Introducción a modelo de Flujo de Mínimo Costo: caso camino más corto

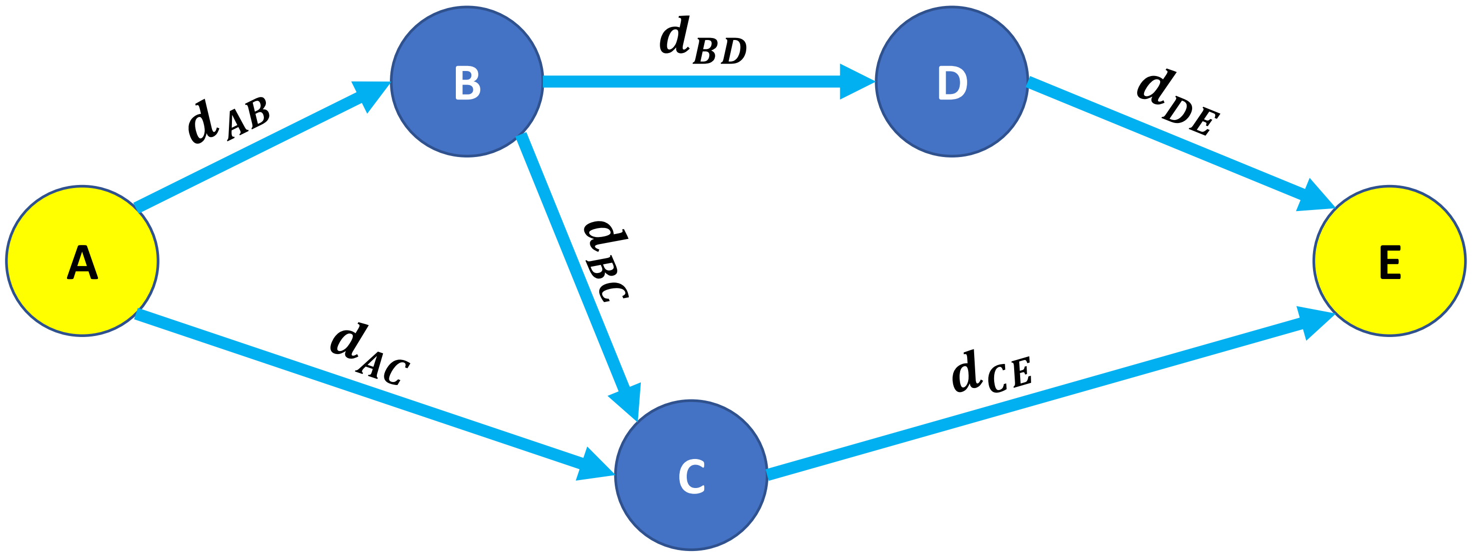
Rodrigo Maranzana

Camino más corto como FMC

Modelo de programación matemática: Flujo de Mínimo Costo

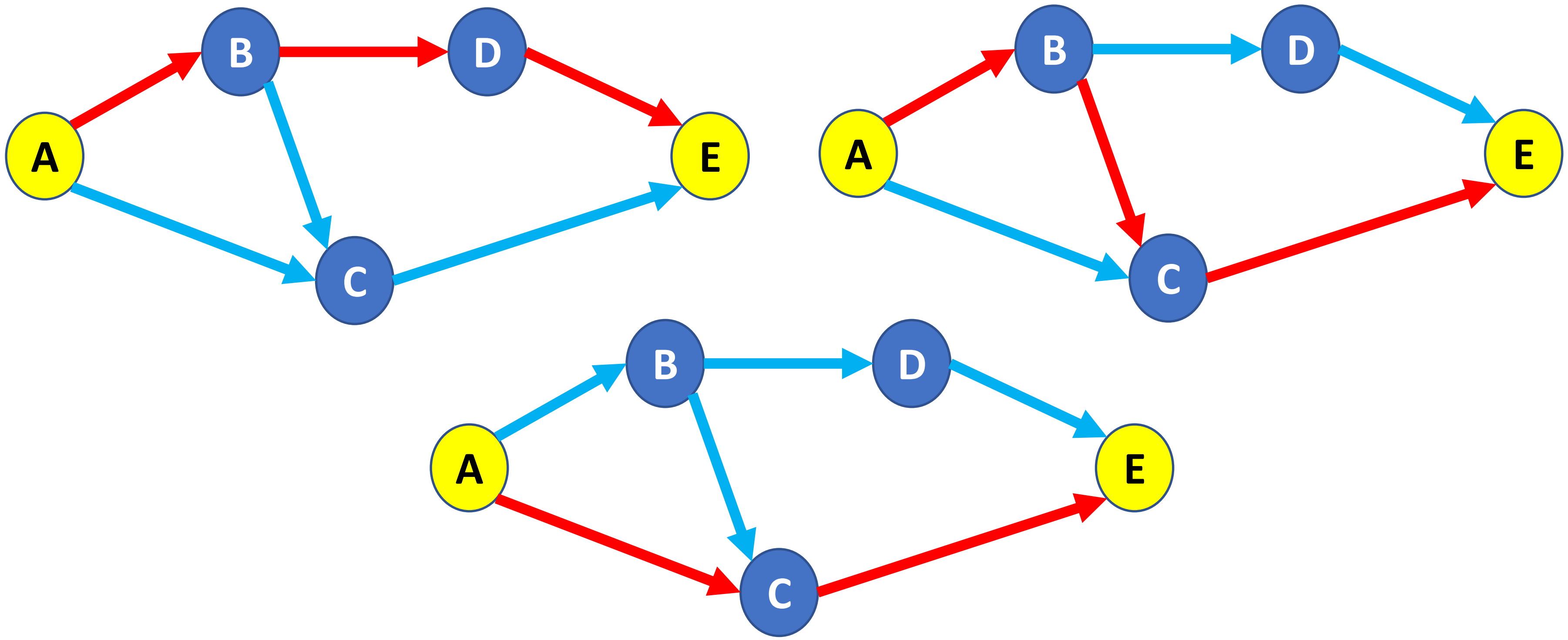
- Resolución simple por algoritmos generalistas.
- Interés matemático teórico.

Grafo direccionado

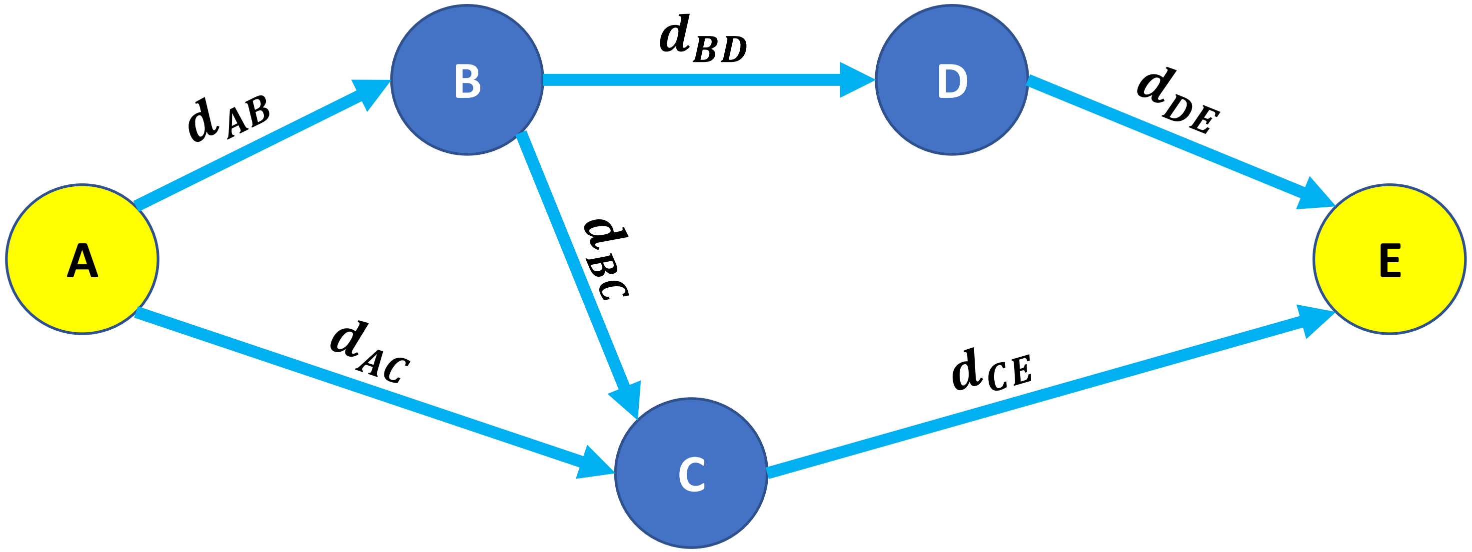


Caminos en grafos direccionados

Caminos posibles:



Caminos en grafos direccionados



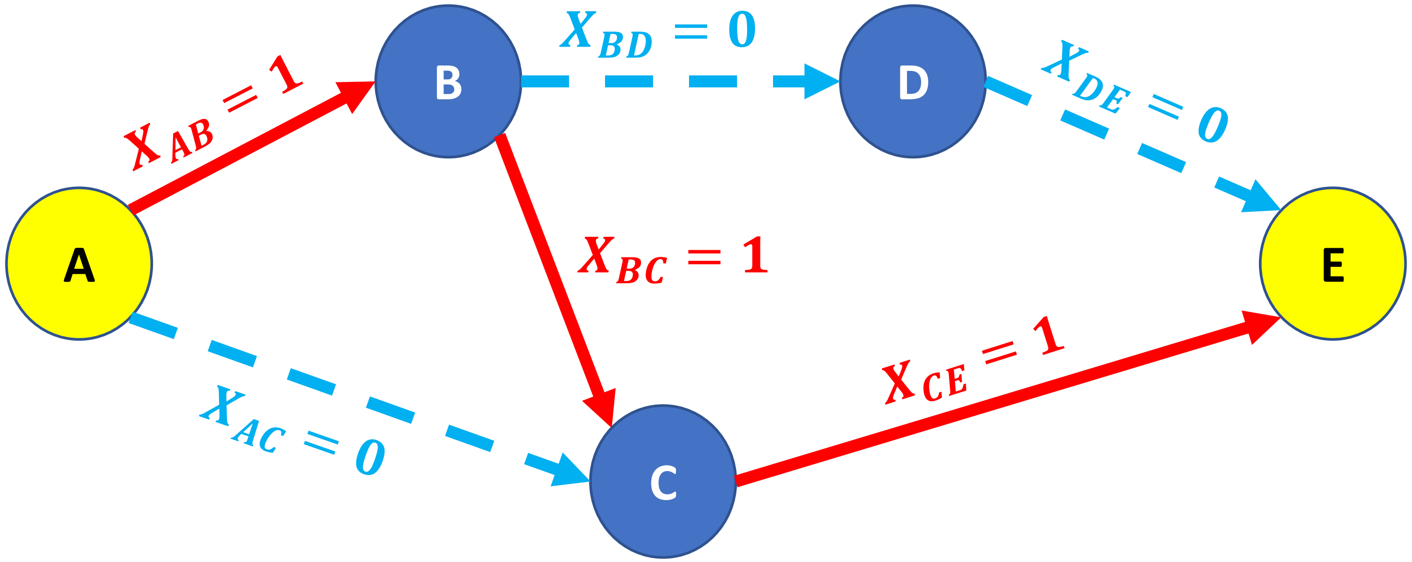
$\boldsymbol{X_{ij}}$ Variable de decisión binaria de ir por camino $\boldsymbol{i} \rightarrow \boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{X_{ij}}$ = 0, no elijo el camino

$\boldsymbol{X_{ij}}$ = 1, elijo el camino

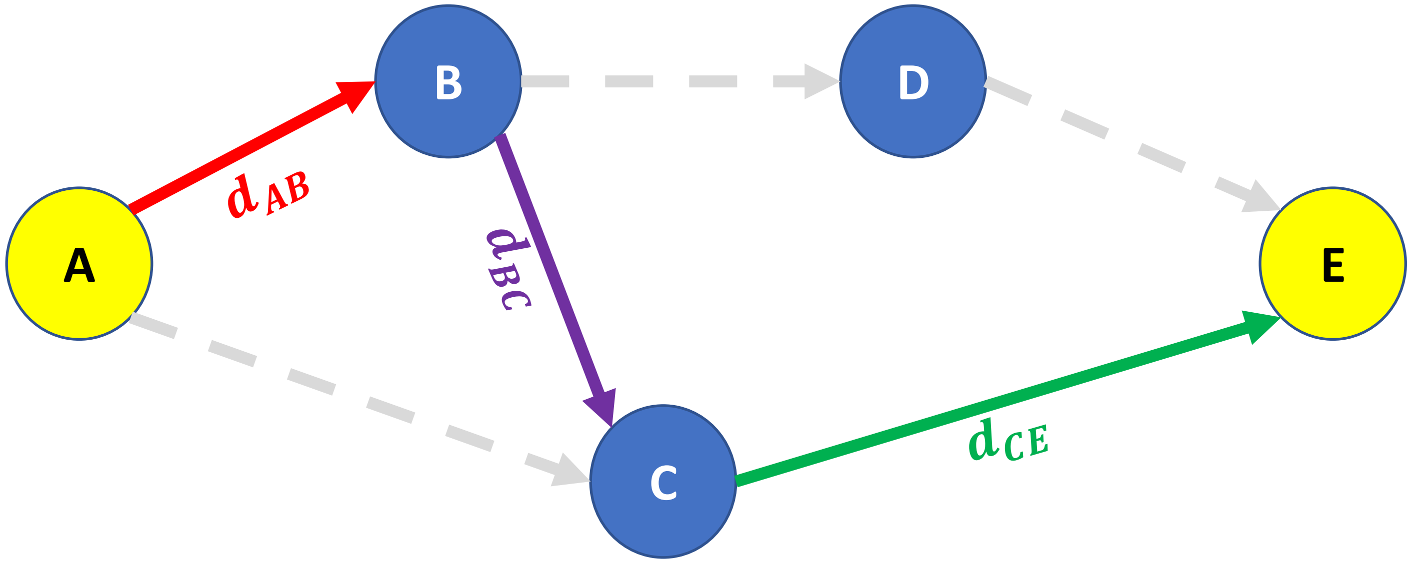
Caminos en grafos direccionados

Veamos un camino:



Caminos en grafos direccionados

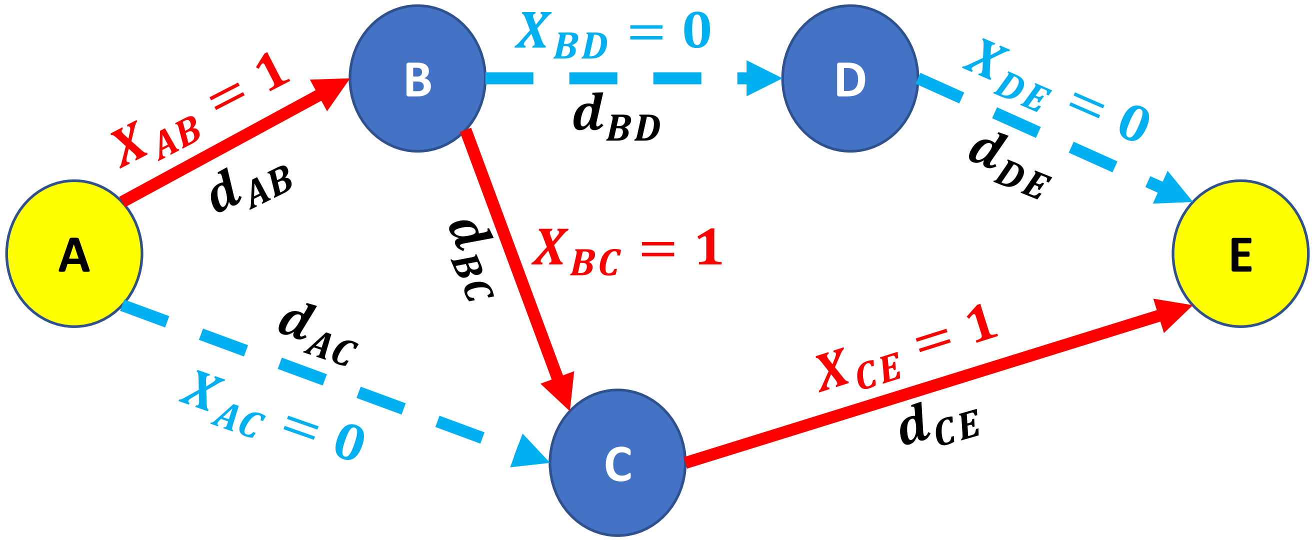
Cálculo de distancia del camino:



$$d_{TOTAL} = d_{AB} + d_{AB} + d_{CE}$$

Caminos en grafos direccionados

Generalización del cálculo de distancia del camino:



$$d_{TOTAL} = X_{AB} * d_{AB} + X_{BC} * d_{BC} + X_{CE} * d_{CE} + \\ + X_{BD} * d_{BD} + X_{AC} * d_{AC} + X_{DE} * d_{DE}$$

Caminos en grafos direccionados

Generalización del cálculo de distancia del camino:

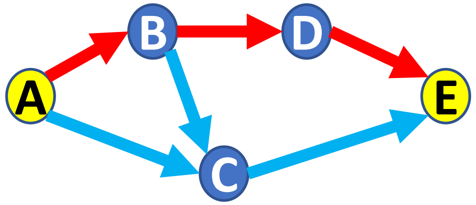
$$d_{TOTAL} = \overset{1}{X_{AB}} * d_{AB} + \overset{1}{X_{BC}} * d_{BC} + \overset{1}{X_{CE}} * d_{CE} +$$
$$+ \underset{0}{X_{BD}} * d_{BD} + \underset{0}{X_{AC}} * d_{AC} + \underset{0}{X_{DE}} * d_{DE}$$

$$d_{TOTAL} = d_{AB} + d_{AB} + d_{CE}$$

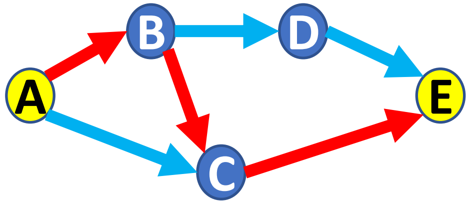
Caminos en grafos direccionados

$$d_{TOTAL} = X_{AB} * d_{AB} + X_{BC} * d_{BC} + X_{CE} * d_{CE} +$$
$$+ X_{BD} * d_{BD} + X_{AC} * d_{AC} + X_{DE} * d_{DE}$$

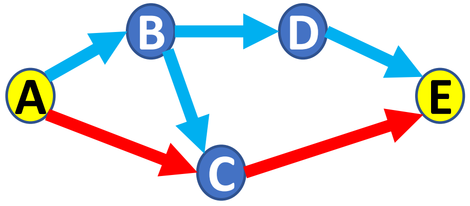
$$X_{AB} = X_{BD} = X_{DE} = 1$$
$$X_{AC} = X_{BC} = X_{CE} = 0$$



$$X_{AB} = X_{BC} = X_{CE} = 1$$
$$X_{AC} = X_{BD} = X_{DE} = 0$$

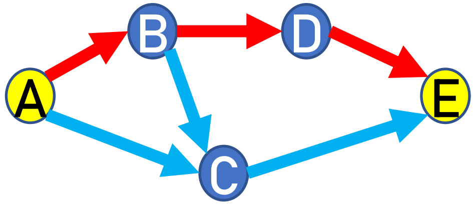


$$X_{AC} = X_{CE} = 1$$
$$X_{AB} = X_{BC} = X_{BD} = X_{DE} = 0$$

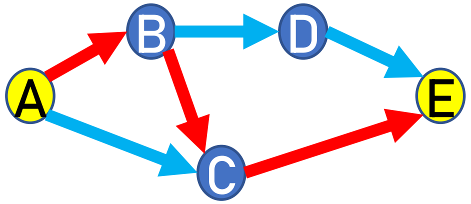


Caminos en grafos direccionados

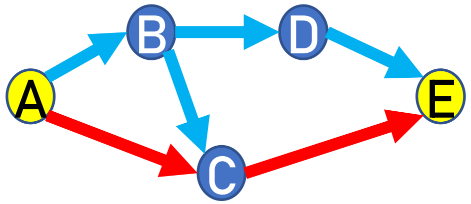
Cálculo del camino más corto:



$d_{TOTAL\,1}$



$d_{TOTAL\,2}$



$d_{TOTAL\,3}$

$$Min\,\{d_{TOTAL\,1}, d_{TOTAL\,2}, d_{TOTAL\,3}\}$$

Función objetivo: camino de mínima distancia

$$\boldsymbol{d_{TOTAL_k} = X_{AB} * d_{AB} + X_{BC} * d_{BC} + X_{CE} * d_{CE} +}$$
$$\boldsymbol{+X_{BD} * d_{BD} + X_{AC} * d_{AC} + X_{DE} * d_{DE}}$$

$$\big\downarrow$$

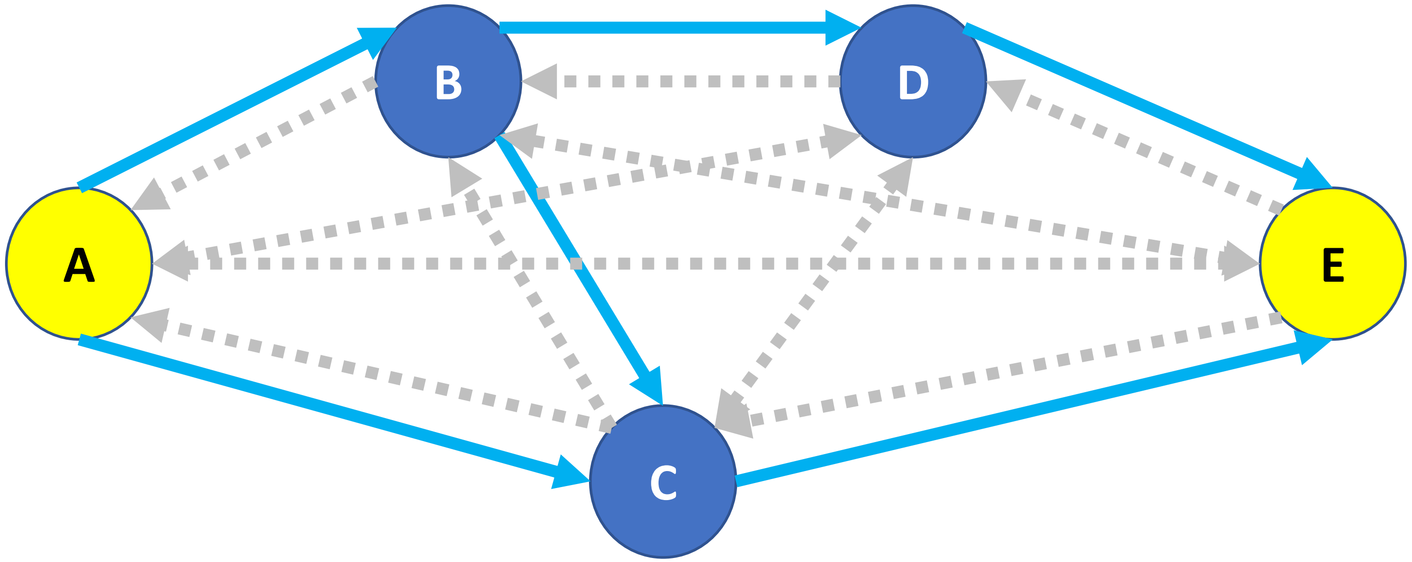
Generalización para encontrar un camino “k”

$$\boldsymbol{d_{TOTAL_k} = \sum_{i} \sum_{j} X_{ij} d_{ij}}$$

¿Qué grafo se adapta a esta ecuación?

Caminos en grafos direccionados

Generalización del grafo sin ciclos:

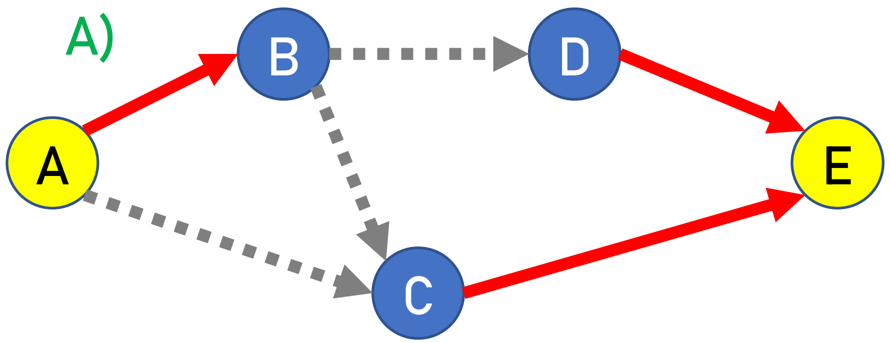


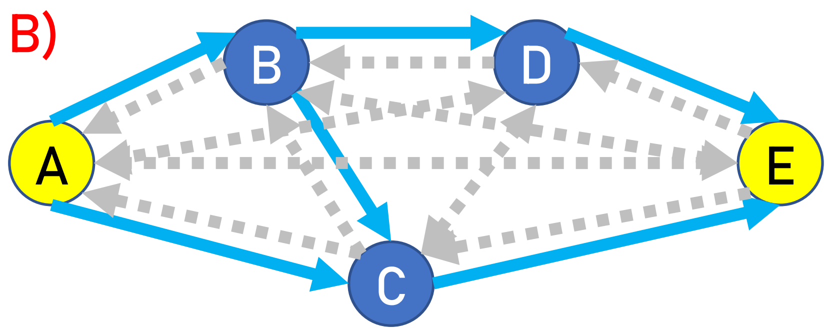
Arcos siempre apagados

Caminos en grafos direccionados

Problemas de la ecuación anterior:

- A) ¿Cómo explico al modelo qué es un camino?
- B) ¿Cómo le digo al modelo qué arcos existen?

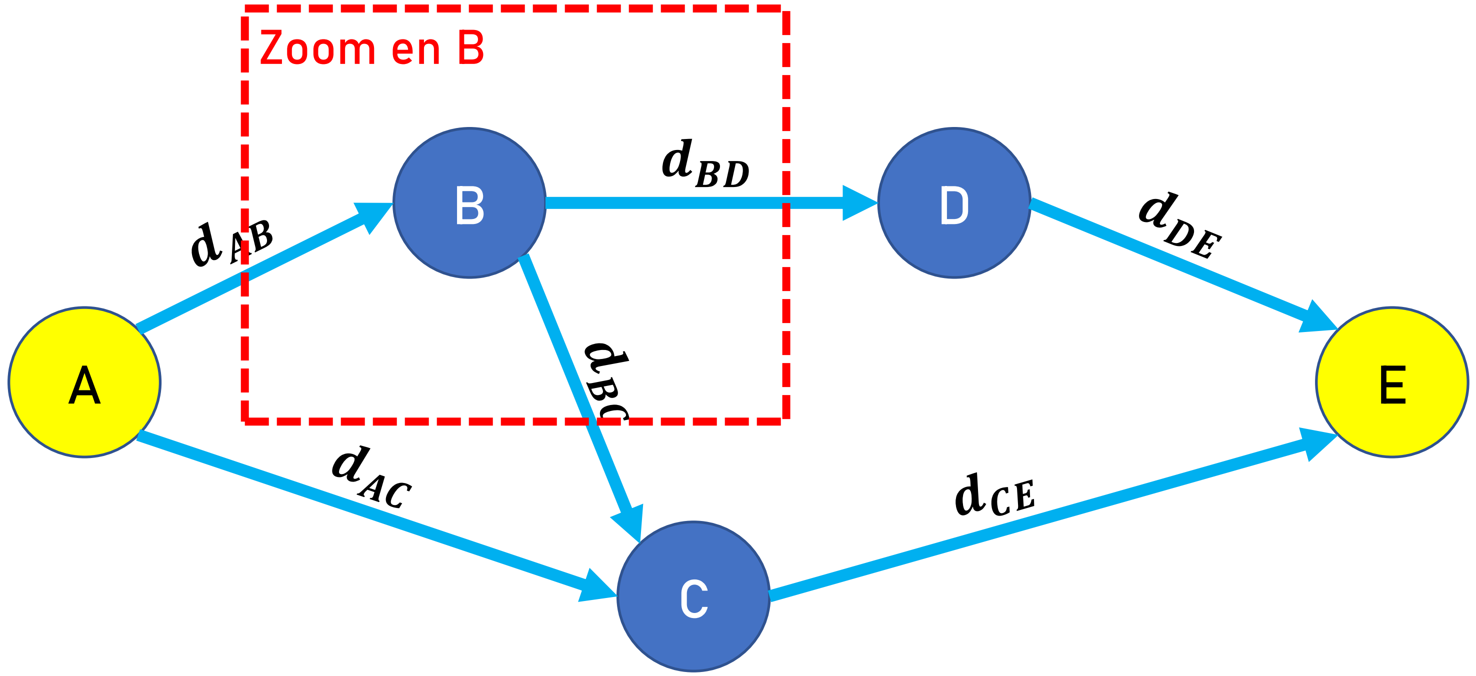




La clave está en agregar: Restricciones

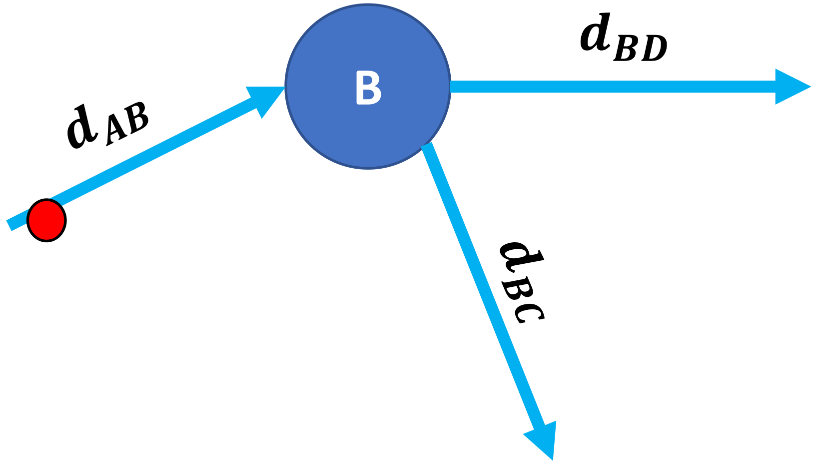
Flujo de un nodo

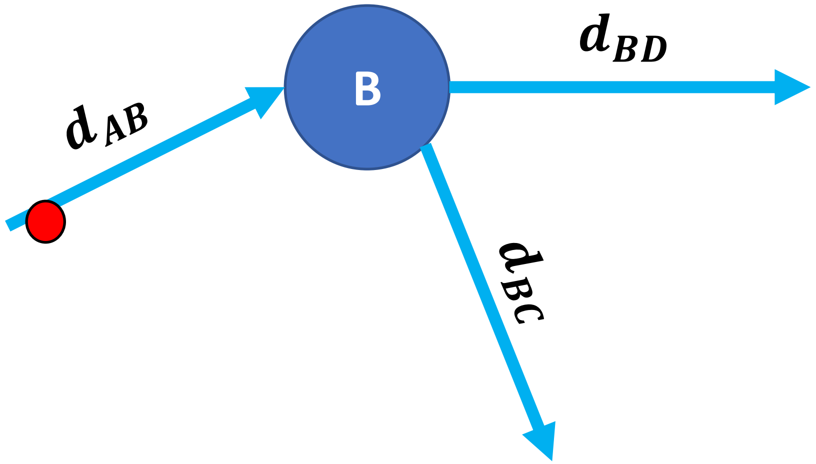
Resolvemos problema A



Flujo de un nodo

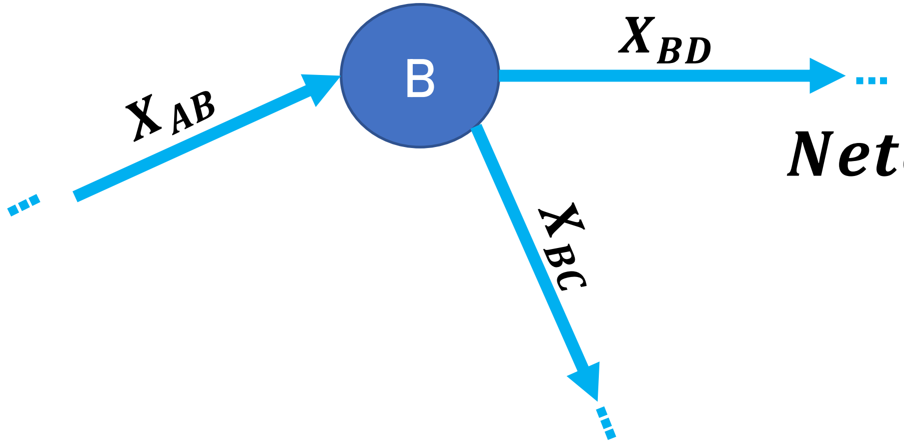
Posibilidades de un agente viajando por el camino:





Flujo de un nodo

Entradas y salidas de B (1 persona viaja):



$$Neto_B = Salidas_B - Entradas_B$$

$$0 = Salidas_B - Entradas_B$$

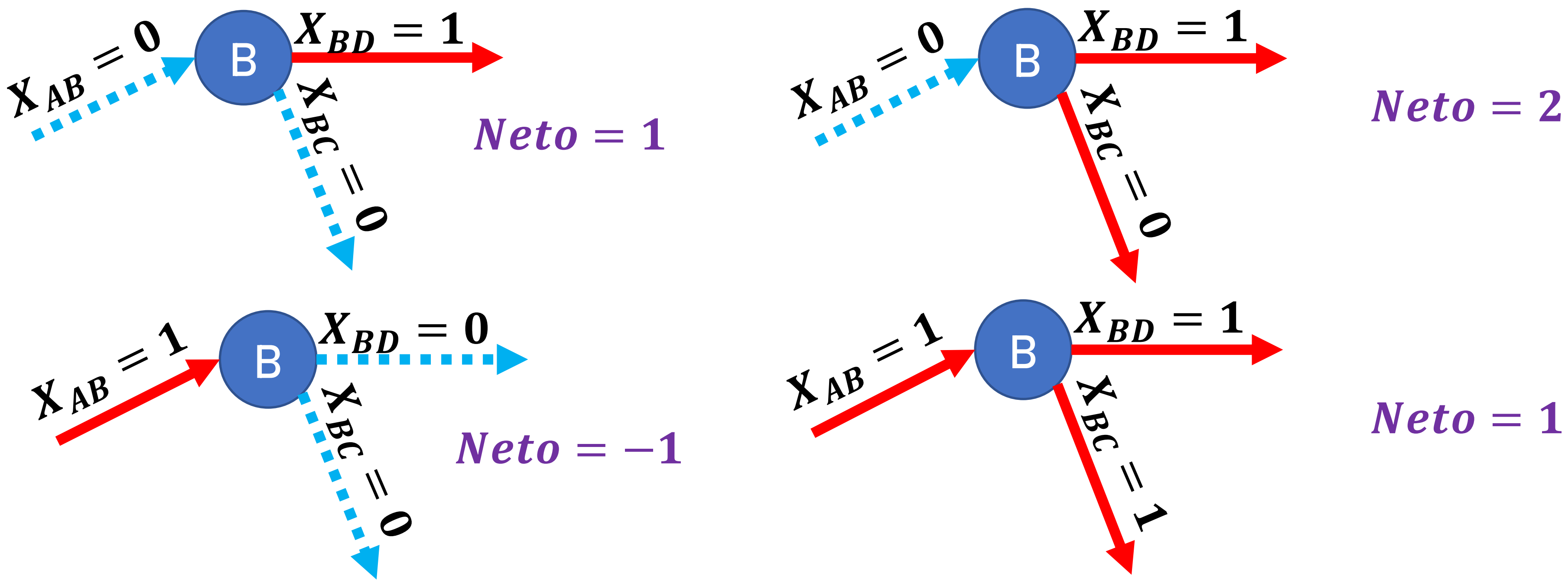
$$0 = X_{BD} + X_{BC} - X_{AB}$$

Flujo de un nodo

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{Salidas_B} - \boldsymbol{Entradas_B}$$

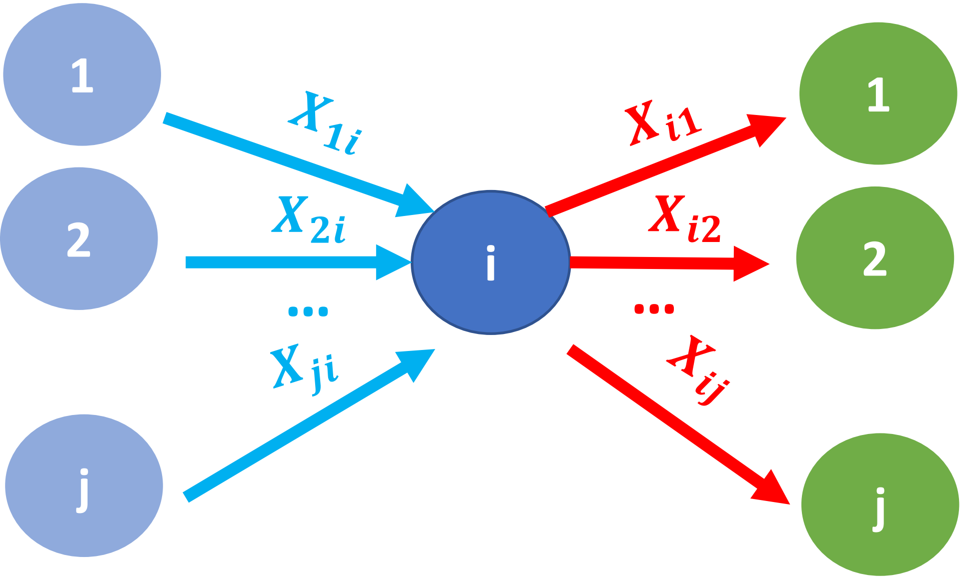
Flujo de un nodo

$$0 \neq Salidas_B - Entradas_B \text{ (no se cumple restricción)}$$



Flujo de un nodo

Generalizamos la restricción



$$0 = Salidas_i - Entradas_i$$

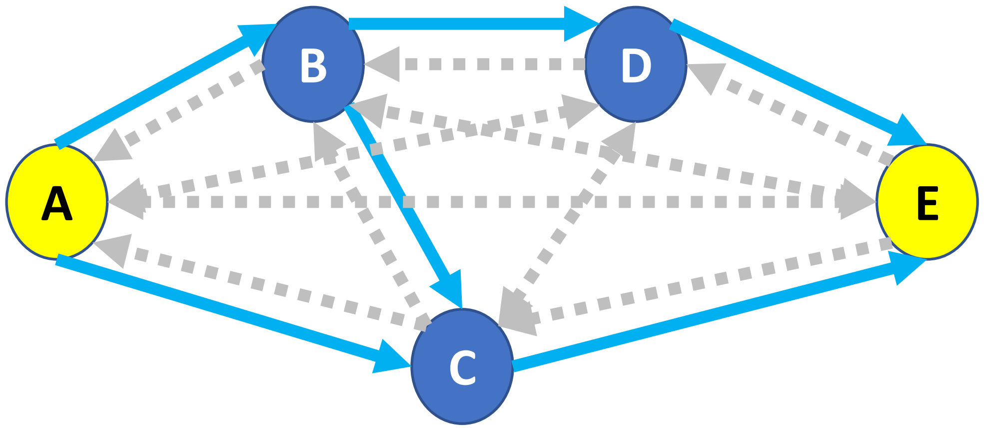
$$0 = \sum_j X_{ij} - \sum_j X_{ji} \qquad ; \forall i$$

¡Pero con esto surge el mismo **problema B!**

¿Cómo le digo qué arcos existen?

Arquitectura de un grafo: matriz nodo-nodo

Generalización del grafo sin ciclos:



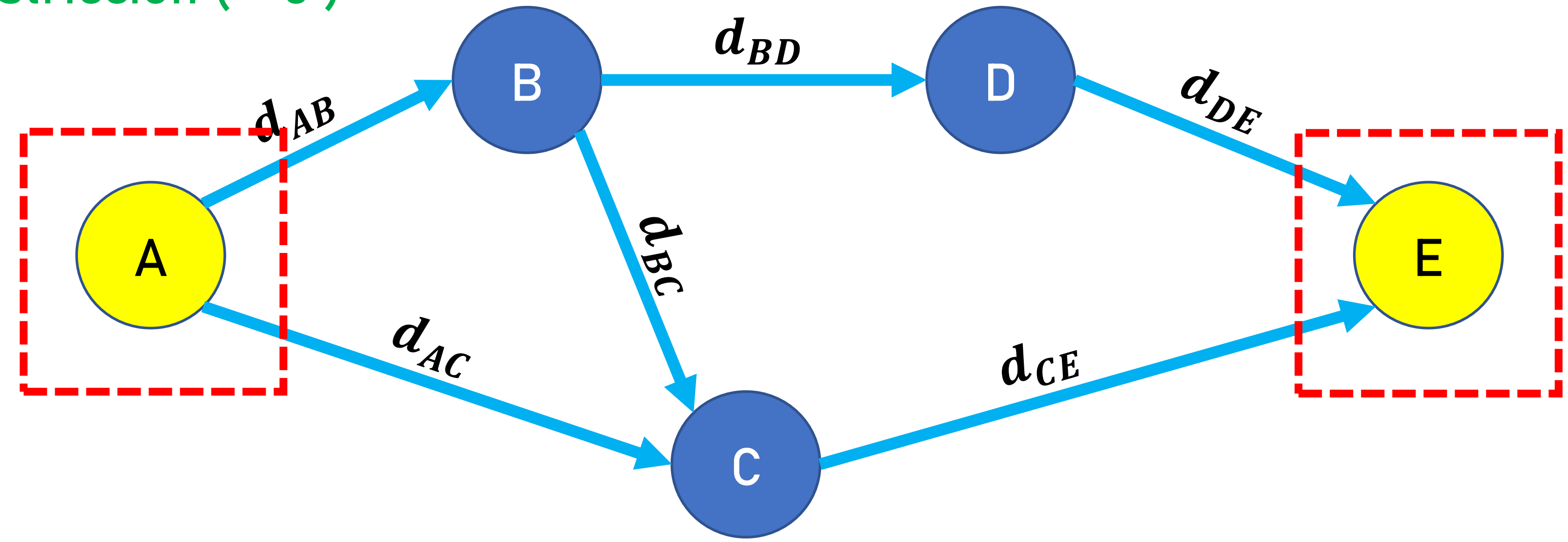
$$A = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ A & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ D & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\mathbf{0} = \sum_{j,\ ij \subset A} X_{ij} - \sum_{j,\ ji \subset A} X_{ji} \quad ; \forall i$$

Flujo de nodos extremos

Un problema más:

Los nodos A (inicio) y E (final) no tienen forma de cumplir la restricción (= 0)



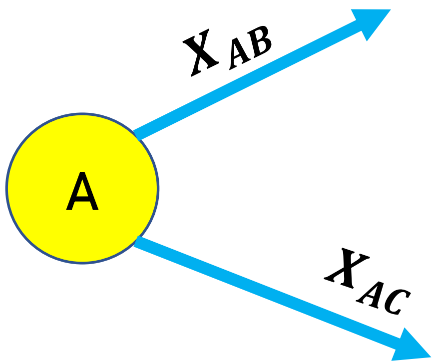
Flujo de nodos extremos

$$\color{red}{\mathbf{1}} = \boldsymbol{Salidas_A}$$

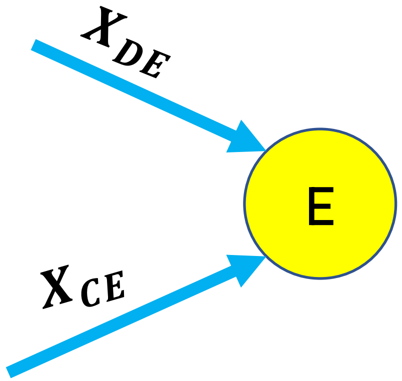
$$\color{red}{\mathbf{1}} = \boldsymbol{X_{AB} + X_{AC}}$$

$$\color{red}{\mathbf{-1}} = \boldsymbol{Entradas_E}$$

$$\color{red}{\mathbf{-1}} = \boldsymbol{-X_{DE} - X_{CE}}$$



Elegir solo un arco



1 = “Sale de A”

-1 = “Llega a E”

Restricción de flujo o balance

Generalizamos la restricción

$$\boldsymbol{b_i = \sum_{j,\ ij \subset A} X_{ij} - \sum_{j,\ ji \subset A} X_{ji}} \quad ; \forall \boldsymbol{i}$$

$\boldsymbol{b_i} = 1$ si es inicio
$\boldsymbol{b_i} = -1$ si es final
$\boldsymbol{b_i} = \mathbf{0}$ si es intermedio

Flujo de Mínimo Costo (FMC) para camino más corto

$$\boldsymbol{Min \sum_{i} \sum_{j} X_{ij} d_{ij}}$$

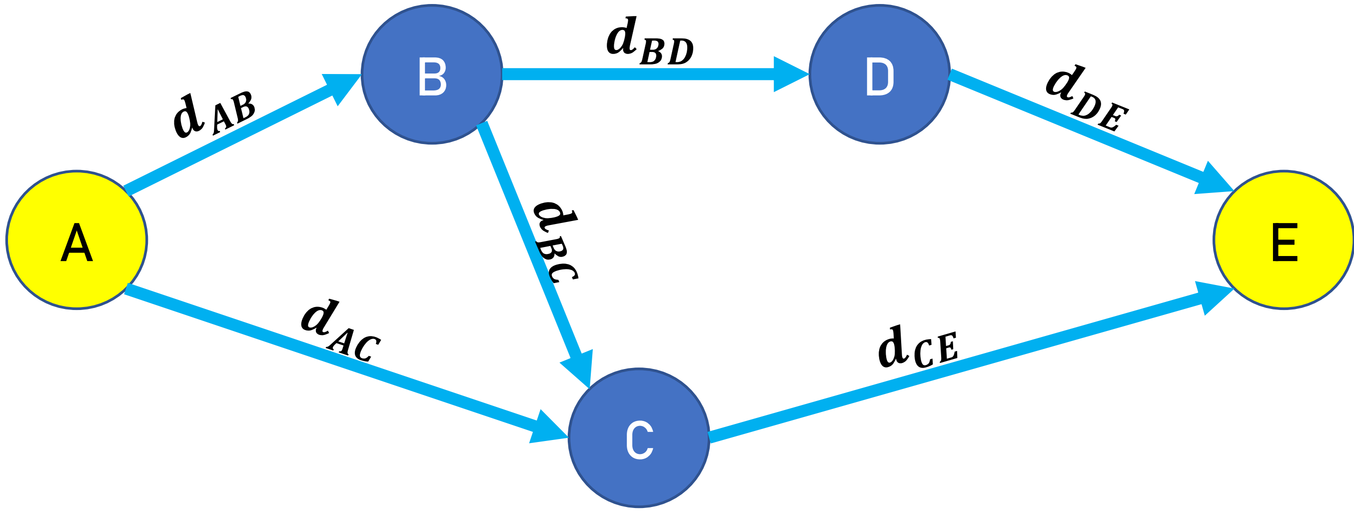
st:

$$\boldsymbol{b_i = \sum_{j,\ \ ij \subset A} X_{ij} - \sum_{j,\ \ ji \subset A} X_{ji} \quad ; \forall i}$$

$b_i = 1$ si es inicio
$b_i = -1$ si es final
$b_i = 0$ si es intermedio

Forma matricial de FMC: función objetivo

Pensamos las distancias y los arcos como vectores:



$$C^T = [d_{AB} \quad d_{AC} \quad d_{BD} \quad d_{BC} \quad d_{DE} \quad d_{CE}]$$

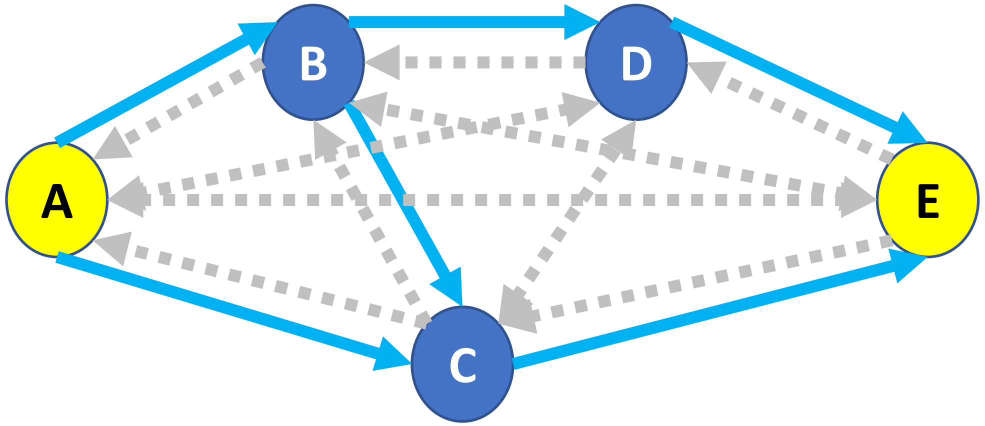
Dim(nº arcos)

$$X = \begin{bmatrix} x_{AB} \\ x_{AC} \\ x_{BD} \\ x_{BC} \\ x_{DE} \\ x_{CE} \end{bmatrix}$$

Dim(nº arcos)

$$\boldsymbol{Min} \sum_{i} \sum_{j} \boldsymbol{X_{ij} d_{ij}} \longrightarrow \boxed{Min\ C^T X}$$

Matriz nodo-nodo a nodo-arco



$$NN = \begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ C & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ D & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \longrightarrow A = \begin{array}{c|cccccc} & AB & AC & BD & BC & DE & CE \\ \hline A & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ C & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ D & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}$$

Matriz nodo-nodo
Dim(nº nodos, nº nodos)

Matriz nodo-arco
Dim(nº nodos, nº arcos)

Forma matricial de FMC: restricciones

$$X = \begin{bmatrix} x_{AB} \\ x_{AC} \\ x_{BD} \\ x_{BC} \\ x_{DE} \\ x_{CE} \end{bmatrix}$$

Dim(nº arcos)

$$b = \begin{bmatrix} b_A \\ b_B \\ b_C \\ b_D \\ b_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dim(nº nodos)

$b_i = 1$ si es inicio
$b_i = -1$ si es final
$b_i = 0$ si es intermedio

$$\boldsymbol{b_i} = \sum_{j,\ ij \subset A} \boldsymbol{X_{ij}} - \sum_{j,\ ji \subset A} \boldsymbol{X_{ji}} \quad ; \forall \boldsymbol{i}$$

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{AC} & \boldsymbol{BD} & \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{DE} & \boldsymbol{CE} \\ \boldsymbol{A} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{B} & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boldsymbol{C} & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ \boldsymbol{D} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ \boldsymbol{E} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}$$

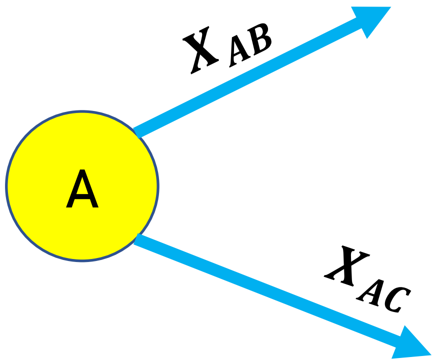
Dim(nº nodos, nº arcos)

$$\boxed{AX = b}$$

Funcionamiento de restricción matricial

$$A \qquad X \quad = \quad b$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & AB & AC & BD & BC & DE & CE \\
\hline
A & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
C & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
D & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
E & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
x_{AB} \\ x_{AC} \\ x_{BD} \\ x_{BC} \\ x_{DE} \\ x_{CE}
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{c}
1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1
\end{array}
$$



$$\sum_{j,\ ij\subset A} X_{ij} - \sum_{j,\ ji\subset A} X_{ji} = b_i \quad ;\ \forall i$$

$$X_{AB} + X_{AC} = 1$$

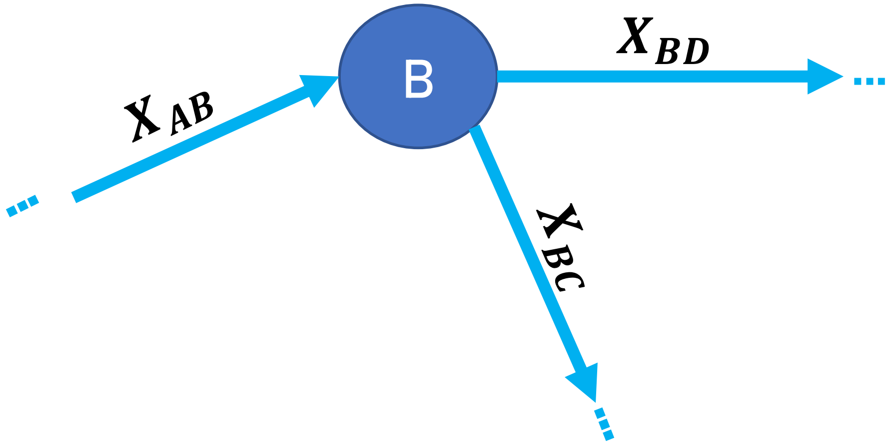
Funcionamiento de restricción matricial

$$A \qquad\qquad X \quad = \quad b$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & AB & AC & BD & BC & DE & CE \\
\hline
A & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
C & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
D & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
E & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{array}
\quad
\begin{bmatrix} x_{AB} \\ x_{AC} \\ x_{BD} \\ x_{BC} \\ x_{DE} \\ x_{CE} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

$$\sum_{j,\ ij\subset A} X_{ij} - \sum_{j,\ ji\subset A} X_{ji} = b_i \quad ; \forall i$$

$$X_{BD} + X_{BC} - X_{AB} = 0$$



UTN.BA

Flujo de Mínimo Costo (FMC) para camino más corto

$$Min \sum_i \sum_j X_{ij} d_{ij}$$

st:

$$b_i = \sum_{j,\ \ ij \subset A} X_{ij} - \sum_{j,\ \ ji \subset A} X_{ji} \quad ; \forall i$$

$$Min\ C^T X$$

st:

$$AX = b$$

$b_i = 1$ si es inicio
$b_i = -1$ si es final
$b_i = 0$ si es intermedio

Condición de positividad: $X \geq 0$

Características

En un FMC:

- Función objetivo lineal.
- Restricciones lineales.
- Variables continuas.

El modelo FMC es de programación lineal.

Características

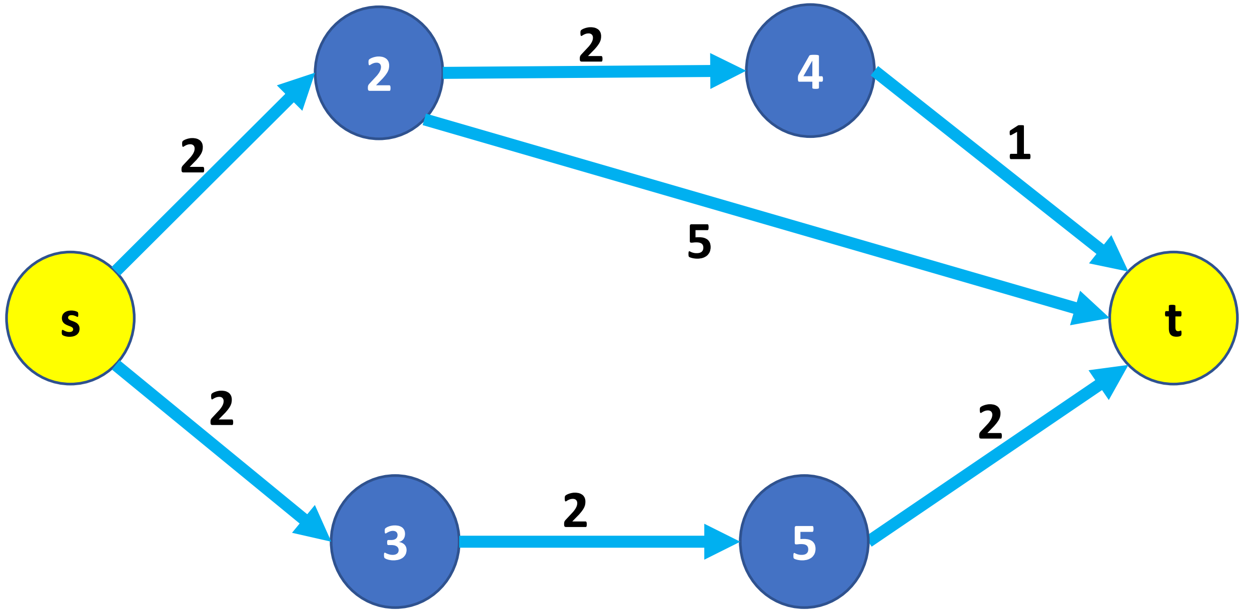
FMC no es únicamente para camino más corto

- Al modificar parámetros en A, b y C, se pueden modelizar muchos casos de optimización de redes:
  - Camino más corto
  - Transporte
  - Transshipment
  - Maximo flujo
  - Asignación
  - Programación de la producción
  - Planificación de proyectos
  - Otros

Ejemplo

Resolver el camino más corto desde el nodo s al nodo t; respetando la arquitectura del siguiente grafo.

1. *Armar modelo algebraico.*
2. *Armar modelo matricial.*
3. *Resolver ambos modelos en python.*

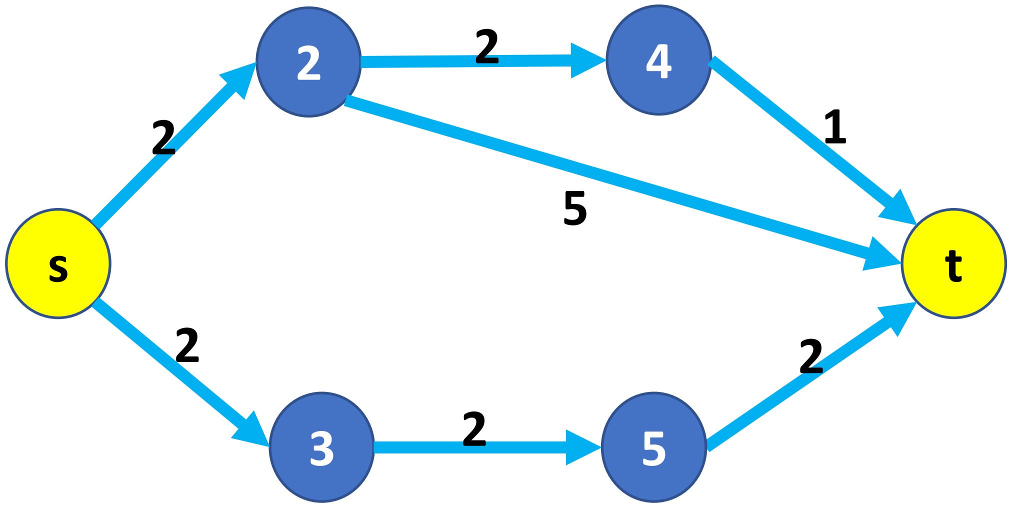


1) Modelo FMC matricial

$$Min\ C^T X$$

st:

$$AX = b$$
$$X \geq 0$$



Matriz A nodo-arco

$$A = \begin{array}{c|ccccccc} & s2 & s3 & 24 & 2t & 35 & 4t & 5t \\ s & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}$$

Vector b

$$b = \begin{bmatrix} b_s \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vector C

$$C = \begin{bmatrix} c_{s2} \\ c_{s3} \\ c_{24} \\ c_{2t} \\ c_{35} \\ c_{4t} \\ c_{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_{s2} \\ x_{s3} \\ x_{24} \\ x_{2t} \\ x_{35} \\ x_{4t} \\ x_{5t} \end{bmatrix}$$

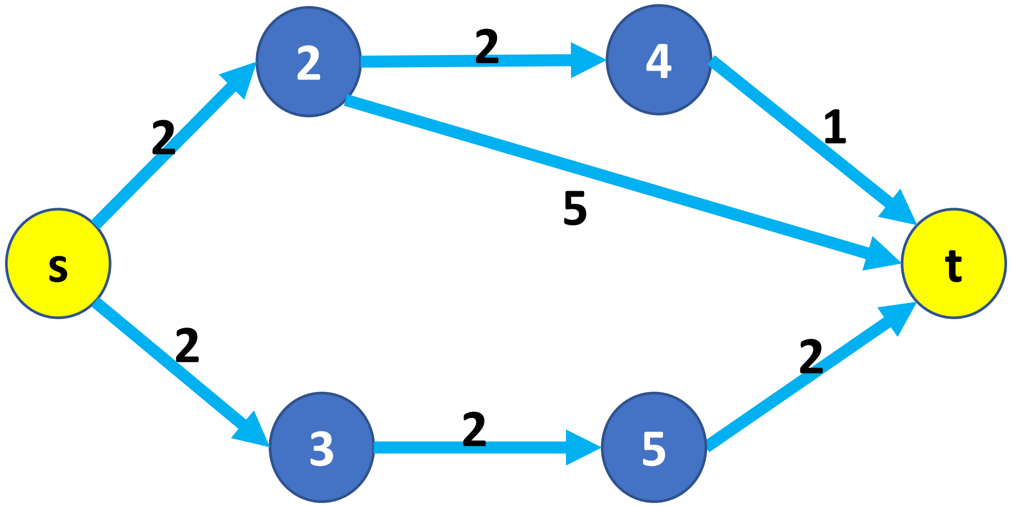
2) Modelo FMC algebraico

$$Min \sum_i \sum_j X_{ij} d_{ij}$$

st:

$$b_i = \sum_{j,\ ij \subset A} X_{ij} - \sum_{j,\ ji \subset A} X_{ji} \quad ; \forall i$$

$$X \geq 0$$



$$Min\ 2x_{s2} + 2x_{s3} + 2x_{24} + 5\mathrm{x}_{2\mathrm{t}} + 2\mathrm{x}_{35} + 1\mathrm{x}_{4\mathrm{t}} + 2\mathrm{x}_{5\mathrm{t}}$$

st:

s $\quad x_{s2} + x_{s3} = 1$

2 $\quad x_{24} + x_{2t} - x_{s2} = 0$

3 $\quad x_{35} - x_{s3} = 0$

4 $\quad x_{4t} - x_{24} = 0$

5 $\quad x_{5t} - x_{35} = 0$

2 $\quad -x_{2t} - x_{4t} - x_{5t} = -1$

$$x_{ij} \geq 0$$

3) Modelo FMC matricial en python

Usamos la librería numpy para cargar vectores y matrices

Matriz A nodo-arco

$$A = \begin{array}{c|ccccccc} & s2 & s3 & 24 & 2t & 35 & 4t & 5t \\ \hline s & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ t & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}$$

```python
import numpy

# Matriz nodo-arco.
NN = np.array(
 [[ 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0],
  [-1, 0, 1, 1, 0, 0, 0],
  [ 0,-1, 0, 0, 1, 0, 0],
  [ 0, 0,-1, 0, 0, 1, 0],
  [ 0, 0, 0, 0,-1, 0, 1],
  [ 0, 0, 0,-1, 0,-1,-1]]
)
```

3) Modelo FMC matricial en python

Usamos la librería numpy para cargar vectores y matrices

Vector b

$$b = \begin{bmatrix} b_s \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vector C

$$C = \begin{bmatrix} c_{s2} \\ c_{s3} \\ c_{24} \\ c_{2t} \\ c_{35} \\ c_{4t} \\ c_{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

```python
# Vector de costos o distancias.
C = np.array([2, 2, 2, 5, 2, 1, 2])

# Vector de términos del lado derecho.
beq = np.array([1, 0, 0, 0, 0, -1]
```

3) Modelo FMC matricial en python

Cargamos las cotas del problema

$$X \geq 0$$

```python
# Obtenemos cantidad de arcos:
dim_arcos = A.shape[1]

# Cargamos las cotas x≥0 como lista de tuplas, una para cada arco:
cotas = []

for arco_i in range(0, dim_arcos):

    cotas.append((0, np.inf))
```

3) Modelo FMC matricial en python

Resolvemos con scipy.optimize.linprog

```
# Resolvemos con scipy linprog:
res = linprog(C, A_eq=A, b_eq=b, bounds=cotas)

# Imprimimos solución:
print(f'Arcos seleccionados: {res.x}')
print(f'Mínima distancia: {res.fun}')
```

$$Min\ \boxed{C^T} X$$

st:

$$\boxed{A} X = \boxed{b}$$

$$\boxed{X \geq 0}$$

3) Modelo FMC matricial en python

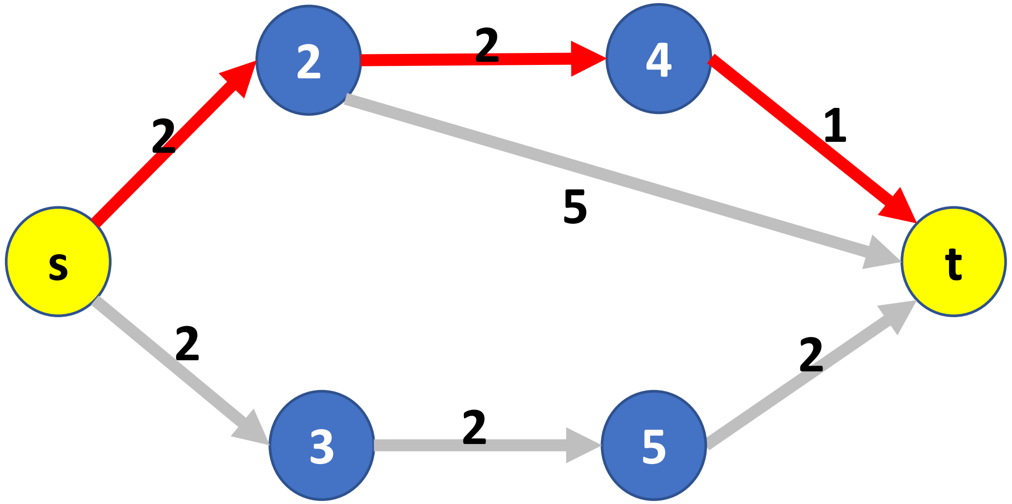
Resolvemos con scipy.optimize.linprog

```python
# Resolvemos con scipy linprog:
res = linprog(C, A_eq=A, b_eq=b, bounds=cotas)

# Imprimimos solución:
print(f'Arcos seleccionados: {res.x}')
print(f'Mínima distancia: {res.fun}')
```

```
>> Arcos seleccionados: [ 1.  0.  1.  0.  0.  1.  0.]
>> Mínima distancia: 5.0
```

$$X = \begin{bmatrix} x_{s2} \\ x_{s3} \\ x_{24} \\ x_{2t} \\ x_{35} \\ x_{4t} \\ x_{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



3) Modelo FMC algebraico en python

Cargamos el modelo con la librería PuLP

$$Min\ 2x_{s2} + 2x_{s3} + 2x_{24} + 5x_{2t} + 2x_{35} + 1x_{4t} + 2x_{5t}$$

st:

$$x_{s2} + x_{s3} = 1$$

$$x_{24} + x_{2t} - x_{s2} = 0$$

$$x_{35} - x_{s3} = 0$$

$$x_{4t} - x_{24} = 0$$

$$x_{5t} - x_{35} = 0$$

$$-x_{2t} - x_{4t} - x_{5t} = -1$$

$$x_{ij} \geq 0$$

```python
import pulp

lp01 = pulp.LpProblem("ejercicio-inicial-fmc-shortest-path", pulp.LpMinimize)

# Arcos:
arcos = ['s2', 's3', '24', '2t', '35', '4t', '5t']

# Variables:
X = pulp.LpVariable.dicts('x', arcos, 0, None, cat='Continuous')

# Función objetivo:
lp01 += 2*X['s2'] + 2*X['s3'] + 2*X['24'] + 5*X['2t'] + 2*X['35'] + 1*X['4t'] + 2*X['5t'], "Z"

# # Restricciones:
lp01 +=  X['s2'] + X['s3'] == 1
lp01 +=  X['24'] + X['2t'] - X['s2'] == 0
lp01 +=  X['35'] - X['s3'] == 0
lp01 +=  X['4t'] - X['24'] == 0
lp01 +=  X['5t'] - X['35'] == 0
lp01 +=  -X['2t'] - X['4t'] - X['5t'] == -1
```

3) Modelo FMC algebraico en python

Solución

```
# Resolucion:
lp01.solve()

# Imprimimos el status del problema:
print(pulp.LpStatus[lp01.status])

# Imprimimos las variables en su valor óptimo:
for variable in lp01.variables():
    print("%s = %.2f" % (variable.name, variable.varValue))

# Imprimimos el funcional óptimo:
print(f'Función objetivo: {pulp.value(lp01.objective)}')
```

```
>>Optimal
>>x_24 = 1.00
>>x_2t = 0.00
>>x_35 = 0.00
>>x_4t = 1.00
>>x_5t = 0.00
>>x_s2 = 1.00
>>x_s3 = 0.00
>>Función objetivo: 5.0
```