Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Rodrigo Maranzana

Repaso clasificación procesos estocásticos

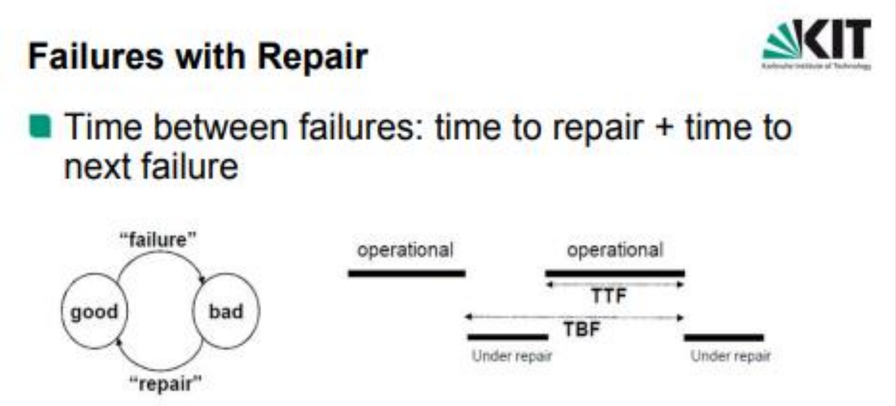
Variable: Discreta / Continua

Parámetro: Discreto / Continuo

Evolución anual del rating crediticio de una institución

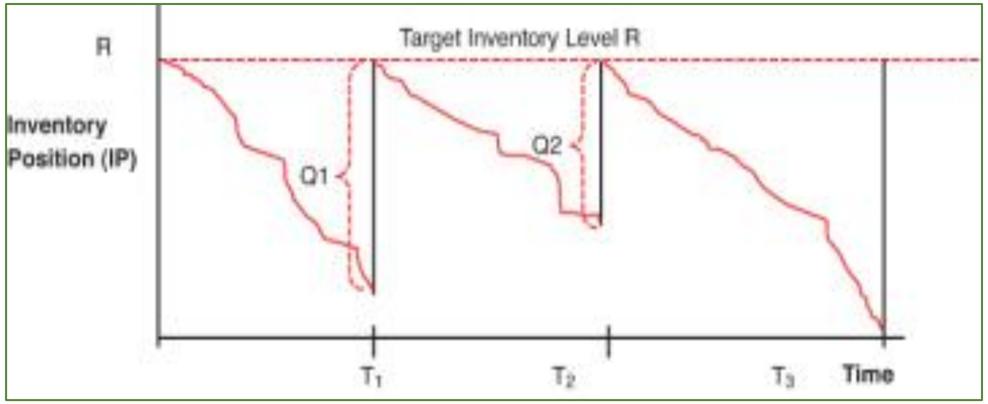
AAA	AAA	AAA	AAA
AA	AA	AA	AA
A	A	A	A
BBB	BBB	BBB	BBB
BB	BB	BB	BB
B	B	B	B
CCC	CCC	CCC	CCC
Default	Default	Default	Default

Estado de falla y reparación de una máquina



Fuente: https://cdnc.itec.kit.edu/downloads/RC1_WS_2011_lecture5.pdf

Sistema de control de inventarios de tiempo fijo



Fuente: https://www.informit.com/articles/article.aspx?p=2167438&seqNum=7

Dinámica de stocks en la bolsa

Fuente: https://finance.yahoo.com/quote/AAPL/

Cadenas de Markov de parámetro continuo

- El parámetro suele ser el tiempo, por lo tanto, en la bibliografía se conoce como:

Continous Time Markov Chains (CTMC)

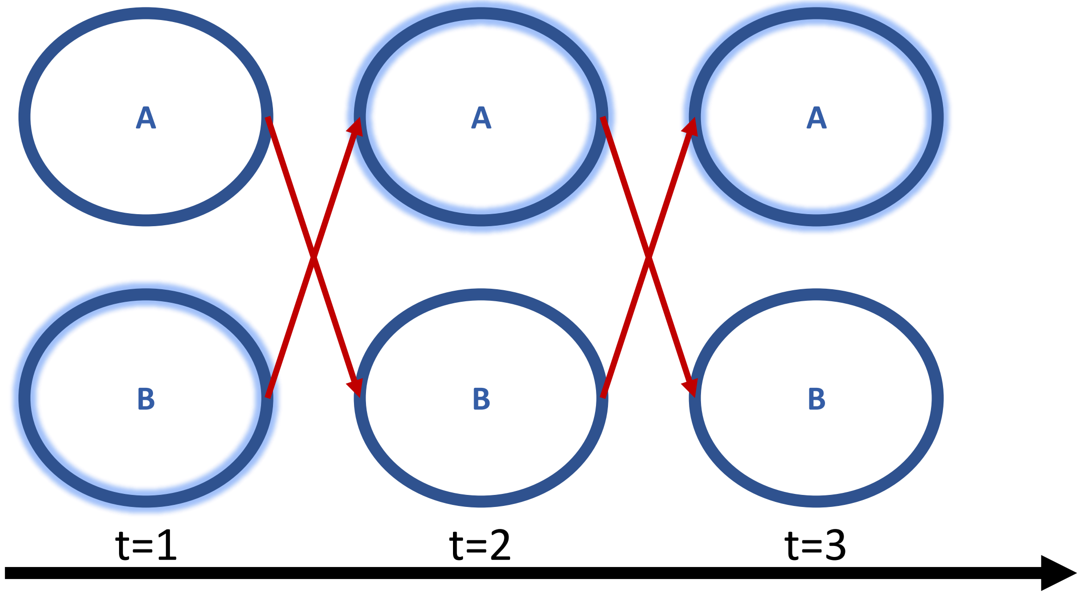
Clasificación por estados:

- Estado finito
- Estado infinito

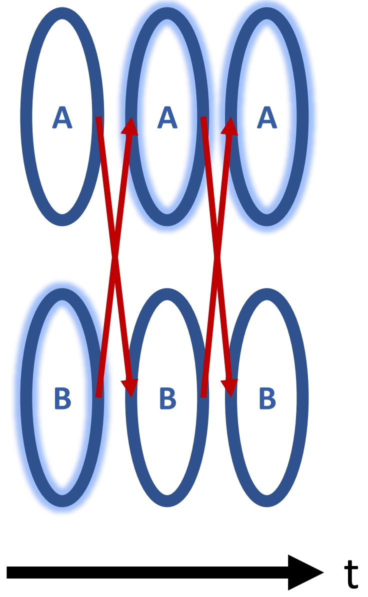
Cadenas de Markov de tiempo continuo

Si intentamos achicar el paso del parámetro t, en la probabilidad de transición:

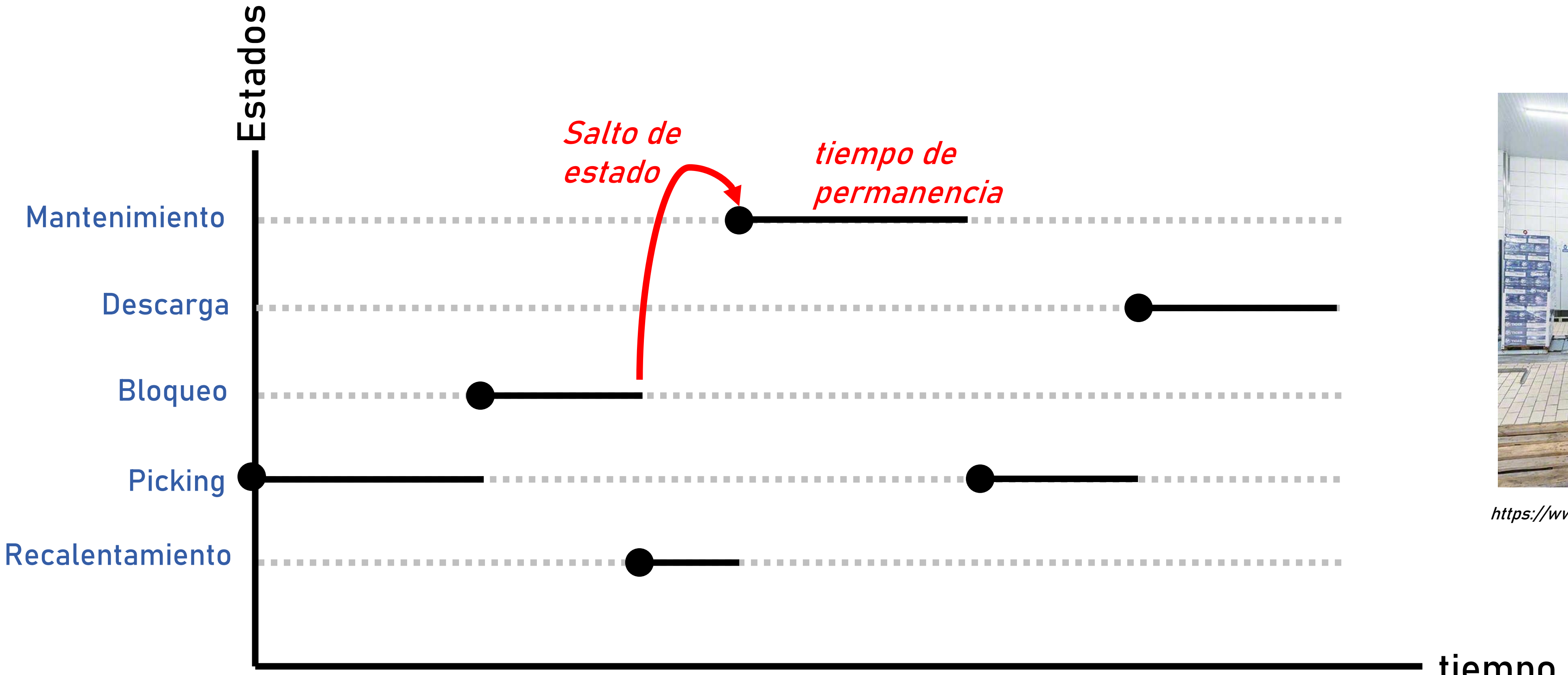
$$P(X_{t+1} = i | X_t = j)$$



$$P(\lim_{\Delta t \to 0} X_{t+\Delta t} = i | X_t = j)$$



Ejemplo: robot de picking

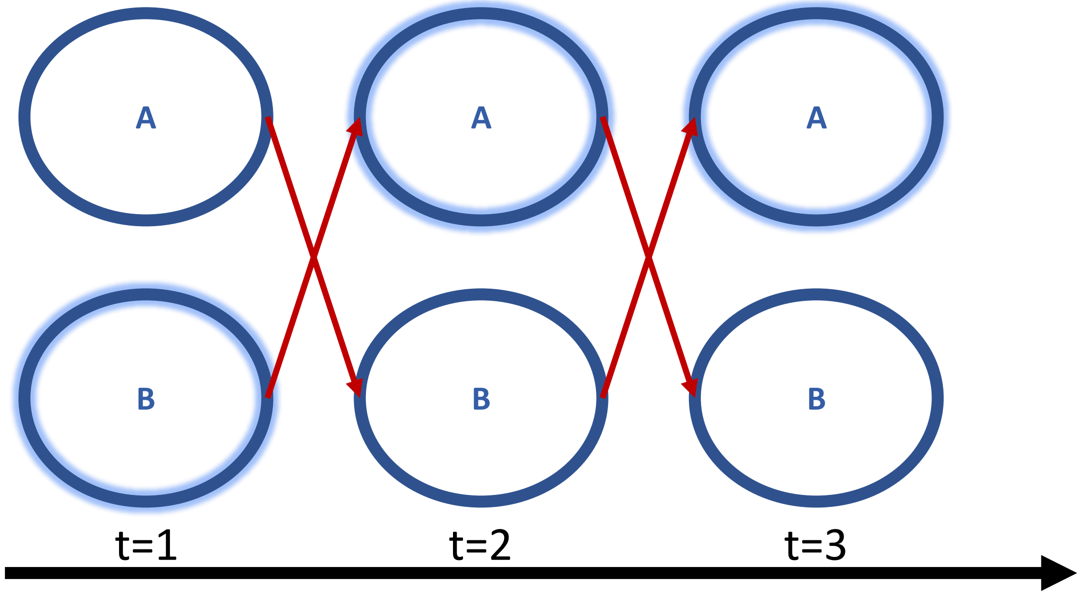


https://www.mecalux.com.ar/blog/robot-de-picking

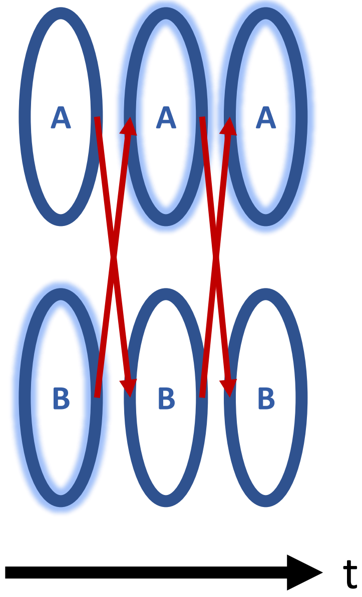
Cadenas de Markov de tiempo continuo

Si intentamos achicar el paso del parámetro t, en la probabilidad de transición:

$$P(X_{t+1} = i | X_t = j)$$



$$P(\lim_{\Delta t \to 0} X_{t+\Delta t} = i | X_t = j)$$



Dado que la probabilidad de transición depende de la extensión de Δt:

- A menor ventana menor probabilidad de observar transición.
- Las probabilidades de transición tienden a "0".

¿Cómo trabajamos con parámetro continuo?

Cadenas de Markov de tiempo continuo

Siendo $\mathrm{T}(t)$ la matriz de transición de paso continuo t.

Si derivamos respecto del tiempo, podemos encontrar la matriz de tasas de transición:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}$$

Recordemos Champan-Kolmogórov

En una Cadena de Markov de tiempo discreto que sea homogénea, se cumple:

$$T^{m+s} = T^m \times T^s$$

Entonces, aplicando la misma regla en CTMC:

$$\boxed{T(t + \Delta t) = T(t)T(\Delta t)}$$

Cadenas de Markov de tiempo continuo

Aplicando Chapman-Kolmogórov en D:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(t)T(\Delta t) - T(t)}{\Delta t}$$

(Recordemos que son matrices)

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(t)[T(\Delta t) - I]}{\Delta t} = T(t) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(\Delta t) - I}{\Delta t}$$

Chapman-Kolmógorov Forward Equation

Denominamos Q a una matriz de tasa de saltos o matriz generadora:

$$Q = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(\Delta t) - I}{\Delta t}$$

Por lo tanto, reemplazando en la expresión anterior de ${}^{dT(t)}/_{dt}$, llegamos a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dT(t)}{dt} = T(t)Q$$

Se denomina Chapman-Kolmógorov Forward Equation.

Chapman-Kolmógorov Forward Equation

$$\frac{dT(t)}{dt} = T(t)Q$$

Intuición:

- La matriz de transición $T(t)$ depende de cuánto tiempo t pasa.
- La ecuación relaciona la tasa de cambio de probabilidades, con la probabilidad acumulada de transición.
- Esta relación se logra introduciendo el concepto de matriz generadora o de tasa de saltos (Q)

Matriz generadora infinitesimal

$$Q = \begin{array}{cc} \overset{\longleftarrow\; j \;\longrightarrow}{} & \\ \begin{bmatrix} q_{aa} & q_{ab} & q_{ac} & \cdots & q_{an} \\ q_{ba} & q_{bb} & q_{bc} & \cdots & q_{bn} \\ q_{ca} & q_{cb} & q_{cc} & \cdots & q_{cn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{na} & q_{nb} & q_{nc} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} & \updownarrow i \end{array}$$

Las tasas $\boldsymbol{q_{ij}}$ de cada componentes son escalares, representan la tasa de transición o de saltos entre estados.

Chapman-Kolmógorov Forward Equation

La ecuación diferencial tiene solución formal:

$$T(t) = e^{tQ}$$

Aparece la exponencial.

Esto se puede expresar como una serie con una expansión de Taylor:

$$T(t) = e^{tQ} = I + tQ + \frac{t^2Q^2}{2!} + \cdots + \frac{t^nQ^n}{n!}$$

Chapman-Kolmógorov Forward Equation

Veamos qué pasa con los componentes:

$$T(t) = I + tQ + \frac{t^2Q^2}{2!} + \cdots + \frac{t^nQ^n}{n!}$$

Si el t es muy chico, los términos de mayor orden son despreciables (más adelante vamos a ver el significado)

$$T(t) = I + tQ + \varepsilon(t)t$$

$$\boxed{Si \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0}$$

Chapman-Kolmógorov Forward Equation

Por ejemplo, del estado i al j en un lapso de tiempo t:

$$T(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} q_{aa} & q_{ab} & q_{ac} & \cdots & q_{an} \\ q_{ba} & q_{bb} & q_{bc} & \cdots & q_{bn} \\ q_{ca} & q_{cb} & q_{cc} & \cdots & q_{cn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{na} & q_{nb} & q_{nc} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} + \varepsilon(t)t$$

Si p_{ij} son los componentes de $T(t)$, veamos algunos ejemplos:

$$p_{ab} = tq_{ab} + \varepsilon(t)t$$
$$p_{bb} = 1 + tq_{bb} + \varepsilon(t)t$$

Chapman-Kolmógorov Forward Equation

Generalizando:

Probabilidad de transición entre estados, con tasa de transición q_{ij} :

$$p_{ij} = tq_{ij} + \varepsilon(t)t \qquad i \neq j$$

Probabilidad de permanencia entre estados, con tasa de permanencia q_{ii} :

$$p_{ii} = 1 + tq_{ii} + \varepsilon(t)t$$

¿Qué son las tasas q_{ij}?

Eventos en parámetro continuo

- Proceso sin memoria: la realización de un evento aleatorio en un intervalo $[t_0, t_0 + t]$ depende únicamente de la longitud t del intervalo y no de la posición en el tiempo.

- La distribución por excelencia que permite el proceso sin memoria es la exponencial.

- La duración de tiempo, un instante antes de producirse un evento, es una variable $T \sim \exp(\lambda)$.

- Siendo λ, la tasa de ocurrencia de un evento.

Distribución exponencial

Función de densidad de probabilidad:

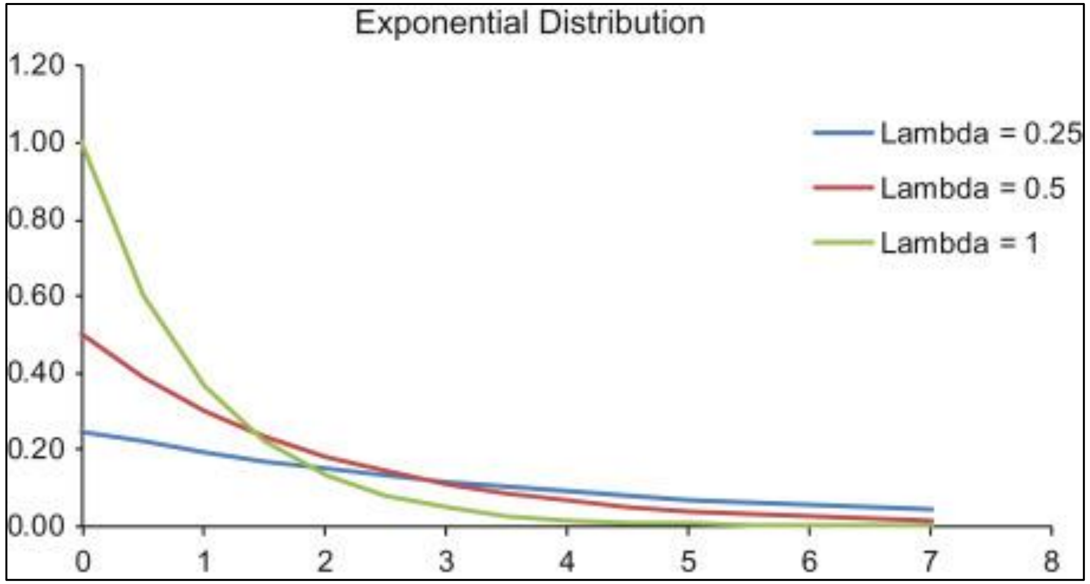
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Acumulada de densidad de probabilidad:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Esperanza:

$$\mathbb{E}[x] = \frac{1}{\lambda}$$



https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/exponential-distribution

Tasas de permanencia y ocurrencia

Al aumentar el tiempo, siendo una variable discreta que sigue una distribución exponencial:

- La probabilidad de transición aumenta, por lo tanto la tasa de transición es:

$$q_{ij} = \lambda_{ij}$$

- La probabilidad de permanencia disminuye, por lo tanto la tasa de permanencia es:

$$q_{ii} = -\lambda_{ii}$$

Tasa de permanencia

- El tiempo que pasa en un estado es una variable $T \sim \exp(\lambda)$.

La probabilidad de no transicionar, es el caso que el evento no ocurra:

$$p_{ii}(t) = P\left(X_{t_0+t} = i \,\middle|\, X_{t_0} = i\right) = 1 - \lambda_{ii} t + \varepsilon(t) t$$

Si $t \to 0$:

$$\lambda_{ii} = \lim_{t \to 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t}$$

Tasa de transición

La probabilidad de transicionar, es el caso que el evento ocurra:

$$p_{ii}(t) = P\left(X_{t_0+t} = j \,\middle|\, X_{t_0} = i\right) = \lambda_{ij}t + \varepsilon(t)t \quad si\ i \neq j$$

Si $t \to 0$:

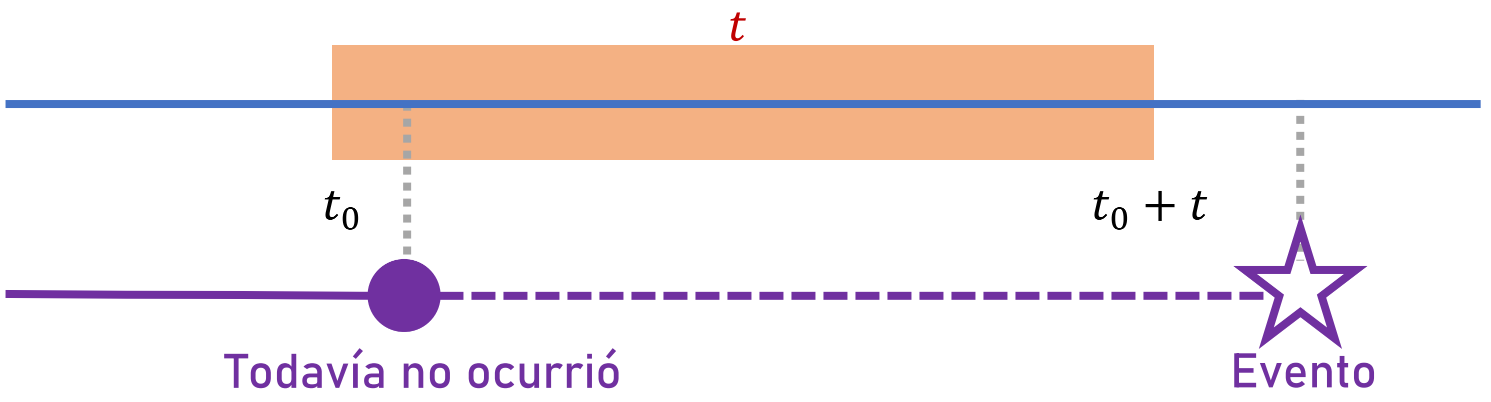
$$\lambda_{ij} = \lim_{t\to 0} \frac{p_{ii}(t)}{t}$$

Intuición en la probabilidad de permanencia

- Probabilidad de que el evento no ocurra en $[t_0, t_0 + t]$, tal que no ocurrió todavía en t.

$$Si \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$$

$$P(T > t_0 + t \mid T > t_0) = 1 - \overbrace{\lambda t}^{\text{Probabilidad de que se de 1 Evento}} + \underbrace{\varepsilon(t) t}_{\text{Probabilidad de que se de más de 1 Evento}}$$

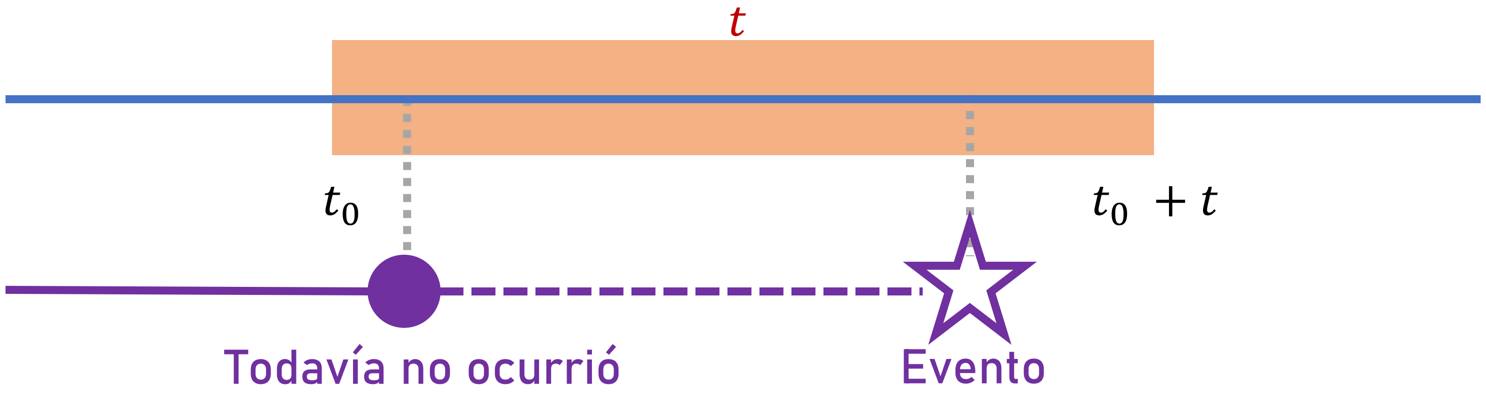


Intuición en la probabilidad de transición

- Probabilidad de que el evento ocurra en $[t_0, t_0 + t]$, tal que no ocurrió todavía en t.

$$P(T \le t_0 + t \mid T > t_0) = \overbrace{\lambda t}^{\text{Probabilidad de que se de 1 Evento}} + \underbrace{\varepsilon(t)t}_{\text{Probabilidad de que se de más de 1 Evento}}$$

$$\boxed{Si \lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0}$$



Regla de sumatoria de tasas de transición

En Cadenas de Markov discreto se cumple:

$$\sum_{j} p_{ij}(t) = 1$$

En Cadenas de Markov de Tiempo Continuo, se puede demostrar:

$$\sum_{i \neq j} q_{ij} = 0$$

Regla de sumatoria de tasas de transición

Partiendo del resultado anterior:

$$\sum_{i \neq j} q_{ij} = 0$$

Aislando la tasa de permanencia:

$$q_{ii} + \sum_{i \neq j} q_{ij} = 0$$

$$q_{ii} = -\sum_{i \neq j} q_{ij}$$

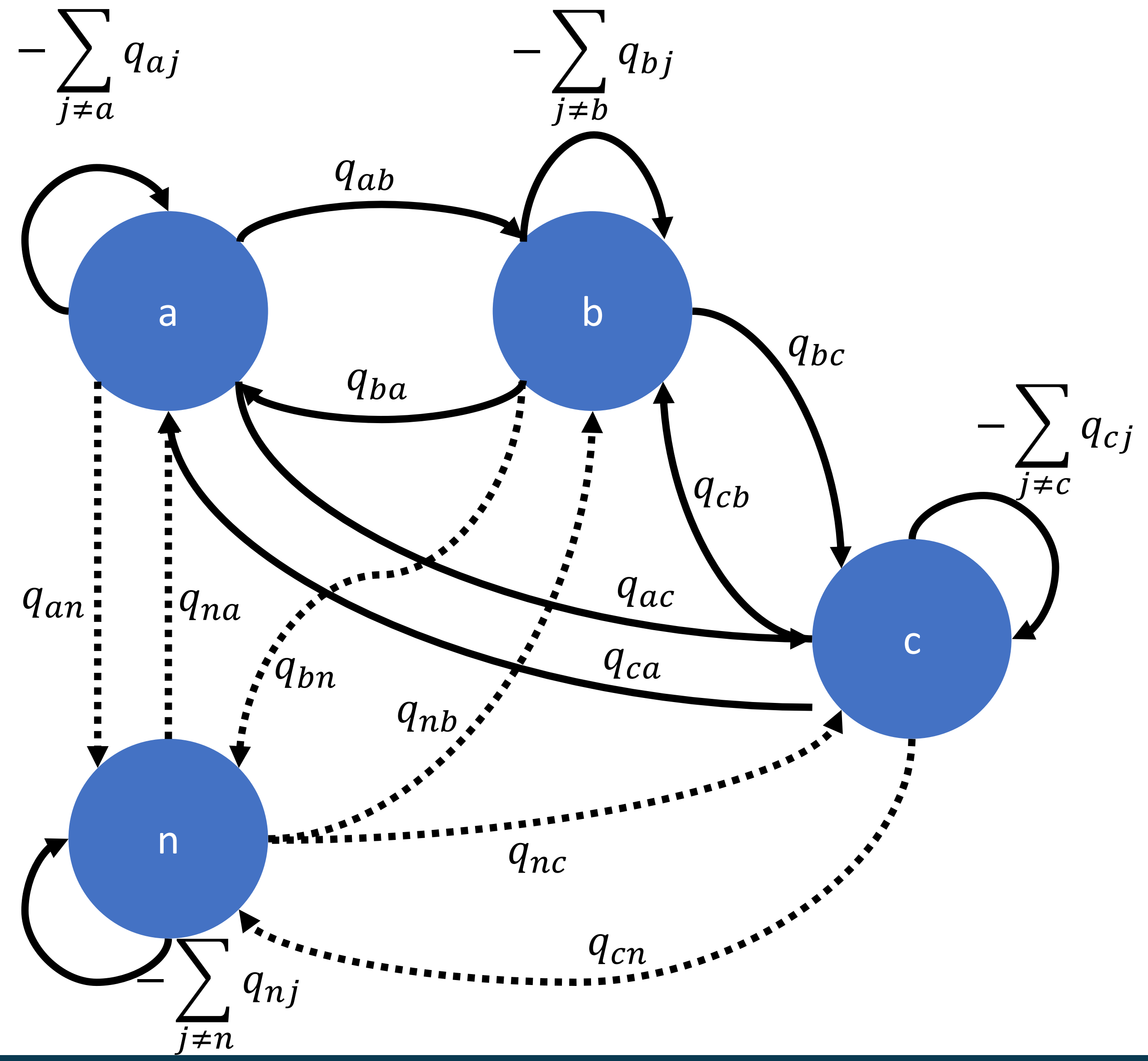
Esta expresión relaciona la tasa de permanencia con la de transición a otros estados.

Matriz infinitesimal

Por lo tanto la matriz generadora infinitesimal se puede expresar como:

$$Q = \begin{bmatrix} -\sum_{j \neq a} q_{aj} & q_{ab} & q_{ac} & \cdots & q_{an} \\ q_{ba} & -\sum_{j \neq b} q_{bj} & q_{bc} & \cdots & q_{bn} \\ q_{ca} & q_{cb} & -\sum_{j \neq c} q_{cj} & \cdots & q_{cn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{na} & q_{nb} & q_{nc} & \cdots & -\sum_{j \neq n} q_{nj} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: grafo de matriz generadora



$$Q = \begin{bmatrix} -\sum_{j\neq a} q_{aj} & q_{ab} & q_{ac} & \cdots & q_{an} \\ q_{ba} & -\sum_{j\neq b} q_{bj} & q_{bc} & \cdots & q_{bn} \\ q_{ca} & q_{cb} & -\sum_{j\neq c} q_{cj} & \cdots & q_{cn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{na} & q_{nb} & q_{nc} & \cdots & -\sum_{j\neq n} q_{nj} \end{bmatrix}$$

Estado estacionario

Con el método de sistemas de ecuaciones de Chapman-Kolmogórov:

$$\pi \mathrm{T}(t) = \pi$$

Derivamos respecto de t :

$$\frac{d(\pi \mathrm{T}(t))}{dt} = \frac{d(\pi)}{dt}$$

Estado estacionario

π es un vector de escalares, que representan la probabilidad.

Por lo tanto:

$$\pi \frac{d(\mathrm{T(t)})}{dt} = \bar{0}$$

$$\pi \mathrm{Q} = \bar{0}$$

$$[\boldsymbol{p_a} \quad \boldsymbol{p_b} \quad \boldsymbol{p_c} \quad \cdots \quad \boldsymbol{p_n}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{q_{aa}} & \boldsymbol{q_{ab}} & \boldsymbol{q_{ac}} & \cdots & \boldsymbol{q_{an}} \\ \boldsymbol{q_{ba}} & \boldsymbol{q_{bb}} & \boldsymbol{q_{bc}} & \cdots & \boldsymbol{q_{bn}} \\ \boldsymbol{q_{ca}} & \boldsymbol{q_{cb}} & \boldsymbol{q_{cc}} & \cdots & \boldsymbol{q_{cn}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{q_{na}} & \boldsymbol{q_{nb}} & \boldsymbol{q_{nc}} & \cdots & \boldsymbol{q_{nn}} \end{bmatrix} = \bar{0}$$

Estado estacionario

Sabiendo que:

$$\sum_i p_i = 1$$

Agregamos la ecuación adicional al sistema para evitar que sea indeterminado:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p_a} & \boldsymbol{p_b} & \boldsymbol{p_c} & \dots & \boldsymbol{p_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q_{aa}} & \boldsymbol{q_{ab}} & \boldsymbol{q_{ac}} & \cdots & \boldsymbol{q_{an}} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{q_{ba}} & \boldsymbol{d_{bb}} & \boldsymbol{q_{bc}} & \cdots & \boldsymbol{q_{bn}} & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{q_{ca}} & \boldsymbol{q_{cb}} & \boldsymbol{q_{cc}} & \cdots & \boldsymbol{q_{cn}} & \mathbf{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{q_{na}} & \boldsymbol{q_{nb}} & \boldsymbol{q_{nc}} & \cdots & \boldsymbol{q_{nn}} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Estado estacionario

$$\begin{bmatrix} p_a & p_b & p_c & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{aa} & q_{ab} & q_{ac} & \cdots & q_{an} & 1 \\ q_{ba} & q_{bb} & q_{bc} & \cdots & q_{bn} & 1 \\ q_{ca} & q_{cb} & q_{cc} & \cdots & q_{cn} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ d_{na} & q_{nb} & q_{nc} & \cdots & q_{nn} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi A = B$$

Si resolvemos la inversa de A, llegamos a la solución.

$$\pi = BA^{-1}$$

Ejemplo: modelo de mantenimiento

En una línea industrial dos máquinas hacen picking automático de piezas en paralelo.

Las máquinas suelen fallar siguiendo un proceso estocástico.

Para la máquina 1 la tasa de fallas/mes es de $\lambda_1 = 10$ y para la máquina 2 de $\lambda_2 = 8$.

Ocurrida la falla, una persona especialista de mantenimiento las repara con tasas de $\mu_2 = 11$ y $\mu_2 = 7$ reparaciones/mes.

Toshiba Piece-picking Robot, [*https://www.youtube.com/watch?v=Snf2D1v3y9s*](https://www.youtube.com/watch?v=Snf2D1v3y9s)

Ejemplo: modelo de mantenimiento

Agentes:

Tasas de transición:

Ejemplo: modelo de mantenimiento

Agentes:

- Máquina 1 (M1)
- Máquina 2 (M2)
- Especialista de Mantenimiento (R)

Tasas de transición:

- Falla máquina 1 (λ_1)
- Falla máquina 2 (λ_2)
- Reparación máquina 1 (μ_1)
- Reparación máquina 2 (μ_2)

Ejemplo: modelo de mantenimiento

Estados de los agentes *(no es lo mismo que del sistema)*:

Ejemplo: modelo de mantenimiento

Estados de los agentes *(no es lo mismo que del sistema)*:

- M1: en falla / en producción.
- M2: en falla / en producción.
- R: ocioso / reparación M1 / reparación M2.

Ejemplo: modelo de mantenimiento

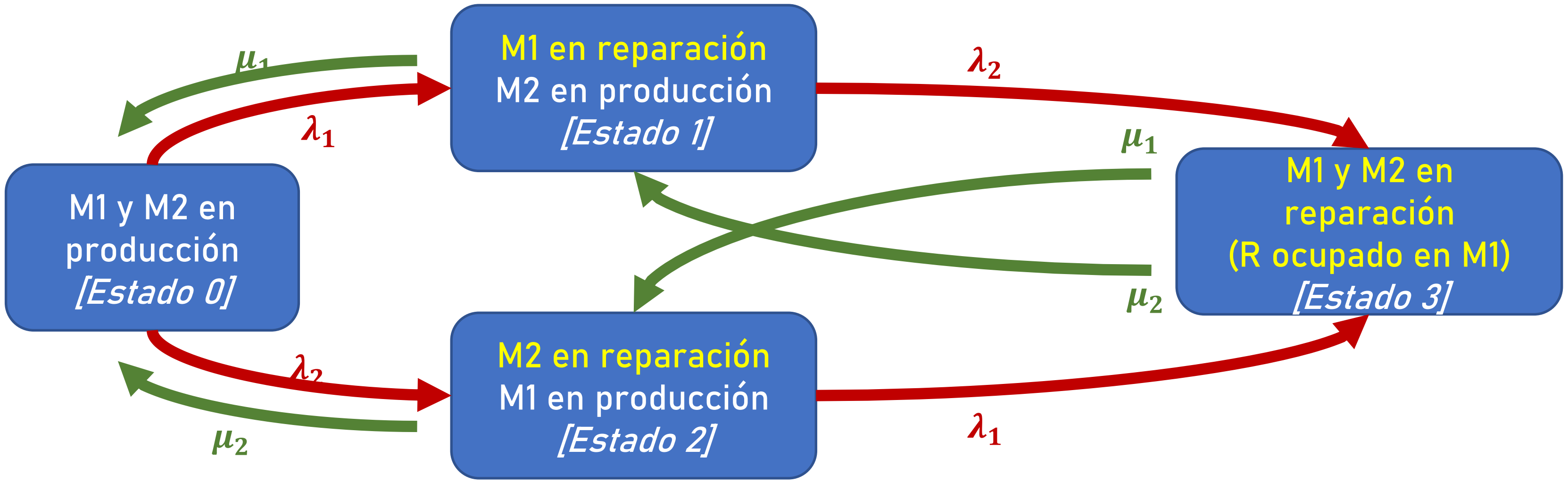
Espacio de estados del sistema:

Ejemplo: modelo de mantenimiento

Espacio de estados del sistema (discusión):

- Máquina 1 y Máquina 2 en producción.
- Máquina 1 en reparación, máquina 2 en producción.
- Máquina 2 en reparación, máquina 1 en producción.
- Máquina 1 en reparación y máquina 2 en reparación.

?

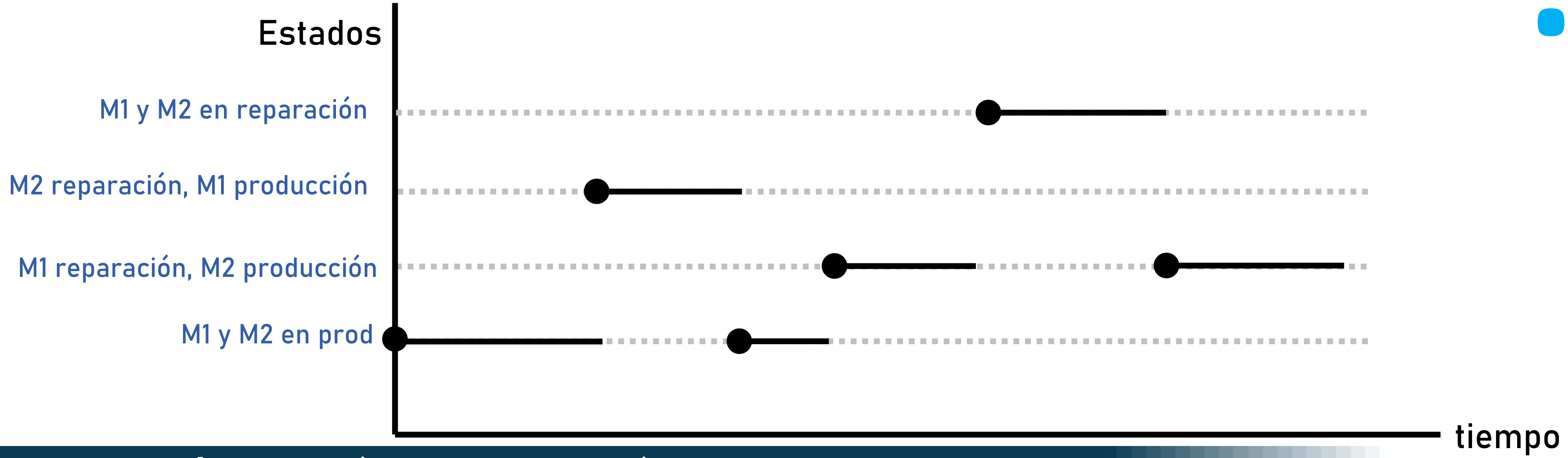


Ejemplo: modelo de mantenimiento

Espacio de estados del sistema:

- Máquina 1 y Máquina 2 en producción.
- Máquina 1 en reparación, máquina 2 en producción.
- Máquina 2 en reparación, máquina 1 en producción.
- Máquina 1 en reparación y máquina 2 en reparación.

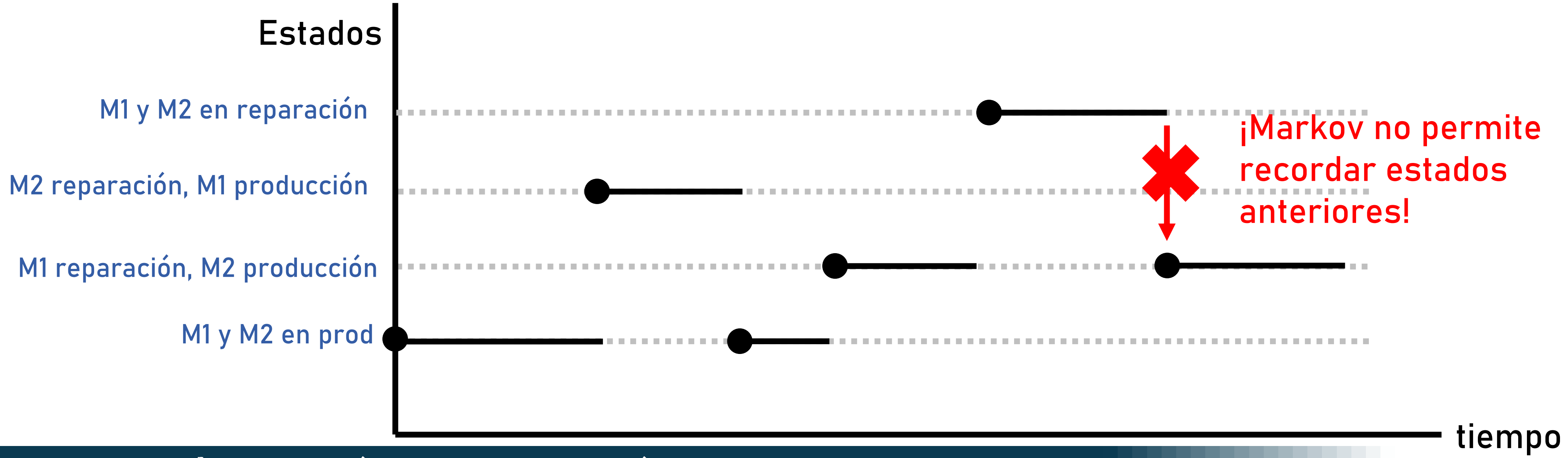
?



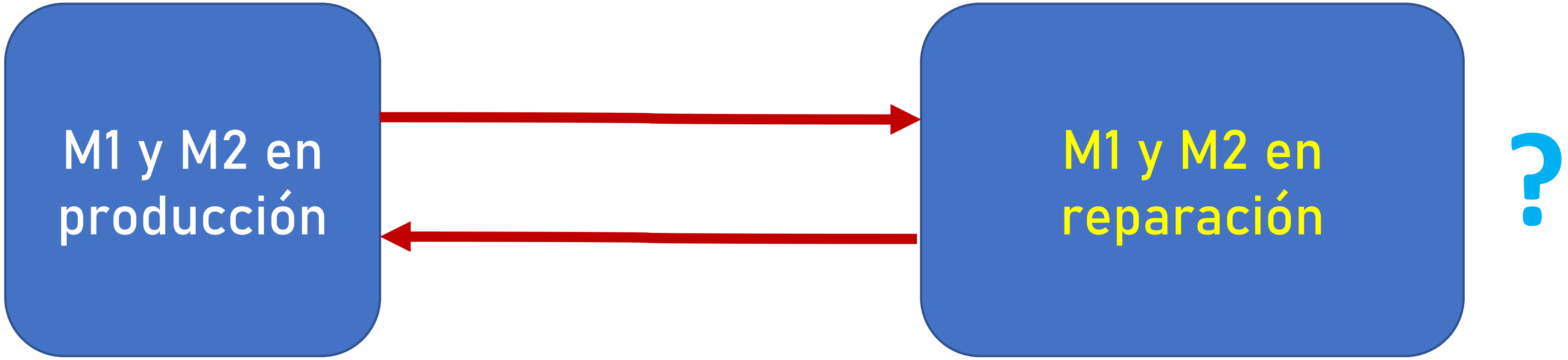
Ejemplo: modelo de mantenimiento

Espacio de estados del sistema:

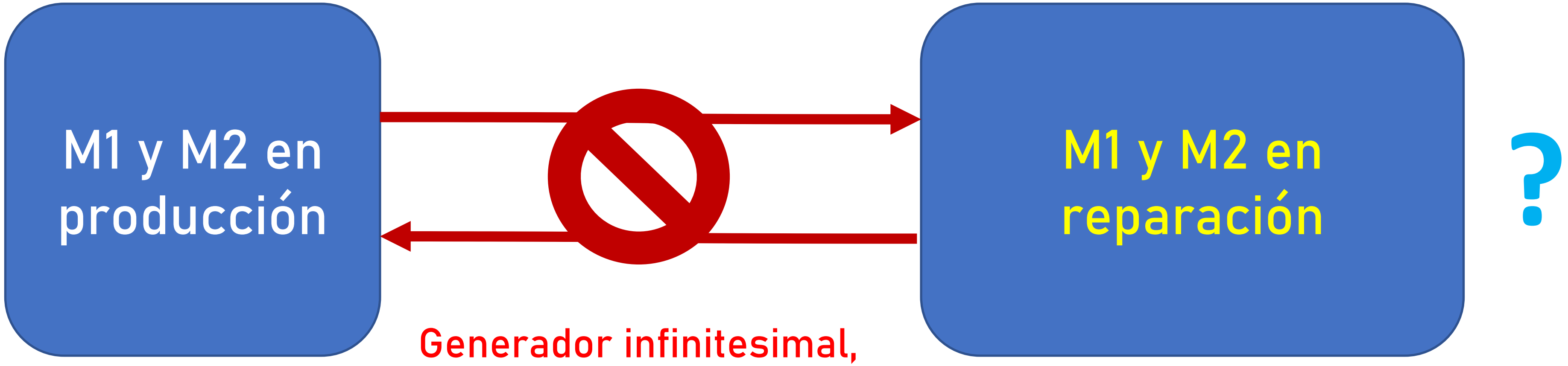
- Máquina 1 y Máquina 2 en producción.
- Máquina 1 en reparación, máquina 2 en producción.
- Máquina 2 en reparación, máquina 1 en producción.
- Máquina 1 en reparación y máquina 2 en reparación.



Ejemplo: modelo de mantenimiento



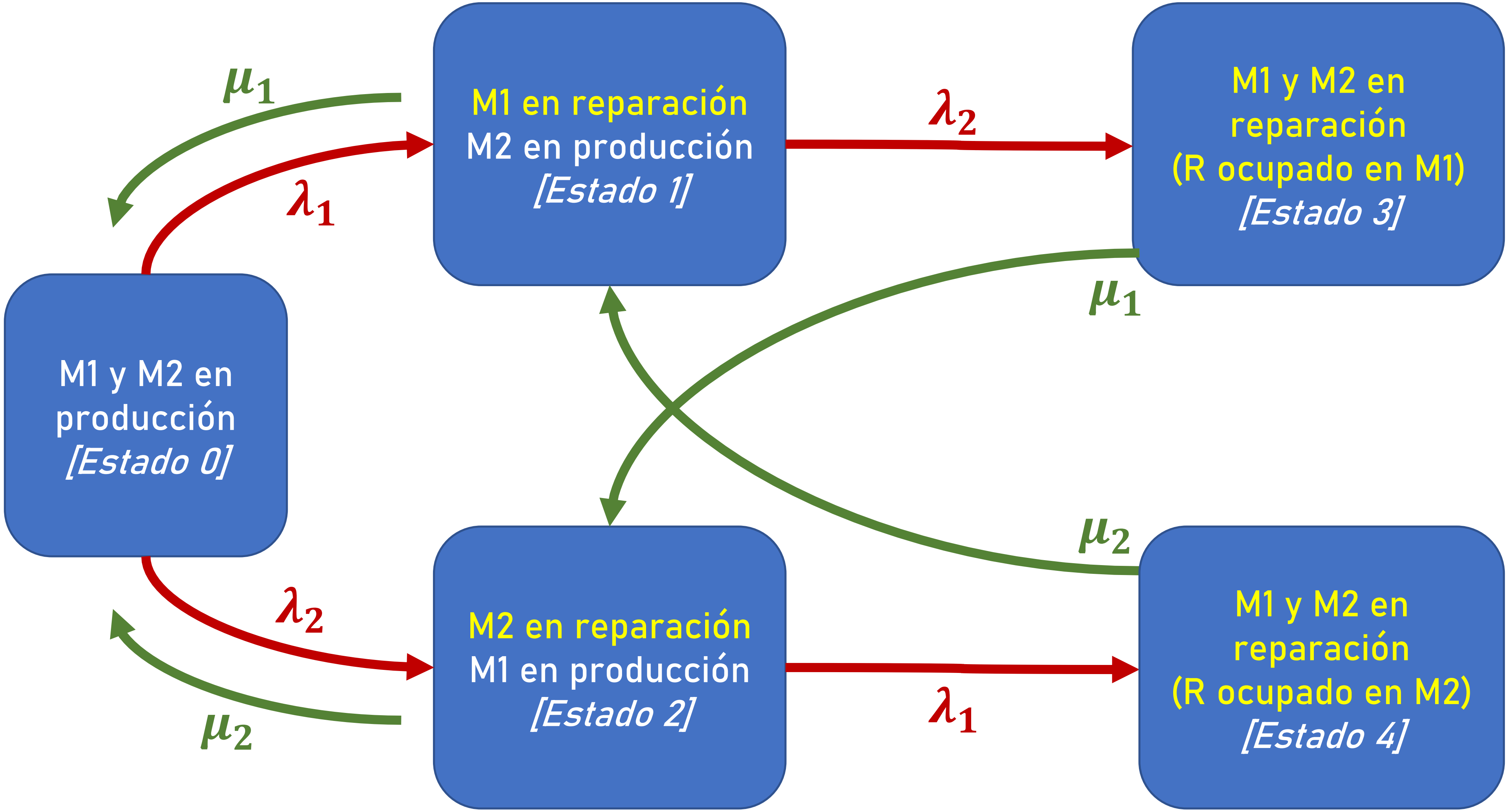
Ejemplo: modelo de mantenimiento



Generador infinitesimal, probabilidad de más de un evento despreciable.

Ejemplo: grafo y matriz de tasas

Espacio de estados del sistema:



Referencias:

- M1: Máquina 1.
- M2: Máquina 2.
- R: Especialista de Mantenimiento.

Ejemplo: modelo de mantenimiento

Matriz de transición de tasas (generadora):

Ejemplo: modelo de mantenimiento

Matriz de transición de tasas (generadora):

$$Q = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
-\lambda_1-\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\
\mu_1 & -\lambda_1-\mu_1 & 0 & \lambda_2 & 0 \\
\mu_2 & 0 & -\lambda_2-\mu_2 & 0 & \lambda_1 \\
0 & 0 & \mu_1 & -\mu_1 & 0 \\
0 & \mu_2 & 0 & 0 & -\mu_2
\end{bmatrix} &
\begin{array}{l}
\text{M1 y M2 en producción} \\
\text{M1 reparación, M2 producción} \\
\text{M2 reparación, M1 producción} \\
\text{M1 y M2 reparación (R en M1)} \\
\text{M1 y M2 reparación (R en M2)}
\end{array} \\
\begin{array}{ccccc}
\begin{array}{c}\text{M1 y M2}\\ \text{en producción}\end{array} &
\begin{array}{c}\text{M1 reparación,}\\ \text{M2 producción}\end{array} &
\begin{array}{c}\text{M2 reparación,}\\ \text{M1 producción}\end{array} &
\begin{array}{c}\text{M1 y M2}\\ \text{reparación}\\ \text{(R en M1)}\end{array} &
\begin{array}{c}\text{M1 y M2}\\ \text{reparación}\\ \text{R en M2)}\end{array}
\end{array} &
\end{array}$$

Ejemplo: modelo de mantenimiento

A partir de los datos de tasas de reparación y falla, se quiere dimensionar la capacidad operativa de la planta para confeccionar el master plan para el siguiente período.

Sabiendo las cadencias de producción de M1 y M2: ¿Cómo se puede estimar la capacidad operativa?

Ejemplo: modelo de mantenimiento

Calculamos el estacionario:

$$[\boldsymbol{p_0} \quad \boldsymbol{p_1} \quad \boldsymbol{p_2} \quad \boldsymbol{p_3} \quad \boldsymbol{p_4}]\begin{bmatrix} -\boldsymbol{\lambda_1}-\boldsymbol{\lambda_2} & \boldsymbol{\lambda_1} & \boldsymbol{\lambda_2} & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\mu_1} & -\boldsymbol{\lambda_1}-\boldsymbol{\mu_1} & 0 & \boldsymbol{\lambda_2} & 0 & \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\mu_2} & 0 & -\boldsymbol{\lambda_2}-\boldsymbol{\mu_2} & 0 & \boldsymbol{\lambda_1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\mu_1} & -\boldsymbol{\mu_1} & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & \boldsymbol{\mu_2} & 0 & 0 & -\boldsymbol{\mu_2} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego, podemos estimar:

- Probabilidad de estar en producción, output de producto máximo.
- Probabilidad de estar en reparación, costo de mantenimiento, pérdida de tiempo productivo.
- …

Caso de uso: carga de vehículos eléctricos

Campo de estudio en SmartGrid: Ing. Eléctrica + TI + Comunicación.

Sikeridis et. Al (2020) "Joint Capacity Modeling for Electric Vehicles in V2I-enabled Wireless Charging Highways"

Investigación en Autopistas con carga inalámbrica.

- Capacidad de carga y comunicación de la autopista.
- Modelización con CTMC de estado finito.
- Performance demanda/consumo.

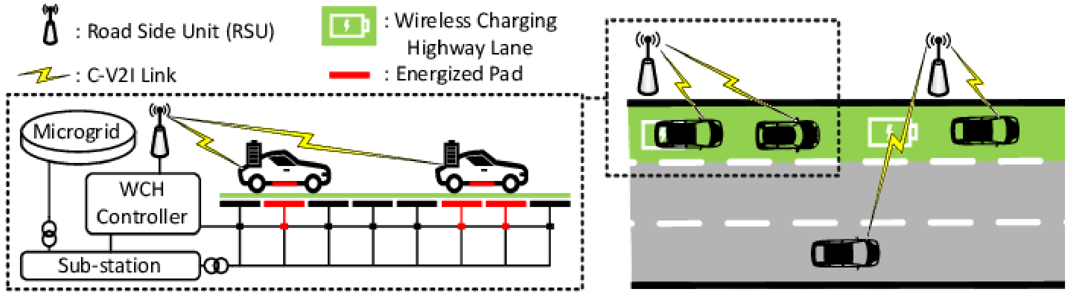


Fig. 1. Wireless Charging Highway Architecture

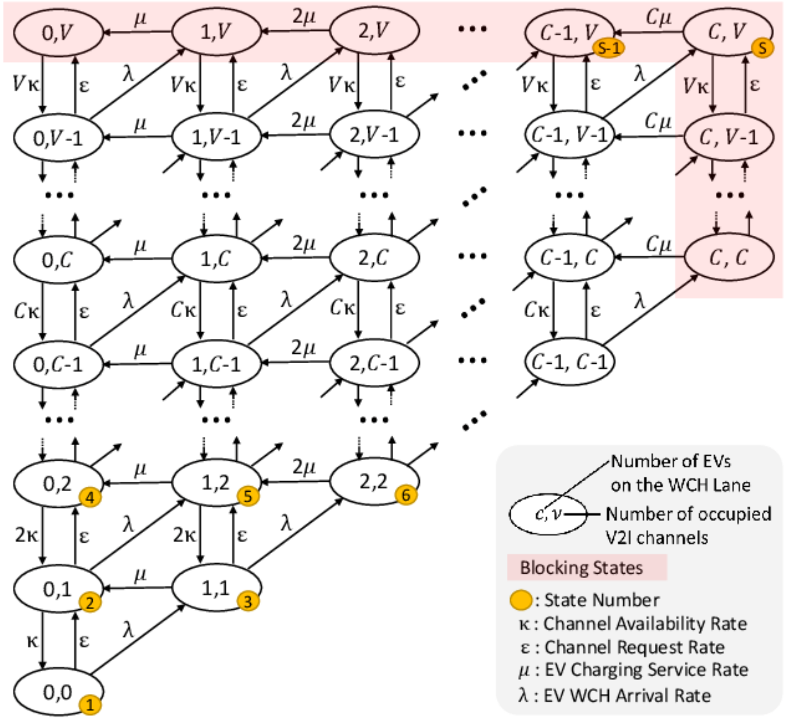


Fig. 2. Continuous-time Markov Chain for WCH Joint Capacity Modeling

Fuente: https://www.researchgate.net/publication/348083410_Joint_Capacity_Modeling_for_Electric_Vehicles_in_V2I-enabled_Wireless_Charging_Highways

Adicional

Adicional

Demostraciones:

1) Sumatoria de tasas de transición igual a 0.

1) Regla de sumatoria de tasa de transición

Sabemos que:

$$\sum_{j} p_{ij}(t) = 1$$

Si derivamos esta expresión:

$$\frac{d \sum_{j} p_{ij}(t)}{dt} = \frac{d(1)}{dt} = 0$$

1) Regla de sumatoria de tasas de transición

Partiendo de la expresión:

$$T(t) = I + tQ + \varepsilon(t)t$$

Sumando ambos lados:

$$\sum_{j} T(t) = \sum_{j} (I + tQ + \varepsilon(t)t\ )$$

$$\sum_{j} T(t) = \sum_{j} I + \sum_{j} tQ + \sum_{j} \varepsilon(t)t$$

1) Regla de sumatoria de tasas de transición

Dado que:

- $\sum_j T(t) = \bar{1}$
- $\sum_j I = \bar{1}$
- $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$

Reemplazamos:

$$\bar{1} = \bar{1} + \sum_j tQ + \sum_j \varepsilon(t)t$$

$$\bar{0} = t \sum_j Q$$

Por lo tanto, :
$\bar{0} = \sum_j Q$

Lo que implica: $\sum_j q_{ij} = 0 \quad \forall i$