



# Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Rodrigo Maranzana

# Repaso clasificación procesos estocásticos

Discreta

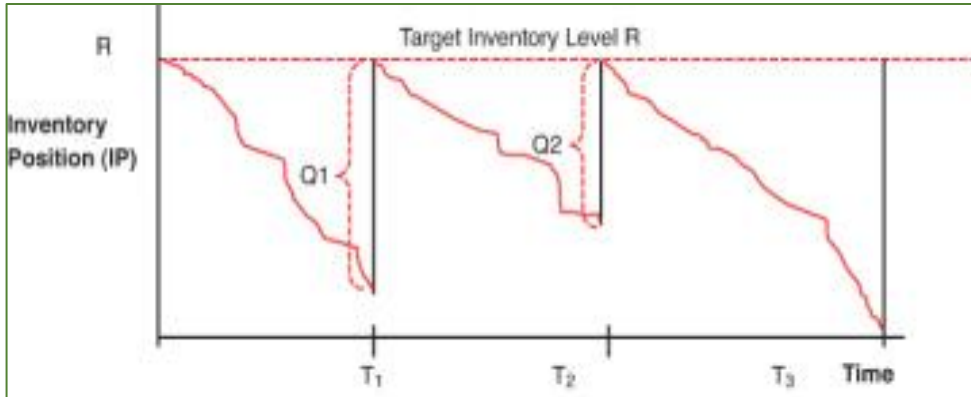
Variable

Continua

## Evolución anual del rating crediticio de una institución

AAA	AAA	AAA	AAA
AA	AA	AA	AA
A	A	A	A
BBB	BBB	BBB	BBB
BB	BB	BB	BB
B	B	B	B
CCC	CCC	CCC	CCC
Default	Default	Default	Default

## Sistema de control de inventarios de tiempo fijo

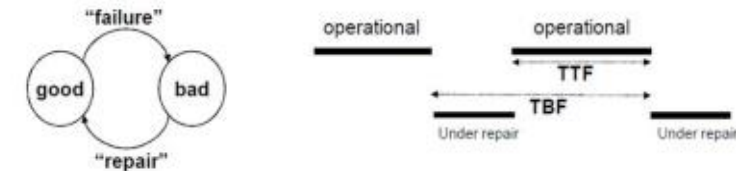


Fuente: <https://www.informit.com/articles/article.aspx?p=2167438&seqNum=7>

## Estado de falla y reparación de una máquina

### Failures with Repair

Time between failures: time to repair + time to next failure



Fuente: [https://cdnc.itec.kit.edu/downloads/RC1\\_WS\\_2011\\_lecture5.pdf](https://cdnc.itec.kit.edu/downloads/RC1_WS_2011_lecture5.pdf)

## Dinámica de stocks en la bolsa



Fuente: <https://finance.yahoo.com/quote/AAPL/>

Discreto

Parámetro

Continuo

# Cadenas de Markov de parámetro continuo

- El parámetro suele ser el tiempo, por lo tanto, en la bibliografía se conoce como:

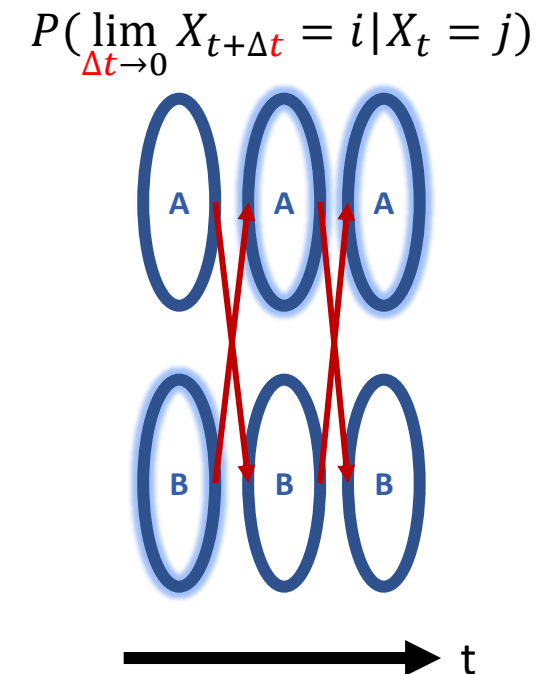
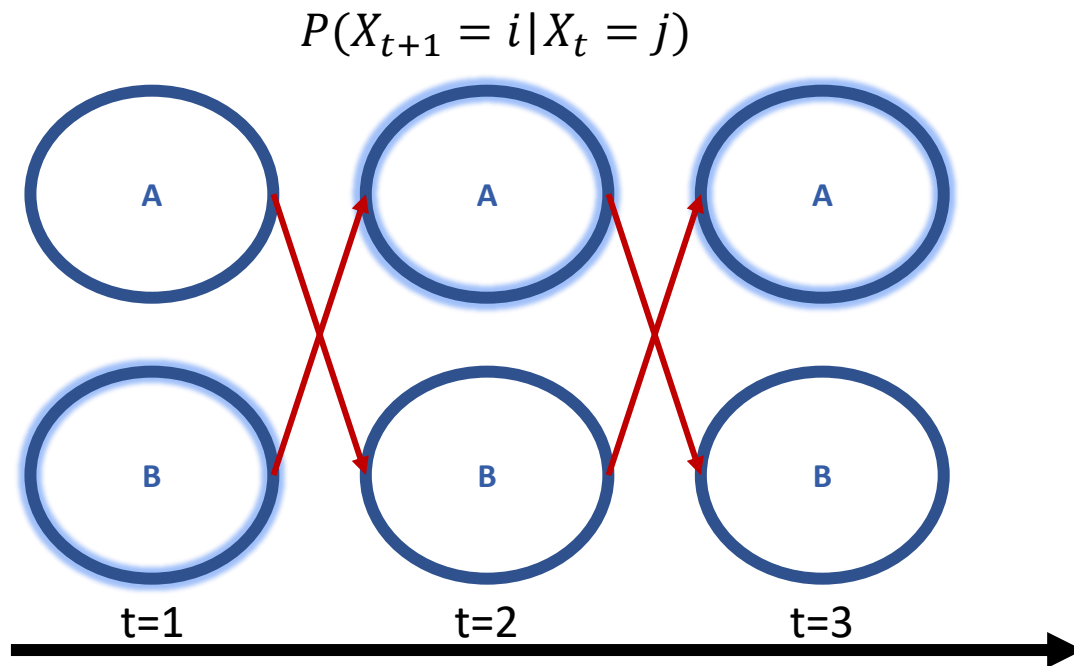
## Continuous Time Markov Chains (CTMC)

Clasificación por estados:

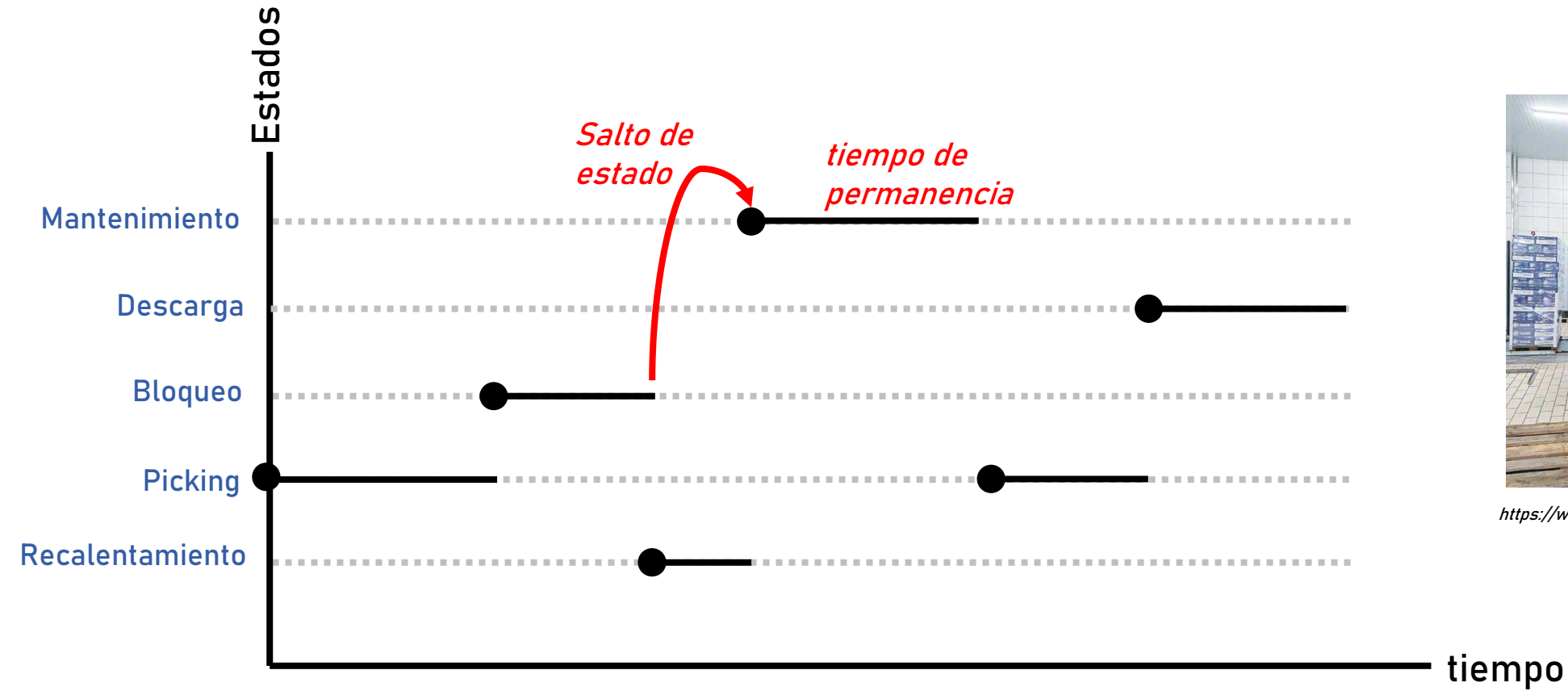
- Estado finito
- Estado infinito

# Cadenas de Markov de tiempo continuo

Si intentamos achicar el paso del parámetro  $t$ , en la probabilidad de transición:



# Ejemplo: robot de picking

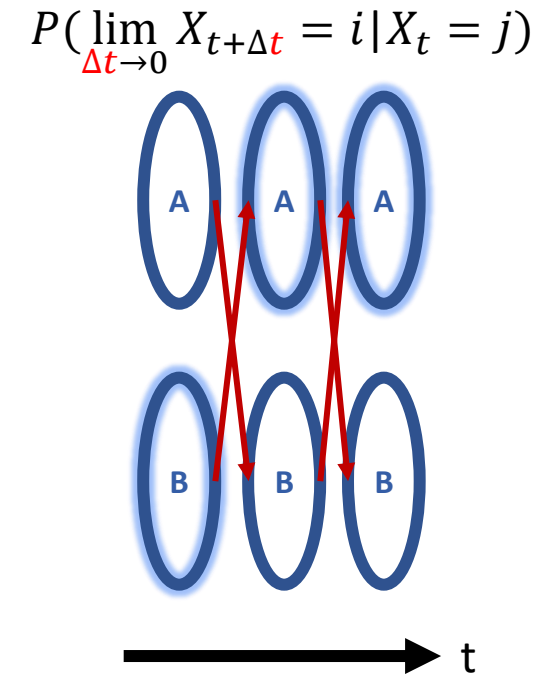
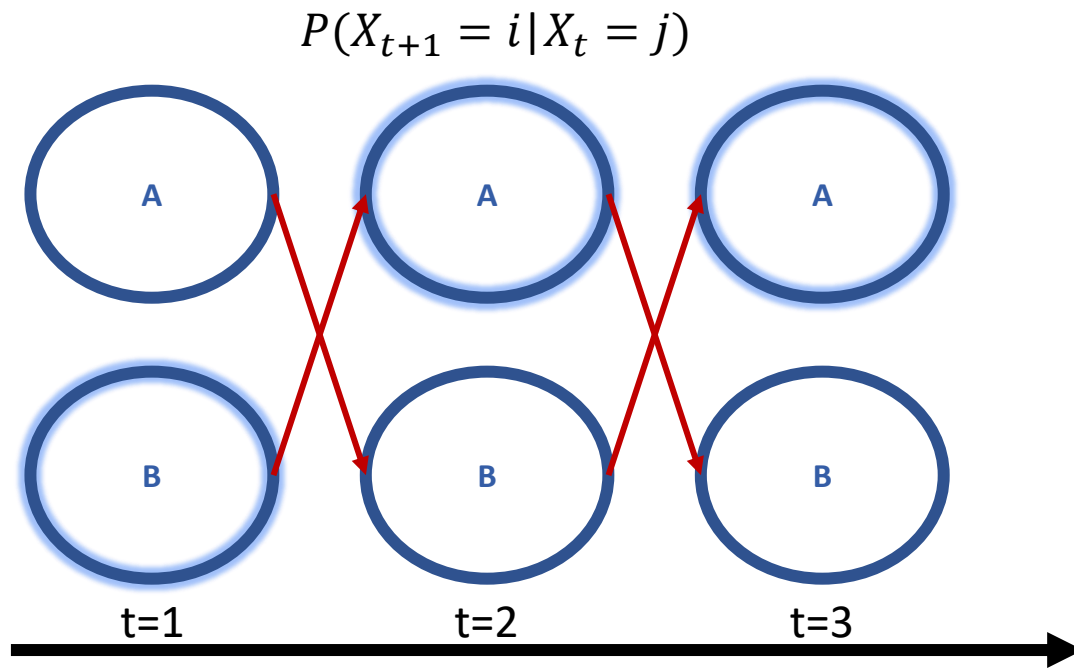


<https://www.mecalux.com.ar/blog/robot-de-picking>



# Cadenas de Markov de tiempo continuo

Si intentamos achicar el paso del parámetro  $t$ , en la probabilidad de transición:



Dado que la probabilidad de transición depende de la extensión de  $\Delta t$ :

- A menor ventana menor probabilidad de observar transición.
- Las probabilidades de transición tienden a “0”.

¿Cómo trabajamos con parámetro continuo?

# Cadenas de Markov de tiempo continuo

Siendo  $T(t)$  la matriz de transición de paso continuo  $t$ .

Si derivamos respecto del tiempo, podemos encontrar la **matriz de tasas de transición**:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t}$$

# Recordemos Champan-Kolmogórov

En una Cadena de Markov de tiempo discreto que sea **homogénea**, se cumple:

$$T^{m+s} = T^m \times T^s$$

Entonces, aplicando la misma regla en CTMC:

$$T(t + \Delta t) = T(t)T(\Delta t)$$



# Cadenas de Markov de tiempo continuo

Aplicando Chapman-Kolmogórov en D:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(t)T(\Delta t) - T(t)}{\Delta t}$$

(Recordemos que son matrices)

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(t)[T(\Delta t) - I]}{\Delta t} = T(t) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(\Delta t) - I}{\Delta t}$$

# Chapman-Kolmógorov Forward Equation

Denominamos  $Q$  a una matriz de tasa de saltos o **matriz generadora**:

$$Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(\Delta t) - I}{\Delta t}$$

Por lo tanto, reemplazando en la expresión anterior de  $dT(t)/dt$ , llegamos a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dT(t)}{dt} = T(t)Q$$

Se denomina **Chapman-Kolmógorov Forward Equation**.

# Chapman-Kolmógorov Forward Equation

$$\frac{dT(t)}{dt} = T(t)Q$$

Intuición:

- La matriz de transición  $T(t)$  **depende de cuánto tiempo  $t$  pasa.**
- La ecuación **relaciona la tasa** de cambio de probabilidades, con la probabilidad **acumulada de transición.**
- Esta relación se logra introduciendo el **concepto de matriz generadora o de tasa de saltos ( $Q$ )**

# Matriz generadora infinitesimal

$$Q = \begin{bmatrix} q_{aa} & q_{ab} & q_{ac} & \cdots & q_{an} \\ q_{ba} & q_{bb} & q_{bc} & \cdots & q_{bn} \\ q_{ca} & q_{cb} & q_{cc} & \cdots & q_{cn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{na} & q_{nb} & q_{nc} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

Las tasas  $q_{ij}$  de cada componentes son escalares, representan la tasa de transición o de saltos entre estados.

# Chapman-Kolmógorov Forward Equation

La ecuación diferencial tiene solución formal:

$$T(t) = e^{tQ}$$

Aparece la exponencial.

Esto se puede expresar como una serie con una expansión de Taylor:

$$T(t) = e^{tQ} = I + tQ + \frac{t^2 Q^2}{2!} + \dots + \frac{t^n Q^n}{n!}$$

# Chapman-Kolmógorov Forward Equation

Veamos qué pasa con los componentes:

$$T(t) = I + tQ + \frac{t^2 Q^2}{2!} + \dots + \frac{t^n Q^n}{n!}$$

Si el  $t$  es muy chico, los términos de mayor orden son despreciables (más adelante vamos a ver el significado)

$$T(t) = I + tQ + \varepsilon(t)t$$

$$\text{Si } \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$$

# Chapman-Kolmógorov Forward Equation

Por ejemplo, del estado  $i$  al  $j$  en un lapso de tiempo  $t$ :

$$T(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} q_{aa} & q_{ab} & q_{ac} & \cdots & q_{an} \\ q_{ba} & q_{bb} & q_{bc} & \cdots & q_{bn} \\ q_{ca} & q_{cb} & q_{cc} & \cdots & q_{cn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{na} & q_{nb} & q_{nc} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} + \varepsilon(t)t$$

Si  $p_{ij}$  son los componentes de  $T(t)$ , veamos algunos ejemplos:

$$p_{ab} = t q_{ab} + \varepsilon(t)t$$
$$p_{bb} = 1 + t q_{bb} + \varepsilon(t)t$$



# Chapman-Kolmógorov Forward Equation

Generalizando:

Probabilidad de transición entre estados, con **tasa de transición**  $q_{ij}$  :

$$p_{ij} = tq_{ij} + \varepsilon(t)t \quad i \neq j$$

Probabilidad de permanencia entre estados, con **tasa de permanencia**  $q_{ii}$  :

$$p_{ii} = 1 + tq_{ii} + \varepsilon(t)t$$

¿Qué son las tasas  $q_{ij}$ ?

# Eventos en parámetro continuo

- **Proceso sin memoria:** la realización de un evento aleatorio en un intervalo  $[t_0, t_0 + t]$  depende **únicamente** de la longitud  $t$  del intervalo y no de la posición en el tiempo.
- La **distribución** por excelencia que permite el **proceso sin memoria** es la **exponencial**.
- La duración de tiempo, un instante antes de producirse un evento, es una variable  $T \sim \exp(\lambda)$ .
- Siendo  $\lambda$ , la tasa de ocurrencia de un evento.

# Distribución exponencial

Función de densidad de probabilidad:

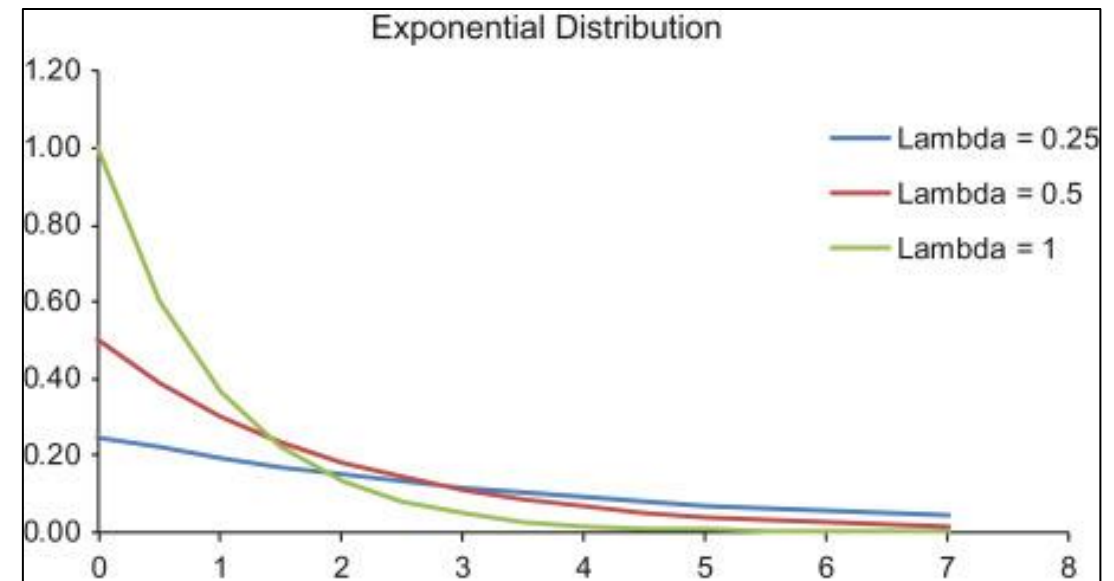
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Acumulada de densidad de probabilidad:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Esperanza:

$$\mathbb{E}[x] = \frac{1}{\lambda}$$



<https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/exponential-distribution>

# Tasas de permanencia y ocurrencia

**Al aumentar el tiempo**, siendo una variable discreta que sigue una distribución exponencial:

- La probabilidad de transición aumenta, por lo tanto la **tasa de transición** es:

$$q_{ij} = \lambda_{ij}$$

- La probabilidad de permanencia disminuye, por lo tanto la **tasa de permanencia** es:

$$q_{ii} = -\lambda_{ii}$$

# Tasa de permanencia

- El tiempo que pasa en un estado es una variable  $T \sim \exp(\lambda)$ .

La probabilidad de no transicionar, es el caso que el evento **no ocurra**:

$$p_{ii}(t) = P(X_{t_0+t} = i \mid X_{t_0} = i) = 1 - \lambda_{ii}t + \varepsilon(t)t$$

Si  $t \rightarrow 0$ :

$$\lambda_{ii} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(t)}{t}$$

# Tasa de transición

La probabilidad de transicionar, es el caso que el evento **ocurra**:

$$p_{ij}(t) = P(X_{t_0+t} = j \mid X_{t_0} = i) = \lambda_{ij}t + \varepsilon(t)t \quad \text{si } i \neq j$$

Si  $t \rightarrow 0$ :

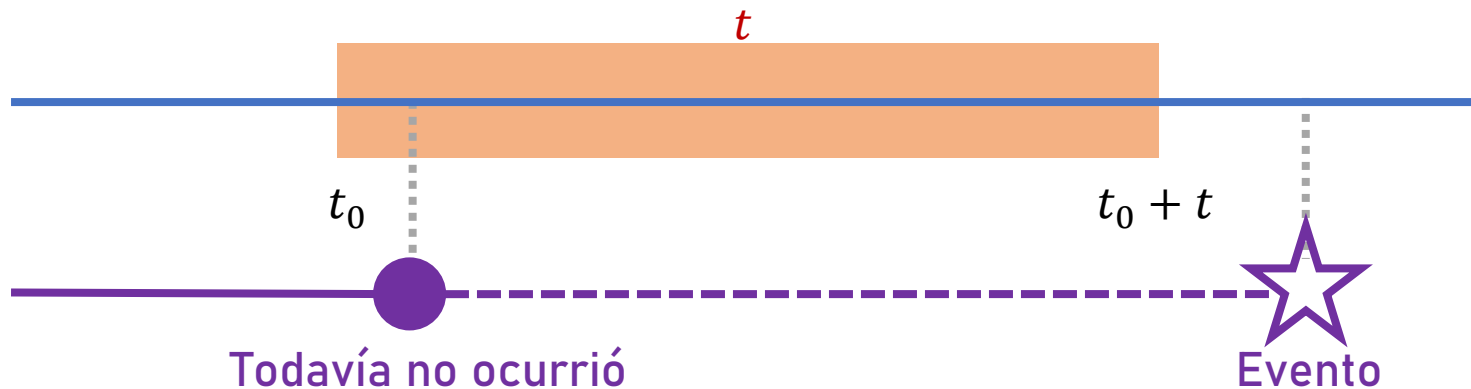
$$\lambda_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t}$$

# Intuición en la probabilidad de permanencia

- Probabilidad de que el evento **no ocurra** en  $[t_0, t_0 + t]$ , tal que no ocurrió todavía en  $t$ .

$$P(T > t_0 + t | T > t_0) = 1 - \underbrace{\lambda t}_{\text{Probabilidad de que se de 1 Evento}} + \underbrace{\varepsilon(t)t}_{\text{Probabilidad de que se de más de 1 Evento}}$$

$$\text{Si } \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$$



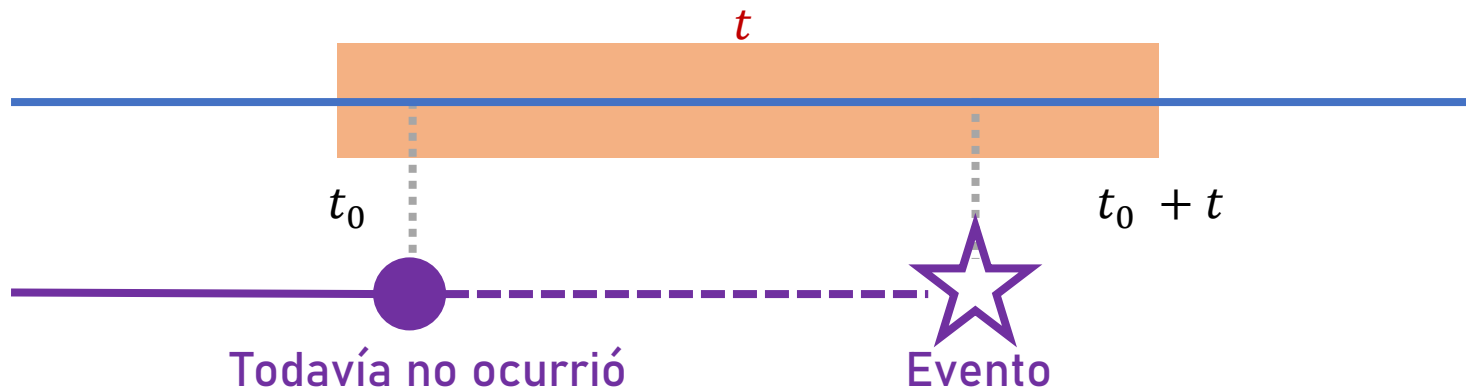


# Intuición en la probabilidad de transición

- Probabilidad de que el evento **ocurra** en  $[t_0, t_0 + t]$ , tal que no ocurrió todavía en  $t$ .

$$P(T \leq t_0 + t | T > t_0) = \underbrace{\lambda t}_{\text{Probabilidad de que se de 1 Evento}} + \underbrace{\varepsilon(t)t}_{\text{Probabilidad de que se de más de 1 Evento}}$$

$$\text{Si } \lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$$



# Regla de sumatoria de tasas de transición

En Cadenas de Markov discreto se cumple:

$$\sum_j p_{ij}(t) = 1$$

En Cadenas de Markov de Tiempo Continuo, se puede demostrar:

$$\sum_{i \neq j} q_{ij} = 0$$

# Regla de sumatoria de tasas de transición

Partiendo del resultado anterior:

$$\sum_{i \neq j} q_{ij} = 0$$

Aislando la tasa de permanencia:

$$q_{ii} + \sum_{i \neq j} q_{ij} = 0$$

$$q_{ii} = - \sum_{i \neq j} q_{ij}$$

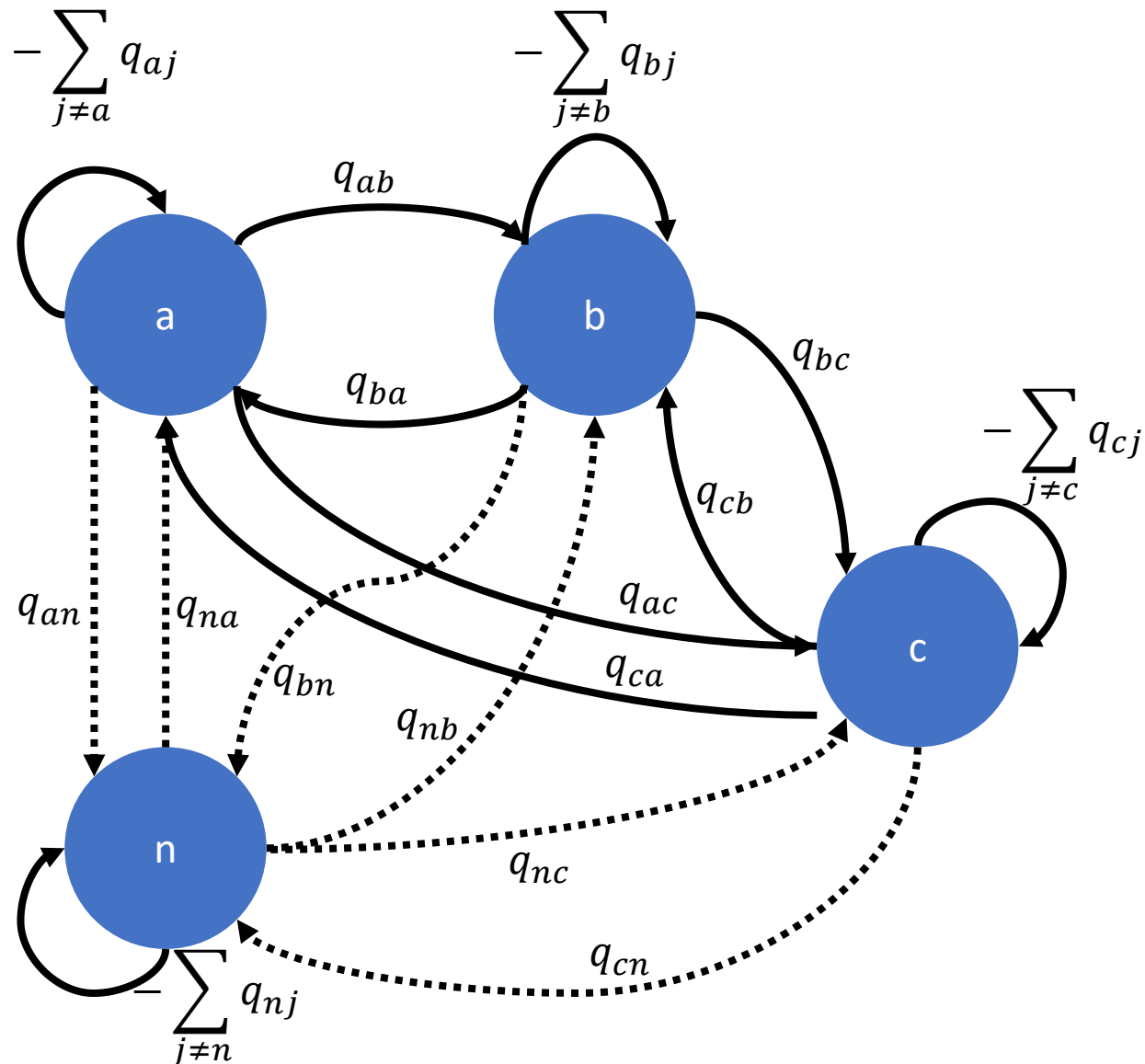
Esta expresión relaciona la tasa de permanencia con la de transición a otros estados.

# Matriz infinitesimal

Por lo tanto la matriz generadora infinitesimal se puede expresar como:

$$Q = \begin{bmatrix} -\sum_{j \neq a} q_{aj} & q_{ab} & q_{ac} & \cdots & q_{an} \\ q_{ba} & -\sum_{j \neq b} q_{bj} & q_{bc} & \cdots & q_{bn} \\ q_{ca} & q_{cb} & -\sum_{j \neq c} q_{cj} & \cdots & q_{cn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{na} & q_{nb} & q_{nc} & \cdots & -\sum_{j \neq n} q_{nj} \end{bmatrix}$$

# Ejemplo: grafo de matriz generadora



$$Q = \begin{bmatrix} -\sum_{j \neq a} q_{aj} & q_{ab} & q_{ac} & \cdots & q_{an} \\ q_{ba} & -\sum_{j \neq b} q_{bj} & q_{bc} & \cdots & q_{bn} \\ q_{ca} & q_{cb} & -\sum_{j \neq c} q_{cj} & \cdots & q_{cn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{na} & q_{nb} & q_{nc} & \cdots & -\sum_{j \neq n} q_{nj} \end{bmatrix}$$

# Estado estacionario

Con el método de sistemas de ecuaciones de Chapman-Kolmogórov:

$$\pi T(t) = \pi$$

Derivamos respecto de  $t$  :

$$\frac{d(\pi T(t))}{dt} = \frac{d(\pi)}{dt}$$

# Estado estacionario

$\pi$  es un vector de escalares, que representan la probabilidad.

Por lo tanto:

$$\pi \frac{d(T(t))}{dt} = \bar{0}$$

$$\pi Q = \bar{0}$$

$$[p_a \quad p_b \quad p_c \quad \dots \quad p_n] \begin{bmatrix} q_{aa} & q_{ab} & q_{ac} & \dots & q_{an} \\ q_{ba} & q_{bb} & q_{bc} & \dots & q_{bn} \\ q_{ca} & q_{cb} & q_{cc} & \dots & q_{cn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{na} & q_{nb} & q_{nc} & \dots & q_{nn} \end{bmatrix} = \bar{0}$$



# Estado estacionario

Sabiendo que:

$$\sum_i p_i = 1$$

Agregamos la ecuación adicional al sistema para evitar que sea indeterminado:

$$[p_a \quad p_b \quad p_c \quad \dots \quad p_n] \begin{bmatrix} q_{aa} & q_{ab} & q_{ac} & \dots & q_{an} & 1 \\ q_{ba} & q_{bb} & q_{bc} & \dots & q_{bn} & 1 \\ q_{ca} & q_{cb} & q_{cc} & \dots & q_{cn} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ q_{na} & q_{nb} & q_{nc} & \dots & q_{nn} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Estado estacionario

$$[p_a \quad p_b \quad p_c \quad \dots \quad p_n] \begin{bmatrix} q_{aa} & q_{ab} & q_{ac} & \dots & q_{an} & 1 \\ q_{ba} & q_{bb} & q_{bc} & \dots & q_{bn} & 1 \\ q_{ca} & q_{cb} & q_{cc} & \dots & q_{cn} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ d_{na} & q_{nb} & q_{nc} & \dots & q_{nn} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\pi A = B$$

Si resolvemos la inversa de A, llegamos a la solución.

$$\pi = BA^{-1}$$

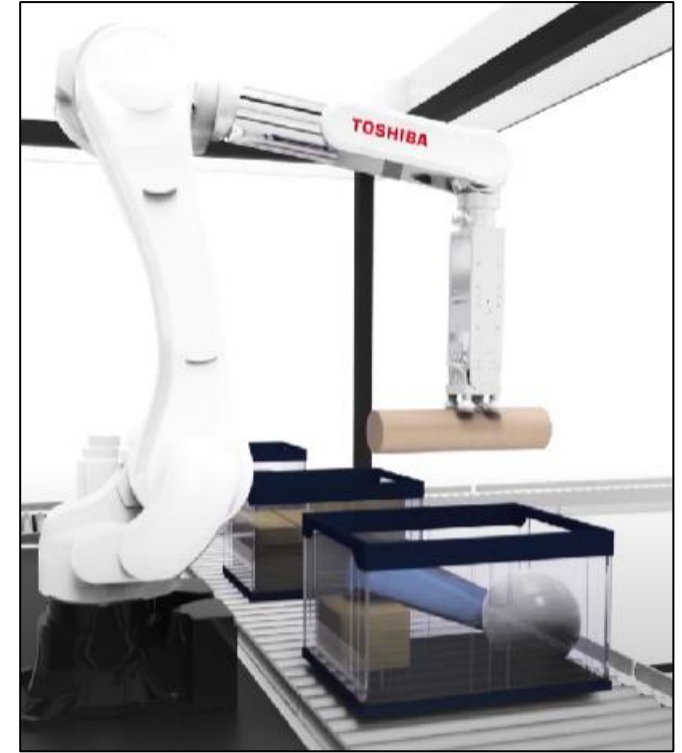
# Ejemplo: modelo de mantenimiento

En una línea industrial dos máquinas hacen picking automático de piezas en paralelo.

Las máquinas suelen fallar siguiendo un proceso estocástico.

Para la máquina 1 la tasa de fallas/mes es de  $\lambda_1 = 10$  y para la máquina 2 de  $\lambda_2 = 8$ .

Ocurrida la falla, una persona especialista de mantenimiento las repara con tasas de  $\mu_1 = 11$  y  $\mu_2 = 7$  reparaciones/mes.



Toshiba Piece-picking Robot,  
<https://www.youtube.com/watch?v=Snf2D1v3y9s>

# Ejemplo: modelo de mantenimiento

Agentes:

Tasas de transición:

# Ejemplo: modelo de mantenimiento

## Agentes:

- Máquina 1 (M1)
- Máquina 2 (M2)
- Especialista de Mantenimiento (R)

## Tasas de transición:

- Falla máquina 1 ( $\lambda_1$ )
- Falla máquina 2 ( $\lambda_2$ )
- Reparación máquina 1 ( $\mu_1$ )
- Reparación máquina 2 ( $\mu_2$ )

# Ejemplo: modelo de mantenimiento

Estados de los agentes *(no es lo mismo que del sistema):*

# Ejemplo: modelo de mantenimiento

Estados de los agentes *(no es lo mismo que del sistema)*:

- M1: en falla / en producción.
- M2: en falla / en producción.
- R: ocioso / reparación M1 / reparación M2.



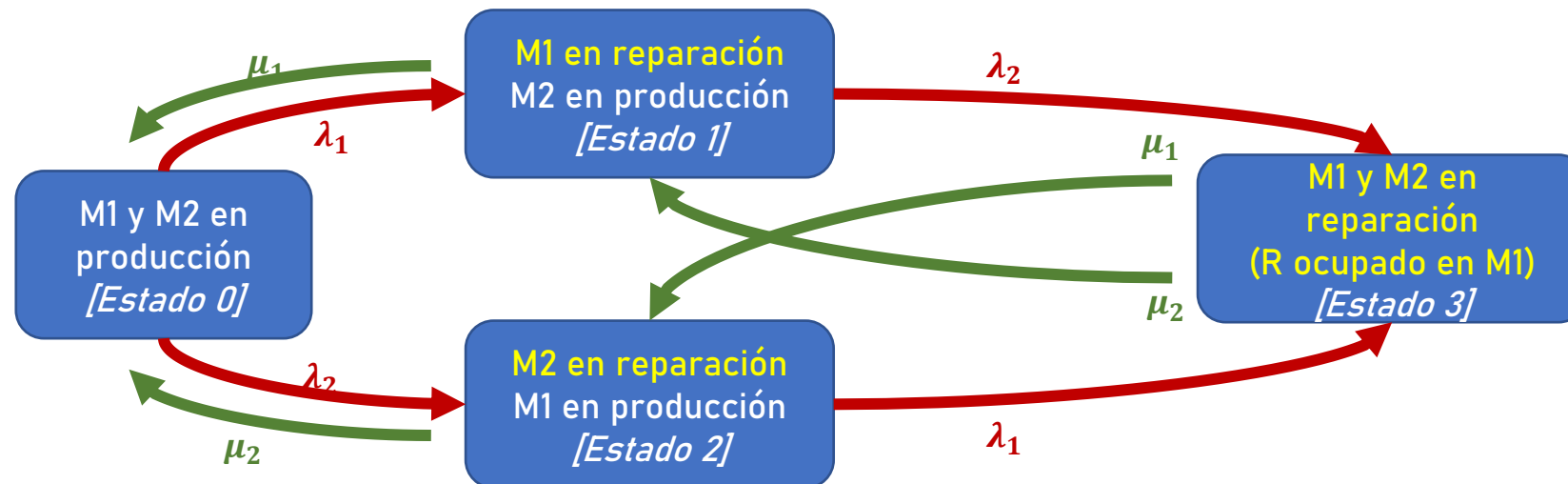
# Ejemplo: modelo de mantenimiento

Espacio de estados del sistema:

# Ejemplo: modelo de mantenimiento

Espacio de estados del sistema (discusión):

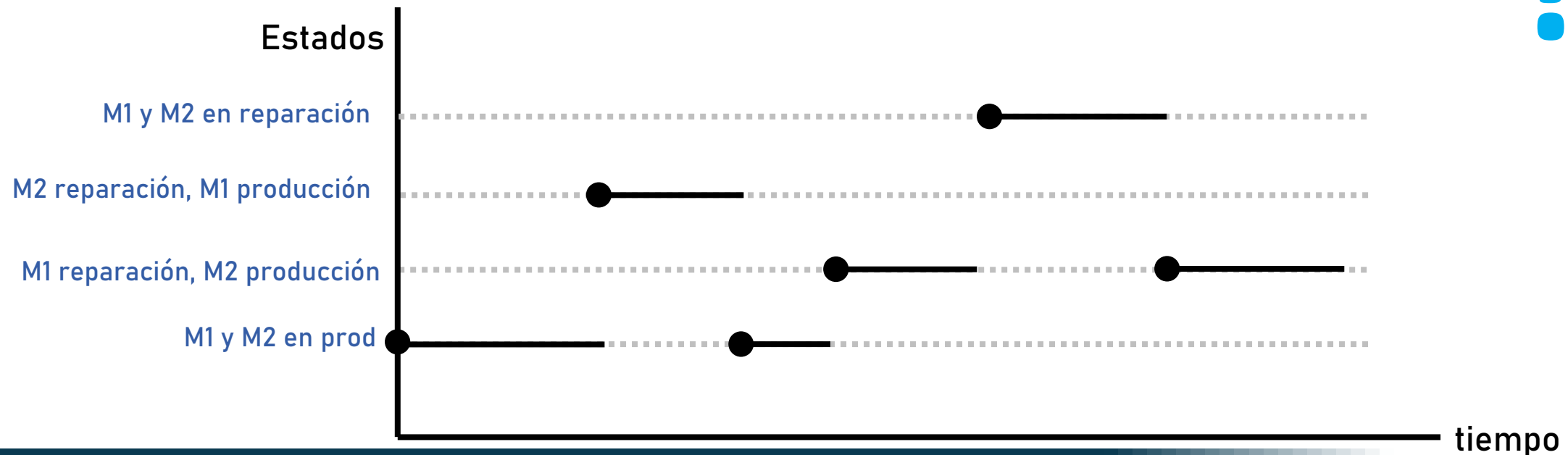
- Máquina 1 y Máquina 2 en producción.
- Máquina 1 en reparación, máquina 2 en producción.
- Máquina 2 en reparación, máquina 1 en producción.
- Máquina 1 en reparación y máquina 2 en reparación.



# Ejemplo: modelo de mantenimiento

Espacio de estados del sistema:

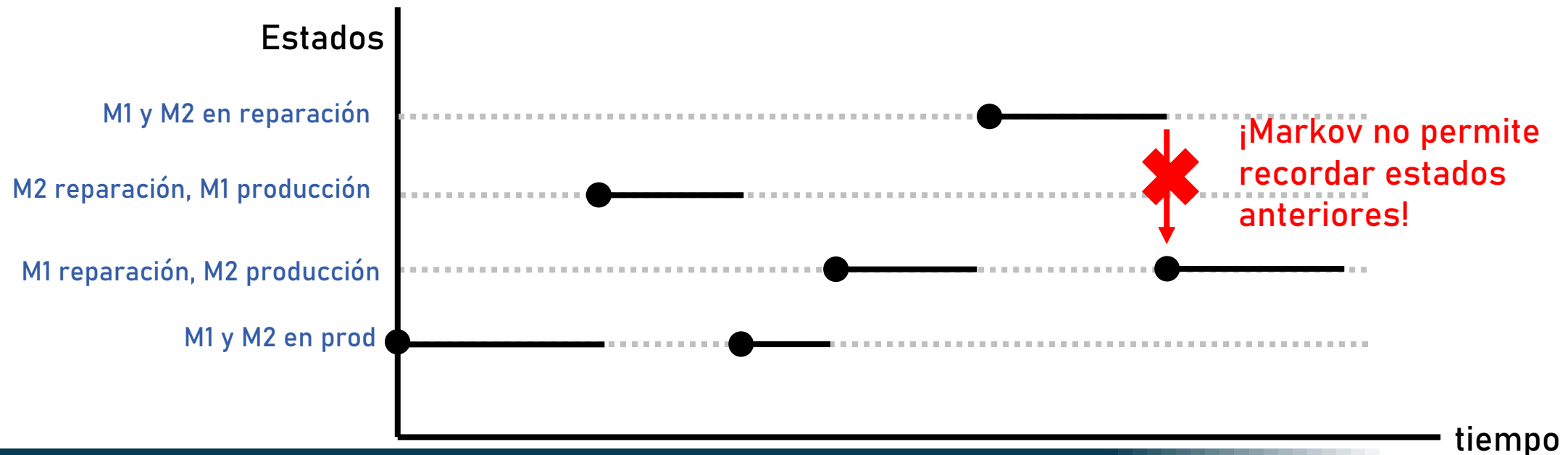
- Máquina 1 y Máquina 2 en producción.
- Máquina 1 en reparación, máquina 2 en producción.
- Máquina 2 en reparación, máquina 1 en producción.
- Máquina 1 en reparación y máquina 2 en reparación.



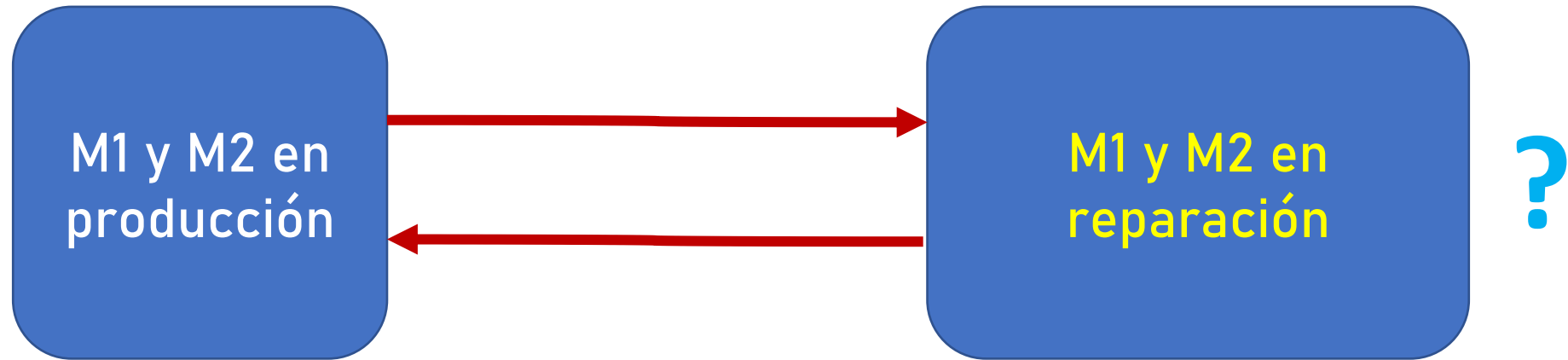
# Ejemplo: modelo de mantenimiento

Espacio de estados del sistema:

- Máquina 1 y Máquina 2 en producción.
- Máquina 1 en reparación, máquina 2 en producción.
- Máquina 2 en reparación, máquina 1 en producción.
- Máquina 1 en reparación y máquina 2 en reparación.



# Ejemplo: modelo de mantenimiento

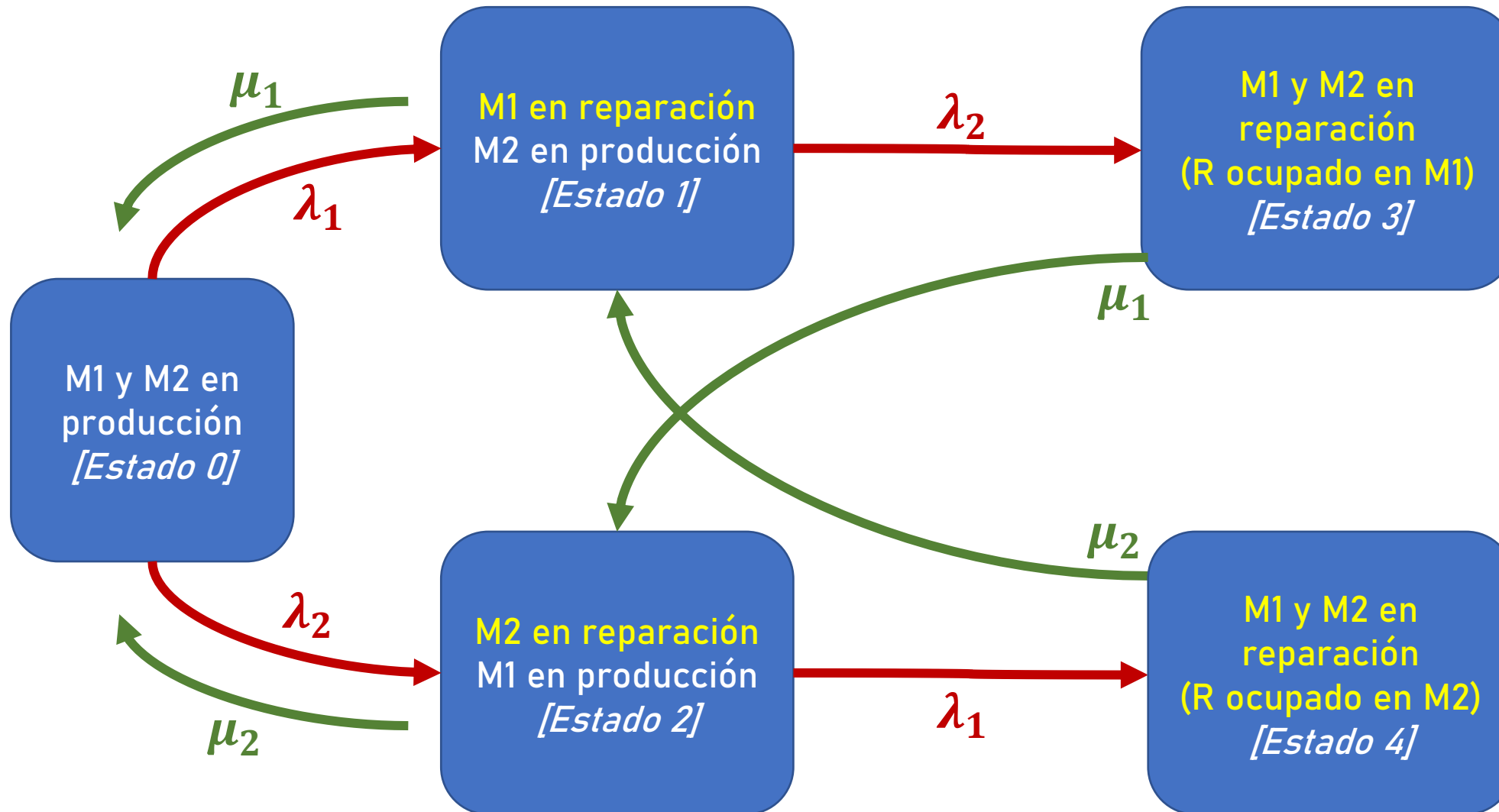


# Ejemplo: modelo de mantenimiento



# Ejemplo: grafo y matriz de tasas

Espacio de estados del sistema:



Referencias:

- M1: Máquina 1.
- M2: Máquina 2.
- R: Especialista de Mantenimiento.

# Ejemplo: modelo de mantenimiento

Matriz de transición de tasas (generadora):



# Ejemplo: modelo de mantenimiento

Matriz de transición de tasas (generadora):

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_2 & 0 & -\lambda_2 - \mu_2 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \mu_1 & -\mu_1 & \vdots \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{bmatrix}$$

	M1 y M2 en producción	M1 reparación, M2 producción	M2 reparación, M1 producción	M1 y M2 reparación (R en M1)	M1 y M2 reparación (R en M2)
	M1 y M2 en producción	M1 reparación, M2 producción	M2 reparación, M1 producción	M1 y M2 reparación (R en M1)	M1 y M2 reparación (R en M2)

# Ejemplo: modelo de mantenimiento

A partir de los datos de tasas de reparación y falla, se quiere dimensionar la capacidad operativa de la planta para confeccionar el master plan para el siguiente período.

Sabiendo las cadencias de producción de M1 y M2: ¿Cómo se puede estimar la capacidad operativa?

# Ejemplo: modelo de mantenimiento

Calculamos el estacionario:

$$[p_0 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4] \begin{bmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 & 1 \\ \mu_1 & -\lambda_1 - \mu_1 & 0 & \lambda_2 & 0 & 1 \\ \mu_2 & 0 & -\lambda_2 - \mu_2 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \mu_1 & -\mu_1 & \vdots & 1 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 & -\mu_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Luego, podemos estimar:

- Probabilidad de estar en producción, output de producto máximo.
- Probabilidad de estar en reparación, costo de mantenimiento, pérdida de tiempo productivo.
- ...

# Caso de uso: carga de vehículos eléctricos

Campo de estudio en SmartGrid: Ing. Eléctrica + TI + Comunicación.

*Sikeridis et. Al (2020) "Joint Capacity Modeling for Electric Vehicles in V2I-enabled Wireless Charging Highways"*

Investigación en Autopistas con carga inalámbrica.

- Capacidad de carga y comunicación de la autopista.
- Modelización con CTMC de estado finito.
- Performance demanda/consumo.

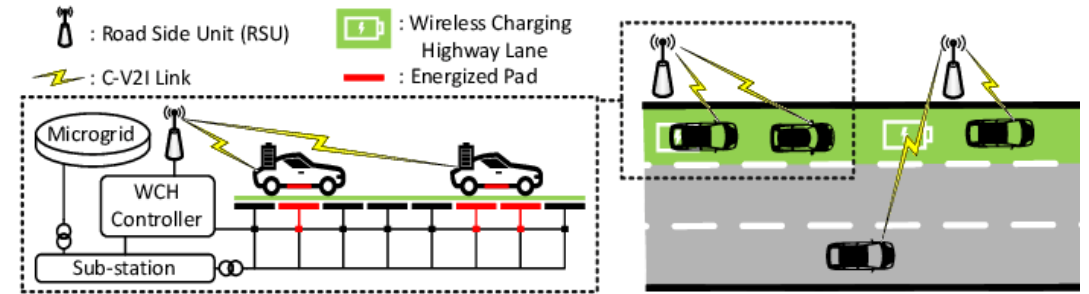


Fig. 1. Wireless Charging Highway Architecture

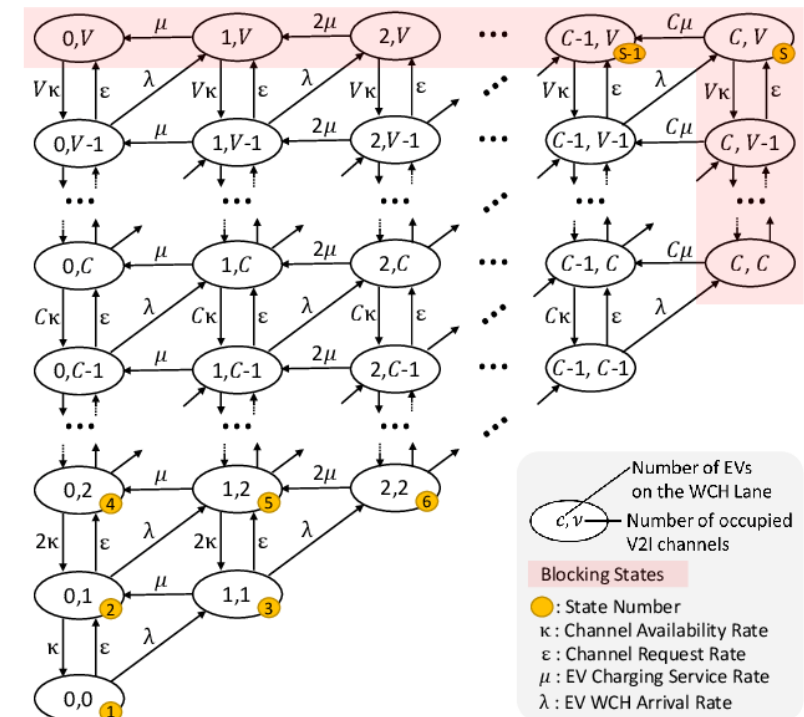


Fig. 2. Continuous-time Markov Chain for WCH Joint Capacity Modeling

Fuente: [https://www.researchgate.net/publication/348083410\\_Joint\\_Capacity\\_Modeling\\_for\\_Electric\\_Vehicles\\_in\\_V2I-enabled\\_Wireless\\_Charging\\_Highways](https://www.researchgate.net/publication/348083410_Joint_Capacity_Modeling_for_Electric_Vehicles_in_V2I-enabled_Wireless_Charging_Highways)



# Adicional

# Adicional

## Demostraciones:

1) Sumatoria de tasas de transición igual a 0.

# 1) Regla de sumatoria de tasa de transición

Sabemos que:

$$\sum_j p_{ij}(t) = 1$$

Si derivamos esta expresión:

$$\frac{d \sum_j p_{ij}(t)}{dt} = \frac{d(1)}{dt} = 0$$



# 1) Regla de sumatoria de tasas de transición

Partiendo de la expresión:

$$T(t) = I + tQ + \varepsilon(t)t$$

Sumando ambos lados:

$$\sum_j T(t) = \sum_j (I + tQ + \varepsilon(t)t)$$

$$\sum_j T(t) = \sum_j I + \sum_j tQ + \sum_j \varepsilon(t)t$$

# 1) Regla de sumatoria de tasas de transición

Dado que:

- $\sum_j T(t) = \bar{1}$
- $\sum_j I = \bar{1}$
- $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$

Reemplazamos:

$$\bar{1} = \bar{1} + \sum_j tQ + \sum_j \varepsilon(t)t$$

$$\bar{0} = t \sum_j Q$$

Por lo tanto, :

$$\bar{0} = \sum_j Q$$

Lo que implica:  $\sum_j q_{ij} = 0 \quad \forall i$