Programación lineal: modelo de planificación de la producción

Rodrigo Maranzana

Concepto: planificación de la producción

La planificación de la producción implica:

- decidir la producción de planta,
- configurando los recursos disponibles, o invirtiendo en nuevos recursos,
- para cumplir una demanda previamente proyectada por el sector comercial,
- discretizada en períodos con un horizonte temporal táctico.

El concepto clave es: balance productivo de nivel táctico.

Ejemplo

Una empresa fabrica caños de escape para terminales automotrices,

Planificación de la producción tiene un horizonte temporal de 6 meses con discretización mensual.

En el cuadro [1], se adjunta demanda de la terminal automotriz por mes.

La planta trabaja a horas regulares y extra. En el cuadro [2], se describe el costo de cada tipo de hora, además el costo de almacenar.

En el cuadro [3], se describe la capacidad máxima de producción en ambas modalidades.

1. Construir el grafo asociado al problema.
2. Armar un modelo de programación matemática.
3. Resolver con python.

[1]

Mes	Demanda (unidades)
1	14.500
2	15.500
3	13.200
4	12.100
5	14.200
6	16.000

[2]

Mes	costo (usd/u)
Regulares	125
Extra	140
Stock	25

[3]

Mes	capacidad (u)
Regulares	13.000
Extra	2.500

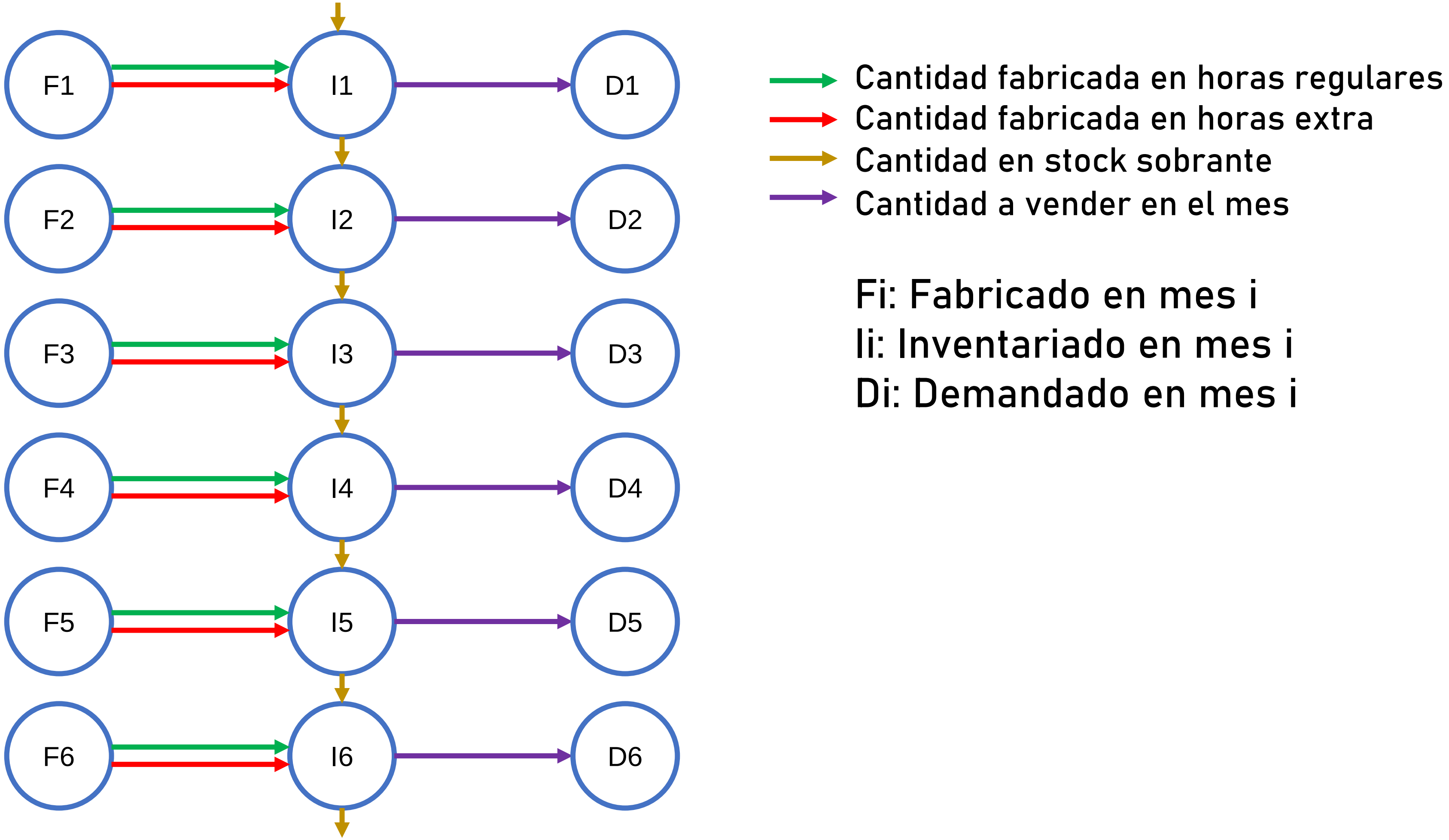
Claves del modelo de producción

- Concepto de balance de producción:

"todo lo que entra es igual a todo lo que sale"

- Las variables están asociadas a la discretización temporal: mes.
- Existe una ecuación de balance productivo por mes.
- Balance implica cantidad de producto.
- Cantidades que intervienen:
  - Producida en horas regulares.
  - Producida en horas extra.
  - En inventario.
  - Listas para vender en el mes.

1. Grafo asociado



Fi: Fabricado en mes i
Ii: Inventariado en mes i
Di: Demandado en mes i

2. Modelo: parámetros y variables de decisión

Variables de decisión

- Cantidad fabricada en el mes i en horas regulares: FHR_i
- Cantidad fabricada en el mes i en horas extra: FHE_i
- Stock final del mes i: SF_i

Parámetros

- Demanda mensual: D_i
- Costo de producir en horas regulares: C_{FHR}
- Costo de producir en horas extra: C_{FHE}
- Costo de stockear: C_S
- Límite de producción regular: L_{FHR}
- Límite de producción extra: L_{FHE}
- Stock inicial en mes 1: S_0

Además suponemos que el stock inicial es 0

2. Modelo: función objetivo

Siendo “i” el índice del mes:

$$Min \sum_{i} (FHR_i * C_{FHR} + FHE_i * C_{FHE}) + (SF_i * C_S)$$

Variables de decisión

- Cantidad fabricada en el mes i en horas regulares: FHR_i
- Cantidad fabricada en el mes i en horas extra: FHE_i
- Stock final del mes i: SF_i

Parámetros

- Demanda mensual: D_i
- Costo de producir en horas regulares: C_{FHR}
- Costo de producir en horas extra: C_{FHE}
- Costo de stockear: C_S
- Límite de producción regular: L_{FHR}
- Límite de producción extra: L_{FHE}
- Stock inicial en mes 1: S_0

2. Modelo: restricción de balance productivo

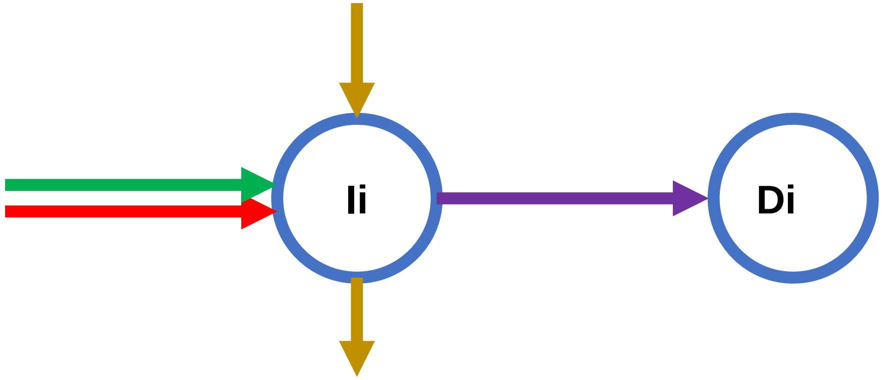
$$\underbrace{FHR_i + FHE_i}_{\text{Lo que produzco}} + \underbrace{SF_{i-1}}_{\text{Lo que ya tengo en stock}} = \overbrace{D_i}^{\text{Lo que me demandan}} + \underbrace{SF_i}_{\text{Lo que queda para el próximo mes en stock}} \qquad \forall i$$

Variables de decisión

- Cantidad fabricada en el mes i en horas regulares: FHR_i
- Cantidad fabricada en el mes i en horas extra: FHE_i
- Stock final del mes i: SF_i

Parámetros

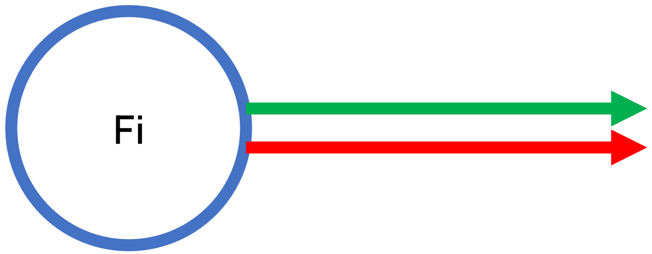
- Demanda mensual: D_i
- Costo de producir en horas regulares: C_{FHR}
- Costo de producir en horas extra: C_{FHE}
- Costo de stockear: C_S
- Límite de producción regular: L_{FHR}
- Límite de producción extra: L_{FHE}
- Stock inicial en mes 1: S_0



2. Modelo: restricciones de capacidad

$$FHR_i \leq L_{FHR} \qquad \forall i$$

$$FHE_i \leq L_{FHE} \qquad \forall i$$



Variables de decisión

- Cantidad fabricada en el mes i en horas regulares: FHR_i
- Cantidad fabricada en el mes i en horas extra: FHE_i
- Stock final del mes i: SF_i

Parámetros

- Demanda mensual: D_i
- Costo de producir en horas regulares: C_{FHR}
- Costo de producir en horas extra: C_{FHE}
- Costo de stockear: C_S
- Límite de producción regular: L_{FHR}
- Límite de producción extra: L_{FHE}
- Stock inicial en mes 1: S_0

2. Modelo: restricciones de positividad

$$FHR_i \geq 0 \qquad \forall i$$

$$FHE_i \geq 0 \qquad \forall i$$

$$SF_i \geq 0 \qquad \forall i$$

Variables de decisión

- Cantidad fabricada en el mes i en horas regulares: FHR_i
- Cantidad fabricada en el mes i en horas extra: FHE_i
- Stock final del mes i: SF_i

Parámetros

- Demanda mensual: D_i
- Costo de producir en horas regulares: C_{FHR}
- Costo de producir en horas extra: C_{FHE}
- Costo de stockear: C_S
- Límite de producción regular: L_{FHR}
- Límite de producción extra: L_{FHE}
- Stock inicial en mes 1: S_0

2. Modelo: restricción de stock inicial

$$SF_0 = S_0$$

Variables de decisión

- Cantidad fabricada en el mes i en horas regulares: FHR_i
- Cantidad fabricada en el mes i en horas extra: FHE_i
- Stock final del mes i: SF_i

Parámetros

- Demanda mensual: D_i
- Costo de producir en horas regulares: C_{FHR}
- Costo de producir en horas extra: C_{FHE}
- Costo de stockear: C_S
- Límite de producción regular: L_{FHR}
- Límite de producción extra: L_{FHE}
- Stock inicial en mes 1: S_0

2. Modelo de optimización

$$Min \sum_i (FHR_i * C_{FHR} + FHE_i * C_{FHE}) + (SF_i * C_S)$$

$s.t.$

$$FHR_i + FHE_i + SF_{i-1} = D_i + SF_i \quad \forall i$$

$$FHR_i \leq L_{FHR} \quad \forall i$$

$$FHE_i \leq L_{FHE} \quad \forall i$$

$$FHR_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$FHE_i \geq 0 \quad \forall i$$

$$C_S \geq 0 \quad \forall i$$

$$SF_0 = S_0$$

Variables de decisión

- Cantidad fabricada en el mes i en horas regulares: FHR_i
- Cantidad fabricada en el mes i en horas extra: FHE_i
- Stock final del mes i: SF_i

Parámetros

- Demanda mensual: D_i
- Costo de producir en horas regulares: C_{FHR}
- Costo de producir en horas extra: C_{FHE}
- Costo de stockear: C_S
- Límite de producción regular: L_{FHR}
- Límite de producción extra: L_{FHE}
- Stock inicial en mes 1: S_0

3. Modificación del modelo para Python

$$Min \sum_i (FHR_i * C_{FHR} + FHE_i * C_{FHE}) + (SF_i * C_S)$$

$s.t.$

$$FHR_i + FHE_i + S_0 = D_i + SF_i \qquad \forall i = \{0\}$$

$$FHR_i + FHE_i + SF_{i-1} = D_i + SF_i \quad \forall i = \{1,2,3,4,5\}$$

$$FHR_i \leq L_{FHR} \qquad \forall i$$

$$FHE_i \leq L_{FHE} \qquad \forall i$$

$$FHR_i \geq 0 \qquad \forall i$$

$$FHE_i \geq 0 \qquad \forall i$$

$$C_S \geq 0 \qquad \forall i$$

$$SF_0 = S_0$$

Variables de decisión

- Cantidad fabricada en el mes i en horas regulares: FHR_i
- Cantidad fabricada en el mes i en horas extra: FHE_i
- Stock final del mes i: SF_i

Parámetros

- Demanda mensual: D_i
- Costo de producir en horas regulares: C_{FHR}
- Costo de producir en horas extra: C_{FHE}
- Costo de stockear: C_S
- Límite de producción regular: L_{FHR}
- Límite de producción extra: L_{FHE}
- Stock inicial en mes 1: S_0

3. Solución con Python: sets, variables, parámetros

```python
import pulp

lp01 = pulp.LpProblem("planificacion-produccion", pulp.LpMinimize)

# Sets:
meses = range(6)
meses_1 = range(1, 6)

# Variables:
FHR = pulp.LpVariable.dicts('FHR', meses, 0, None, cat='Continuous')
FHE = pulp.LpVariable.dicts('FHE', meses, 0, None, cat='Continuous')
SF = pulp.LpVariable.dicts('SF', meses, 0, None, cat='Continuous')

# Parámetros:
D = [14_500, 15_500, 13_200, 12_100, 14_200, 16_000]
CHR = 125
CHE = 140
LFHR = 13_000
LFHE = 2_500
CS = 25
I0 = 0
```

Variables de decisión

- Cantidad fabricada en el mes i en horas regulares: FHR_i
- Cantidad fabricada en el mes i en horas extra: FHE_i
- Stock final del mes i: SF_i

Parámetros

- Demanda mensual: D_i
- Costo de producir en horas regulares: C_{FHR}
- Costo de producir en horas extra: C_{FHE}
- Costo de stockear: C_S
- Límite de producción regular: L_{FHR}
- Límite de producción extra: L_{FHE}
- Stock inicial en mes 1: S_0

3. Solución con Python: modelo LP

```
# Función objetivo:
Z = [FHR[m] * CHR + FHE[m] * CHE + SF[m] * CS for m in meses]
lp01 += pulp.lpSum(Z), 'Z'

# Restricciones:
## Balance productivo 1er mes:
lp01 += FHR[0] + FHE[0] + I0 == SF[0] + D[0]

## Balance productivo meses siguientes:
for m in meses_1:
    lp01 += FHR[m] + FHE[m] + SF[m-1] == SF[m] + D[m]

## Capacidad:
for m in meses:
    lp01 += FHR[m] <= LFHR
    lp01 += FHE[m] <= LFHE
```

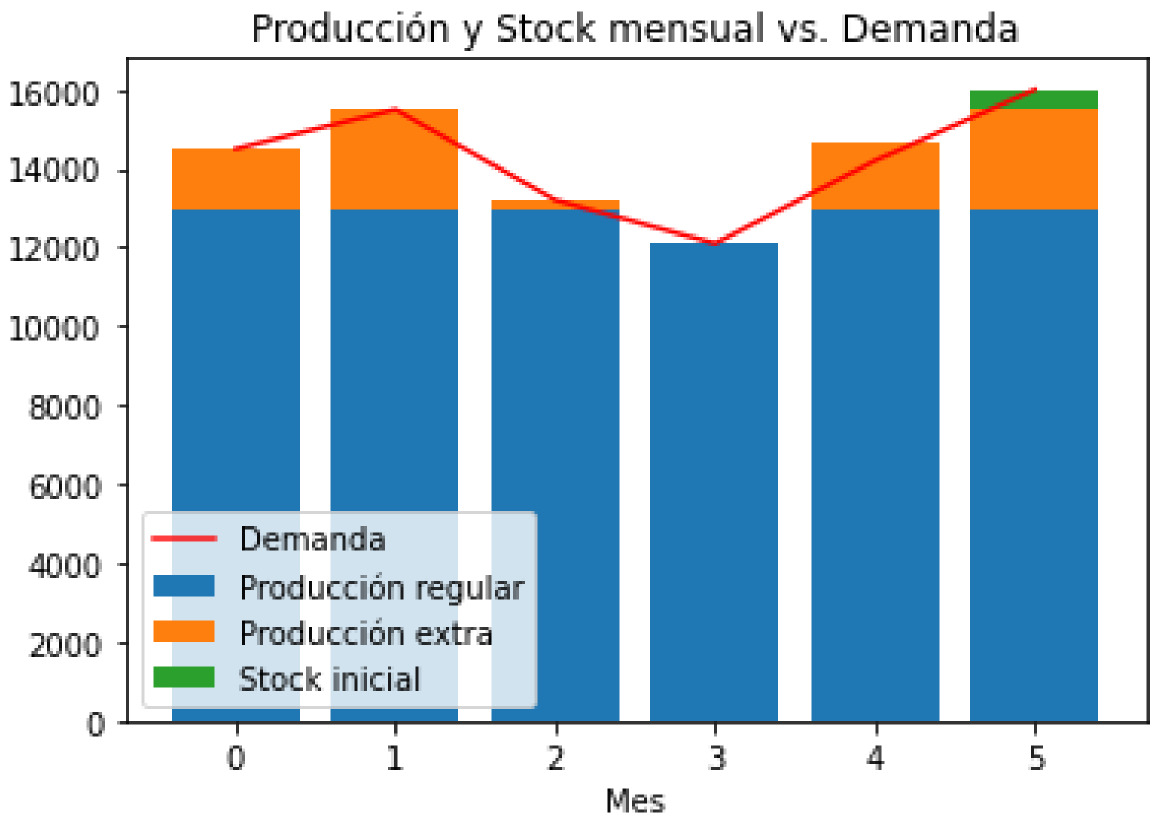
$$Min \sum_i (FHR_i * C_{FHR} + FHE_i * C_{FHE}) + (SF_i * C_S)$$

$s.t.$

$$FHR_i + FHE_i + S_0 = D_i + SF_i \qquad \forall i = \{0\}$$
$$FHR_i + FHE_i + SF_{i-1} = D_i + SF_i \qquad \forall i = \{1,2,3,4,5\}$$
$$FHR_i \leq L_{FHR} \qquad \forall i$$
$$FHE_i \leq L_{FHE} \qquad \forall i$$
$$FHR_i \geq 0 \qquad \forall i$$
$$FHE_i \geq 0 \qquad \forall i$$
$$C_S \geq 0 \qquad \forall i$$
$$SF_0 = S_0$$

3. Solución con Python

```
# Resolucion:
lp01.solve()
```




```
>> Optimal
>>
>> FHE_0 = 1500.00
>> FHE_1 = 2500.00
>> FHE_2 = 200.00
>> FHE_3 = 0.00
>> FHE_4 = 1700.00
>> FHE_5 = 2500.00
>> FHR_0 = 13000.00
>> FHR_1 = 13000.00
>> FHR_2 = 13000.00
>> FHR_3 = 12100.00
>> FHR_4 = 13000.00
>> FHR_5 = 13000.00
>> SF_0 = -0.00
>> SF_1 = 0.00
>> SF_2 = 0.00
>> SF_3 = 0.00
>> SF_4 = 500.00
>> SF_5 = 0.00
>>
>> Función objetivo: 10826000.0
```