



Programación Lineal: Introducción y Resolución por Método Gráfico

Rodrigo Maranzana

Modelo de programación lineal

Función objetivo:

$$\max \text{ o } \min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Sujeto a las restricciones:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} b_2$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} b_m$$

c_j : coeficiente variable de decisión "j". Costo.

a_{ij} : coeficiente tecnológico de la restricción "i" para la variable "j".

b_i : término independiente de la restricción "i".

Formas de expresar un modelo LP

Algebraica:

$$\max \text{ o } \min \sum_j c_j x_j$$

s.t.

$$\sum_j a_{ij} x_j \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} b_i \quad \forall i$$

Matricial:

$$\max \text{ o } \min c^T X$$

s.t.

$$\begin{matrix} \leq \\ A X = B \\ \geq \end{matrix}$$

Estandarización del problema

- Variables slack:

Convertir desigualdades de restricciones en igualdades.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + \mathbf{S_1} = b_1$$

Siendo $\mathbf{S_1} \geq 0$

- Variables libres:

Convertir variable de decisión en positiva.

$$\mathbf{x_k^+} - \mathbf{x_k^-} = x_k$$

Siendo $\mathbf{x_k^+} \geq 0$ y $\mathbf{x_k^-} \geq 0$

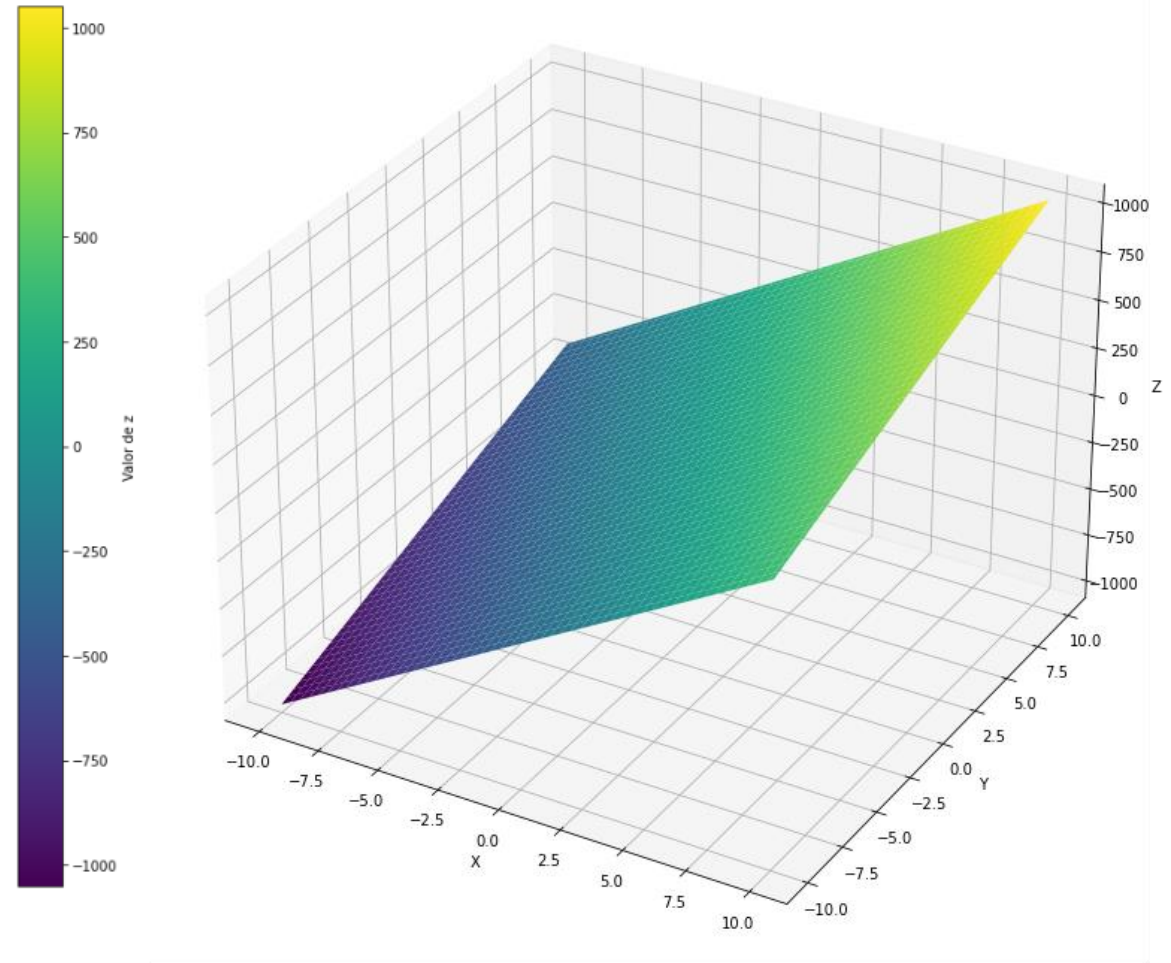
Visualización de un PL

La función objetivo describe un plano en x-y-z:

Ej:

$$z = 72x + 33y$$

- Los colores sobre el gráfico indican el valor de Z



Visualización de un PL

Las restricciones definen una región factible en x-y

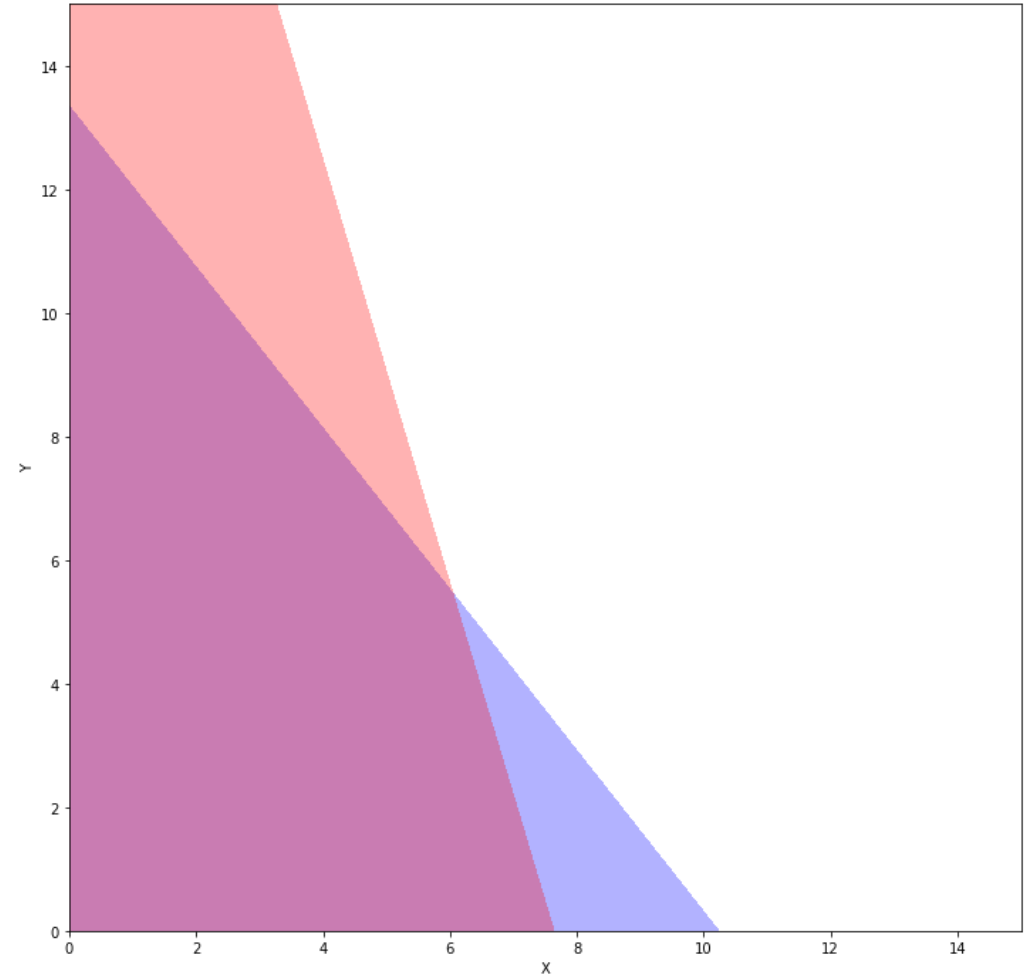
$$\max z = 72x + 33y$$

$$30x + 23y \leq 307$$

$$72x + 21y \leq 550$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$



Visualización de un PL

Proyectando las curvas de iso-costo de la función objetivo en el plano xy , podemos tomar la decisión de punto óptimo.

Ej:

$$\max z = 72x + 33y$$

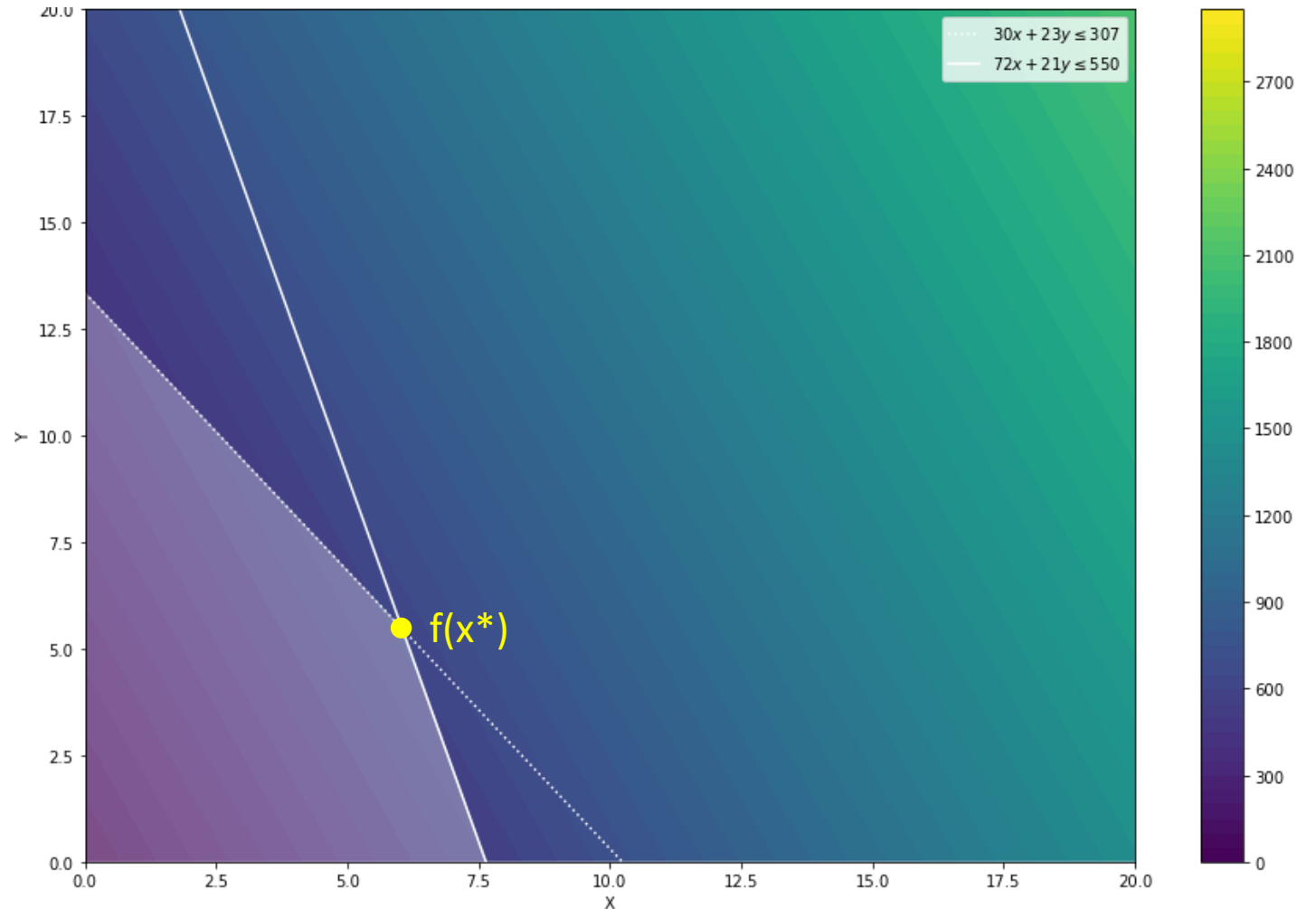
s.t.

$$30x + 23y \leq 307$$

$$72x + 21y \leq 550$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$



Resolución por método gráfico

Condiciones:

- Problemas pequeños.
- Solo para problemas con dos o tres dimensiones.

Aplicación real

- Solo para introducción y didáctica.
- Entendimiento del procedimiento.
- No es aplicable a contextos reales.

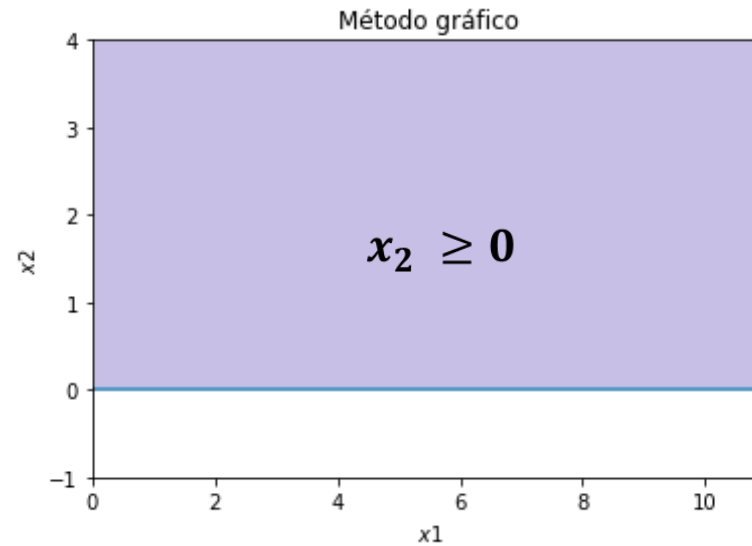
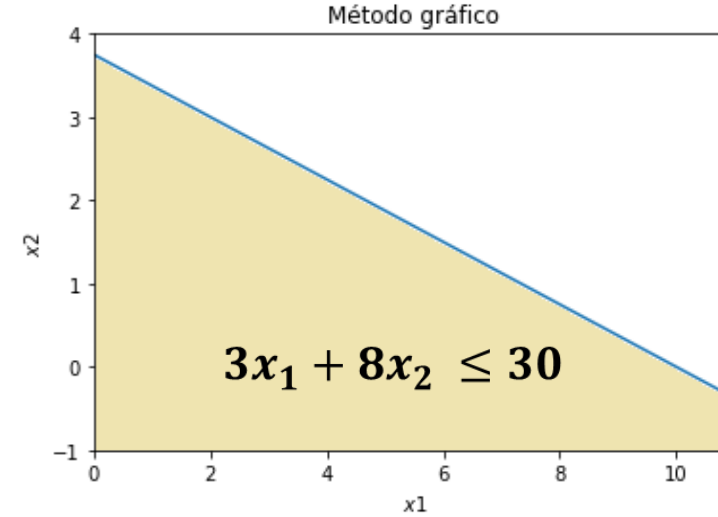
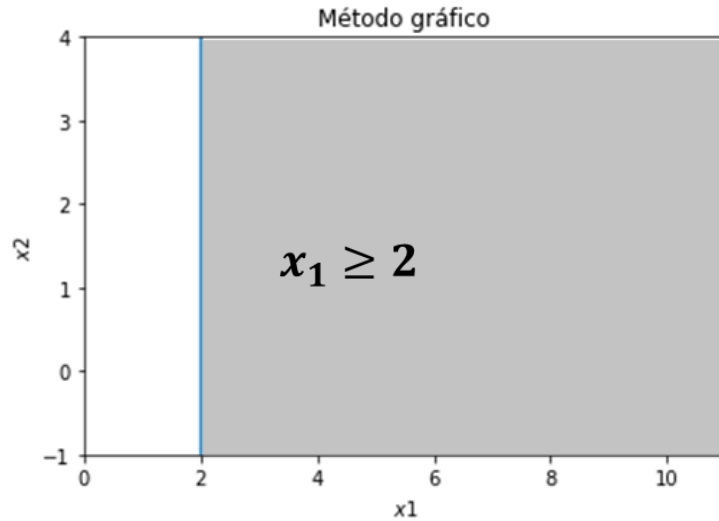
Ejemplo inicial

$$\max z = 10x_1 + 5x_2$$

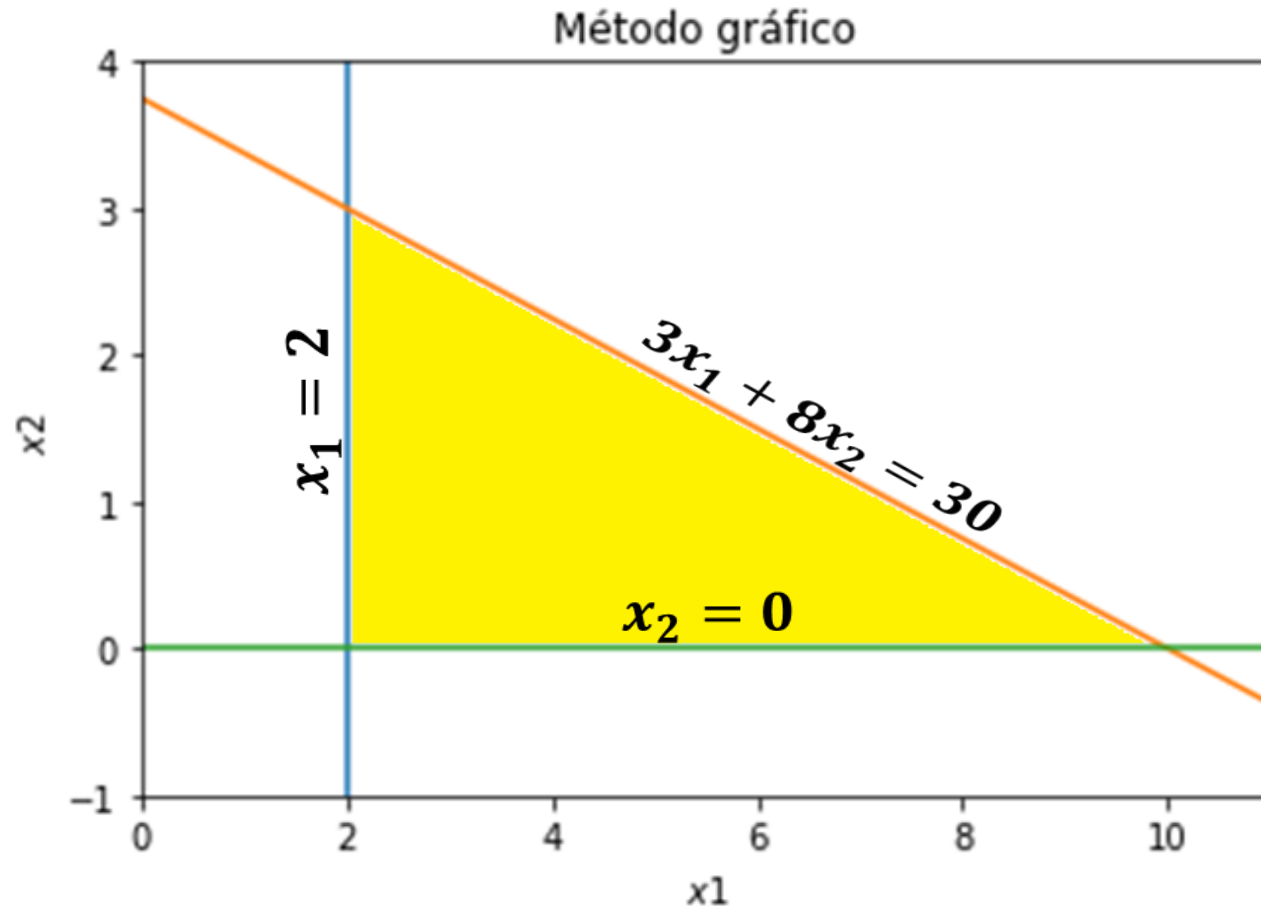
s.t.

$$\begin{array}{rclcl} x_1 & & \geq & 2 \\ 3x_1 & +8x_2 & \leq & 30 \\ & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Representar restricciones

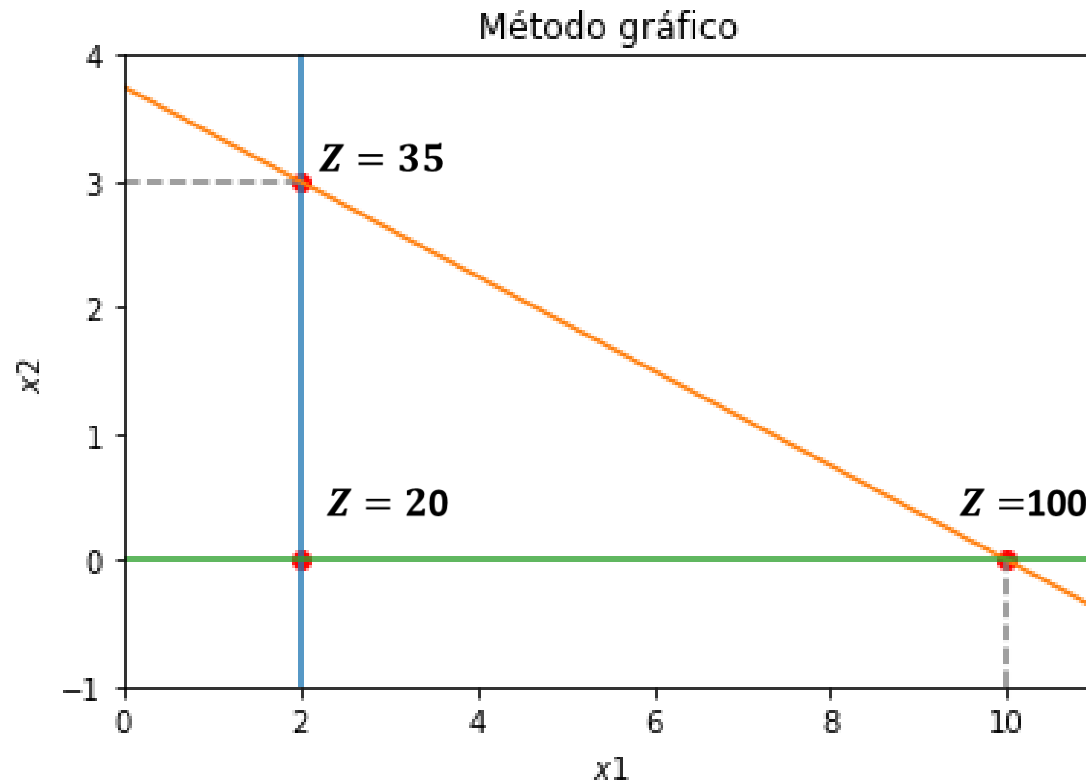


Encontrar región factible



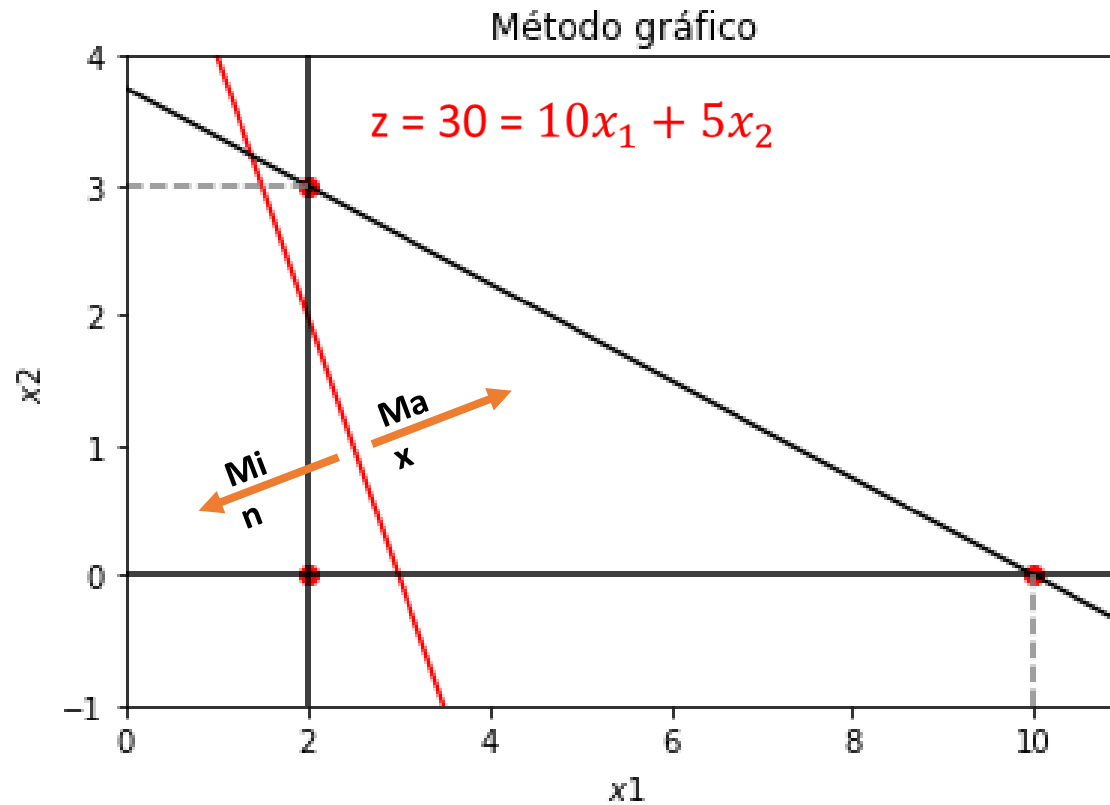
Encontrar óptimo gráficamente

1) Encontrar el valor de Z máximo entre los vértices del poliedro.



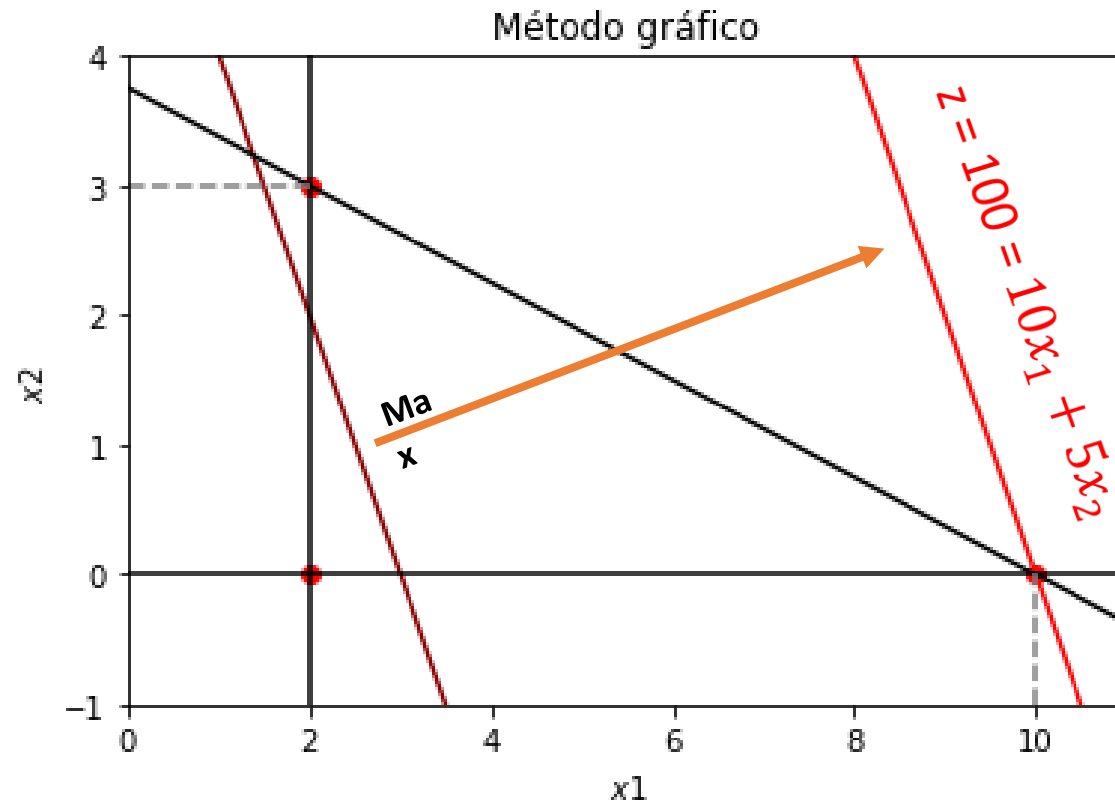
Encontrar óptimo gráficamente

2) Aplicamos el método de curvas de nivel.



Encontrar óptimo gráficamente

2) Encontramos el vértice que coincide con la curva de nivel de Z máximo.



Ejemplo: Wyndor Glass Co. (Hillier, Cap. 2)

Una empresa (Wyndor Glass Co.) produce puertas y ventanas. Deciden poner en producción dos productos nuevos:

Producto 1: Una ventana de 2m de altura con marco de aluminio

Producto 2: Una ventana colgante de 3m con marco de madera.

Wyndor tiene 3 fábricas que cumplen funciones diferentes. El producto 1 requiere producción de la fábrica 1 y 3 mientras que el producto 2 requiere de las plantas 2 y 3. La división de marketing de la empresa hizo un estudio en el cual llegaron a la conclusión de que podrían vender la misma cantidad de ambos productos.

Sin embargo, como ambos están compitiendo por tiempo de producción en la fábrica 3 (el cuál es limitado), la compañía debe decidir cuánto hacer de cada uno para obtener el mayor retorno posible.

Queremos saber cuánto de cada producto debemos fabricar para maximizar el retorno teniendo en cuenta las horas de producción limitadas de las fábricas.

Ejemplo: Wyndor Glass Co. (Hillier, Cap. 2)

Planta	Horas necesarias de producción por batch		Tiempo disponible por semana de producción
	Producto 1	Producto 2	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Ganancia por Batch	\$3000	\$5000	

Ejemplo: Wyndor Glass Co. (Hillier, Cap. 2)

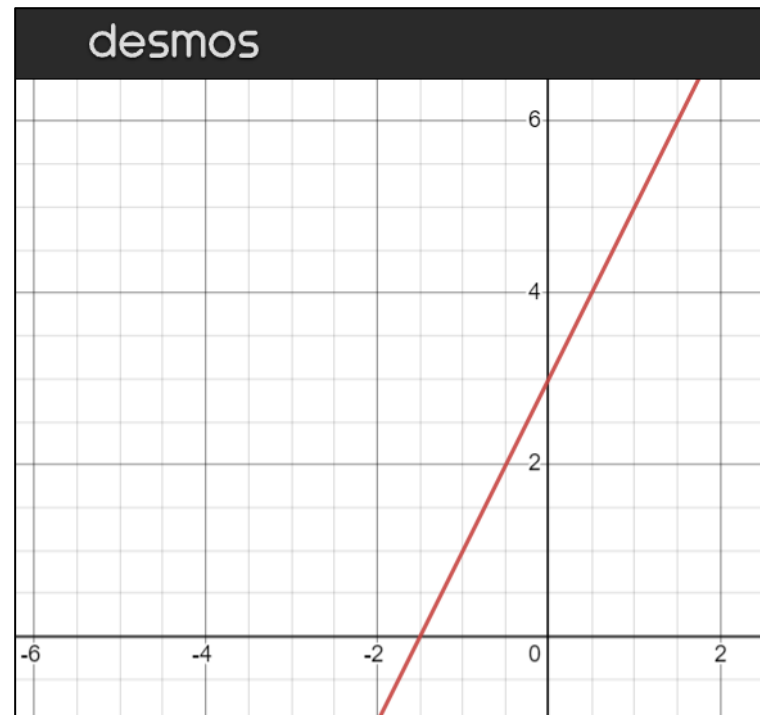
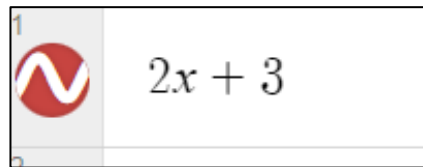
Modelo LP:

$$\begin{array}{ll} \max z = 3000x_1 + 5000x_2 & \text{Función Objetivo} \\ \text{st:} & \\ & \left. \begin{array}{l} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \end{array} \right\} \text{Restricciones} \\ \text{Condición de} & \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right. \\ \text{positividad} & \end{array}$$

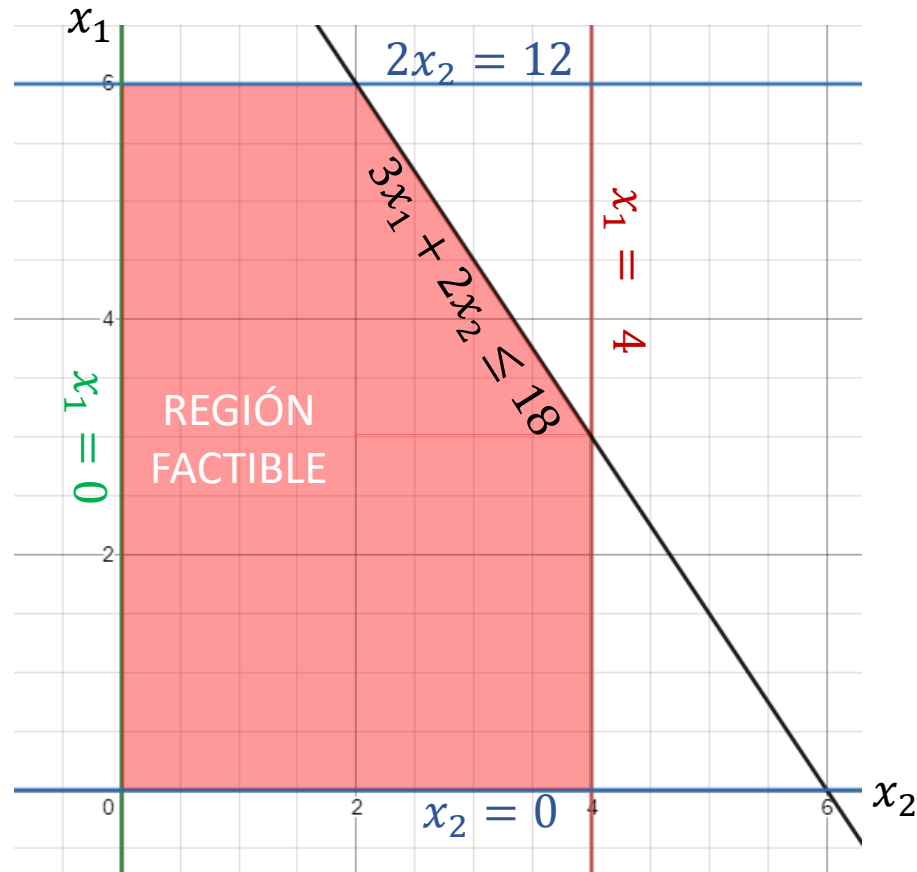
Desmos: calculadora gráfica

desmos

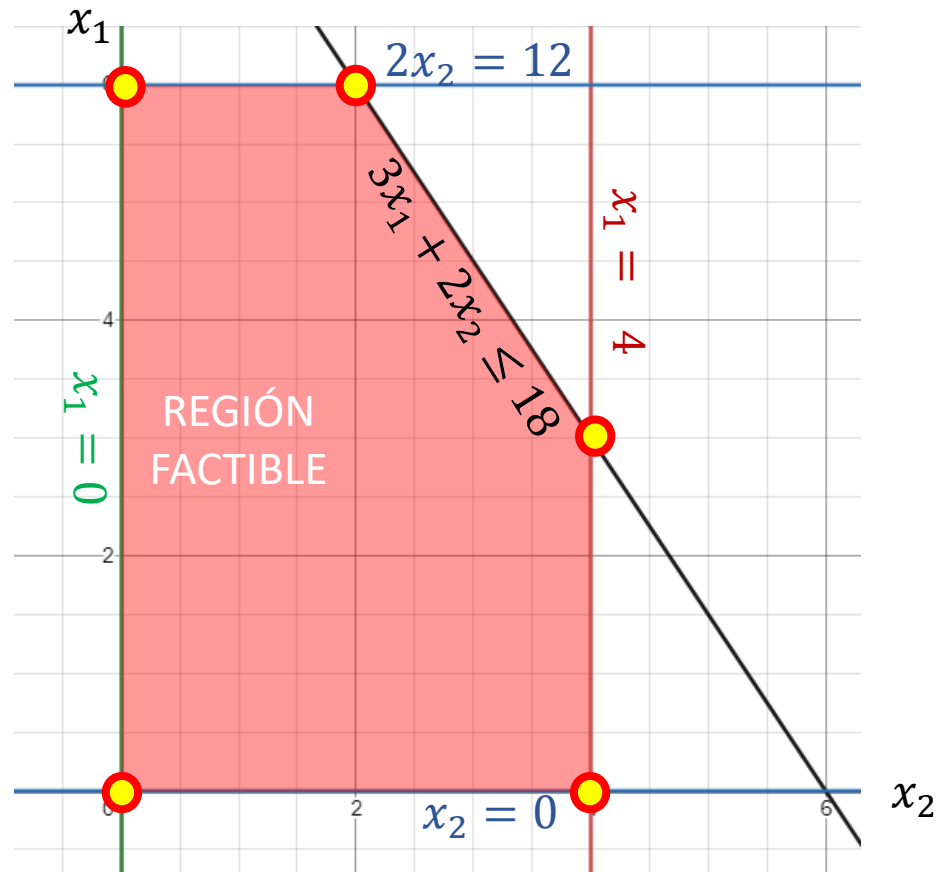
<https://www.desmos.com/calculator>



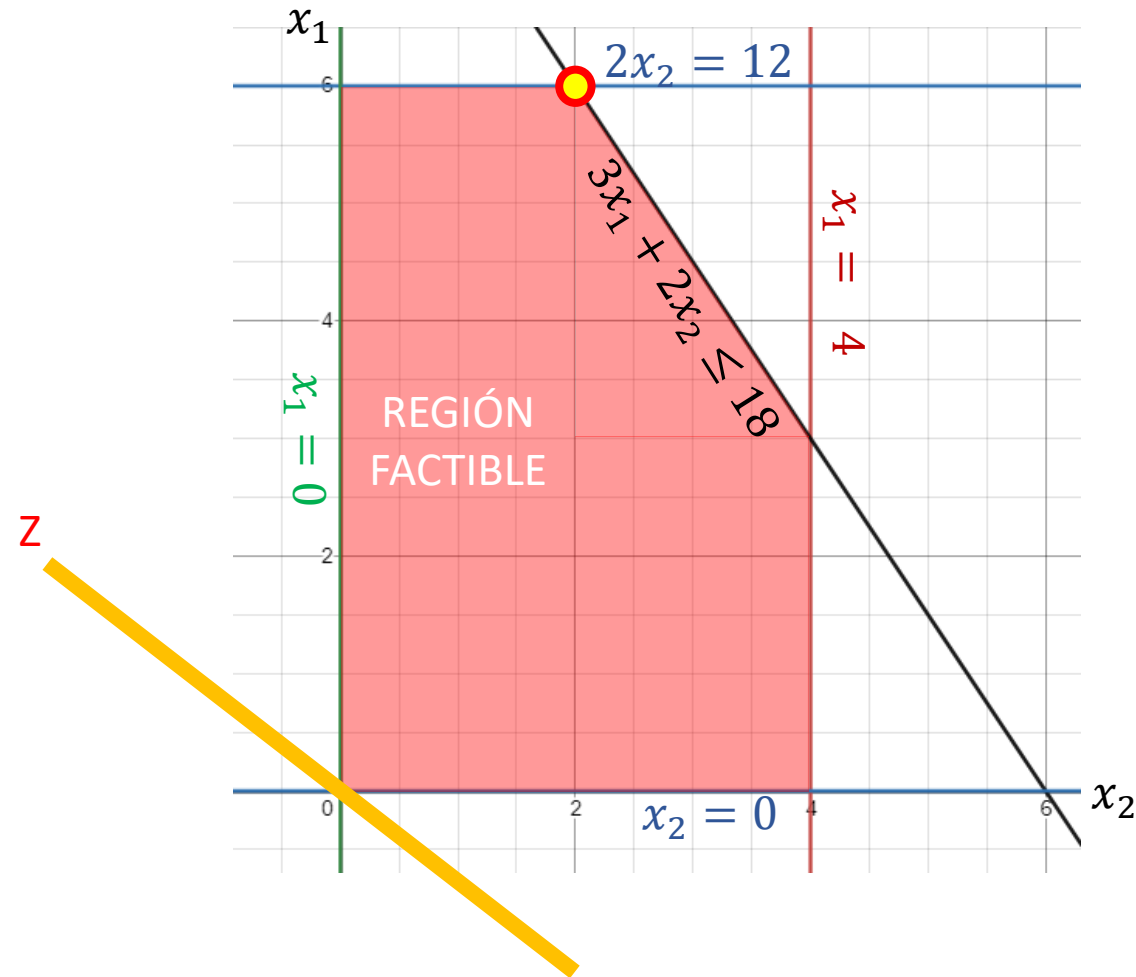
Ejemplo: Wyndor Glass Co. (Hillier, Cap. 2)



Ejemplo: Wyndor Glass Co. (Hillier, Cap. 2)



Ejemplo: Wyndor Glass Co. (Hillier, Cap. 2)



Ejemplo: Wyndor Glass Co. (Hillier, Cap. 2)

