Repaso de Probabilidad

Rodrigo Maranzana

Probabilidad condicional

"La probabilidad de un evento A dado B"

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ej: Dados los siguientes datos de una máquina:

- Probabilidad de rotura tal que hubo vibración: 0.85
- Probabilidad de vibración anómala: 0.01
- Probabilidad de rotura: 0.05

¿Cuál es la probabilidad de rotura debido a vibración?

Estados:

- Vibración
- Rotura

Probabilidad:

- $\boldsymbol{P(Vibración) = 0.01}$
- $\boldsymbol{P(Rotura|Vibración) = 0.85}$

Probabilidad de rotura por vibración

$\boldsymbol{P(Rotura \cap Vibración) =}$

$\boldsymbol{= P(Rotura|Vibración)P(Vibración) = 0.0085}$

Regla de Bayes

Probabilidad de un evento, basado en conocimiento relacionado con ese evento.

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

- $P(A|B)$: probabilidad a posteriori (posterior probability)
- $P(B|A)$: verosimilitud (likelihood)
- $P(A)$: probabilidad a priori (prior probability)
- $P(B)$: probabilidad marginal (marginal probability)

Regla de Bayes

Se produjo una rotura en la máquina:

¿Cuál es la probabilidad que haya sido causada por vibración?

$$P(Vibración|Rotura) = \frac{P(Rotura|Vibración)P(Vibración)}{P(Rotura)}$$

- $P(Vibración|Rotura)$: probabilidad a posteriori (posterior probability)
- $P(Rotura|Vibración)$: verosimilitud (likelihood)
- $P(Vibración)$: probabilidad a priori (prior probability)
- $P(Rotura)$: probabilidad marginal (marginal probability)

Probabilidad:

- $\boldsymbol{P(Rotura|Vibración) = 0.85}$
- $\boldsymbol{P(Vibración) = 0.01}$
- $\boldsymbol{P(Rotura) = 0.05}$

$$P(Vibración|Rotura) = \frac{0.85 \ * 0.01}{0.05} = \mathbf{0.17}$$

Probabilidad independiente

Dos eventos son independientes si se cumple la siguiente condición:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Probabilidad de que llueva en Buenos Aires un día determinado del año.

$$P(llueve) = 0.30$$

Probabilidad de que el tren se retrase en París.

$$P(retraso) = 0.05$$

$$P(lluvia \cap retraso) = P(lluvia)P(retraso) = 0.015$$

Variables aleatorias

Variable aleatoria es una función que mapea valores como resultado de un experimento aleatorio.

Ej: la variable aleatoria X describe el resultado de tirar un dado.

Notación:
$X \sim \mathcal{N}[0,1]$

"Una variable aleatoria X sigue una distribución normal de media 0 y desvío 1 (estándar)"

Espacio muestral

- Espacio muestral: conjunto de resultados posibles de un experimento.

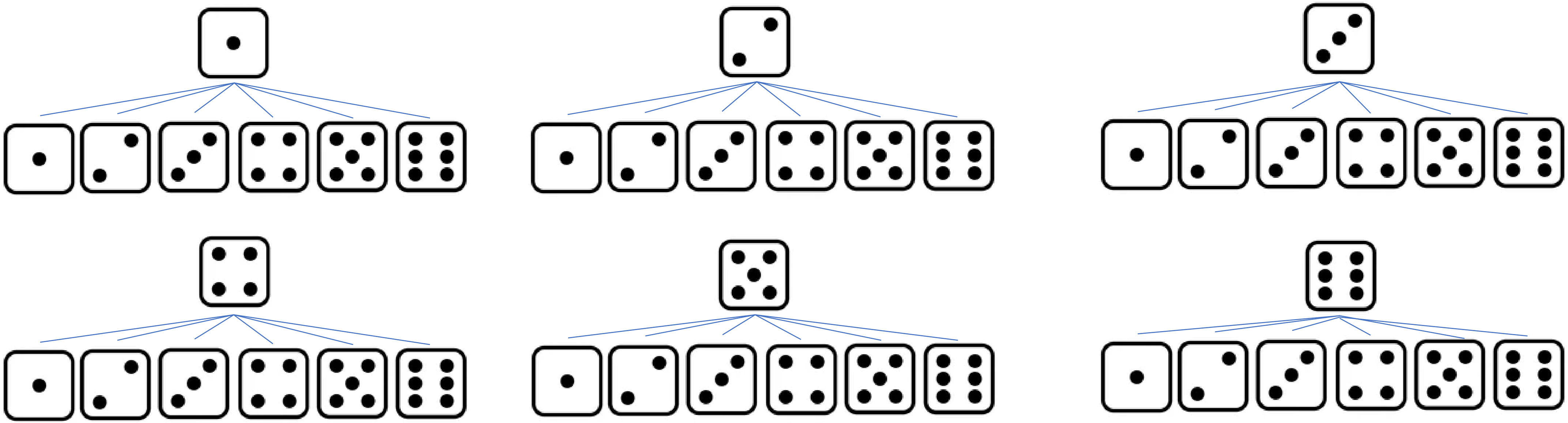
Ejemplo: se tiran dos dados balanceados.

Set de elementos: {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Caso de permutaciones con repetición.

Espacio muestral

Ejemplo: se tiran dos dados balanceados.



{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1) ... }

Nº Posibilidades

En el ejemplo anterior: ¿cómo calculamos el tamaño del espacio muestral?

Dado que hay permutaciones con repetición:

$$tamaño = \ n\, caras^{n\, dados} = 6^2 = 36\, posibilidades$$

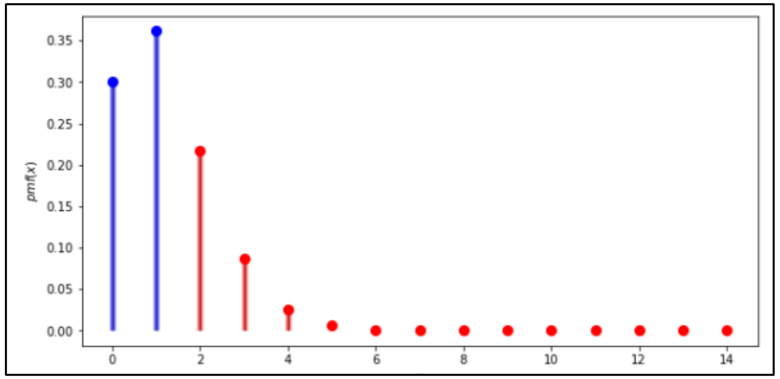
Funciones de probabilidad discreta

- Función de probabilidad de masa (pmf) discreta:

$$p(x)$$

- Función de distribución acumulada (cdf) discreta:

$$P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p(X = x_i)$$



Para que sea función de probabilidad se debe cumplir:

$$\sum_i p(x_i) = 1$$

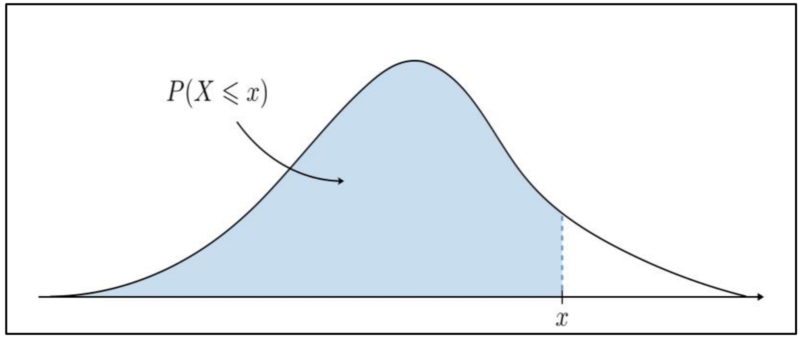
Funciones de probabilidad continuas

- Función de densidad de probabilidad (pdf)

$$f(x)$$

- Función de distribución acumulada (cdf)

$$P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$



Fuente: https://stanford.edu/~shervine/teaching/cs-229/refresher-probabilities-statistics

Para que sea función de probabilidad se debe cumplir:

$$\int f(x)dx = 1$$

Funciones de probabilidad continuas

- Probabilidad puntual en funciones continuas:

¿Cuál es la probabilidad que una persona mida 1.80m?

$$P(X = 1.80m) = 0$$

Momentos de una distribución: valor esperado

Esperanza en probabilidad discreta:

$$E[X] = \sum_i x_i \, p(x_i)$$

Esperanza en probabilidad continua:

$$E[X] = \int x \, f(x) dx$$

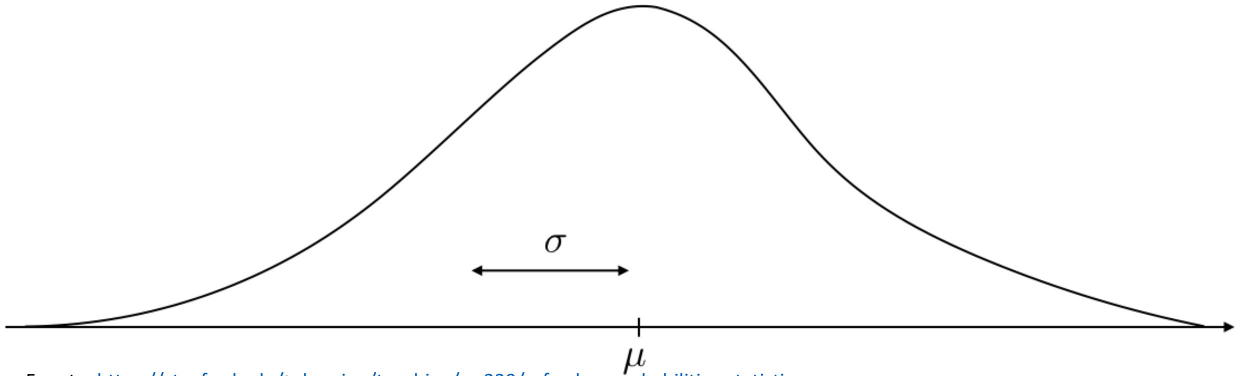
Momentos de una distribución: varianza y desvío

Varianza:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2]$$

Desvío:

$$\sigma = \sqrt{Var[X]}$$

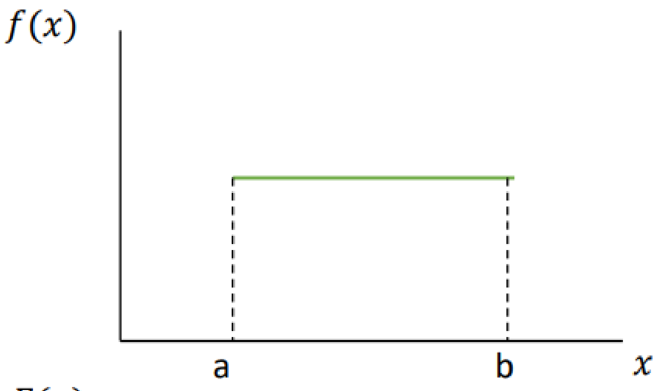


Fuente: https://stanford.edu/~shervine/teaching/cs-229/refresher-probabilities-statistics

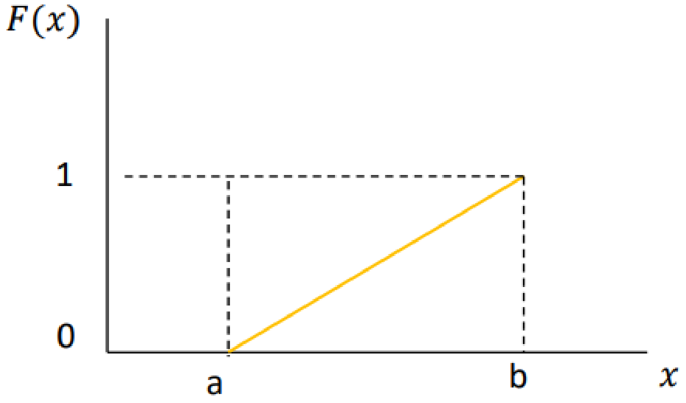
Ejemplos de distribuciones útiles en IO

Distribución Uniforme

Utilizada en el sampleo de variables aleatorias.



$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad si\ x \in [a,b]$$

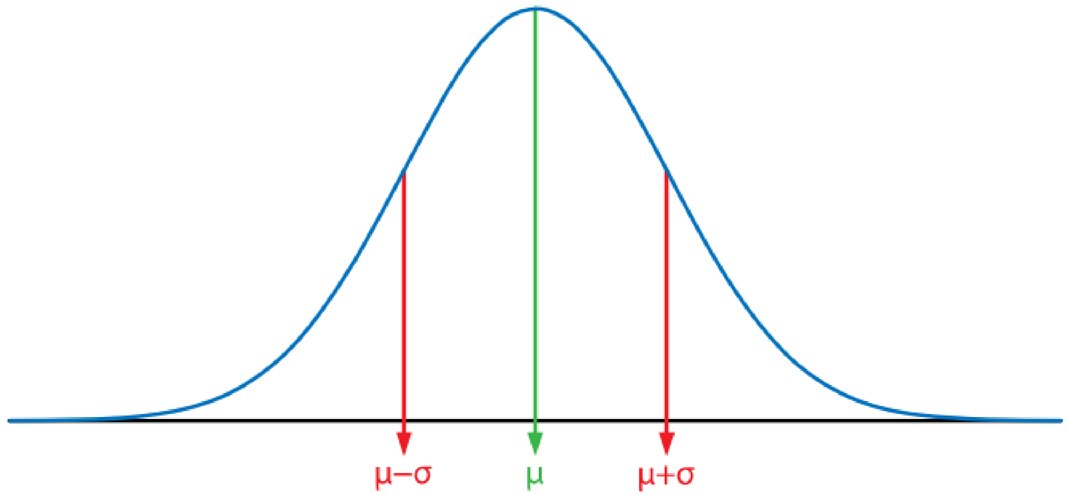


$$F(x) = \begin{cases} 0\ si\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}\ si\ x \epsilon [a,b] \\ 1\ si\ x \geq b \end{cases}$$

Ejemplos de distribuciones útiles en IO

Distribución Normal

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

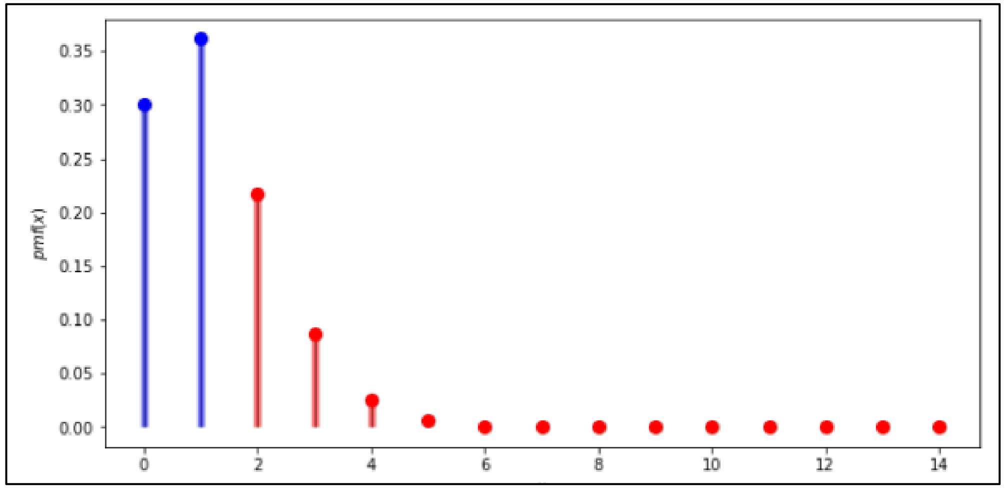


Fuente: https://web.stanford.edu/class/archive/cs/cs109/cs109.1178/lectures/11-normal-distribution.pdf

Ejemplos de distribuciones útiles en IO

Distribución Poisson

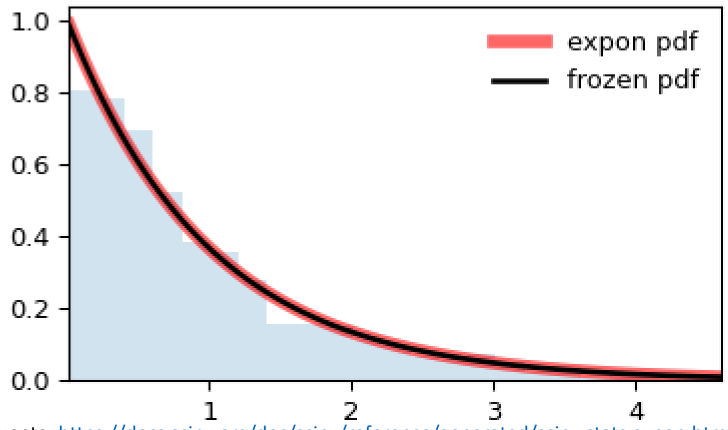
$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$



Ejemplos de distribuciones útiles en IO

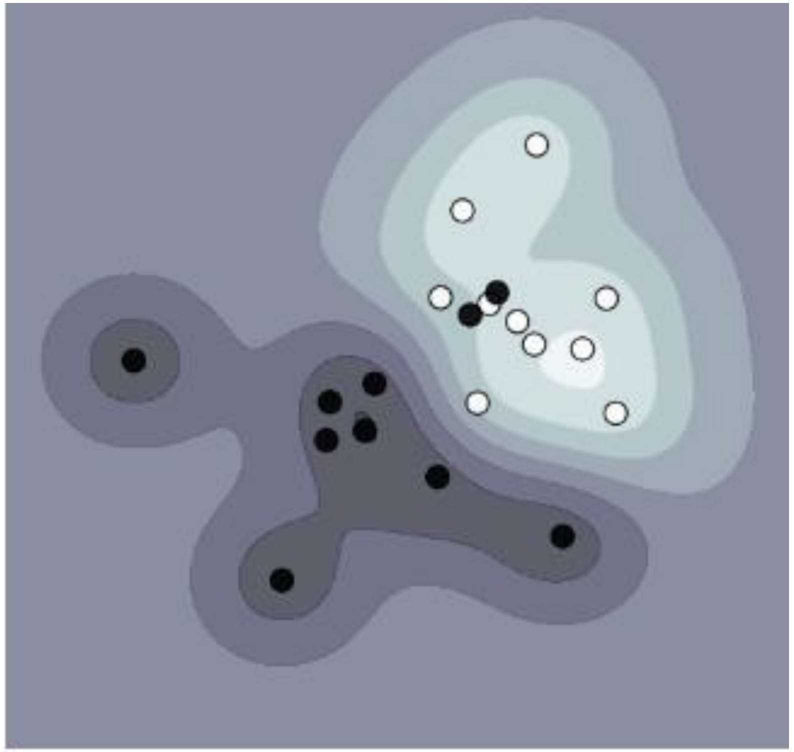
Distribución Exponencial

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$



Fuente: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.expon.html

Otros usos de Variables Aleatorias en Machine Learning



Fuente: https://scikit-learn.org/stable/modules/svm.html#classification

Modelos que ajusten distribuciones complejas, dados datos.

Ej:

- Estimar la probabilidad de default de un cliente.
- Estimar la probabilidad de falla de un sistema.
- Clasificar automáticamente productos en punta de línea por visión artificial.
- Proyectar las ventas para el próximo año.