Introducción a modelos de optimización de inventarios

Rodrigo Maranzana

Optimización en gestión de inventarios

Utilizar la teoría de optimización en la gestión de inventarios, con el objetivo de:

- Reducir eventos de quiebre de stock e interrupciones de producción.
- Evitar exceso de nivel de stock que aumente el costo de capital inmovilizado.

Objetivo:

- Minimizar el costo total de la gestión de inventarios.

Además, es necesario conocer:

- Cantidad a pedir (lote económico o lote óptimo de pedido).
- Tiempo de reorden.

Componentes de un modelo de inventarios

Los modelos de inventarios se componen de parámetros y variables.

Para una empresa que comercializa un solo producto:

$Q(t)$: cantidad a pedir dependiendo del parámetro de tiempo t.

$S(t)$: cantidad de inventario dependiente del parámetro de tiempo t.

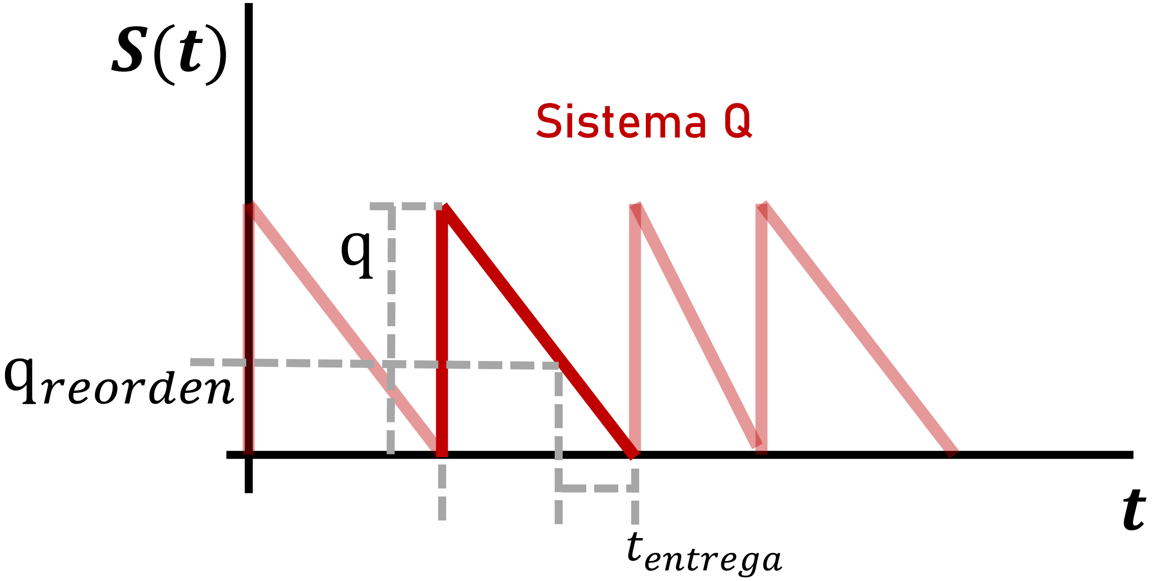
$D(t)$: nivel de demanda dependiente del parámetro de tiempo t.

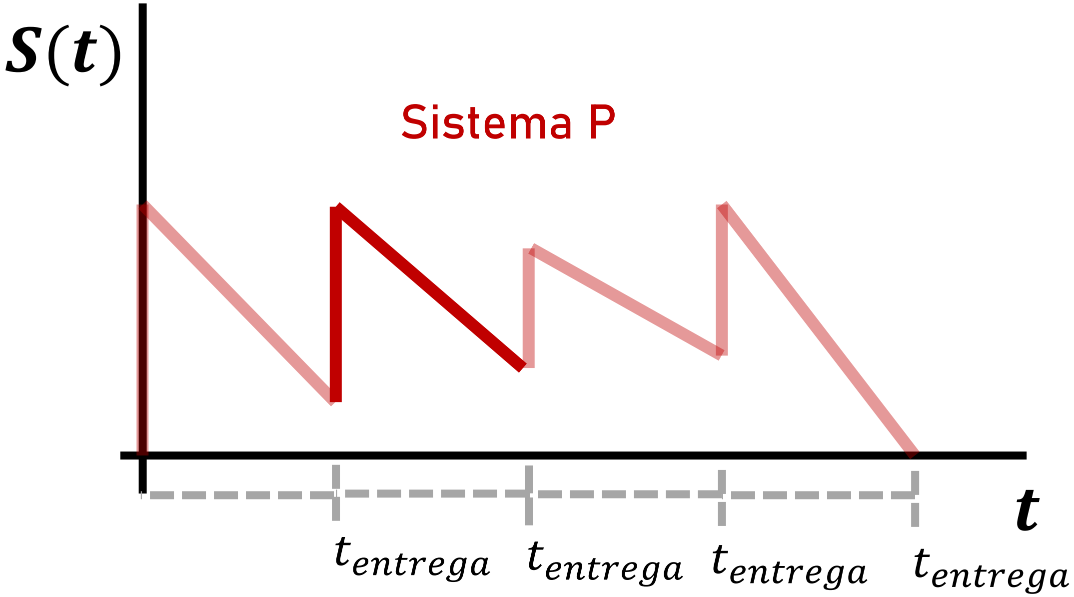
Tipos de modelos tradicionales de inventarios

Son modelos que consideran casos límites en alguna variable. Se suelen implementar en la realidad.

Sistema Q: cantidad de pedido fija. Revisión cuando stock llega a un $q_{reorden}$.

Sistema P: período de pedido fijo. Revisión a períodos constantes.



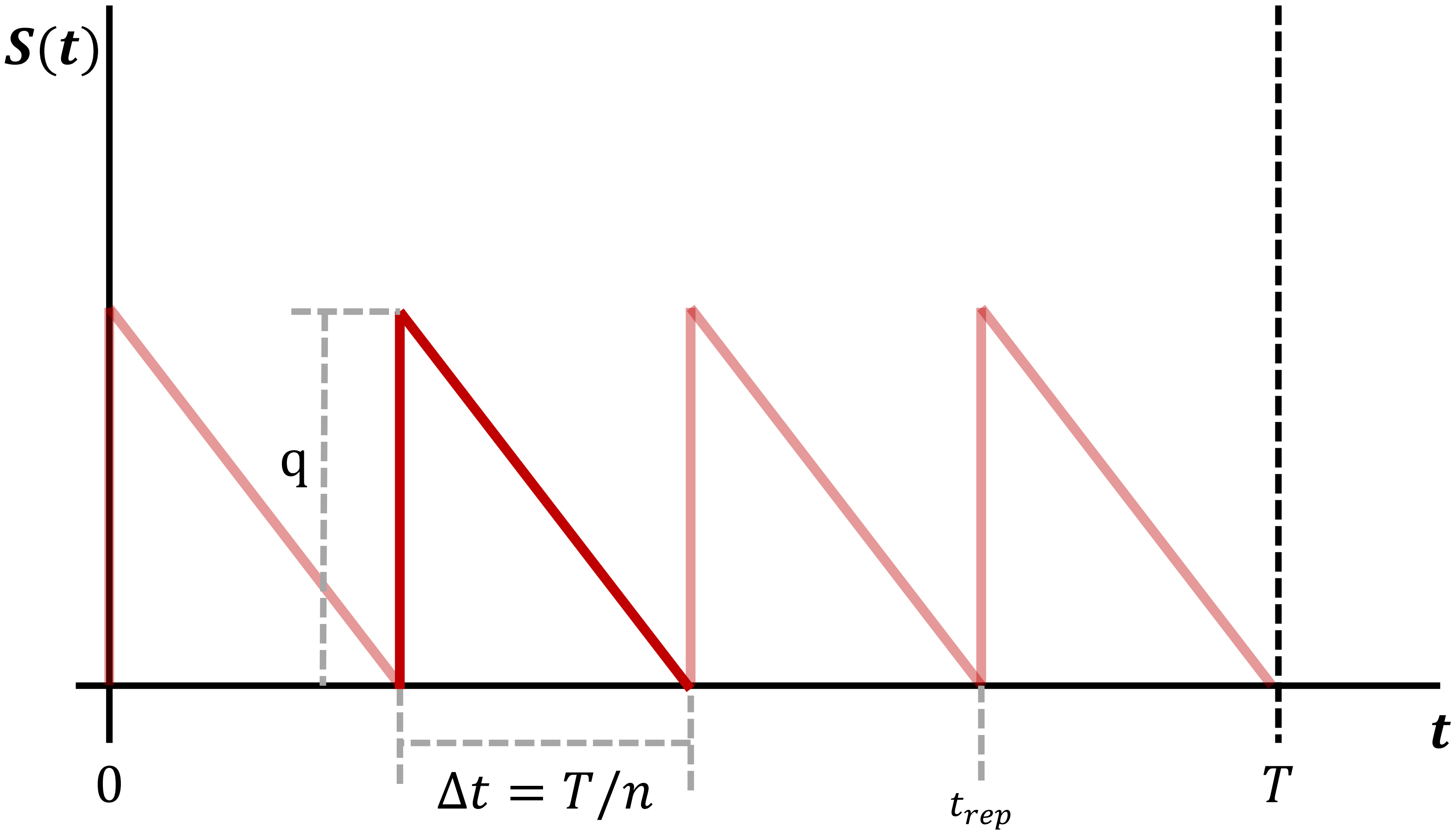


Modelo de Cantidad Económica de Pedido (EOQ)

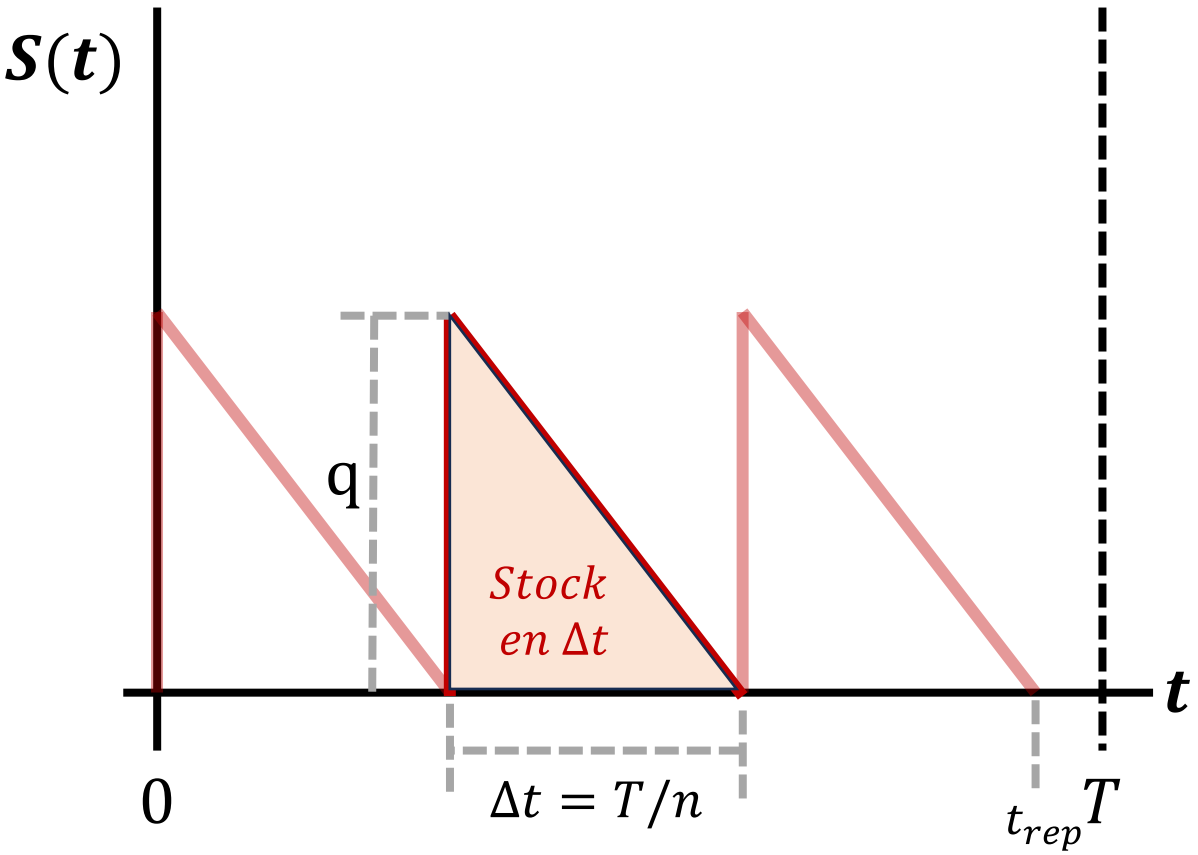
Economic Order Quantity es un modelo de tipo "Q" que considera:

- La demanda es constante dentro de un período temporal de 0 al horizonte T. Por lo tanto es determinista y representa una tasa demandada: $D(t) = D_{0-T}$
- Se trabaja con un solo producto.
- La reposición de productos es instantánea.
- La cantidad a reponer en cada período de reposición ($trep$) es la misma y no depende del tiempo: $Q(t) = Q_{t_{rep}} = q$
- La cantidad a stockear S(t) resulta determinista.

Modelo de Cantidad Económica de Pedido (EOQ)



Cantidad media de stock en modelo EOQ



Stock en Δt en período i:

$$S_{\Delta t_i} = \int_t^{t+\Delta t} S(t)dt = \frac{q.\Delta t}{2}$$

Consideramos período unitario, resulta stock promedio:

$$\bar{S} = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{2}}$$

Modelo de Cantidad Económica de Pedido (EOQ)

El modelo fundamental minimiza el costo total del inventario, dada la variable independiente q (cantidad a pedir en cada t_{rep})

Este costo se llama "Costo Total Esperado" o CTE:

$$Min\ Z = f(q) = CTE(q)$$

- Pueden existir o no restricciones.
- El modelo fundamental más simple no tiene restricciones *(unconstrained optimization)*.

Modelo de Cantidad Económica de Pedido (EOQ)

Términos que componen $f(q)$:

- Costo de adquisición: representa el costo total del producto pedido, es decir, el costo unitario del producto por la cantidad a pedir.
- Costo de orden: costo fijo administrativo (recepción, costos indirectos de estructura como el área de compras, calidad, etc.)
- Costo de almacenamiento: inlcuye el costo de capital inmovilizado, manipulación y mantinimiento en almacén.

Modelo de Cantidad Económica de Pedido (EOQ)

Parámetros que componen $\boldsymbol{f(q)}$:

T: Horizonte temporal.

D: Cantidad demandada total del producto en período $0 - T$.

i: Tasa efectiva anual de almacenamiento por capital inmovilizado.

k: Costo incurrido fijo cada vez que se ordena.

b: Precio de compra por unidad del producto.

n: Cantidad de veces a pedir en período $0 - T$.

Variables que componen $\boldsymbol{f(q)}$:

q: cantidad a pedir en cada t_{rep}.

Modelo de Cantidad Económica de Pedido (EOQ)

$$CTE(q) = b.D + k.\frac{D}{q} + \frac{1}{2}.q.i.b$$

Costo de adquisición: Representa el costo total del producto pedido, es decir, el costo unitario del producto por la cantidad a pedir.

Costo de pedido: Costo fijo administrativo (recepción, costos indirectos de estructura como el área de compras, calidad, etc.)

Costo de almacenamiento: Incluye el costo de capital inmovilizado, manipulación y mantinimiento en almacén.

Parámetros que componen $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$:

T: Horizonte temporal.

D: Demanda del producto en período $0 - T$.

i: Tasa efectiva anual de almacenamiento.

k: Costo incurrido fijo cada vez que se ordena.

b: Precio de compra por unidad del producto.

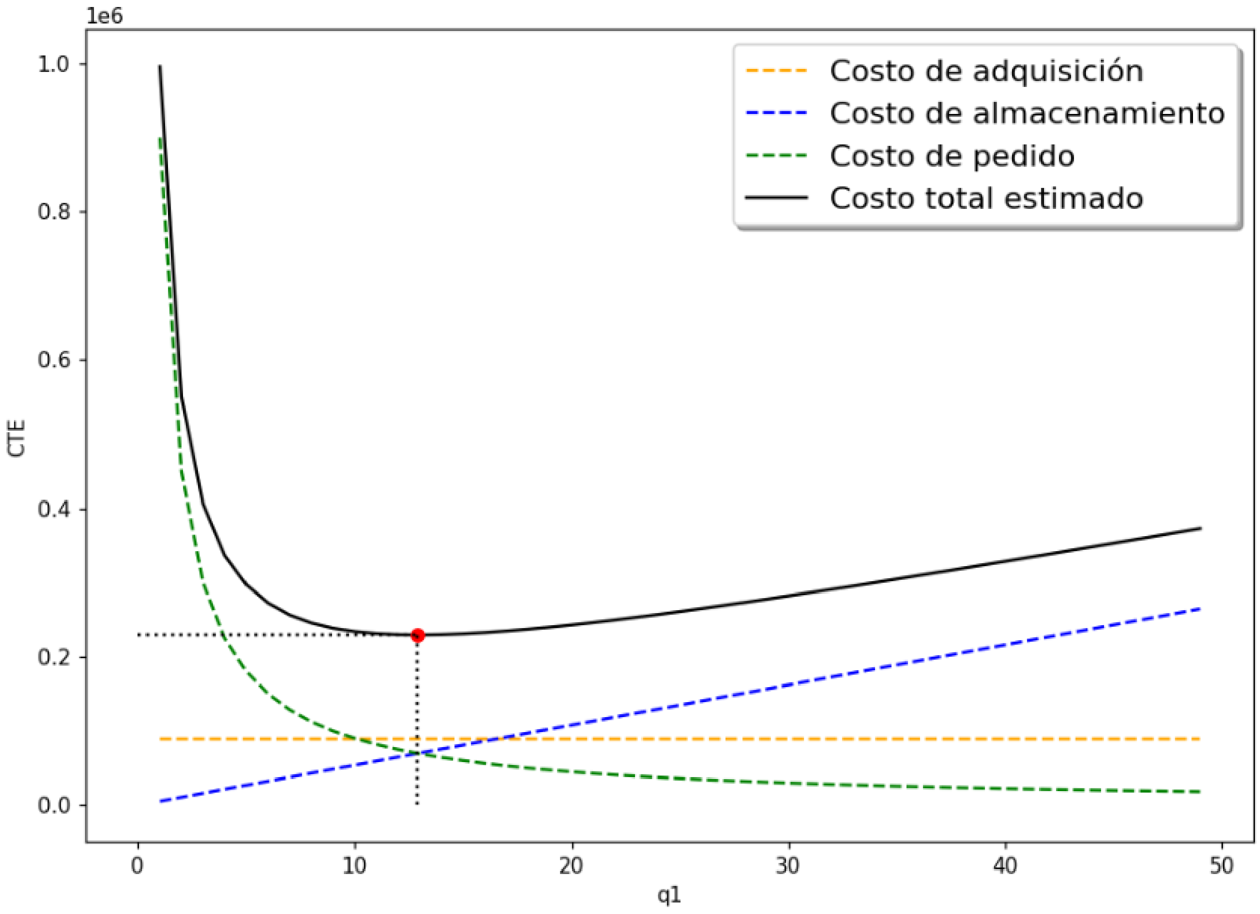
n: Cantidad de veces a pedir en período $0 - T$.

Variables que componen $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{q})$:

q: cantidad a pedir en cada t_{rep}.

Costo Total Esperado y lote óptimo en EOQ

$$CTE(q) = b.D + k.\frac{D}{q} + \frac{1}{2}.q.i.b$$



Costo de adquisición:
Representa el costo total del producto pedido, es decir, el costo unitario del producto por la cantidad a pedir.

Costo de pedido:
Costo fijo administrativo (recepción, costos indirectos de estructura como el área de compras, calidad, etc.)

Costo de almacenamiento:
Incluye el costo de capital inmovilizado, manipulación y mantinimiento en almacén.

Lote óptimo en EOQ

Derivamos $CTE(q)$ respecto a q:

$$\frac{d\,CTE(q)}{dq} = \frac{d(b.D)}{dq} + \frac{d\left(k.\frac{D}{q}\right)}{dq} + \frac{d\left(\frac{1}{2}.q.i.b\right)}{dq}$$

En el período 0-T, el costo de compra adquisición, no depende de q. Por lo tanto su derivada respecto a q es 0.

Buscamos el óptimo:

$$\frac{d\,CTE(q)}{dq} = 0$$

Lote óptimo en EOQ

$$\frac{d\ CTE(q)}{dq} = 0$$

$$\frac{d\left(k.\dfrac{D}{q}\right)}{dq} + \frac{d\left(\dfrac{1}{2}.q.i.b\right)}{dq} = 0$$

Siendo q_{opt} el lote óptimo, resulta:

$$q_{opt} = \sqrt{\frac{2.D.k}{b.i}}$$

Modelo EOQ multiproducto sin restricciones

En el caso de tener más de un producto y no tener restricciones:

El Costo Total Esperado incluyendo todos los productos ($CTE_{TOT}(q_j)$), es la suma del CTE_j de cada producto j.

Modelo EOQ multiproducto sin restricciones

Por lo tanto, para cada producto j:

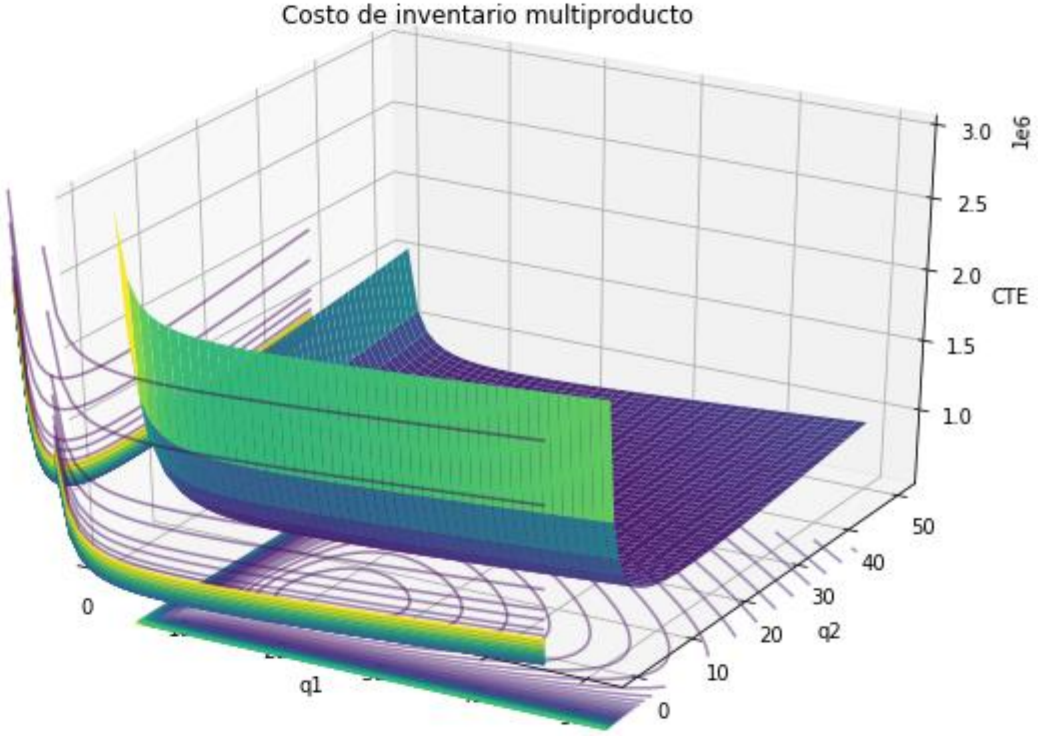
- $CTE(q_j) = b_j . D_j + k_j . \frac{D_j}{q_j} + \frac{1}{2} . q_j . i . b_j$
- $q_{opt_j} = \sqrt{\frac{2.D_j.k_j}{b_j.i}}$

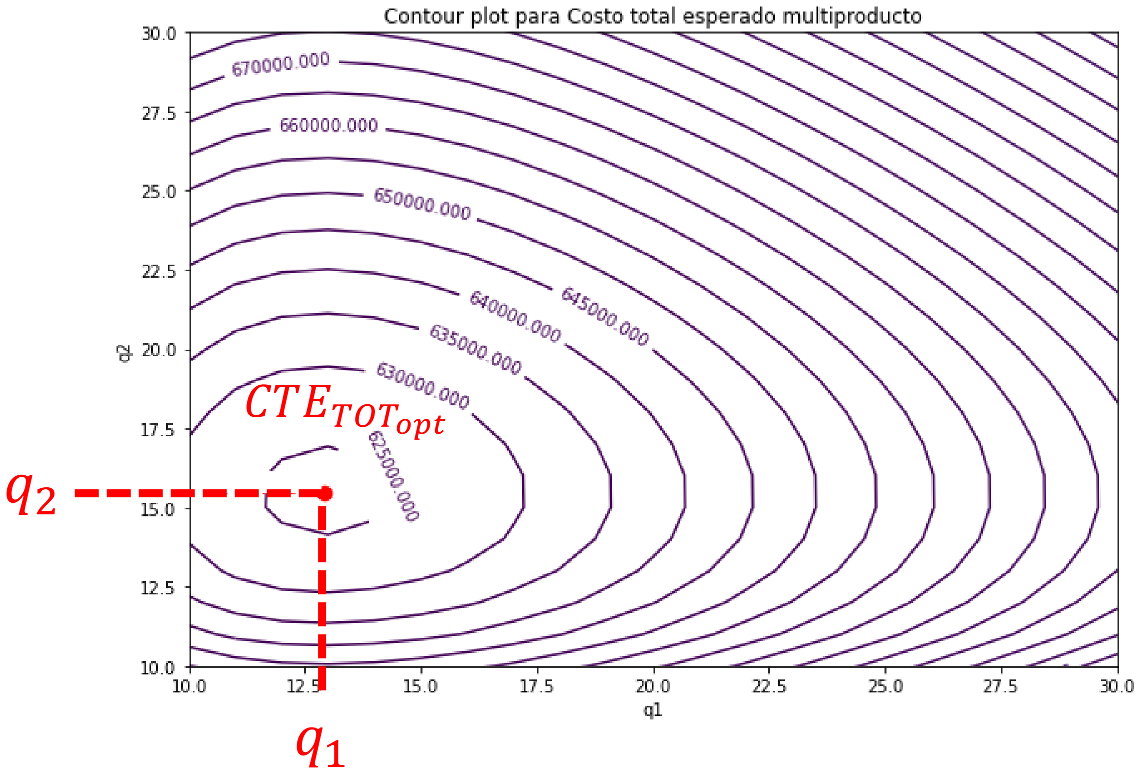
Dado que los productos son independientes, puede optimizarse cada uno por separado, para obtener q_{opt}.

El Costo Total Esperado óptimo de todos los productos resulta:

$$CTE_{TOT_{opt}} = \sum_j CTE_j(q_{opt_j})$$

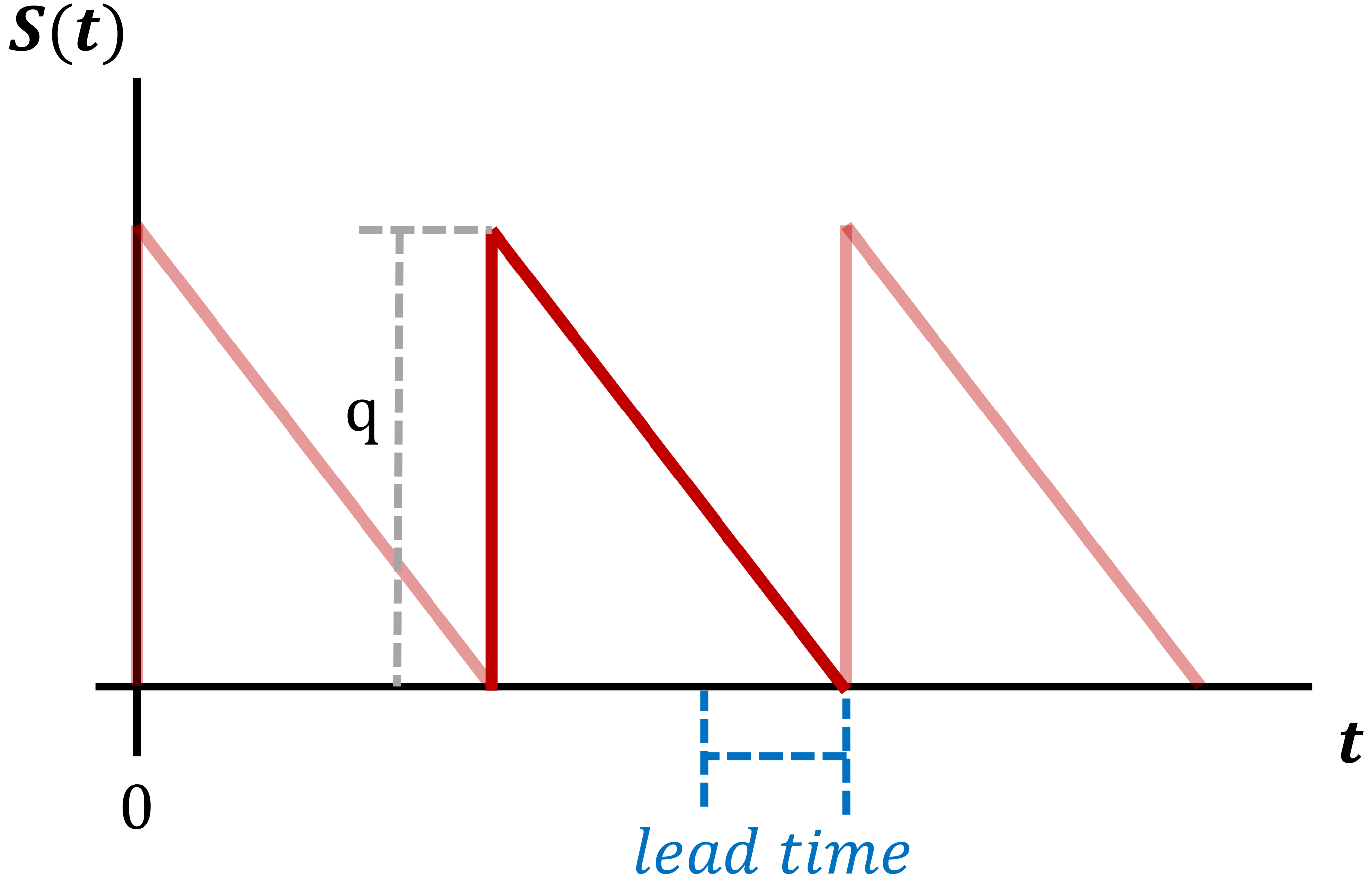
Costo Total Esperado multiproducto





Concepto: lead time

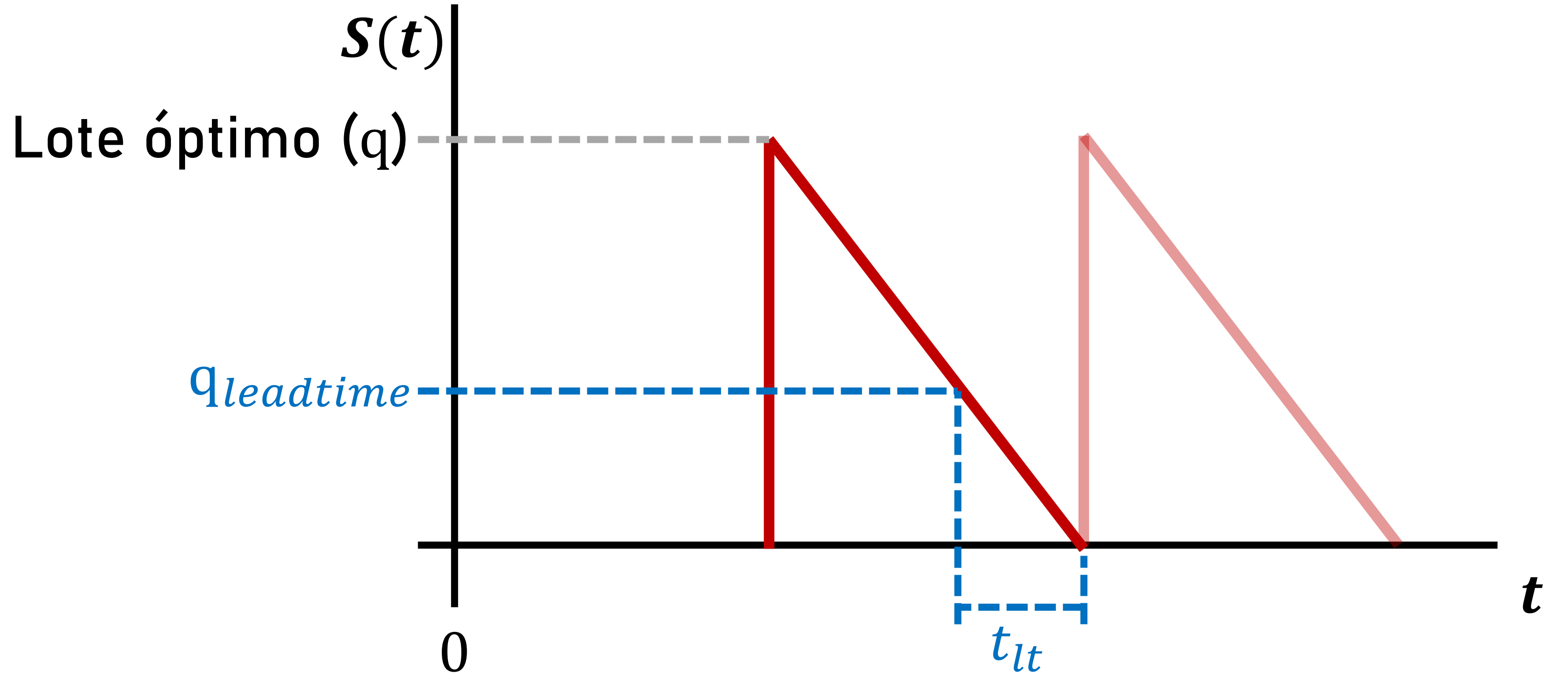
El lead time (lt) es el plazo de entrega de un pedido. Hay que tenerlo en cuenta para que la cantidad de reposición llegue en el momento justo.



Concepto: cantidad de reorden por lead time

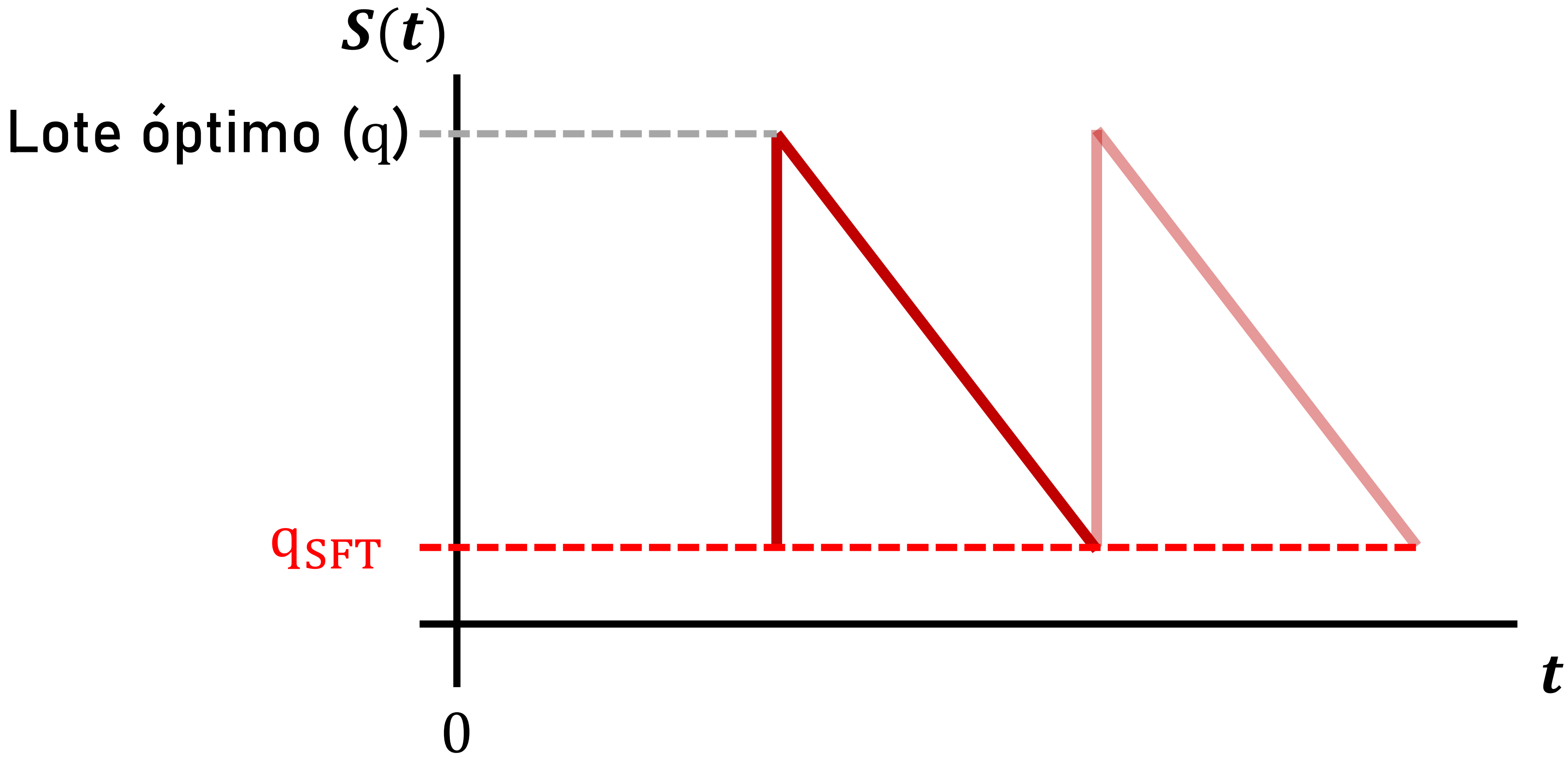
La cantidad de reorden por lead time es el punto en donde se activa la orden de pedido. Luego del lead time, se repone el stock.

$$q_{lt} = \frac{D}{T} * t_{lt} = \frac{q}{\Delta t} * t_{lt}$$



Concepto: stock de seguridad

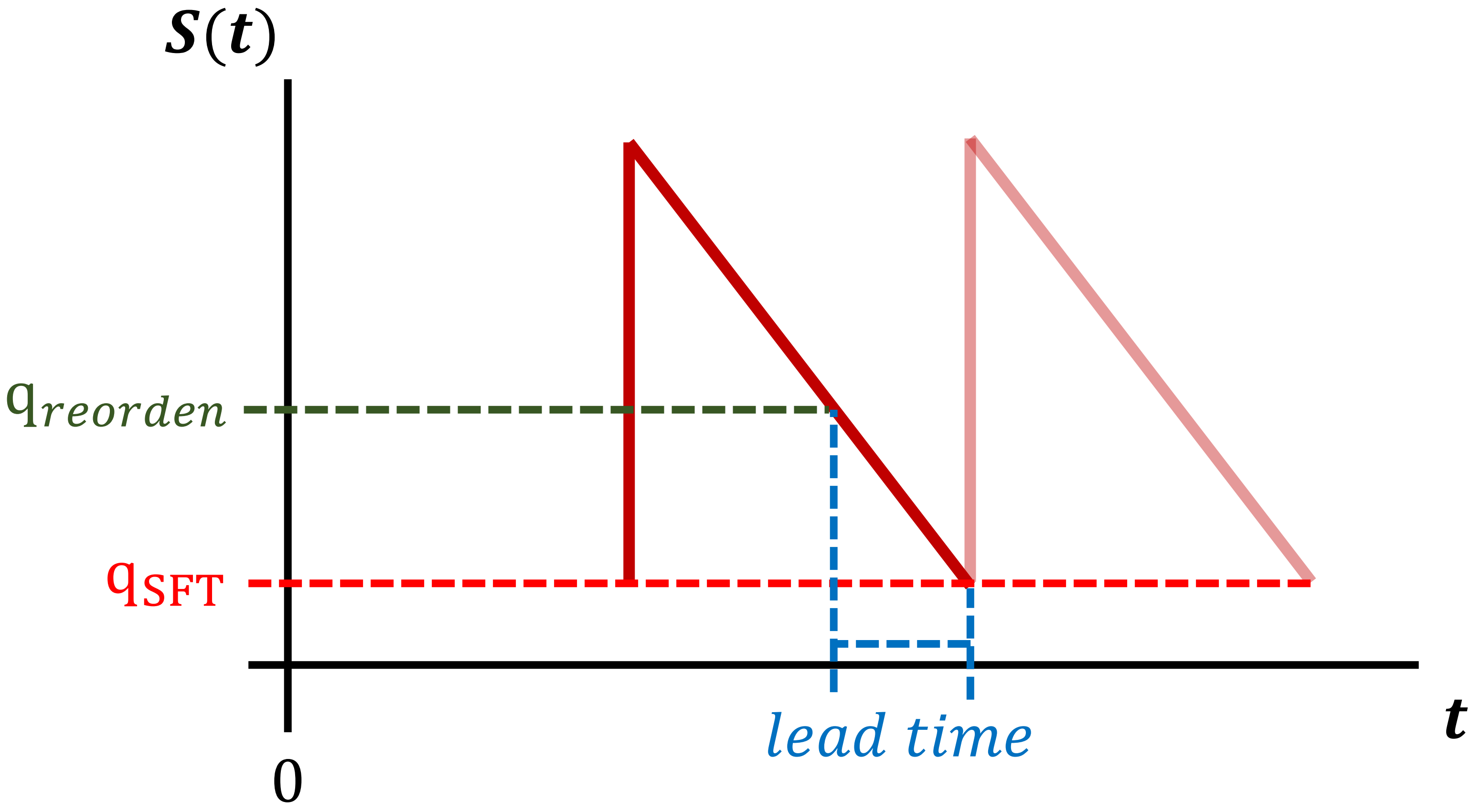
El **stock de seguridad (SFT)** es un nivel de inventario que se mantiene para resistir fluctuaciones operativas y de contexto.



Concepto: cantidad total de reorden

Tiene en cuenta el stock de seguridad (sft) y el lead time (lt).

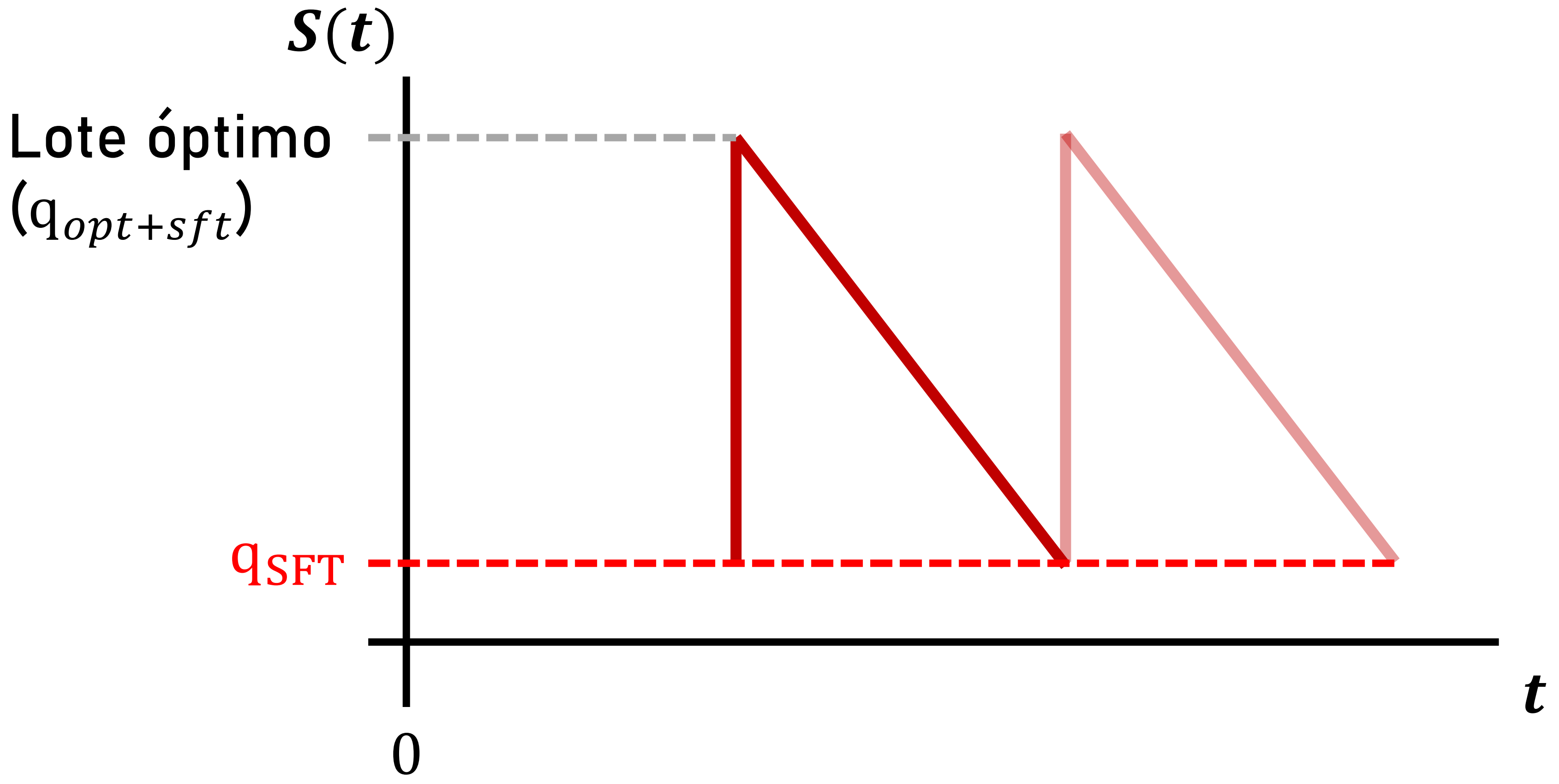
$$q_{reorden} = q_{lt} + q_{sft}$$



Concepto: lote óptimo con stock de seguridad

Tiene en cuenta el stock de seguridad (sft) para el lote óptimo.

$$q_{opt+sft} = q_{opt} + q_{sft}$$

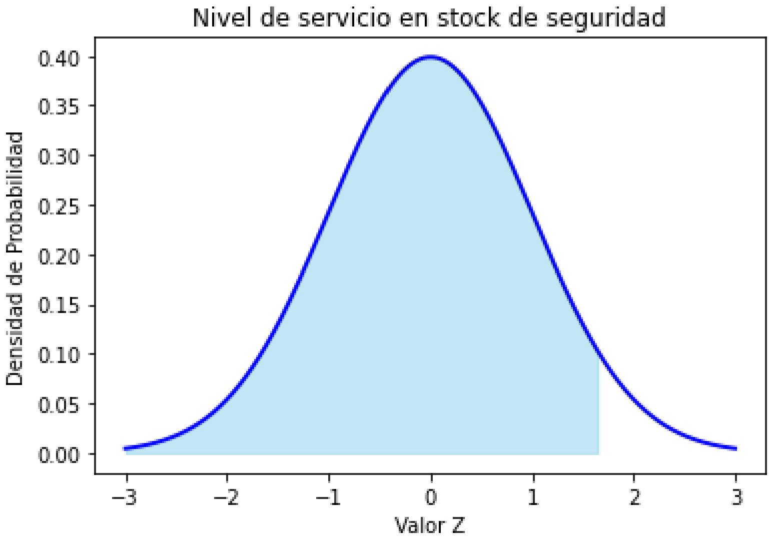


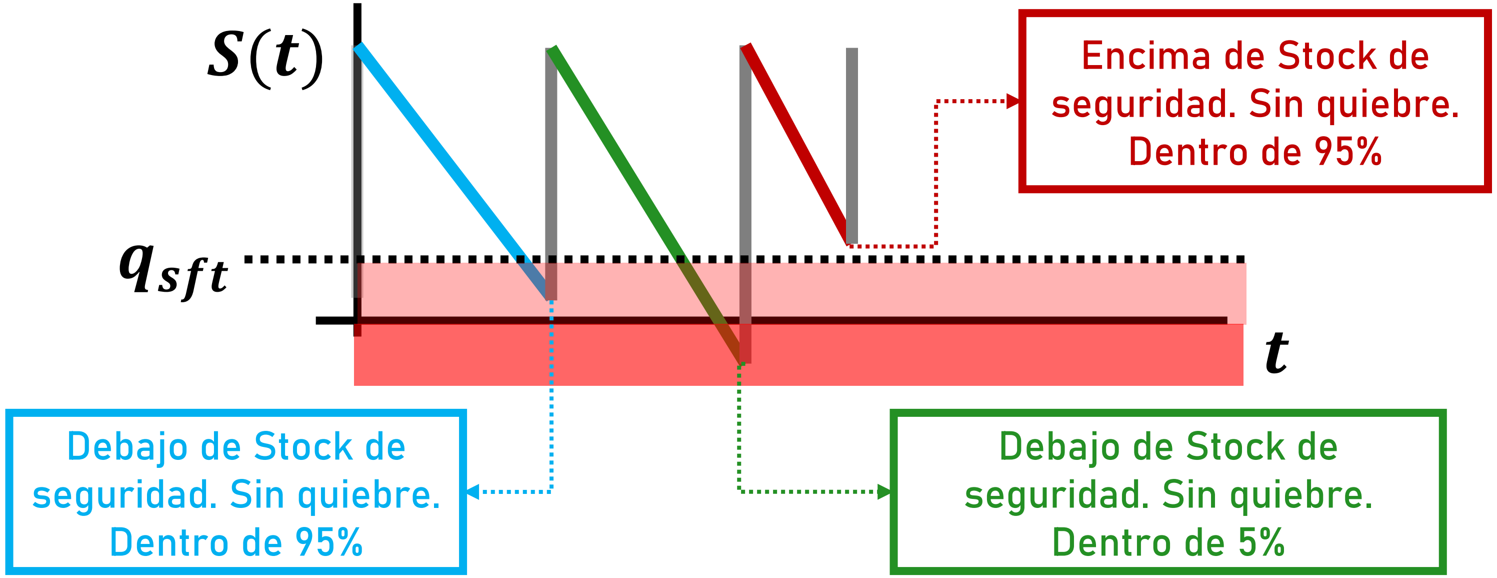
Modelos de protección con stock de seguridad

El stock de seguridad no intenta proteger contra el 100% de los quiebres de stock; se tiene en cuenta un nivel de servicio.

Nivel de servicio: probabilidad de que el stock de seguridad sea suficiente para contener variaciones operativas y de contexto.

Ej: *nivel de servicio de 95%*; el 95% de los casos analizados está cuberto por stock, el resto quiebra.



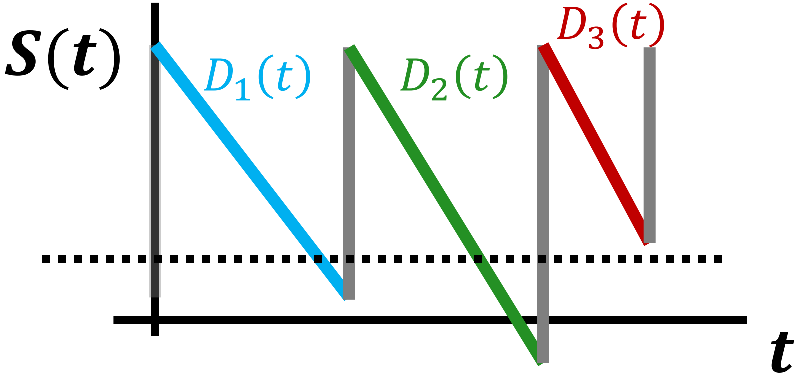


Modelos de protección con stock de seguridad

Modelo A: variabilidad en demanda

Podemos detectar "i" ciclos de demanda con una función asociada $D_i(t)$.

Los ciclos siguen una distribución normal con media $\overline{D_{ciclo}}$ y desvío estandar σ_D



Modelos de protección con stock de seguridad

Modelo A: variabilidad en demanda

Siendo:

- Z, el $Z - score$ asociado al nivel de servicio.

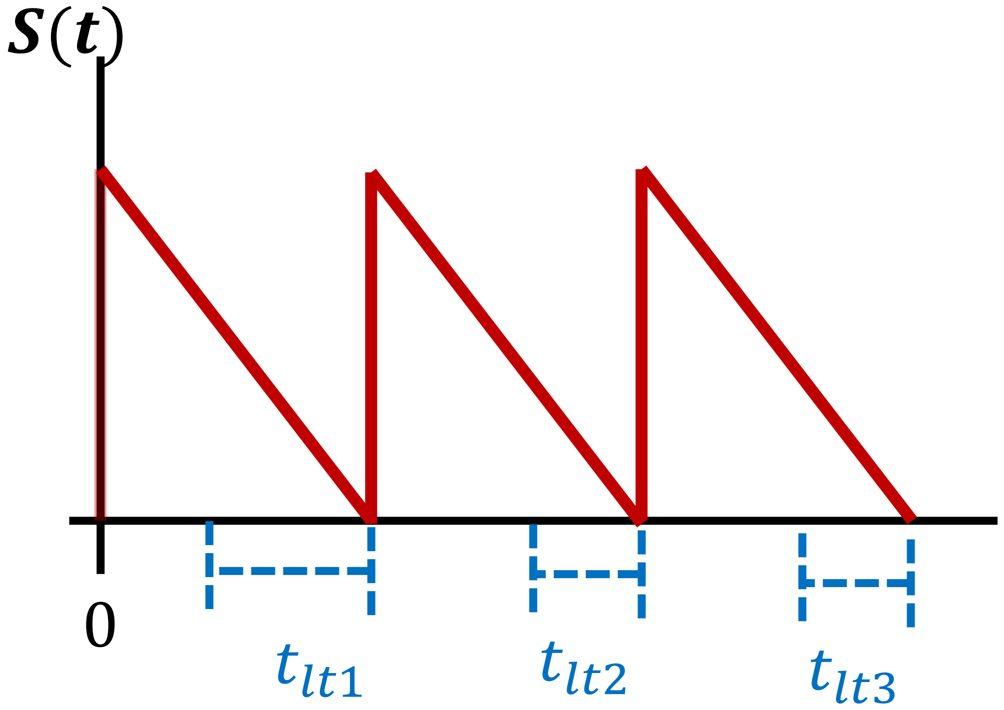
El stock de seguridad por variación de demanda resulta:

$$q_{sft_D} = Z\sigma_D$$

Modelos de protección con stock de seguridad

Modelo B: variabilidad en lead time

Si el lead time sigue una distribución normal con media $\overline{t_{lt}}$ desvío estandar σ_{lt}



Modelos de protección con stock de seguridad

Modelo B: variabilidad en lead time

Siendo:

- Z, el $Z - score$ asociado al nivel de servicio.

El stock de seguridad por variación de lead time resulta:

$$q_{sft_{LT}} = Z.\overline{D_{ciclo}}.\sigma_{lt}$$

Modelos de protección con stock de seguridad

Modelo C: variabilidad en demanda y lead time, independientes

$$q_{sft} = Z\sqrt{{\sigma_D}^2 + (\overline{D_{ciclo}}.\sigma_{lt})^2}$$

Modelo D: variabilidad en demanda y lead time, dependientes

$$q_{sft} = q_{sft_D} + q_{sft_{LT}}$$

$$q_{sft} = Z\sigma_D + Z.\overline{D_{ciclo}}.\sigma_{lt}$$