Método de la transformada inversa

Rodrigo Maranzana

Método de la transformada inversa

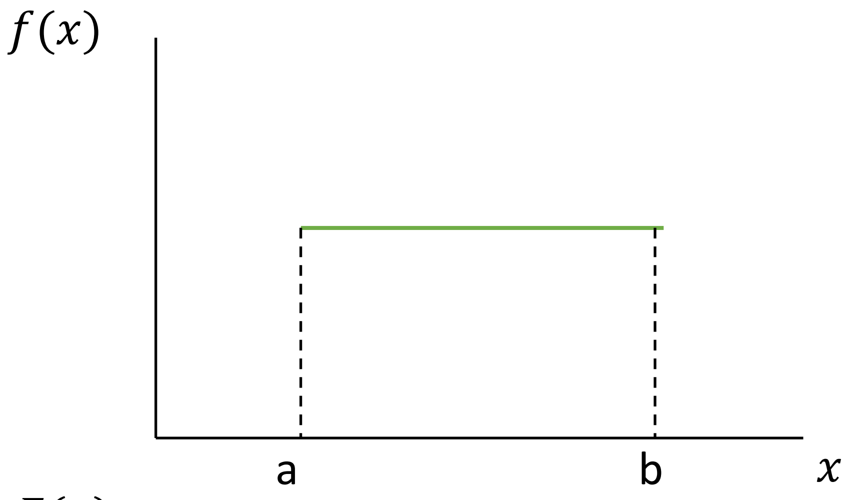
Es un método de sampleo de variables aleatorias.

- Ventaja: muy simple de obtener, requiere invertir la función acumulada de densidad de probabilidad.

- Desventaja: es necesario conocer la solución analítica de la acumulada. Y muchos casos no existe.

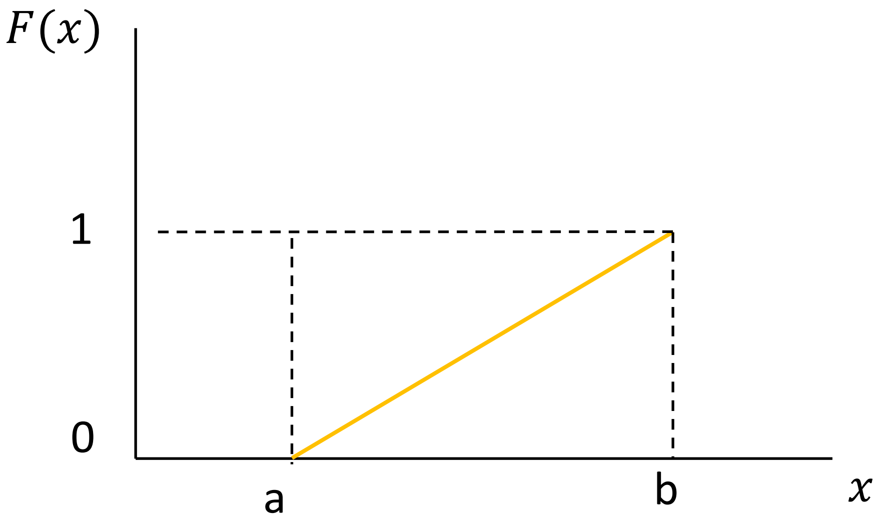
Herramientas: distribución uniforme

Función de densidad:



$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

Función acumulada/
Probabilidad:



$$f(x) = \frac{x-a}{b-a}$$ (proporción)

Procedimiento

Dada una función acumulada de probabilidad Uniforme:
$F_U(X) = U(X)$

Dada una función acumulada de probabilidad Target:
$F_T(S) = T(S)$

- Buscamos samplear valores del dominio de la función target
- Usamos valores generados con $\mathrm{U}(X)$ como la imagen de $\mathrm{T}(X)$.

Entonces:
Los valores sampleados se obtienen de: $\boldsymbol{S = T^{-1}(\mathrm{U}(X))}$

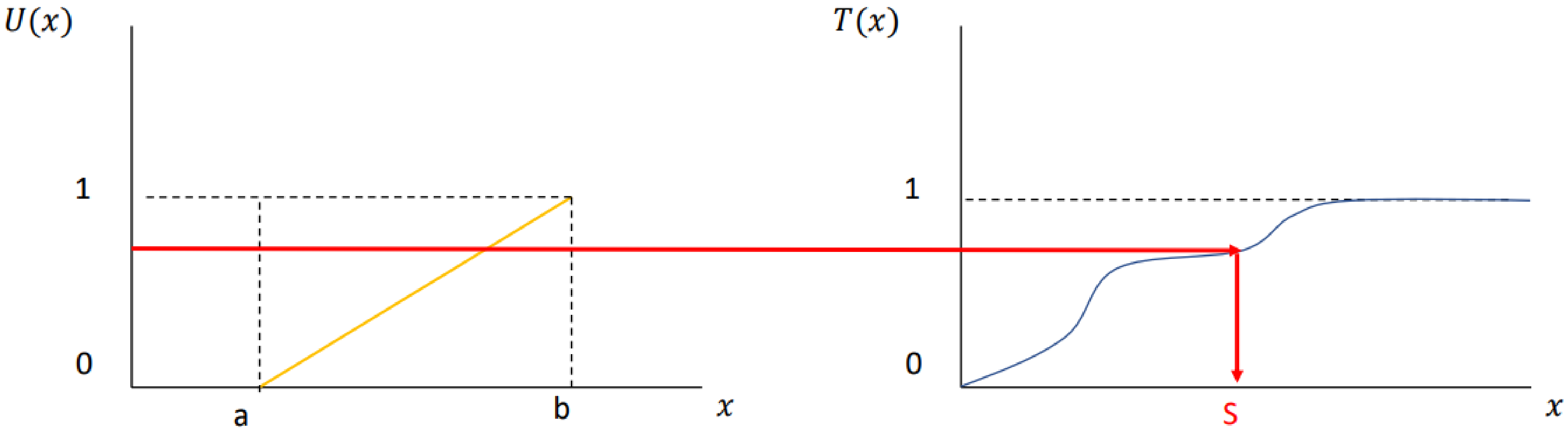
Procedimiento de sampleo de un valor

1) Sampleo de Variable Aleatoria uniforme

$$u = U(X).$$

2) Valor sampleado uniforme como input de la inversa de la acumulada target.

$$s = T^{-1}(U(X))$$



Transformada inversa en función piecewise constant

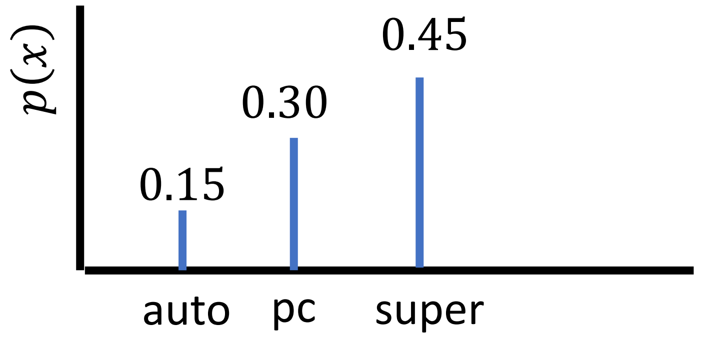
Una empresa de E-Commerce quiere simular su sistema de pedidos para conocer el comportamiento.
En un estudio ABC, surgieron tres grandes rubros que generan pedidos similares en monto y frecuencia: repuestos de automotor, consumibles de computadora, comida y supermercado.

La probabilidad de recibir un pedido de cada rubro es la siguiente:

$$\mathrm{p}(x) = \begin{cases} 0.15 \quad si\ x = repuestos\ de\ automotor \\ 0.30\ si\ x = consumibles\ computadora \\ 0.55\ si\ x = comida\ y\ supermercado \end{cases}$$

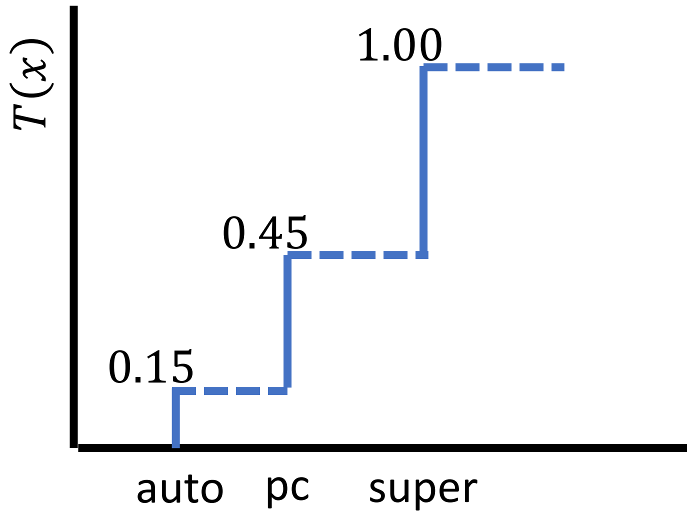
Transformada inversa en función piecewise constant

$$p(x) = \begin{cases} 0.15 \quad si\ x = repuestos\ de\ automotor \\ 0.30\ si\ x = consumibles\ computadora \\ 0.55\ si\ x = comida\ y\ supermercado \end{cases}$$



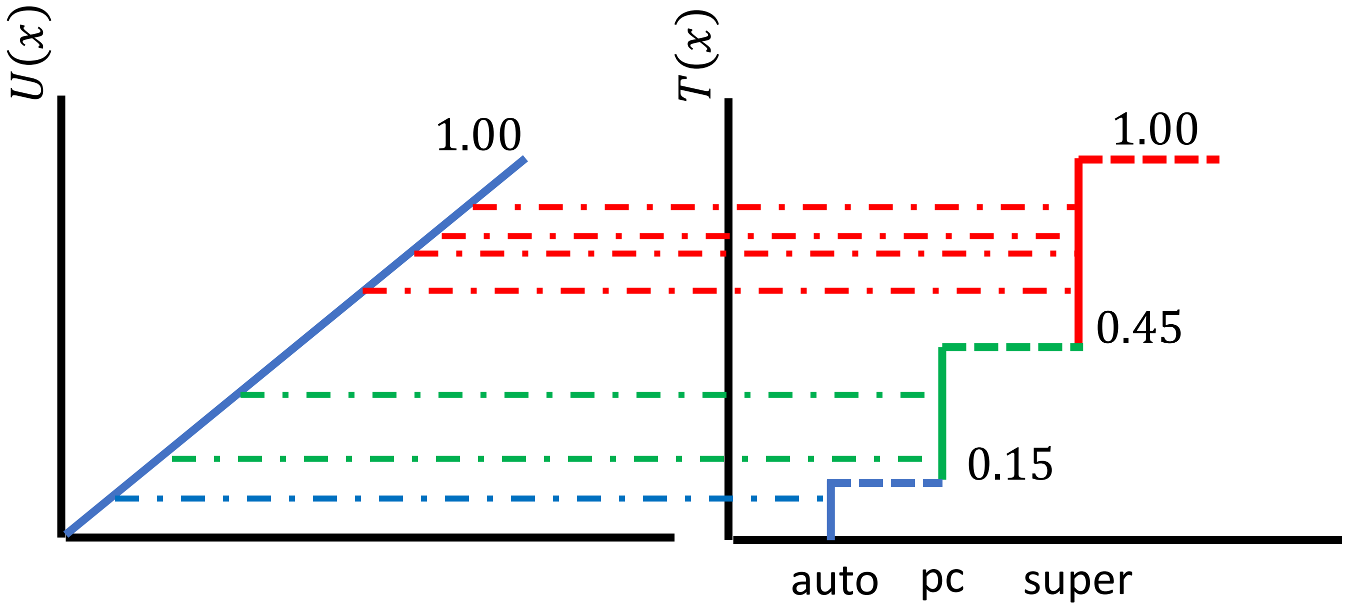
Calculamos la función acumulada de probabilidad:

$$T(x) = \begin{cases} [0.00, 0.15] \quad si\ x = repuestos\ de\ automotor \\ (0.15, 0.45]\ si\ x = consumibles\ computadora \\ (0.45, 1.00]\ si\ x = comida\ y\ supermercado \end{cases}$$



Transformada inversa en función piecewise constant

Iteración	$\mathrm{U(X)}$	$\mathrm{T^{-1}(U(X))}$
0	0.11	auto
1	0.52	super
2	0.68	super
3	0.19	pc
4	0.89	super
5	0.32	pc
6	0.76	super



Distribución exponencial

Función de densidad de probabilidad:

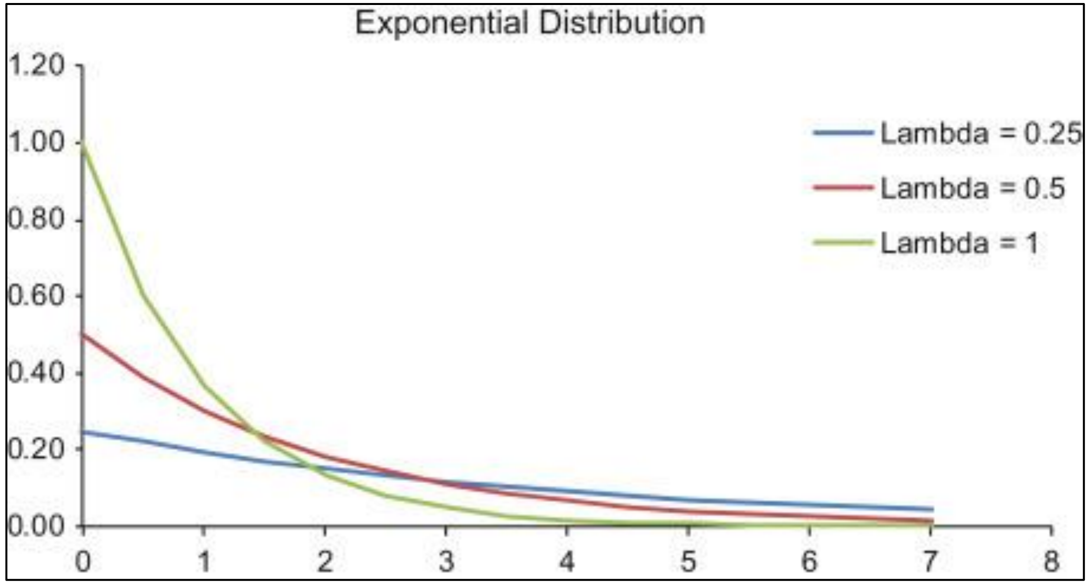
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Acumulada de densidad de probabilidad:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Esperanza:

$$\mathbb{E}[x] = \frac{1}{\lambda}$$



https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/exponential-distribution

Transformada inversa con distribución exponencial

Partimos de la acumulada:

$$F_{exp}(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Despejamos x, la variable aleatoria que queremos samplear:

$$x = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(1 - F_{exp}(x))$$

Transformada inversa con distribución exponencial

Despejamos x, la variable aleatoria que queremos samplear:

$$x = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(1 - F_{exp}(x))$$

Llegamos a la inversa. El paso siguiente es generar valores aleatorios para $F_{exp}(x)$.

Reemplazamos por un generador uniforme: $\mathrm{u} \sim U(0,1)$

$$x = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(1 - u)$$

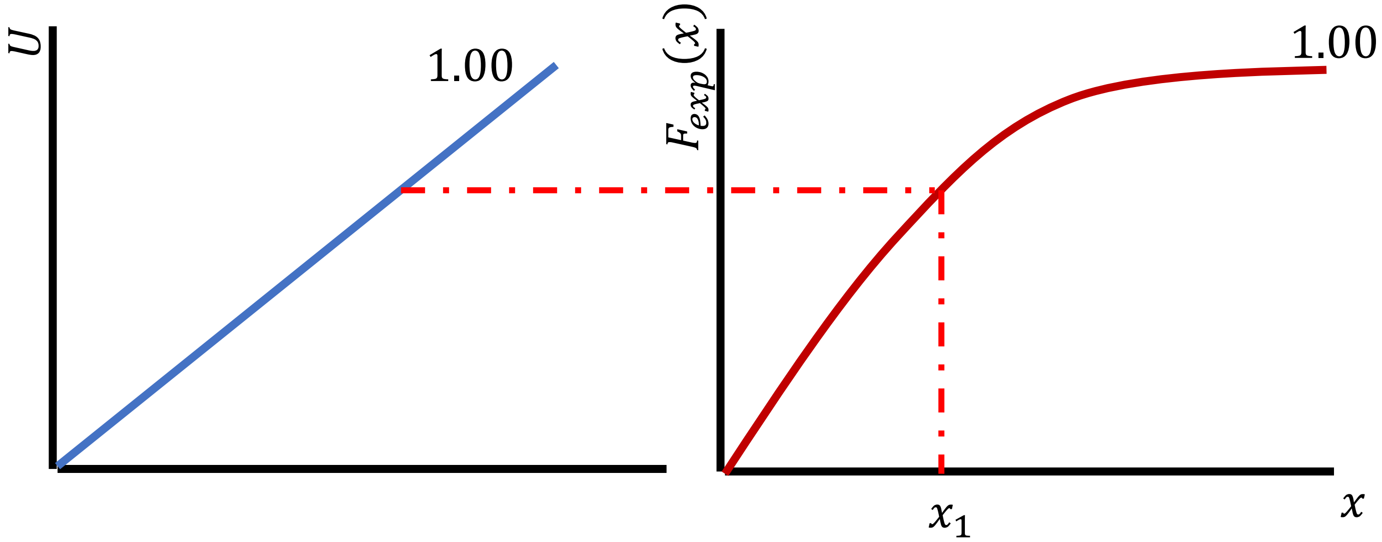
Transformada inversa con distribución exponencial

Dado que $(1-u)$ es el complemento de una variable uniforme, u lo es también. En sampleo es lo mismo.

$$x = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(u)$$

$$\mathrm{u} \sim U(0,1)$$
$$\mathrm{x} \sim Exp(\lambda)$$

Representación gráfica



Transformada inversa exponencial con Python

```
import numpy as np

def samplear_transformada_inversa_exp(lam):

    # Sampleo de v.a. uniforme.
    u = np.random.uniform(0, 1)

    # Retornar sampleo de v.a. exponencial.
    return -(1 / lam) * np.log(u)
```

```
samplear_transformada_inversa_exp(0.5)

  >>1.1064004539708514
```

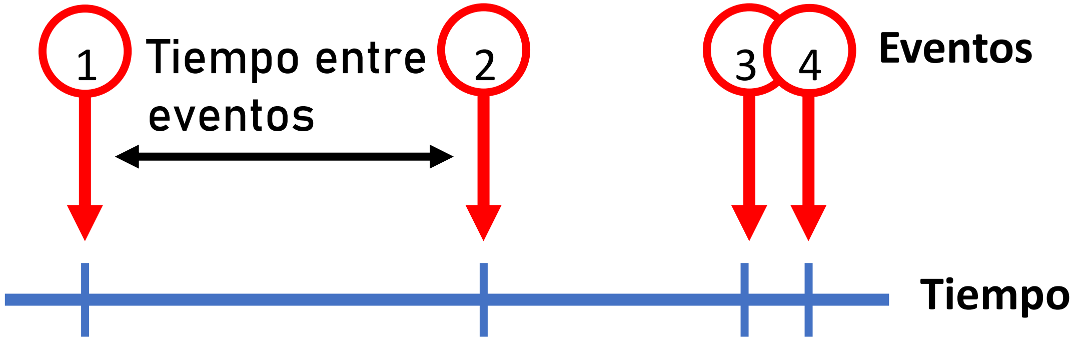
$$x = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(u)$$

$$\mathrm{u} \sim U(0,1)$$
$$\mathrm{x} \sim Exp(\lambda)$$

Usos comunes de sampleo exponencial

Cálculo de "tiempo entre eventos"
Por ejemplo:

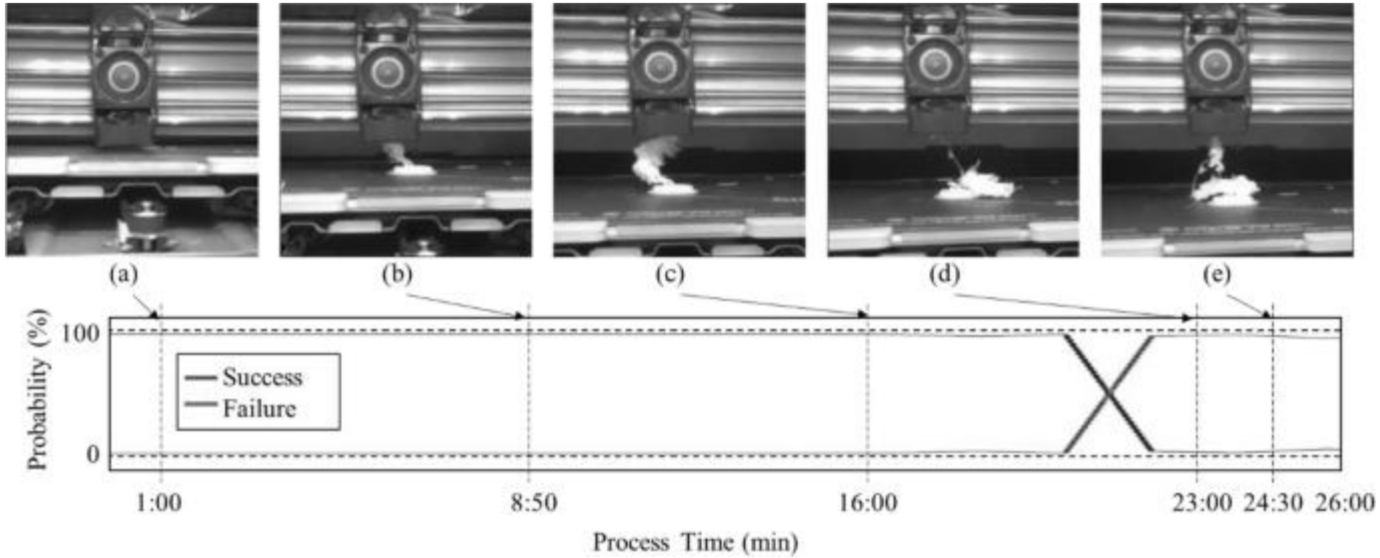
- Tiempo entre arribos de productos, personas.
- Tiempo entre fallas de máquinas.
- Tiempo entre llamados a un callcenter.
- Tiempo entre requests a una API.



Ejemplo transformada inversa exponencial

Una cámara ubicada en punta de línea de extrusión envía eventos de falla de forma remota a un servidor de monitoreo.

Se desea simular la performance del sistema completo. Por lo tanto, es necesario generar registros de eventos aleatorios, que se suponen exponenciales. Se sabe que la media es de 5 fallas / hora.



Kim et. al (2020), Image-based failure detection for material extrusion process using a convolutional neural network

Ejemplo transformada inversa exponencial

Datos:

$x \sim Exp(\lambda)$ variable aleatoria exponencial con $\lambda = 5\ fallas/hora$

x representa "Tiempo entre fallas"

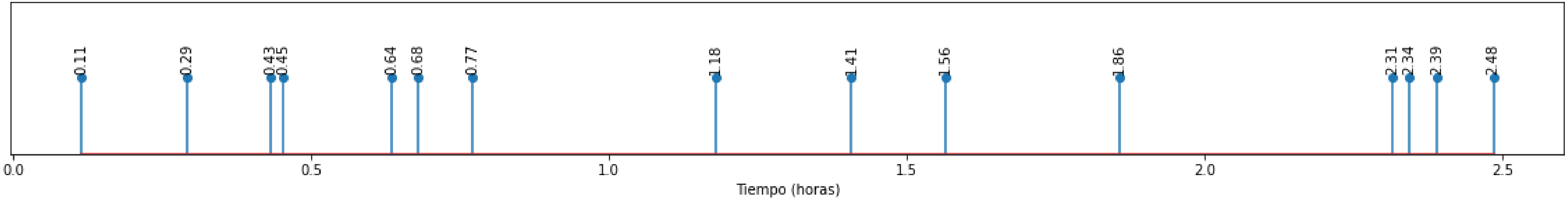
Unidad temporal $[t] = horas$

falla	U	Tiempo entre fallas de máquina (hrs)	Cronómetro (tiempo del evento en hrs)
1	0.6715		
2	0.0283		
3	0.6541		
4	0.2395		
5	0.3240		

$$x = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\ln(u)$$

$$u \sim U(0,1)$$
$$x \sim Exp(\lambda)$$

Ejemplo con 15 valores generados



Ejemplo con 10 valores generados

Calculado con python:

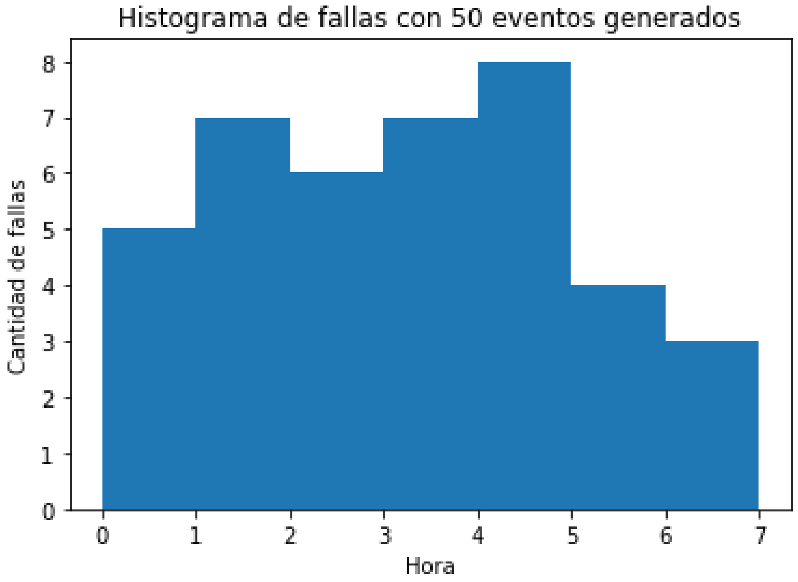
falla	U	Tiempo entre fallas de máquina (hrs)	Cronómetro (tiempo del evento en hrs)	Hora
1	0.08762491	0.48693799	0.48693799	0
2	0.45027983	0.15957721	0.64651519	0
3	0.08892822	0.48398516	1.13050035	1
4	0.51890566	0.13120664	1.26170699	1
5	0.8117183	0.04172038	1.30342738	1
6	0.65619456	0.08425959	1.38768696	1
7	0.51140286	0.13411952	1.52180649	1
8	0.72340748	0.06475652	1.58656301	1
9	0.81206083	0.04163601	1.62819902	1
10	0.18952834	0.33264335	1.96084236	1

2 fallas

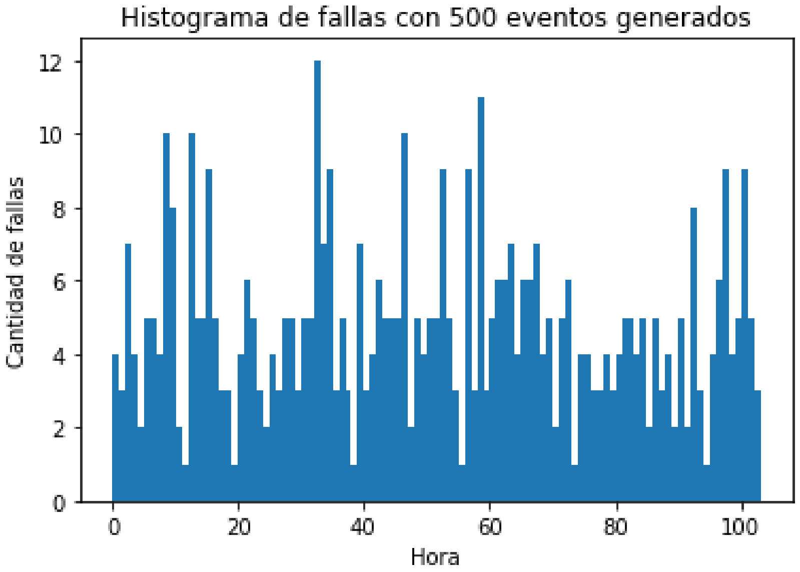
8 fallas

Validación de λ de la muestra simulada

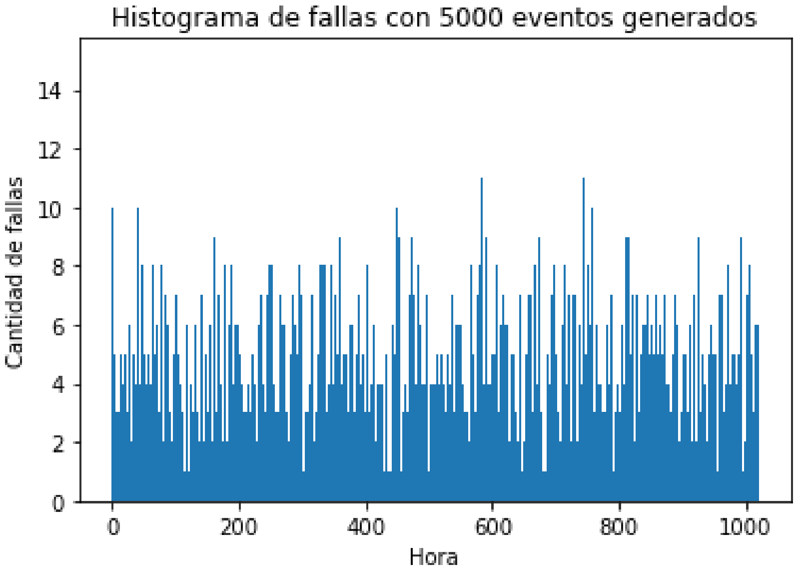
$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_i Cantidad\ eventos_{hora\ i}}{Cantidad\ de\ horas\ simuladas}$$



$\hat{\lambda} = 5.71$

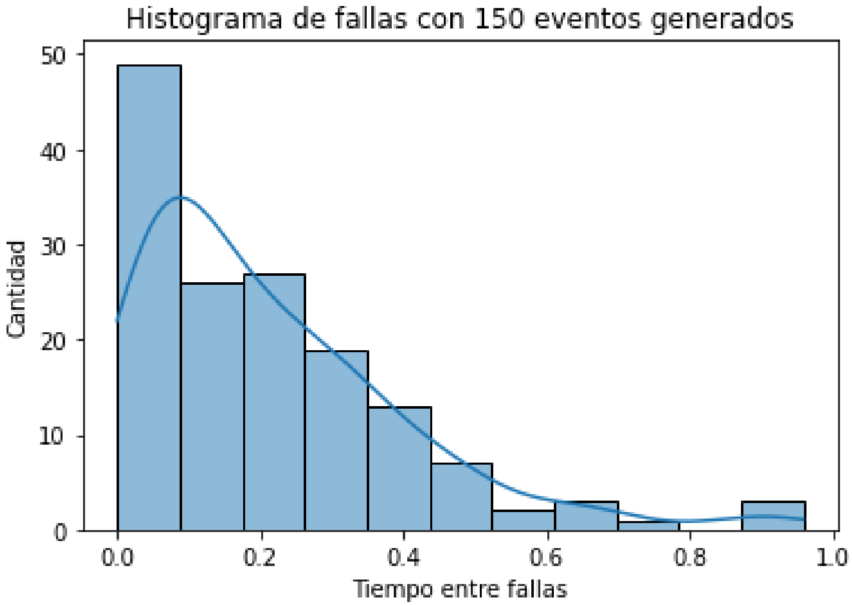


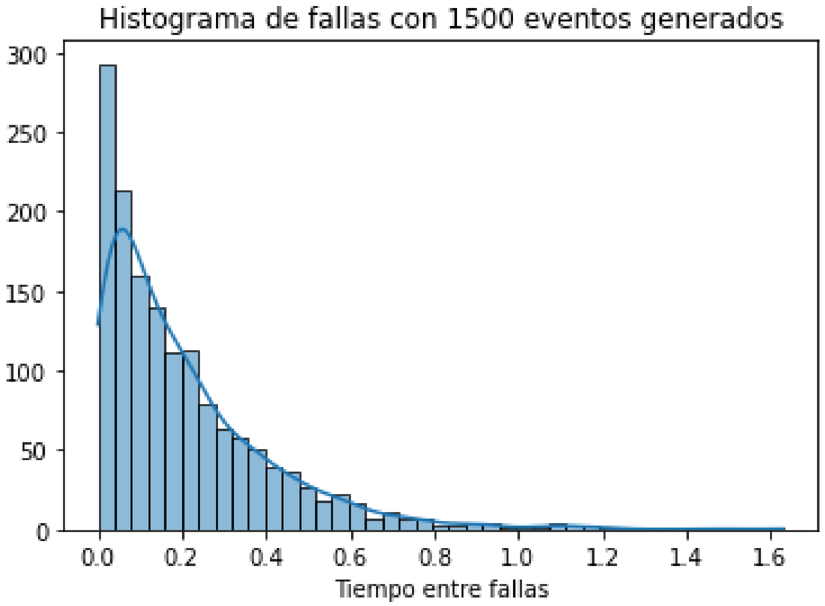
$\hat{\lambda} = 4.75$

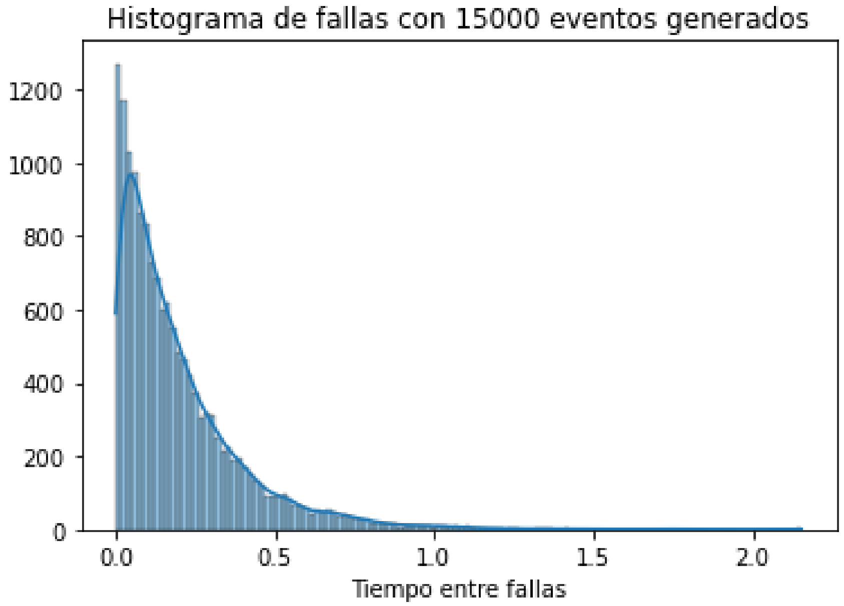


$\hat{\lambda} = 4.89$

Visualización de la exponencial







Arribos y despachos en una línea industrial

Una máquina recibe productos con un tiempo entre arribos que sigue una distribución exponencial de $\lambda = 6\, u/min$.

El tiempo de procesamiento de la misma también se supone exponencial con una media de $\mu = 7\, u/min$.

Simulando tiempos de arribos y despachos, se busca conocer el nivel de stock.

Se pide simular un horizonte temporal de 0.60 minutos.

Arribos y despachos en una línea industrial

Datos:

Arribos: $t_A \sim Exp(\lambda)$ variable aleatoria exponencial con $\lambda = 6\ u/min$

t_A representa "Tiempo entre arribos de productos"

Despachos: $t_D \sim Exp(\mu)$ variable aleatoria exponencial con $\mu = 7\ u/min$

t_D representa "Tiempo entre procesamiento exitoso de productos"

Unidad temporal $[t] = minutos$

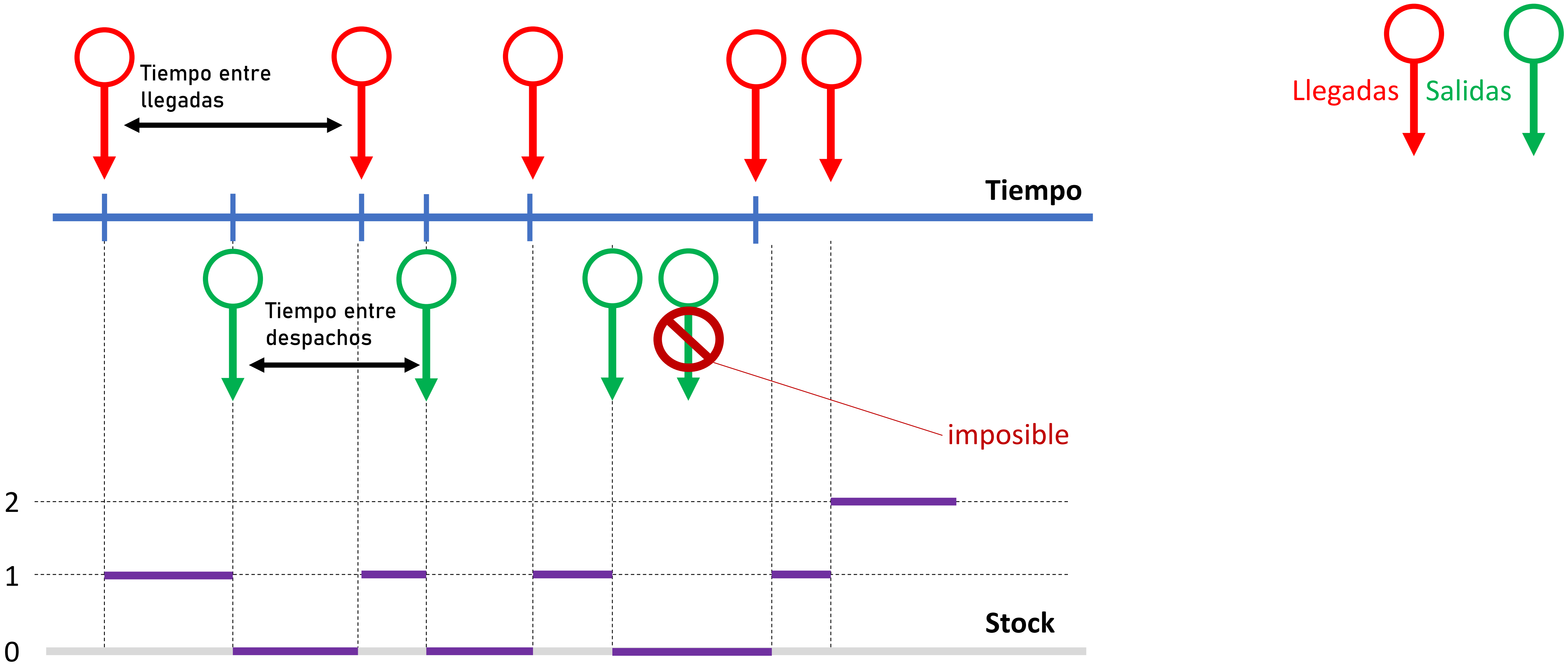
Arribos y despachos de una línea industrial

Simulación simplificada:

- Se simulan ambos eventos por separado, a pesar de ser dependientes, y luego se eliminan inconsistencias en salidas.

- No se busca individualizar registros, sino el acumulado de stock. No es posible conocer producto a producto su historia.

Arribos y despachos de una línea industrial



Arribos y despachos de una línea industrial

1- Generamos valores para cada tipo de evento, con un horizonte temporal de 0.60.

Arribos: $t_A \sim Exp(\lambda)$ variable aleatoria exponencial con $\lambda = 6\ u/min$
Despachos: $t_D \sim Exp(\mu)$ variable aleatoria exponencial con $\mu = 7\ u/min$

Arribo	U	t entre ev.	Cronómetro
1	0.33912384		
2	0.69487153		
3	0.52248686		
4	0.52882801		
5	0.48778478		

Despacho	U	t entre ev.	Cronómetro
1	0.31468644		
2	0.81579292		
3	0.59140531		
4	0.97468275		
5	0.85049757		
6	0.87347892		
7	0.31670127		
8	0.87871853		

Arribos y despachos de una línea industrial

1- Generamos valores para cada tipo de evento.

Arribos: $t_A \sim Exp(\lambda)$ variable aleatoria exponencial con $\lambda = 6\ u/min$
Despachos: $t_D \sim Exp(\mu)$ variable aleatoria exponencial con $\mu = 7\ u/min$

Arribo	U	t entre ev.	Cronómetro
1	0.33912384	0.18023166	0.18023166
2	0.69487153	0.06067138	0.24090304
3	0.52248686	0.10819257	0.34909561
4	0.52882801	0.106182	0.45527762
5	0.48778478	0.11964683	0.57492445

Despacho	U	t entre ev.	Cronómetro
1	0.31468644	0.19269643	0.19269643
2	0.81579292	0.03393245	0.22662888
3	0.59140531	0.08754228	0.31417117
4	0.97468275	0.00427387	0.31844504
5	0.85049757	0.02698895	0.34543399
6	0.87347892	0.02254521	0.36797921
7	0.31670127	0.19163272	0.55961192
8	0.87871853	0.02154844	0.58116037

Arribos y despachos de una línea industrial

2- Ordenamos ambos eventos en la misma tabla, indicando el tipo. Eliminamos imposibles

Tipo	Cronómetro	Stock	Decisión
arribo	0.180232	1	
despacho	0.192696	0	
despacho	0.226629	0	Eliminar
arribo	0.240903	1	
despacho	0.314171	0	
despacho	0.318445	0	Eliminar
despacho	0.345434	0	Eliminar
arribo	0.349096	1	
despacho	0.367979	0	
arribo	0.455278	1	
despacho	0.559612	0	
arribo	0.574924	1	
despacho	0.58116	0	

Arribos y despachos de una línea industrial

¿Qué efecto tiene sobre el μ de muestreo el método simplificado?

- El μ del ejercicio es teórico, la capacidad máxima de la máquina.
- Al simular y eliminar eventos, obtenemos el μ de trabajo, considerando capacidad ociosa.