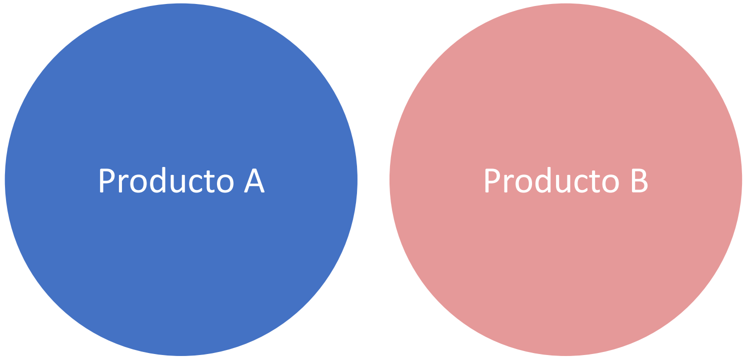
Modelo optimización de inventarios con restricción de espacio

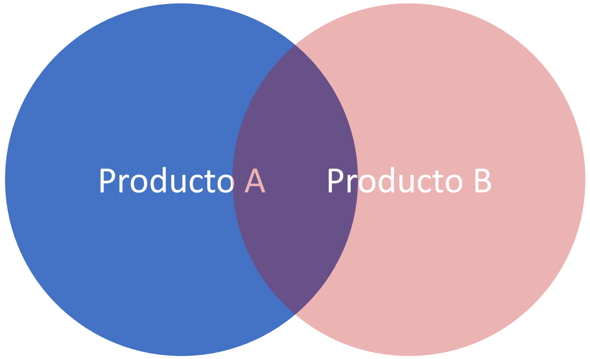
Rodrigo Maranzana

Repaso modelo de inventarios multiproducto

En un modelo de inventarios multiproducto se pueden dar distintas situaciones:

- Los productos no compiten por el espacio o bien el almacén se considera infinito. No existen restricciones.
- Los productos compiten por el espacio. Existen restricciones.





Repaso: modelo EOQ multiproducto sin restricciones

Para cada producto j:

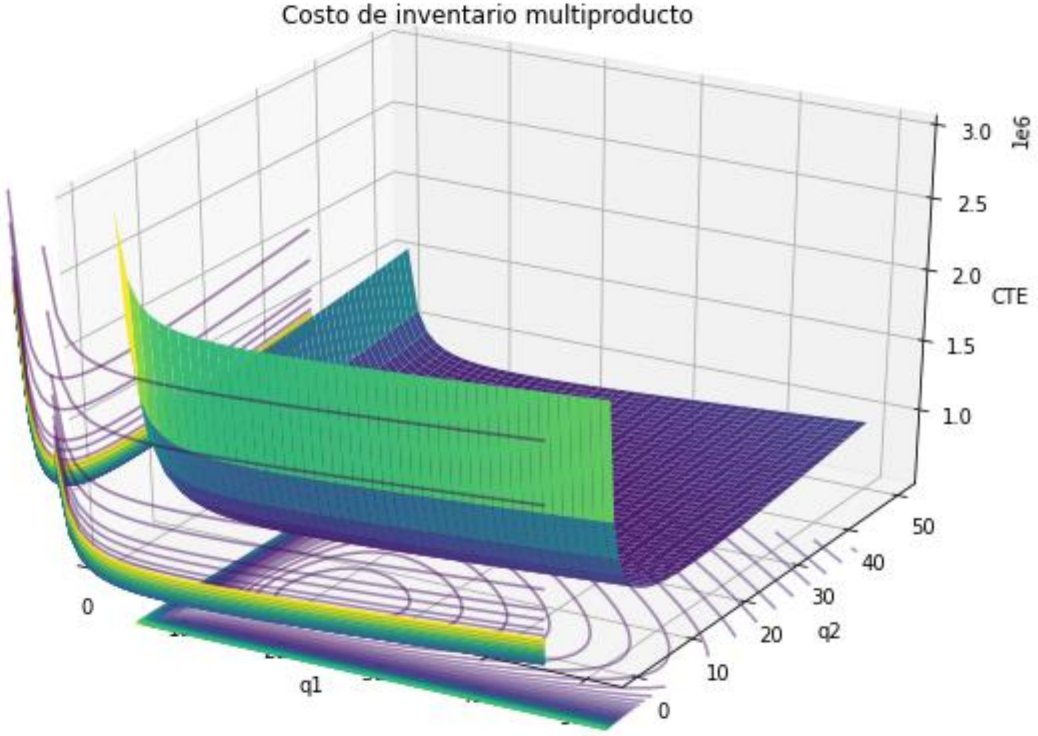
- $CTE(q_j) = b_j . D_j + k_j . \frac{D_j}{q_j} + \frac{1}{2} . q_j . i . b_j$
- $q_{opt_j} = \sqrt{\frac{2.D_j.k_j}{b_j.i}}$

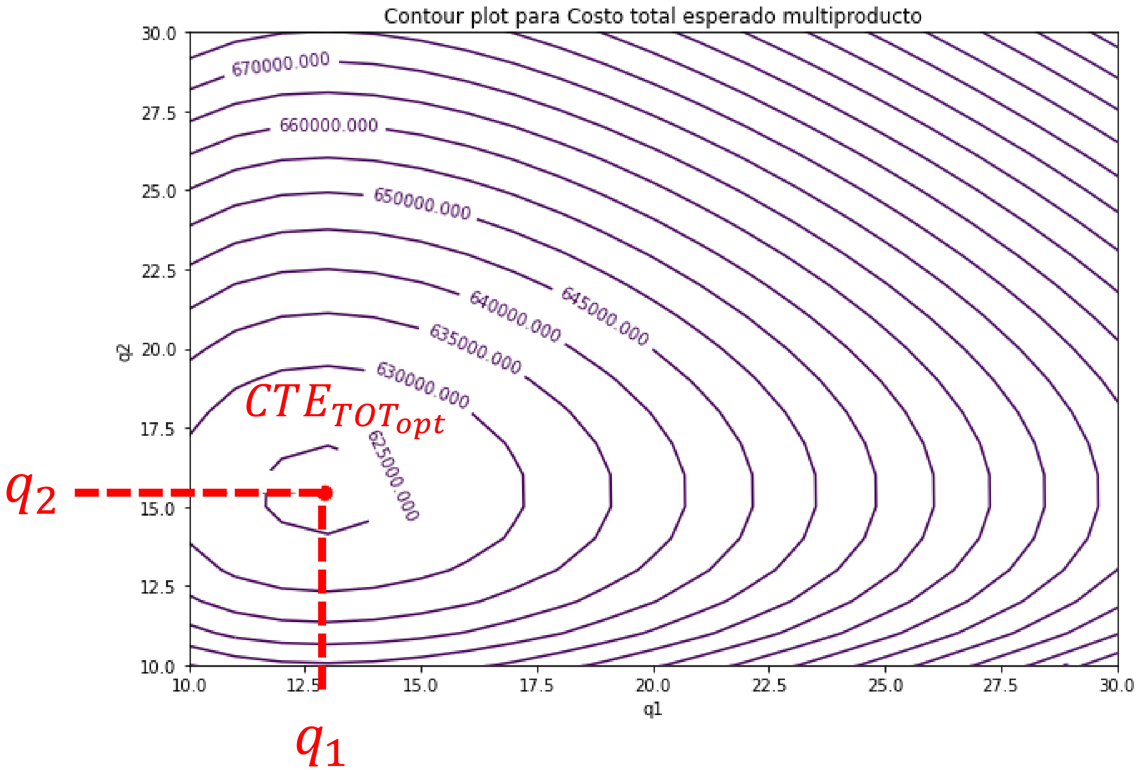
Dado que los productos son independientes, puede optimizarse cada uno por separado, para obtener q_{opt}.

El Costo Total Esperado óptimo de todos los productos resulta:

$$CTE_{TOT_{opt}} = \sum_j CTE_j(q_{opt_j})$$

Repaso: modelo EOQ multiproducto sin restricciones





Modelo EOQ multiproducto con restricción

Siendo:

- s_i: espacio necesario para almacenar el ítem i.
- S: espacio total en el almacén.

El modelo resulta:

$$Min\ CTE(q_j) = \sum_j b_j . D_j + k_j . \frac{D_j}{q_j} + \frac{1}{2} . q_j . i . b_j$$

$$s.t. \qquad \sum_j q_j s_j \leq S$$

"Minimizar el costo total de inventario sujeto a que cada ítem "j" compite en el mismo espacio total S"

Modelo EOQ multiproducto con restricción

Podemos escribir la restricción en forma vectorial; siendo:

$$s_{vec} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \dots \\ s_j \\ \dots \\ s_m \end{bmatrix} \quad q_{vec} = \begin{bmatrix} q \\ q_2 \\ \dots \\ q_j \\ \dots \\ q_n \end{bmatrix}$$

El modelo resulta:

$$Min\ CTE(q_j) = \sum_j b_j.D_j + k_j.\frac{D_j}{q_j} + \frac{1}{2}.q_j.i.b_j$$

$$s.t. \qquad {q_{vec}}^T s_{vec} \leq S$$

Modelo EOQ multiproducto con restricción

Se puede resolver, pero perdemos la ventaja del modelo de optimización cuadrática (convexo) sin restricciones.

Esto imposibilita el uso de solvers mucho más eficientes.

Podemos aprovechar la teoría del dual para eliminar la restricción.

Modelo EOQ multiproducto con restricción

Siendo:

- $CTE(q_j) = f(q_j)$

Y además, despejando la restricción de espacio:

$$\sum_j q_j s_j \leq S$$

$$\sum_j q_j s_j - S \leq 0$$

$$g(q_j) = \sum_j q_j s_j - S$$

Modelo EOQ multiproducto con restricción

Siendo:

- $f\left(q_j\right) = CTE\left(q_j\right)$
- $g\left(q_j\right) = \sum_j q_j s_j - S$

El modelo resulta:

$$
\begin{aligned}
&Min \sum_j f(q_j) \\
&st \quad g\left(q_j\right) = 0
\end{aligned}
$$

Método del Lagrangiano

Es un método iterativo que permite encontrar soluciones a problemas de optimización con restricciones:

- eliminando las restricciones,
- incorporándolas al objetivo mediante su dualización,
- introduciendo el concepto de “multiplicadores de Lagrange” que son variables duales.
- penalizando el incumplimiento de restricciones.

Método del Lagrangiano

Dado un problema:

$$Max\ C^T X$$

$$st \qquad AX \leq B$$

$$X \geq 0$$

Su dual resulta:

$$Min\ B^T Y$$

$$st \qquad A^T Y \geq C$$

$$\mathrm{Y} \geq 0$$

Siendo Y, variables duales que llamaremos multiplicadores de Lagrange.

Método del Lagrangiano

Recordemos que por dualidad débil, el dual es una cota del primal, en este caso de maximización:

$$C^T X \leq B^T Y$$

Además, si se cumple la dualidad fuerte:

$$C^T X = B^T Y$$

El método del Lagrangiano aprovecha estos conceptos, partiendo de la dualidad débil y buscando iterativamente mediante un término dual de penalización la dualidad fuerte.

Método del Lagrangiano

Volviendo al problema primal:

$$Max\ C^T X$$

$$st \qquad AX \leq B$$

$$X \geq 0$$

Despejamos la restricción:

$$Max\ C^T X$$

$$\boldsymbol{st \qquad AX - B \leq 0}$$

$$X \geq 0$$

Método del Lagrangiano

Aplicamos el método del Lagrangiano:

- eliminando la restricción,
- sumándola al funcional dualizada como un término de penalización,
- multiplicando la restricción por multiplicadores de Lagrange.

Penaliza (-) por el Max primal

$$L(X,Y) = C^T X - Y^T(AX - B)$$

Término de penalización del lagrangiano

$$X \geq 0, Y \geq 0$$

Las variables duales son precios sombras, se suele usar también λ para los multiplicadores de Lagrange.

Método del Lagrangiano

La optimización se logra, resolviendo:

$$Min_Y \ Max_x \ L(X,Y) = C^T X - Y^T (AX - B)$$

$$X \geq 0, Y \geq 0$$

- Dado que intentamos maximizar y $AX - B \leq 0$, el término dual está penalizando el objetivo Y veces.
- Se obtiene un problema $\mathrm{Max}\, L(x)$ para cada Y posible.
- El resultado óptimo es el que sea $Min_Y \ L(x, y)$ de todos los Y posibles.

Método del Lagrangiano

El Lagrangiano se resuelve de forma iterativa, hasta alcanzar:

$$\nabla L(X, Y) = 0$$

Es decir, buscando el óptimo analítico de $L(X, Y)$, donde el gradiente del Lagrangiano se hace cero.

Método del Lagrangiano en inventarios EOQ

Volviendo al problema de inventarios con restricción de espacio:

- $f(q_j) = CTE(q_j)$
- $g(q_j) = \sum_j q_j s_j - S$

Si el modelo primal es:

$$Min \sum_j f(q_j)$$

$$st \quad g(q_j) = 0$$

El modelo del Lagrangiano resulta:

Penaliza (+) por el Min primal

$$Max_{\boldsymbol{\lambda}}\, Min_{q_j} \sum_j f(q_j) + \boldsymbol{\lambda}\, g(q_j)$$

$$q_j \geq 0, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

Siendo λ multiplicadores de Lagrange.

Método del Lagrangiano en inventarios EOQ

$$Max_{\lambda}\ Min_{q_j} \sum_j f(q_j) + \lambda g(q_j)$$

$$q_j \geq 0, \lambda \geq 0$$

Repasando, el modelo completo:

$$Max_{\lambda_j} Min_{q_j}\ L(\lambda, q_j) = \sum_j \left[b_j . D_j + k_j . \frac{D_j}{q_j} + \frac{1}{2} . q_j . i . b_j \right] + \lambda\left(\sum_j q_j s_j - S\right)$$

$$q_j \geq 0, \lambda \geq 0$$

Término de penalización del lagrangiano

Método del Lagrangiano en inventarios EOQ

Calculamos el lote óptimo mediante:

$$\frac{\partial L}{\partial Q} = 0$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial L}{\partial Q} = \frac{\partial\left(b_j . D_j\right)}{\partial q_j} + \frac{\left(k_j . \frac{D_j}{q_j}\right)}{\partial q_j} + \frac{\left(\frac{1}{2} . q_j . i . b_j\right)}{\partial q_j} + \frac{\left(\lambda\left(\sum_j q_j s_j - S\right)\right)}{\partial q_j} = 0$$

Resolviendo:

$$\boldsymbol{q_{opt_j} = \sqrt{\frac{2 . D_j . k_j}{b_j . i + 2\lambda s_j}}}$$

Método del Lagrangiano en inventarios EOQ

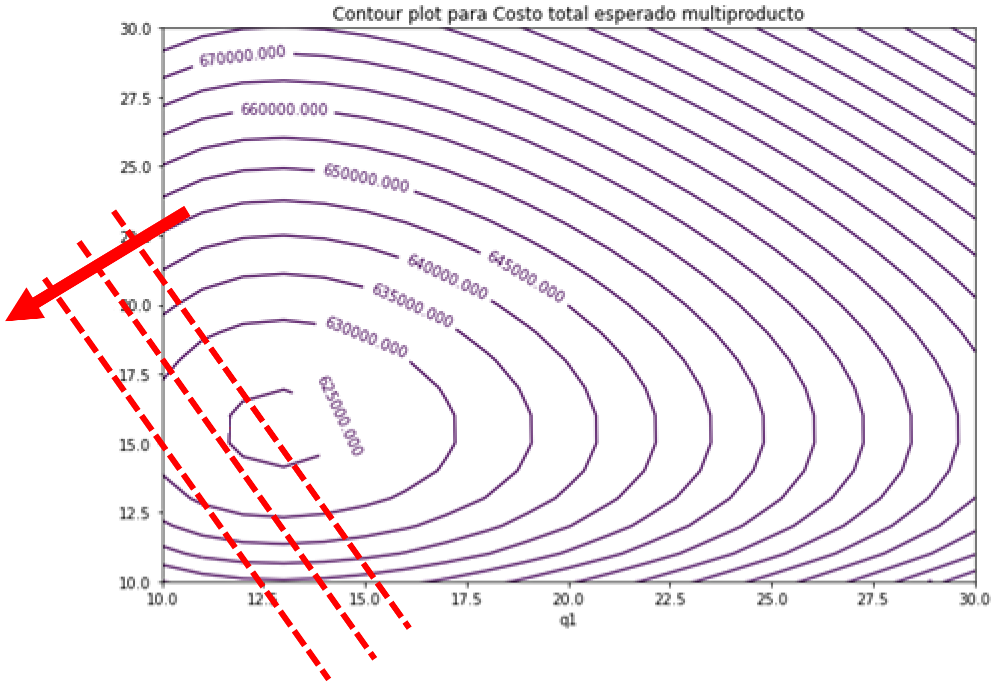
Cada valor de λ implica un problema distinto a optimizar, pero no quiere decir que se cumpla la restricción.

$\lambda_0 = 0 \qquad \rightarrow S_{consumido,\lambda_0} > S$

$\lambda_1 = 0{,}21 \qquad \rightarrow S_{consumido,\lambda_1} > S$

$\lambda_2 = 0{,}42 \qquad \rightarrow S_{consumido,\lambda_2} < S$

$\lambda_3 = \ \dots \qquad \rightarrow S_{consumido,\lambda_3} < S$



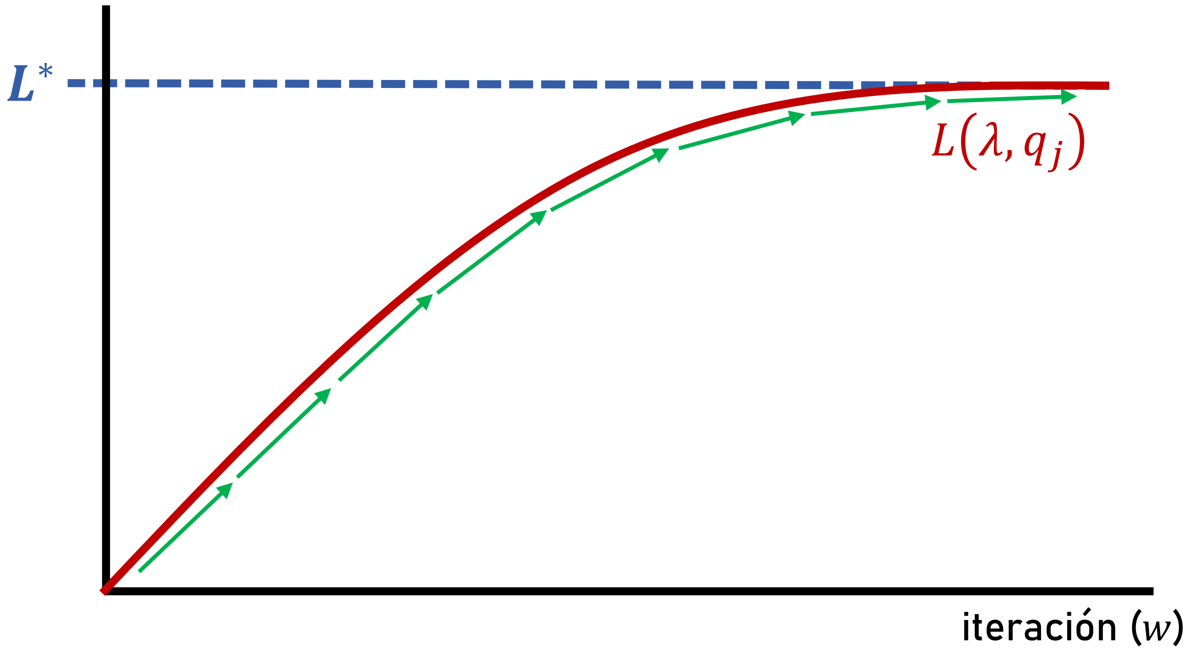
Al estar moviéndonos en la dualidad débil, en este problema de minimización nos movemos por debajo de la cota inferior:

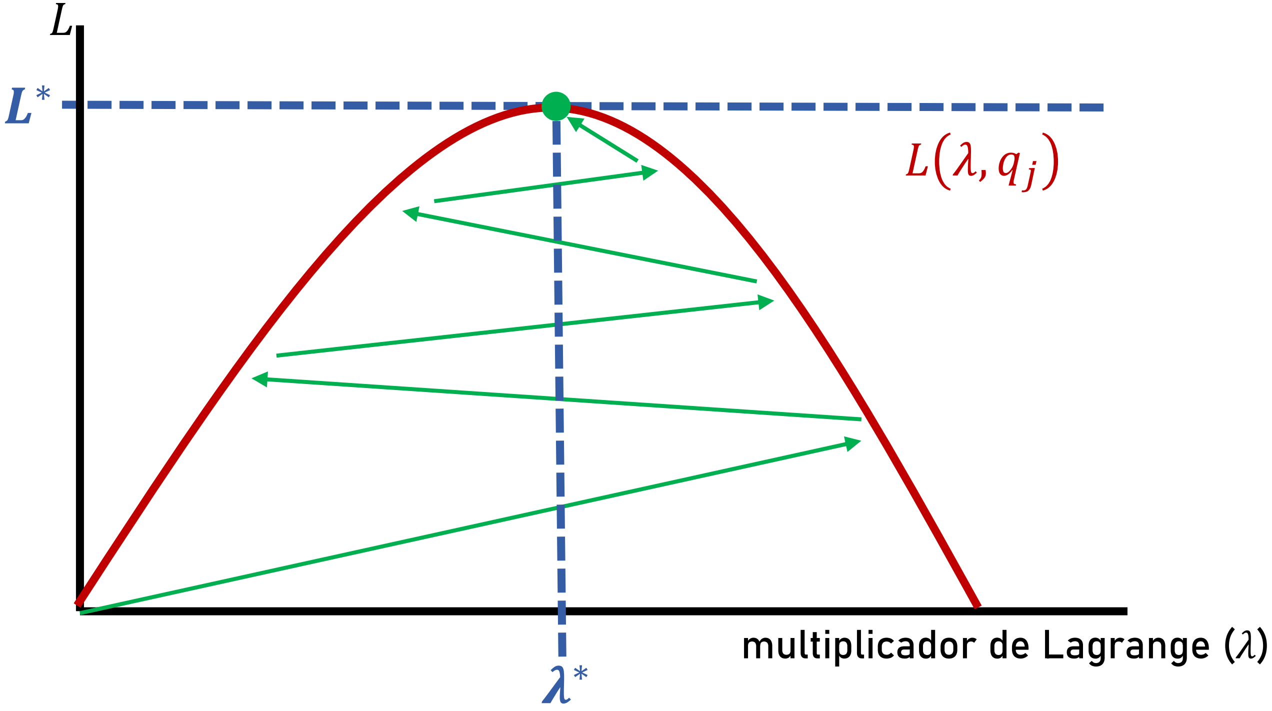
resulta “un mínimo menor al que buscamos”

Método del Lagrangiano en inventarios EOQ

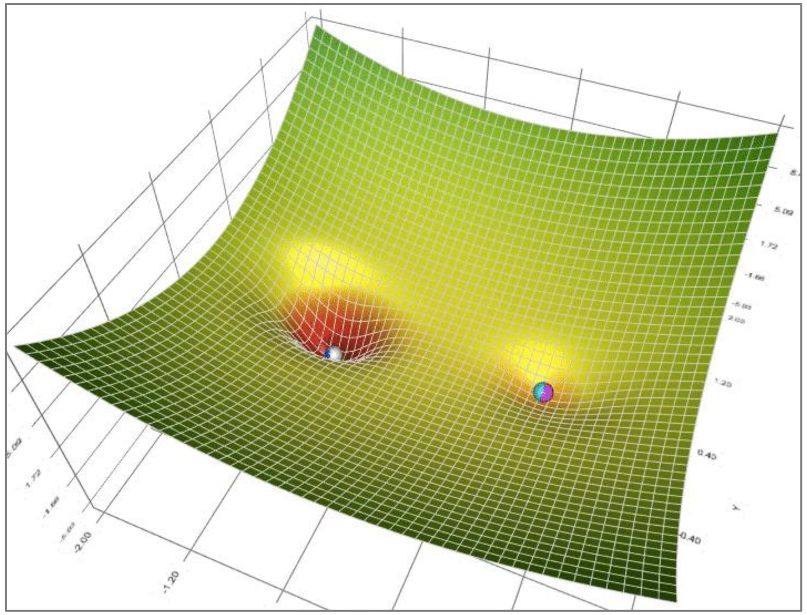
Al estar moviéndonos en la dualidad débil, en este problema de minimización nos movemos por debajo de la cota: resulta **"un mínimo menor al que buscamos".**

Iteramos, un λ_w por cada iteración, y buscamos el $L^* = Max_\lambda \, L(\lambda, q_j)$

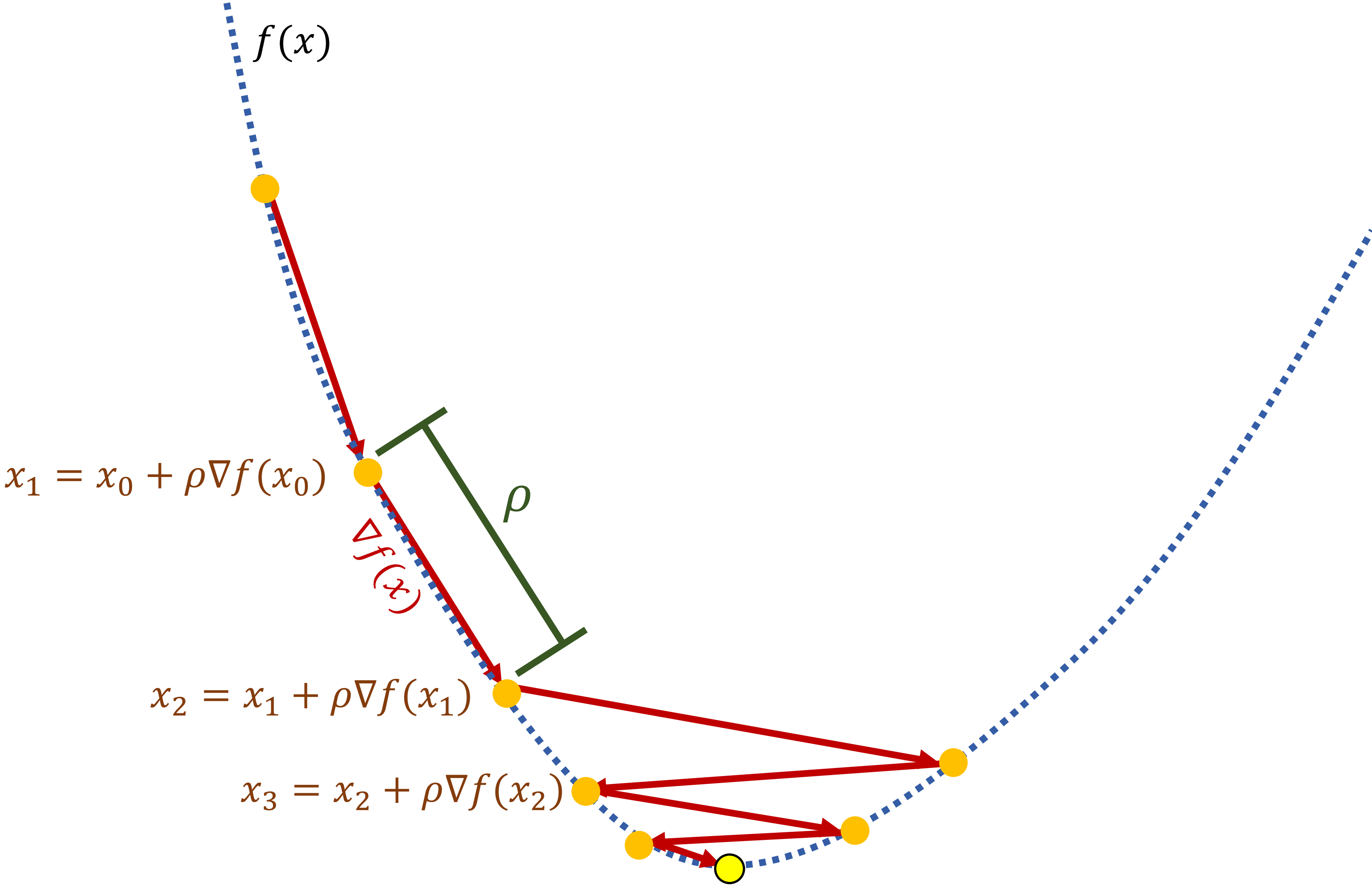




Repaso: optimización con método del gradiente



Fuente: https://towardsdatascience.com/a-visual-explanation-of-gradient-descent-methods-momentum-adagrad-rmsprop-adam-f898b102325c



Repaso: optimización con método del gradiente

El método del gradiente, busca en la dirección del gradiente ($\nabla f(x_i)$) de la función, con un paso determinado ρ.

Iteraciones:

$$x_1 = x_0 + \rho \nabla f(x_0)$$
$$x_2 = x_1 + \rho \nabla f(x_1)$$
$$\dots$$
$$x_i = x_{i-1} + \rho \nabla f(x_{i-1})$$

Se busca: $f(x_i) < f(x_{i-1})$

El algoritmo finaliza cuando $\nabla f(x_i) \approx 0$, es decir, no existe posibilidad de mejora.

No se asegura el óptimo global, puede quedar estancado en óptimos locales.

Método del gradiente en inventarios con Lagrangiano

- Inicializar λ_0
- Calcular $L(\lambda)$
- Calcular CTE
- Calcular $\nabla L(\lambda)$
- Actualizar λ: $\lambda_{w+1} = \lambda_w + step * \nabla L(\lambda)$
- Calcular $\Delta\lambda = |\lambda_{w+1} - \lambda_w|$
- Revisar si $\Delta\lambda > tol$, continuar; sino parar.

Método del gradiente en inventarios con Lagrangiano

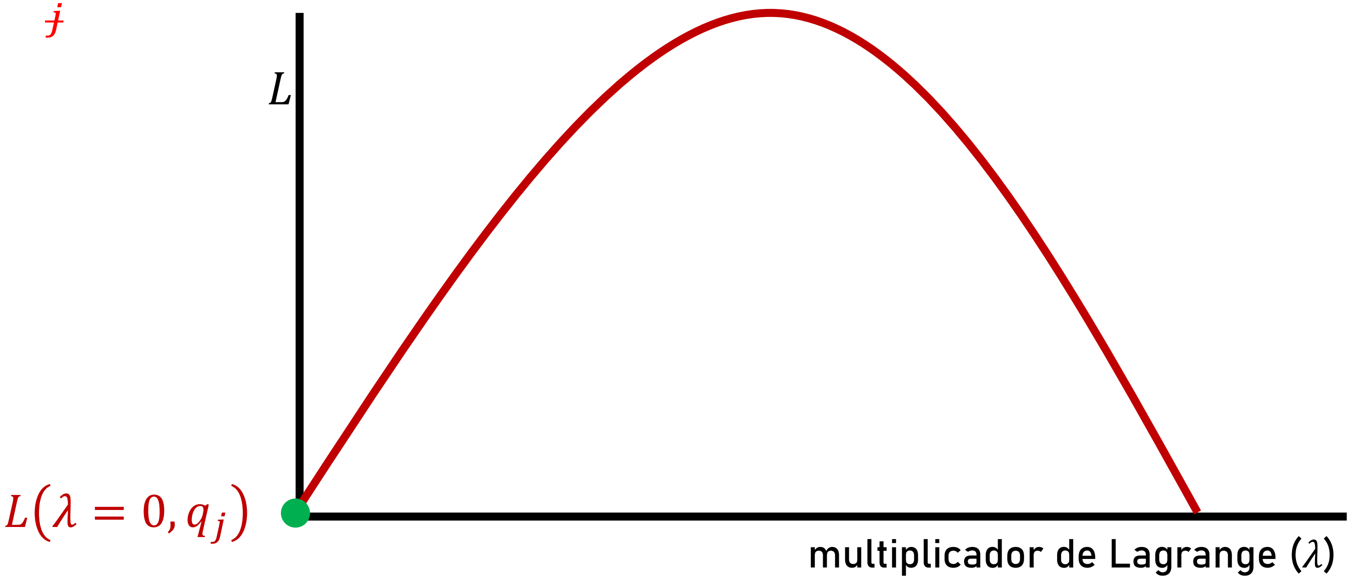
- Inicializar λ_0

Ej: $\lambda_0 = 0$

- Calcular $L(\lambda_0)$

$$L_{\lambda_0=0} = \sum_j \left[b_j . D_j + k_j . \frac{D_j}{q_j} + \frac{1}{2} . q_j . i . b_j \right] + \cancel{\lambda(\sum_j q_j s_j - S)}$$

$$L_{\lambda_0=0} = \sum_j \left[b_j . D_j + k_j . \frac{D_j}{q_j} + \frac{1}{2} . q_j . i . b_j \right]$$



Método del gradiente en inventarios con Lagrangiano

- Calcular $\nabla L(\lambda)$

$$\nabla L(\lambda) = \frac{d\left(b_j . D_j\right)}{d\lambda} + \frac{d\left(k_j . \dfrac{D_j}{q_j}\right)}{d\lambda} + \frac{d\left(\dfrac{1}{2} . q_j . i . b_j\right)}{d\lambda} + \frac{d\left(\lambda\left(\sum_j q_j s_j - S\right)\right)}{d\lambda}$$

$$\nabla L(\lambda) = \sum_j q_j s_j - S$$

Método del gradiente en inventarios con Lagrangiano

- Actualizar λ:

$$\lambda_{w+1} = \lambda_w + step * \nabla L(\lambda)$$

$$\lambda_{w+1} = \lambda_w + step * \sum_j q_j s_j - S$$

- Calcular $\Delta\lambda = |\lambda_{w+1} - \lambda_w|$

Método del gradiente en inventarios con Lagrangiano

Continuamos iterando mientras $\Delta\lambda > tol$, continuar; sino parar.