



Cadenas de Markov

Ejercicio 07: mercado del café

Rodrigo Maranzana

Enunciado

En el mercado, existen tres marcas líderes de café: A, B, C. En marzo se hizo una encuesta en lo que entrevistó a las 8450 personas que compran café y los resultados fueron:

1. Si las compras se hacen mensualmente, ¿cuál será la distribución del mercado de café en el mes de junio?
2. A la larga, ¿cómo se distribuirán los clientes en las distintas marcas?
3. En junio, cual es la proporción de clientes leales a sus marcas?

Vector inicial p_0

| |
|----------------|
| Compra actual |
| Marca A = 1690 |
| Marca B = 3380 |
| Marca C = 3380 |
| TOTALES |

Compra en el siguiente mes Transición T

| Marca A | Marca B | Marca C |
|---------|---------|---------|
| 507 | 845 | 338 |
| 676 | 2028 | 676 |
| 845 | 845 | 1690 |
| 2028 | 3718 | 2704 |

TOTALES

| |
|-------------|
| 1690 |
| 3380 |
| 3380 |
| 8450 |

VALORES ABSOLUTOS

A probabilidad

Matriz de transición

$$p_0 = (p_a \quad p_b \quad p_c) = 1$$

$$T = \begin{bmatrix} p_{aa} & p_{ab} & p_{ac} \\ p_{ba} & p_{bb} & p_{bc} \\ p_{ca} & p_{cb} & p_{cc} \end{bmatrix} \begin{matrix} = 1 \\ = 1 \\ = 1 \end{matrix}$$

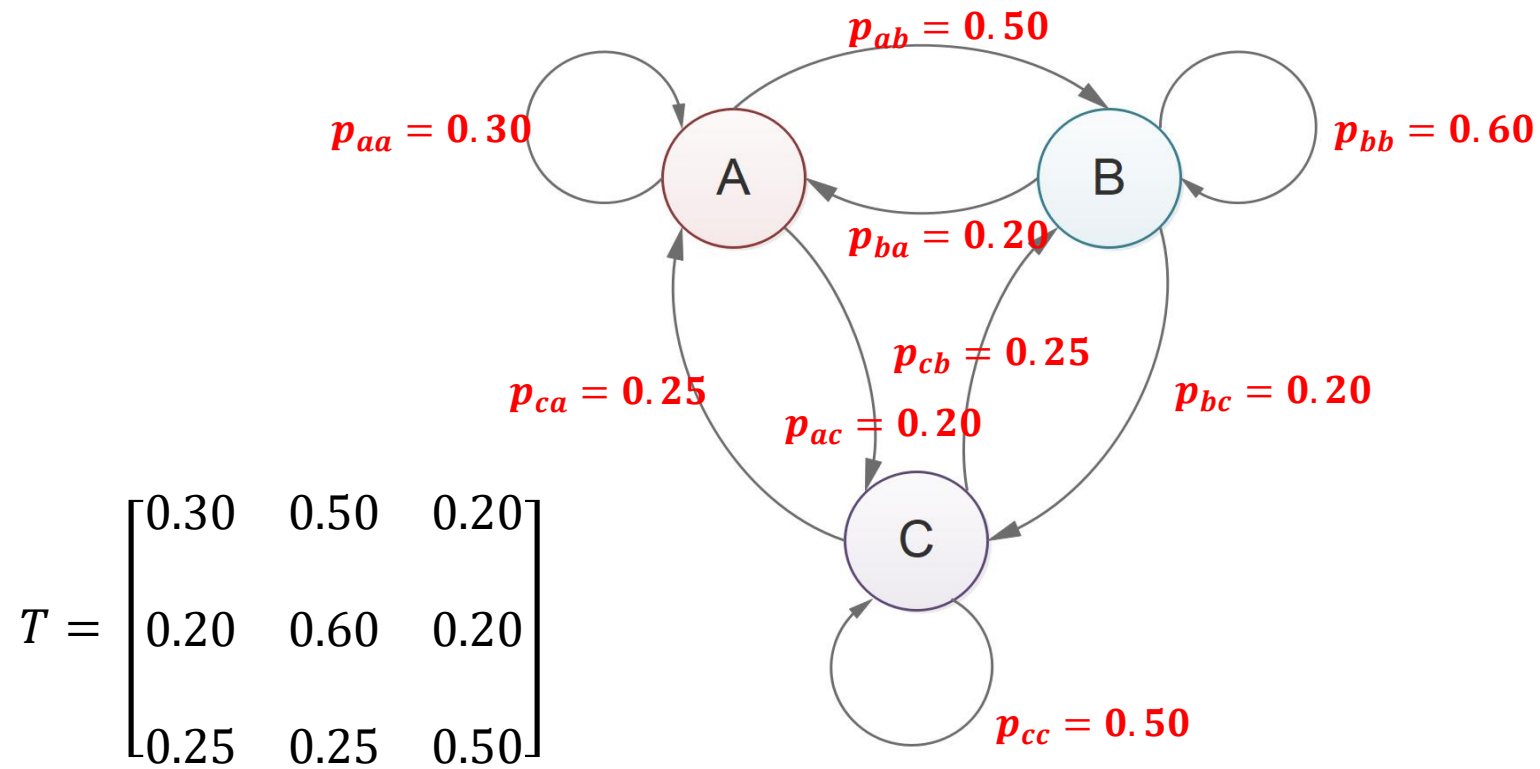
Matriz de transición

| Compra actual | Compra en el siguiente mes | | | TOTALES |
|----------------|----------------------------|---------|---------|-------------|
| | Marca A | Marca B | Marca C | |
| Marca A = 1690 | 507 | 845 | 338 | 1690 |
| Marca B = 3380 | 676 | 2028 | 676 | 3380 |
| Marca C = 3380 | 845 | 845 | 1690 | 3380 |
| TOTALES | 2028 | 3718 | 2704 | 8450 |

$$p_0 = \left(\frac{1690}{8450} \quad \frac{3380}{8450} \quad \frac{3380}{8450} \right) = (0.2 \quad 0.4 \quad 0.4)$$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{507}{1690} & \frac{845}{1690} & \frac{338}{1690} \\ \frac{676}{3380} & \frac{2028}{3380} & \frac{676}{3380} \\ \frac{845}{3380} & \frac{845}{3380} & \frac{1690}{3380} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}$$

Grafo



1- Distribución en Junio

$$T^3 = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}^3$$



$$T^3 = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix}$$

$$T^3 = \begin{bmatrix} 0.237 & 0.485 & 0.278 \\ 0.236 & 0.486 & 0.278 \\ 0.2425 & 0.4525 & 0.305 \end{bmatrix}$$

1- Distribución en Junio

$$p_3 = p_0 T^3$$

$$p_3 = (0.2 \quad 0.4 \quad 0.4) \times \begin{bmatrix} 0.237 & 0.485 & 0.278 \\ 0.236 & 0.486 & 0.278 \\ 0.2425 & 0.4525 & 0.305 \end{bmatrix}$$

$$p_3 = (0.2388 \quad 0.4724 \quad 0.2888)$$

2- Estado estable

$$\pi T = \pi$$
$$(\pi_A \quad \pi_B \quad \pi_C) \begin{bmatrix} 0.30 & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & 0.60 & 0.20 \\ 0.25 & 0.25 & 0.50 \end{bmatrix} = (\pi_A \quad \pi_B \quad \pi_C)$$

Sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} 0,30\pi_A + 0,20\pi_B + 0,25\pi_C &= \pi_A \\ 0,50\pi_A + 0,60\pi_B + 0,25\pi_C &= \pi_B \\ 0,20\pi_A + 0,20\pi_B + 0,50\pi_C &= \pi_C \end{aligned}$$

2- Estado estable

Despejamos:

$$-0,70\pi_A + 0,20\pi_B + 0,25\pi_C = 0$$

$$0,50\pi_A - 0,40\pi_B + 0,25\pi_C = 0$$

$$0,20\pi_A + 0,20\pi_B - 0,50\pi_C = 0$$

Forma matricial

$$\begin{bmatrix} -0,70 & 0,20 & 0,25 \\ 0,50 & -0,40 & 0,25 \\ 0,20 & 0,20 & -0,50 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \pi_A \\ \pi_B \\ \pi_C \end{bmatrix} = \bar{0}$$

Sistema Homogéneo

Det(Matriz) = 0

-> Compatible indeterminado

Fórmula adicional

$$\sum_i \pi_i = 1 \rightarrow \pi_a + \pi_b + \pi_c = 1$$

2- Estado estable

Sistema de ecuaciones a resolver:

$$-0,70\pi_A + 0,20\pi_B + 0,25\pi_C = 0$$

$$0,50\pi_A - 0,40\pi_B + 0,25\pi_C = 0$$

$$0,20\pi_A + 0,20\pi_B - 0,50\pi_C = 0$$

$$\pi_A + \pi_B + \pi_C = 1$$

Forma matricial

$$\begin{bmatrix} -0,70 & 0,20 & 0,25 \\ 0,50 & -0,40 & 0,25 \\ 0,20 & 0,20 & -0,50 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \pi_A \\ \pi_B \\ \pi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2- Estado estable

$$\pi T = \pi$$

$$\pi T - \pi = 0$$

$$\pi(T - I) = 0$$

$$(T^t - I)\pi = 0$$

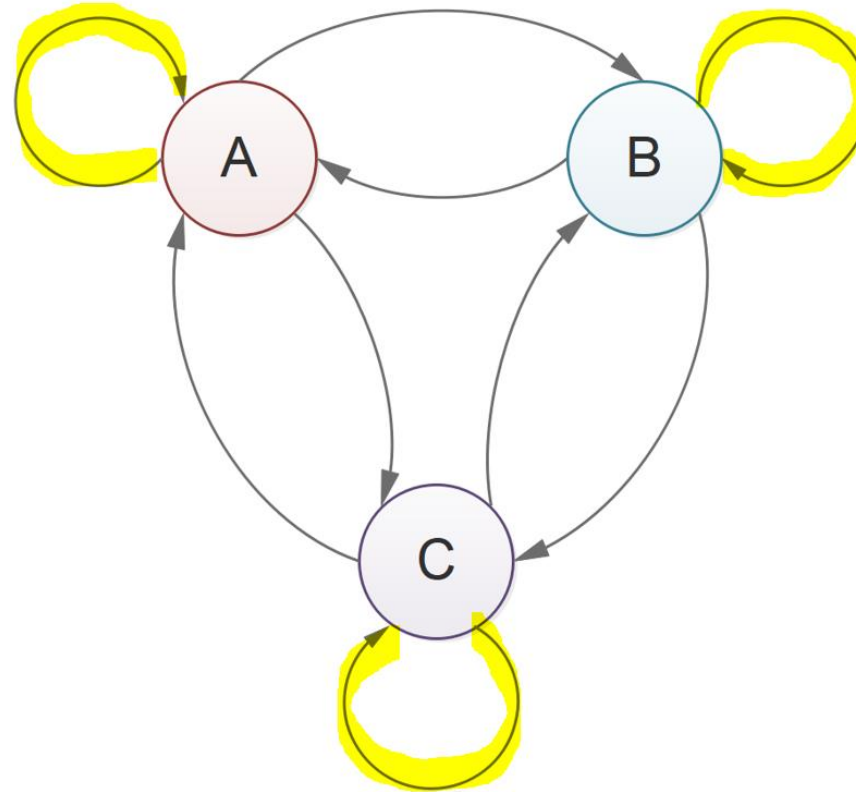
2- Estado estable

Resolvemos el Sistema y obtenemos el estado estable:

$$\pi = (0.238 \quad 0.476 \quad 0.285)$$

3- Clientes leales en Junio, simplificado

$$T^3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0.237} & 0.485 & 0.278 \\ 0.236 & \mathbf{0.486} & 0.278 \\ 0.2425 & 0.4525 & \mathbf{0.305} \end{bmatrix}$$



3- Clientes leales en Junio

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{0.30} & 0.50 & 0.20 \\ 0.20 & \mathbf{0.60} & 0.20 \\ 0.25 & 0.25 & \mathbf{0.50} \end{bmatrix}$$

$$\text{diag}(T) = \begin{bmatrix} \mathbf{0.30} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0.60} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0.50} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p_0 \text{ diag}(T)^3} = L_3 = (0.0054 \quad 0.0864 \quad 0.05)$$

Del total

