Modelo de Flujo de Mínimo Costo: Transporte

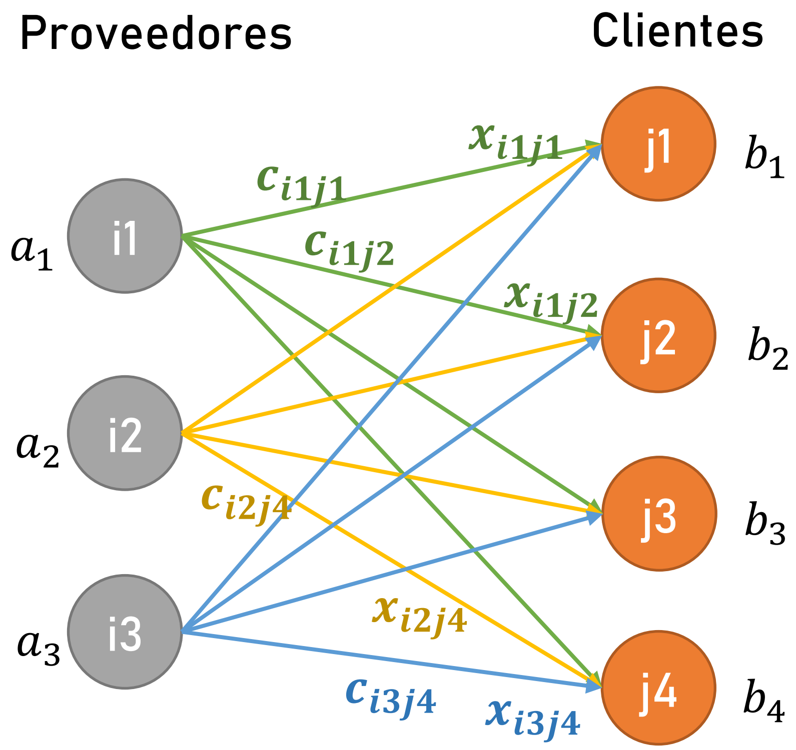
Rodrigo Maranzana

Transporte como FMC

El problema de transporte tiene como objetivo enviar producto desde nodos oferentes hacia nodos demandantes.

- Existe un costo generalmente asociado a la distancia entre oferentes y demandantes.
- La oferta y la demanda son conocidas.
- El problema puede ser balanceado o desbalanceado.
  - Balanceado: oferta iguala a la demanda.

Grafo asociado y componentes



Conjuntos (sets)

i: nodos oferentes

j: nodos demandantes

Parámetros

b_i: demanda

a_i: oferta

c_{ij}: costo del arco de i a j

Variables de decisión

x_{ij}: cantidad de producto a enviar de i a j

Representación tabular

	destino 1	destino 2	destino 3		destino m
origen 1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	…	c_{1m}
origen 2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	…	c_{2m}
origen 3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	…	c_{3m}
…	…	…	…	…	…
origen n	c_{n1}	c_{n2}	c_{n3}	…	c_{nm}

Tabla de costos

	destino 1	destino 2	destino 3		destino m	oferta
origen 1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	…	x_{1m}	a_1
origen 2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	…	x_{2m}	a_2
origen 3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	…	x_{3m}	a_3
…	…	…	…	…	…	…
origen n	x_{n1}	x_{n2}	x_{n3}	…	x_{nm}	a_n
						$\sum a_i$ (oferta total)
demanda	b_1	b_2	b_3		b_m	$\sum b_i$ (demanda total)

Tabla de cantidades a enviar

Ejemplo

3 plantas productoras y 4 puntos de almacenamiento

Plantas productoras:

- Parque industrial "La Cantábrica"
- Mini Parque industrial Vergara
- Parque industrial Pilar

Almacenamiento:

- Villa Martelli
- Parque Patricios
- Flores
- Ciudadela

Ejemplo

Tabla de costos

origen / destino	Villa Martelli	Parque Patricios	Flores	Ciudadela
Parque industrial “La Cantábrica”	434	523	640	850
Mini Parque industrial Vergara	323	480	670	770
Parque industrial Pilar	997	680	390	590

Tabla de cantidades a enviar

	Villa Martelli	Parque Patricios	Flores	Ciudadela	**oferta**
Parque industrial “La Cantábrica”	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{1m}	75
Mini Parque industrial Vergara	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{2m}	100
Parque industrial Pilar	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{3m}	125
					300
demanda	80	70	70	80	300

Modelo de optimización: transporte balanceado

$$Min \sum_{i} \sum_{j} c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

$$\sum_{j} x_{ij} = a_i \qquad \forall i$$

$$\sum_{i} x_{ij} = b_j \qquad \forall j$$

$$x \geq 0;\ x \epsilon \mathbb{R}$$

Conjuntos (sets)

i: nodos oferentes

j: nodos demandantes

Parámetros

b_i: demanda

a_i: oferta

c_{ij}: costo del arco de i a j

Variables de decisión

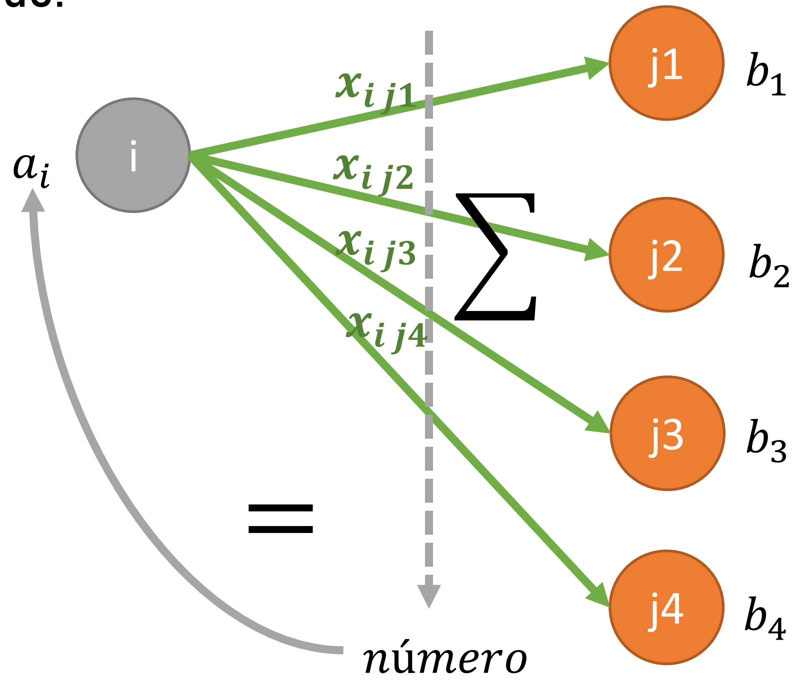
x_{ij}: cantidad de producto a enviar de i a j

Modelo de optimización

Oferta de un proveedor "i" se coloca completamente en el mercado:

$$\sum_{j} x_{ij} = a_i \qquad \forall i$$

"Suma de salidas del nodo i"

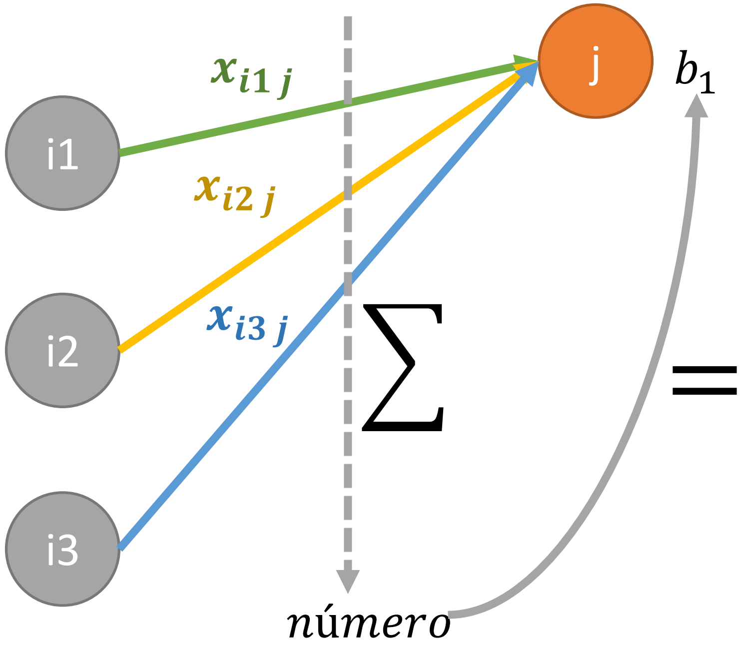


Modelo de optimización

Demanda de un "j" cliente se satisface completamente en el mercado:

$$\sum_i x_{ij} = b_j \qquad \forall j$$

"Suma de llegadas al nodo j"



Modelo general de Flujo de Mínimo Costo

$$Min \sum_{i} \sum_{j} X_{ij} d_{ij}$$

st:

$$b_i = \sum_{j,\ \ ij \subset A} X_{ij} - \sum_{j,\ \ ji \subset A} X_{ji} \quad ; \forall i$$

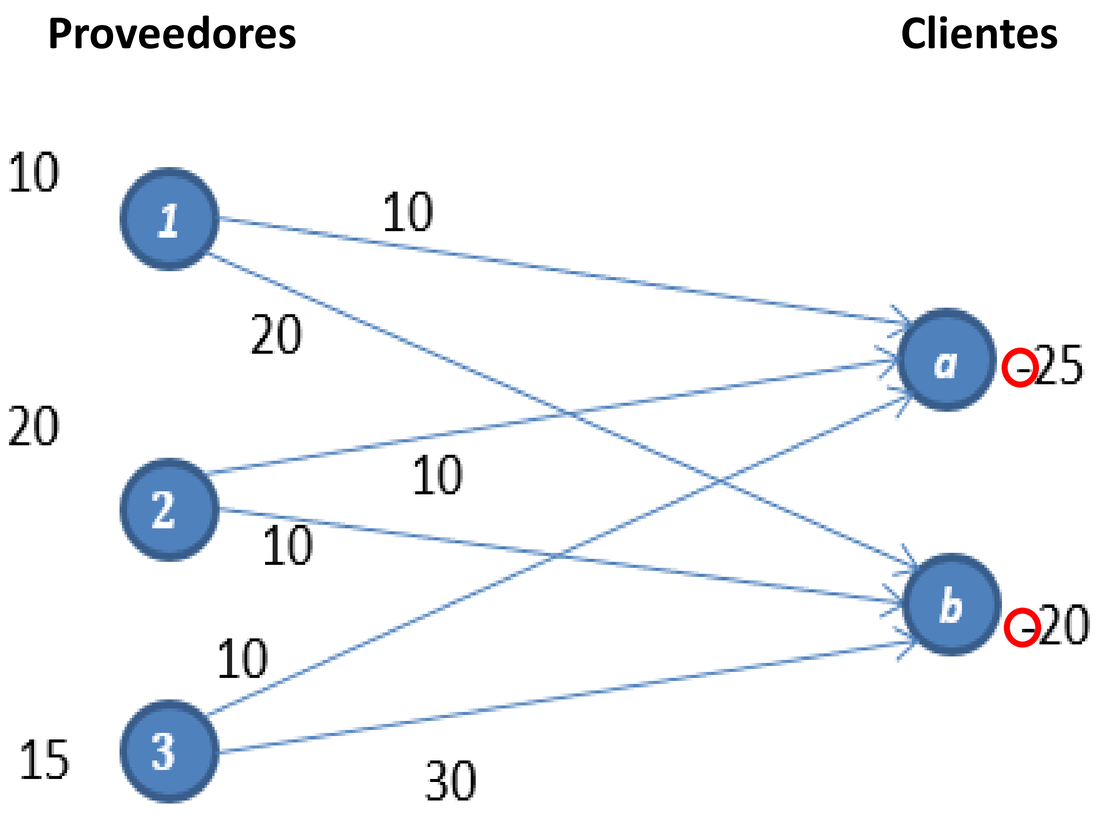
$$Min\ C^T X$$

st:

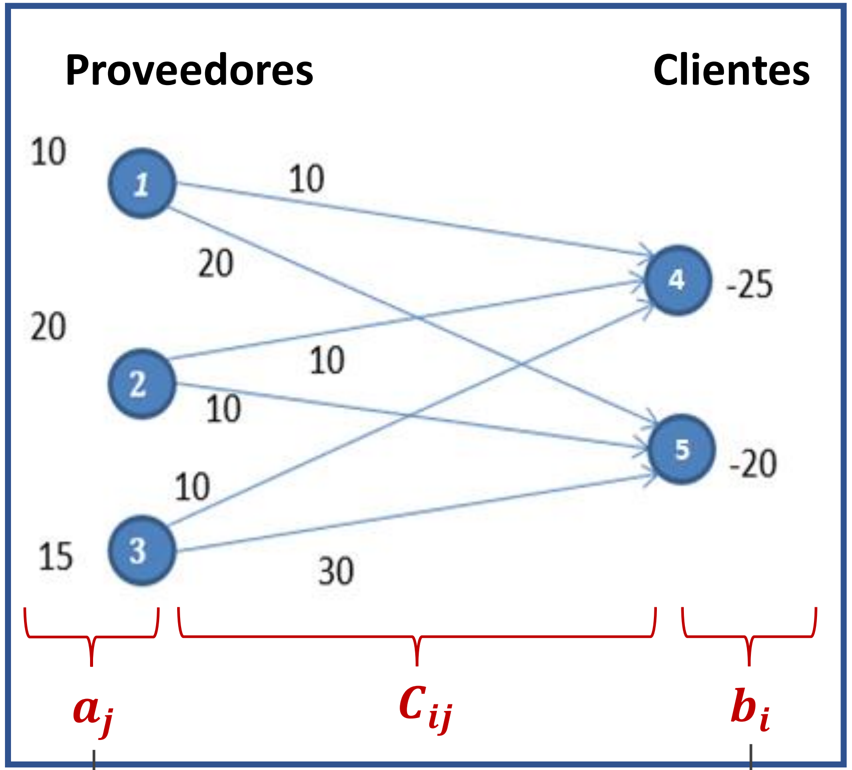
$$AX = b$$

$$\text{cota inferior} \leq X \leq cota\ superior$$

Ejemplo



Flujo de Mínimo Costo algebraico



Consideramos oferta y demanda como b_i para un set compuesto solo por "i"

$$Min \sum_i \sum_j X_{ij} d_{ij}$$

$$\boldsymbol{Min \quad 10x_{14} + 20x_{15} + 10x_{24} + 10x_{25} + 10x_{34} + 30x_{35}}$$

$$b_i = \sum_{j,\ ij \subset A} X_{ij} - \sum_{j,\ ji \subset A} X_{ji} \quad ; \forall i$$

$$\boldsymbol{x_{14} + x_{15} = 10} \qquad \boldsymbol{-(x_{14} + x_{24} + x_{34}) = -25}$$

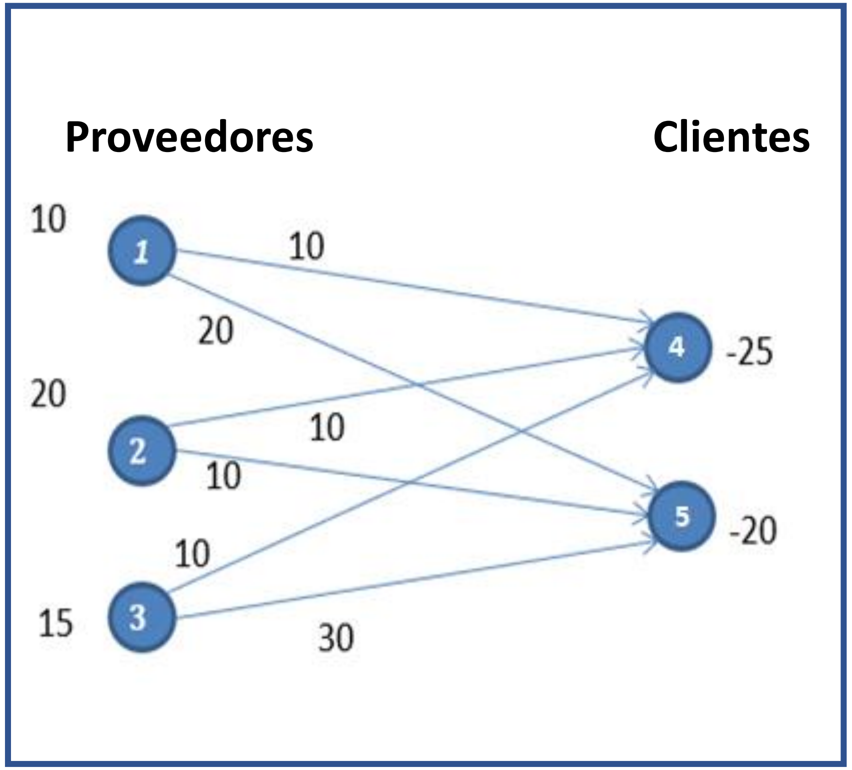
$$\boldsymbol{x_{24} + x_{25} = 20} \qquad \boldsymbol{-(x_{15} + x_{25} + x_{35}) = -20}$$

$$\boldsymbol{x_{34} + x_{35} = 15}$$

$$cota\ inferior \leq X \leq cota\ superior$$

$$\boldsymbol{x_{14}, x_{15}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{35} \geq 0}$$

Flujo de Mínimo Costo matricial



$$Min\ C^T X$$

st:

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 & 10 & 30 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \\ -25 \\ -20 \end{bmatrix}$$

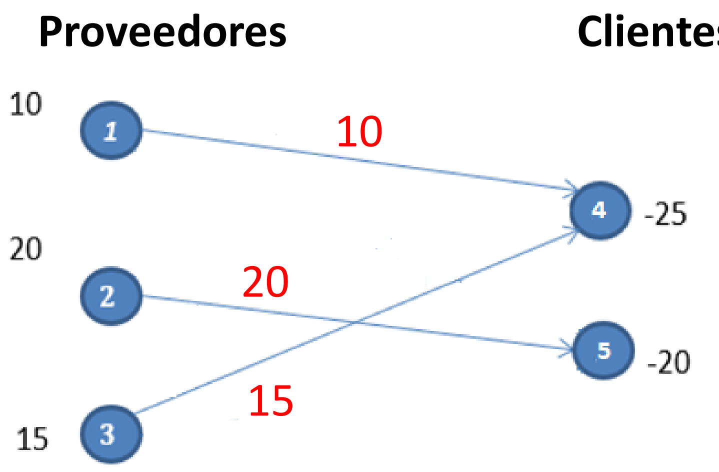
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución con scipy.optimize.linprog

```python
import numpy as np
from scipy.optimize import linprog

# Matriz de adyacencia
Aeq = np.array([[ 1, 1, 0, 0, 0, 0],
                [ 0, 0, 1, 1, 0, 0],
                [ 0, 0, 0, 0, 1, 1],
                [-1, 0,-1, 0,-1, 0],
                [ 0,-1, 0,-1, 0,-1]])

# Vector de costos por arco:
C = np.array([10, 20, 15, 10, 10, 30])

# Vector de oferta y demanda:
beq = np.array([10, 20, 15, -25, -20])

# Cotas:
bounds = tuple([(0, None) for arcs in range(0, C.shape[0])])
```

```python
# OPTIMIZE:
res = linprog(C, A_eq=Aeq, b_eq=beq, bounds=bounds)
```

```
>> Cantidad para cada arco: [10.  0.  0. 20. 15.  0.]
>> Costo mínimo total: 450.0
```



Transporte desbalanceado (1)

Caso: La oferta supera a la demanda, $\sum_i a_i \geq \sum_j b_j$

$$Min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

Se permite tener oferta sin colocar

$$\sum_j x_{ij} \leq a_i \qquad \forall i$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j \qquad \forall j$$

$$x \geq 0;\ x \epsilon \mathbb{R}$$

Conjuntos (sets)

i: nodos oferentes

j: nodos demandantes

Parámetros

b_i: demanda

a_i: oferta

c_{ij}: costo del arco de i a j

Variables de decisión

x_{ij}: cantidad de producto a enviar de i a j

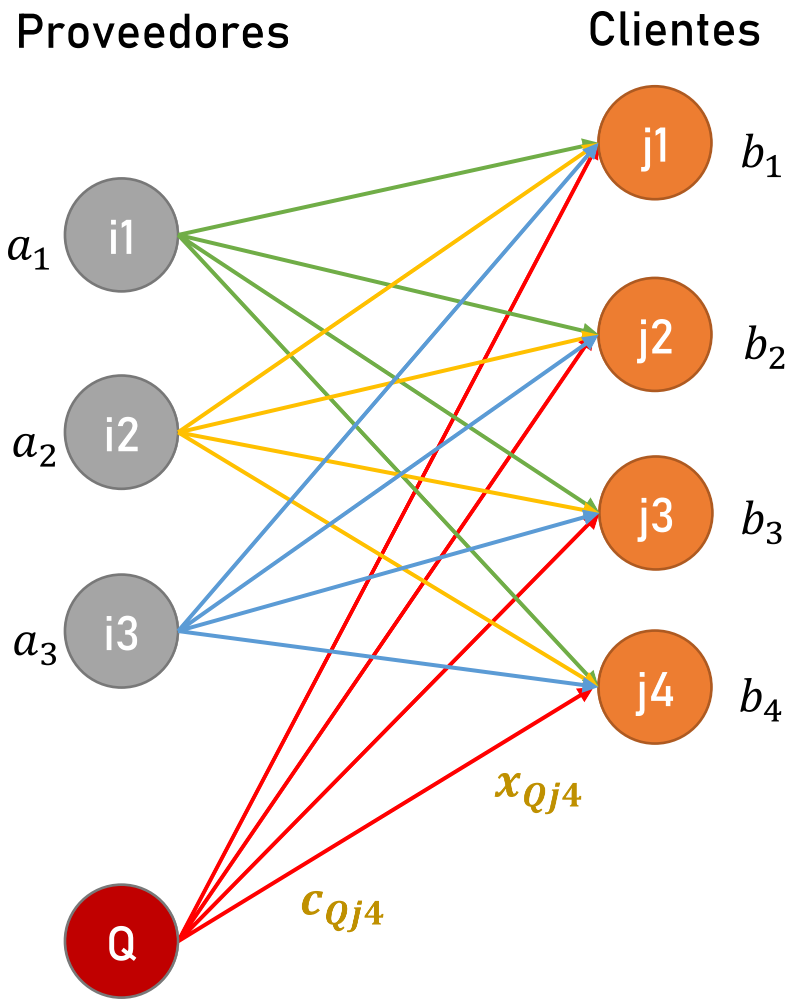
Transporte desbalanceado (2)

Caso: La demanda supera a la oferta, $\sum_i a_i \leq \sum_j b_j$

El modelo es el mismo, agregamos un proveedor adicional, que representa el quiebre de stock.

El costo asociado al quiebre de stock suele ser elevado.

Además de su uso en desbalanceo, se puede agregar como toma de decisiones entre enviar de "i" a "j" o quebrar stock.



¿Cómo afecta el desbalanceo a FMC?

Caso (1) oferta mayor a demanda, se dividen las restricciones:

- Restricciones de = para nodos de demanda.
- Restricciones de <= para nodos de oferta.

$$Min\ C^T X$$

st:

$$AX \leq b$$

$$A_{eq}X = b_{eq}$$

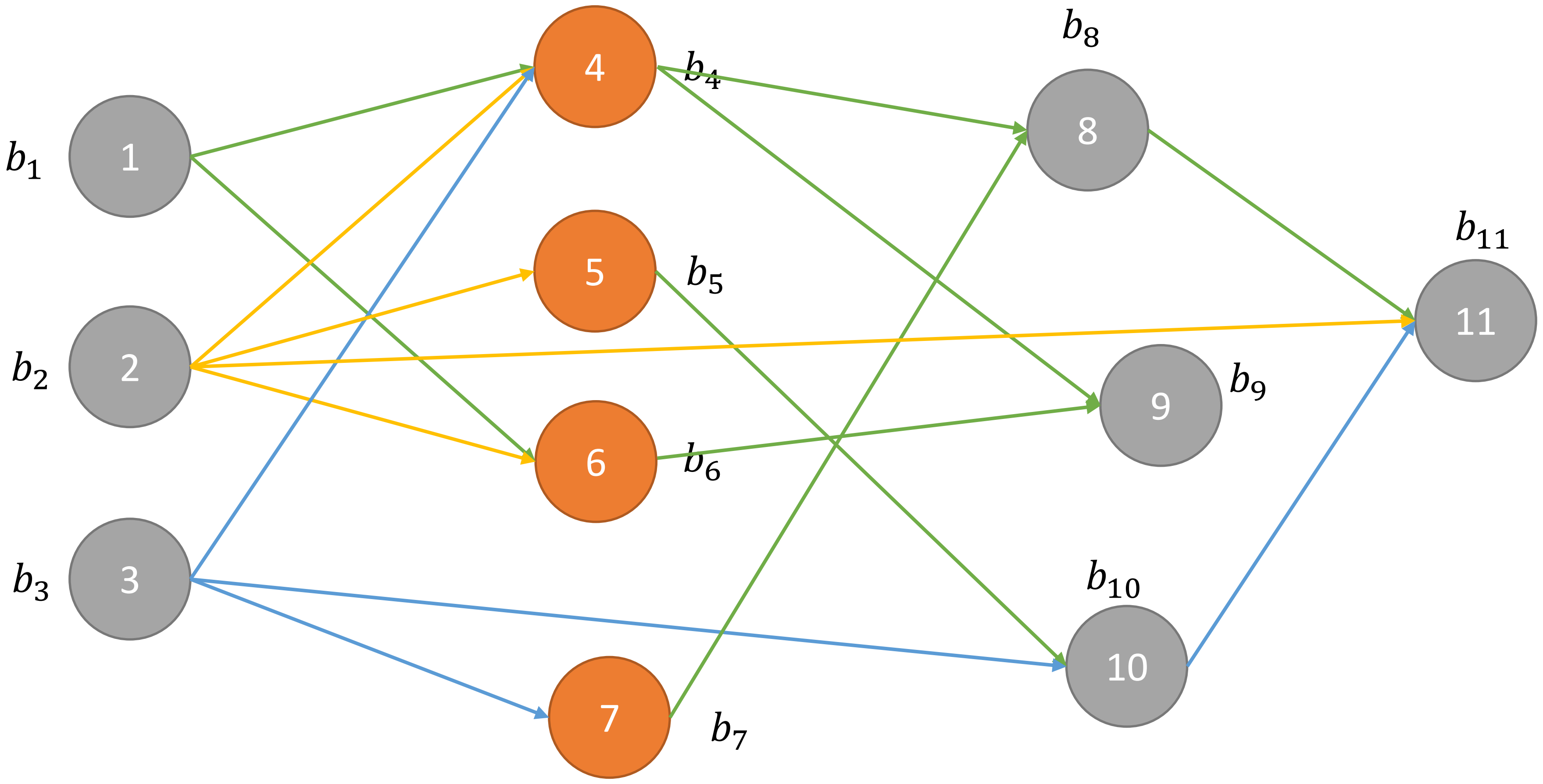
$$X \geq 0$$

Caso (2) demanda mayor a oferta, solo se agrega un nodo de quiebre.

Generalización

Podemos complejizar el grafo como necesitemos:

- Nodos intermedios de transbordo (transshipment)
- Stock intermedio.
- Cadena logística de múltiples niveles.
- Más de un producto.



Caso particular: transshipment

Nodos de transbordo

Proveedores

Clientes

Los nodos de transbordo tienen siempre stock 0,

Todo lo que ingresa, sale del nodo.

$$A_{eq}X = b_{eq} = 0$$