



Programación lineal: variables ficticias en método SIMPLEX

Rodrigo Maranzana

Conceptos iniciales y repaso

SIMPLEX es un método de resolución de problemas lineales.

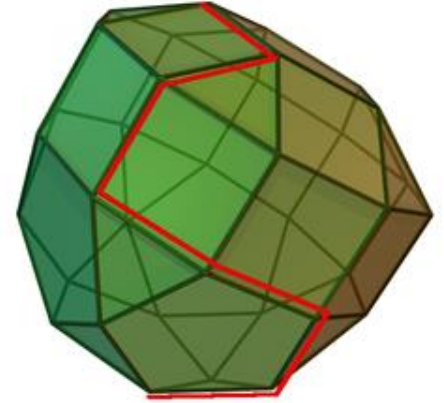
- Minimiza la ruta de búsqueda a través de los vértices de un poliedro convexo.

Suposiciones del método SIMPLEX

- Variables **continuas**
- Solo puede trabajar con variables **positivas**.

SIMPLEX **con restricciones de \leq** siempre comienza la búsqueda (iteración #0):

- Dentro del espacio de **factibilidad**.
- Con las variables slack en la base: **origen de coordenadas**.



Fuente:
https://en.wikipedia.org/wiki/Simplex_algorithm

Ejemplo disparador

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2$$

sujeto a:

$$Y_1: 6X_1 + 16X_2 \geq 108$$

$$Y_2: 12X_1 + 6X_2 \geq 89$$

$$Y_3: 2X_1 + X_2 \leq 160$$

$$Y_4: X_1 + 2X_2 \leq 180$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Modelo Extendido



$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2$$

sujeto a:

$$Y_1: 6X_1 + 16X_2 - X_3 = 108$$

$$Y_2: 12X_1 + 6X_2 - X_4 = 89$$

$$Y_3: 2X_1 + X_2 + X_5 = 160$$

$$Y_4: X_1 + 2X_2 + X_6 = 180$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Ejemplo disparador

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2$$

sujeto a:

$Y_1:$	$6X_1 + 16X_2$	$-X_3$	$= 108$
$Y_2:$	$12X_1 + 6X_2$	$-X_4$	$= 89$
$Y_3:$	$2X_1 + X_2$	$+X_5$	$= 160$
$Y_4:$	$X_1 + 2X_2$	$+X_6$	$= 180$

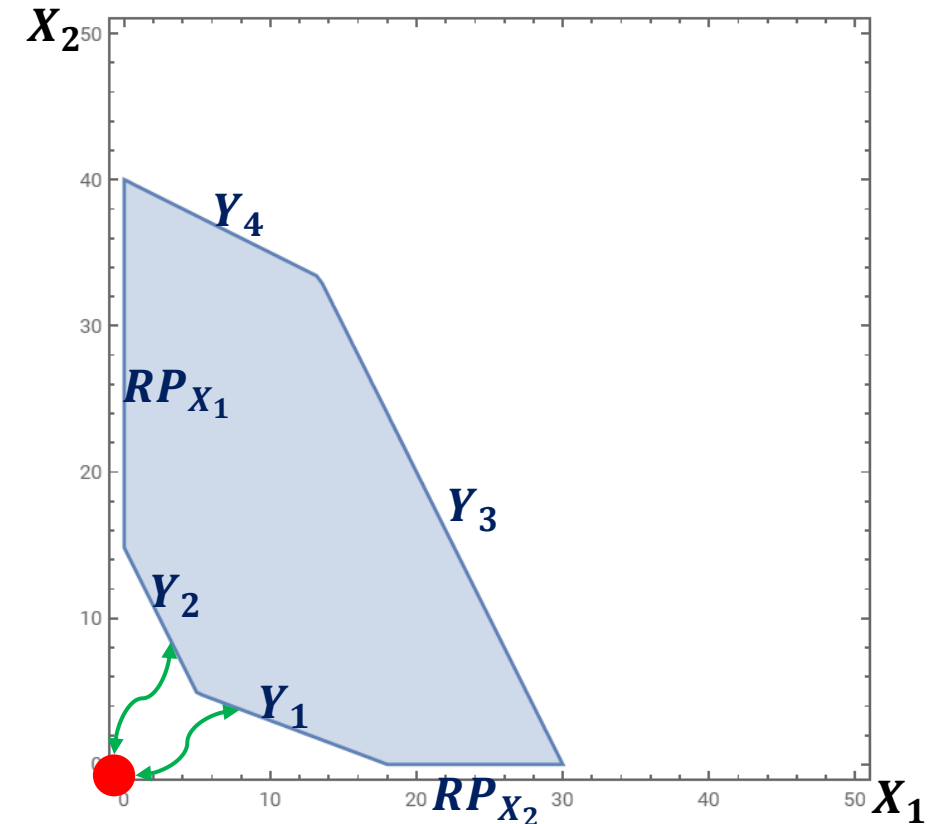
Variables no básicas (#0)

Variables básicas (#0)

$$X_1, X_2 \geq 0$$

- Inicio de búsqueda en origen de coordenadas fuera del espacio de factibilidad.

↪ Variable slack negativa, fuera del espacio de factibilidad.



RP_i : restricciones de positividad

Variables Ficticias en restricciones

$Y_1:$	$6X_1 + 16X_2$	$-X_3$		$+u_1$	$= 108$
$Y_2:$	$12X_1 + 6X_2$		$-X_4$	$+u_2$	$= 89$
$Y_3:$	$2X_1 + X_2$			$+X_5$	$= 160$
$Y_4:$	$X_1 + 2X_2$			$+X_6$	$= 180$

Variables no básicas (#0) Variables básicas (#0)

$$X_1, X_2 \geq 0$$

- Variables Ficticias (u_j) para salvar la negatividad de la variable.
- Inicio de búsqueda punto factible.

Variables Ficticias en función objetivo

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 \quad \overleftarrow{\text{Variables slack}} \quad \overrightarrow{-Mu_1 - Mu_2}$$

En la función objetivo representan un **término de penalización**.

- **Variables Ficticias** (u_j) agregadas en función objetivo.
- No son una variable original del problema, son un *artilugio algorítmico*:
 - Si el problema las selecciona es penalizado **M** veces.
 - **M** es un número muy grande.
 - El signo tiene la dirección contraria de optimización: **(-M)** si max; **(+M)** si min.

Problema de optimización LP

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2 - Mu_1 - Mu_2$$

sujeto a:

$$Y_1: 6X_1 + 16X_2 - X_3 + u_1 = 108$$

$$Y_2: 12X_1 + 6X_2 - X_4 + u_2 = 89$$

$$Y_3: 2X_1 + X_2 + X_5 = 160$$

$$Y_4: X_1 + 2X_2 + X_6 = 180$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Modelo Matricial

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2 - Mu_1 - Mu_2$$

sujeto a:

$$Y_1: \quad 6X_1 + 16X_2 \quad -X_3 \quad \quad \quad +u_1 \quad = 108$$

$$Y_2: \quad 12X_1 + \quad 6X_2 \quad \quad -X_4 \quad \quad \quad +u_2 \quad = 89$$

$$Y_3: \quad \quad 2X_1 + \quad X_2 \quad \quad \quad +X_5 \quad \quad \quad = 160$$

$$Y_4: \quad \quad X_1 + \quad 2X_2 \quad \quad \quad +X_6 \quad \quad \quad = 180$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



$$\text{Max } Z = C^T X$$

sujeto a:

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

Valores de
matrices:

$$b = \begin{bmatrix} 108 \\ 89 \\ 160 \\ 180 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M \\ -M \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Tablas SIMPLEX

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2 - Mu_1 - Mu_2$$

sujeto a:

$$Y_1: 6X_1 + 16X_2 - X_3 + u_1 = 108$$

$$Y_2: 12X_1 + 6X_2 - X_4 + u_2 = 89$$

$$Y_3: 2X_1 + X_2 + X_5 = 160$$

$$Y_4: X_1 + 2X_2 + X_6 = 180$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = C^T X$$

sujeto a:

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M \\ -M \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 108 \\ 89 \\ 160 \\ 180 \end{bmatrix}$$

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k $/A_{ij}$
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
-M	u_1	108	6	16	-1	0	0	0	1	0	
-M	u_2	89	12	6	0	-1	0	0	0	1	
0	X_5	160	2	1	0	0	1	0	0	0	
0	X_6	180	1	2	0	0	0	1	0	0	
Z	$Z_j - C_j$										

Iteración #0

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k $/A_{ij}$
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
-M	u_1	108	6	16	-1	0	0	0	1	0	
-M	u_2	89	12	6	0	-1	0	0	0	1	
0	X_5	160	2	1	0	0	1	0	0	0	
0	X_6	180	1	2	0	0	0	1	0	0	
-197M	$Z_j - C_j$		-18M-4	-22M-3	M	M	0	0	0	0	

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡ Z puede mejorar!

Seleccionamos X_2 para entrar a la base

Iteración #0

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
-M	u_1	108	6	16	-1	0	0	0	1	0	6.75
-M	u_2	89	12	6	0	-1	0	0	0	1	14.83
0	X_5	160	2	1	0	0	1	0	0	0	160.00
0	X_6	180	1	2	0	0	0	1	0	0	90.00
Z	$Z_j - C_j$		-18M-4	-22M-3	M	M	0	0	0	0	

Resolvemos B_k / A_{ij}

Mínimo positivo B_k / A_{ij} en u_1

Sale u_1 , entra X_2

Actualización #0 a #1

Tabla #0

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
-M	u_1	108	6	16	-1	0	0	0	1	0	6.75
-M	u_2	89	12	6	0	-1	0	0	0	1	14.83
0	X_5	160	2	1	0	0	1	0	0	0	160.00
0	X_6	180	1	2	0	0	0	1	0	0	90.00
Z	$Z_j - C_j$		-18M-4	-22M-3	M	M	0	0	0	0	

Tabla #1

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
3	X_2	6.75	0.375	1	-0.062	0	0	0	0.062	0	
-M	u_2	48.50	9.750	0	0.375	-1	0	0	-0.375	1	
0	X_5	153.25	1.625	0	0.062	0	1	0	-0.062	0	
0	X_6	166.5	0.250	0	0.125	0	0	1	-0.125	0	
Z	$Z_j - C_j$		-9.75M -2.875	0	-0.37M -0.187	M	0	0	1.37M +0.187	0	

Iteración #1

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k $/A_{ij}$
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
3	X_2	6.75	0.375	1	-0.062	0	0	0	0.062	0	
-M	u_2	48.50	9.750	0	0.375	-1	0	0	-0.375	1	
0	X_5	153.25	1.625	0	0.062	0	1	0	-0.062	0	
0	X_6	166.5	0.250	0	0.125	0	0	1	-0.125	0	
-48.5M + 20.25	$Z_j - C_j$		-9.75M -2.875	0	-0.37M -0.187	M	0	0	1.37M +0.187	0	

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡ Z puede mejorar!

Seleccionamos X_1 para entrar a la base

Iteración #1

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
3	X_2	6.75	0.375	1	-0.062	0	0	0	0.062	0	18.00
-M	u_2	48.50	9.750	0	0.375	-1	0	0	-0.375	1	4.97
0	X_5	153.25	1.625	0	0.062	0	1	0	-0.062	0	92.88
0	X_6	166.5	0.250	0	0.125	0	0	1	-0.125	0	666.00
-48.5M + 20.25	$Z_j - C_j$		-9.75M -2.875	0	-0.37M -0.187	M	0	0	1.37M +0.187	0	

Resolvemos B_k / A_{ij}

Mínimo positivo B_k / A_{ij} en u_2

Sale u_2 , entra X_1

Actualización #1 a #2

Tabla #1

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
3	X_2	6.75	0.375	1	-0.062	0	0	0	0.062	0	18.00
-M	u_2	48.50	9.750	0	0.375	-1	0	0	-0.375	1	4.97
0	X_5	153.25	1.625	0	0.062	0	1	0	-0.062	0	92.88
0	X_6	166.5	0.250	0	0.125	0	0	1	-0.125	0	666.00
-48.5M + 20.25	$Z_j - C_j$		-9.75M -2.875	0	-0.37M -0.187	M	0	0	1.37M +0.187	0	

Tabla #2

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
3	X_2	4.88	0	1	-0.077	0.038	0	0	0.077	-0.038	
4	X_1	4.97	1	0	0.038	-0.102	0	0	-0.038	0.102	
0	X_5	145.17	0	0	0	0.167	1	0	0	-0.166	
0	X_6	165.26	0	0	0.115	0.025	0	1	-0.115	-0.025	
Z	$Z_j - C_j$		0	0	-0.076	-0.294	0	0	M +0.076	M +0.294	

Iteración #2

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k $/A_{ij}$
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
3	X_2	4.88	0	1	-0.077	0.038	0	0	0.077	-0.038	
4	X_1	4.97	1	0	0.038	-0.102	0	0	-0.038	0.102	
0	X_5	145.17	0	0	0	0.167	1	0	0	-0.166	
0	X_6	165.26	0	0	0.115	0.025	0	1	-0.115	-0.025	
34.52	$Z_j - C_j$		0	0	-0.076	-0.294	0	0	M +0.076	M +0.294	

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡ Z puede mejorar!

Seleccionamos X_4 para entrar a la base

Iteración #2

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	$/A_{ij}$
3	X_2	4.88	0	1	-0.077	0.038	0	0	0.077	-0.038	128.42
4	X_1	4.97	1	0	0.038	-0.102	0	0	-0.038	0.102	-497.00
0	X_5	145.17	0	0	0	0.167	1	0	0	-0.166	869.28
0	X_6	165.26	0	0	0.115	0.025	0	1	-0.115	-0.025	6610.4
34.52	$Z_j - C_j$		0	0	-0.076	-0.294	0	0	M +0.076	M +0.294	

Resolvemos B_k / A_{ij}

Mínimo positivo B_k / A_{ij} en X_2

Sale X_2 , entra X_4

Actualización #2 a #3

Tabla #2

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
3	X_2	4.88	0	1	-0.077	0.038	0	0	0.077	-0.038	128.42
4	X_1	4.97	1	0	0.038	-0.102	0	0	-0.038	0.102	-497.00
0	X_5	145.17	0	0	0	0.167	1	0	0	-0.166	869.28
0	X_6	165.26	0	0	0.115	0.025	0	1	-0.115	-0.025	6610.4
34.52	$Z_j - C_j$		0	0	-0.076	-0.294	0	0	M +0.076	M +0.294	

Tabla #3

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
0	X_4	128.42	0	26.31	-2.026	1	0	0			
4	X_1	18.07	1	2.667	-0.167	0	0	0			
0	X_5	123.72	0	-4.334	0.334	0	1	0			
0	X_6	162.05	0	-0.667	0.167	0	0	1			
Z	$Z_j - C_j$		0	7.667	-0.667	0	0	0			

Iteración #3

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k $/A_{ij}$
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
0	X_4	128.42	0	26.31	-2.026	1	0	0			
4	X_1	18.07	1	2.667	-0.167	0	0	0			
0	X_5	123.72	0	-4.334	0.334	0	1	0			
0	X_6	162.05	0	-0.667	0.167	0	0	1			
72.28	$Z_j - C_j$		0	7.667	-0.667	0	0	0			

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡ Z puede mejorar!

Seleccionamos X_3 para entrar a la base

Iteración #3

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	$/A_{ij}$
0	X_4	128.42	0	26.31	-2.026	1	0	0			-64.21
4	X_1	18.07	1	2.667	-0.167	0	0	0			-108.20
0	X_5	123.72	0	-4.334	0.334	0	1	0			370.42
0	X_6	162.05	0	-0.667	0.167	0	0	1			970.36
72.28	$Z_j - C_j$		0	7.667	-0.667	0	0	0			

Resolvemos B_k / A_{ij}

Mínimo positivo B_k / A_{ij} en X_5

Sale X_5 , entra X_3

Actualización #3 a #4

Tabla #3

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
0	X_4	128.42	0	26.31	-2.026	1	0	0			-64.21
4	X_1	18.07	1	2.667	-0.167	0	0	0			-108.20
0	X_5	123.72	0	-4.334	0.334	0	1	0			370.42
0	X_6	162.05	0	-0.667	0.167	0	0	1			970.36
72.28	$Z_j - C_j$		0	7.667	-0.667	0	0	0			

Tabla #4

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
0	X_4	878.89	0	0.02	0	1	6.06	0			
4	X_1	79.93	1	0.50	0	0	0.50	0			
0	X_3	370.42	0	-13.00	1	0	3.00	0			
0	X_6	100.19	0	1.50	0	0	-0.50	1			
Z	$Z_j - C_j$		0	-1.00	0	0	2.00	0			

Iteración #4

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k $/A_{ij}$
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
0	X_4	878.89	0	0.02	0	1	6.06	0			
4	X_1	79.93	1	0.50	0	0	0.50	0			
0	X_3	370.42	0	-13.00	1	0	3.00	0			
0	X_6	100.19	0	1.50	0	0	-0.50	1			
319.72	$Z_j - C_j$		0	-1.00	0	0	2.00	0			

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡ Z puede mejorar!

Seleccionamos X_2 para entrar a la base

Iteración #4

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	$/A_{ij}$
0	X_4	878.89	0	0.02	0	1	6.06	0			43944.50
4	X_1	79.93	1	0.50	0	0	0.50	0			159.86
0	X_3	370.42	0	-13.00	1	0	3.00	0			-28.49
0	X_6	100.19	0	1.50	0	0	-0.50	1			66.79
319.72	$Z_j - C_j$		0	-1.00	0	0	2.00	0			

Resolvemos B_k / A_{ij}

Mínimo positivo B_k / A_{ij} en X_6

Sale X_6 , entra X_2

Actualización #4 a #5

Tabla #4

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
0	X_4	878.89	0	0.02	0	1	6.06	0			43944.50
4	X_1	79.93	1	0.50	0	0	0.50	0			159.86
0	X_3	370.42	0	-13.00	1	0	3.00	0			-28.49
0	X_6	100.19	0	1.50	0	0	-0.50	1			66.79
319.72	$Z_j - C_j$		0	-1.00	0	0	2.00	0			

Tabla #5

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
0	X_4	877.50	0	0	0	1	6.00	0			
4	X_1	46.67	1	0	0	0	0.67	-0.34			
0	X_3	1238.67	0	0	1	0	-1.34	8.67			
3	X_2	66.67	0	1	0	0	-0.34	0.67			
Z	$Z_j - C_j$		0	0	0	0	1.67	0.67			

Iteración #5

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k $/A_{ij}$
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
0	X_4	877.50	0	0	0	1	6.00	0			
4	X_1	46.67	1	0	0	0	0.67	-0.34			
0	X_3	1238.67	0	0	1	0	-1.34	8.67			
3	X_2	66.67	0	1	0	0	-0.34	0.67			
386.67	$Z_j - C_j$		0	0	0	0	1.67	0.67			

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

No existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡ Z es óptimo!

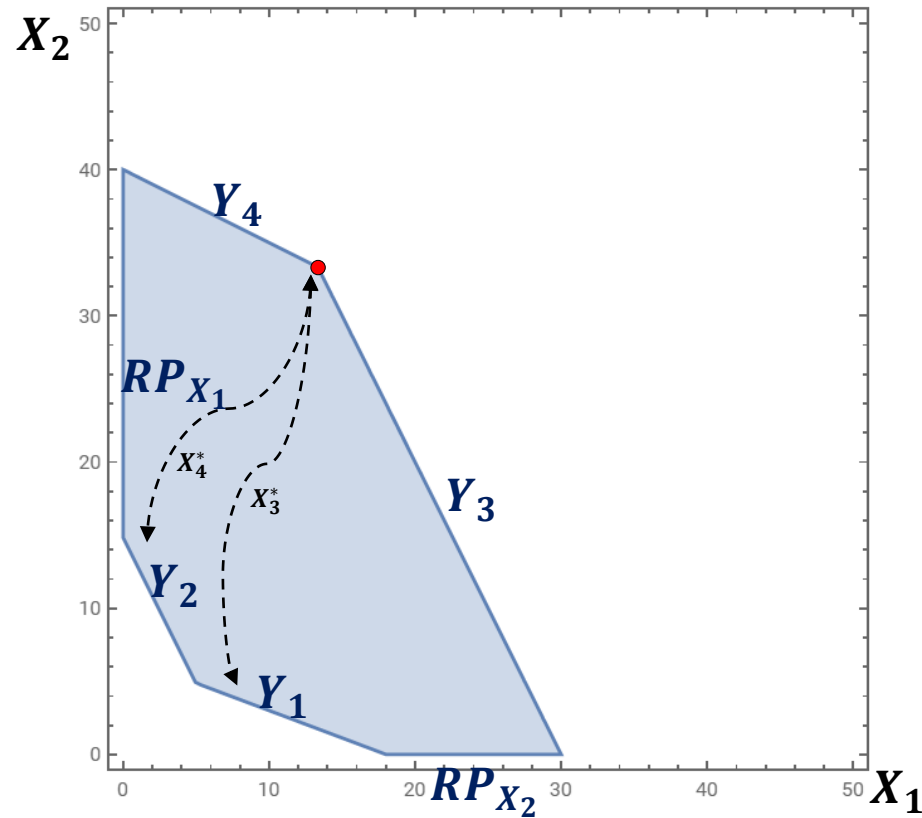
Representación gráfica

Solución:

$$Z^* = 386.67$$

$$X_1^* = 46.67$$

$$X_2^* = 66.67$$



RP_i : restricciones de positividad

Check con Python PuLP

```
import pulp

lp01 = pulp.LpProblem("SIMPLEX variables ficticias", pulp.LpMaximize)

# Variables:
x = pulp.LpVariable('x', lowBound=0, cat='Continuous')
y = pulp.LpVariable('y', lowBound=0, cat='Continuous')

# Función objetivo:
lp01 += 4*x + 3*y, "Z"

# Restricciones:
lp01 += 6*x + 16*y ≥ 108
lp01 += 12*x + 6*y ≥ 89
lp01 += 2*x + 1*y ≤ 16
lp01 += 1*x + 2*y ≤ 180
```

```
# Resolver:
lp01.solve()

# Imprimir resultados:
pulp.LpStatus[lp01.status]
print(pulp.LpStatus[lp01.status])

for variable in lp01.variables():
    print("%s = %.2f" % (variable.name, variable.varValue))
print(pulp.value(lp01.objective))
```

```
>> Optimal
>> x = 46.67
>> y = 66.67
>> 386.66666899999996
```