Introducción a Modelos de Optimización

Rodrigo Maranzana

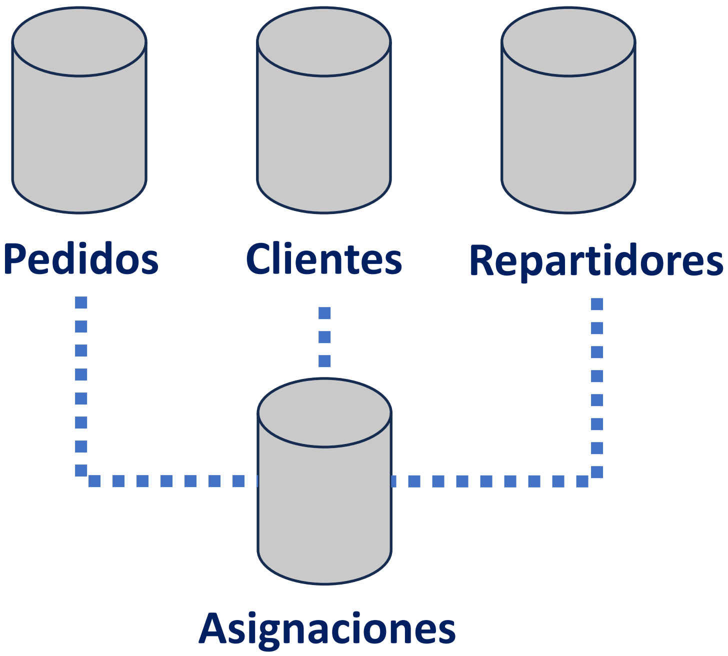
Introducción a Optimización

"Selección de la mejor alternativa posible de una variedad de opciones posibles"

Conceptos:

- Variables de decisión del problema.
- Parámetros.
- Función objetivo a maximizar o minimizar.
- Restricciones del problema.
- Región factible formada por restricciones.

Ejemplos: apps delivery



Objetivo:

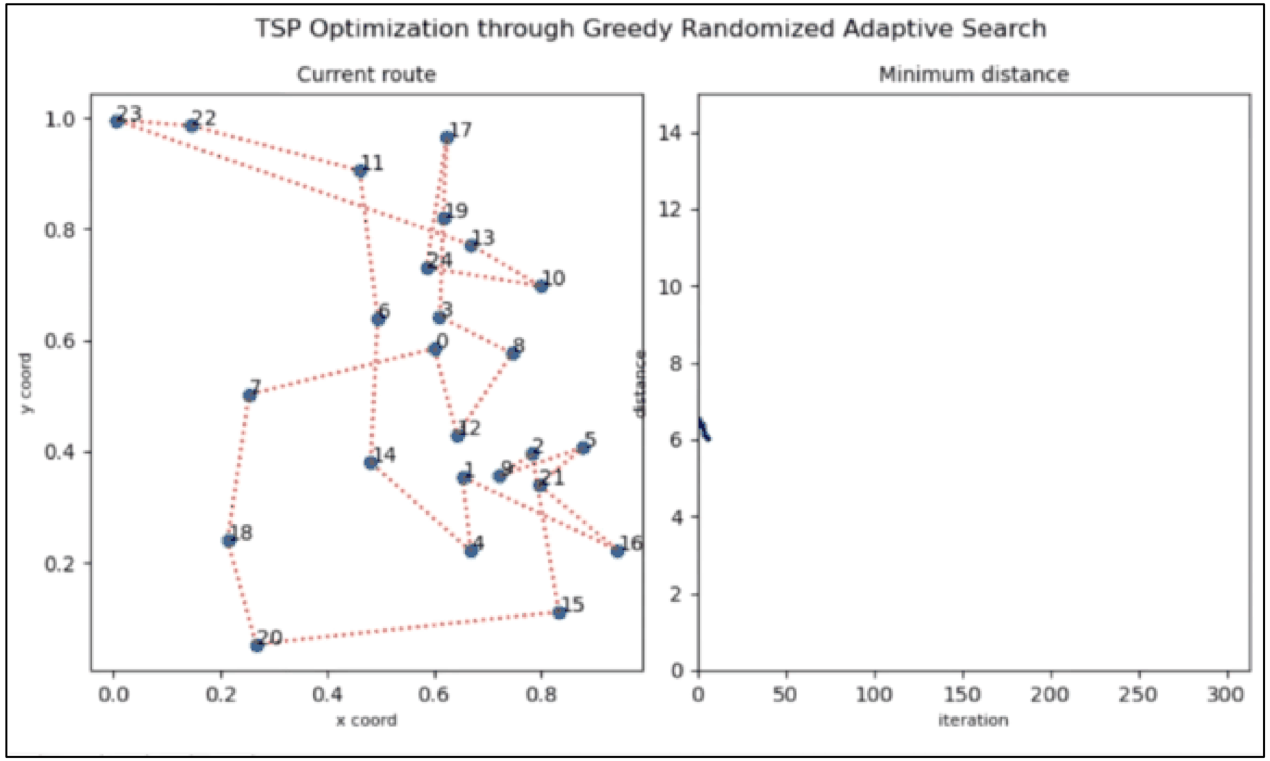
- Minimizar tiempo de entrega.
- Maximizar atención al cliente.
- Minimizar problemas de entrega.
- Maximizar ganancia.
- …

Ejemplos: apps delivery

Complejidades a tener en cuenta en un modelo:

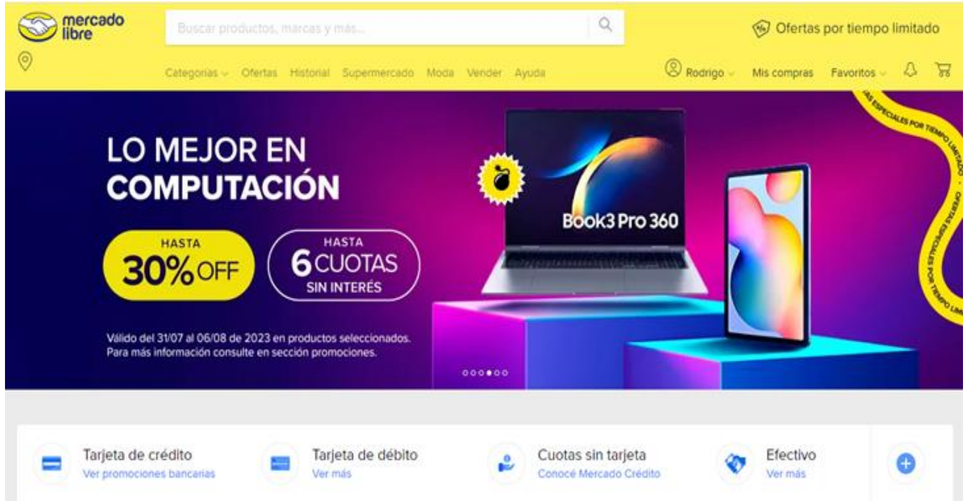
- Períodos de alta demanda dinámicos.
- Variabilidad en cantidad de repartidores en zona.
- Variabilidad de demanda.
- Franjas de entregas programadas.
- Cliente con compras en más de un local diferente.
- Repartidores con más de un pedido.
- Balance de repartidores en zona de alta demanda.
- Control de nivel de servicio por repartidor.
- Reducción de tiempo de entrega.
- Control de tiempo de entrega de negocios, penalización de radio.
- Variación de precios de servicio respecto a oferta-demanda.
- Asignaciones especiales para clientes premium.
- Posibilidad de recargo con entrega prioritaria.
- Preferencia de zona de repartidores.

Ejemplos: ruteo de vehículos



Optimización de ruta con Greedy Randomized Adaptive Search Algorithm
(OS11: Models and Algorithms for Logistics and Transport, Master OSS UTT-UTN)

Ejemplos: e-commerce web



CTR: 0.14

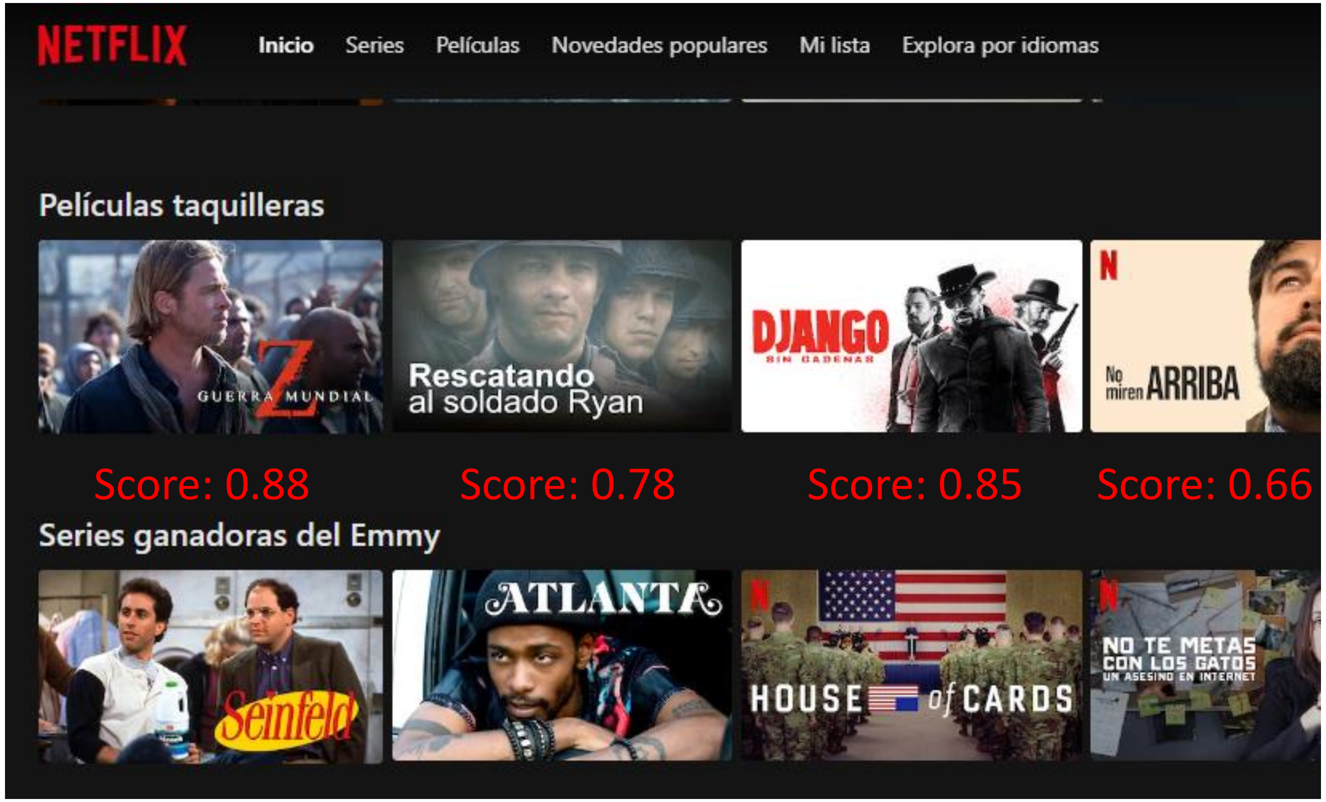
vs.

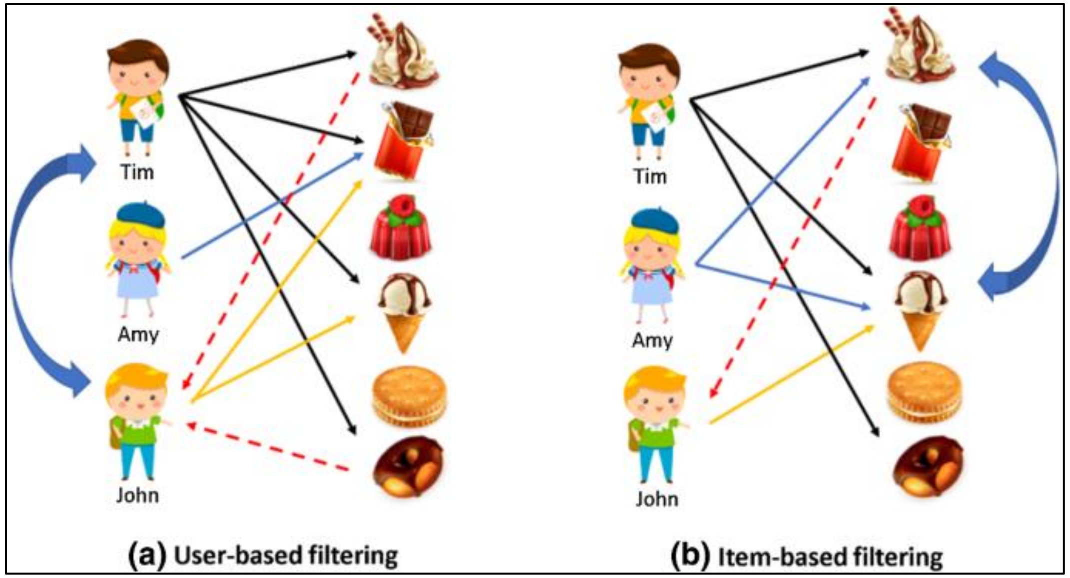
CTR: 0.11

Optimización:

- CTR (Click-through rate)
- CTOR (Click-through open rate)
- Conversión (compra)
- ...

Ejemplos: streaming recommender systems

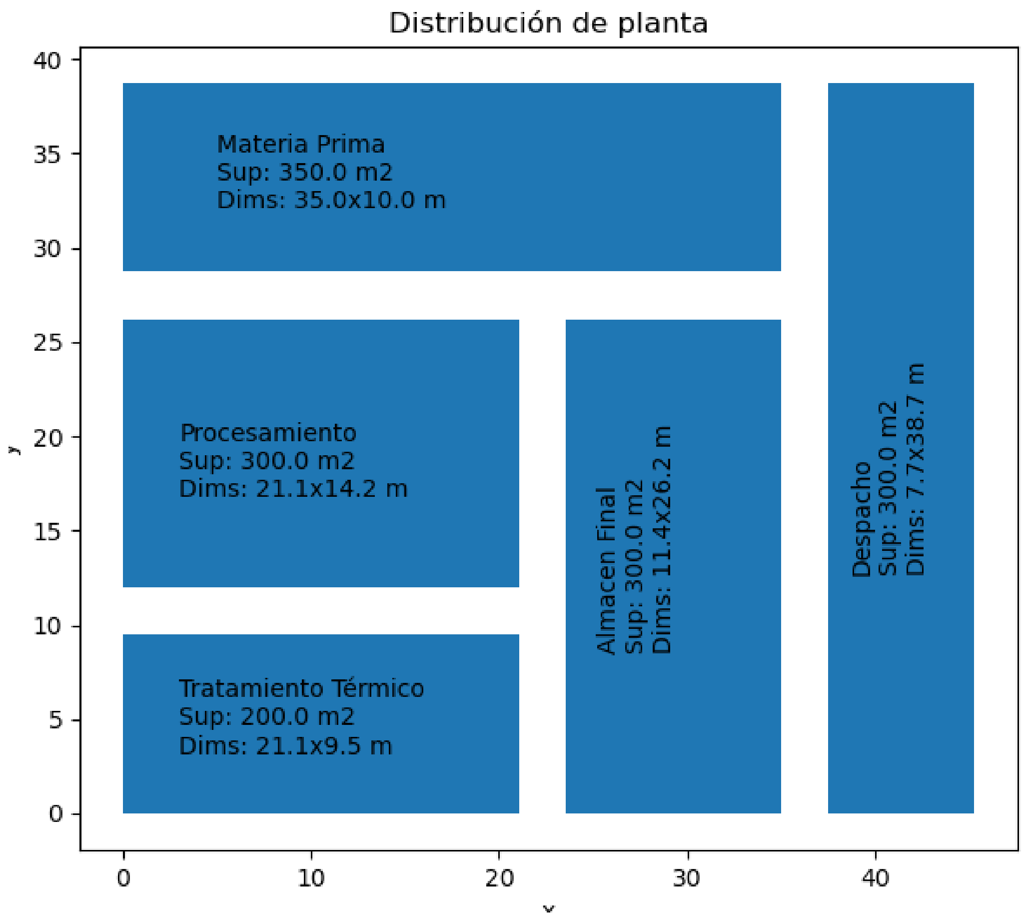




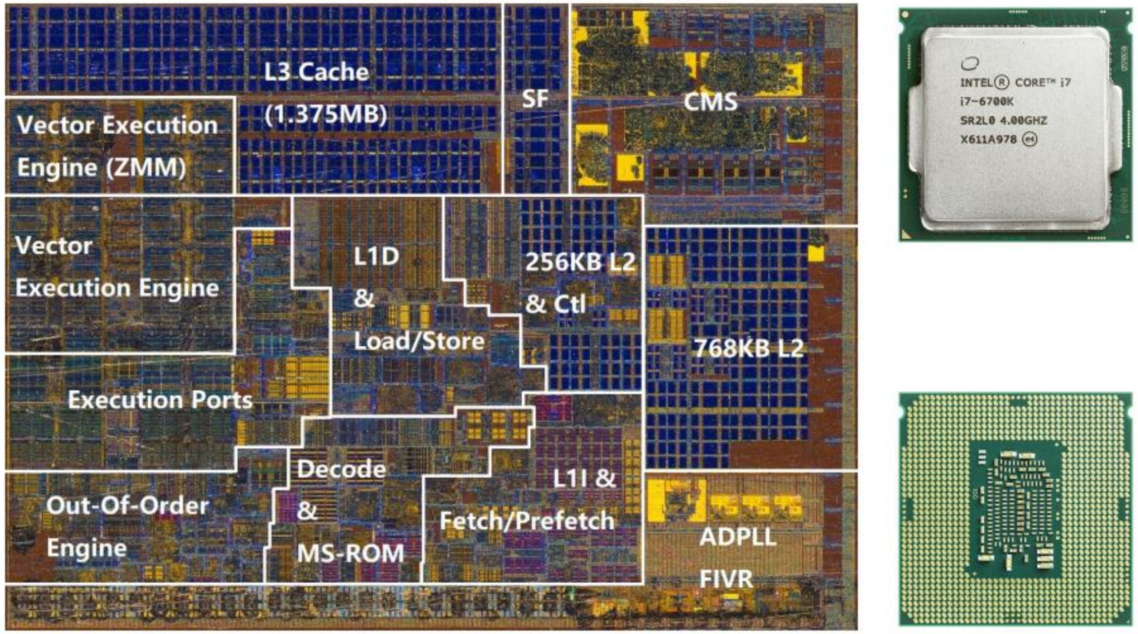
Chen et. al (2021) A collaborative filtering recommendation system with dynamic time decay

Balance:
Optimizar gustos del usuario vs. Maximizar indicadores de negocio

Ejemplos: optimización de layout de planta



Intel i7 Skylake floorplan

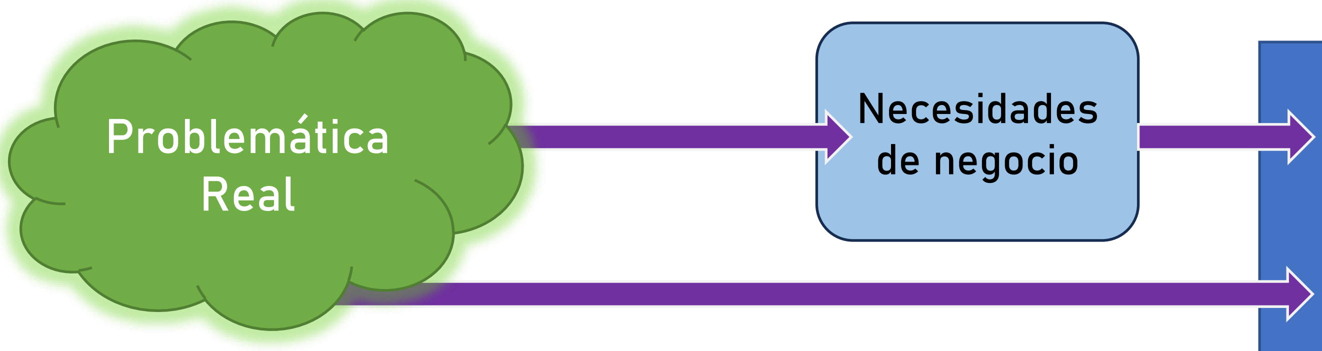


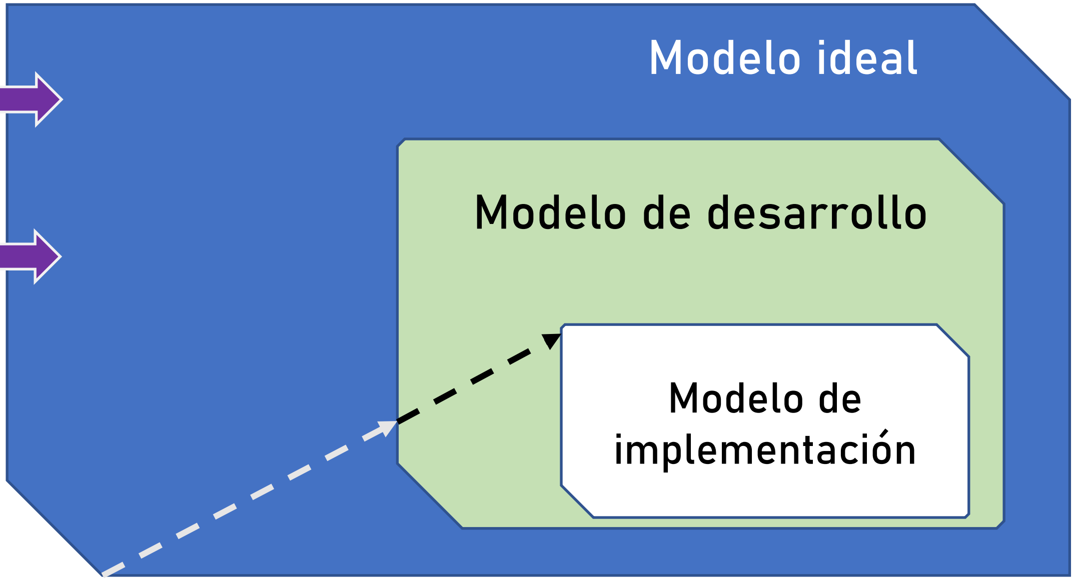
https://limsk.ece.gatech.edu/course/ece6133/slides/floorplanning.pdf

Otros ejemplos de optimización

¿Qué otros ejemplos conocen?

De la problemática al modelo





→ *Oportunidades de negocio*
→ *Nuevos competidores*
→ *Nuevas regulaciones*
→ *Cambio de contexto social*
→ *...*

→ *Misión y visión.*
→ *OKRs*
→ *Objetivos tácticos y operativos*
→ *Oportunidades en células ágiles*
→ *...*

→ *Suposiciones*
→ *Recursos del proyecto*
→ *Conocimiento técnico*
→ *Costo-beneficio del análisis*

→ *Optimización vs. Intuición*
→ *Monitoreo*
→ *Auditoría*
→ *...*

Intuición y fuerza bruta

- Intuición: conjunto de experiencias personales o expertas para llegar a una solución considerada óptima.

- Fuerza bruta: recorrer todo el espacio de soluciones en busca del óptimo.

Ejemplo

En una línea de producción automotriz bajo método TPM, se realiza la programación de la producción para toda la semana mediante un modelo de optimización.

El modelo elige el mix óptimo de vehículos a fabricarse en la línea flexible de acuerdo al plan comercial y la capacidad de la planta.

La salida de este modelo, se utiliza para balancear líneas y preparar el sistema Kanban.

Dada una falla del modelo, la selección debe hacerse manualmente partiendo de 10 configuraciones conocidas.

- Se busca minimizar el costo por unidad, ofreciendo el mayor delivery success (DS) posible.
- No se permite un DS menor a 0.85.
- Se permite máximo trabajar 3 turnos.

Ejemplo

Configuración	Costo /unidad normalizado	Makespan (turnos)	Delivery success
1	0.35	3.0	0.98
2	0.22	2.8	0.90
3	0.31	2.9	0.92
4	0.18	2.1	0.50
5	0.11	1.3	0.65
6	0.40	3.3	0.99
7	0.22	2.6	0.90
8	0.33	2.6	0.89
9	0.18	1.8	0.75
10	0.36	3.1	0.98

Ejemplo

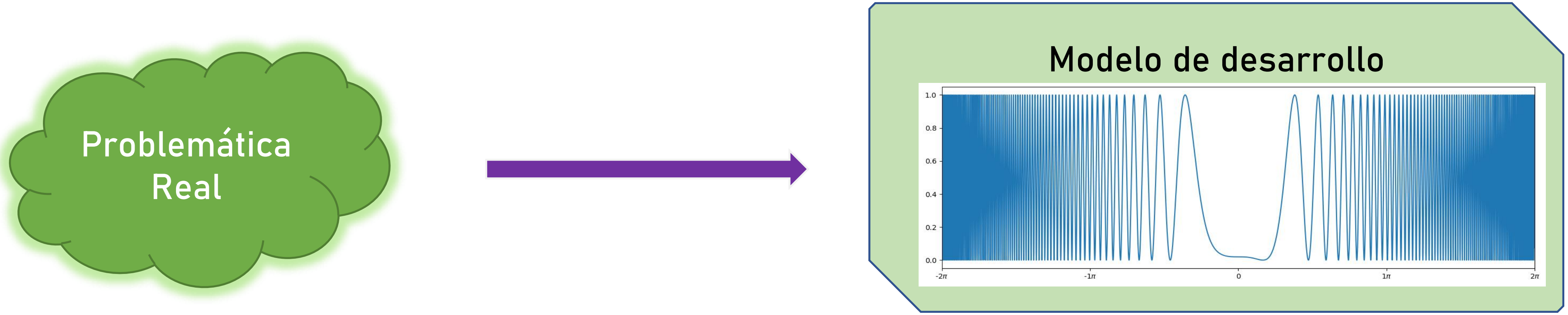
# Config.	Costo /unidad normalizado	Makespan (turnos)	Delivery success (DS)		Productividad (DS / Costo)
1	0.35	3.0	0.98		2.80
2	0.22	2.8	0.90		4.09
3	0.31	2.9	0.92		2.97
4	0.18	2.1	0.50		
5	0.11	1.3	0.65		
6	0.40	3.3	0.99		
7	0.22	2.6	0.90		4.09
8	0.33	2.6	0.89		2.70
9	0.18	1.8	0.75		
10	0.36	3.1	0.98		

- Mejor relación DS / costo
- Menor cantidad de turnos productivos
- Intuición: sobran 0.4 turnos, ¿qué hacemos?

Fases de estudio de un problema de optimización

Programación matemática:

Traducción de una problemática en una función objetivo a optimizar sujeto o no a restricciones.



Componentes de un problema de optimización

Programación matemática:
Traducción de una problemática en una función objetivo a optimizar sujeto o no a restricciones.

- **Variables de decisión del problema:** variable independiente x.
- **Parámetros:** datos.
- **Función objetivo a maximizar o minimizar:** $f(x)$.
- **Restricciones del problema:** delimitan la región factible.
- **Región factible:** conjunto de soluciones factibles.

Clasificaciones generales

- Problema con restricciones.
- Problema sin restricciones.

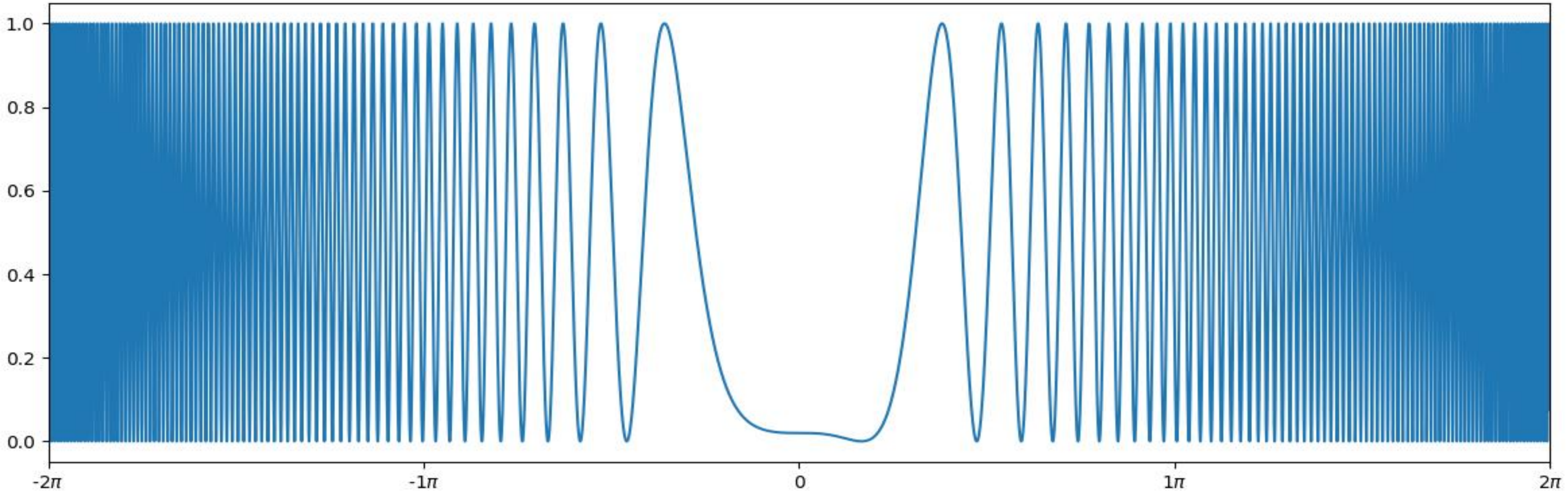
- Problema continuo.
- Problema discreto.

- Programación lineal.
- Programación no lineal: cuadrática, mixta, entera, …

Programación matemática

Min $sin(X^3 + 3)^2$

Unconstrained Non-Linear Optimization

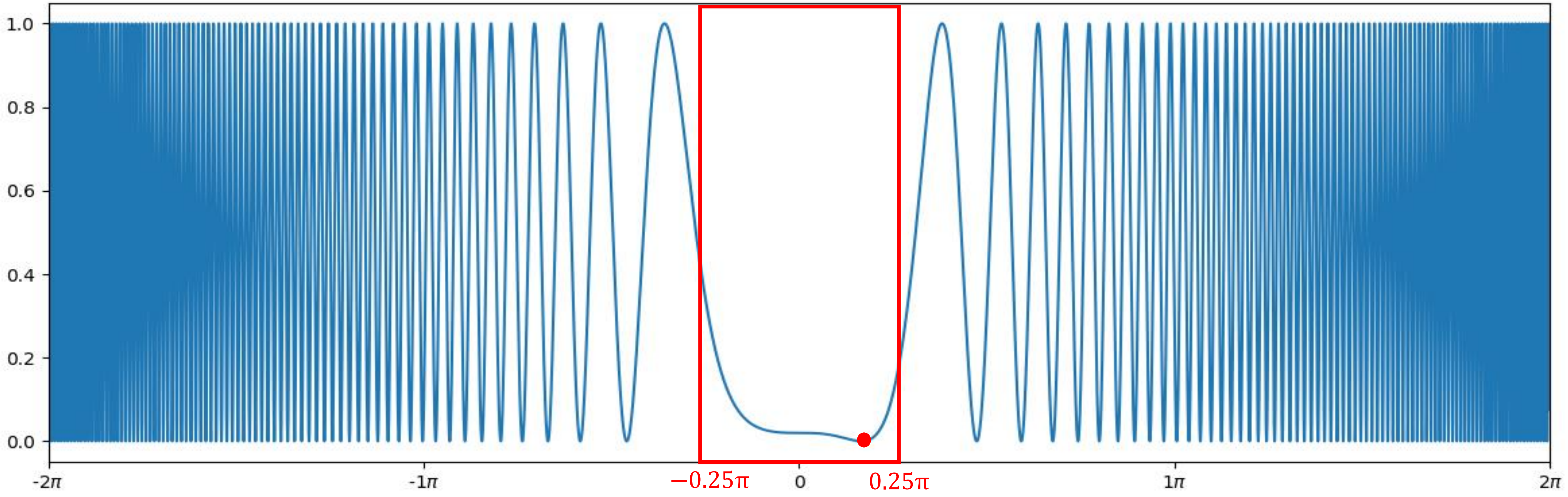


Programación matemática

Min $sin(X^3 + 3)^2$

s.t $-0.25\pi \leq X \leq 0.25\pi$

Box-Constrained Non-Linear Optimization

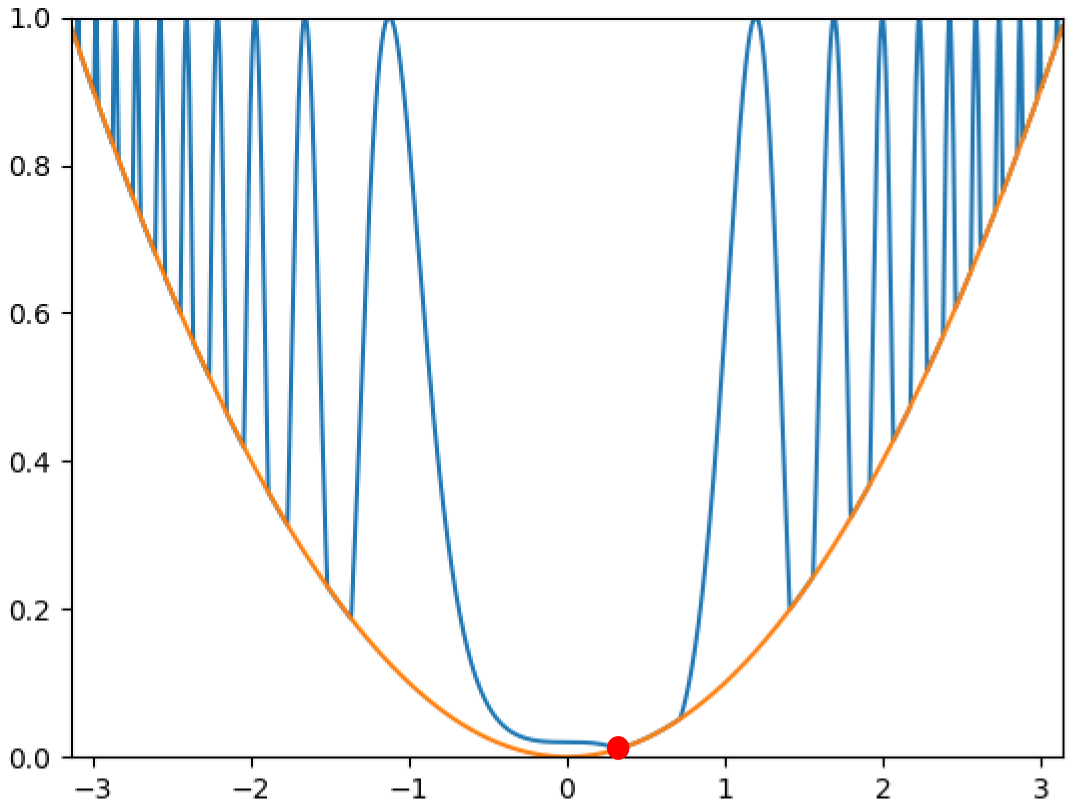


Programación matemática

Min $sin(X^3 + 3)^2$

s.t $objetivo \geq 0.1 \ * X^2$

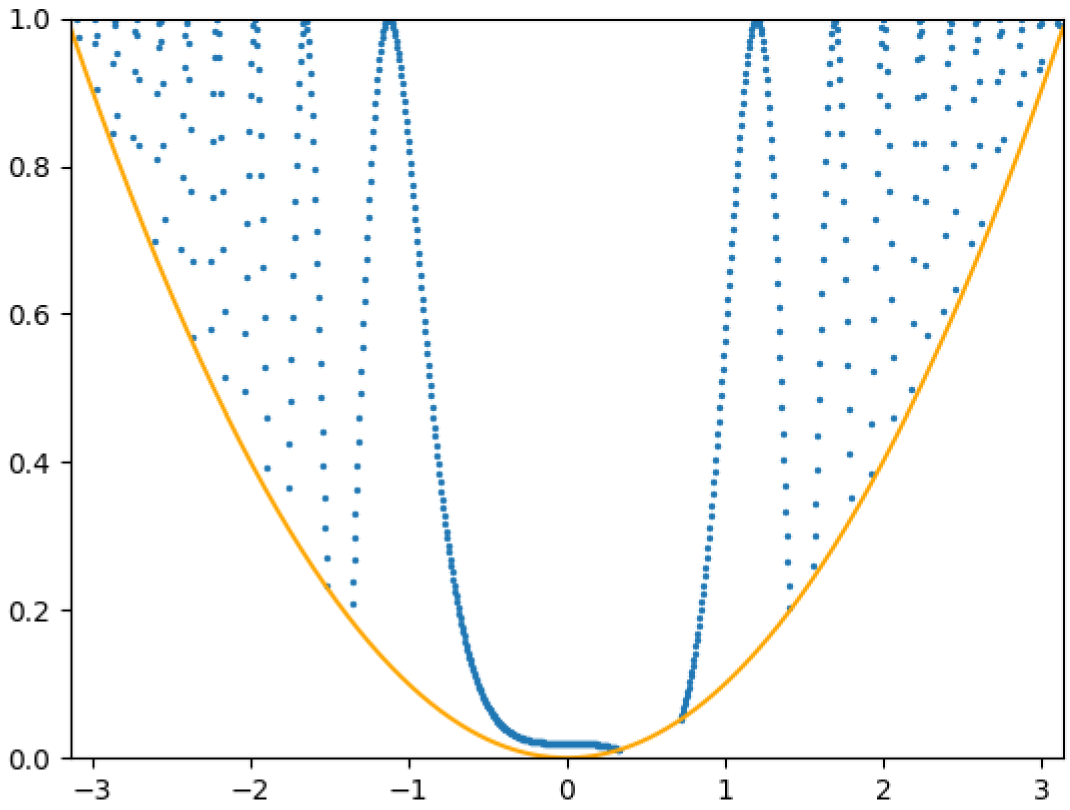
Constrained Non- Linear Optimization



Programación matemática

Min $sin(X^3 + 3)^2$
s.t $objetivo \geq X^2$
X equiespaciado

Constrained Non-Linear Optimization



Max, Min, ArgMax, ArgMin

Maximización:

Solución con el mayor valor de función objetivo.

Ej: mayor ganancia, retorno, conversión.

Minimización:

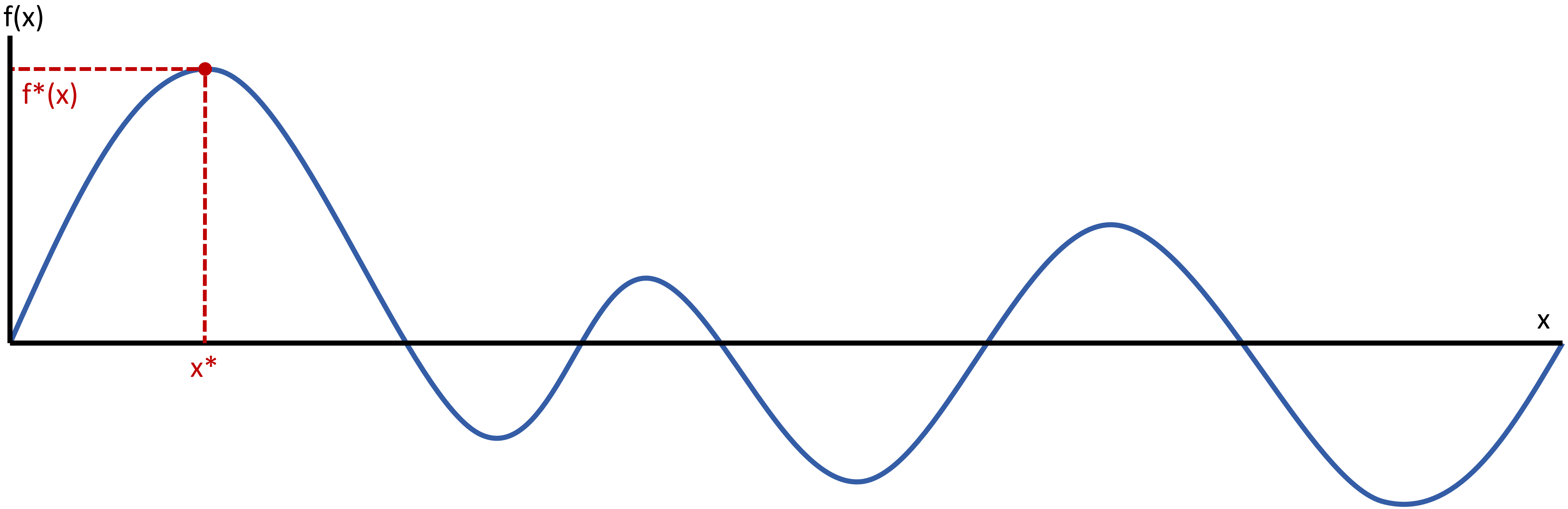
Solución con el menor valor de función objetivo.

Ej: menor costo, distancia, fallas.

Max, Min, ArgMax, ArgMin

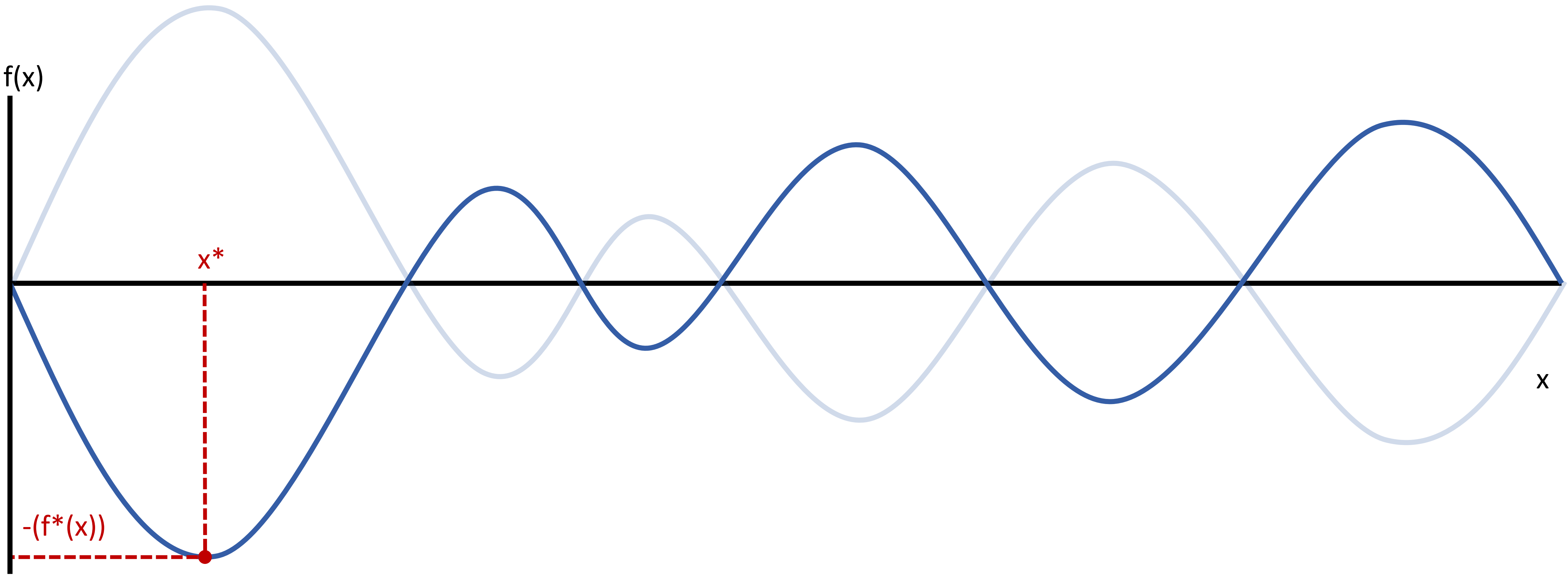
ArgMax, ArgMin:

Valores de la variable de decisión, donde la función objetivo lleva a su valor óptimo.



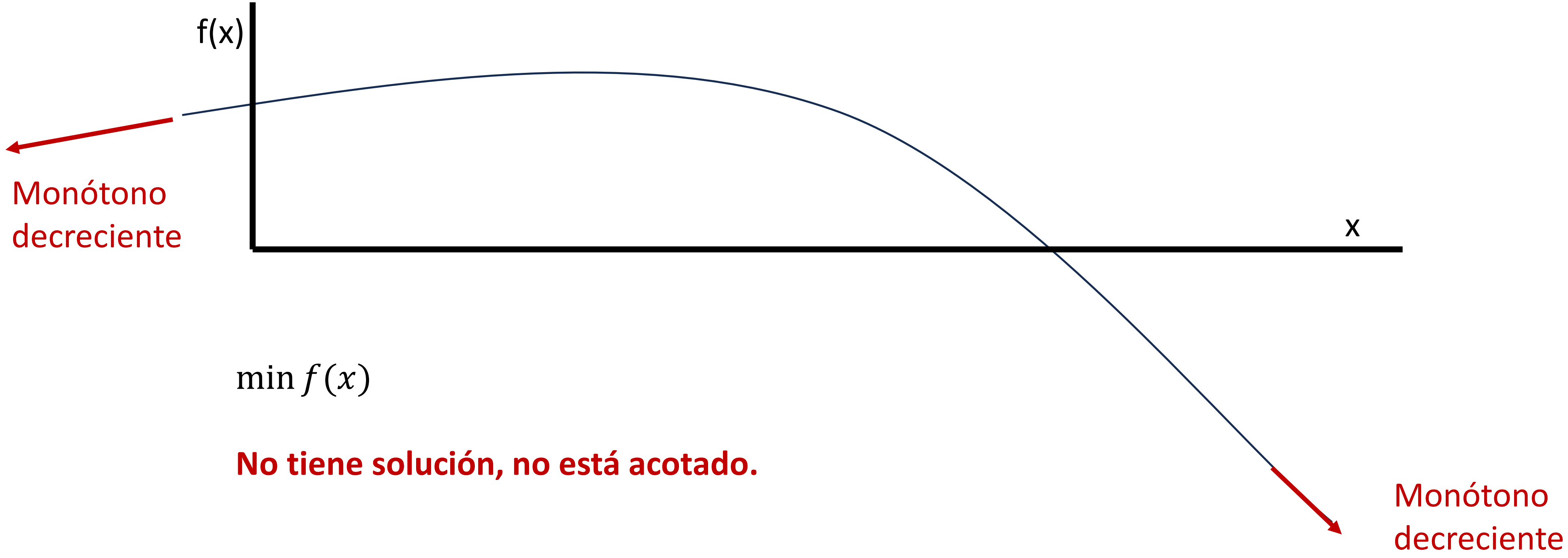
Max, Min, ArgMax, ArgMin

Un problema de maximización puede convertirse en minimización y viceversa, multiplicando la función objetivo por (-1)



¿Existe siempre el óptimo?

- Un problema puede tener más de un óptimo.
- Pueden existir óptimos locales.
- El problema puede no tener solución.



$$\min f(x)$$

No tiene solución, no está acotado.

Ejemplo: programación matemática

Una empresa fabrica dos productos (x, y) usando dos máquinas (A y B)
Cada unidad de x producida requiere 50 minutos de trabajo en A y 30 minutos en B.

Cada unidad de y requiere 24 minutos en la máquina A y 33 minutos en B.
Existe un stock de al inicio de la semana de 30 unidades de x y 90 unidades de y.

El tiempo total disponible de procesamiento en A es de 40 horas y en B de 35 horas.
La demanda en el mercado es de 75 unidades de x y 95 unidades de y.

Dado un contexto inflacionario, se pide maximizar el stock de unidades de x e y combinadas.

Las unidades x e y son comparables y pueden sumarse.

¿Cómo podría modelizarse este problema?

Ejemplo: programación matemática

Variables de decisión:

- $X:$ Cantidad de producto x.
- $Y:$ Cantidad de producto y.

Sets:

- Producto $i = \{x, y\}$

Parámetros:

- I_{0i}: Stock Inicial de producto i.
- D_i: Demanda de producto i.
- K_A: Capacidad máxima en minutos de producción en máquina A.
- K_B: Capacidad máxima en minutos de producción en máquina B.
- a_i: Minutos invertidos en fabricar un producto i en máquina A.
- b_i: Minutos invertidos en fabricar un producto x en máquina B.

Parámetro	Valor
I_{0x}	30 unidades
I_{0y}	90 unidades
D_x	75 unidades
D_y	95 unidades
K_A	40 horas
K_B	35 horas
a_x	50 minutos
a_y	24 minutos
b_x	30 minutos
b_y	33 minutos

Ejemplo: programación matemática

Para el producto i:

Stock (I_i) = Stock Inicial (I_{0i}) + Producción Actual (i) – Demanda (D_i)

- Stock producto x:

$$I_x = I_{0x} + x - D_x$$
$$I_x = 30 + x - 75$$
$$I_x = x - 45$$

- Stock producto y:

$$I_y = I_{0y} + y - D_y$$
$$I_y = 90 + y - 95$$
$$I_y = y - 5$$

Ejemplo: programación matemática

$$Max\ I_x + I_y$$

$$Max\ (x - 45) + (y - 5)$$

Función objetivo

st:

Máquina A: $50x + 24y \leq 2400$

Máquina B: $30x + 33y \leq 2100$

Restricciones

$$x, y \geq 0$$

$$x, y \in \mathbb{R}$$

Restricciones de positividad

Problema de Optimización

¿Qué tipo de problema es según la clasificación?

Ejemplo: programación matemática

$$Max\ I_x + I_y$$

$$Max\ (x - 45) + (y - 5)$$

Función objetivo

st:

$$\text{Máquina A: } 50x + 24y \leq 2400$$
$$\text{Máquina B: } 30x + 33y \leq 2100$$

Restricciones

$$x, y \geq 0$$
$$x, y \in \mathbb{R}$$

Restricciones de positividad y continuidad

Problema de Optimización

Modelo de Programación Lineal (LP)

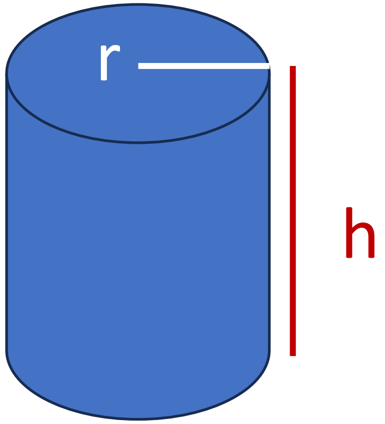
- ✓ Variables continuas
- ✓ Función objetivo y restricciones lineales

Ejemplo: programación matemática

Un cliente necesita fabricar un tanque cilíndrico que soporte una capacidad de 500 litros de líquido. Determinar las dimensiones que minimizan la cantidad de material a utilizar.

¿Cómo podría modelizarse este problema?

Ejemplo: programación matemática



$$\min Area$$
st
$$Volumen = 500\ litros$$

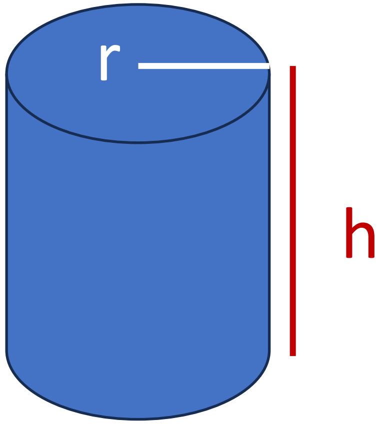
$$\min 2\pi r^2 + 2\pi rh$$
st
$$\pi r^2 h = 500\ litros$$

Siendo:

$$Area = 2\pi(r^2 + rh)$$
$$Volumen = \pi r^2 h$$

¿Qué tipo de problema es según la clasificación?

Ejemplo: programación matemática



$$\min Area$$
st
$$Volumen = 500\ litros$$

Siendo:
$$Area = 2\pi(r^2 + rh)$$
$$Volumen = \pi r^2 h$$

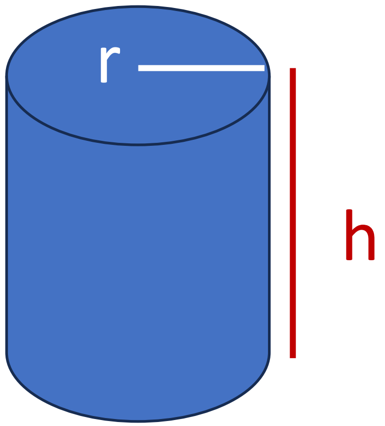
$$\min 2\pi r^2 + 2\pi rh$$
st
$$\pi r^2 h = 500\ litros$$

Modelo de Programación No Lineal con restricciones (Constrained NLP)

- ✓ Variables continuas
- ✓ Función objetivo y restricciones no lineales

Ejemplo: programación matemática

Otra forma:



$$
\begin{aligned}
&\min Area \\
&\text{st} \\
&\quad Volumen = 500\ litros
\end{aligned}
$$

Siendo:

[1] $Area = 2\pi(r^2 + rh)$

[2] $Volumen = \pi r^2 h$

Usando la fórmula de volumen [2]

$$500 = \pi r^2 h \rightarrow \boxed{\frac{500}{\pi r^2} = h}$$

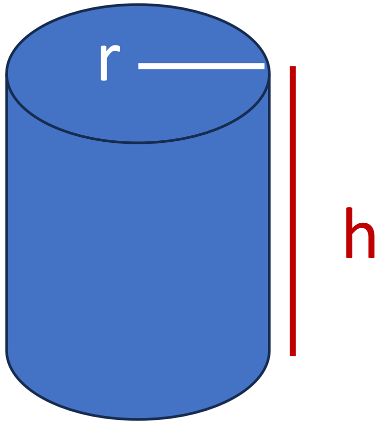
Reemplazando en área [1]

$$Area = 2\pi\left(r^2 + r\frac{500}{\pi r^2}\right)$$

$$\boxed{Area = 2(\pi r^2 + \frac{500}{r})}$$

Ejemplo: programación matemática

Otra forma:



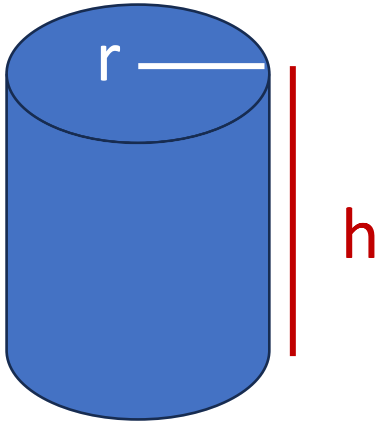
$\min \mathit{Area}$
st.
$\cancel{Volumen = 500\ litros}$

$$\min 2(\pi r^2 + \frac{500}{r})$$
$st.$
$$r \geq 0$$

¿Qué tipo de problema es según la clasificación?

Ejemplo: programación matemática

Otra forma:



$$\min \mathit{Area}$$

st.

$$\cancel{\mathit{Volumen} = 500\ \mathit{litros}}$$

$$\min 2(\pi r^2 + \frac{500}{r})$$

$st.$

$$r \geq 0$$

Modelo de Programación No Lineal con restricción de cotas (Box-Constrained NLP)

- ✓ Variables continuas
- ✓ Función objetivo no lineal