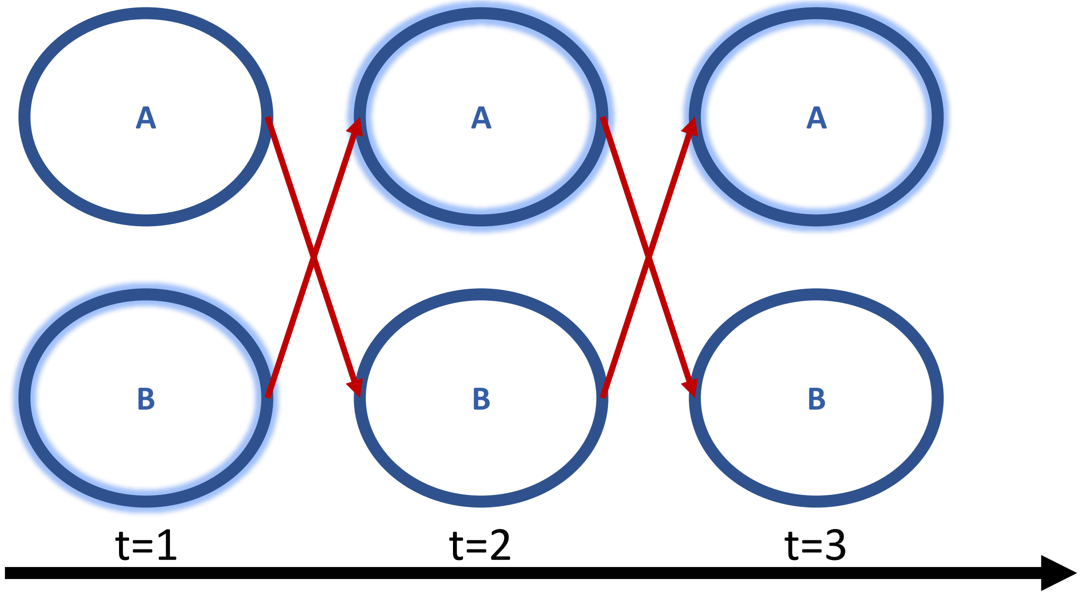
Cadenas de Markov Infinitas y Filas de Espera

Rodrigo Maranzana

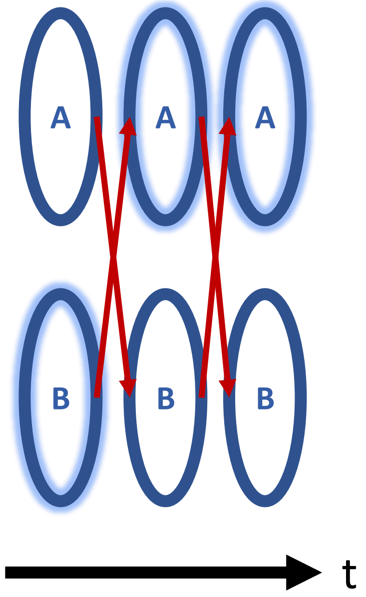
Repaso: Cadenas de Markov de tiempo continuo

Si intentamos achicar el paso del parámetro t, en la probabilidad de transición:

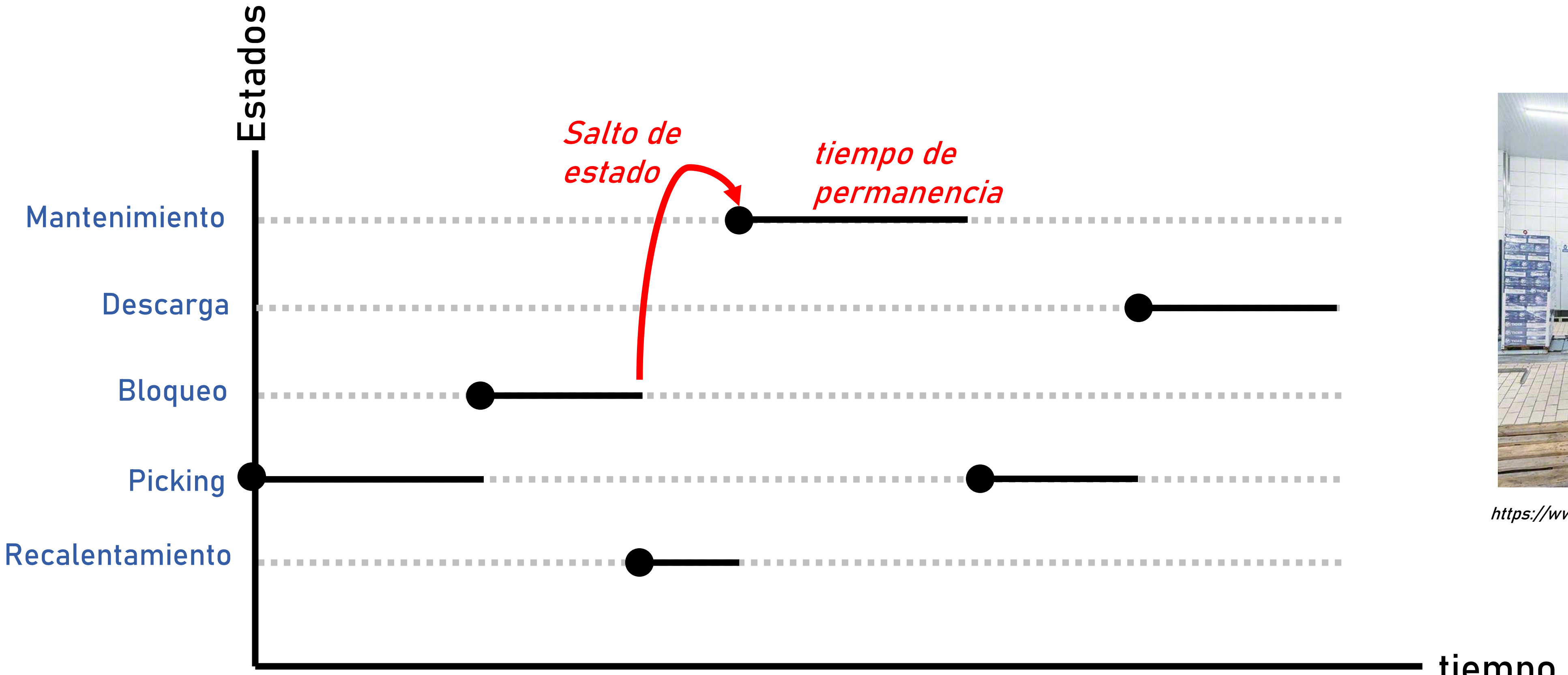
$$P(X_{t+1} = i | X_t = j)$$



$$P(\lim_{\Delta t \to 0} X_{t+\Delta t} = i | X_t = j)$$



Repaso: Cadenas de Markov de tiempo continuo



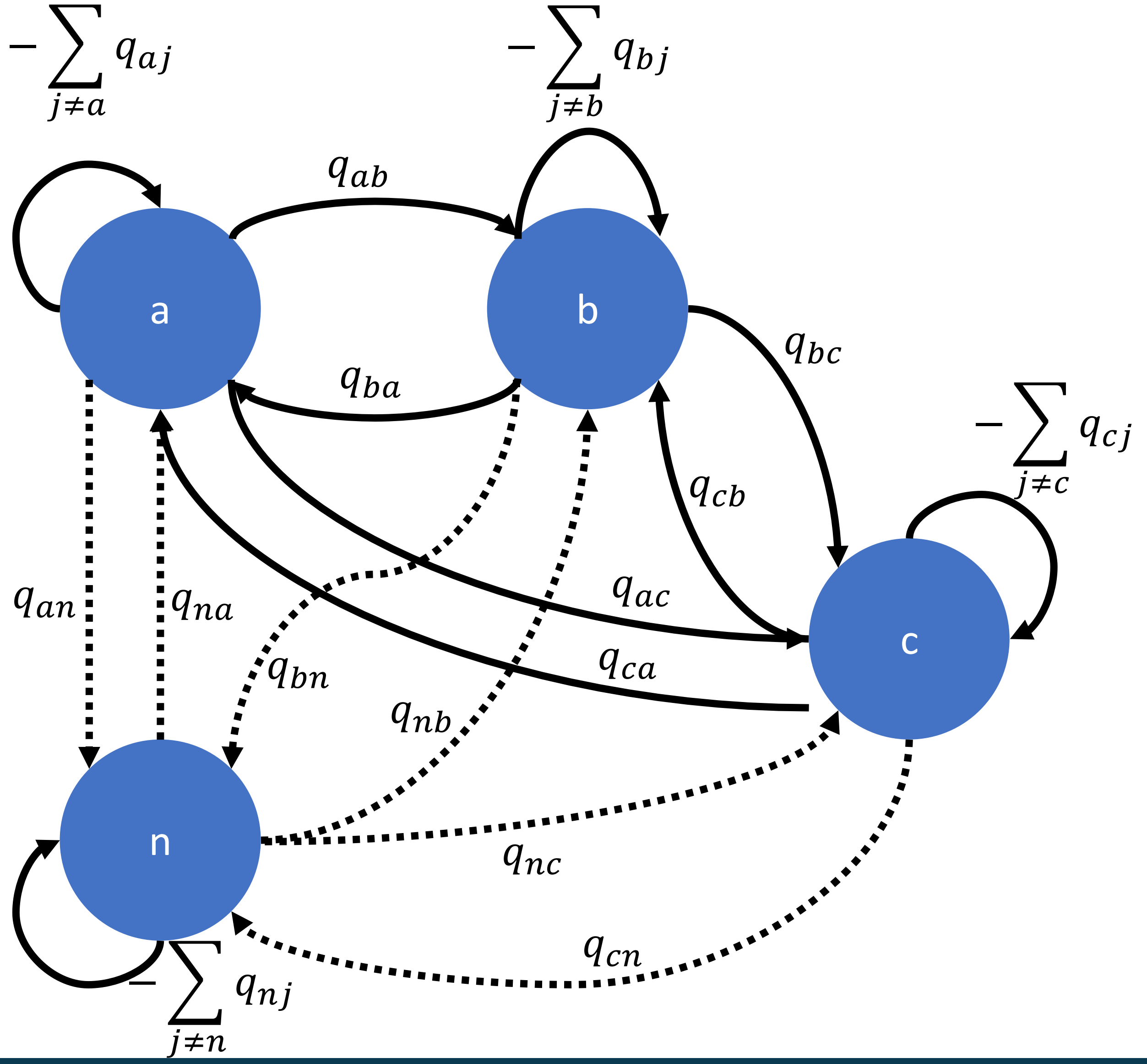
https://www.mecalux.com.ar/blog/robot-de-picking

Repaso: matriz generadora infinitesimal

$$Q = \begin{array}{cc} j & \\ \begin{bmatrix} q_{aa} & q_{ab} & q_{ac} & \cdots & q_{an} \\ q_{ba} & q_{bb} & q_{bc} & \cdots & q_{bn} \\ q_{ca} & q_{cb} & q_{cc} & \cdots & q_{cn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{na} & q_{nb} & q_{nc} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} & i \end{array}$$

Las tasas $\boldsymbol{q_{ij}}$ de cada componentes son escalares, representan la tasa de transición o de saltos entre estados.

Repaso: grafo y matriz generadora



$$Q = \begin{bmatrix} -\sum_{j\neq a} q_{aj} & q_{ab} & q_{ac} & \cdots & q_{an} \\ q_{ba} & -\sum_{j\neq b} q_{bj} & q_{bc} & \cdots & q_{bn} \\ q_{ca} & q_{cb} & -\sum_{j\neq c} q_{cj} & \cdots & q_{cn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{na} & q_{nb} & q_{nc} & \cdots & -\sum_{j\neq n} q_{nj} \end{bmatrix}$$

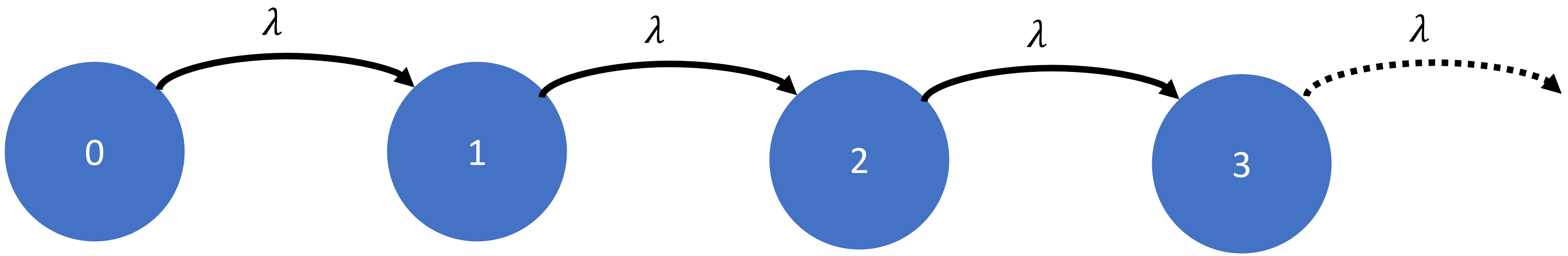
Repaso: Cadenas de Markov de tiempo continuo

Clasificación por estados:

- Estado finito
- Estado infinito

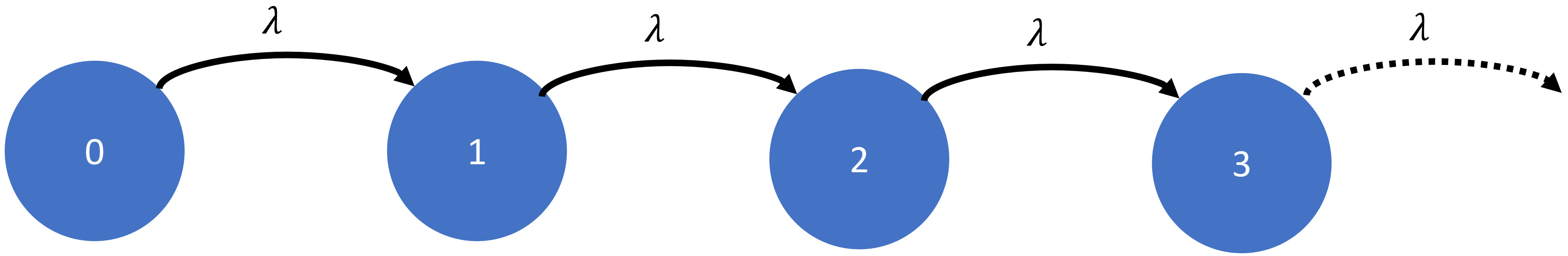
Proceso de Poisson (proceso de nacimiento)

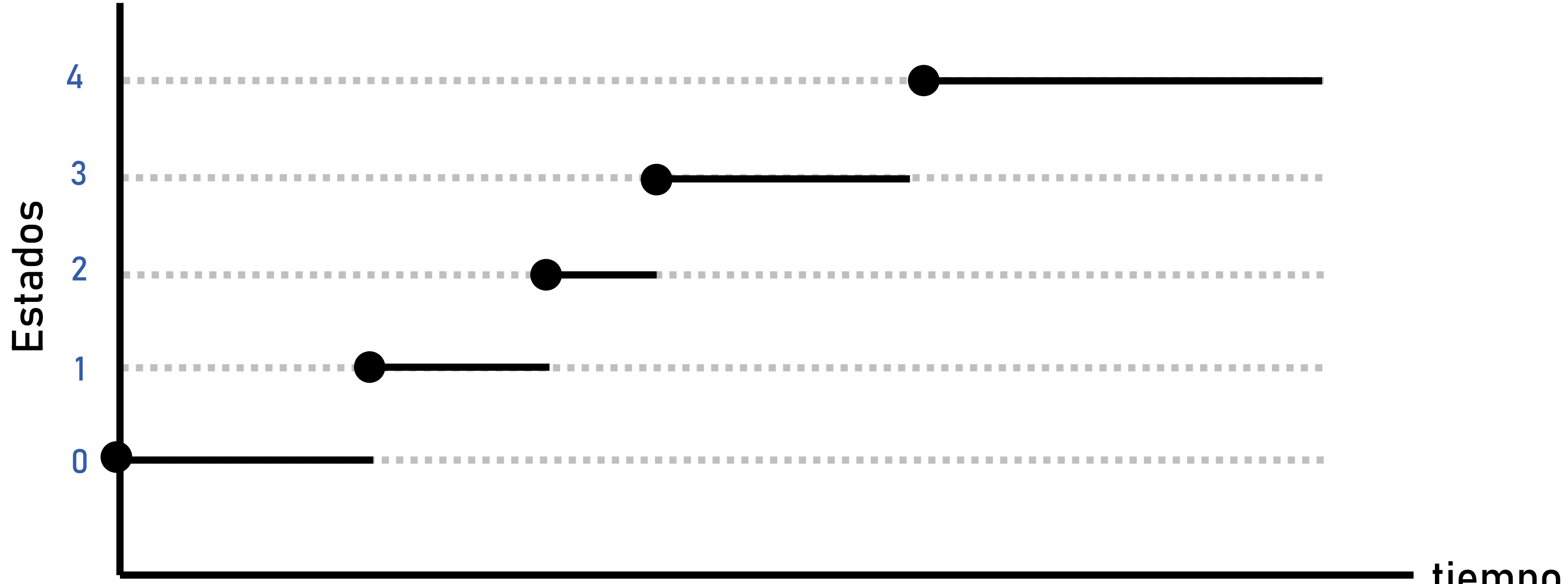
- Es una cadena de markov de estado infinito.
- Las tasas de transición (λ) caracterizan la distribución de Poisson subyacente.
- Proceso de conteo, en donde el tiempo entre eventos sigue una distribución exponencial.
- Se genera un proceso estocástico monótono creciente.
- Los estados se definen por la cantidad de eventos generados.



Proceso de Poisson (proceso de nacimiento)

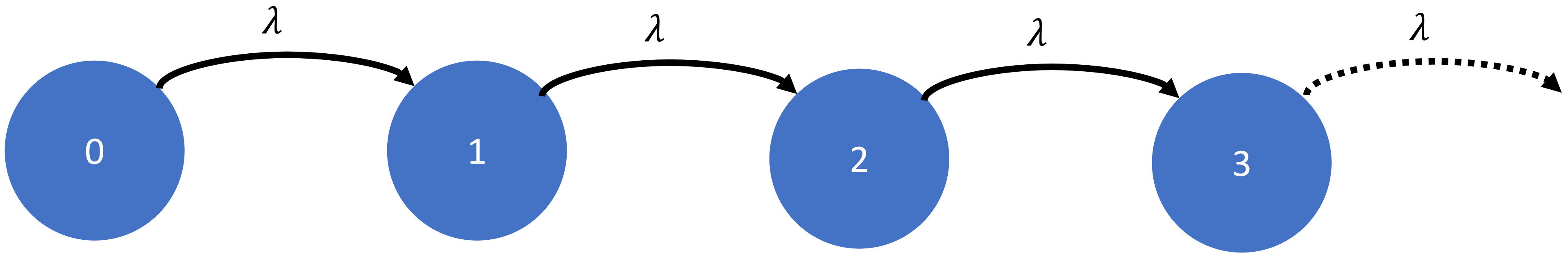
Proceso de conteo:





Proceso de Poisson (proceso de nacimiento)

Matriz generadora:

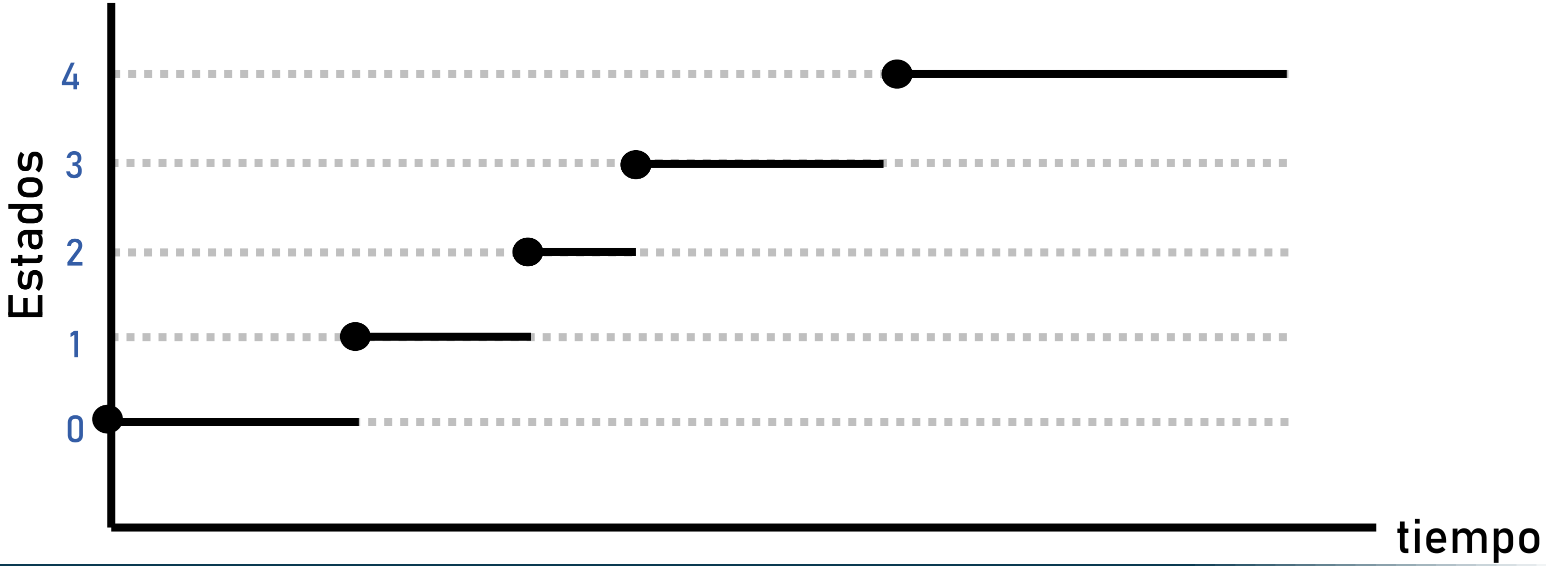


$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Proceso de Poisson (proceso de nacimiento)

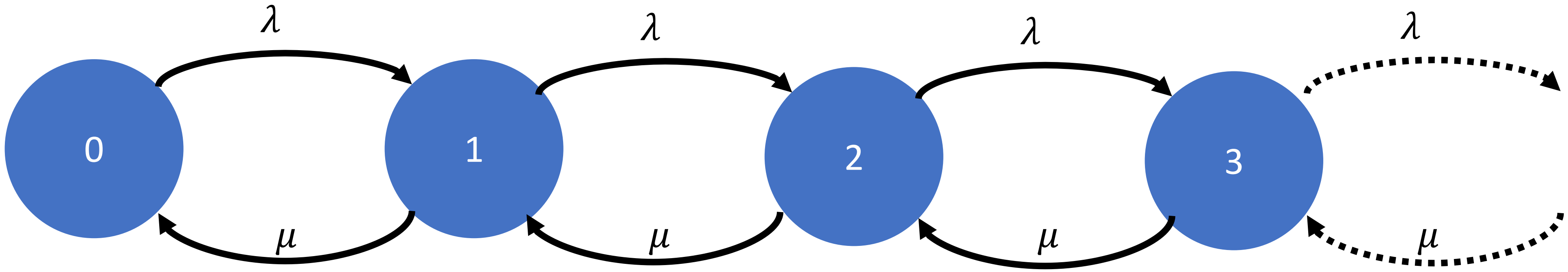
Ejemplos de aplicaciones:

- Conteo de fallas en un proceso/máquina.
- Conteo de llamados a un servicio.
- Finanzas: riesgo de default. Pricing de credit default swaps. La tasa de eventos se conoce como “hazard rate” y se estima la probabilidad de sobrevivir o de defaultear.



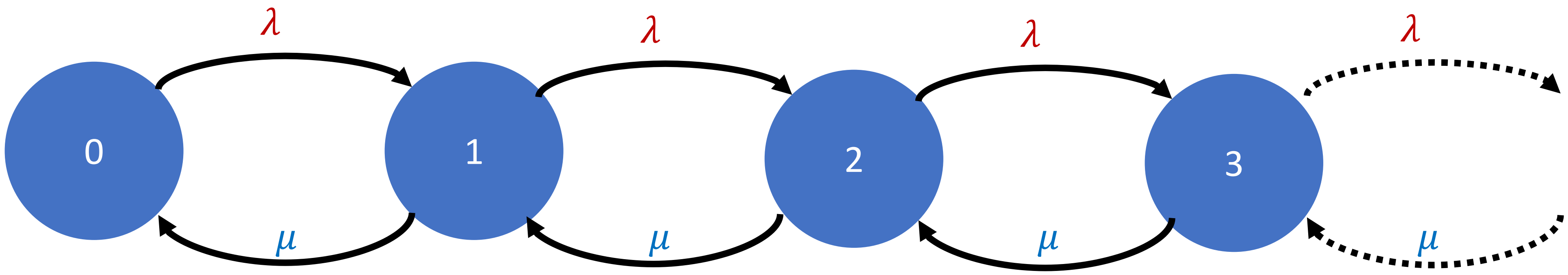
Proceso de Nacimiento y Muerte

- Es una cadena de markov de estado infinito.
- Los estados se definen por la cantidad de eventos generados.
  - Los nacimientos incrementan el conteo.
  - Las muertes restan al conteo.



Proceso de Nacimiento y Muerte

Matriz generadora:



$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -\lambda-\mu & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -\lambda-\mu & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & Si\ j = i+1 \\ \mu & Si\ j = i-1 \\ 0 & Si\ |i-j| > 1 \\ -\sum_{j \neq a} q_{aj} & Si\ i = j \end{cases}$$

Estado estacionario

$$[\boldsymbol{p_0} \quad \boldsymbol{p_1} \quad \boldsymbol{p_2} \quad \boldsymbol{p_3} \quad \ldots]\begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \mu & -\lambda-\mu & \lambda & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \mu & -\lambda-\mu & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Armando sistema de ecuaciones:

$$-p_0\lambda + p_1\mu = 0$$
$$p_0\lambda - p_1(\lambda+\mu) + p_2\mu = 0$$
$$p_1\lambda - p_2(\lambda+\mu) + p_3\mu = 0$$
$$\ldots$$
$$p_{n-2}\lambda - p_{n-1}(\lambda+\mu) + p_n\mu = 0$$
$$\ldots$$
$$\sum_n p_n = 1$$

Estado estacionario

Si despejamos cada ecuación:

$$-p_0\lambda + p_1\mu = 0$$
$$p_0\lambda - p_1(\lambda+\mu) + p_2\mu = 0$$
$$p_1\lambda - p_2(\lambda+\mu) + p_3\mu = 0$$
$$\ldots$$
$$p_{n-2}\lambda - p_{n-1}(\lambda+\mu) + p_n\mu = 0$$
$$\ldots$$
$$\sum_n p_n = 1$$

$$p_1 = p_0\frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_2 = p_1\frac{\lambda}{\mu}$$

$$\ldots$$

$$p_n = p_{n-1}\frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_2 = \left(p_0\frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{\lambda}{\mu}$$

$$\ldots$$

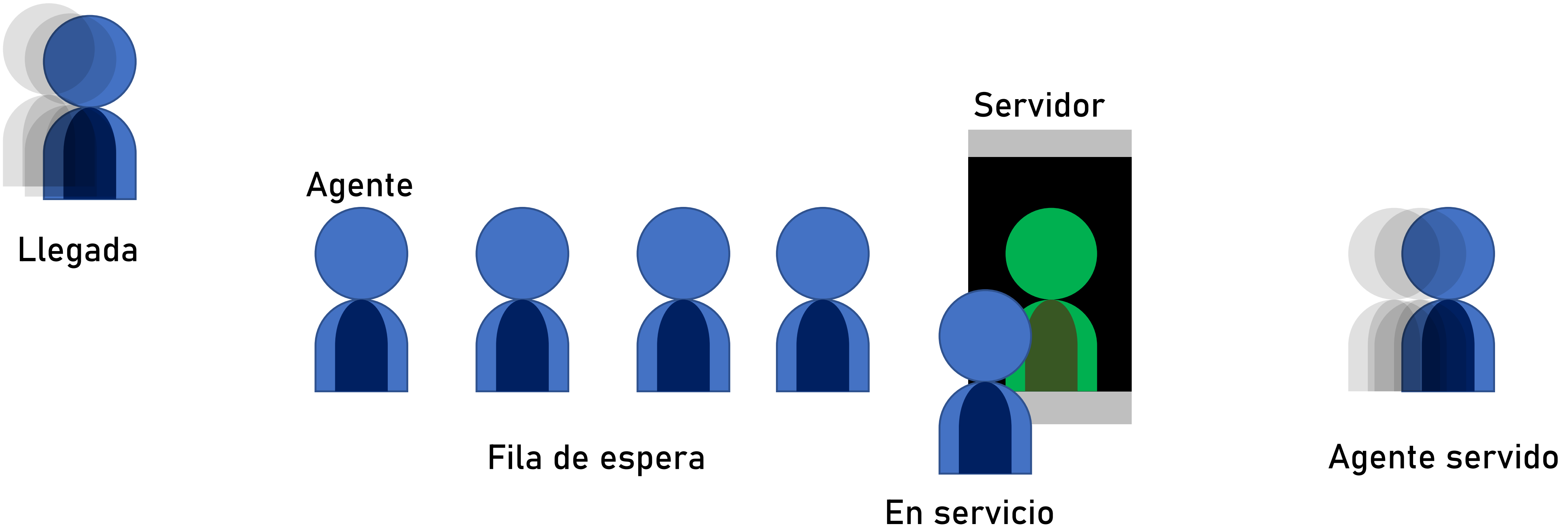
$$p_n = p_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

Estado estacionario

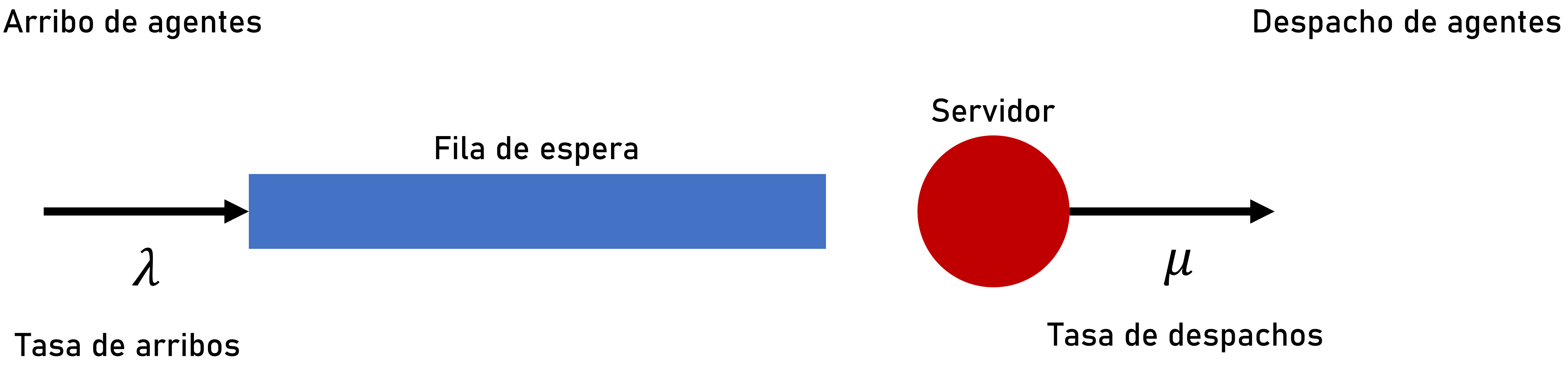
Esta expresión nos permite calcular la probabilidad del sistema, de estar en un estado determinado “n”, conociendo la probabilidad de estar vacío.

$$p_n = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

Introducción a Filas de Espera



Representación de filas de espera



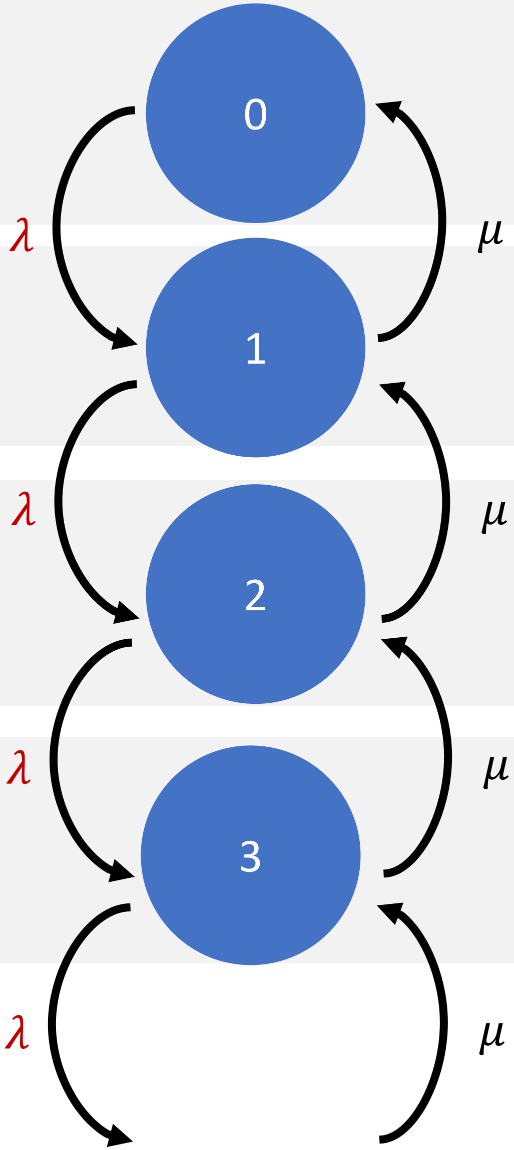
Representación de filas de espera

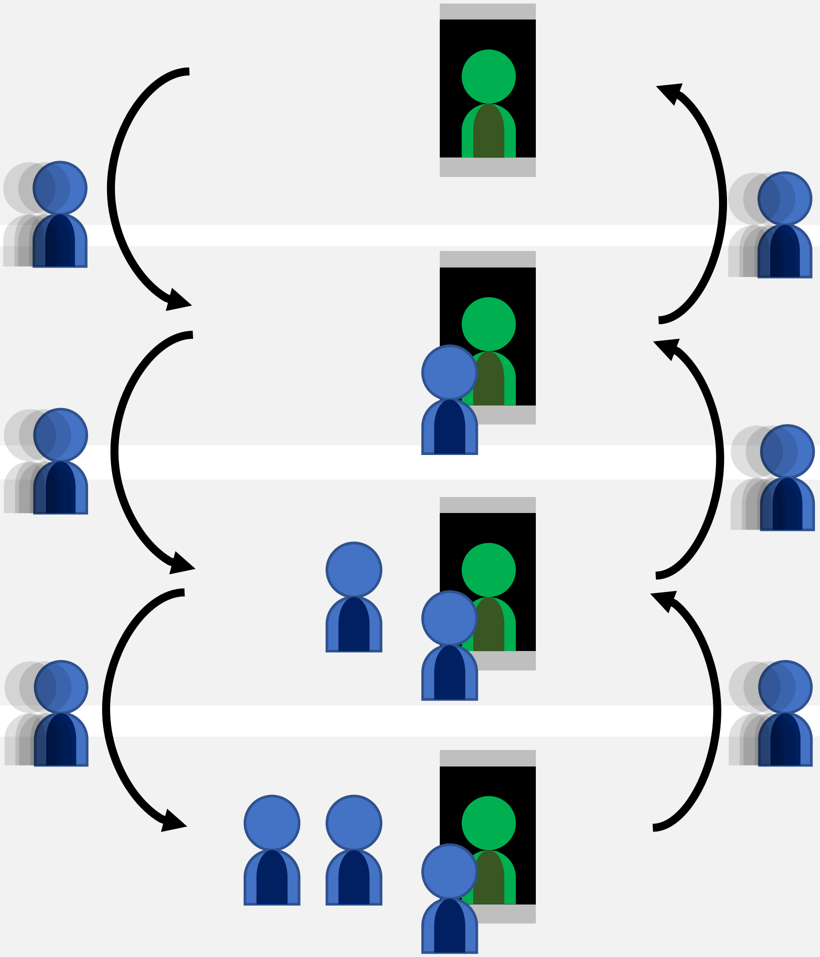
Podemos representar las filas como un proceso de markov de nacimiento y muerte.

- Las tasas de nacimiento son arribos de agentes: λ
- Las tasas de muerte son despachos de agentes: μ

Los estados del sistema es la cantidad de agentes en el sistema.

Representación de filas de espera





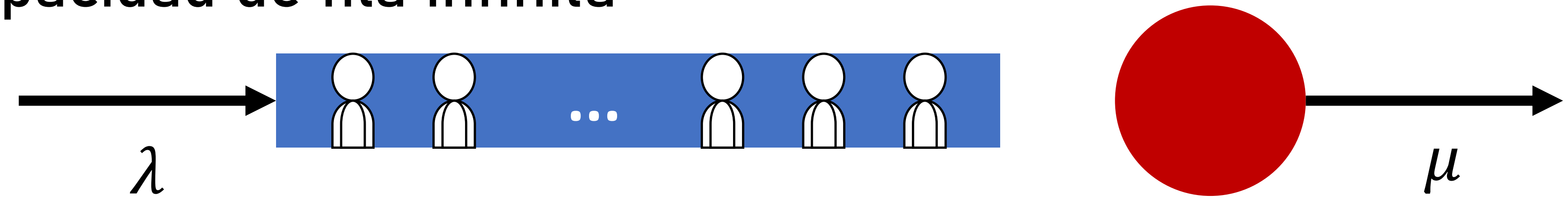
Configuraciones de filas de espera: servidores

Un solo servidor:

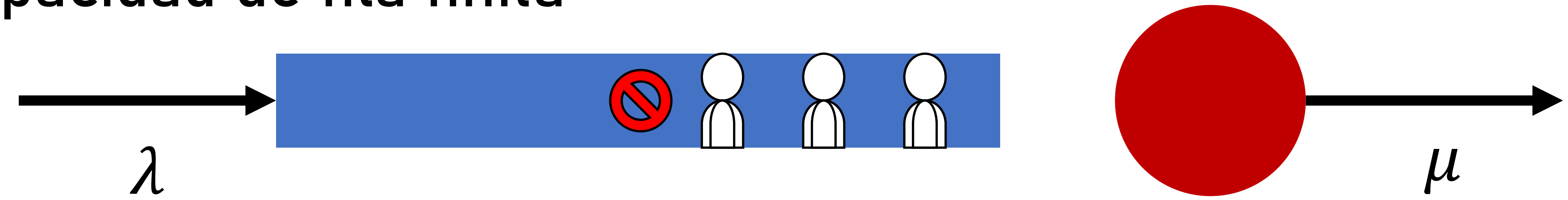
Múltiples servidores:

Configuraciones de filas de espera: capacidad

Capacidad de fila infinita

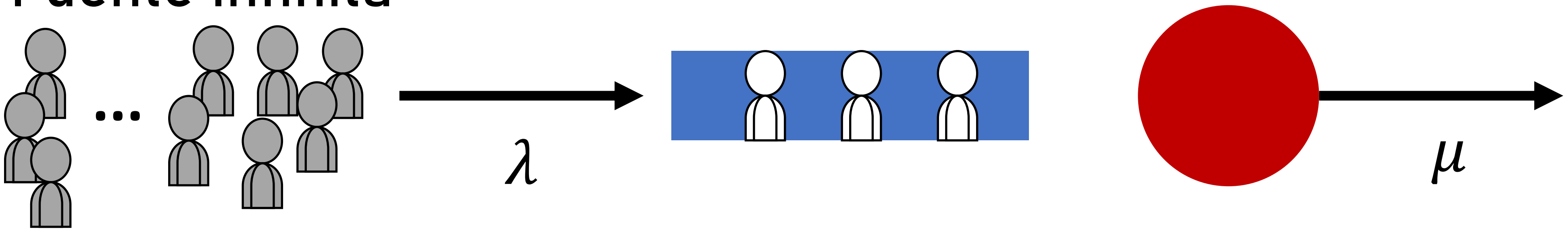


Capacidad de fila finita

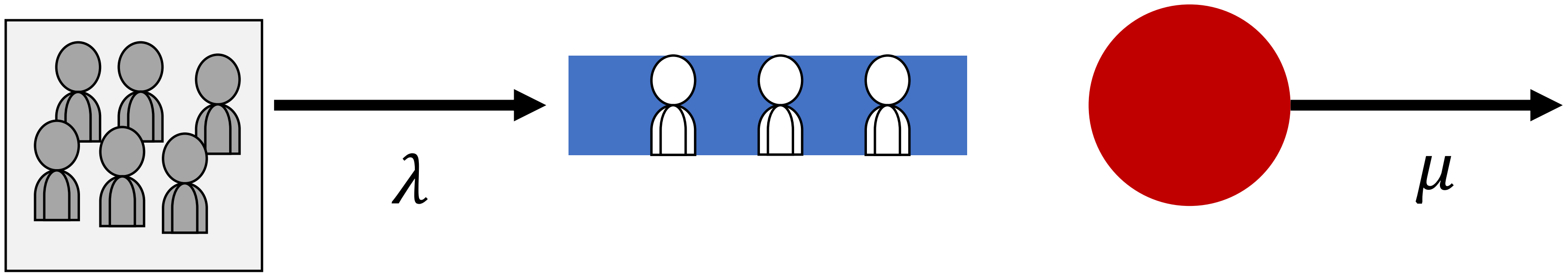


Configuraciones de filas de espera: fuente

Fuente infinita



Fuente finita



Notación de Kendall

Permite codificar la configuración de una fila.

1/2/3/4/5/6

Notación de Kendall

1/2/3/4/5/6

Naturaleza del proceso de arribo, ej:

- M: Los tiempos de diferencia de arribo independientes e idénticamente distribuidos (iid) siguiendo una distribución exponencial.
- D: Los tiempos de diferencia de arribo son iid y deterministas
- E_k: Los tiempos de diferencia de arribo son iid con distribución de Erlang con parámetro k.
- GI : Son iid y gobernados por una distribución general.

Notación de Kendall

1/2/3/4/5/6

Naturaleza del servicio:

- M: Los tiempos de servicio son independientes e idénticamente distribuidos (iid) siguiendo una distribución exponencial.
- D: Los tiempos de servicio son iid y deterministas
- E_k: Los tiempos de servicio son iid con distribución de Erlang con parámetro k.
- GI : Los tiempos de servicio son iid y gobernados por una distribución general.

Notación de Kendall

1/2/3/4/5/6

Número de servidores en paralelo.

Notación de Kendall

1/2/3/4/5/6

Disciplina de la fila:

- FCFS: First come, first served
- LCLS: Last come, first served
- SIRO: Served in random order
- SPT: Shortest processing time first
- PR: Service according to priority

Notación de Kendall

1/2/3/4/5/6

Cantidad de clientes que puede tener el sistema (esperando + servicio)

1/2/3/4/5/6

Tamaño de la fuente donde se extraen los clientes.

Notación de Kendall

M/M/1/FCFS/∞/∞

M/M/3/FCFS/25/∞

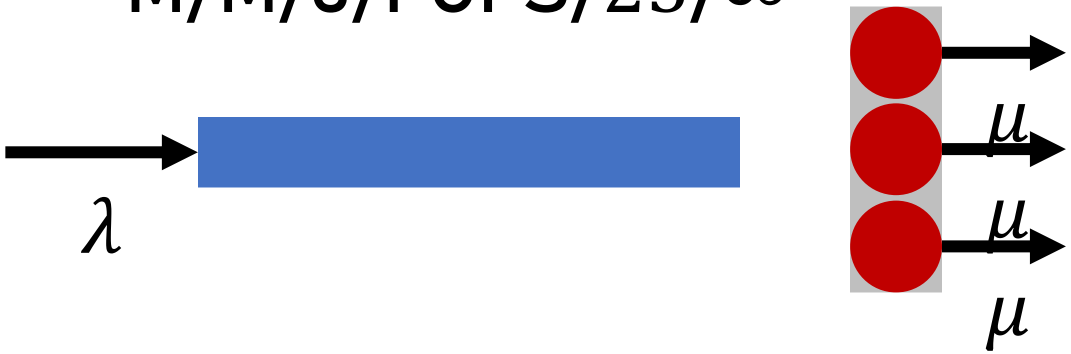
Notación de Kendall

M/M/1/FCFS/∞/∞

- Arribos $\sim Exp(\lambda)$
- Servicio $\sim Exp(\mu)$
- 1 servidor
- Primero llegado primero servido (FCFS)
- Capacidad infinita del sistema
- Fuente infinita

Se suele abreviar a:
M/M/1

M/M/3/FCFS/25/∞



- Arribos $\sim Exp(\lambda)$
- Servicio $\sim Exp(\mu)$
- 3 servidores
- Primero llegado primero servido (FCFS)
- Capacidad de 25 personas
- Fuente infinita

Se suele abreviar a:
M/M/1/25

Métricas: factor de tráfico

Es la relación entre la tasa de arribos y despachos.

Si “M” es la cantidad de servidores.

$$\rho = \frac{\lambda}{M\mu}$$

Casos:

$\rho \geq 1$ sistema inestable.

$\rho < 1$ sistema estable.

Métricas y parámetros: factor de tráfico

Cantidad de clientes promedio:

- En la fila: L_q *[unidades o agentes]*
- En el sistema: L_s o L *[unidades o agentes]*

Tiempo de espera promedio:

- En la fila: W_q *[unidad de tiempo]*
- En el sistema: W_s o W *[unidad de tiempo]*

Probabilidad de estado (que hayan "i" agentes):

$P(X = i)$

Caso M/M/1

Factor de tráfico:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Probabilidad de sistema ocioso:

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Probabilidad de sistema con “n” agentes:

$$P_n = P_0 \rho^n$$

Métricas y parámetros: factor de tráfico

Cantidad de clientes promedio

- En el sistema:

$$L = \lambda W$$

(Ley de Little)

$$L = L_q + \rho$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

- En la fila:

$$L_q = \lambda W_q$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Tiempo de espera promedio

- En el sistema:

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

- En la fila:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

Ejemplo inicial

A una unidad de empaquetado llegan 35 unidades por hora. La media de servicio de cada unidad es de 1 minuto.
La distribución de tiempo entre arribos es exponencial y la capacidad de la fila infinita.

1- Escribir la notación de Kendall y representar el sistema.

2- Factor de tráfico.

3- Probabilidad de sistema ocioso.

4- Número promedio de unidades en la fila.

5- Tiempo promedio de unidades esperando.

5- Clientes atendidos por hora.

1) Notación de Kendall y representación

M/M/1/FCFS/∞/∞ (M/M/1)

- Arribos $\sim Exp(\lambda)$
- Servicio $\sim Exp(\mu)$
- 1 servidor
- Primero llegado primero servido (FCFS)
- Capacidad infinita del sistema
- Fuente infinita

$\lambda = 35\ u/h$

$\mu = 60\ u/h$

2) Factor de tráfico

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{35}{60} = 0.58$$

3) Probabilidad de sistema ocioso

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \frac{35}{60} = 0.41\hat{6}$$

La probabilidad de encontrar el sistema ocioso es de 41.66%

4) Número promedio de unidades en la fila

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{35^2}{60(60 - 35)} = 0.8166\ unidades$$

5) Tiempo promedio de unidades esperando

$$\mathrm{W_q} = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.8166}{35} = 0.0233\ horas = 1.39\ min$$

6) Clientes atendidos por hora

a) calculamos la cantidad promedio en el servidor:

$$L_s - L_q = \rho$$

b) multiplicamos por la capacidad operativa del servidor:

$$\rho\mu = 0.58 * 60 = 35 \text{ clientes/hora}$$

6) Clientes atendidos por hora

Otra forma de entenderlo:

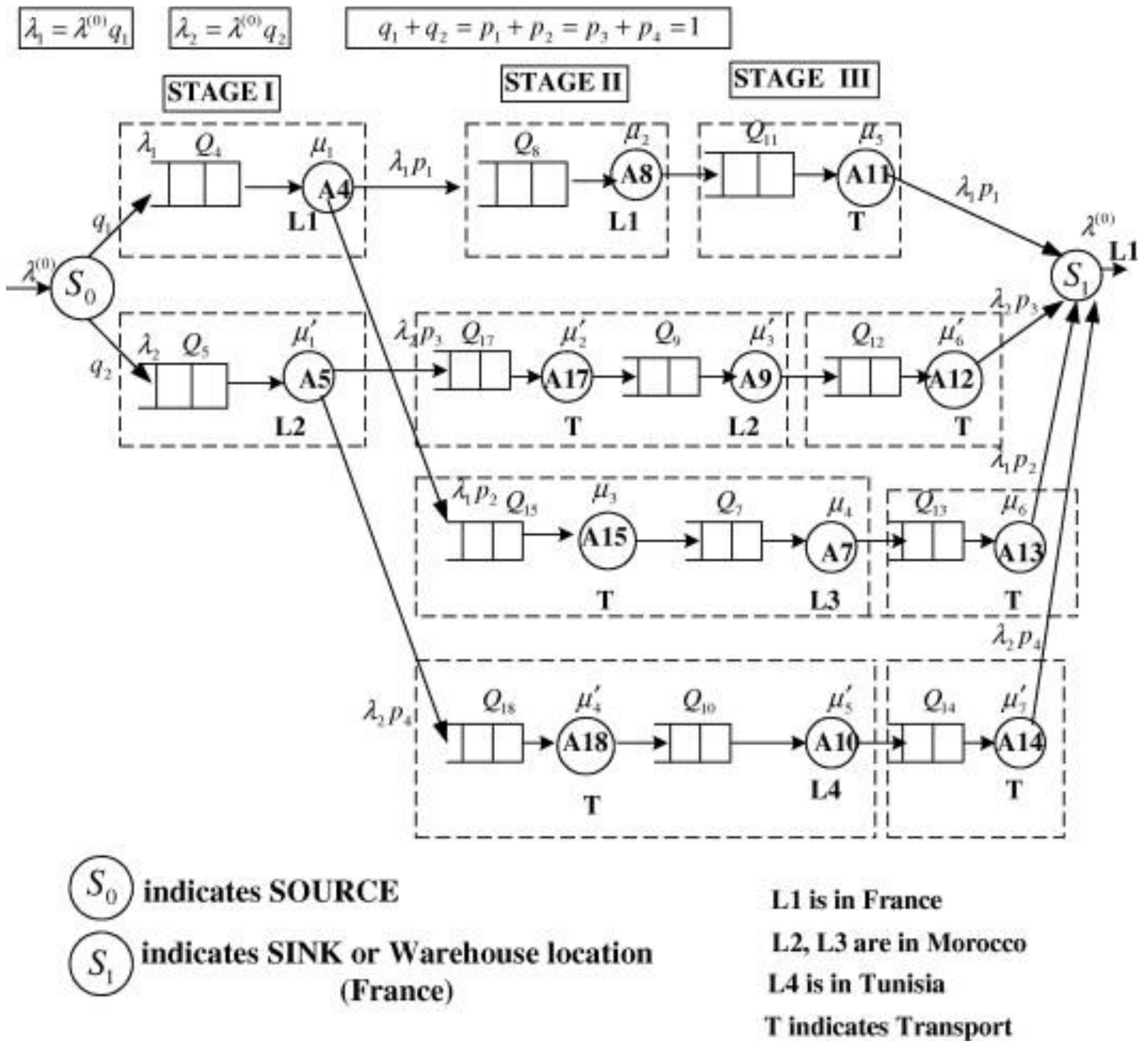
μ es la capacidad operativa total.

Dado que $\mu > \lambda$

Los clientes atendidos por hora son $\lambda = 35\ clientes/hora$

Caso: Supply Chain Modelling

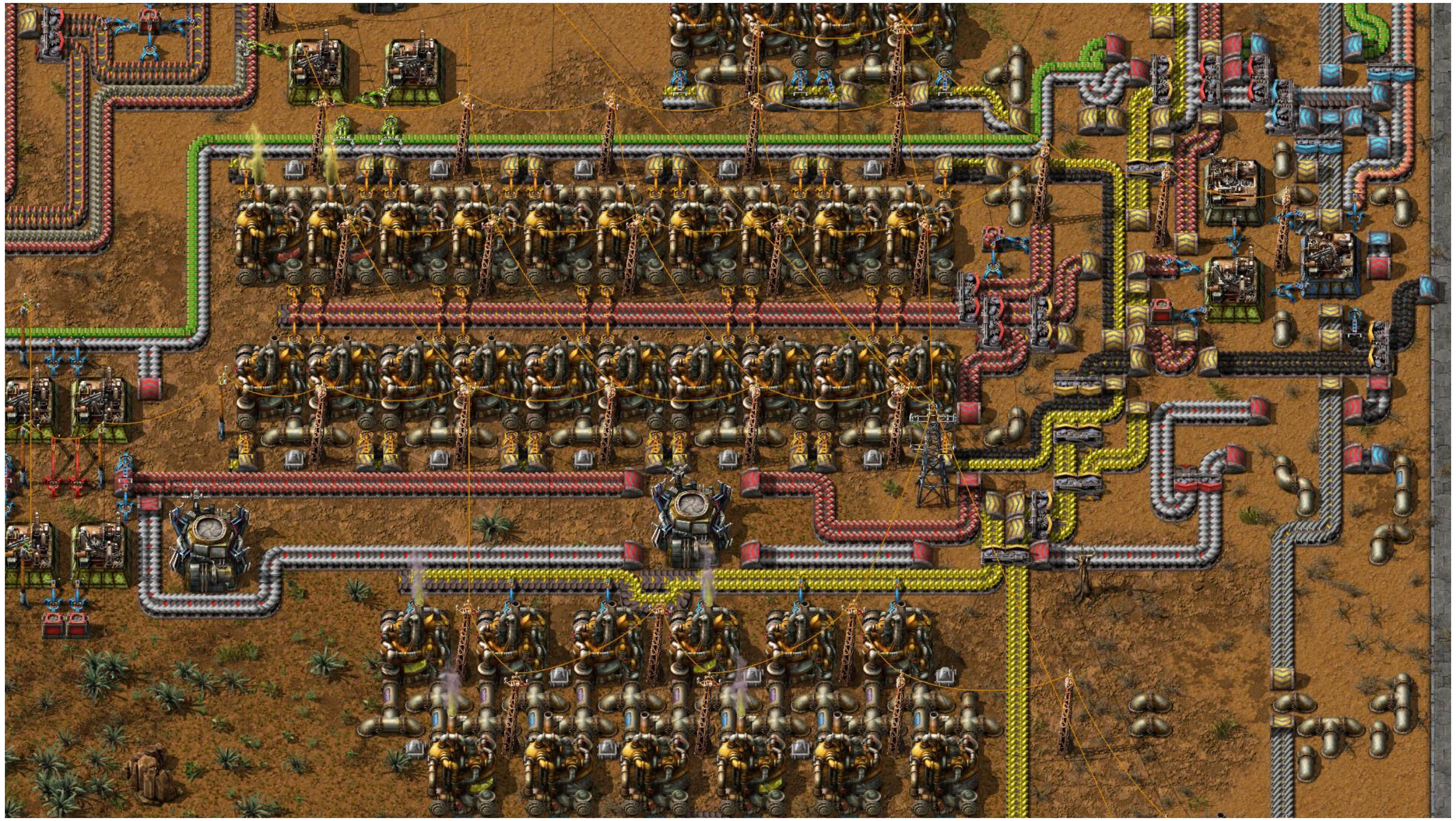
Fig. 1: Queuing formulation of the network of processes



- Modelización con red de filas de espera.
- Casos límite.
- Casos equivalentes.
- Medición de performance.

Fuente: Bahskar (2010) "Modeling a supply chain using a network of queues" (https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0307904X09003382#bib29)

Caso: Factorio (2020)



Fuente: *https://store.steampowered.com/app/427520/Factorio/?l=spanish*

- Asignación de recursos.
- Supply Chain.
- Optimización de redes logísticas.
- Balanceo de línea.

Little's Law in Factorio: https://johanneshoff.com/little-factorio/