Programación lineal: casos particulares en método SIMPLEX

Rodrigo Maranzana

Repaso de casos particulares

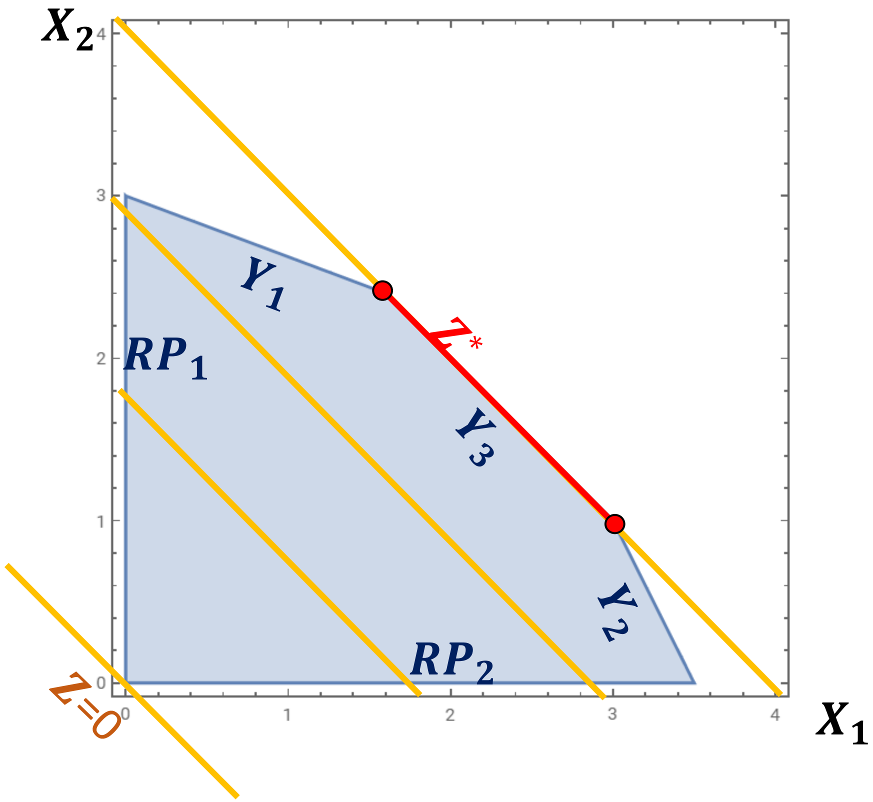
Los casos particulares en LP:

- Soluciones alternativas
- Puntos degenerados
- Problema incompatible
- Problema no acotado

Soluciones alternativas

Soluciones alternativas

$$\begin{aligned} &Max\ Z = 3X_1 + 3X_2 \\ &sujeto\ a: \\ &\quad Y_1:\ 6X_1 + 16X_2 \leq 48 \\ &\quad Y_2:\ 12X_1 + 6X_2 \leq 42 \\ &\quad Y_3:\ 9X_1 + 9X_2 \leq 36 \\ &\qquad X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$



RP_i: restricciones de positividad

Soluciones alternativas

$$\boldsymbol{Max\ Z = 3X_1 + 3X_2}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a:}$$
$$\begin{aligned} Y_1 &: 6X_1 + 16X_2 \leq 48 \\ Y_2 &: 12X_1 + 6X_2 \leq 42 \\ Y_3 &: 9X_1 + 9X_2 \leq 36 \end{aligned}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Modelo Extendido

$$\boldsymbol{Max\ Z = 3X_1 + 3X_2}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a:}$$
$$\begin{aligned} Y_1 &: 6X_1 + 16X_2 + X_3 = 48 \\ Y_2 &: 12X_1 + 6X_2 + X_4 = 42 \\ Y_3 &: 9X_1 + 9X_2 + X_5 = 36 \end{aligned}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Soluciones alternativas

$$\boldsymbol{Max\ Z = 3X_1 + 3X_2}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a:}$$

$$\begin{aligned}
Y_1:&\quad 6X_1 + 16X_2 + X_3 &&= 48\\
Y_2:&\quad 12X_1 + 6X_2 + X_4 &&= 42\\
Y_3:&\quad 9X_1 + 9X_2 + X_5 &&= 36
\end{aligned}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Modelo Extendido Matricial

$$\boldsymbol{Max\ Z = C^T X}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a:}$$
$$\boldsymbol{AX = b}$$
$$\boldsymbol{X \geq 0}$$

Valores de matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 48 \\ 42 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Soluciones alternativas

$$\boldsymbol{Max\ Z = 3X_1 + 3X_2}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a:}$$

$$\boldsymbol{Y_1:\quad 6X_1 + 16X_2 \quad + X_3 \quad = 48}$$
$$\boldsymbol{Y_2:\quad 12X_1 + 6X_2 \quad + X_4 \quad = 42}$$
$$\boldsymbol{Y_3:\quad 9X_1 + 9X_2 \quad + X_5 \quad = 36}$$
$$\boldsymbol{X_1, X_2 \geq 0}$$

$$\boldsymbol{Max\ Z = C^T X}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a:}$$
$$\boldsymbol{AX = b}$$
$$\boldsymbol{X \geq 0}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 48 \\ 42 \\ 36 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}$$

C_j			**3**	**3**	**0**	**0**	**0**	B_k / A_{ij}
$\boldsymbol{C_j\ Base}$	$\boldsymbol{X_j\ Base}$	$\boldsymbol{B_k}$	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{X_2}$	$\boldsymbol{X_3}$	$\boldsymbol{X_4}$	$\boldsymbol{X_5}$	
0	$\boldsymbol{X_3}$	**48**	6	16	1	0	0	
0	$\boldsymbol{X_4}$	**42**	12	6	0	1	0	
0	$\boldsymbol{X_5}$	**36**	9	9	0	0	1	
$\boldsymbol{Z}$	$Z_j - C_j$							

Soluciones alternativas: iteración #0

C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	**48**	6	16	1	0	0	
0	X_4	**42**	12	6	0	1	0	
0	X_5	**36**	9	9	0	0	1	
0	$Z_j - C_j$		-3	-3	0	0	0	

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡Z puede mejorar!

$\boldsymbol{X_1}$ y $\boldsymbol{X_2}$ igual $Z_j - C_j$, elegimos $\boldsymbol{X_1}$ arbitrariamente para entrar a la base

Soluciones alternativas: iteración #0

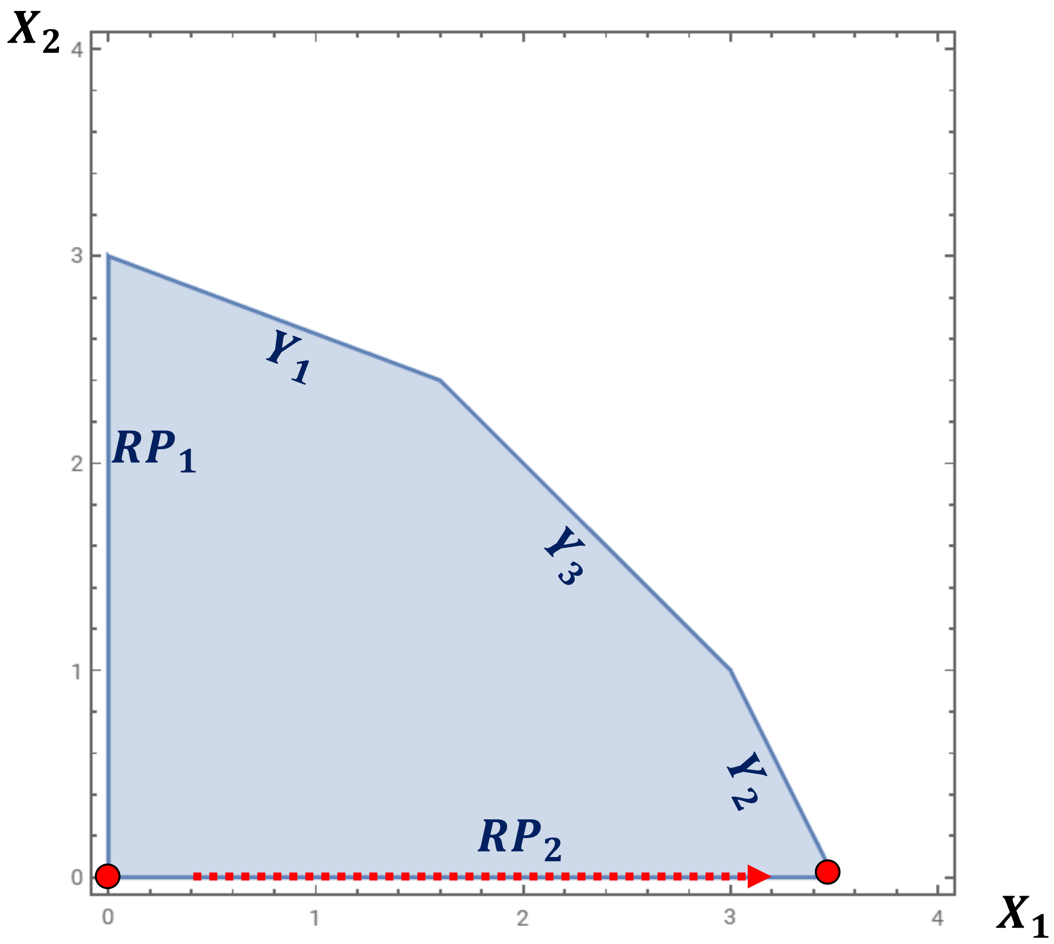
C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j *Base*	X_j *Base*	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	48	6	16	1	0	0	8
0	X_4	42	12	6	0	1	0	3,5
0	X_5	36	9	9	0	0	1	4
0	$Z_j - C_j$		-3	-3	0	0	0	

Resolvemos $B_k \,/A_{ij}$

Mínimo positivo $B_k \,/A_{ij}$ en $\boldsymbol{X_4}$

Sale $\boldsymbol{X_4}$, entra $\boldsymbol{X_1}$

Soluciones alternativas: iteración #0 a #1



Soluciones alternativas: iteración #0 a #1

Tabla #0

C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	48	6	16	1	0	0	8
0	X_4	42	12	6	0	1	0	3,5
0	X_5	36	9	9	0	0	1	4
0	$Z_j - C_j$		-3	-3	0	0	0	

Tabla #1

C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	27,0	0	13	1	-0,5	0	
3	X_1	3,5	1	0,5	0	0,08	0	
0	X_5	4,5	0	4,5	0	-0,75	1	
	$Z_j - C_j$		0	-1,5	0	0,25	0	

Soluciones alternativas: iteración #1

C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	27,0	0	13	1	-0,5	0	
3	X_1	3,5	1	0,5	0	0,08	0	
0	X_5	4,5	0	4,5	0	-0,75	1	
$\mathbf{10,5}$	$Z_j - C_j$		0	**-1,5**	0	0,25	0	

Resolvemos el valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡Z puede mejorar!

$\boldsymbol{X_2}$ debe entrar a la base

Soluciones alternativas: iteración #1

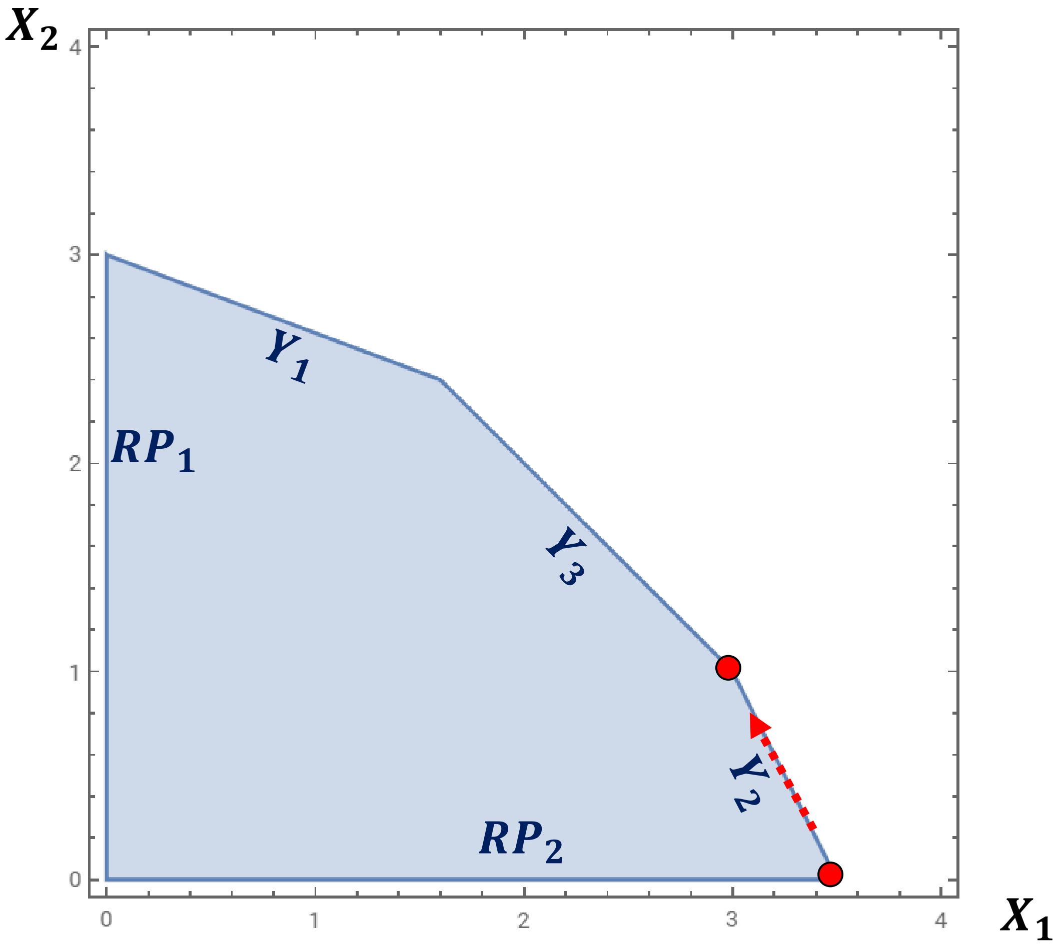
C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	27,0	0	13	1	-0,5	0	2,076
3	X_1	3,5	1	0,5	0	0,08	0	7,000
0	X_5	4,5	0	4,5	0	-0,75	1	1,000
$\mathbf{10,5}$	$Z_j - C_j$		0	**-1,5**	0	0,25	0	

Resolvemos B_k / A_{ij}

Mínimo positivo B_k / A_{ij} en $\boldsymbol{X_5}$

Sale $\boldsymbol{X_5}$, entra $\boldsymbol{X_2}$

Soluciones alternativas: iteración #1 a #2



Soluciones alternativas: iteración #1 a #2

Tabla #1

C_j			3	3	0	0	0	$B_k\ /A_{ij}$
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	27,0	0	13	1	-0,5	0	2,076
3	X_1	3,5	1	0,5	0	0,08	0	7,000
0	X_5	4,5	0	4,5	0	-0,75	1	1,000
10,5	$Z_j - C_j$		0	-1,5	0	0,25	0	

Tabla #2

C_j			3	3	0	0	0	$B_k\ /A_{ij}$
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	**14,0**	**0**	**0**	**1**	**1,67**	**-2,88**	
3	X_1	**3,0**	**1**	**0**	**0**	**0.16**	**-0,11**	
3	X_2	**1,0**	**0**	**1**	**0**	**-0,16**	**0,23**	
	$Z_j - C_j$		**0**	**0**	**0**	**0**	**0,33**	

Soluciones alternativas: iteración #2

C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	14,0	0	0	1	1,67	-2,88	
3	X_1	3,0	1	0	0	0,16	-0,11	
3	X_2	1,0	0	1	0	-0,16	0,23	
12	$Z_j - C_j$		0	0	0	**0**	0,33	

Resolvemos el valor del funcional Z

No existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡pero sí con 0 alternativo (0*)!

Encontramos caso particular de soluciones alternativas

Soluciones alternativas: iteración #2

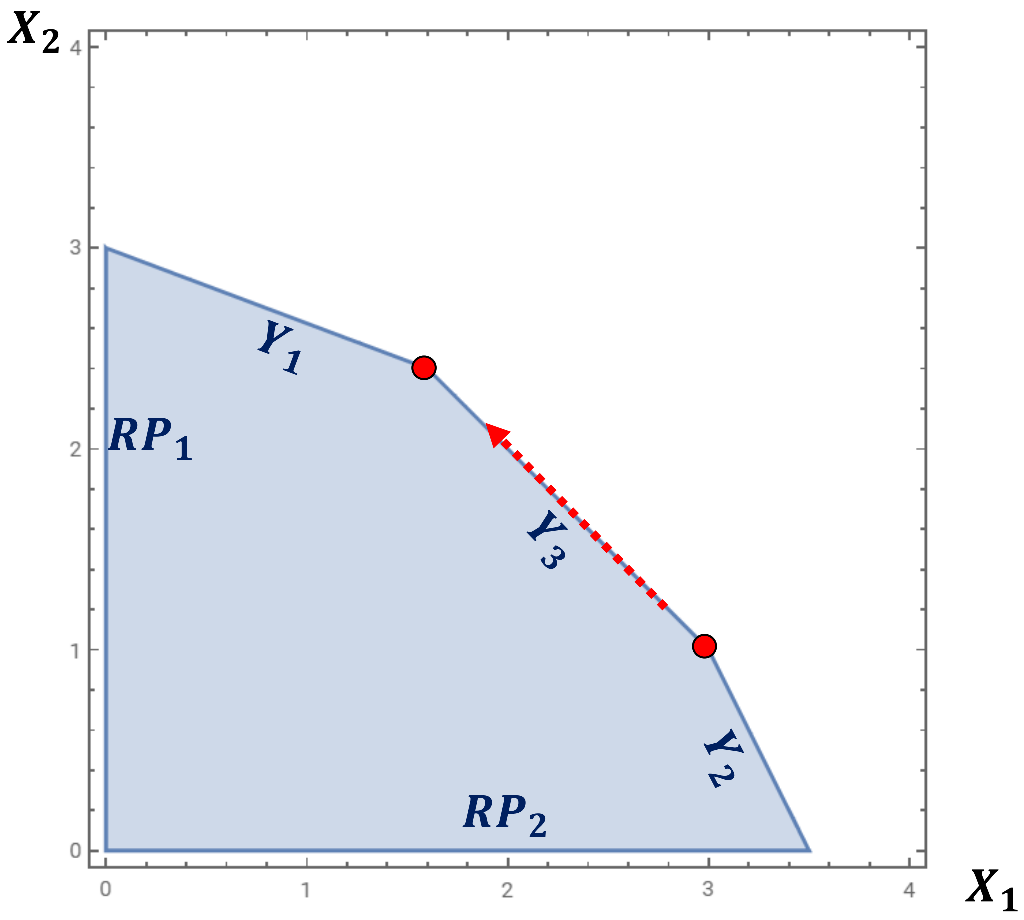
C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	14,0	0	0	1	1,67	-2,88	**8,383**
3	X_1	3,0	1	0	0	0,16	-0,11	**18,750**
3	X_2	1,0	0	1	0	-0,16	0,23	**-6,250**
12	$Z_j - C_j$		0	0	0	**0**	0,33	

Resolvemos B_k / A_{ij}

Mínimo positivo B_k / A_{ij} en $\boldsymbol{X_5}$

Sale $\boldsymbol{X_3}$, entra $\boldsymbol{X_4}$ (por el 0*). Las dos son variables Slack.

Soluciones alternativas: iteración #2 a #3



Soluciones alternativas: iteración #2 a #3

Tabla #2

C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	14,0	0	0	1	1,67	-2,88	8,383
3	X_1	3,0	1	0	0	0,16	-0,11	18,750
3	X_2	1,0	0	1	0	-0,16	0,23	-6,250
12	$Z_j - C_j$		0	0	0	0	0,33	

Tabla #3

C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_4	**8,38**	**0**	**0**	**0,6**	**1**	**-1,72**	
3	X_1	**1,66**	**1**	**0**	**-0,096**	**0**	**0,17**	
3	X_2	**2,34**	**0**	**1**	**0,096**	**0**	**-0,05**	
	$Z_j - C_j$		**0**	**0**	**0**	**0**	**0,33**	

Soluciones alternativas: iteración #3

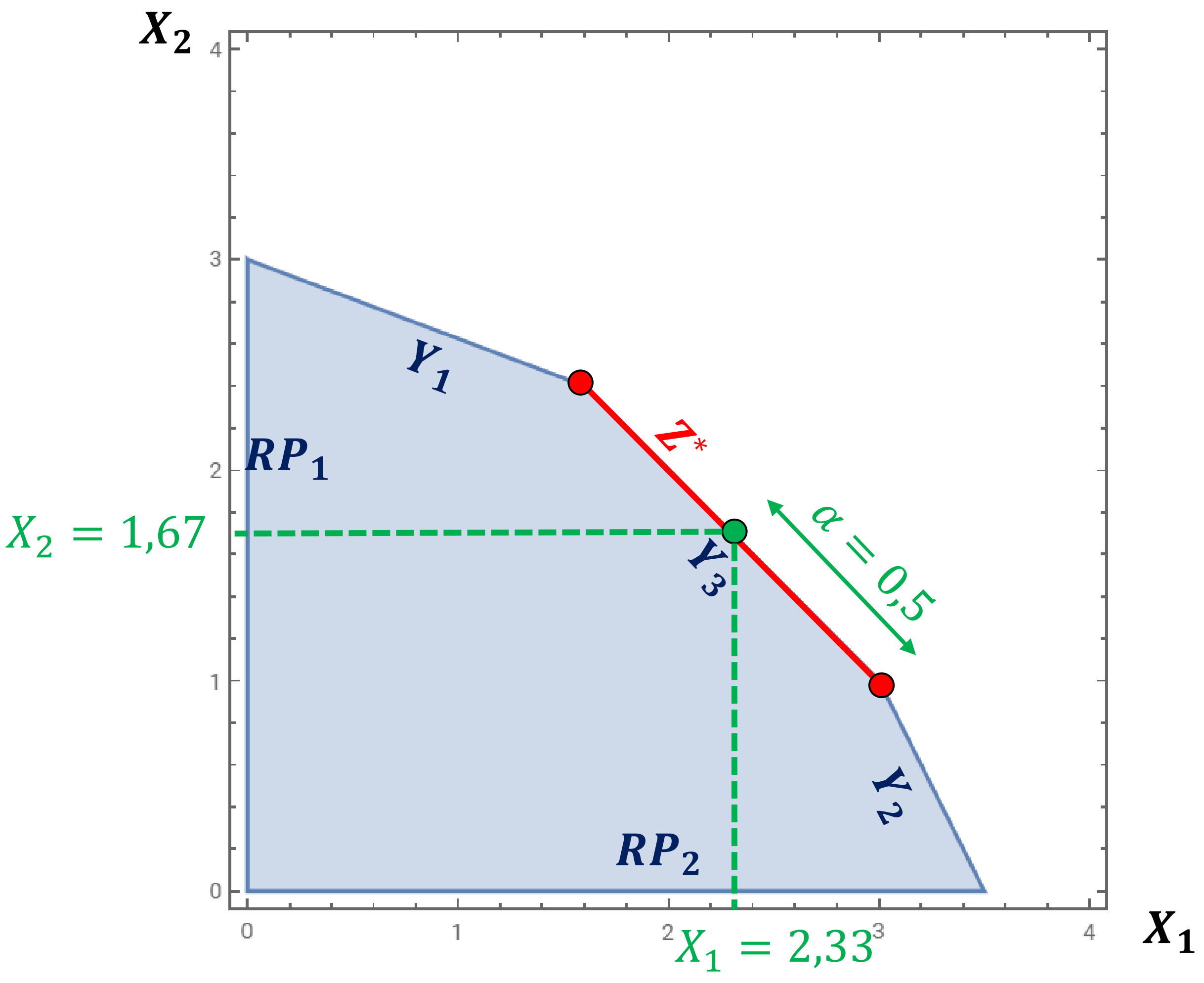
C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_4	8,38	0	0	0,6	1	-1,72	
3	X_1	1,66	1	0	-0,096	0	-2,6	
3	X_2	2,34	0	1	0,096	0	-0,05	
12	$Z_j - C_j$		0	0	**0**	0	0,33	

Resolvemos el valor del funcional Z

X_3 con 0 alternativo (0*), la solución de la iteración anterior

La solución se mantiene igual $Z = 12$

Soluciones alternativas: solución



¿Cómo se escribe la solución?

$Z^* = 12$

Combinación lineal de las soluciones en los vértices:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 3{,}00 \\ 1{,}00 \\ 14{,}00 \\ 0{,}00 \\ 0{,}00 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 1{,}66 \\ 2{,}34 \\ 0{,}00 \\ 8{,}38 \\ 0{,}00 \end{bmatrix} \qquad 0 \le \alpha \le 1$$

Ej: $\alpha = 0{,}5$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}33 \\ 1{,}67 \\ 7{,}00 \\ 4{,}19 \\ 0{,}00 \end{bmatrix}$$

Check con Python PuLP

```python
import pulp

lp01 = pulp.LpProblem("soluciones-alternativas", pulp.LpMaximize)

# Variables:
x = pulp.LpVariable('x', lowBound=0, cat='Continuous')
y = pulp.LpVariable('y', lowBound=0, cat='Continuous')

# Función objetivo:
lp01 += 3*x + 3*y, "Z"

# Restricciones:
lp01 +=  6*x + 16*y  <=  48
lp01 += 12*x +  6*y  <=  42
lp01 +=  9*x +  9*y  <=  36

# Resolucion:
lp01.solve()
```

```python
# Imprimimos el status del problema:
print(pulp.LpStatus[lp01.status])

# Imprimimos las variables en su valor óptimo:
for variable in lp01.variables():
    print("%s = %.2f" % (variable.name,
variable.varValue))

# Imprimimos el funcional óptimo:
print(pulp.value(lp01.objective))
```

```
>> Optimal
>> x = 1.60
>> y = 2.40
>> 12.0
```

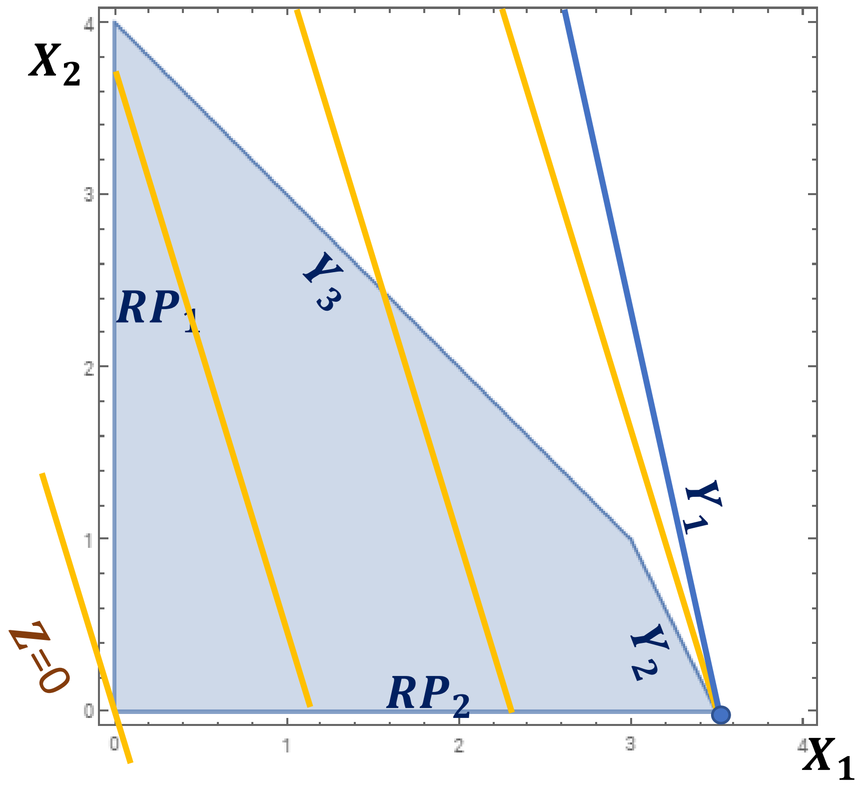
1 solo valor de la solución

Puntos degenerados

Puntos degenerados

$$Max\ Z = 12X_1 + 4X_2$$
$$sujeto\ a:$$
$$10X_1 + 4X_2 \leq 35$$
$$12X_1 + 6X_2 \leq 42$$
$$9X_1 + 9X_2 \leq 36$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



RP_i: restricciones de positividad

Puntos degenerados

$$\boldsymbol{Max\ Z = 12X_1 + 4X_2}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a:}$$
$$\begin{aligned} 10X_1 + 4X_2 &\leq 35 \\ 12X_1 + 6X_2 &\leq 42 \\ 9X_1 + 9X_2 &\leq 36 \end{aligned}$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Modelo Extendido

$$\boldsymbol{Max\ Z = 12X_1 + 4X_2}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a:}$$
$$\begin{aligned} Y_1&: 10X_1 + 4X_2 + X_3 = 35 \\ Y_2&: 12X_1 + 6X_2 + X_4 = 42 \\ Y_3&: 9X_1 + 9X_2 + X_5 = 36 \end{aligned}$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Puntos degenerados

$$\boldsymbol{Max\ Z = 12X_1 + 4X_2}$$
$\boldsymbol{sujeto\ a}$:

$$\boldsymbol{Y_1: 10X_1 + 4X_2 + X_3 = 35}$$
$$\boldsymbol{Y_2: 12X_1 + 6X_2 + X_4 = 42}$$
$$\boldsymbol{Y_3: 9X_1 + 9X_2 + X_5 = 36}$$

$$\boldsymbol{X_1, X_2 \geq 0}$$

Modelo Extendido Matricial

$$\boldsymbol{Max\ Z = C^T X}$$
$\boldsymbol{sujeto\ a}$:

$$\boldsymbol{AX = b}$$
$$\boldsymbol{X \geq 0}$$

Valores de matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 35 \\ 42 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Puntos degenerados

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{Max\ Z = 12X_1 + 4X_2}\\
&\boldsymbol{sujeto\ a}:\\
&\quad \boldsymbol{Y_1: 10X_1 + 4X_2 \quad +X_3 \qquad\qquad\qquad = 35}\\
&\quad \boldsymbol{Y_2: 12X_1 + 6X_2 \qquad\quad +X_4 \qquad\quad = 42}\\
&\quad \boldsymbol{Y_3: \ \ 9X_1 + \ \ 9X_2 \qquad\qquad\qquad +X_5 = 36}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{X_1, X_2 \geq 0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{Max\ Z = C^T X}\\
&\boldsymbol{sujeto\ a}:\\
&\quad \boldsymbol{AX = b}\\
&\quad \boldsymbol{X \geq 0}
\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 35 \\ 42 \\ 36 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}$$

C_j			12	4	0	0	0	B_k/A_{ij}
$\boldsymbol{C_j\ Base}$	$\boldsymbol{X_j\ Base}$	$\boldsymbol{B_k}$	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{X_2}$	$\boldsymbol{X_3}$	$\boldsymbol{X_4}$	$\boldsymbol{X_5}$	
0	$\boldsymbol{X_3}$	35	10	4	1	0	0	
0	$\boldsymbol{X_4}$	42	12	6	0	1	0	
0	$\boldsymbol{X_5}$	36	9	9	0	0	1	
$\boldsymbol{Z}$	$Z_j - C_j$							

Puntos degenerados: iteración #0

C_j			12	4	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	35	10	4	1	0	0	
0	X_4	42	12	6	0	1	0	
0	X_5	36	9	9	0	0	1	
0	$Z_j - C_j$		-12	-4	0	0	0	

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡Z puede mejorar!

$\boldsymbol{X_1}$ con menor $Z_j - C_j$, para entrar a la base

Puntos degenerados: iteración #0

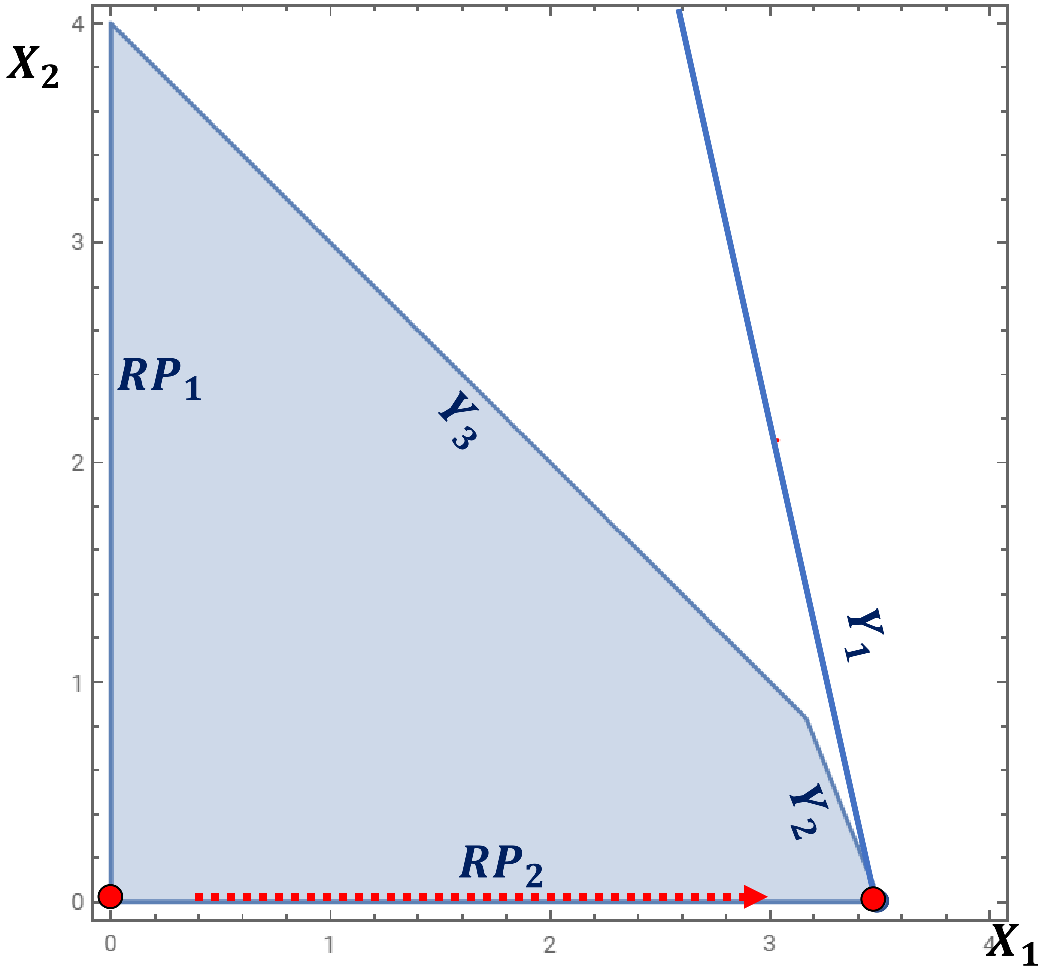
C_j			12	4	0	0	0	B_k/A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	35	10	4	1	0	0	3,5
0	X_4	42	12	6	0	1	0	3,5
0	X_5	36	9	9	0	0	1	4
0	$Z_j - C_j$		-12	-4	0	0	0	

Resolvemos $B_k\ /A_{ij}$

Mínimo positivo $B_k\ /A_{ij}$ en $\boldsymbol{X_3}$ y $\boldsymbol{X_4}$, elegimos arbitrariamente $\boldsymbol{X_3}$.

Sale $\boldsymbol{X_3}$, entra $\boldsymbol{X_1}$

Puntos degenerados: iteración #0 a #1



Puntos degenerados: iteración #0 a #1

Tabla #0

C_j			12	4	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	35	10	4	1	0	0	3,5
0	X_4	42	12	6	0	1	0	3,5
0	X_5	36	9	9	0	0	1	4
0	$Z_j - C_j$		-12	-4	0	0	0	

Tabla #1

C_j			12	4	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
12	X_1	**3,5**	**1**	**0,4**	**0,1**	**0**	**0**	
0	X_4	**0**	**0**	**1,2**	**-1,2**	**1**	**0**	
0	X_5	**4,5**	**0**	**5,4**	**-0,9**	**0**	**1**	
	$Z_j - C_j$		**0**	**0,8**	**1,2**	**0**	**0**	

Puntos degenerados: iteración #1

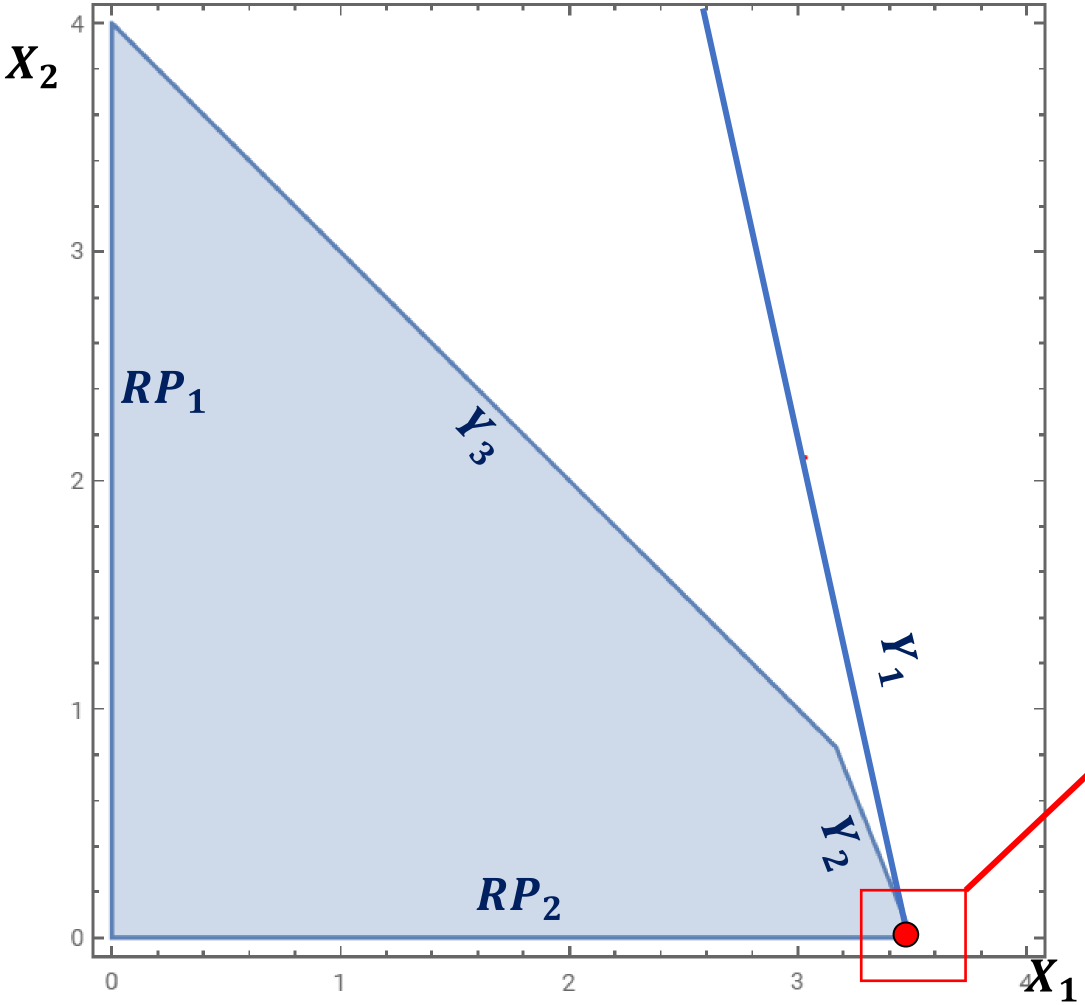
C_j			12	4	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
12	X_1	3,5	1	0,4	0,1	0	0	
0	X_4	0	0	1,2	-1,2	1	0	
0	X_5	4,5	0	5,4	-0,9	0	1	
42	$Z_j - C_j$		0	0,8	1,2	0	0	

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

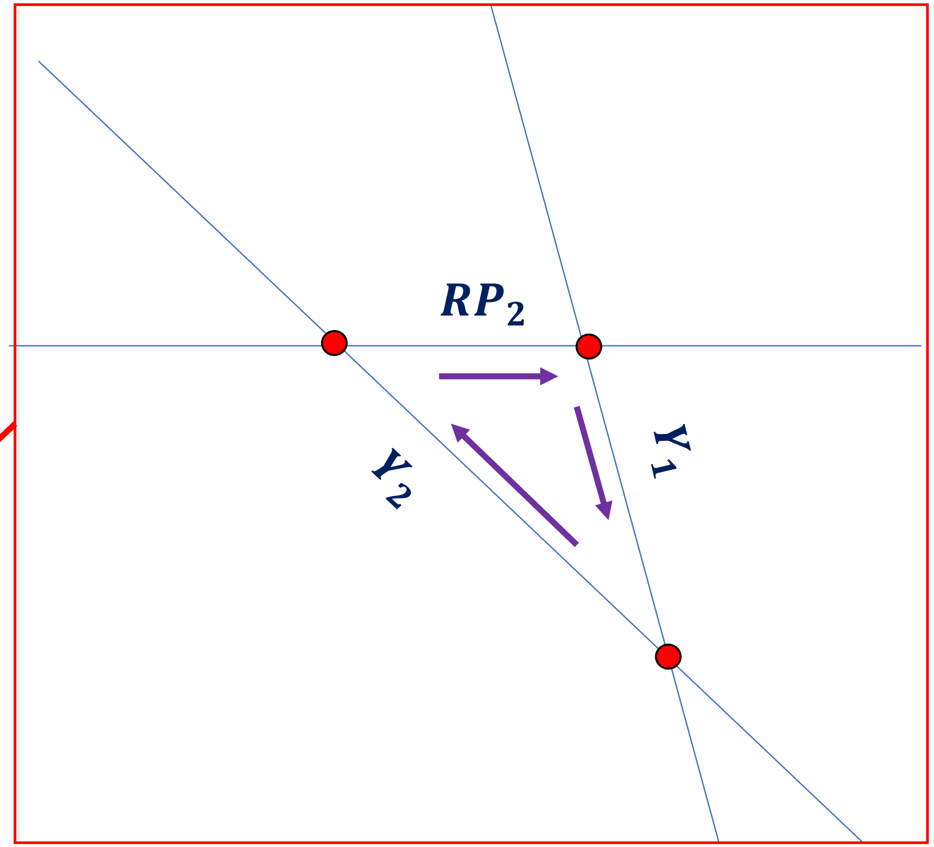
Es el óptimo.

$\boldsymbol{X_4}$ es básica y tiene valor 0, solución degenerada.

Puntos degenerados: riesgo de ciclo



Como lo ve la computadora:



Hay riesgo de ciclo, ¿Cómo lo evitamos?

Puntos degenerados: heurística

Volvemos al punto donde teníamos dos $B_k \ /A_{ij}$ iguales:

C_j			12	4	0	0	0	B_k $/A_{ij}$
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	35	10	4	1	0	0	3,5
0	X_4	42	12	6	0	1	0	3,5
0	X_5	36	9	9	0	0	1	4
0	$Z_j - C_j$		-12	-4	0	0	0	

Computacionalmente aplicamos un algoritmo heurístico para evitar el ciclo:

1. Aislamos las filas de los candidatos a salir.
2. Dividimos la fila por el pivote de cada candidato
3. De izquierda a derecha, ante la primera desigualdad entre los dos conservamos el mínimo.

Puntos degenerados: heurística

1- Aislamos las filas de los candidatos a salir.

C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	35	10	4	1	0	0	3,5
0	X_4	42	12	6	0	1	0	3,5

2- Dividimos la fila por el pivote de cada candidato

C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	3,5	1	0,4	0,1	0	0	
0	X_4	3,5	1	0,5	0	0,08	0	

3- De izquierda a derecha, ante la primera desigualdad entre los dos conservamos el mínimo.

C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	3,5	1	0,4	0,1	0	0	
0	X_4	3,5	1	0,5	0	0,08	0	

-> Debe salir X_3

Check con Python PuLP

```python
import pulp

lp01 = pulp.LpProblem("solución-degenerada", pulp.LpMaximize)

# Variables:
x = pulp.LpVariable('x', lowBound=0, cat='Continuous')
y = pulp.LpVariable('y', lowBound=0, cat='Continuous')

# Función objetivo:
lp01 += 12*x + 4*y, "Z"

# Restricciones:
lp01 +=  10*x + 4*y  ≤  35
lp01 += 12*x +  6*y  ≤  42
lp01 +=   9*x +  9*y  ≤  36
# Resolucion:
lp01.solve()
```

```python
# Imprimimos el status del problema:
print(pulp.LpStatus[lp01.status])

# Imprimimos las variables en su valor óptimo:
for variable in lp01.variables():
    print("%s = %.2f" % (variable.name, variable.varValue))

# Imprimimos el funcional óptimo:
print(pulp.value(lp01.objective))
```

```
>> Optimal
>> x = 3.50
>> y = 0.00
>> 42.0
```

Detección interna, no informa

Problema incompatible

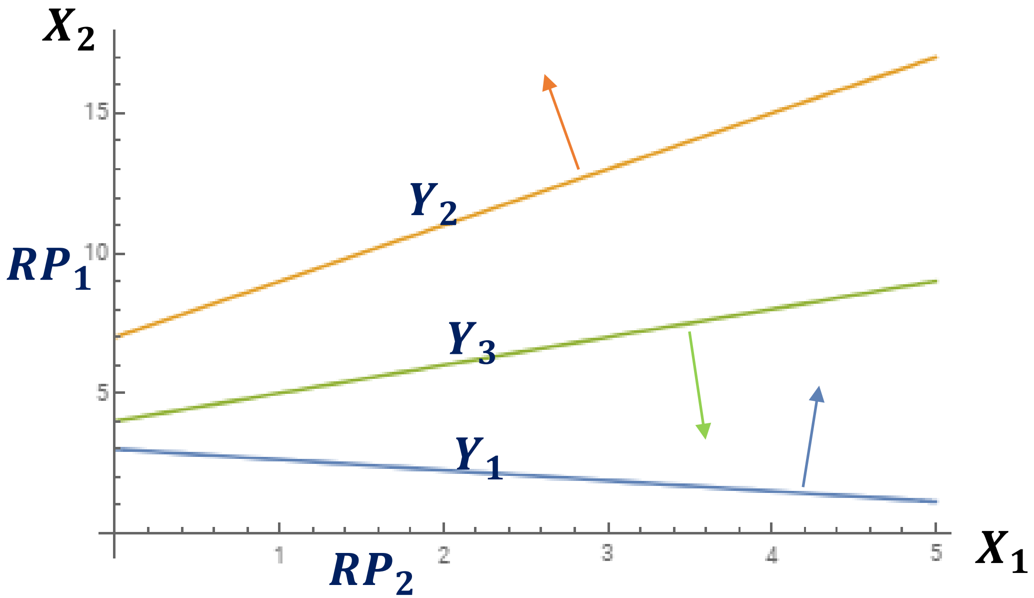
Problema incompatible

$$\boldsymbol{Max\ Z = 4X_1 + 3X_2}$$

$\boldsymbol{sujeto\ a}$:

$$Y_1:\ 6X_1 + 16X_2 \geq 48$$
$$Y_2:\ 12X_1 + 6X_2 \geq 42$$
$$Y_3:\ 9X_1 + 9X_2 \leq 36$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



RP_i: restricciones de positividad

Problema incompatible

$$Max\ Z = 4X_1 + 3X_2$$
$$sujeto\ a:$$
$$Y_1:\ 6X_1 + 16X_2 \geq 48$$
$$Y_2:\ 12X_1 + 6X_2 \geq 42$$
$$Y_3:\ 9X_1 + 9X_2 \leq 36$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Modelo Extendido

$$Max\ Z = 4X_1 + 3X_2 - \mathrm{M}u_1 - \mathrm{M}u_2$$
$$sujeto\ a:$$
$$Y_1:\ 6X_1 + 16X_2 - X_3 + u_1 = 48$$
$$Y_2:\ 12X_1 + 6X_2 - X_4 + u_2 = 42$$
$$Y_3:\ 9X_1 + 9X_2 + X_5 = 36$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

M: un número muy grande.
u_i: variable ficticia.

Problema incompatible

$$\boldsymbol{Max\ Z = 4 + 3X_2}$$
sujeto a:

$$Y_1: \quad 6X_1 + 16X_2 \quad -X_3 \quad +u_1 \quad = 48$$

$$Y_2: \quad 12X_1 + 6X_2 \quad -X_4 \quad +u_2 \quad = 42$$

$$Y_3: \quad 9X_1 + 9X_2 \quad +X_5 \quad = 36$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Modelo Extendido Matricial

$$\boldsymbol{Max\ Z = C^T X}$$
sujeto a:

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

Valores de matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 48 \\ 42 \\ 36 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M \\ -M \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Problema incompatible

$$\boldsymbol{Max\ Z = 4 + 3X_2}$$
$\boldsymbol{sujeto\ a}$:

$$\begin{array}{llllllll} \boldsymbol{Y_1}: & \boldsymbol{6X_1 + 16X_2} & \boldsymbol{-X_3} & & & \boldsymbol{+u_1} & & \boldsymbol{= 48} \\ \boldsymbol{Y_2}: & \boldsymbol{12X_1 + 6X_2} & & \boldsymbol{-X_4} & & & \boldsymbol{+u_2} & \boldsymbol{= 42} \\ \boldsymbol{Y_3}: & \boldsymbol{9X_1 + 9X_2} & & & \boldsymbol{+X_5} & & & \boldsymbol{= 36} \end{array}$$

$$\boldsymbol{X_1, X_2 \geq 0}$$

$$\boldsymbol{Max\ Z = C^T X}$$
$\boldsymbol{sujeto\ a}$:

$$\boldsymbol{AX = b}$$
$$\boldsymbol{X \geq 0}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 48 \\ 42 \\ 36 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M \\ -M \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	B_k/A_{ij}
$C_j\ Bas$	$X_j\ Bas$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
-M	u_1	48	6	16	-1	0	0	1	0	
-M	u_2	42	12	6	0	-1	0	0	1	
0	X_5	36	9	9	0	0	1	0	0	
Z	$Z_j - C_j$									

Problema incompatible: iteración #0

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
-M	u_1	48	6	16	-1	0	0	1	0	
-M	u_2	42	12	6	0	-1	0	0	1	
0	X_5	36	9	9	0	0	1	0	0	
$-90M$	$Z_j - C_j$		-18M - 4	-22M - 3	M	M	0	0	0	

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡Z puede mejorar!

Seleccionamos $\boldsymbol{X_2}$ para entrar a la base

Problema incompatible: iteración #0

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	$B_k\ /A_{ij}$
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
-M	u_1	**48**	6	16	-1	0	0	1	0	3
-M	u_2	**42**	12	6	0	-1	0	0	1	7
0	X_5	**36**	9	9	0	0	1	0	0	4
$-90M$	$Z_j - C_j$		-18M - 4	-22M - 3	M	M	0	0	0	

Resolvemos $B_k\ /A_{ij}$

Mínimo positivo $B_k\ /A_{ij}$ en $\boldsymbol{u_2}$

Sale $\boldsymbol{u_1}$, entra $\boldsymbol{X_2}$

De ahora en más: $-M - c \approx -M$ ... *ya que "-c" es despreciable*

Problema incompatible: iteración #0 a #1

Tabla #0

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
-M	u_1	48	6	16	-1	0	0	1	0	3
-M	u_2	42	12	6	0	-1	0	0	1	7
0	X_5	36	9	9	0	0	1	0	0	4
0	$Z_j - C_j$		-18M …	-22M …	M	M	0	0	0	

Tabla #1

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
3	X_2	3	0,37	1	-0,06	0	0	0,06	0	
-M	u_2	24	9,75	0	0,37	-1	0	-0,37	1	
0	X_5	9	5,62	0	0,56	0	1	-0,56	0	
	$Z_j - C_j$		-9,75M …	0	-0,37M …	M	0	1,37M …	0	

Problema incompatible: iteración #1

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
3	X_2	**3**	0,37	1	-0,06	0	0	0,06	0	
-M	u_2	**24**	9,75	0	0,37	-1	0	-0,37	1	
0	X_5	**9**	5,62	0	0,56	0	1	-0,56	0	
$-24M$ …	$Z_j - C_j$		**-9,75M …**	0	**-0,37M …**	M	0	1,37M …	0	

Resolvemos el valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡Z puede mejorar!

$\boldsymbol{X_1}$ debe entrar a la base

Problema incompatible: iteración #1

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
3	X_2	**3**	0,37	1	-0,06	0	0	0,06	0	**8,1**
-M	u_2	**24**	9,75	0	0,37	-1	0	-0,37	1	**2,4**
0	X_5	**9**	5,62	0	0,56	0	1	-0,56	0	**1,6**
$-24M$ …	$Z_j - C_j$		-9,75M …	0	-0,37M …	M	0	1,37M …	0	

Resolvemos B_k / A_{ij}

Mínimo positivo B_k / A_{ij} en X_5

Sale X_5, entra X_1

Problema incompatible: iteración #1 a #2

Tabla #1

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
3	X_2	3	0,37	1	-0,06	0	0	0,06	0	8,1
-M	u_2	24	9,75	0	0,37	-1	0	-0,37	1	2,4
0	X_5	9	5,62	0	0,56	0	1	-0,56	0	1,6
$-24M$ …	$Z_j - C_j$		-9,75M …	0	-0,37M …	M	0	1,37M …	0	

Tabla #2

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
3	X_2	2,41	0	1	-0,096	0	-0,06	0,097	0	
-M	u_2	8,39	0	0	-0,60	-1	-1,73	0,60	1	
4	X_1	1,60	1	0	0,10	0	0,18	-0,10	0	
	$Z_j - C_j$		0	0	0,6M	M	1,73M	0,4M	0	

Problema incompatible: sin solución

C_j			**4**	**3**	**0**	**0**	**0**	**-M**	**-M**	B_k/A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
3	X_2	**2,41**	0	1	-0,096	0	-0,06	0,097	0	
-M	u_2	**8,39**	0	0	-0,60	-1	-1,73	0,60	1	
4	X_1	**1,60**	1	0	0,10	0	0,18	-0,10	0	
	$Z_j - C_j$		0	0	0,6M	M	1,73M	0,4M	0	

Resolvemos el valor del funcional Z

No existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, la variable ficticia $\boldsymbol{u_2}$ sigue en la base

Encontramos caso particular de problema incompatible

Check con Python PuLP

```python
import pulp

lp01 = pulp.LpProblem("problema-incompatible", pulp.LpMaximize)

# Variables:
x = pulp.LpVariable('x', lowBound=0, cat='Continuous')
y = pulp.LpVariable('y', lowBound=0, cat='Continuous')

# Función objetivo:
lp01 += 4*x + 3*y, "Z"

# Restricciones:
lp01 += 6*x + 16*y ⩾ 48
lp01 += 12*x + 6*y ⩾ 42
lp01 += 9*x + 9*y ⩽ 36

# Resolvemos:
lp01.solve()
```

```python
# Imprimimos el status del problema:
print(pulp.LpStatus[lp01.status])

# Imprimimos las variables en su valor óptimo:
for variable in lp01.variables():
    print("%s = %.2f" % (variable.name, variable.varValue))

# Imprimimos el funcional óptimo:
print(pulp.value(lp01.objective))
```

```
>> Infeasible
>> x = 1.60
>> y = 2.40
>> 13.6
```

Status: *Infeasible*

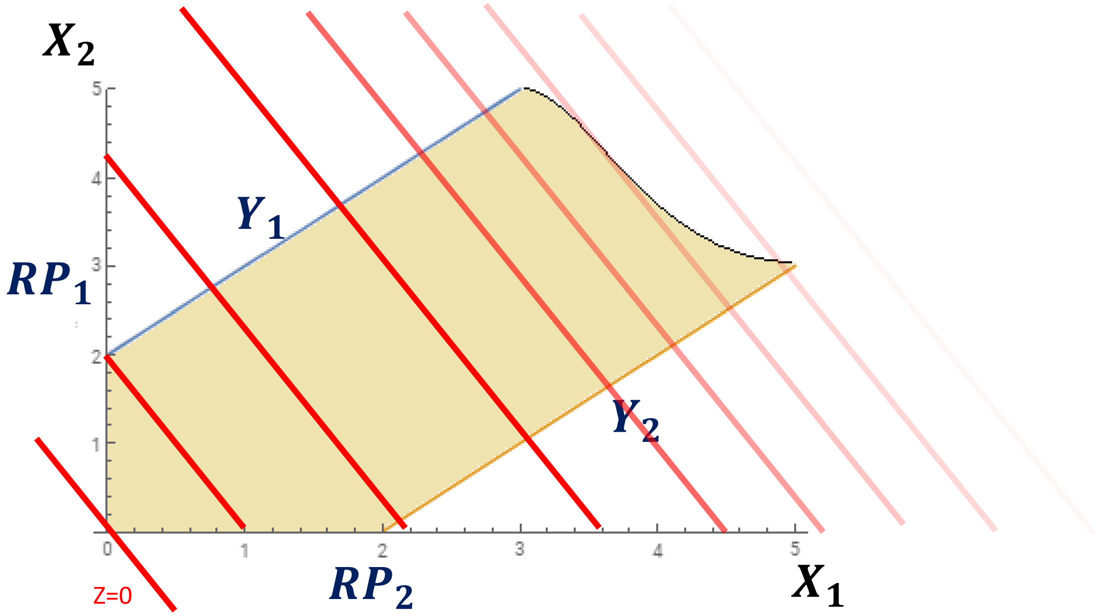
Problema no acotado

Problema no acotado

$$\boldsymbol{Max\ Z = X_1 + X_2}$$

$\boldsymbol{sujeto\ a}$:

$$\boldsymbol{Y_1: -X_1 + X_2 \leq 2}$$
$$\boldsymbol{Y_2: \quad X_1 - X_2 \geq 2}$$
$$\boldsymbol{X_1, X_2 \geq 0}$$



$\boldsymbol{RP_i}$: restricciones de positividad

Problema no acotado

$$\boldsymbol{Max\ Z = X_1 + X_2}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a}:$$
$$Y_1: -X_1 + X_2 \leq 2$$
$$Y_2: \quad X_1 - X_2 \geq 2$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Modelo Extendido

$$\boldsymbol{Max\ Z = X_1 + X_2 - Mu_1}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a}:$$
$$Y_1: \quad -X_1 + X_2 \quad +X_3 \quad = 2$$
$$Y_2: \quad X_1 - X_2 \quad -X_4 \quad +u_1 \quad = 2$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

$\mathbf{M}$: un número muy grande.
u_i: variable ficticia.

Problema no acotado

$$\boldsymbol{Max\ Z = X_1 + X_2 - Mu_1}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a:}$$

$$\begin{aligned} Y_1:&\ -X_1 + X_2 + X_3 = 2 \\ Y_2:&\ X_1 - X_2 - X_4 + u_1 = 2 \\ &X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Modelo Extendido Matricial

$$\boldsymbol{Max\ Z = C^T X}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a:}$$

$$\boldsymbol{AX = b}$$

$$\boldsymbol{X \geq 0}$$

Valores de matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -M \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ u_1 \end{bmatrix}$$

Problema no acotado

$$\boldsymbol{Max\ Z = X_1 + X_2 - \mathrm{M}u_1}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a}:$$

$$\boldsymbol{Y_1}:\ \boldsymbol{-X_1 + X_2 \quad +X_3 \qquad\qquad\qquad = 2}$$
$$\boldsymbol{Y_2}:\ \boldsymbol{X_1 - X_2 \qquad\qquad -X_4 \quad +u_1 \quad = 2}$$
$$\boldsymbol{X_1, X_2 \geq 0}$$

$$\boldsymbol{Max\ Z = C^T X}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a}:$$
$$\boldsymbol{AX = b}$$
$$\boldsymbol{X \geq 0}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -M \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ u_1 \end{bmatrix}$$

C_j			1	1	0	0	-M	B_k/A_{ij}
$C_j\ Bas$	$X_j\ Bas$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	u_1	
0	X_3	2	-1	1	1	0	0	
-M	u_1	2	1	-1	0	-1	1	
Z	$Z_j - C_j$							

Problema no acotado: iteración #0

C_j			1	1	0	0	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	u_1	
0	X_3	2	-1	1	1	0	0	
-M	u_1	2	1	-1	0	-1	1	
$-2M$	$Z_j - C_j$		-M …	M …	0	M	0	

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡Z puede mejorar!

Seleccionamos X_1 para entrar a la base

Problema no acotado: iteración #0

C_j			1	1	0	0	-M	$B_k\ /A_{ij}$
$\boldsymbol{C_j\ Base}$	$\boldsymbol{X_j\ Base}$	$\boldsymbol{B_k}$	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{X_2}$	$\boldsymbol{X_3}$	$\boldsymbol{X_4}$	$\boldsymbol{u_1}$	
0	$\boldsymbol{X_3}$	2	-1	1	1	0	0	-2
-M	$\boldsymbol{u_1}$	2	1	-1	0	-1	1	2
$\boldsymbol{-2M}$	$Z_j - C_j$		-M …	M …	0	M	0	

Resolvemos $B_k\ /A_{ij}$

Mínimo positivo $B_k\ /A_{ij}$ en $\boldsymbol{u_1}$

Sale $\boldsymbol{u_1}$, entra $\boldsymbol{X_1}$

Problema no acotado: iteración #0 a #1

Tabla #0

C_j			1	1	0	0	-M	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	u_1	
0	X_3	2	-1	1	1	0	0	-2
-M	u_1	2	1	-1	0	-1	1	2
$-2M$	$Z_j - C_j$		-M …	M …	0	M	0	

Tabla #1

C_j			1	1	0	0	-M	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	u_1	
0	X_3	4	0	0	1	-1	1	
1	X_1	2	1	-1	0	-1	1	
	$Z_j - C_j$		0	~ 0	0	~ 0	M …	

Problema no acotado: iteración #1

C_j			1	1	0	0	-M	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	u_1	
0	X_3	4	0	0	1	-1	1	
1	X_1	2	1	-1	0	-1	1	
2	$Z_j - C_j$		0	~ 0	0	~ 0	M …	

Resolvemos el valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡Z puede mejorar!

X_2 podría entrar a la base

Problema no acotado: sin solución

C_j			1	1	0	0	-M	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	u_1	
0	X_3	**4**	0	0	1	-1	1	∞
-M	X_1	**2**	1	-1	0	-1	1	**-2**
	$Z_j - C_j$		0	~ 0	0	~ 0	M …	

Resolvemos B_k / A_{ij}

No existe mínimo positivo B_k / A_{ij}, problema no acotado.

Check con Python PuLP

```python
import pulp

lp01 = pulp.LpProblem("problema-no-acotado", pulp.LpMaximize)

# Variables:
x = pulp.LpVariable('x', lowBound=0, cat='Continuous')
y = pulp.LpVariable('y', lowBound=0, cat='Continuous')

# Función objetivo:
lp01 += x + y, "Z"

# Restricciones:
lp01 += -x + y ⩽ 2
lp01 +=  x - y ⩾ 2

# Resolvemos:
lp01.solve()
```

```python
# Imprimimos el status del problema:
print(pulp.LpStatus[lp01.status])

# Imprimimos las variables en su valor óptimo:
for variable in lp01.variables():
    print("%s = %.2f" % (variable.name, variable.varValue))

# Imprimimos el funcional óptimo:
print(pulp.value(lp01.objective))
```

```
>> Unbounded
>> x = 0.00
>> y = 0.00
>> 0.0
```

Status: *Unbounded*