



# Redes de Proyecto: Método del Camino Crítico

Rodrigo Maranzana

# Redes de proyectos

**Son representaciones de proyectos mediante grafos.**

Los nodos simbolizan eventos y los arcos tareas.

- El objetivo es la optimización de los tiempos involucrados en el grafo, para calendarizar el proyecto.

# Componentes de la red de proyectos: eventos

Evento: hito en una línea de tiempo. Implica el inicio o fin de una tarea.  
*Los eventos son nodos en un grafo de proyectos.*

- Evento  $i$ .
- Fechas del evento en tiempo absoluto sobre el calendario.
  - $Ft_i$ : Fecha temprana del evento  $i$ . **Mínima fecha de ocurrencia del evento  $e$ .**
  - $FT_i$ : Fecha tardía del evento  $i$ . **Máxima fecha de ocurrencia el evento  $e$ .**



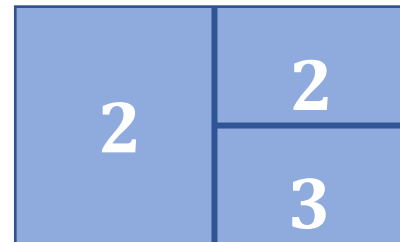
# Componentes de la red de proyectos: eventos

Representación:



Ejemplo:

- Evento 2.
- $Ft_e$ : 2 semanas
- $FT_e$ : 3 semanas.

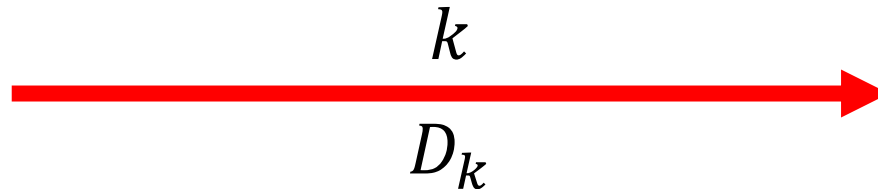


# Componentes de la red de proyectos: tareas

Tarea: proceso de transformación que consume recursos, entre ellos tiempo sobre un calendario.

*Las tareas son arcos en un grafo de proyectos.*

- Tarea  $k$ .
- $D_k$ : tiempo de ejecución requerido por la tarea  $k$ .



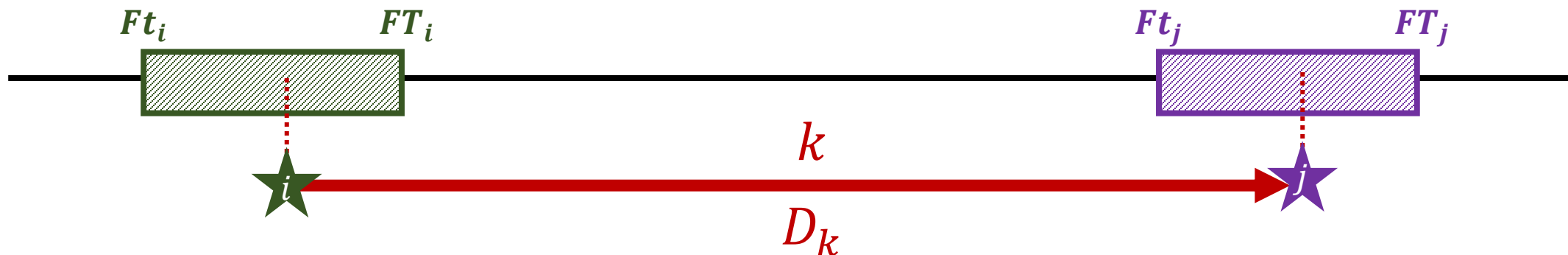
# Relación entre eventos y tareas únicas

Una tarea siempre está definida por eventos de inicio y fin.

Tarea  $k$  de tiempo de proceso  $D_k$ .

Definida por evento de:

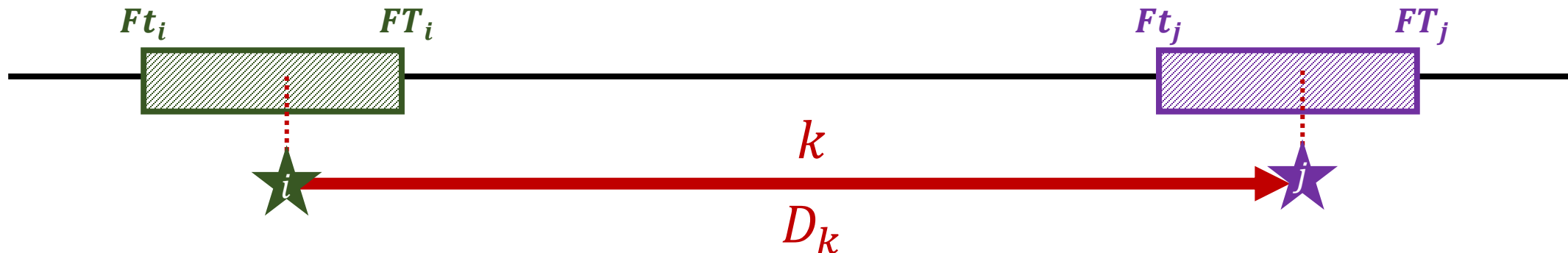
- Inicio  $i$  de fecha temprana  $Ft_i$  y fecha tardía  $FT_i$ .
- Fin  $j$  de fecha temprana  $Ft_j$  y fecha tardía  $FT_j$ .



# Relación entre eventos y tareas únicas

- Los eventos pueden ser movidos entre sus cotas tempranas y tardías.
- Suponemos tiempos de tareas rígidos.

*El evento  $j$ , está condicionado por el evento  $i$  y la tarea  $k$ .*



# Relación entre eventos y tareas únicas

*El evento  $j$ , está condicionado por el evento  $i$  y la tarea  $k$ :*

- Una tarea que inicia a tiempo temprano de inicio “ $i$ ”, condiciona el tiempo temprano de finalización “ $j$ ”.

$$Ft_j = Ft_i + D_i$$





# Relación entre eventos y tareas únicas

*El evento  $j$ , está condicionado por el evento  $i$  y la tarea  $k$ :*

- Una tarea que inicia a tiempo tardío de inicio “ $i$ ”, condiciona el tiempo tardío de finalización “ $j$ ”:

$$FT_j = FT_i + D_i$$



# Relación entre eventos y tareas únicas

En el método CPM (explicado más adelante), el tiempo tardío del evento "i" suele ser la incógnita, por lo tanto:

$$FT_i = FT_j - D_i$$



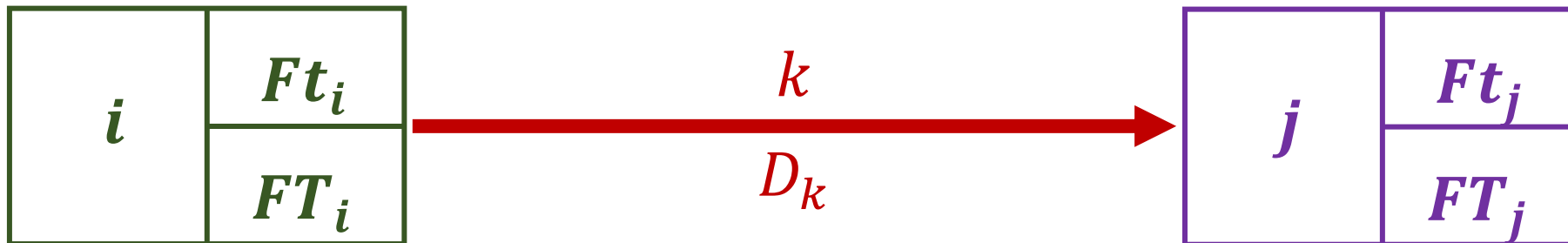
# Relación entre eventos y tareas únicas

Representación de tareas y eventos en un grafo de proyectos.

Tarea  $k$  de tiempo de proceso  $D_k$ .

Definida por evento de:

- Inicio  $i$  de fecha temprana  $Ft_i$  y fecha tardía  $FT_i$ .
- Fin  $j$  de fecha temprana  $Ft_j$  y fecha tardía  $FT_j$ .



# Dependencia de más de una tarea

Tener en cuenta que:

Las fechas tempranas y tardías **no indican** cuándo empiezan o finalizan las tareas comprometidas en ese evento.

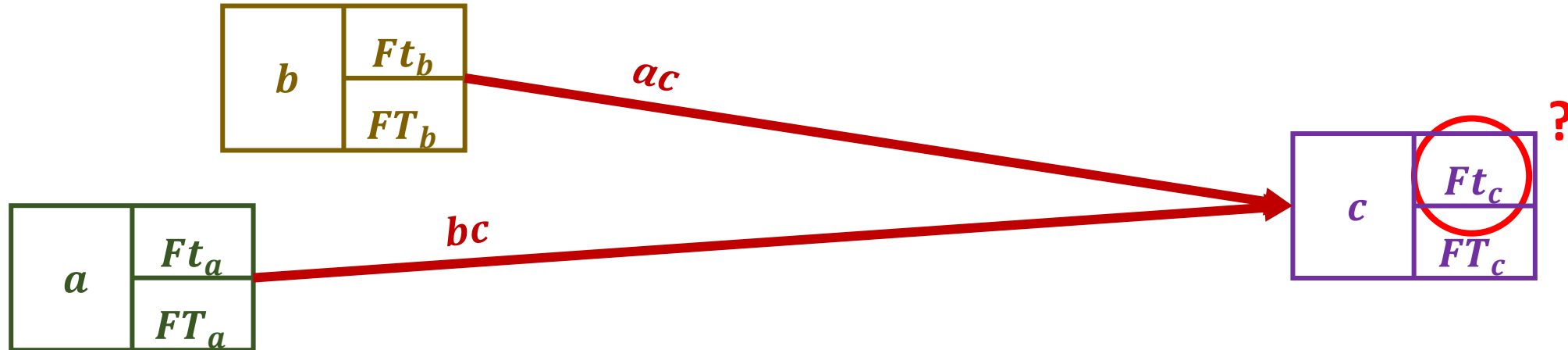
Indican cuándo debe ocurrir como mínimo (temprana) y máximo (tardía) el evento y **dar inicio o fin a algunas de las tareas comprometidas.**

**Recordar: Los eventos de fin, pueden ser el inicio de otros.**

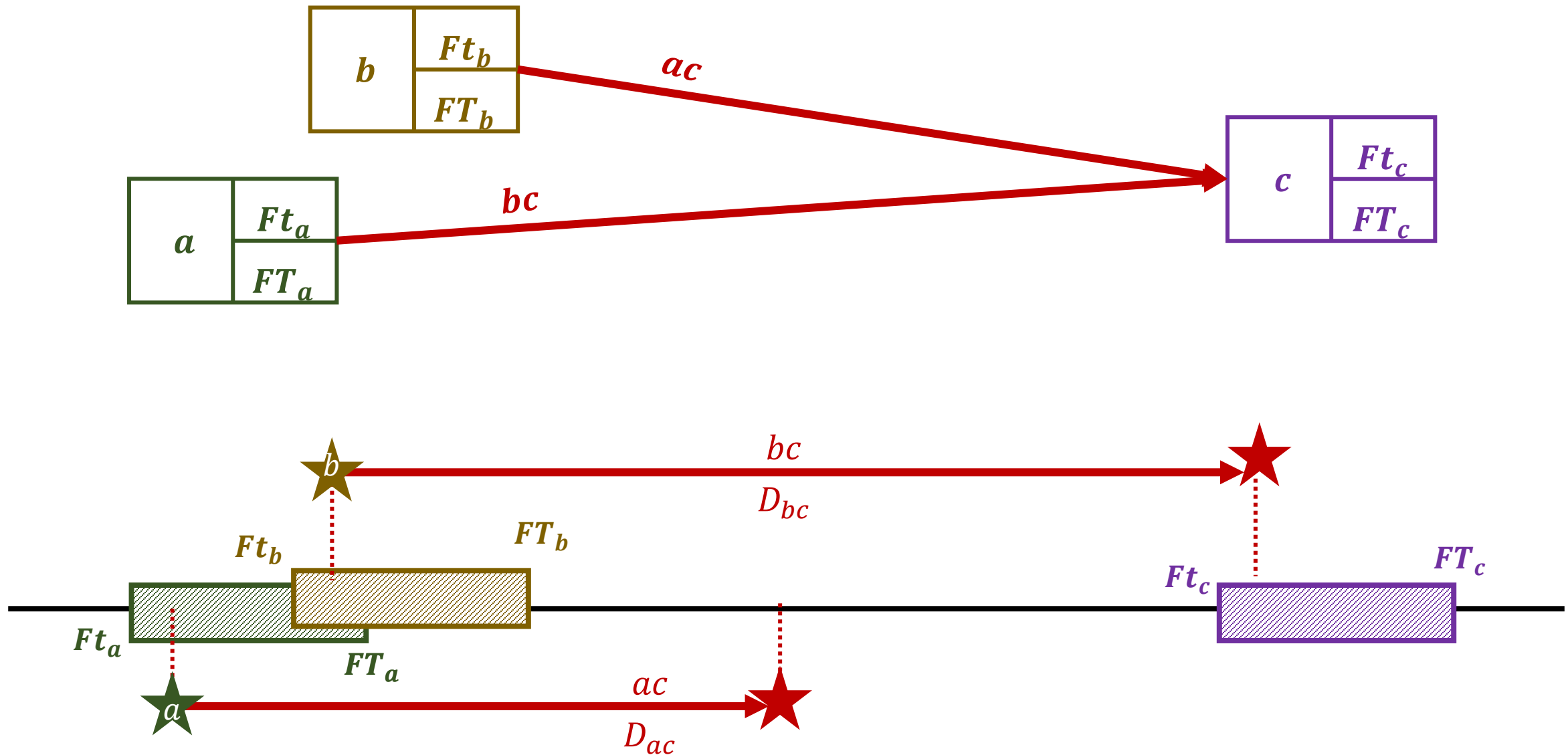
# Dependencia de más de una tarea: tiempo temprano

Condición de dependencia:

En fecha temprana, el evento “c” **no puede concretarse** hasta que hayan finalizado las tareas “ac” y “bc”.



# Dependencia de más de una tarea: tiempo temprano



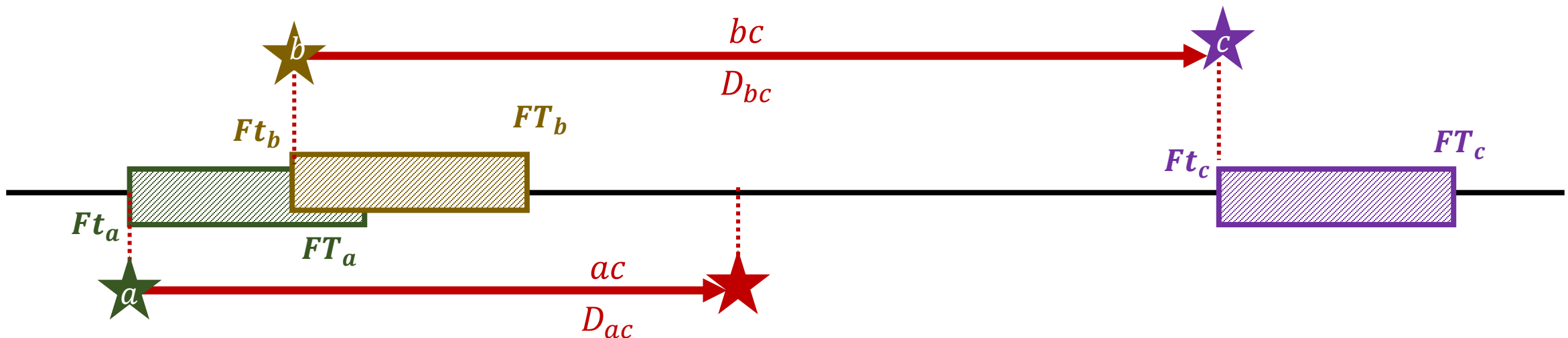
# Dependencia de más de una tarea: tiempo temprano

La tarea "bc" es la última en finalizar, si todas comienzan a fecha temprana.

La tarea "bc" es la que determina el tiempo temprano del evento "c".

*Por lo tanto:*

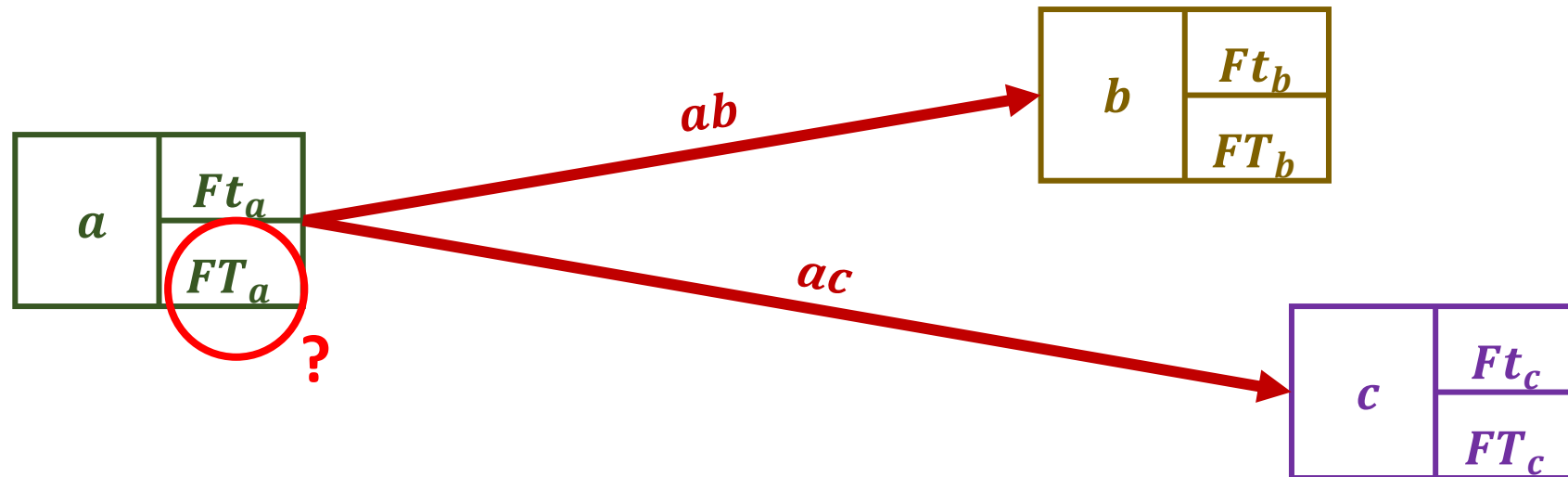
$$Ft_c = \max(Ft_a + D_{ac}; Ft_b + D_{bc}) = Ft_b + D_{bc}$$



# Dependencia de más de una tarea: tiempo tardío

Condición de dependencia:

En fecha tardía, el evento "a", debe iniciar la tarea que pueda comenzar primero en calendario entre "ab" y "ac".





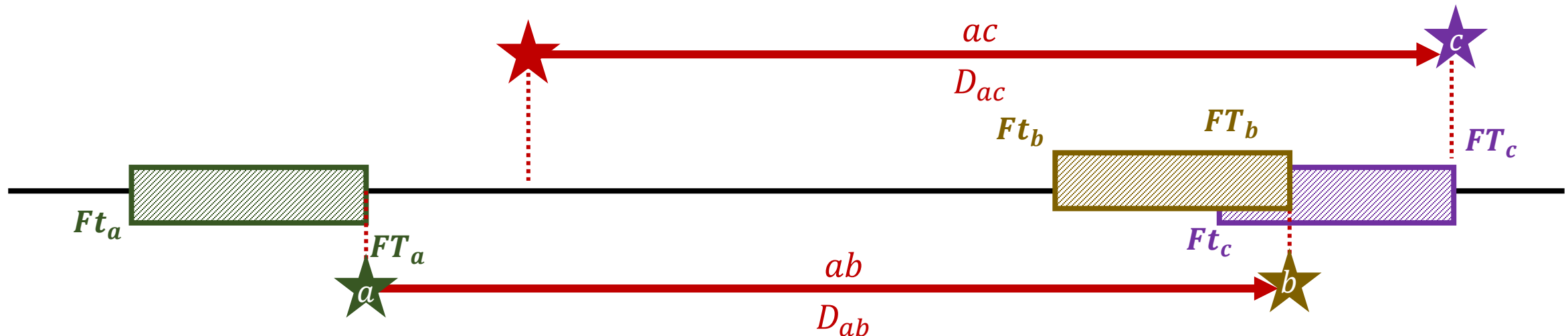
# Eventos condicionados por más de una tarea

La tarea "bc" es la última en finalizar, si todas comienzan a fecha tardía.

La tarea "bc" es la que determina el tiempo tardío del evento "c".

*Por lo tanto:*

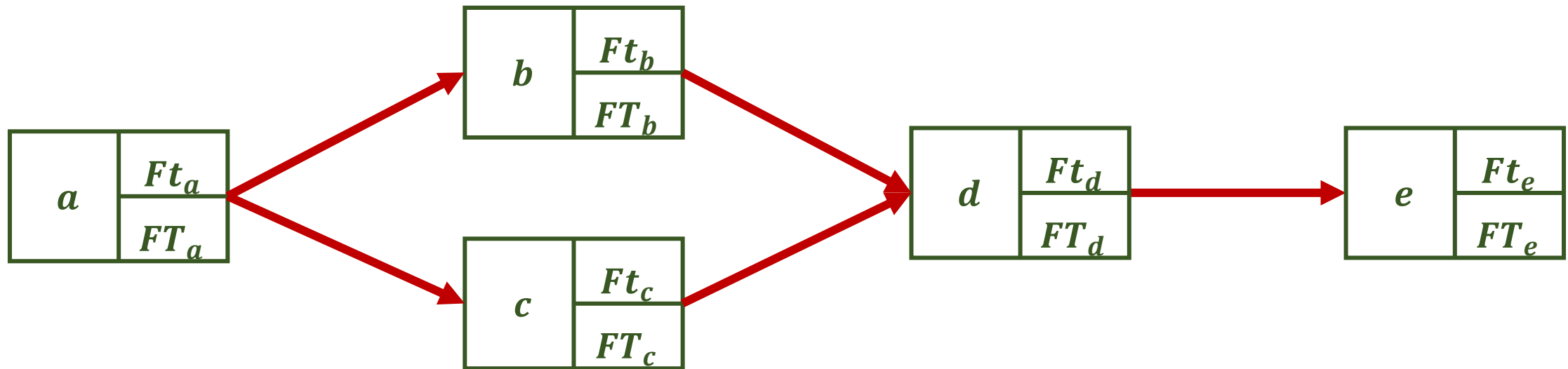
$$FT_a = \min(FT_b - D_{ab}; FT_c - D_{ac}) = FT_b - D_{ab}$$



# Redes o Grafos de Proyectos

Representación de tareas y eventos en un grafo de proyectos.

- El **inicio** es un evento puntual, del que parten todas las primeras tareas.
- El **fin** es un evento puntual al que confluyen todas las últimas tareas.
- Existe **precedencia** entre tareas, lo que genera comportamiento en serie.



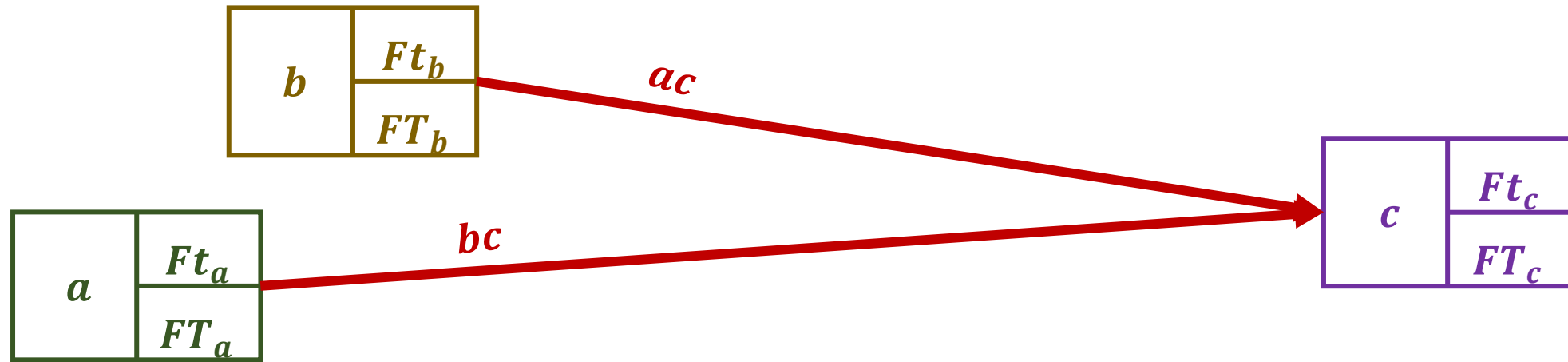
# Métricas de tareas: márgenes

Margen independiente:

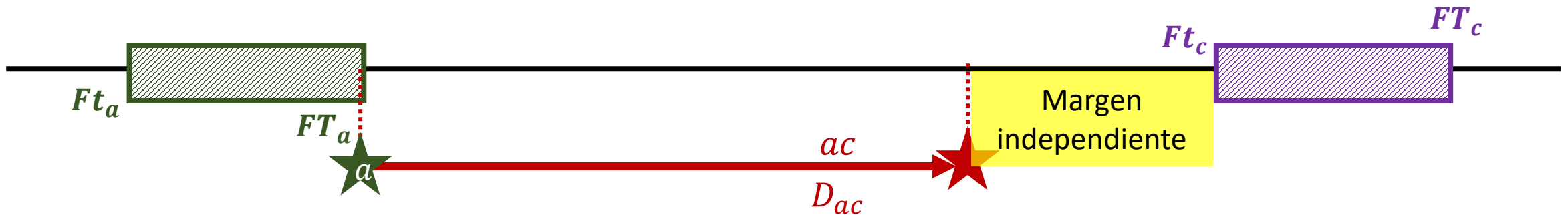
Cuánto puede retrasarse o adelantarse el inicio de la tarea sin perjudicar tareas anteriores o posteriores.

$$MI_{ij} = Ft_j - FT_i - D_{ij}$$

# Métricas de tareas: margen independiente



$$MI_{ac} = Ft_c - FT_a - D_{ac}$$



# Métricas de tareas: márgenes

Margen total:

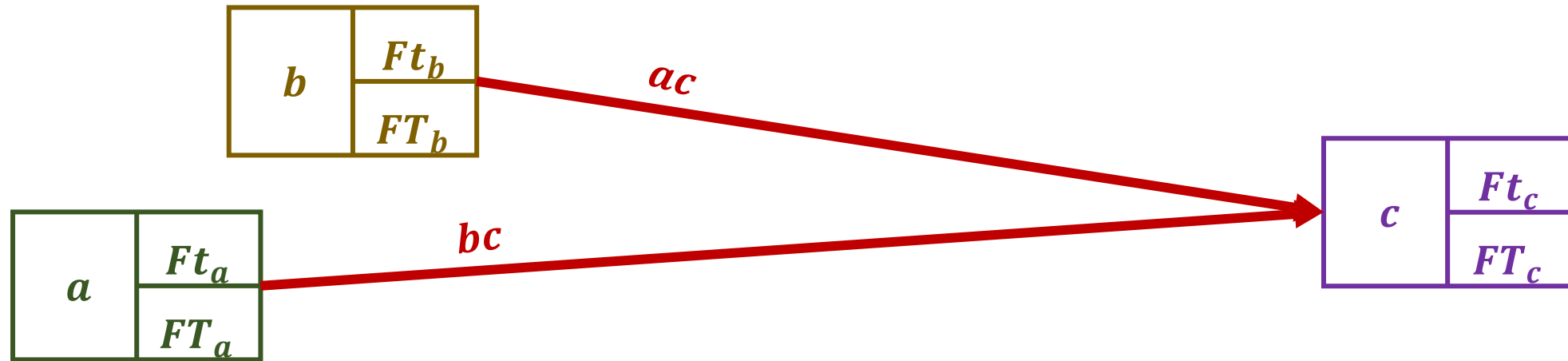
Cuánto puede retrasarse una tarea sin retrasar la totalidad del proyecto. Puede impactar en otras tareas.

$$MT_{ij} = FT_j - Ft_i - D_{ij}$$

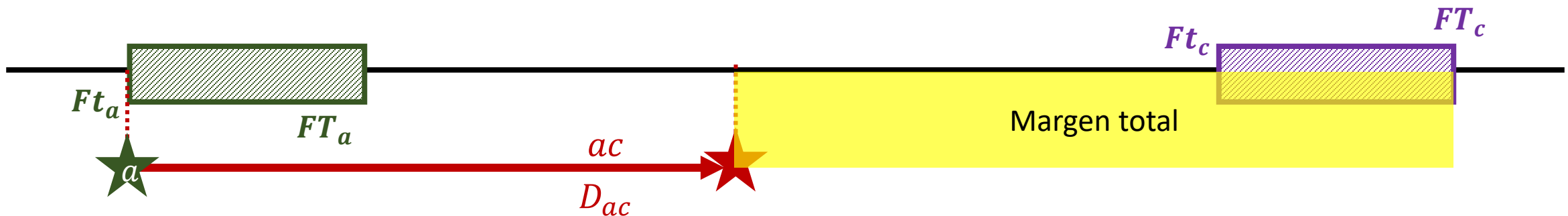
*Tarea crítica: cuando el margen total resulta 0.*

*Es decir, el retraso de esta tarea compromete el proyecto.*

# Métricas de tareas: margen total



$$MT_{ac} = FT_c - Ft_a - D_{ac}$$



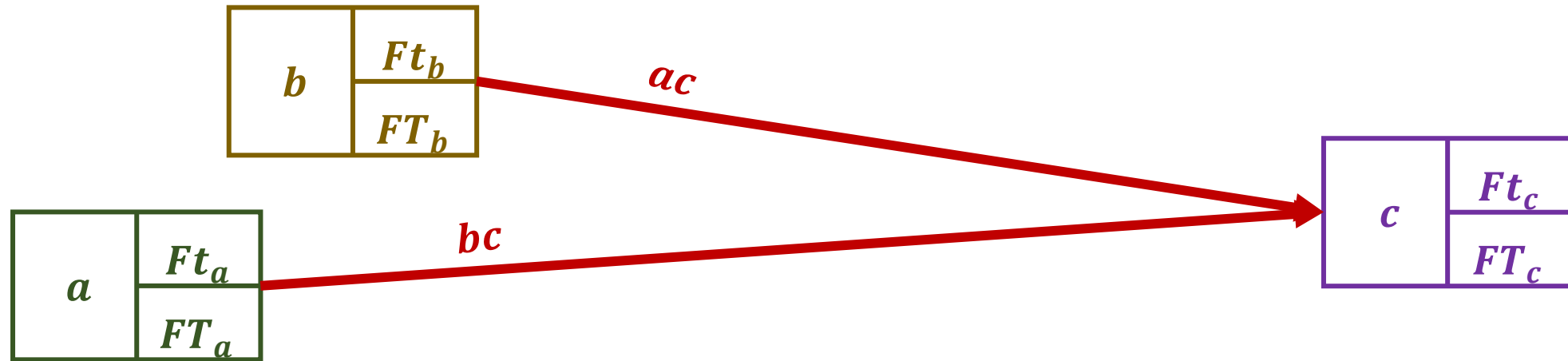
# Métricas de tareas: márgenes

Margen libre:

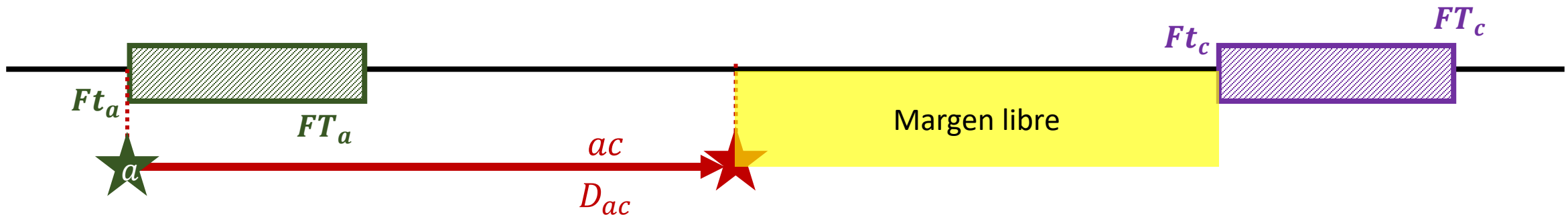
Cuánto puede retrasarse una tarea sin afectar el comienzo de las posteriores.

$$ML_{ij} = Ft_j - Ft_i - D_{ij}$$

# Métricas de tareas: margen libre



$$MT_{ac} = Ft_c - Ft_a - D_{ac}$$



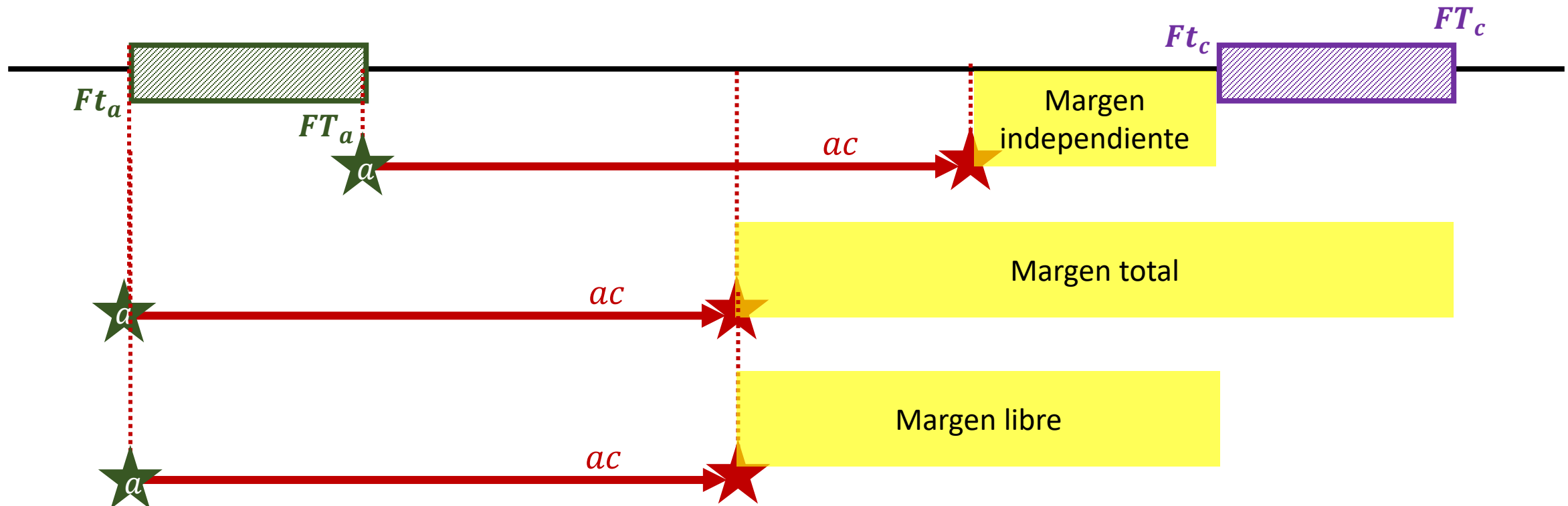


# Métricas de tareas: resumen

Margen independiente:  $MI_{ij} = Ft_j - FT_i - D_{ij}$

Margen total:  $MT_{ij} = FT_j - Ft_i - D_{ij}$

Margen libre:  $ML_{ij} = Ft_j - Ft_i - D_{ij}$



# Método del Camino Crítico (CPM)

Algoritmo de optimización de redes en donde un grafo representa las tareas de un proyecto y sus relaciones.

El **objetivo** es encontrar el conjunto de tareas críticas.

Los supuestos del CPM:

- El **inicio** es un evento puntual, del que parten todas las primeras tareas.
- El **fin** es un evento puntual al que confluyen todas las últimas tareas.
- Existe **precedencia** entre tareas, lo que genera comportamiento en serie.
- La **criticidad** de cada tarea depende de la precedencia y la configuración de tiempos.

# Método del Camino Crítico (CPM)

## Procedimiento general:

- 1- Crear grafo de proyectos. Matriz de incidencia.
- 2- Calcular fechas tempranas.
- 3- Calcular fechas tardías.
- 4- Calcular métricas, especialmente margen total.
- 5- Determinar tareas críticas.

# Grafo de proyectos desde precedencias

Recordar que las tareas son arcos.

La columna “**precedente**” en una tabla de precedencias indica las tareas obligatorias anteriores de la analizada.

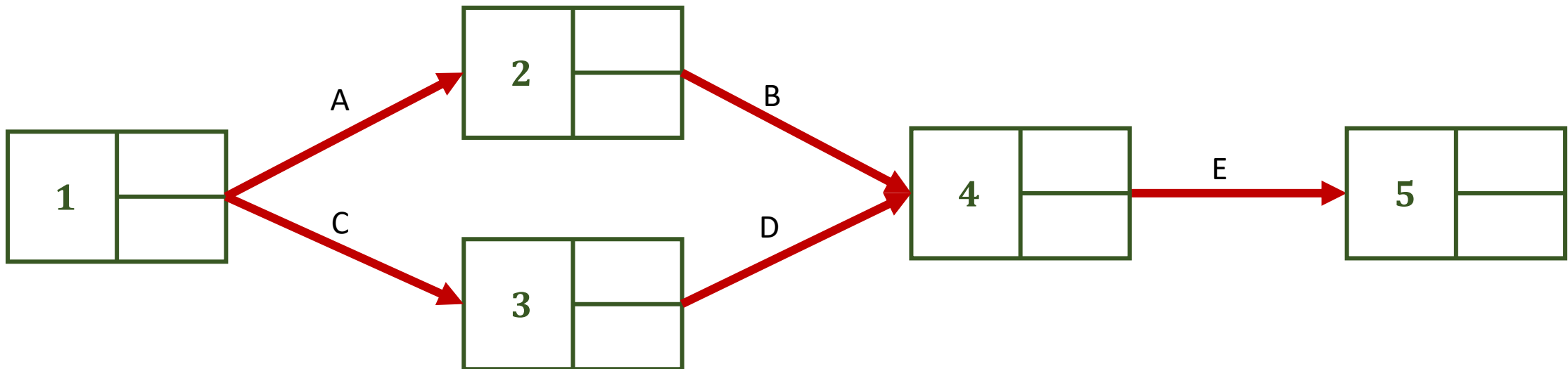
Tarea	Precedente
A	
B	A
C	A
D	B, C
E	D

# Grafo de proyectos desde precedencias

Recordar que las tareas son arcos.

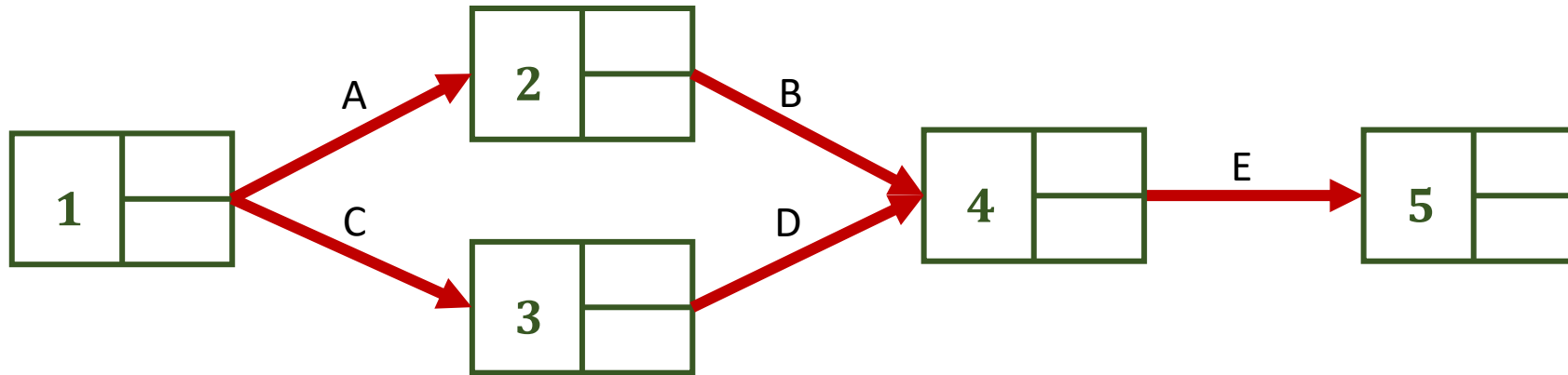
La columna “**precedente**” en una tabla de precedencias indica las tareas obligatorias anteriores de la analizada.

Tarea	Precedente
A	
B	A
C	A
D	B, C
E	D



# Matriz de incidencia del grafo de proyectos

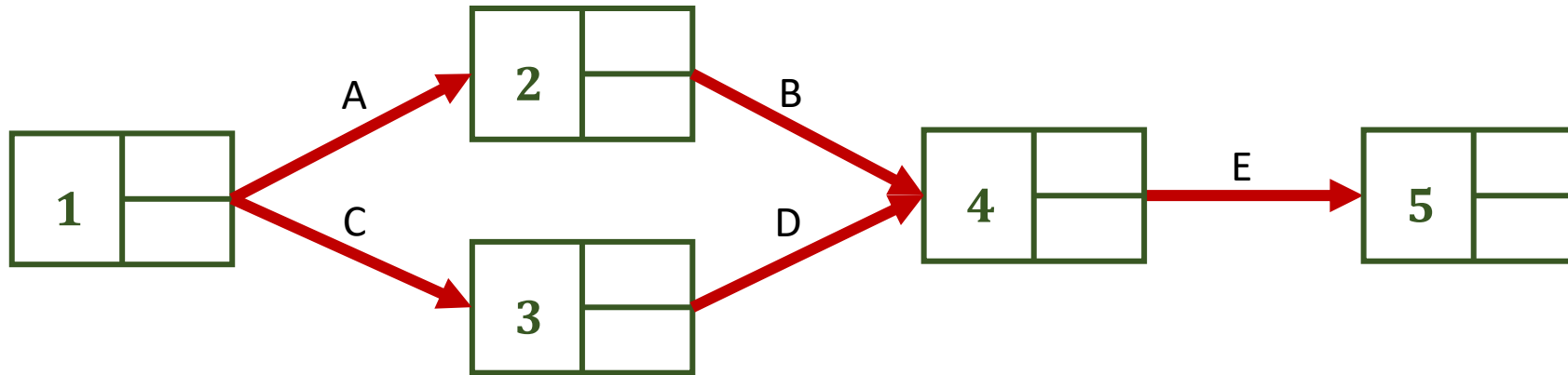
Indica la relación entre los nodos y los arcos, o tareas y eventos del proyecto. Es una matriz nodo-arco.



	A	B	C	D	E
1	1		1		
2	1	1			
3			1	1	
4		1		1	1
5					1

# Matriz de adyacencia de eventos del grafo de proyectos

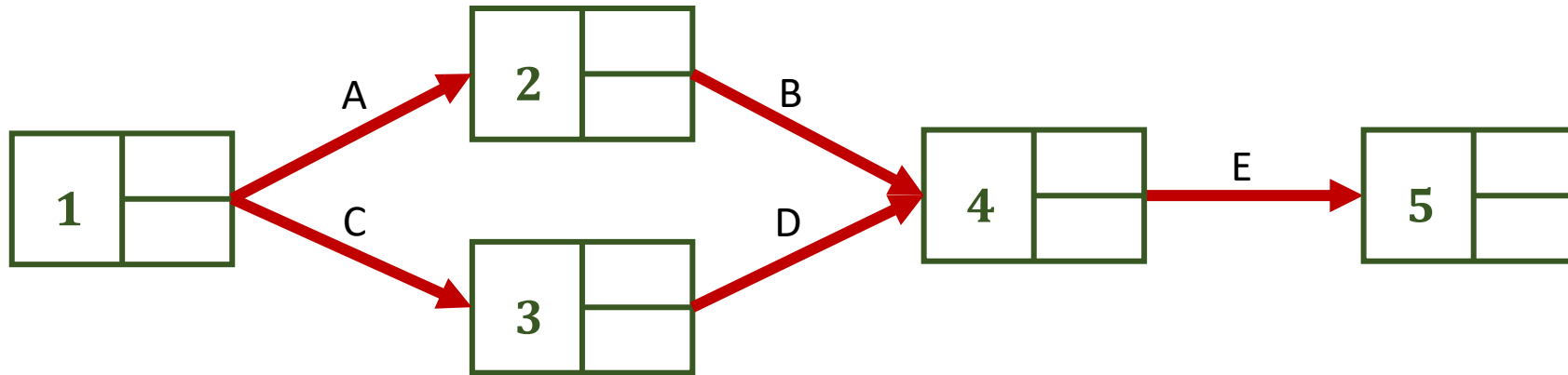
Indica la relación de adyacencia, es una matriz nodo-nodo.



	1	2	3	4	5
1		1	1		
2				1	
3				1	
4					1
5					

# Matriz de precedencia de eventos del grafo de proyectos

Indica la relación de adyacencia, es una matriz nodo-nodo.



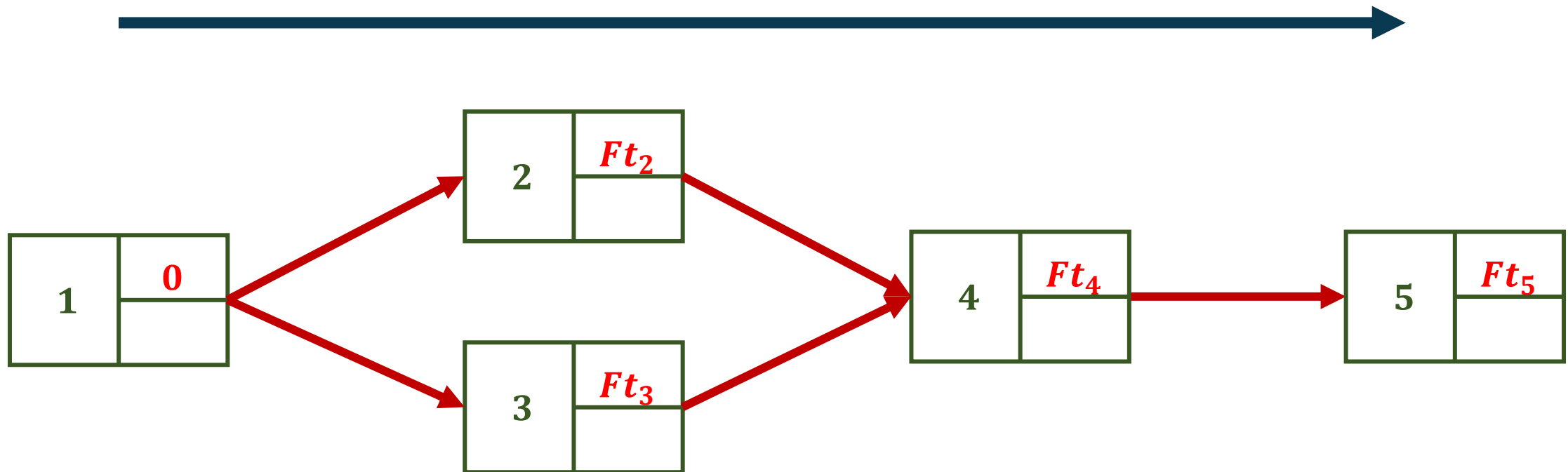
	1	2	3	4	5
1					
2	1				
3	1				
4		1	1		
5				1	



# Cálculo de fechas tempranas

Sabemos que la fecha de inicio siempre es 0.

Calculamos en orden desde el inicio al final, mientras tengamos datos.



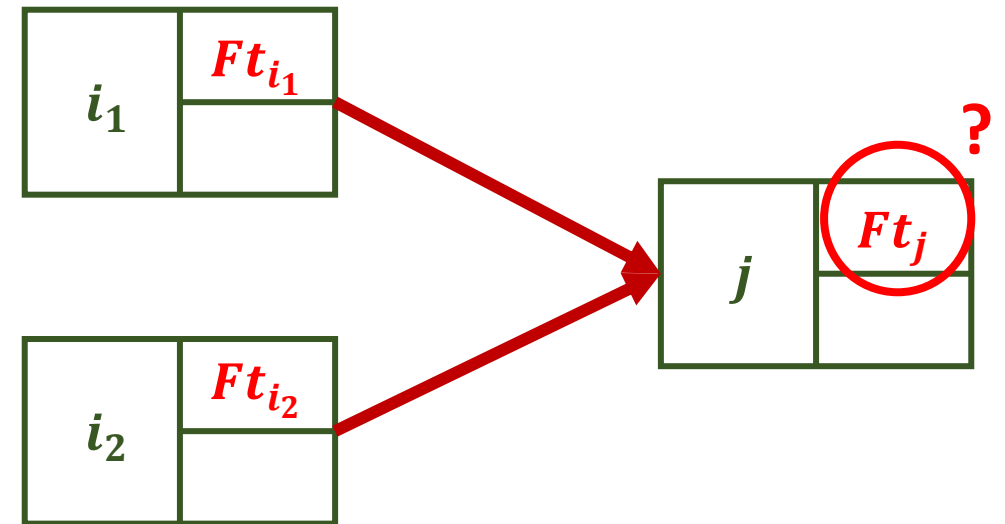
# Cálculo de fechas tempranas

De adelante hacia atrás, en el grafo, calculamos para cada nodo  $j$ :

$$Ft_j = Ft_i + D_{ij}$$

En el caso de existir varios nodos entrantes "i" al nodo final "j", decidimos:

$$Ft_j = \max(\{Ft_i + D_{ij}\})$$

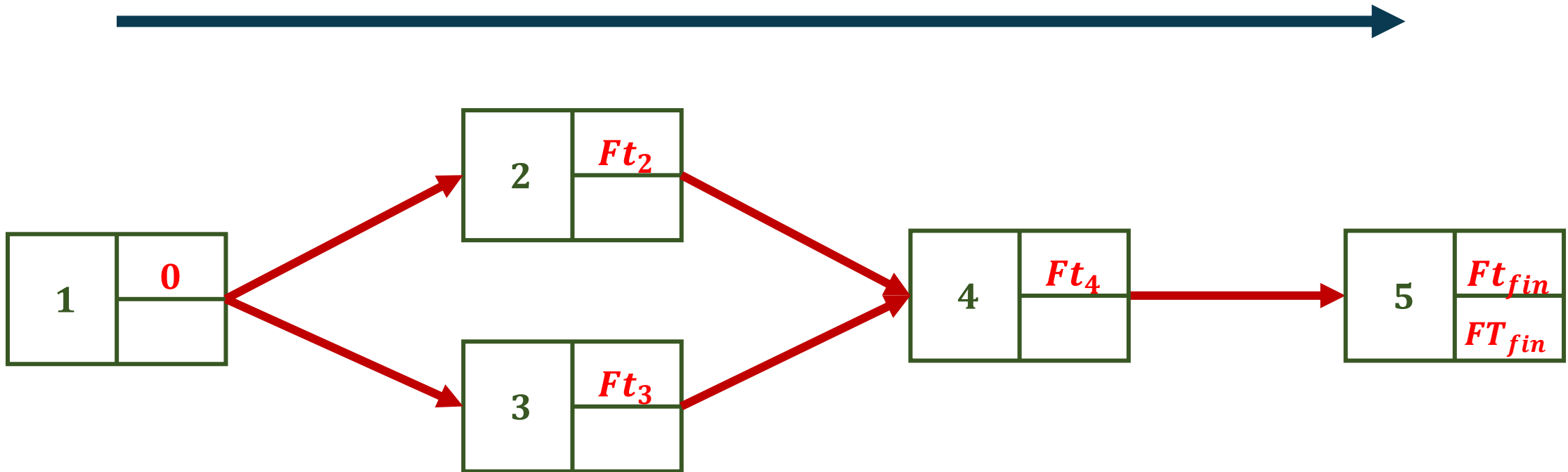


# Cálculo de fechas tempranas

Una vez alcanzado el nodo final, se condiciona:

$$Ft_{final} = FT_{final}$$

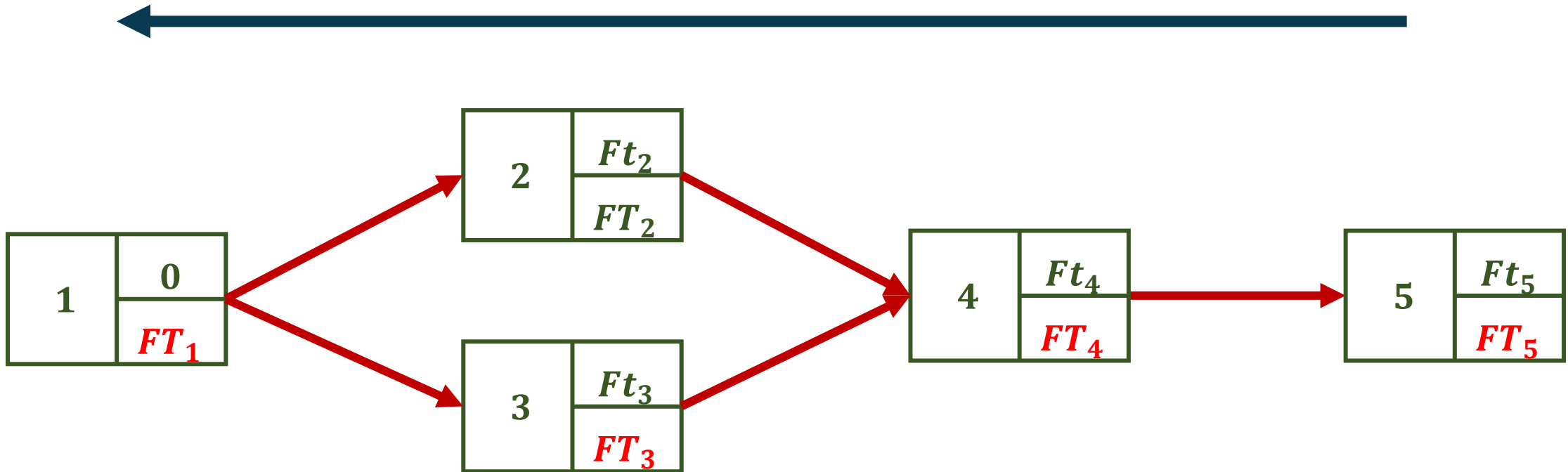
- De esta manera existe una sola fecha de finalización.
- La optimización ocurre dentro del grafo y no se permite mover el fin.



# Cálculo de fechas tardías

De atrás hacia adelante, en el grafo, calculamos las fechas tardías.

Al llegar a la tarea inicial, la fecha tardía debe ser 0: el inicio temprano o tardío implica comenzar en 0.



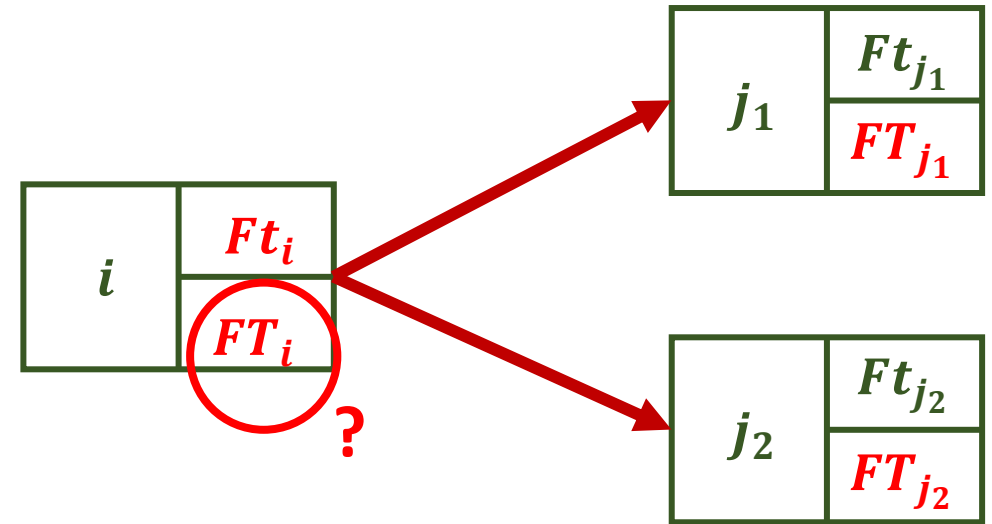
# Cálculo de fechas tardías

De atrás hacia adelante, en el grafo, calculamos para cada nodo  $j$ :

$$FT_i = FT_j + D_{ij}$$

En el caso de existir varios nodos salientes "j" del nodo inicial "i", decidimos:

$$FT_i = \min(\{FT_j - D_{ij}\})$$



# Cálculo de márgenes totales y tareas críticas

Para cada tarea calculamos:

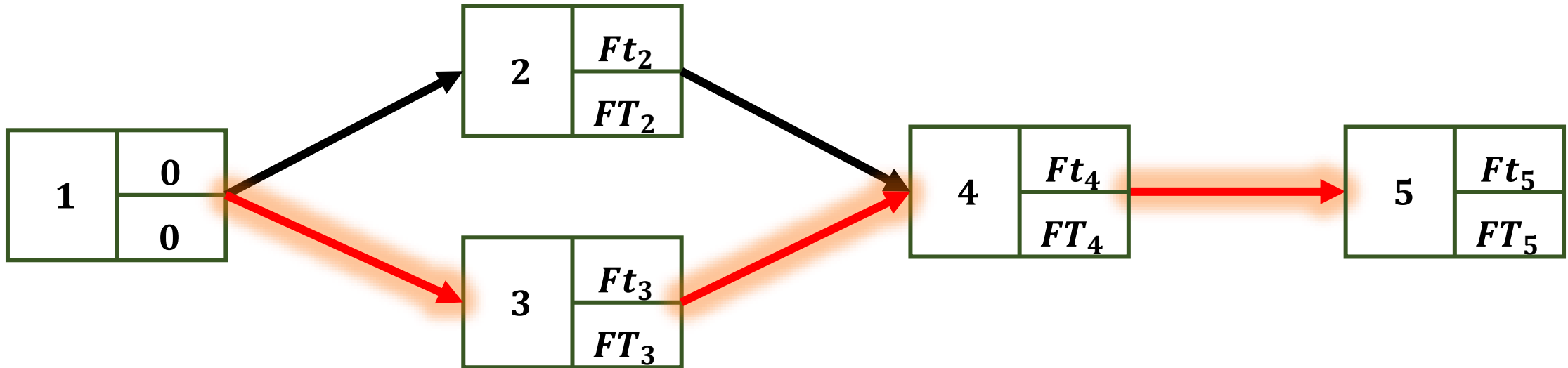
Margen total:  $MT_{ij} = FT_j - Ft_i - D_{ij}$

En caso de resultar 0, la anotamos como crítica.

# Camino crítico

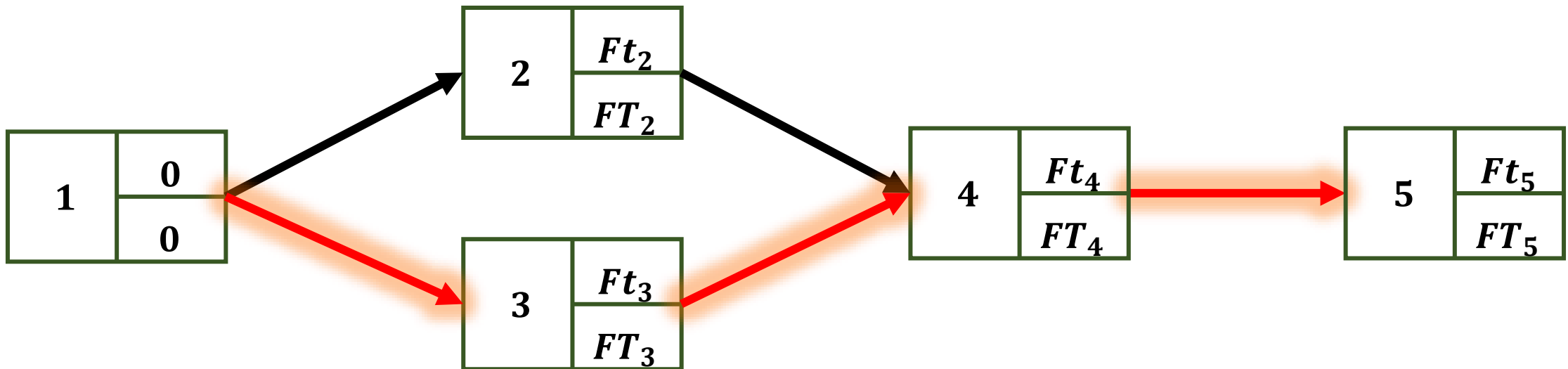
El **camino crítico** es el conjunto de **tareas críticas**. Ninguna tiene margen de retraso.

En caso de retrasarse alguna tarea crítica, es necesario renegociar la finalización del proyecto.



# Camino crítico

El **camino crítico** tiene relación con el problema logístico de “Shortest Path”, aunque visto desde otra perspectiva: representa el “camino más largo”.





# Tareas ficticias

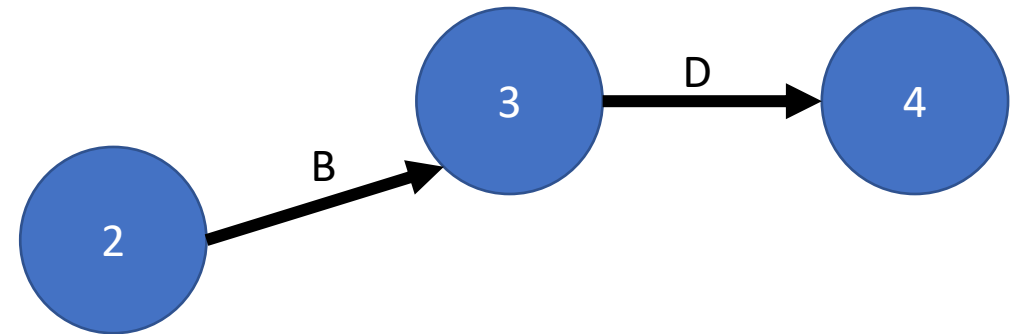
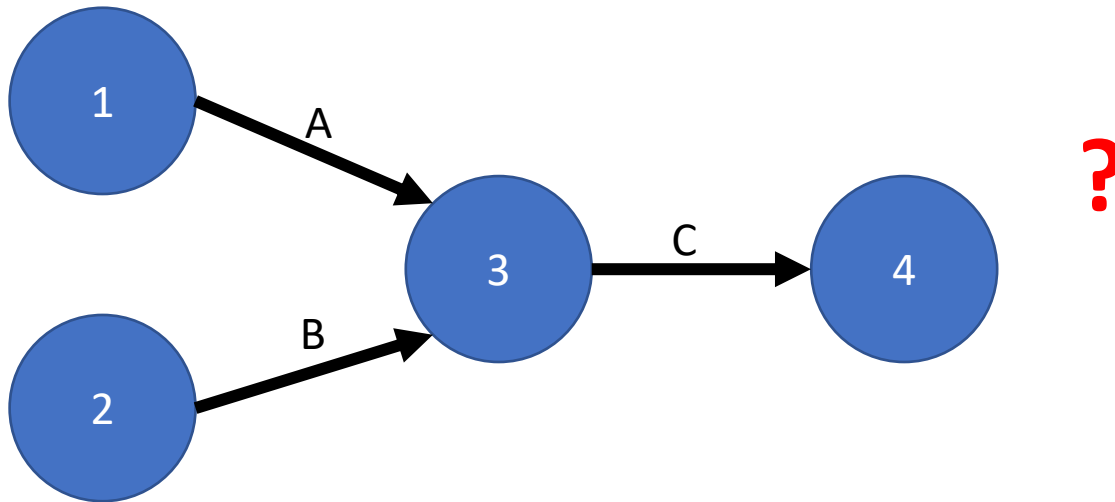
- Son tareas que surgen de la representación del grafo de proyecto y **no de la realidad**.
- Son consecuencia de **representar las tareas como arcos**.
- Necesarias para **respetar la precedencia** en determinadas situaciones puntuales.
- Tienen **duración nula**, no impactan directamente en la finalización del proyecto.
- El **camino crítico** puede pasar por la tarea ficticia.

# Ejemplo

Tarea	Precedente	Duración
C	A, B	$D_C$
D	B	$D_D$

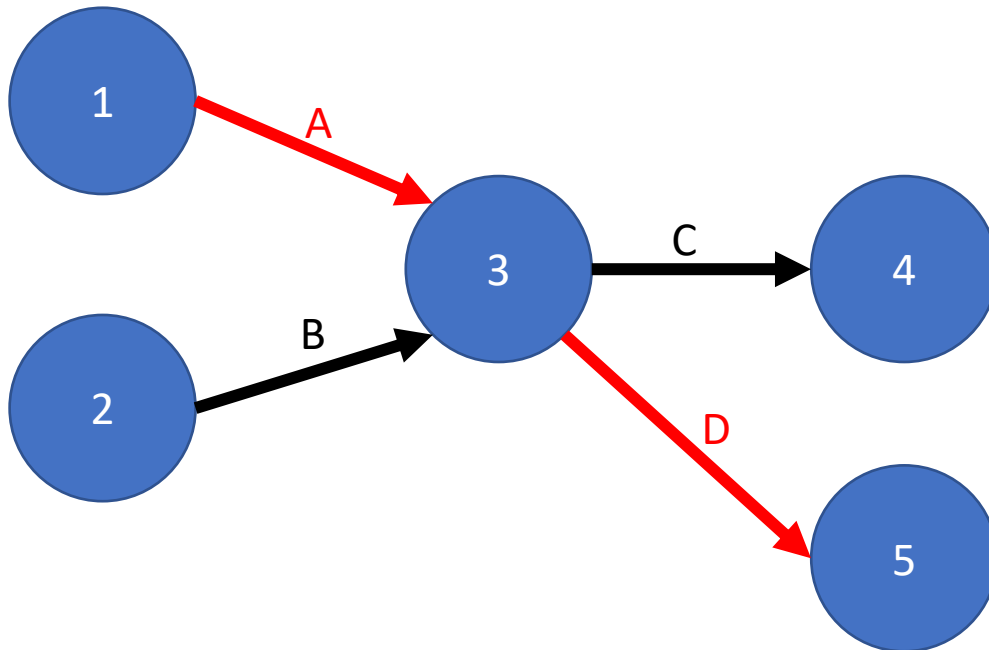
# Ejemplo

Tarea	Precedente	Duración
C	A, B	$D_C$
D	B	$D_D$



# Ejemplo

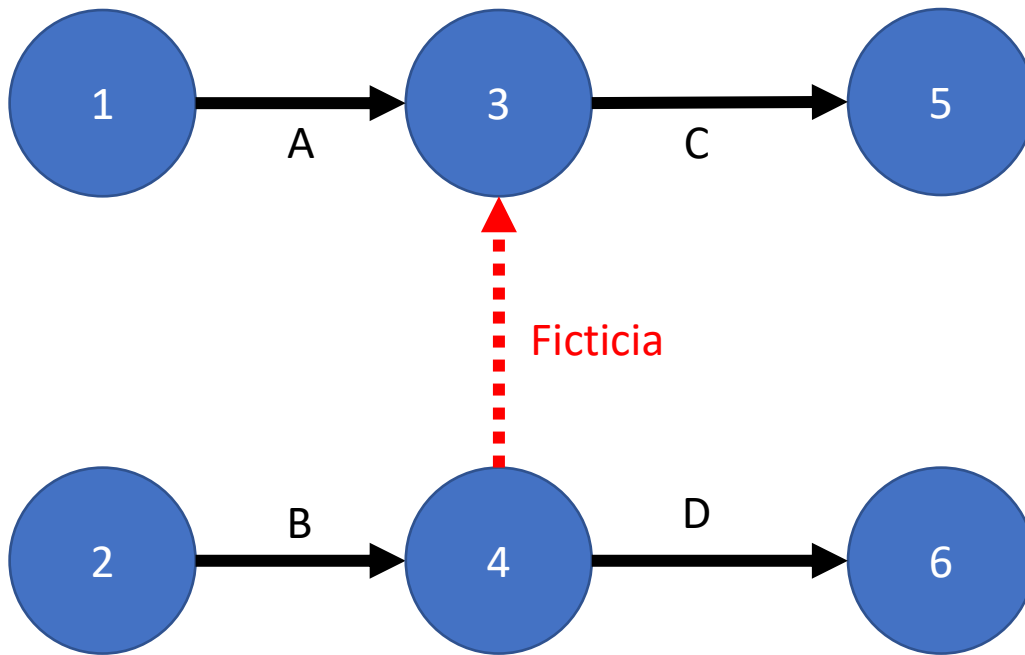
Tarea	Precedente	Duración
C	A, B	$D_C$
D	B	$D_D$



Esta solución es incorrecta, porque D no tiene de precedente a A.

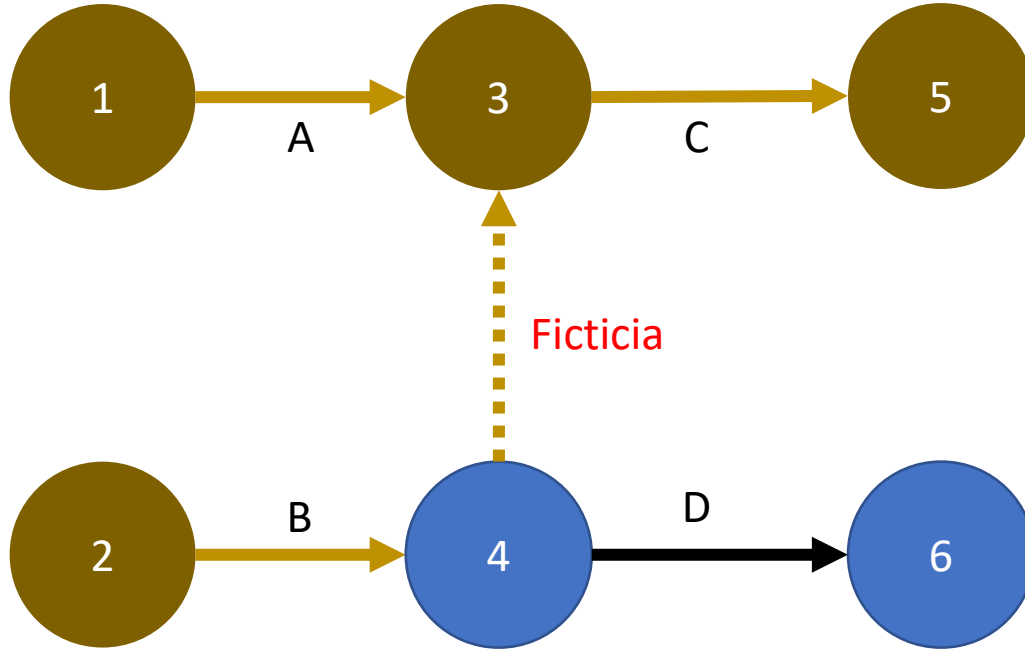
# Ejemplo

Tarea	Precedente	Duración
C	A, B	$D_C$
D	B	$D_D$



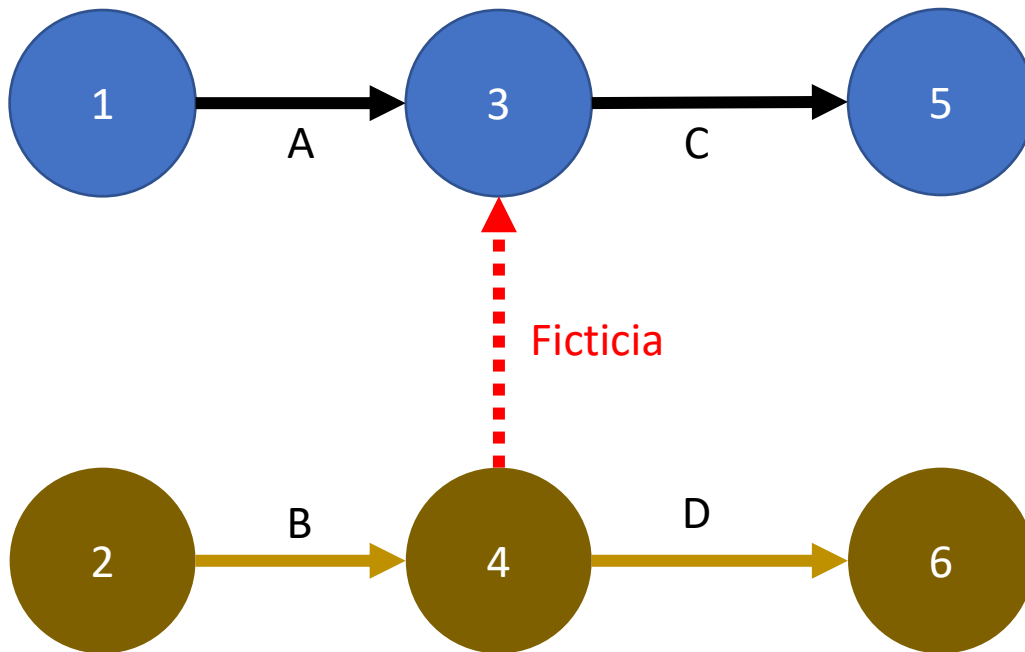
# Ejemplo

Tarea	Precedente	Duración
C	A, B	$D_C$
D	B	$D_D$



# Ejemplo

Tarea	Precedente	Duración
C	A, B	$D_C$
D	B	$D_D$



# Calendarios de redes de proyectos

El **calendario** se calcula luego de obtener los márgenes y camino crítico.

Las **tareas críticas** no tienen margen de movimiento, ya que retrasarían todo el proyecto.

Las **tareas no críticas** pueden comenzar entre dos fechas:

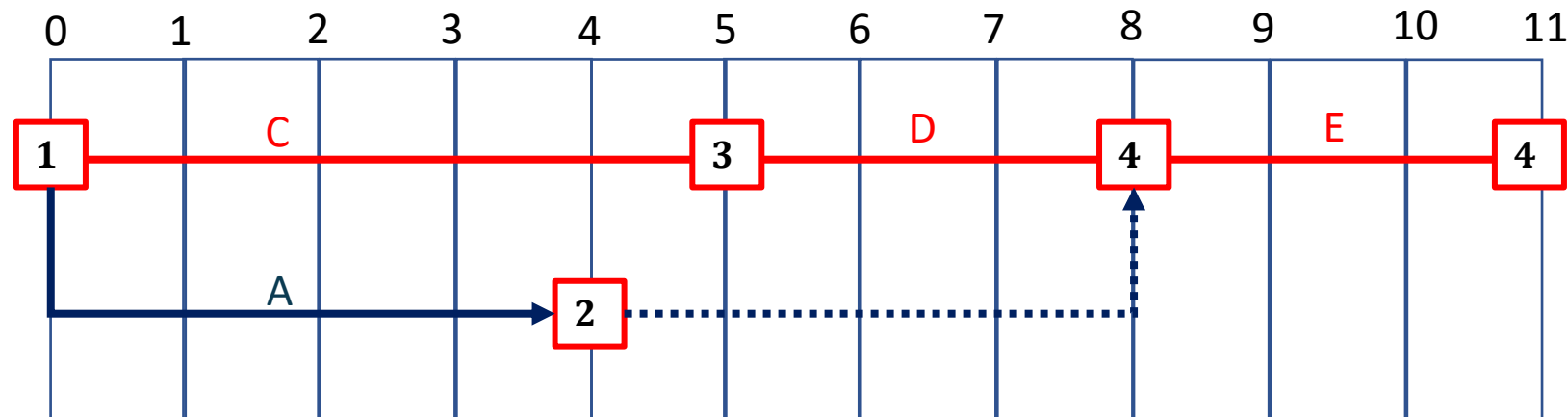
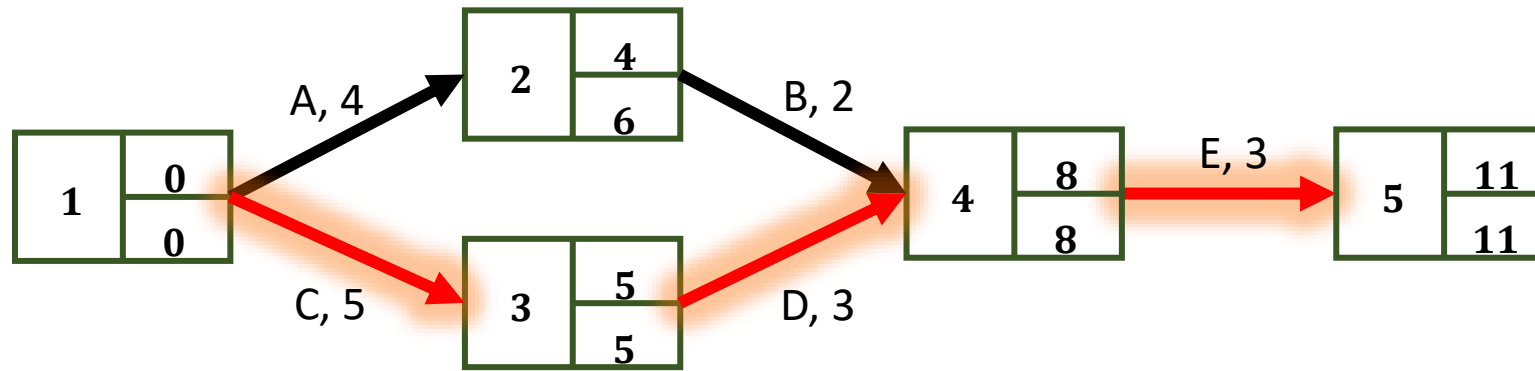
- Primera fecha de comienzo.
- Última fecha de comienzo.



# Calendarios de redes de proyectos

## Calendario de fechas tempranas:

Todas las tareas son ejecutadas a primera fecha de comienzo.



# Calendarios de redes de proyectos

## Calendario de fechas tardías:

Todas las tareas son ejecutadas a última fecha de comienzo.

