Optimización de Redes de Proyectos con PERT

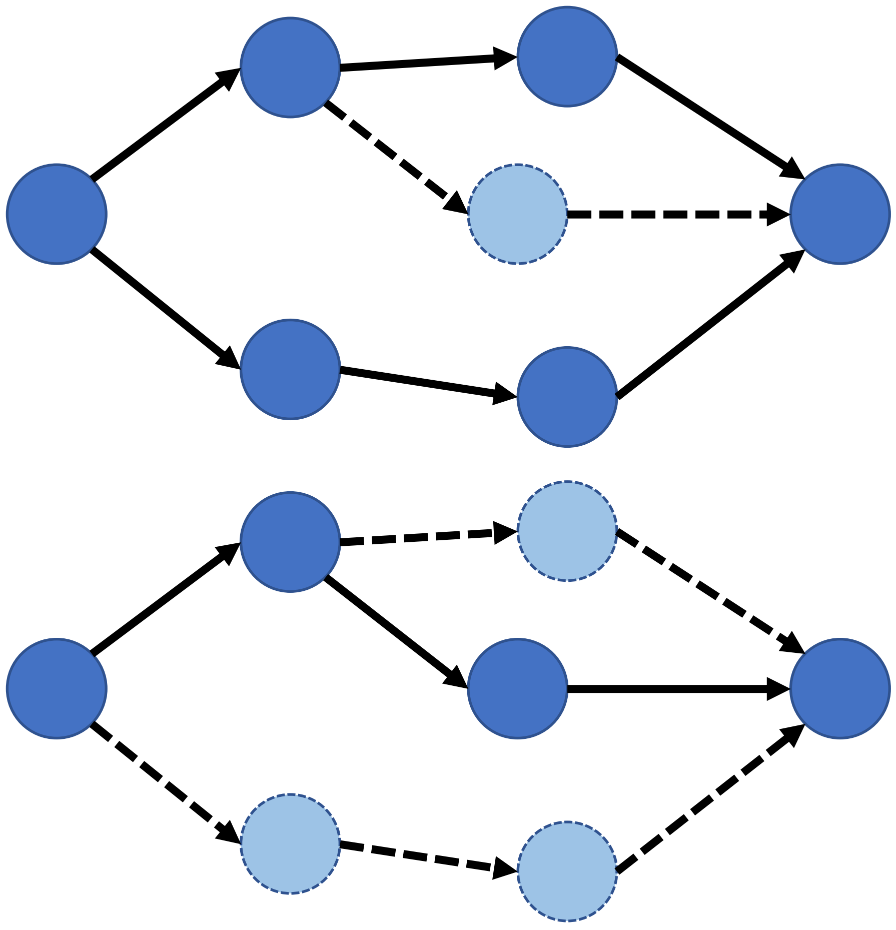
Rodrigo Maranzana

Aleatoriedad en redes de proyectos

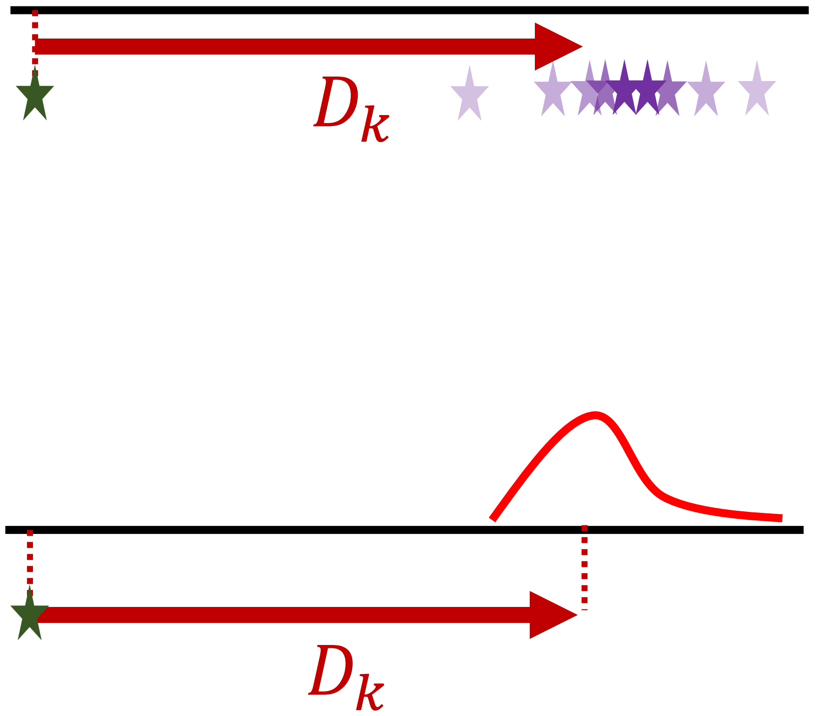
- El método CPM es un algoritmo que necesita un grafo determinista:
  - Tiempos predeterminados.
  - Nodos predeterminados.
  - Configuración de proyecto fija.

No permite introducir márgenes de tolerancia temporal.

Fuentes de aleatoriedad en redes de proyectos



Proyectos de camino aleatorio



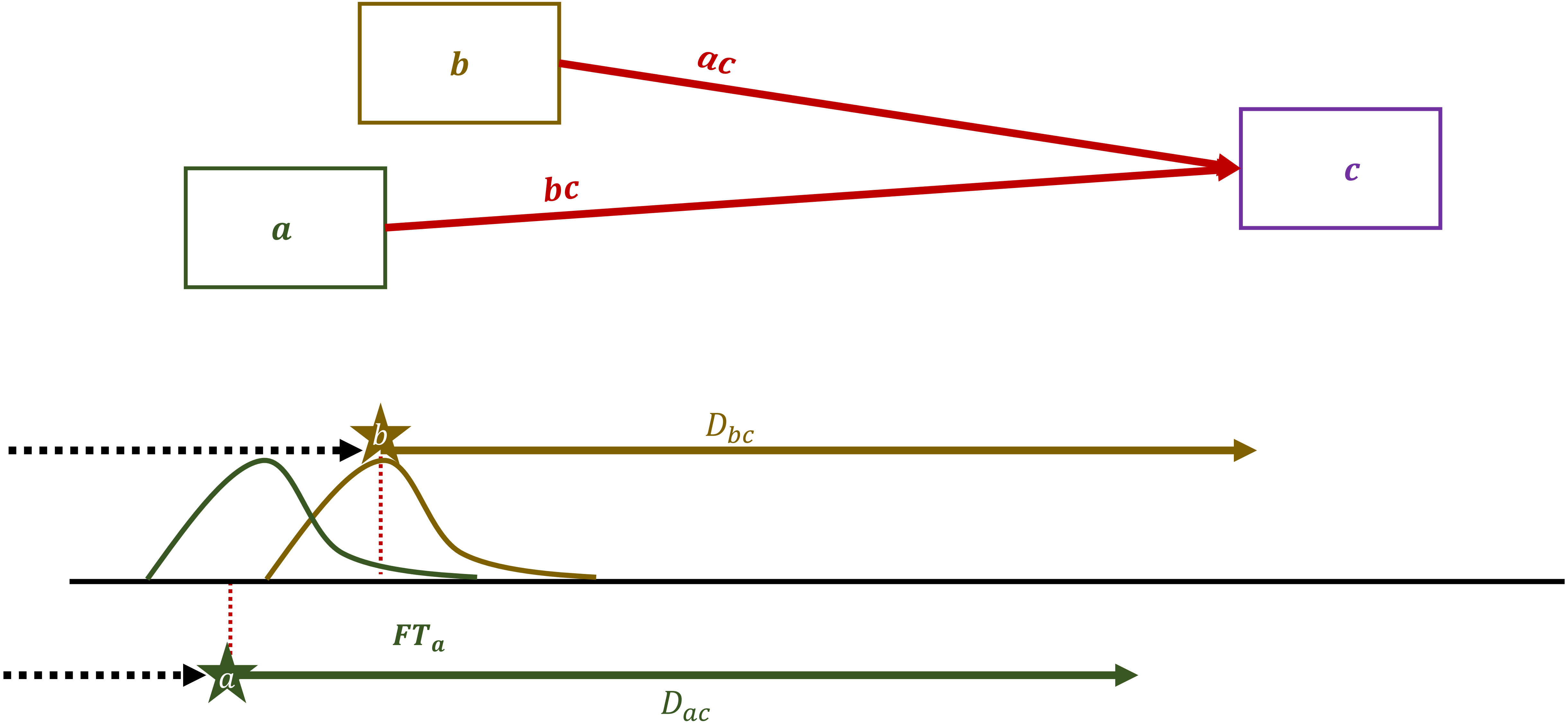
Proyectos de tiempo aleatorio

Duración de tareas estocástica

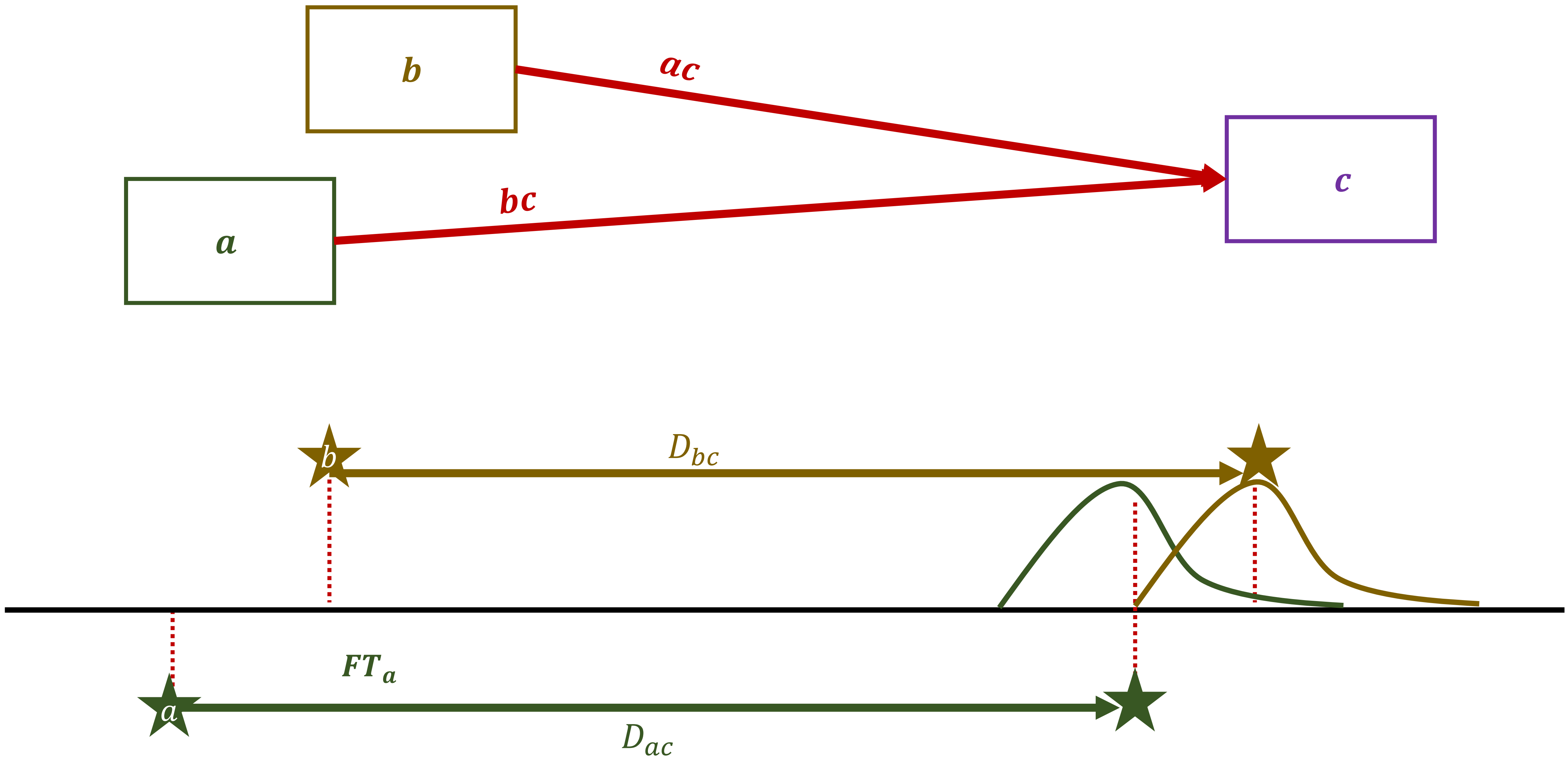
Un grafo de tareas estocásticas implica que:

- La finalización de la tarea varía según factores intrínsecos.
- El inicio y la finalización de la tarea varía según factores extrínsecos.
- La dependencia de tareas propaga la aleatoriedad por la red;
- La dispersión de una tarea anterior tiene efecto en las posteriores.
- La finalización del proyecto refleja la cadena de eventos aleatorios dependientes.

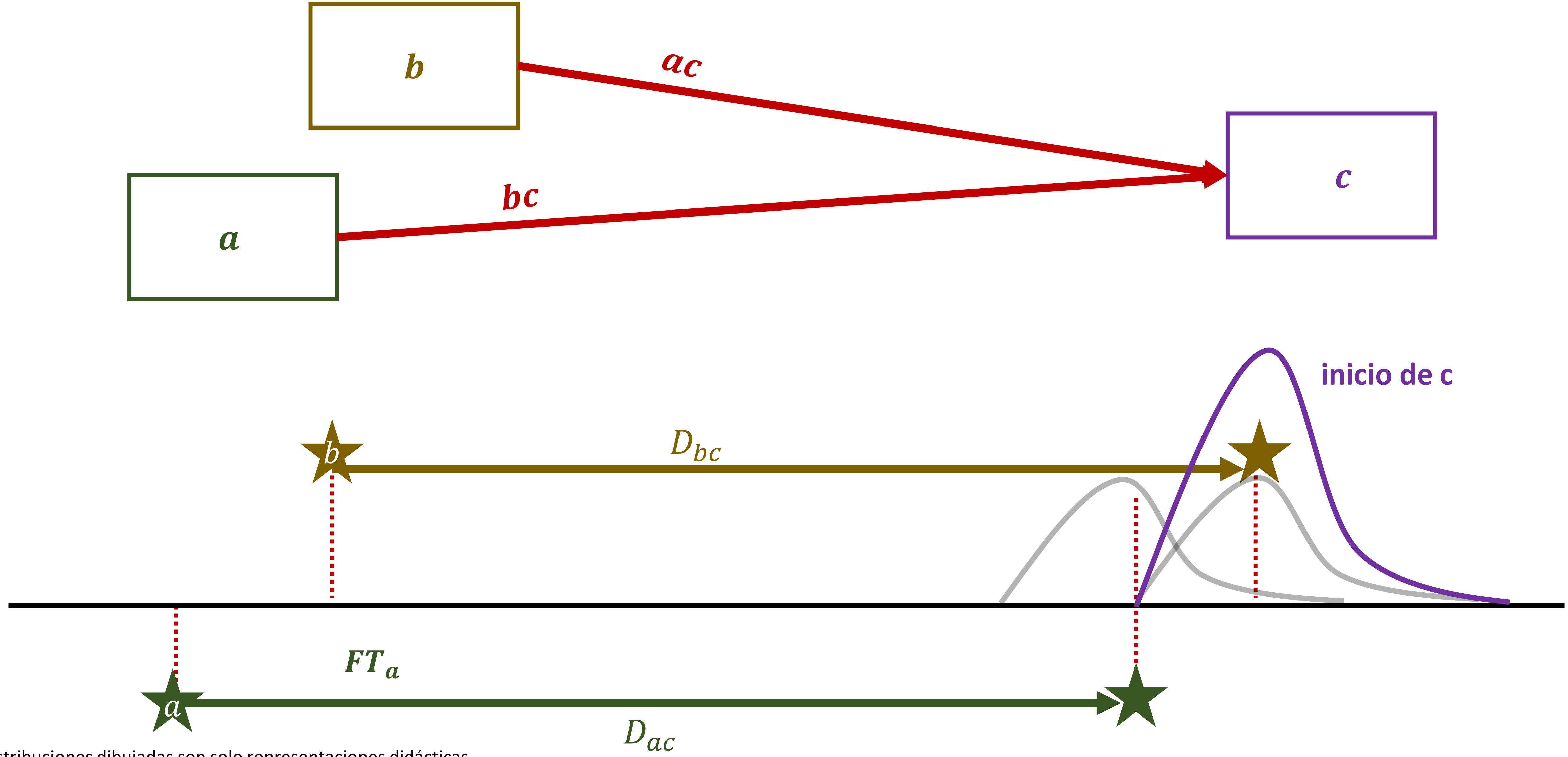
Duración de tareas estocástica: inicio



Duración de tareas estocástica: fin



Duración de tareas estocástica: dependencia

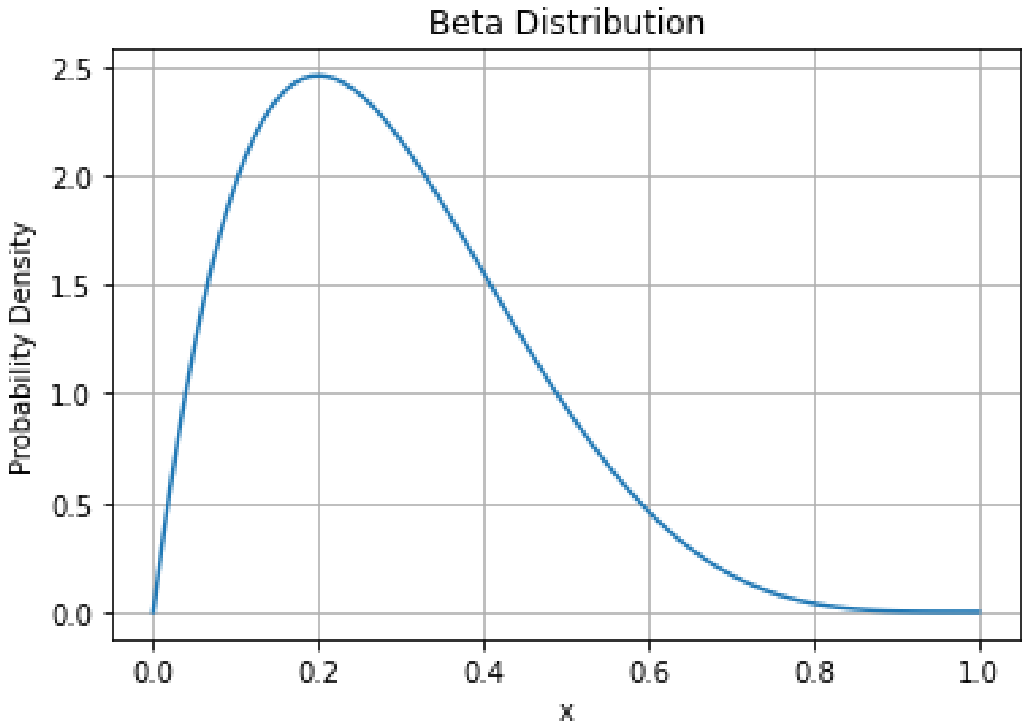


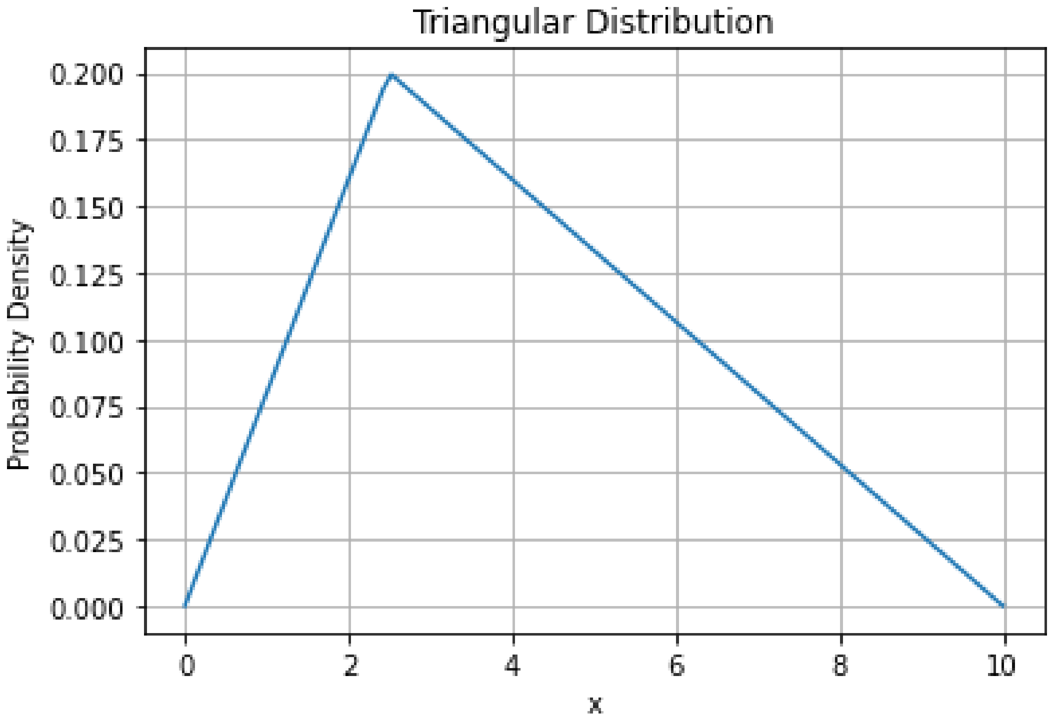
* Las distribuciones dibujadas son solo representaciones didácticas.

Distribución de duración de tareas

Las distribuciones Beta y Triangular se suelen utilizar para modelizar duraciones de tareas.

Visto de otra forma, se puede calcular la fecha final de la tarea.



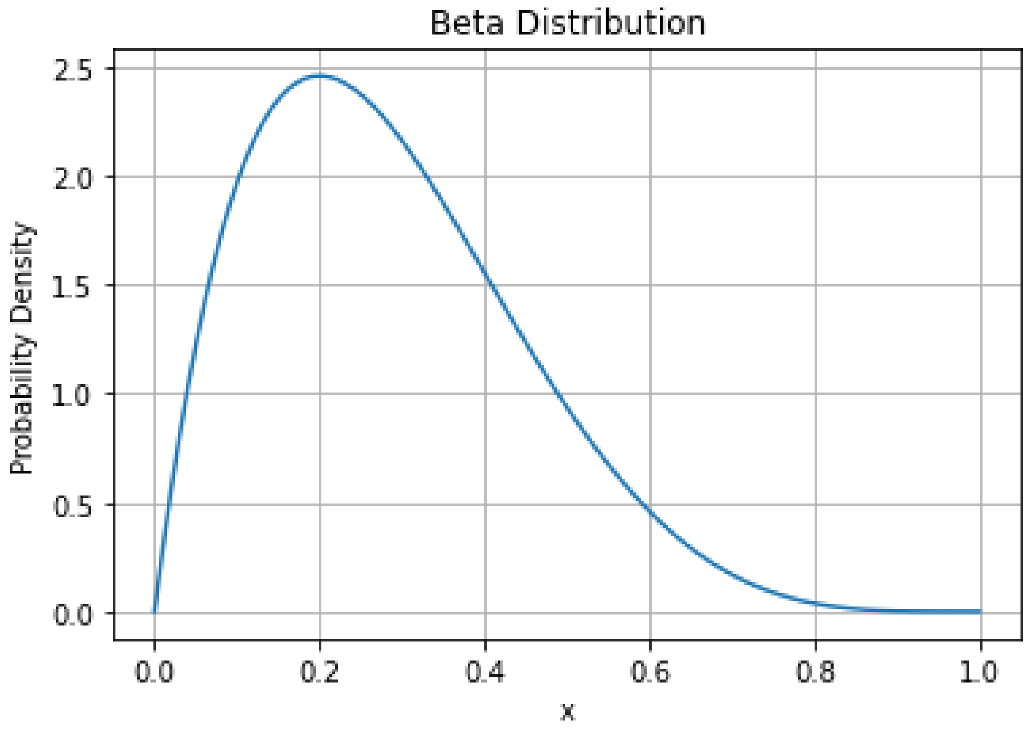


Distribución de duración de tareas

La distribución Beta depende de los parámetros α, β.
$t \sim \beta[\alpha, \beta]$

Parámetros:
$\boldsymbol{\alpha}$: controla el skew de la curva.
Si es menor a 1 la cola se ubica a la derecha y la moda a la izquierda.
Si es mayor, a la inversa.

$\boldsymbol{\beta}$: controla la dispersión, valores mayores producen una dispersión menor, más concentrados.
Valores menores implican mayor dispersión.



Ejemplo: $D_{ij} \sim \beta[\alpha = 2, \beta = 5]$

Distribución de duración de tareas

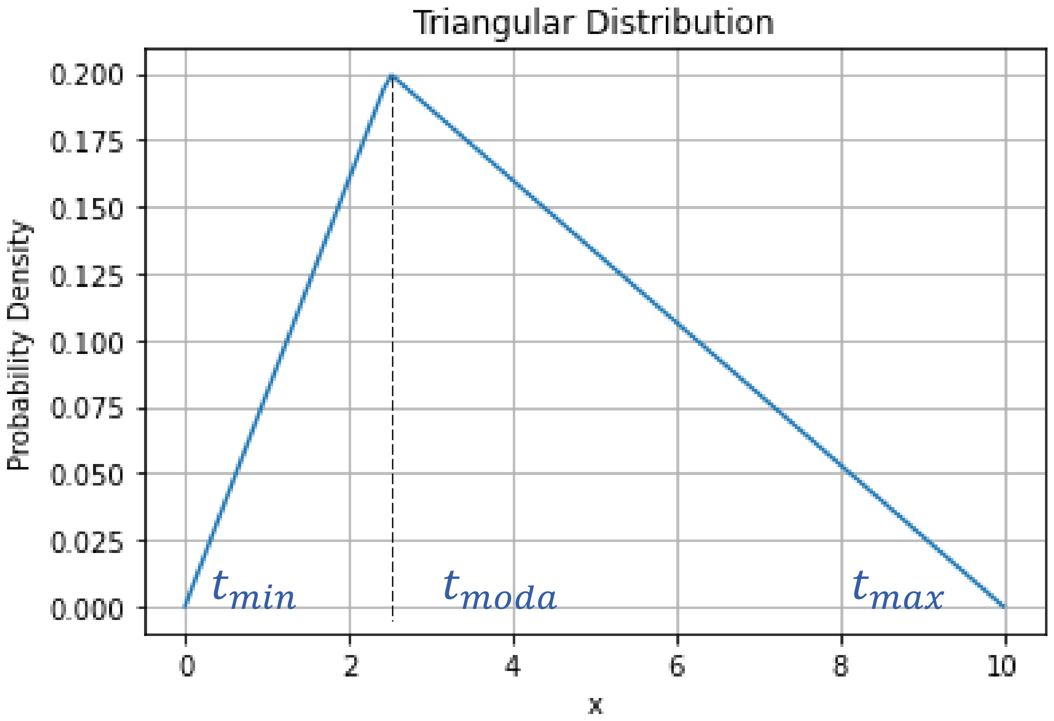
La distribución Triangular depende de los parámetros $t_{min}, t_{max}, t_{moda}$.
$t \sim Tr[t_{min}, t_{max}, t_{moda}]$

Parámetros:

t_{min}: valor mínimo de tiempo de finalización de la tarea.

t_{max}: valor máximo de tiempo de finalización de la tarea.

t_{moda}: moda, valor más probable de finalización.



Ejemplo: $D_{ij} \sim Tr[t_{min} = 0, t_{max} = 10, t_{moda} = 2.5]$

¿Cuándo se utiliza una u otra?

Triangular:

- Distribución más simple.
- Requiere menos datos históricos para modelar.
- Permite distribuciones de tiempos optimistas y pesimistas más simétricos.
- Más simple de auditar.

Beta:

- Distribución más flexible, permite ponderar mejor los tiempos.
- Requiere más datos para modelar.
- Permite distribuciones asimétricas de tiempos optimistas y pesimistas.

Duración total del proyecto

La fecha de finalización del proyecto es una variable aleatoria que depende de la duración de todas las tareas intermedias.

El Teorema Central del Límite (TCL) permite calcular la fecha de finalización compuesta por la combinación de tareas en serie y paralelo.

Supuestos:

- Muestras aleatorias e idénticamente distribuidas.
- Varianza finita.
- En proyectos: proyectos con mayor cantidad de tareas en serie que en paralelo.

Simulación Monte Carlo y evidencia de TCL

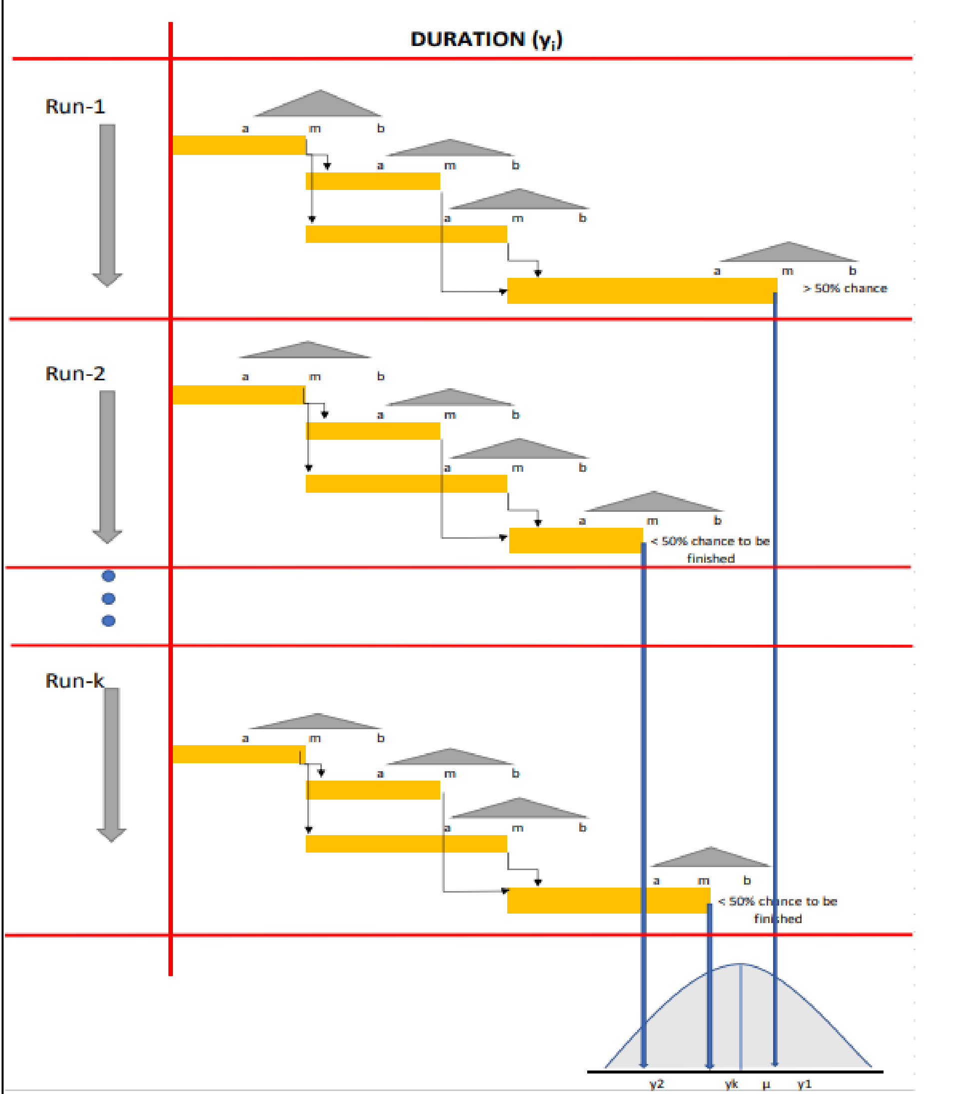


Figure 4: Example of Monte Carlo Simulation

- Se calcula la fecha de finalización de cada tarea haciendo simulaciones con distribuciones triangulares.
- Se respeta la precedencia, y se calcula fecha de finalización del proyecto.
- Se repite el experimento para "N" caminos.
- La distribución resultante resulta Normal.

Karabulut (2017) Application of Monte Carlo simulation and PERT/CPM techniques in planning of construction projects: A Case study.
http://pen.ius.edu.ba/index.php/pen/article/view/152

Metodología PERT

La metodología PERT (*Program Evaluation and Review Technique*) tiene en cuenta todos los aspectos anteriores.

Considera:

- Tareas dependientes entre sí formando un grafo.
- Tres tipos de tiempos que configuran la finalización de tareas:
  - Tiempo optimista ($t_o = t_{min}$): mejor escenario para finalización.
  - Tiempo más probable ($t_n = t_{moda}$): escenario realista para finalización.
  - Tiempo pesimista ($t_p = t_{max}$): peor escenario para finalización.
- Permite tiempo de finalización de proyecto normal, por TCL (*siempre verificar supuestos*)

PERT con distribución triangular

Podemos calcular el tiempo esperado y desvío de cada tarea conociendo el tiempo máximo, mínimo y más probable.

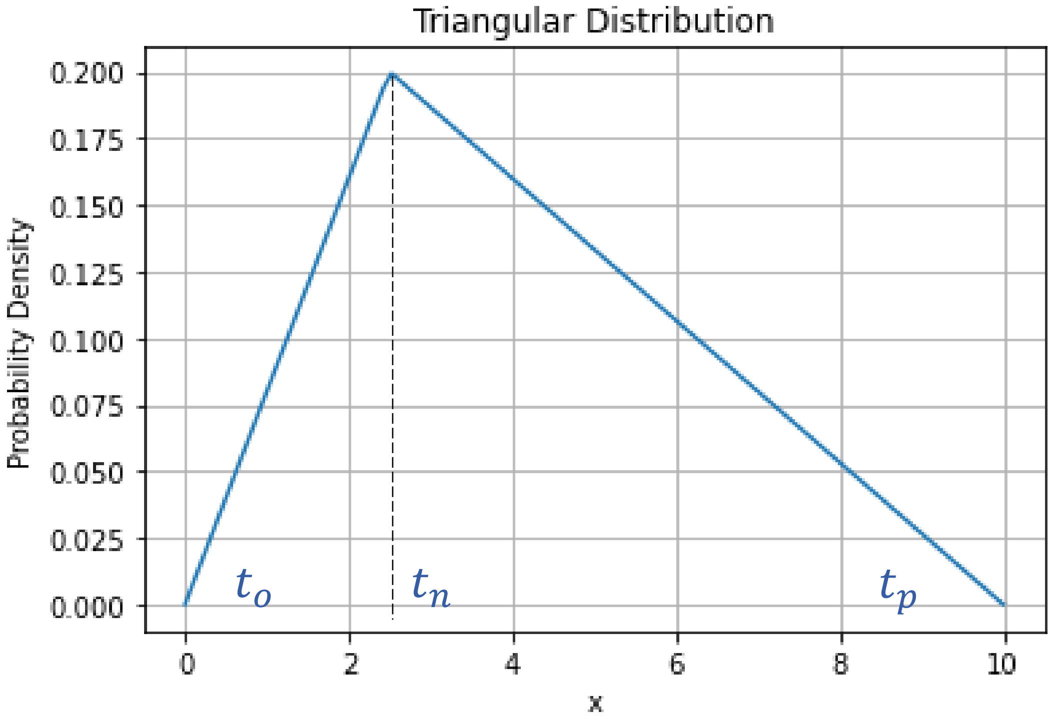
En PERT, el tiempo esperado se suele ponderar más en la moda.

Tiempo esperado:

$$t_e = \frac{t_o + 4\,t_n + t_p}{6}$$

Desvío estandar:

$$\sigma = \frac{t_o - t_p}{6}$$



PERT y Teorema Central del Límite

La duración total del proyecto es una variable aleatoria que sigue una distribución normal según el Teorema Central del Límite.

Por lo tanto, la media ($\mu_T^{proyecto}$) y desvío ($\sigma_T^{proyecto}$) de la duración total del proyecto resultan:

$$\mu_T^{proyecto} = \sum_i t_{e_i} \qquad \sigma_T^{proyecto} = \sqrt{\sum_i (\sigma_i)^2}$$

Siendo t_{e_i} el tiempo medio de la tarea “i”, y σ_i, su desvío.

Todas las tareas “i” del set, constituyen el camino crítico, son tareas en serie.

Procedimiento de PERT

Procedimiento general:

1- Crear grafo de proyectos. Matriz de incidencia.

2- Para cada tarea formada por $t_o, \mathrm{t_n}$ y $\mathrm{t_p}$ calcular t_e y σ.

3- Aplicar método CPM.

   a) Calcular fechas tempranas.
   b) Calcular fechas tardías.
   c) Calcular margen total.
   d) Determinar tareas críticas.

4- Aplicar Teorema Central del Límite: calcular $\mu_T^{proyecto}$ y $\sigma_T^{proyecto}$.

5- Se puede calcular la probabilidad de terminar en un tiempo determinado.

Cálculo de probabilidad de finalización

Dado que el tiempo de finalización es una variable aleatoria y conocemos sus parámetros: $\mu_T^{proyecto}$ y $\sigma_T^{proyecto}$.

Podemos conocer la propabilidad de terminar antes de una fecha target:

$P(T \leq T_{target})$ si $T \sim N[\mu_T^{proyecto}, \sigma_T^{proyecto}]$

Cálculo de probabilidad de finalización

Supongamos un proyecto con media 30 semanas y desviación 2 semanas. Quiero conocer la probabilidad de terminar antes de las 28 semanas.

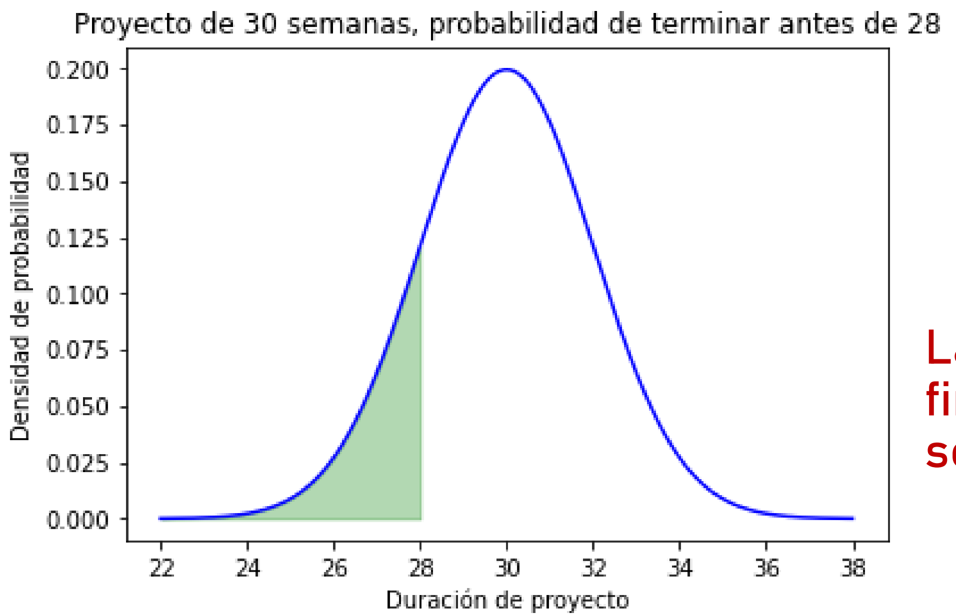
```
from scipy.stats import norm

media = 30
desviacion = 2
valor = 28

# Calcular la probabilidad utilizando la distribución normal
probabilidad = norm.cdf(valor, loc=media, scale=desviacion)

# Imprimir la probabilidad
print("Probabilidad:", probabilidad)
```

```
>> Probabilidad: 0.15865525393145707
```



La probabilidad de finalizar antes de 28 semanas es de 15,86%

Cálculo de probabilidad de finalización

Otra forma de calcularlo es llevándolo a la normal estándar:

si $T \sim N\left[\mu_T^{proyecto}, \sigma_T^{proyecto}\right]$

Siendo los Z Scores: $Z = \frac{T - \mu_T^{proyecto}}{\sigma_T^{proyecto}}$

El target como Z Score:

$$Z_{target} = \frac{T_{target} - \mu_T^{proyecto}}{\sigma_T^{proyecto}}$$

$$P\left(T \leq T_{target}\right) = P\left(Z \leq Z_{target}\right)$$

Comparación de proyectos por riesgo

La varianza de la duración $\sigma_T^{proyecto}$, es una medida de riesgo del proyecto.

Mayor varianza indica una ímprecisión más alta en el cálculo de fecha de finalización.

Es una métrica útil de comparación entre proyectos, si se busca minimizar el riego.