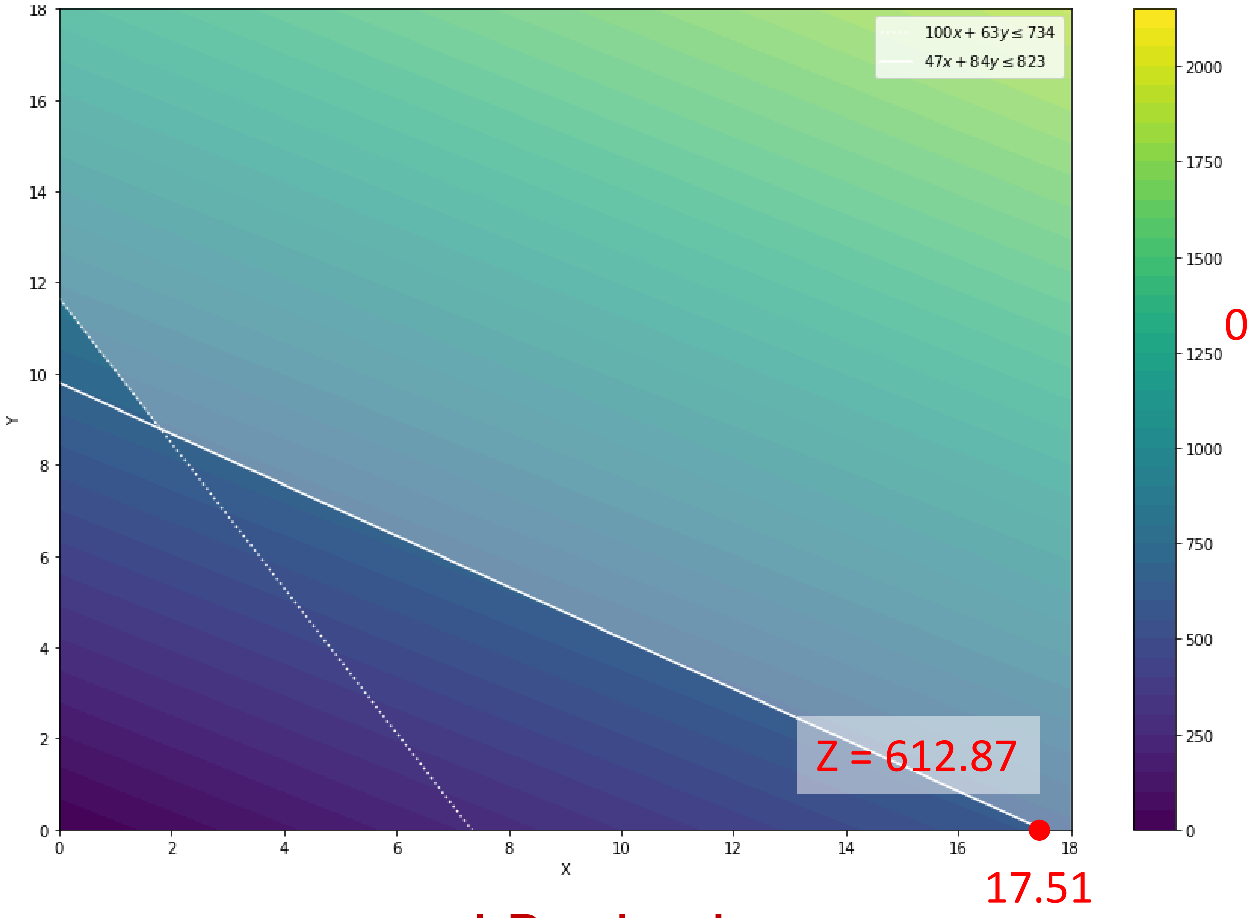
$$\mathbf{min}\, z = 35x_1 + 71x_2$$
s.t.
$$100x_1 + 63x_2 \geq 734$$
$$47\, x_1 + 84x_2 \geq 823$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

LP primal

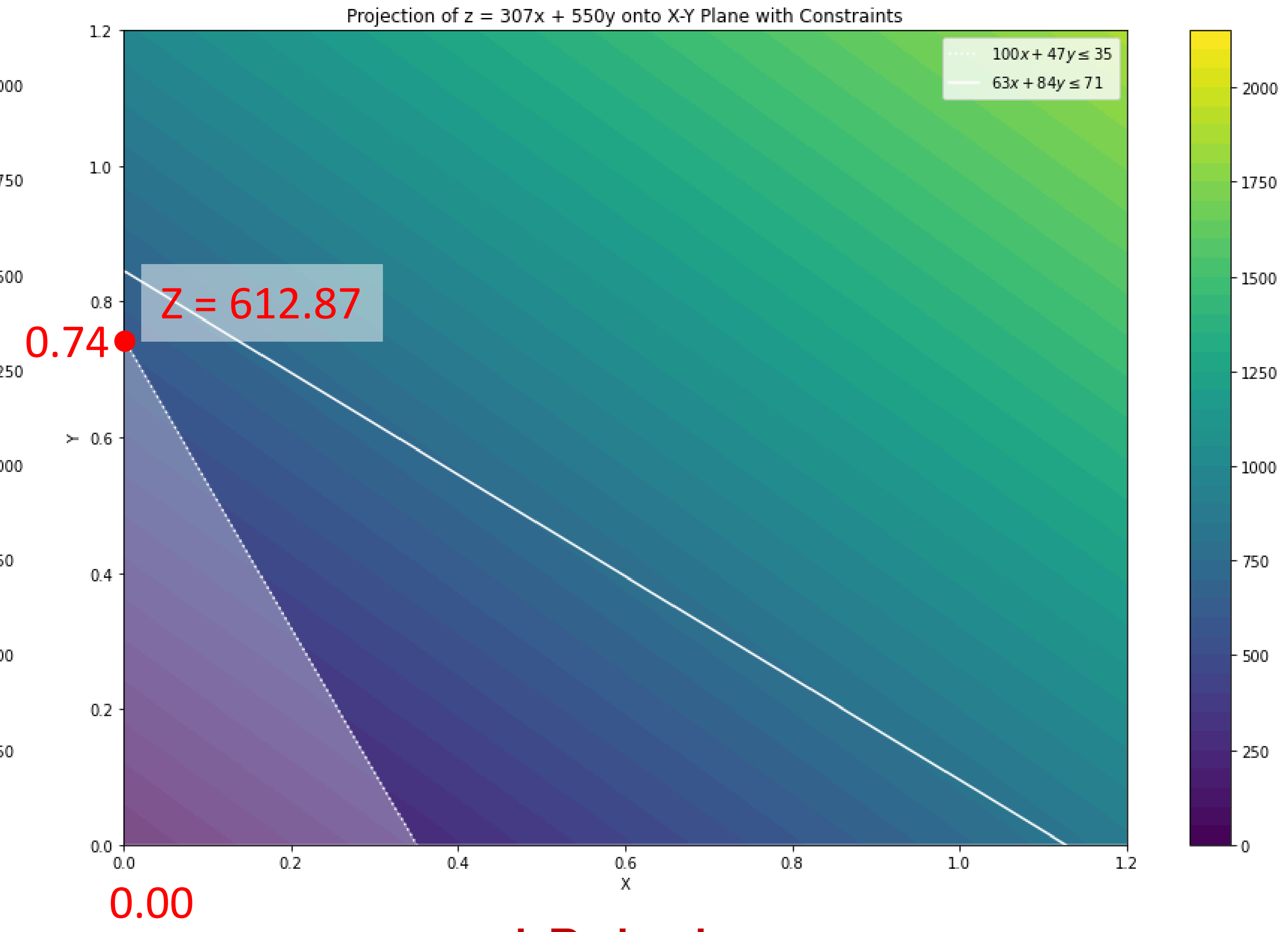
$$\mathbf{max}\, z = 734y_1 + 823y_2$$
s.t.
$$100y_1 + 47y_2 \leq 35$$
$$63\, y_1 + 84y_2 \leq 71$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

LP dual

Ejemplo construcción dual con min



LP primal

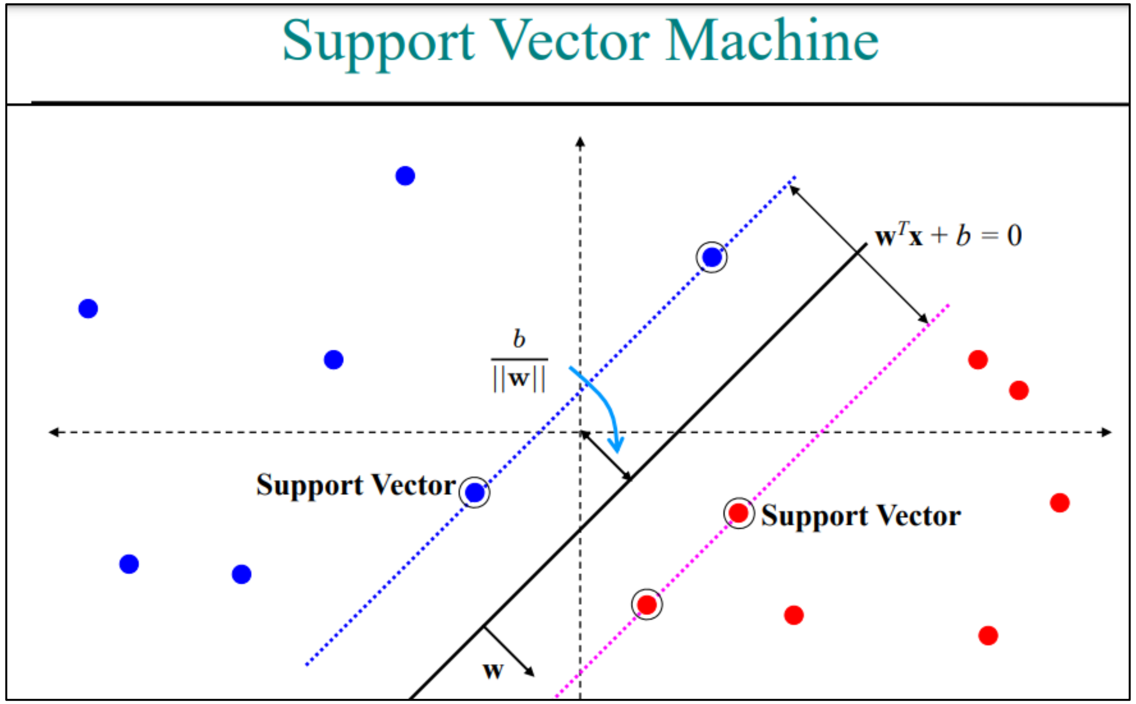


LP dual

Selección dual/primal

- Eficiencia en resolución: Mientras uno tiene "n" restricciones y "m" variables, en el otro se traspone. Depende del contexto.
- Significado de cada problema.
- Análisis de sensibilidad: las variables duales corresponden a los precios sombra (shadow prices)
- El dual arroja información sobre cotas del primal.

Caso dual en Machine Learning



CS19 Machine Learning (2015) Lecture 3: SVM dual, kernels and regression, University of Oxford.
https://www.robots.ox.ac.uk/~az/lectures/ml/lect3.pdf

Support Vector Machine es un modelo supervisado de Machine Learning usado para clasificación y regresión.

Implica encontrar un hiperplano que maximice el margen entre clases (ej: fraude y no fraude)

Los puntos que caen en cada margen se llaman vectores de soporte.

La formulación dual del problema:

- Las variables duales están asociadas con cada uno de los datos. Representa la contribución marginal de cada dato al límite de decisión.
- El problema dual resulta ser de programación cuadrática (convexo), es computacionalmente eficiente.