Filas de espera multiservidor con capacidad y redes

Rodrigo Maranzana

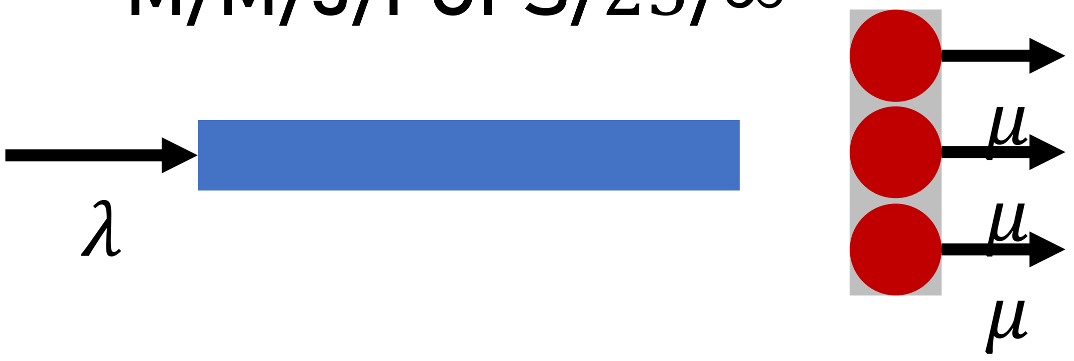
Repaso: notación de Kendall

M/M/1/FCFS/∞/∞

- Arribos $\sim Exp(\lambda)$
- Servicio $\sim Exp(\mu)$
- 1 servidor
- Primero llegado primero servido (FCFS)
- Capacidad infinita del sistema
- Fuente infinita

Se suele abreviar a:
M/M/1

M/M/3/FCFS/25/∞



- Arribos $\sim Exp(\lambda)$
- Servicio $\sim Exp(\mu)$
- 3 servidores
- Primero llegado primero servido (FCFS)
- Capacidad de 25 personas
- Fuente infinita

Se suele abreviar a:
M/M/3/25

Repaso: factor de tráfico

Es la relación entre la tasa de arribos y despachos.

Si “M” es la cantidad de servidores.

$$\rho = \frac{\lambda}{M\mu}$$

Casos:

$\rho \geq 1$ sistema inestable.

$\rho < 1$ sistema estable.

Repaso: métricas y parámetros

Cantidad de clientes promedio:

- En la fila: L_q *[unidades o agentes]*
- En el sistema: L_s o L *[unidades o agentes]*

Tiempo de espera promedio:

- En la fila: W_q *[unidad de tiempo]*
- En el sistema: W_s o W *[unidad de tiempo]*

Probabilidad de estado (que hayan “i” agentes):

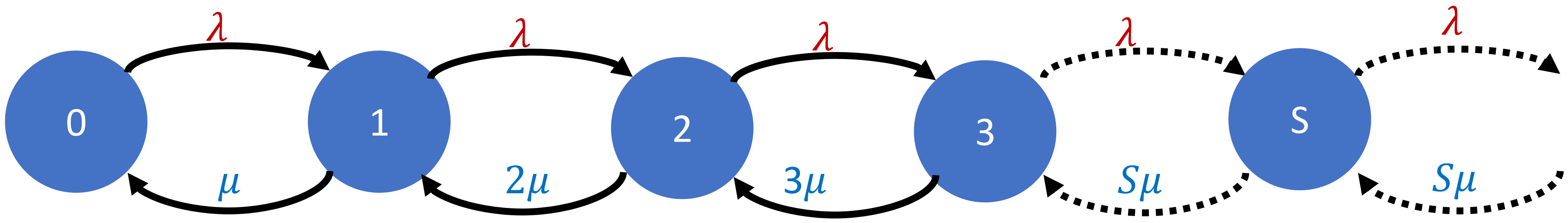
$P(X = i)$

Filas de espera M/M/S

Representan el caso de una fila y múltiples servidores:

Proceso de Nacimiento y Muerte M/M/S

Matriz generadora:



$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3\mu & -\lambda-3\mu & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S\mu & -\lambda-S\mu & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Filas de espera M/M/S

Factor de tráfico:

$$\rho = \frac{\lambda}{M\mu}$$

Probabilidad de sistema ocioso:

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{i=0}^{M-1} \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^M}{M!\,(1-\rho)}}$$

Probabilidad de sistema con “n” agentes:

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{P_0 \left(\dfrac{\lambda^n}{\mu}\right)}{n!} & si\ 0 < n \leq M \\[2ex] \dfrac{P_0 \left(\dfrac{\lambda^n}{\mu}\right)}{M!\,(M^{n-M})} & si\ n > M \end{cases}$$

Filas de espera M/M/s

Cantidad de clientes promedio

- En el sistema:

$$L = \lambda W$$

(Ley de Little)

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

- En la fila:

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M \rho}{M!\ (1-\rho)^2}$$

Tiempo de espera promedio

- En el sistema:

$$\mathrm{W} = \mathrm{W_q} + \frac{1}{\mu}$$

- En la fila:

$$\mathrm{W_q} = \frac{L_q}{\lambda}$$

Ejemplo

Una línea automatizada tiene tres tornos CNC idénticos.

La materia forma una única fila de espera al pie de las 3 máquinas esperando ser procesada.

Las cantidades que arriban y se procesan siguen una distribución de Poisson.

Además se sabe que la tasa de procesamiento de los tornos es de $\mu = 6\ \mathrm{u/hora}$, y la materia prima llega con una tasa de $\lambda = 16\ u/hora$.

1. ¿El sistema es estable?
2. Largo de la fila promedio.
3. Tiempo que una unidad pasa en el sistema.

1. ¿El sistema es estable?

$$\rho = \frac{\lambda}{M\mu} = \frac{16\,u/h}{3 * 6\,u/h} = 0.88$$

Menor a 1, sistema estable.

2. Largo de la fila promedio

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{i=0}^{M-1} \frac{(\lambda/\mu)^i}{i!}\right] + \frac{(\lambda/\mu)^M}{M!\,(1-\rho)}} = \frac{1}{\left[\sum_{i=0}^{3-1} \frac{(16/6)^i}{i!}\right] + \frac{(16/6)^3}{3!\,(1-0.88)}} = 0.0311$$

$$P_0 = 3{,}11\%$$

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M \rho}{M!\ (1-\rho)^2} = \frac{0.0311 \left(\frac{16}{6}\right)^3 0.88}{3!\ (1-0.88)^2} = 7.08\ unidades$$

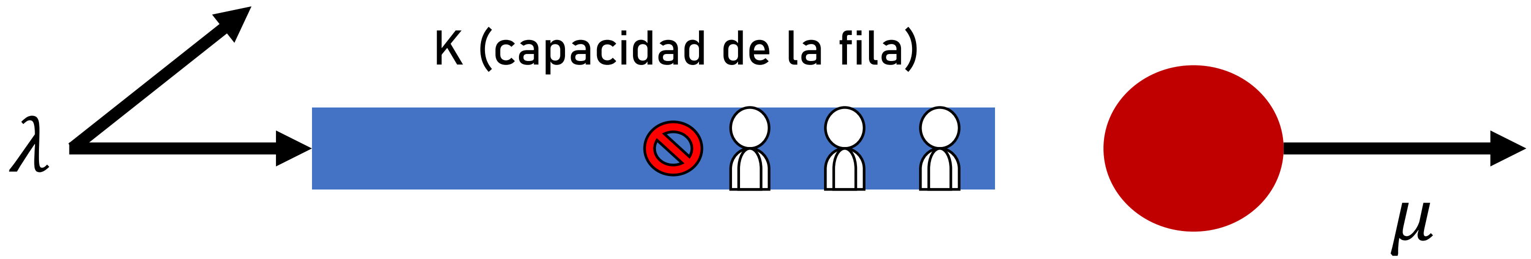
3. Tiempo en que un unidad pasa en el sistema

$$\mathrm{W_q} = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{7.08\,u}{16\,u/h} = 0.442\,h = 26.55\,min$$

$$\mathrm{W} = \mathrm{W_q} + \frac{1}{\mu} = 0.442\,h/u + \frac{1}{6\,\frac{u}{h}} = 0.609\,h = 36.52\,min$$

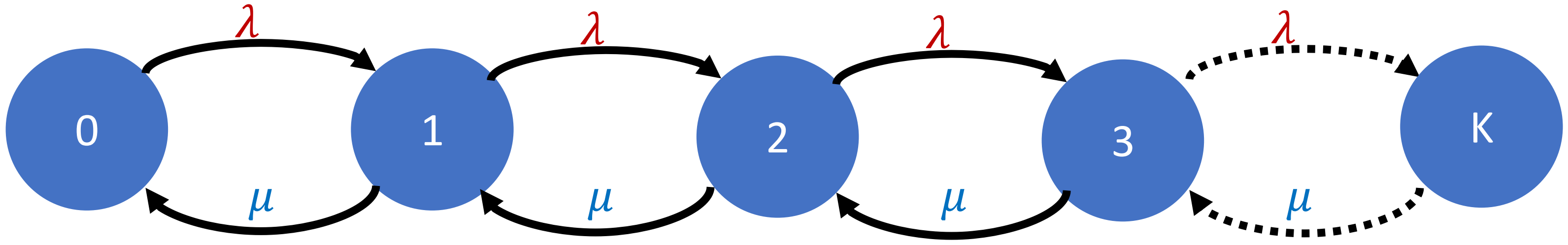
Filas de espera M/M/1/K

Representan el caso de una fila con capacidad máxima:



Proceso de Nacimiento y Muerte M/M/1/K

Matriz generadora:



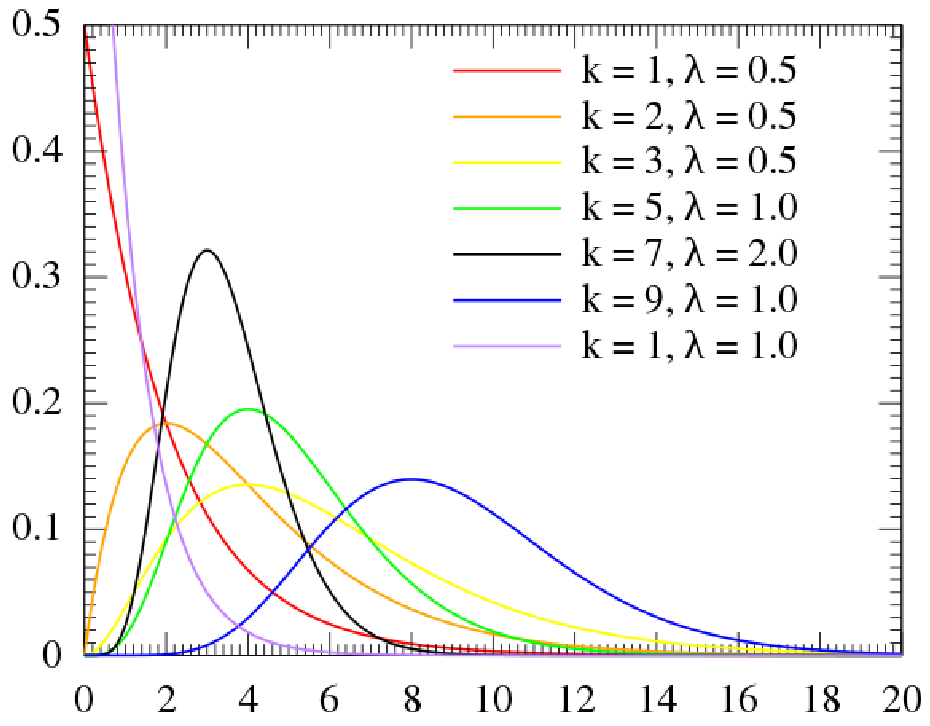
$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu & -\lambda-\mu & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -\lambda-\mu & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\lambda-\mu \end{bmatrix}$$

Filas con distribuciones de Erlang

La distribución de Erlang es un caso particular de la Gamma con su parámetro "k" entero.

Suele modelizar mejor el funcionamiento de filas en call centers.

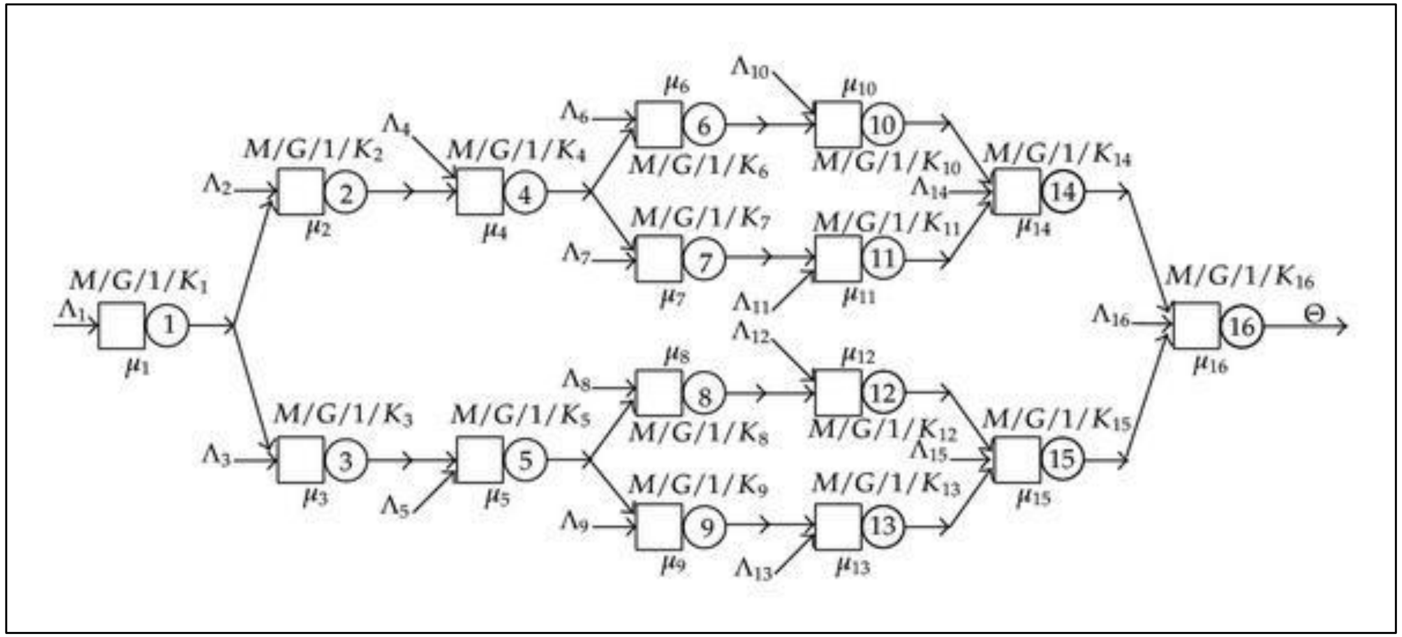
Si k=1, es el caso límite de la exponencial.



https://en.wikipedia.org/wiki/Erlang_distribution

Redes de filas de espera

Es una forma de modelizar un sistema mediante filas de espera conectadas.

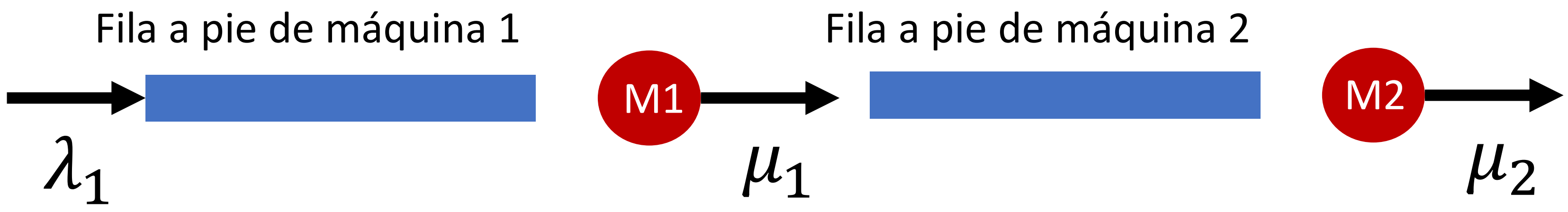


Ejemplo: red compleja modelizada con filas de espera

Cruz et Al. (2012), “Throughput Maximization of Queueing Networks with Simultaneous Minimization of Service Rates and Buffers” (https://www.hindawi.com/journals/mpe/2012/692593/)

Redes de filas de espera

Por ejemplo, una unidad productiva en serie se puede modelizar como:



La tasa de salida μ_1 de M1 equivale a la de llegada de M2.

Redes de Jackson abiertas

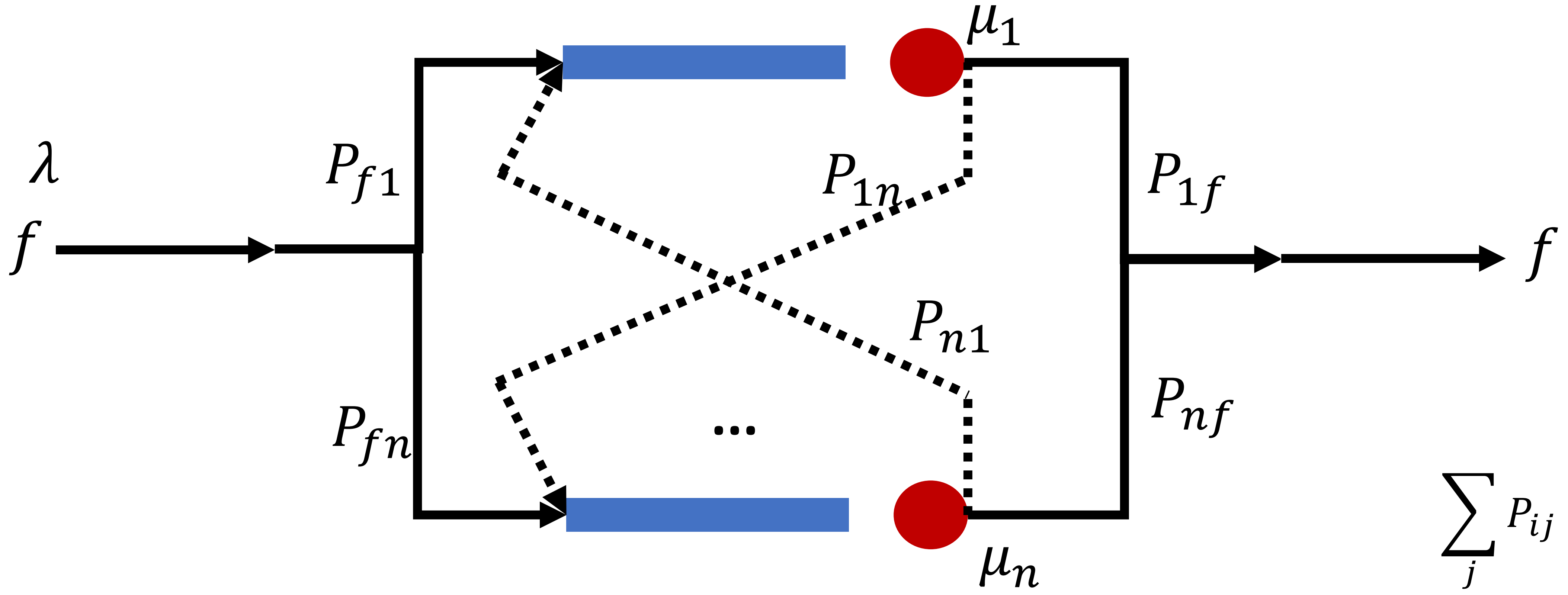
- Un solo tipo de cliente.
- Tiempos de servicio con distribución exponencial en todas los servidores.
- Distribuciones independientes entre estaciones.
- Capacidad ilimitada de las filas.
- Disciplina FIFO.
- Ruteo de red probabilístico.
- Clientes que llegan del exterior siguen un proceso de Poisson.

Redes de Jackson abiertas monoservidor

P_{fi}: Probabilidad que un cliente que llega al sistema vaya al servidor "i".

P_{ij}: Probabilidad que un cliente que sale del servidor "i" vaya al servidor "j".

P_{if}: Probabilidad que un cliente que sale del servidor "i" abandone el sistema.



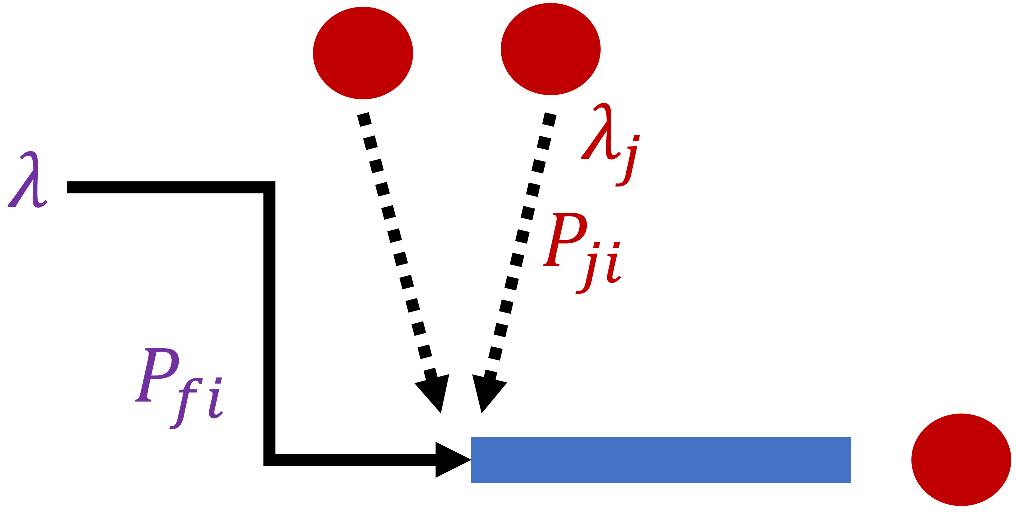
$$\sum_j P_{ij} = 1 \quad \forall i$$

Tasas de tránsito de cada servidor

En cada servidor "i", la tasa de entrada (λ_i) está dada por:

- Tasa proveniente del exterior.
- Tasa proveniente de otros servidores.

$$\lambda_i = \lambda P_{fi} + \sum_{j=1}^{M} \lambda_j P_{ji}$$

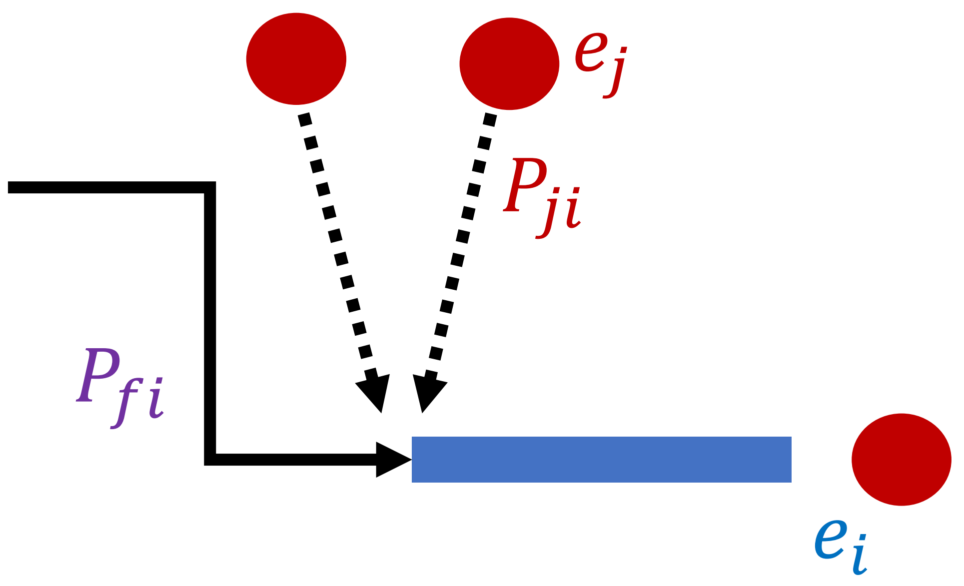


Tasas de visita de cada servidor

En cada servidor “i”, la tasa de visita (e_i) está dada por:

- La probabilidad de llegar desde el exterior al servidor “i”.
- La tasa de visita de un servidor “j” y la probabilidad de ir de “j” a “i”.

$$e_i = P_{fi} + \sum_{j=1}^{M} e_j \, P_{ji}$$



Relación entre tasas:

$$e_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$$

Teorema de Jackson en redes monoservidor

Este tipo de redes se puede resolver como un ensamble de redes M/M/1 independientes.

La Probabilidad de estado de una red M/M/1 en régimen permanente era:

$$P_n = P_0 \rho^n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

Teorema de Jackson en redes monoservidor

Para la red completa, las probabilidades de estado están dadas por:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_M) = \prod_{i=1}^{M} P_{i,n_i} = \prod_{i=1}^{M} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)\left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{n_i}$$

$P(n_1, n_2, \ldots, n_M)$: Probabilidad de estado de la red completa.

P_{i,n_i}: Probabilidad que la fila “i” tenga n_i clientes.

Las métricas de cada fila (Cantidad, tiempo, etc.) se calculan como M/M/1 independientes.

Métricas de redes de Jackson en redes monoservidor

Cantidad de agentes en el sistema:

$$L = \sum_{i=1}^{M} L_i$$

Tiempo de espera en el sistema:

$$W = \frac{L}{\lambda}$$ *(Ley de Little)*

$$W = \sum_{i=1}^{M} e_i W_i$$

Redes de Jackson multiservidor

Mientras el sistema esté compuesto por unidades M/M/C idénticas, la premisa es la misma que para monoservidor.

El resultado es un ensamble de M/M/C independientes.