



Programación lineal: análisis de sensibilidad

Rodrigo Maranzana

Análisis de sensibilidad: concepto

Objetivo:

- Entender los efectos de cambios paramétricos en un problema de programación lineal.
- Detectar límites de mejora en parámetros.

Tipos:

- Modificación de parámetros b_i (términos del lado derecho)
- Modificación de coeficientes c_j (coeficientes del funcional)

Modificación de parámetros b_i

Dado el ejemplo:

$$\max z = 21x_1 + 33x_2$$

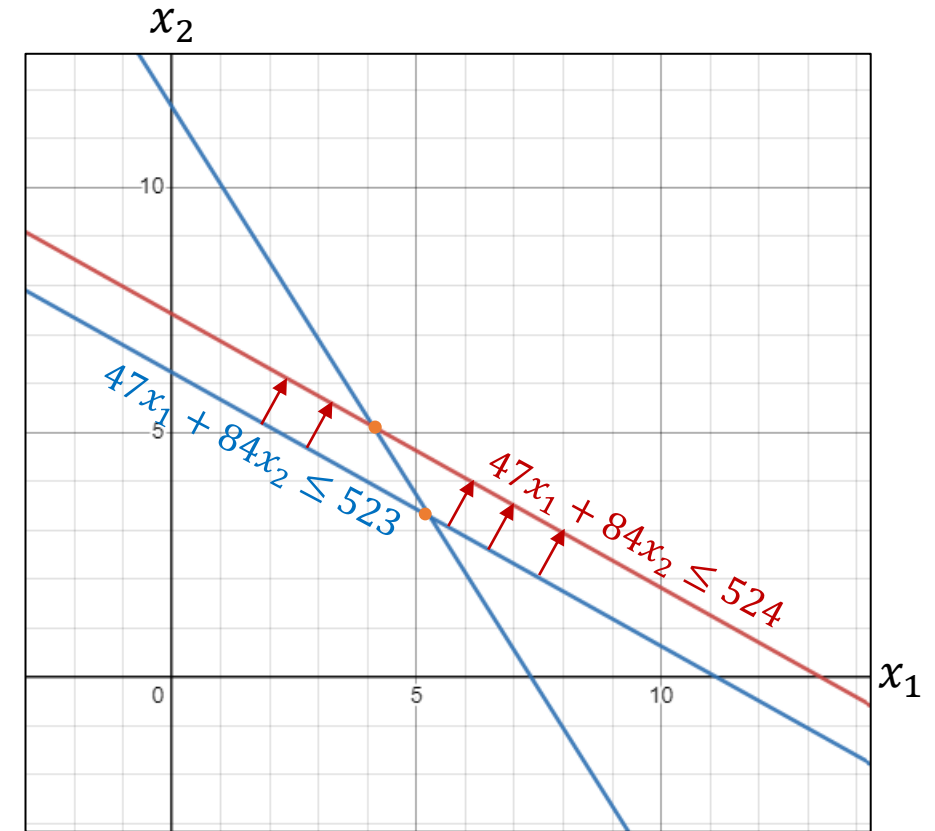
s.t.

$$100x_1 + 63x_2 \leq 734$$

$$47x_1 + 84x_2 \leq 523 \rightarrow 47x_1 + 84x_2 \leq 524$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

¿Cuál sería el efecto de aumentar b_2 en 1 unidad?



**Escala exagerada para visualización.*

Modificación de parámetros b_i

Concepto de precio sombra (shadow price):

Incremento marginal del funcional Z por cada unidad de recurso modificada.

$$\lambda_i = \frac{\Delta Z}{\Delta b_i} = \frac{Z'_{opt} - Z_{opt}}{b'_i - b_i}$$

Siendo:

Z_{opt}, Z'_{opt} : objetivo original y objetivo con modificación paramétrica.

b'_i, b_i : término del lado derecho original y con modificación.

El precio sombra está relacionado al problema dual.

Cada λ_i es una variable del dual, $\lambda_i = y_i$ relacionada con cada restricción “i”.

Modificación de parámetros b_i

En el ejemplo:

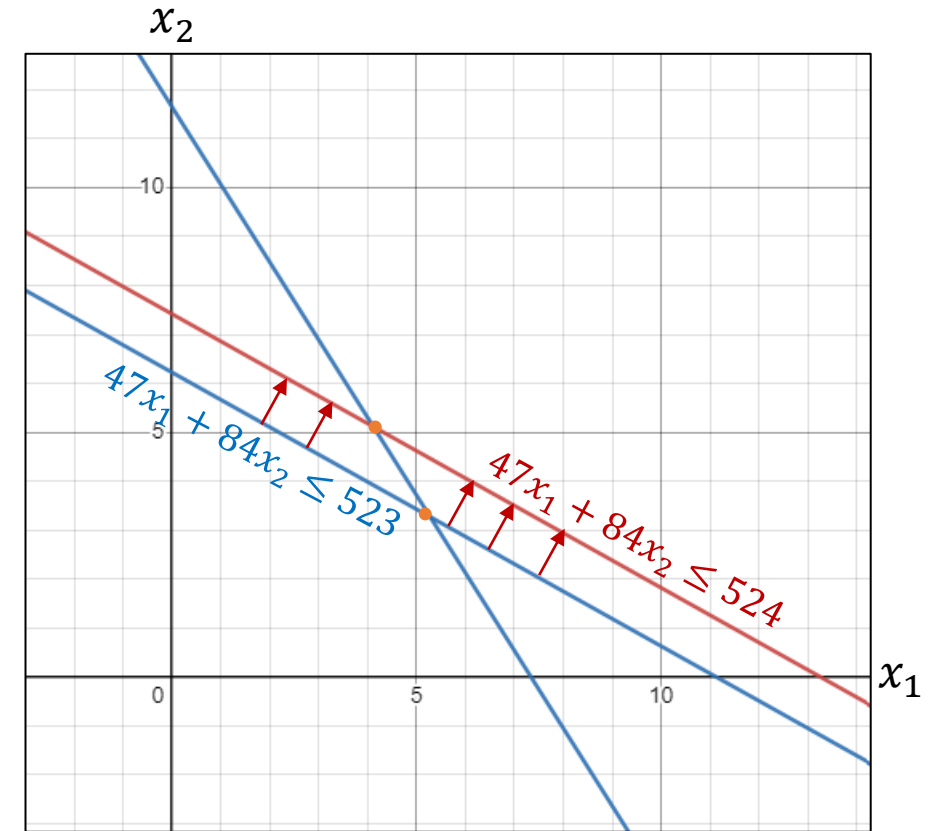
$$\max z = 21x_1 + 33x_2$$

s.t.

$$100x_1 + 63x_2 \leq 734$$

$$47x_1 + 84x_2 \leq 523 \rightarrow 47x_1 + 84x_2 \leq 524$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



**Escala exagerada para visualización.*

$$\lambda_2 = \frac{\Delta Z}{\Delta b_2} = \frac{Z'_{opt} - Z_{opt}}{b'_2 - b_2} = \frac{219.21 - 218.84}{524 - 523} = 0,3636 \frac{\$}{\text{u recurso 2}}$$

Modificación de parámetros b_i

En el ejemplo:

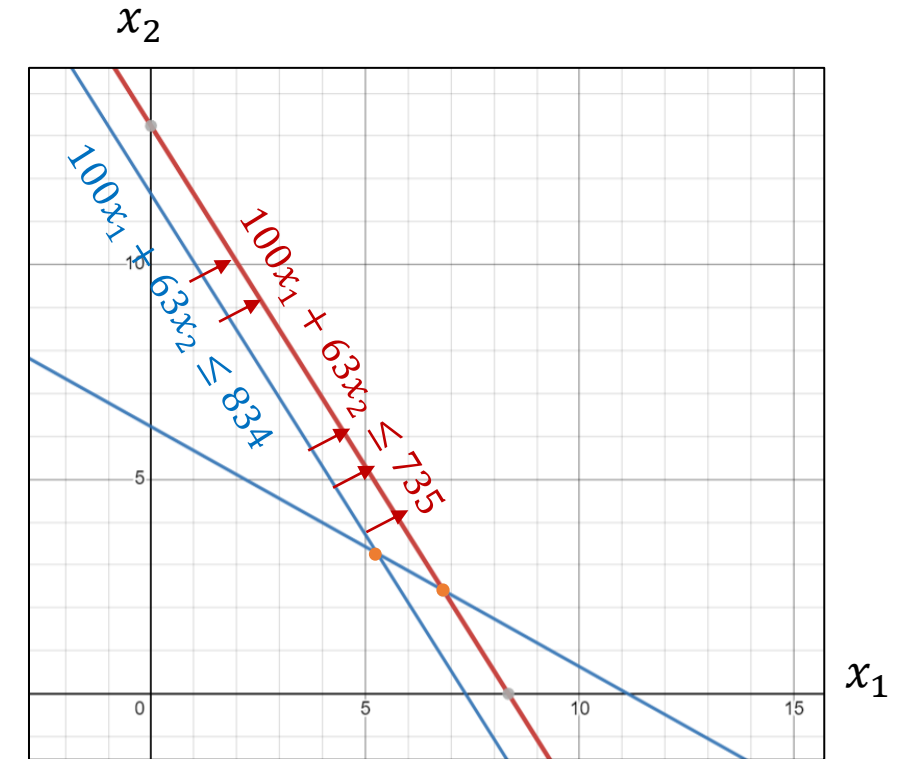
$$\max z = 21x_1 + 33x_2$$

s.t.

$$100x_1 + 63x_2 \leq 734 \longrightarrow 100x_1 + 63x_2 \leq 735$$

$$47x_1 + 84x_2 \leq 523$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



*Escala exagerada para visualización.

$$\lambda_1 = \frac{\Delta Z}{\Delta b_1} = \frac{Z'_{opt} - Z_{opt}}{b'_1 - b_1} = \frac{218.89 - 218.84}{735 - 734} = 0,0392 \frac{\$}{u \text{ recurso } 2}$$

Precios sombra y variables duales

Dados los precios sombra calculados mediante $\frac{\Delta Z}{\Delta b_i}$:

$$\lambda_1 = 0,0392 \frac{\$}{u \text{ recurso } 1}$$

$$\lambda_2 = 0,3636 \frac{\$}{u \text{ recurso } 2}$$

Vamos a comprobar que ambos son las variables duales $\lambda_j = y_j$.

$$\begin{aligned} \max z &= 21x_1 + 33x_2 \\ \text{s.t.} \\ 100x_1 + 63x_2 &\leq 734 \\ 47x_1 + 84x_2 &\leq 523 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

PRIMAL



$$\begin{aligned} \min z &= 734y_1 + 523y_2 \\ \text{s.t.} \\ 100y_1 + 47y_2 &\geq 21 \\ 63y_1 + 84y_2 &\geq 33 \\ y_1, y_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

DUAL

Precios sombra y variables duales

$$\min z = 734y_1 + 523y_2$$

s.t.

$$100y_1 + 47y_2 \geq 21$$

$$63y_1 + 84y_2 \geq 33$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

DUAL

```
>> Optimal  
>> y_1 = 0.03916  
>> y_2 = 0.36349
```

```
import pulp  
  
lp01 = pulp.LpProblem("Precios sombra", pulp.LpMinimize)  
  
# Variables:  
y_1 = pulp.LpVariable('y_1', lowBound=0, cat='Continuous')  
y_2 = pulp.LpVariable('y_2', lowBound=0, cat='Continuous')  
  
# Función objetivo:  
lp01 += 734*y_1 + 523*y_2, "Z"  
  
# Restricciones:  
lp01 += 100*y_1 + 47*y_2 >= 21  
lp01 += 63*y_1 + 84*y_2 >= 33  
  
lp01.solve()
```

Comprobamos que $\lambda_j = y_j$.

Cálculo de precios sombra con PuLP desde primal

$$\max z = 21x_1 + 33x_2$$

s.t.

$$100x_1 + 63x_2 \leq 734$$

$$47x_1 + 84x_2 \leq 523$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

PRIMAL

```
>> Análisis de sensibilidad:  
>> Restricción: _C1, Shadow Price: 0.039161611  
>> Restricción: _C2, Shadow Price: 0.36348593
```

```
lp01 = pulp.LpProblem("Primal", pulp.LpMaximize)  
  
# Variables:  
x_1 = pulp.LpVariable('x_1', lowBound=0, cat='Continuous')  
x_2 = pulp.LpVariable('x_2', lowBound=0, cat='Continuous')  
  
# Función objetivo:  
lp01 += 21*x_1 + 33*x_2, "Z"  
  
# Restricciones:  
lp01 += 100*x_1 + 63*x_2 <= 734  
lp01 += 47*x_1 + 84*x_2 <= 523  
  
lp01.solve()  
  
# Sensitivity Analysis  
print("\nAnálisis de sensibilidad:")  
for name, c in lp01.constraints.items():  
    print(f"Restricción: {name}, Shadow Price: {c.pi}")
```

Modificación de parámetros b_i

Comparación de precios sombra:

$$\lambda_1 = 0,0392 \frac{\$}{u \text{ recurso } 1}$$

$$\lambda_2 = 0,3636 \frac{\$}{u \text{ recurso } 2}$$

¿Cuál deberíamos aumentar?

Modificación de parámetros b_i

Comparación de precios sombra:

$$\lambda_1 = 0,0392 \frac{\$}{u \text{ recurso } 1}$$

$$\lambda_2 = 0,3636 \frac{\$}{u \text{ recurso } 2}$$

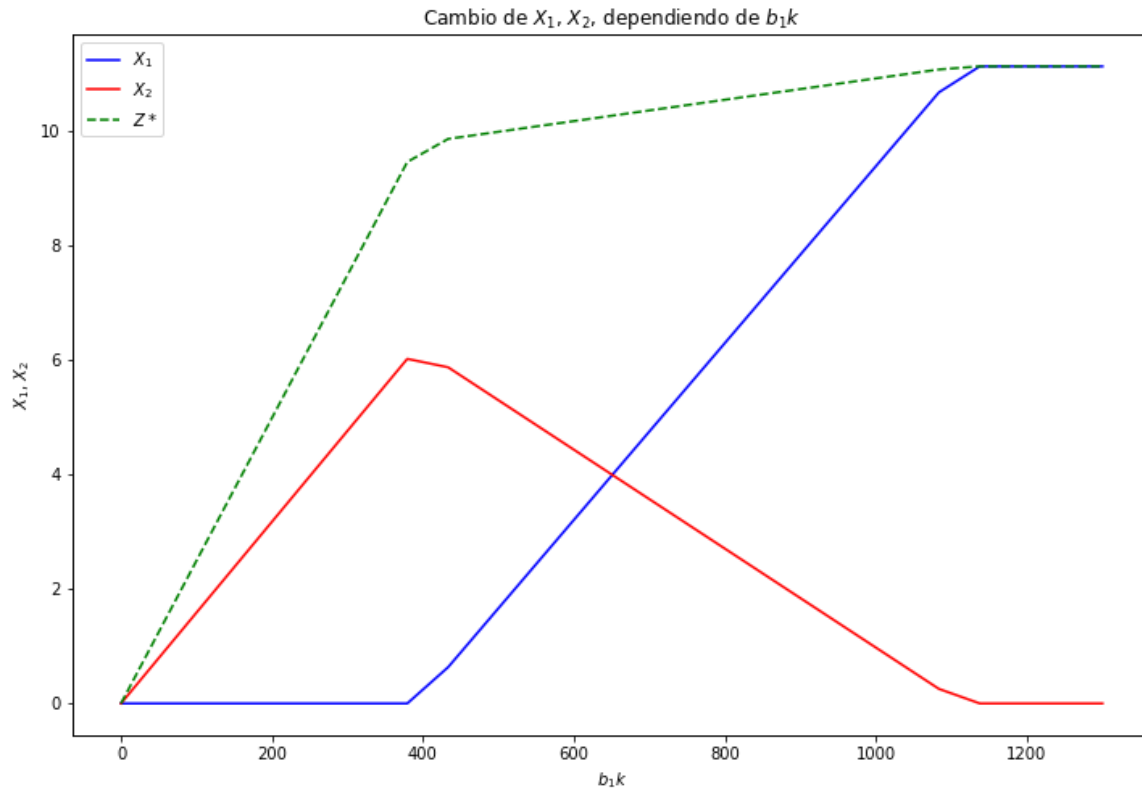
El segundo recurso muestra una sensibilidad mayor en el precio sombra sobre Z^* .

¿Qué pasaría si el costo de aumentar 1 unidad de cualquier recurso es de:

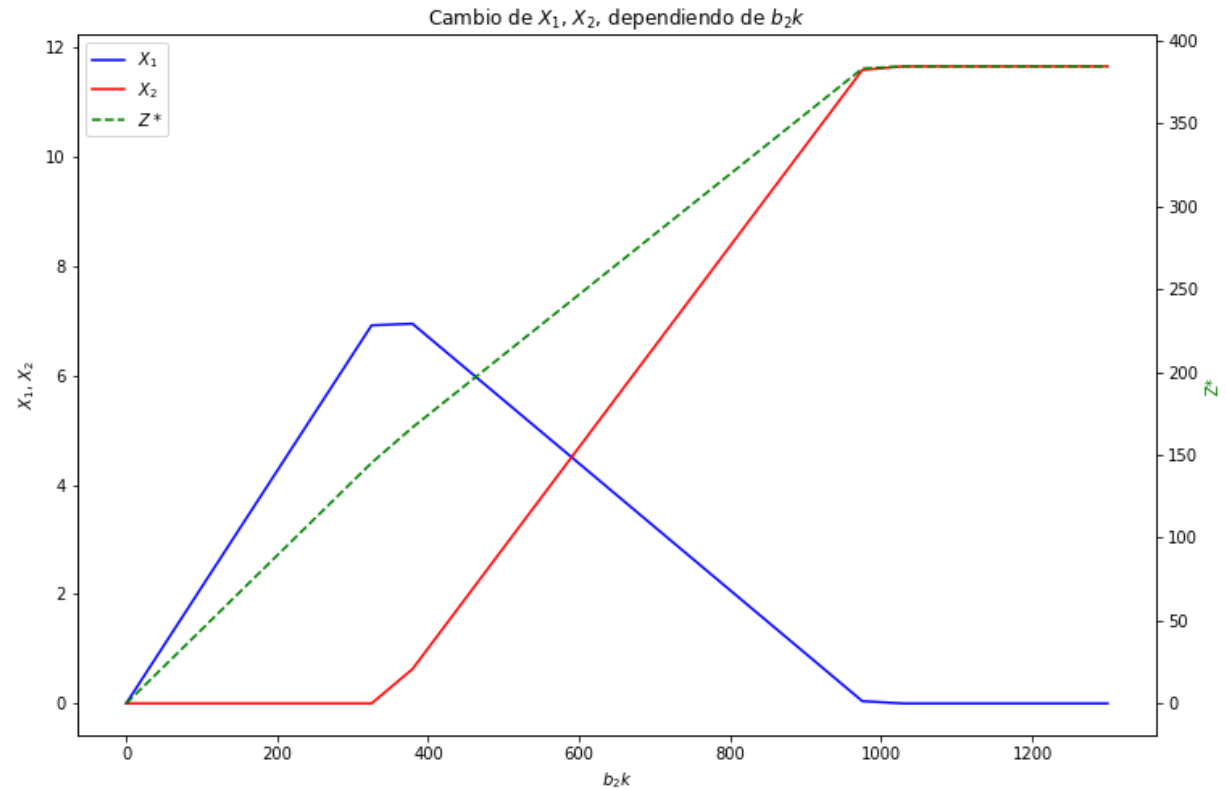
- \$ 0.20
- \$ 0.01
- \$ 1.00 ?

Modificación de parámetros b_i : grid search

Grid search: Implica hacer un barrido paramétrico iterando y resolviendo.



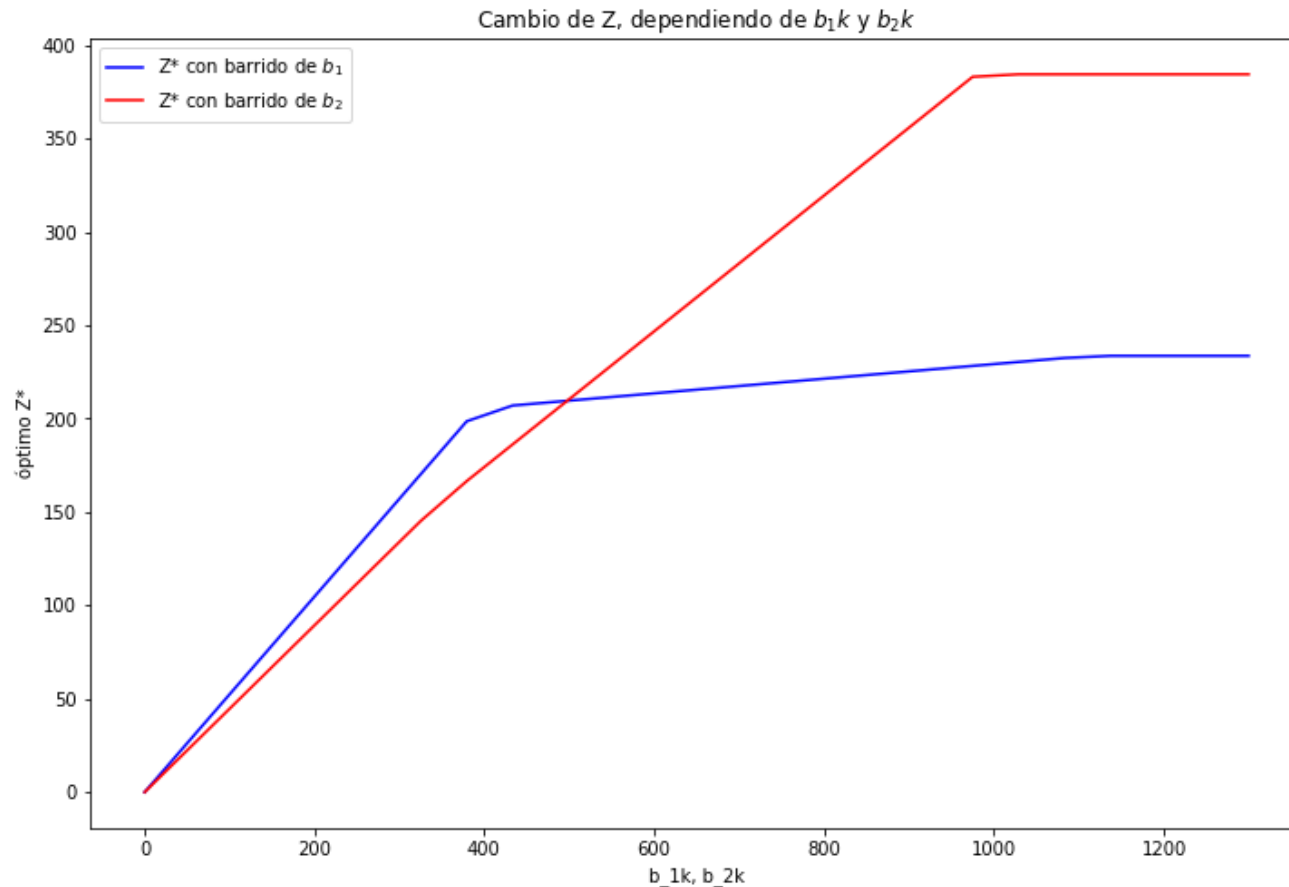
Barrido paramétrico de b_1



Barrido paramétrico de b_2

Modificación de parámetros b_i : grid search

Comparación de funcionales con barrido paramétrico de b_1 y b_2 por separado.

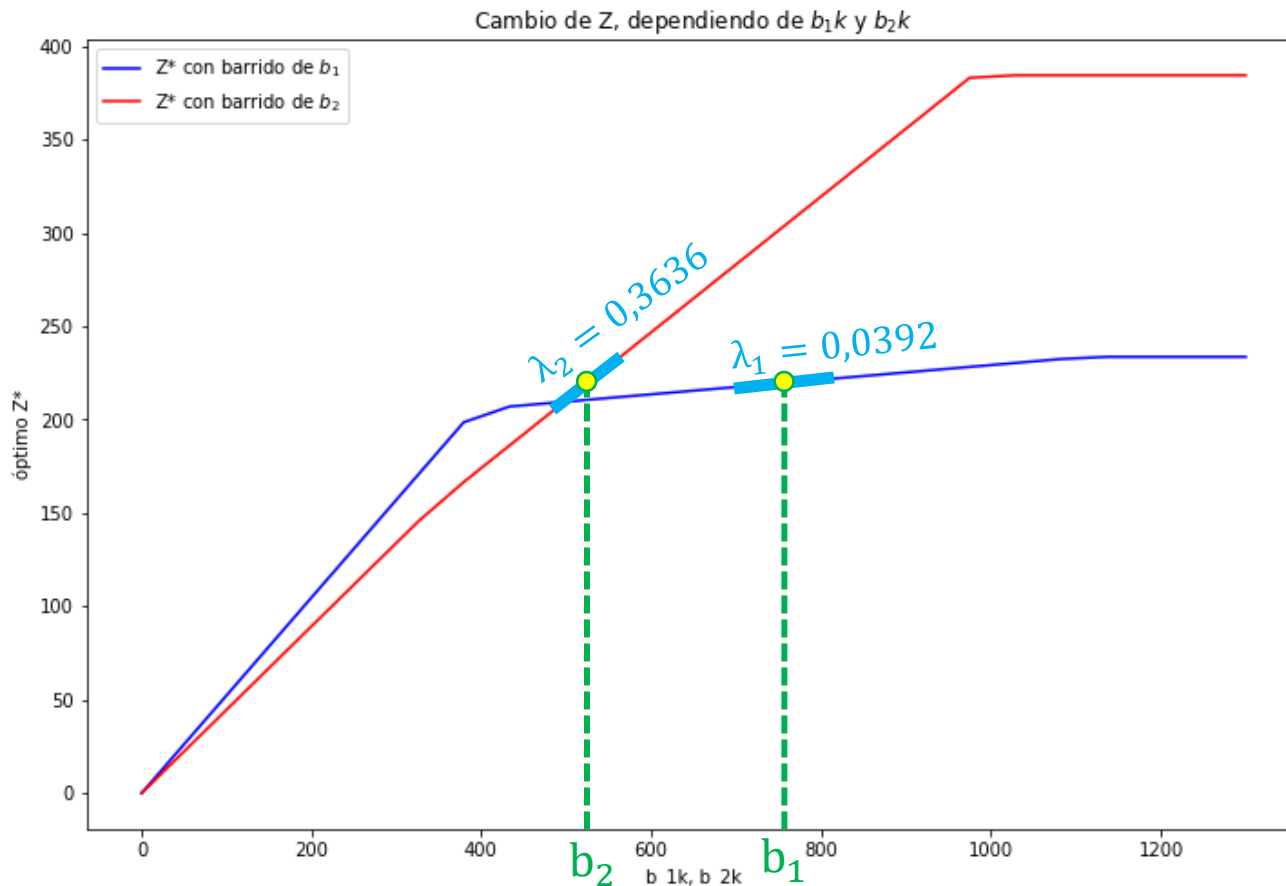


$$\lambda_1 = 0,3636 \frac{\$}{u \text{ recurso } 1}$$

$$\lambda_2 = 0,0392 \frac{\$}{u \text{ recurso } 2}$$

Precios sombra en barrido paramétrico

Comparación de funcionales con barrido paramétrico de b_1 y b_2 por separado.



Dados $b_1 = 734$ y $b_2 = 523$

Los precios sombra resultaron:

$$\lambda_1 = 0,0392 \frac{\$}{\text{u recurso 1}}$$

$$\lambda_2 = 0,3636 \frac{\$}{\text{u recurso 2}}$$

Modificación de los parámetros c_j

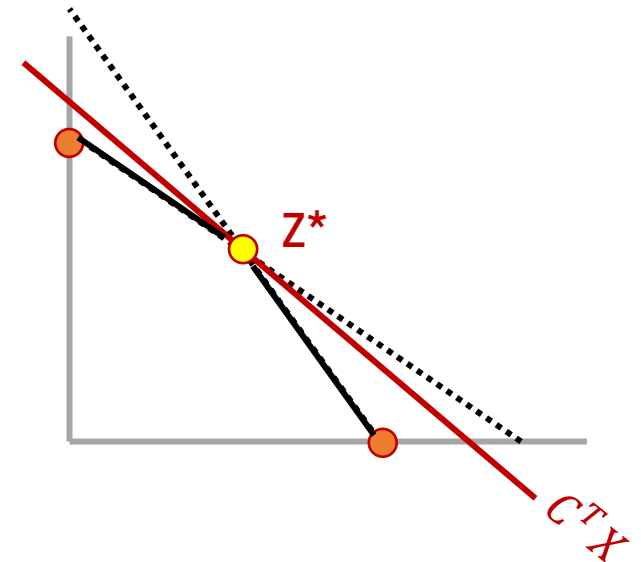
En este análisis nos concentramos en los parámetros c_j del funcional.

Dada un problema lineal $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= C^T X \\ \text{st. } AX &\leq B \end{aligned}$$

La pendiente resulta:

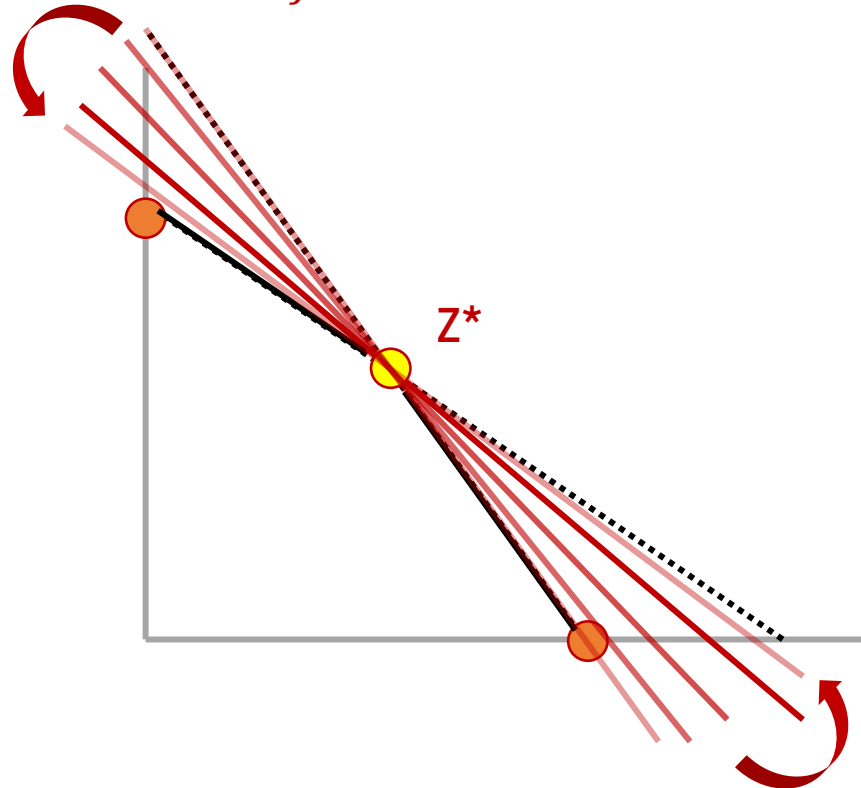
$$m_z = -\frac{c_1}{c_2}$$



Modificación de los parámetros c_j

Si modificamos solamente los coeficientes c_j del funcional, manteniendo los parámetros de la solución óptima constantes:

¿Entre qué valores podemos mover c_j sin modificar el resultado (x_1^*, x_2^*) ?



Modificación de los parámetros c_j

Siendo las rectas de las restricciones, calculamos sus **pendientes**:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \rightarrow x_2 = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x_1$$

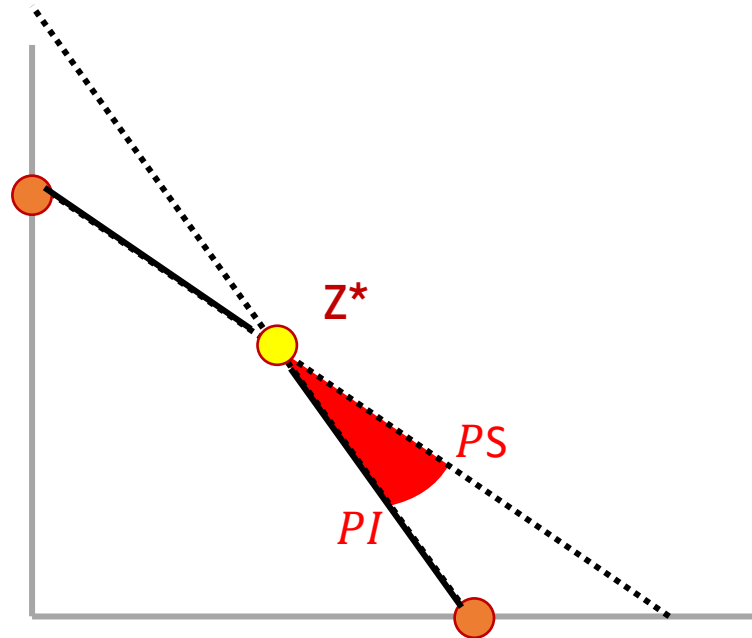
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \rightarrow x_2 = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1$$

Luego, evaluamos qué pendiente es el límite superior e inferior, de acuerdo a las magnitudes.

Modificación de los parámetros c_j

Los valores de la pendiente pueden variar de acuerdo a:

$$Pendiente\ inferior \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq Pendiente\ superior$$



Modificación de los parámetros c_j : ejemplo

$$\mathbf{max} \ z = 21x_1 + 33x_2$$

s.t.

$$100x_1 + 63x_2 \leq 734$$

$$47x_1 + 84x_2 \leq 523$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Pendiente del funcional actual: $m_z = -\frac{21}{33}$

Límite superior e inferior de la pendiente con restricciones:

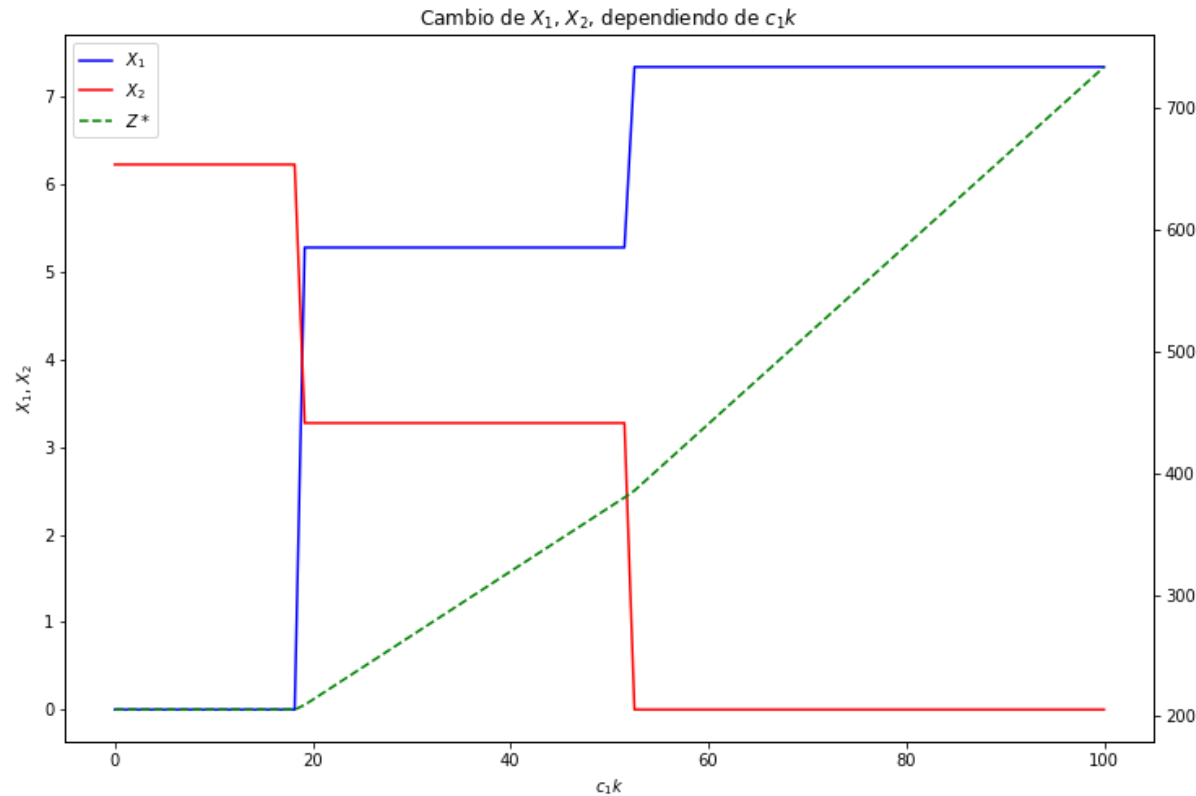
$$100x_1 + 63x_2 = 734 \rightarrow x_2 = \frac{734}{63} - \frac{100}{63}x_1$$

$$47x_1 + 84x_2 = 523 \rightarrow x_2 = \frac{523}{84} - \frac{47}{84}x_1$$

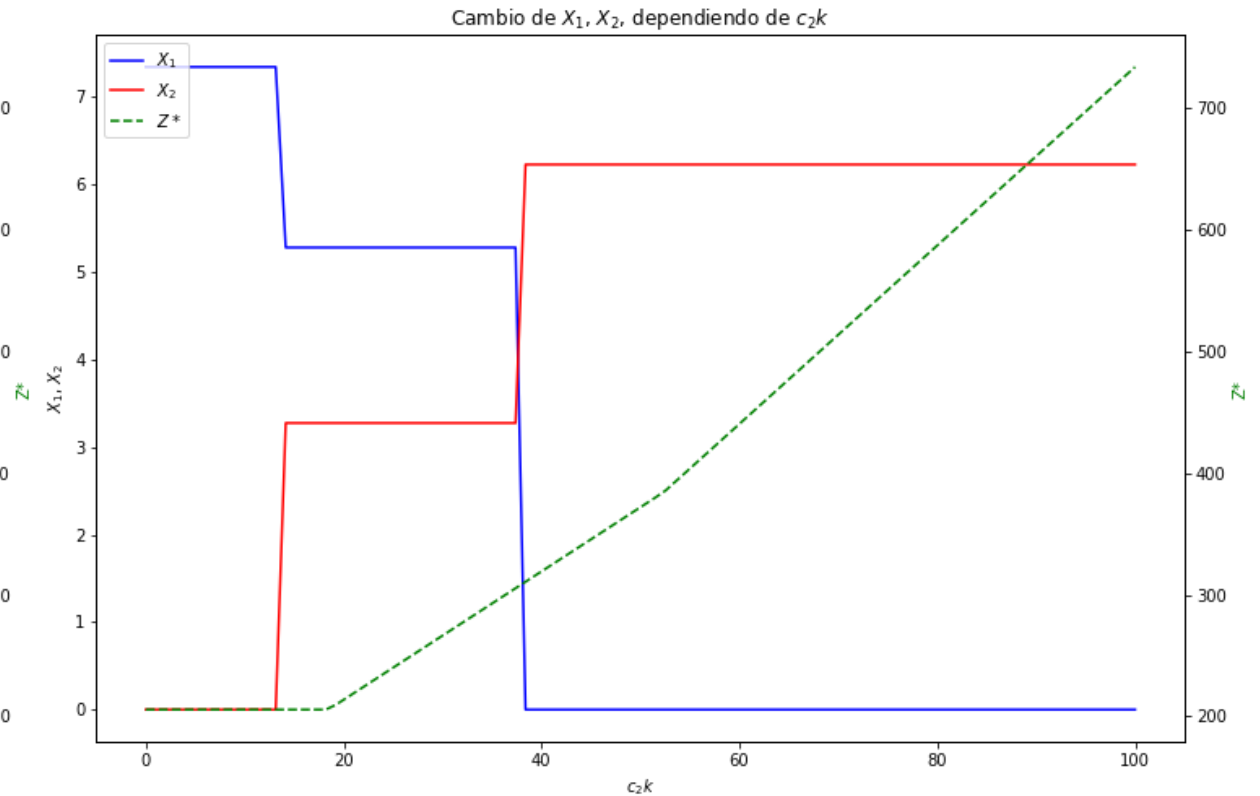
El rango resulta:

$$-\frac{100}{63} \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -\frac{47}{84}$$

Análisis de c_j con barrido paramétrico



Barrido paramétrico de c_1



Barrido paramétrico de c_2

Modificación de los parámetros c_j : ejemplo

Siendo el rango: $-1.59 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -0.56$

¿qué pasaría si:

1) c_1 aumenta 3 unidades y c_2 5 unidades?

2) c_2 aumenta 15 unidades y c_2 se mantiene?

3) ¿Cuánto puedo modificar c_1 , si c_2 aumenta 3 unidades?

Modificación de los parámetros c_j : ejemplo

Siendo el rango: $-1.59 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -0.56$

¿qué pasaría si:

1) c_1 aumenta 3 unidades y c_2 5 unidades?

$$\begin{aligned}c'_1 &= c_1 + 3 = 24 \\c'_2 &= c_2 + 5 = 38\end{aligned}$$

$$m_z = -\frac{c_1}{c_2} = -\frac{24}{38} = -0.63$$

$$-1.59 \leq -0.63 \leq -0.56$$

El óptimo (x_1^*, x_2^*) se mantiene, no hace falta recalcular.

Modificación de los parámetros c_j : ejemplo

Siendo el rango: $-1.59 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -0.56$

¿qué pasaría si:

2) c_2 aumenta 15 unidades y c_2 se mantiene?

$$c'_2 = c_2 + 15 = 48$$

$$m_z = -\frac{c_1}{c_2} = -\frac{21}{48} = -0.43$$

$$-1.59 \leq -0.56 \leq -0.43$$

Fuera de rango, hace falta recalcular el óptimo (x_1^*, x_2^*) .

Modificación de los parámetros c_j : ejemplo

Siendo el rango: $-1.59 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -0.56$

3) ¿Cuánto puedo modificar c_1 , si c_2 aumenta 3 unidades?

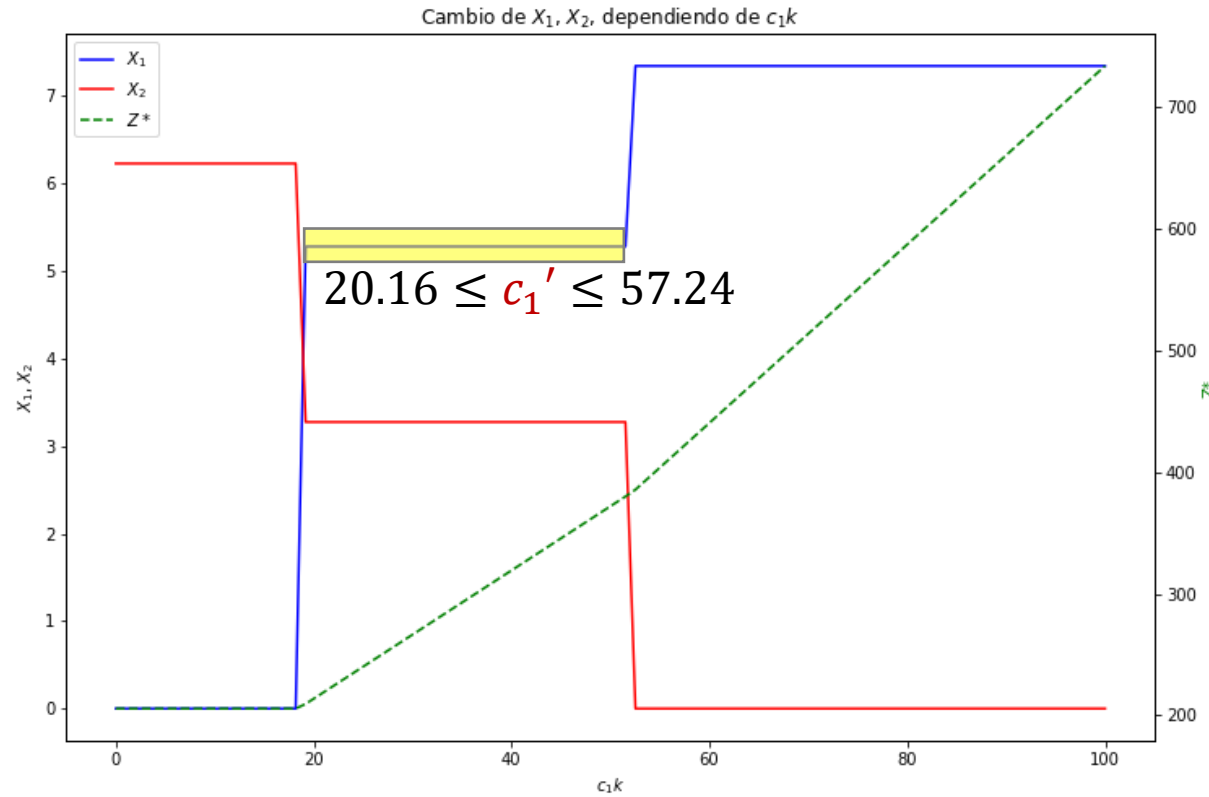
$$c'_2 = c_2 + 3 = 36$$

$$m_z = -\frac{c_1}{c_2} = -\frac{c'_1}{36}$$
$$-1.59 \leq -\frac{c'_1}{36} \leq -0.56$$

$$20.16 \leq c'_1 \leq 57.24$$

Dado que $c_1 = 21$, puedo disminuirlo hasta 0.84 o aumentarlo hasta 36.24 sin modificar el óptimo (x_1^*, x_2^*) .

Modificación de los parámetros c_j : ejemplo



Barrido paramétrico de c_1

Análisis de costo reducido

En el caso que una variable sea no básica, **el costo reducido** es la cantidad que tiene que aumentar un coeficiente del funcional para que su variable ingrese a la base.

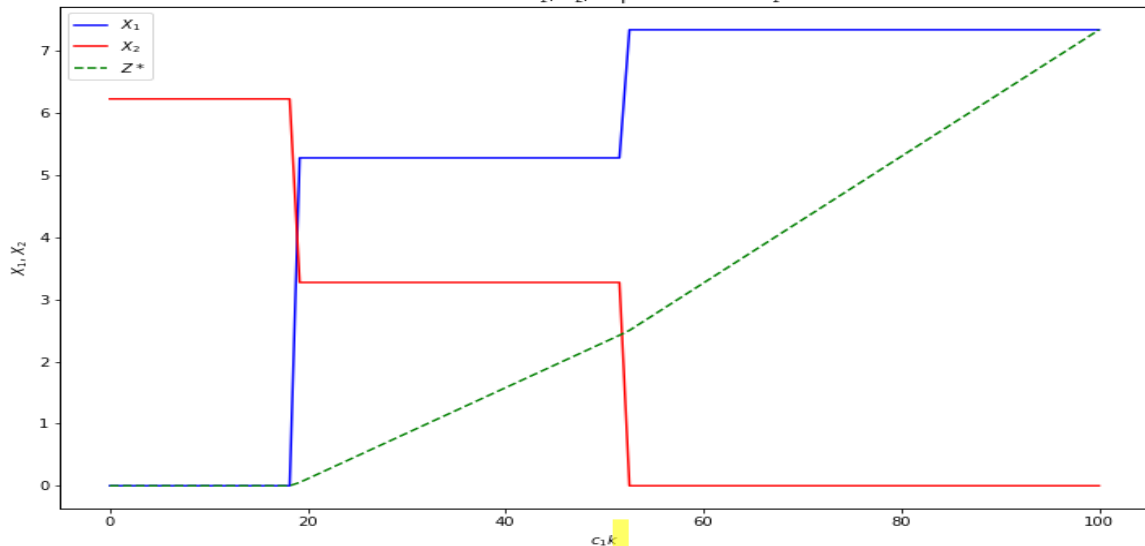
Se conoce también como **costo de oportunidad**.

Recordemos que esto en SIMPLEX lo usábamos para seleccionar variables para entrar a la base con $z_j - c_j$.

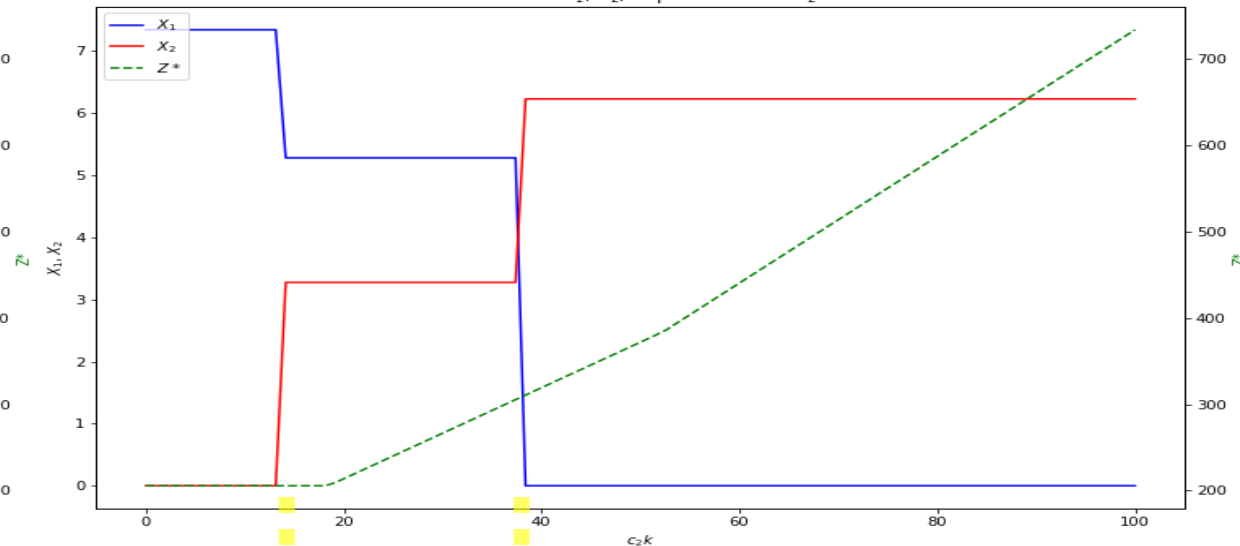
En PuLP se puede calcular con el atributo ".dj" sobre las variables

Análisis de CR_j con barrido paramétrico

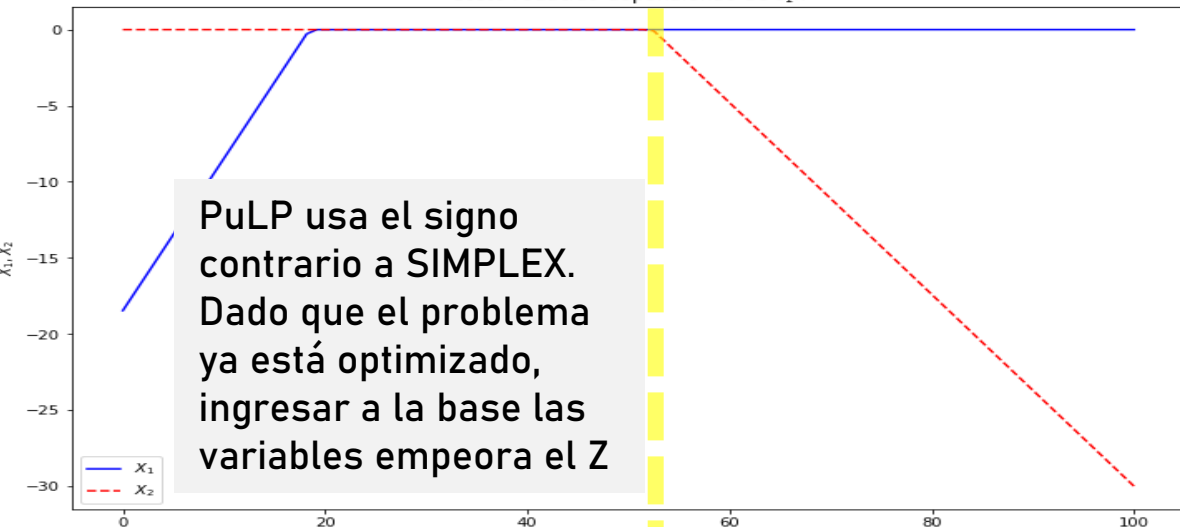
Cambio de X_1, X_2 , dependiendo de $c_1 k$



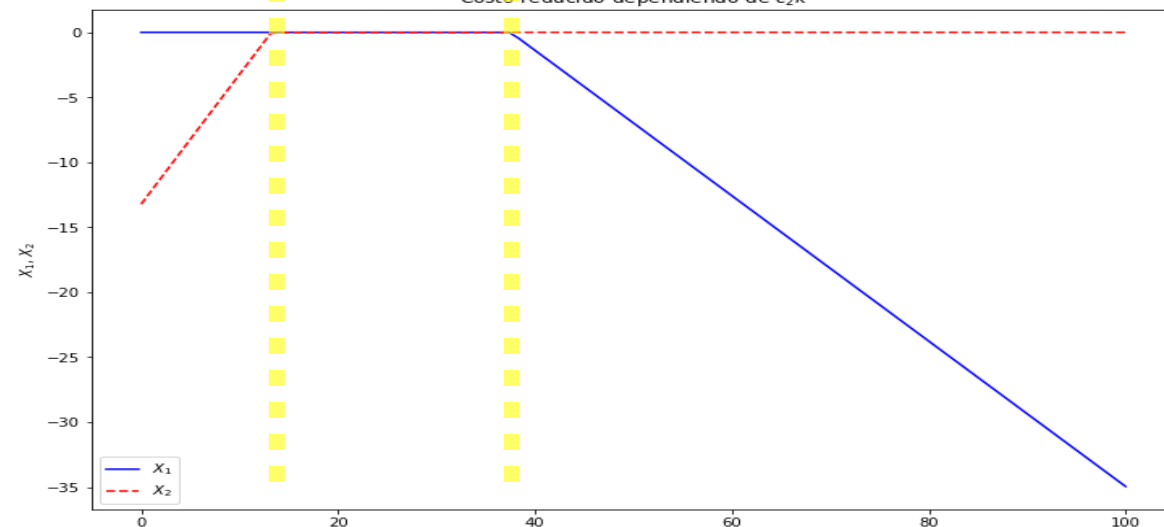
Cambio de X_1, X_2 , dependiendo de $c_2 k$



Costo reducido dependiendo de $c_1 k$



Costo reducido dependiendo de $c_2 k$



Barrido paramétrico de c_1

Barrido paramétrico de c_2