



Ejercicio: modelo de inventarios con restricción de espacio

Rodrigo Maranzana

Enunciado

Se desea conocer la cantidad óptima de pedido y el costo total esperado en la gestión de inventario de dos productos minoristas. Los productos compiten por el espacio en unidades de slots. Existen disponibles 150 slots.

	Producto 1	Producto 2
Costo unitario	30 \$/u	40 \$/u
Costo de alquiler variable (diario)	30 \$/(día*u)	30 \$/(día*u)
Costo administrativo de compra	100 \$/pedido	150 \$/pedido
Costo de calidad y recepción	200 \$/pedido	250 \$/pedido
Demanda anual	3000 u	4300 u
Superficie ocupada por el producto	10 slots	15 slots
Interés	10% anual	

Se trabaja 30 días al mes.

Enunciado

Parámetros:

	Producto 1	Producto 2
Costo unitario (b_j)	30 \$/u	40 \$/u
Costo administrativo de compra	100 \$/pedido	150 \$/pedido
Costo de calidad y recepción	200 \$/pedido	250 \$/pedido
Costo de pedido (k_j)	300 \$/pedido	400 \$/pedido
Demanda anual (D_j)	3000 u	4300 u
Costo de alquiler (ca_j)	30 \$/(día*u)	30 \$/(día*u)
	30 \$/(día*u) * 30 * 12 días/año	30 \$/(día*u) * 30 * 12 días/año
Costo fijo de almacenamiento (ca_j)	10.800 \$/u	10.800 \$/u
Superficie (s_j)	10 slots	15 slots
Interés (i)	10% anual	

Modelo EOQ multiproducto con restricción

Siendo:

- s_j : espacio necesario para almacenar el ítem j .
- S : espacio total en el almacén.

El modelo resulta:

$$\begin{aligned} \text{Min } \sum_j CTE(q_j) &= b_j \cdot D_j + k_j \cdot \frac{D_j}{q_j} + \frac{1}{2} \cdot q_j \cdot c_1 \\ \text{s.t. } \sum_j q_j s_j &\leq S \end{aligned}$$

$c_1 = b_j * i + ca_j$

“Minimizar el costo total de inventario sujeto a que cada ítem “j” compite en el mismo espacio total S”

Método del Lagrangiano en inventarios EOQ

Siendo:

- $f(q_j) = CTE(q_j)$
- $g(q_j) = \sum_j q_j s_j - S$

Si el modelo primal es:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & \sum_j f(q_j) \\ \text{st} & g(q_j) = 0 \end{array}$$

El modelo del Lagrangiano resulta:

$$\text{Max}_{\lambda} \text{Min}_{q_j} \sum_j f(q_j) + \lambda g(q_j) \quad \text{Penaliza (+) por el Min primal}$$
$$q_j \geq 0, \lambda \geq 0$$

Siendo λ multiplicadores de Lagrange.

Fórmulas modelo EOQ con restricciones

Funciones:

$$f(q_j) = b_j \cdot D_j + k_j \cdot \frac{D_j}{q_j} + \frac{1}{2} \cdot q_j \cdot c_1$$

$$g(q_j) = \sum_j q_j s_j - S$$

Lagrangiano:

$$L = \sum_j f(q_j) + \lambda g(q_j)$$

$$q_j \geq 0, \lambda \geq 0$$

Lote óptimo:

$$q_{opt_j} = \sqrt{\frac{2 \cdot D_j \cdot k_j}{c_1 + 2\lambda s_j}}$$

Costo Total Esperado:

$$CTE = \sum_j f(q_j)$$

Función f o CTE

$$f(q_j) = b_j \cdot D_j + k_j \cdot \frac{D_j}{q_j} + \frac{1}{2} \cdot q_j \cdot c_1$$

$$c_1 = b_j * i + ca_j$$

Producto 1, $f(q_1)$	Producto 2, $f(q_j)$
$30\$/u. 3000 u + 300 \$/p. \frac{3000 u}{q_1} + \frac{1}{2} \cdot (30 \$/u. 0,1 + 10800 \$/u) \cdot q_1$	$40\$/u. 4300 u + 400 \$/p. \frac{4300 u}{q_2} + \frac{1}{2} \cdot (40 \$/u. 0,1 + 10800 \$/u) \cdot q_2$
$f(q_1) = 90.000 \$ + \frac{900.000 \$ \cdot u}{q_1} + 5401,5 \$/u. q_1$	$f(q_2) = 172.000 \$ + \frac{1.720.000 \$ \cdot u}{q_2} + 7202 \$/u. q_2$
$CTE = f(q_1) + f(q_2)$	

	Producto 1	Producto 2
Costo unitario (b_j)	30 \$/u	40 \$/u
Costo de pedido (k_j)	300 \$/pedido	400 \$/pedido
Demanda anual (D_j)	3000 u	4300 u
Costo fijo de almacenamiento (ca_j)	10.800 \$/u	10.800 \$/u
Superficie (s_j)	10 slots	15 slots
Interés (i)	10% anual	

Función g

$$g(q_j) = \sum_j q_j s_j - S$$
$$g(q_1, q_2) = q_1 \cdot 10 + q_2 \cdot 15 - 150$$

Además, sabemos que: $\nabla L(q_1, q_2) = g(q_1, q_2)$

	Producto 1	Producto 2
Costo unitario (b_j)	30 \$/u	40 \$/u
Costo de pedido (k_j)	300 \$/pedido	400 \$/pedido
Demanda anual (D_j)	3000 u	4300 u
Costo fijo de almacenamiento (ca_j)	10.800 \$/u	10.800 \$/u
Superficie (s_j)	10 slots	15 slots
Interés (i)	10% anual	

Lagrangiano

Siendo:

- $f(q_1) = 90.000 \$ + \frac{900.000 \$ \cdot u}{q_1} + 5401,5 \$/u \cdot q_1$
- $f(q_2) = 172.000 \$ + \frac{1.720.000 \$ \cdot u}{q_2} + 7202 \$/u \cdot q_2$
- $\sum_j f(q_j) = f(q_1) + f(q_2)$
- $\sum_j f(q_j) = \left[90.000 \$ + \frac{900.000 \$ \cdot u}{q_1} + 5401,5 \$/u \cdot q_1 \right] + \left[172.000 \$ + \frac{1.720.000 \$ \cdot u}{q_2} + 7202 \$/u \cdot q_2 \right]$

$$\sum_j f(q_j) = 262.000 \$ + \frac{900.000 \$ \cdot u}{q_1} + 5401,5 \$/u \cdot q_1 + \frac{1.720.000 \$ \cdot u}{q_2} + 7202 \$/u \cdot q_2$$

$$g(q_1, q_2) = q_1 \cdot 10 + q_2 \cdot 15 - 150$$

Lagrangiano

Siendo:

- $\sum_j f(q_j) = 262.000 \$ + \frac{2.620.000 \$ \cdot u}{q_1} + 12.603 \$/u \cdot q_1$
- $g(q_1, q_2) = q_1 \cdot 10 + q_2 \cdot 15 - 150$

El Lagrangiano resulta:

$$L = \sum_j f(q_j) + \lambda g(q_j)$$

$$L = 262.000 \$ + \frac{900.000 \$ \cdot u}{q_1} + 5401,5 \$/u \cdot q_1 + \frac{1.720.000 \$ \cdot u}{q_2} + 7202 \$/u \cdot q_2 + \lambda [q_1 \cdot 10 + q_2 \cdot 15 - 150]$$

Lote económico

$$q_{opt_j} = \sqrt{\frac{2 \cdot D_j \cdot k_j}{c_1 + 2\lambda s_j}} \quad c_1 = b_j * i + ca_j$$

Producto 1, q_{opt_1}	Producto 2, q_{opt_2}
$\sqrt{\frac{2.3000u \cdot 300 \$/p}{(30 \$/u \cdot 0,1 + 10800 \$/u) + 2\lambda 10slots}}$	$\sqrt{\frac{2.4300u \cdot 400 \$/p}{(40 \$/u \cdot 0,1 + 10800 \$/u) + 2\lambda 15slots}}$
$q_{opt_1} = \sqrt{\frac{1.800.000}{10.803 + 20\lambda}} u$	$q_{opt_2} = \sqrt{\frac{3.440.000}{14.404 + 30\lambda}} u$

	Producto 1	Producto 2
Costo unitario (b_j)	30 \$/u	40 \$/u
Costo de pedido (k_j)	300 \$/pedido	400 \$/pedido
Demanda anual (D_j)	3000 u	4300 u
Costo fijo de almacenamiento (ca_j)	10.800 \$/u	10.800 \$/u
Superficie (s_j)	10 slots	15 slots
Interés (i)	10% anual	

Resumen

Fórmula	
$CTE = \sum_j f(q_1, q_2)$	$262.000 \$ + \frac{900.000 \$ \cdot u}{q_1} + 5401,5 \$/u \cdot q_1 \$ + \frac{1.720.000 \$ \cdot u}{q_2} + 7202 \$/u \cdot q_2$
$\nabla L(q_1, q_2) = g(q_1, q_2)$	$q_1 \cdot 10 + q_2 \cdot 15 - 150$
$L(q_1, q_2, \lambda)$	$262.000 \$ + \frac{900.000 \$ \cdot u}{q_1} + 5401,5 \$/u \cdot q_1 \$ + \frac{1.720.000 \$ \cdot u}{q_2} + 7202 \$/u \cdot q_2 + \lambda[q_1 \cdot 10 + q_2 \cdot 15 - 150]$
q_{opt_j}	$q_{opt_1} = \sqrt{\frac{1.800.000}{10.803 + 20\lambda}} u$
	$q_{opt_2} = \sqrt{\frac{3.440.000}{14.404 + 30\lambda}} u$

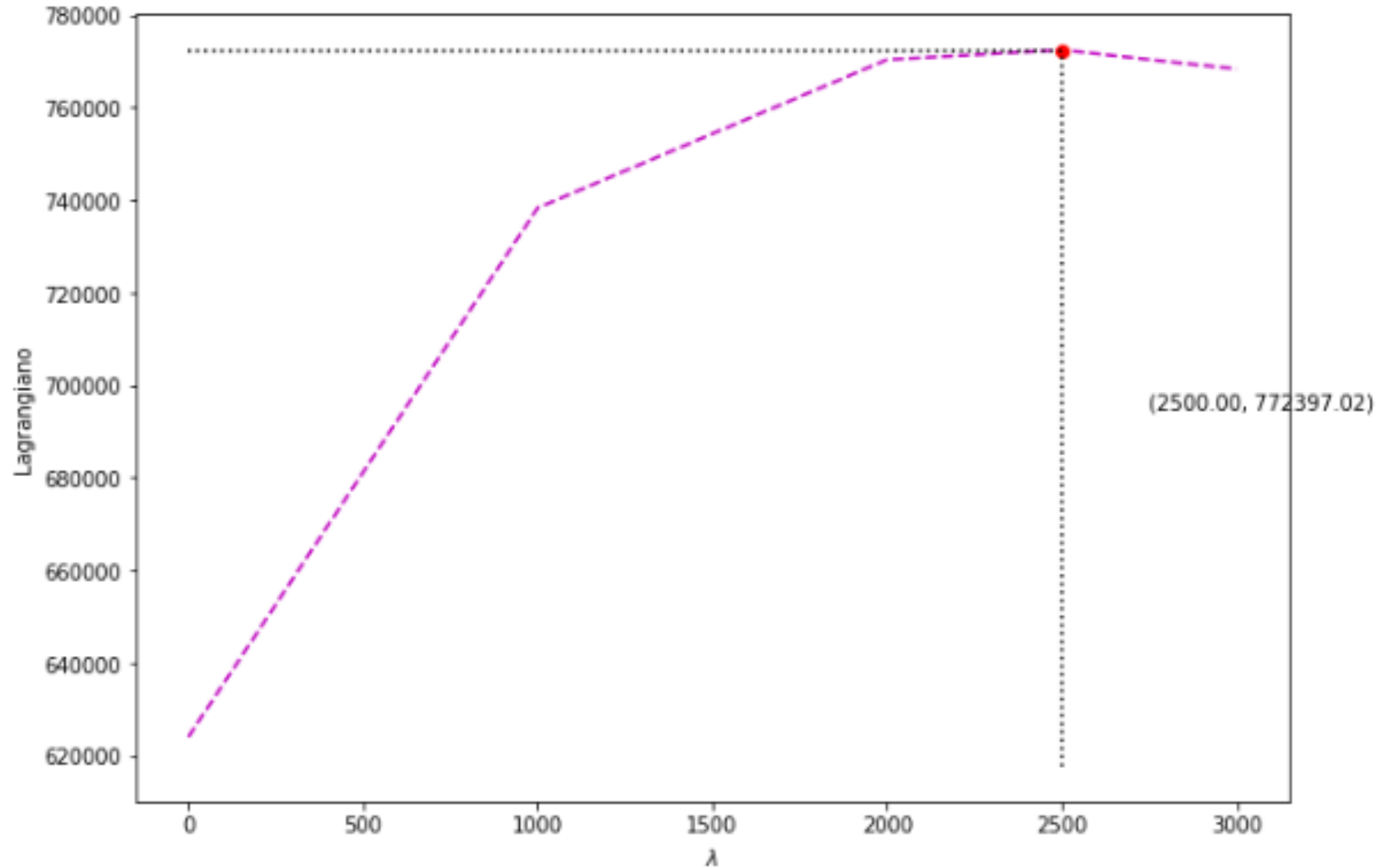
Búsqueda de λ^* con Grid Search

- Pseudocódigo:
- Creamos un vector de lambdas $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$
- Para cada λ_i :
 - Calculamos el óptimo q_i
 - Construimos el vector de óptimos $Q = [q_1, q_2, \dots, q_m]$
 - Calculamos g y f
 - Calculamos $L(\lambda_i)$ para el lambda actual.
 - Guardamos $L(\lambda_i)$ en un vector de soluciones $Lvector$
- Buscamos el máximo $L(\lambda_i)$ en $Lvector$

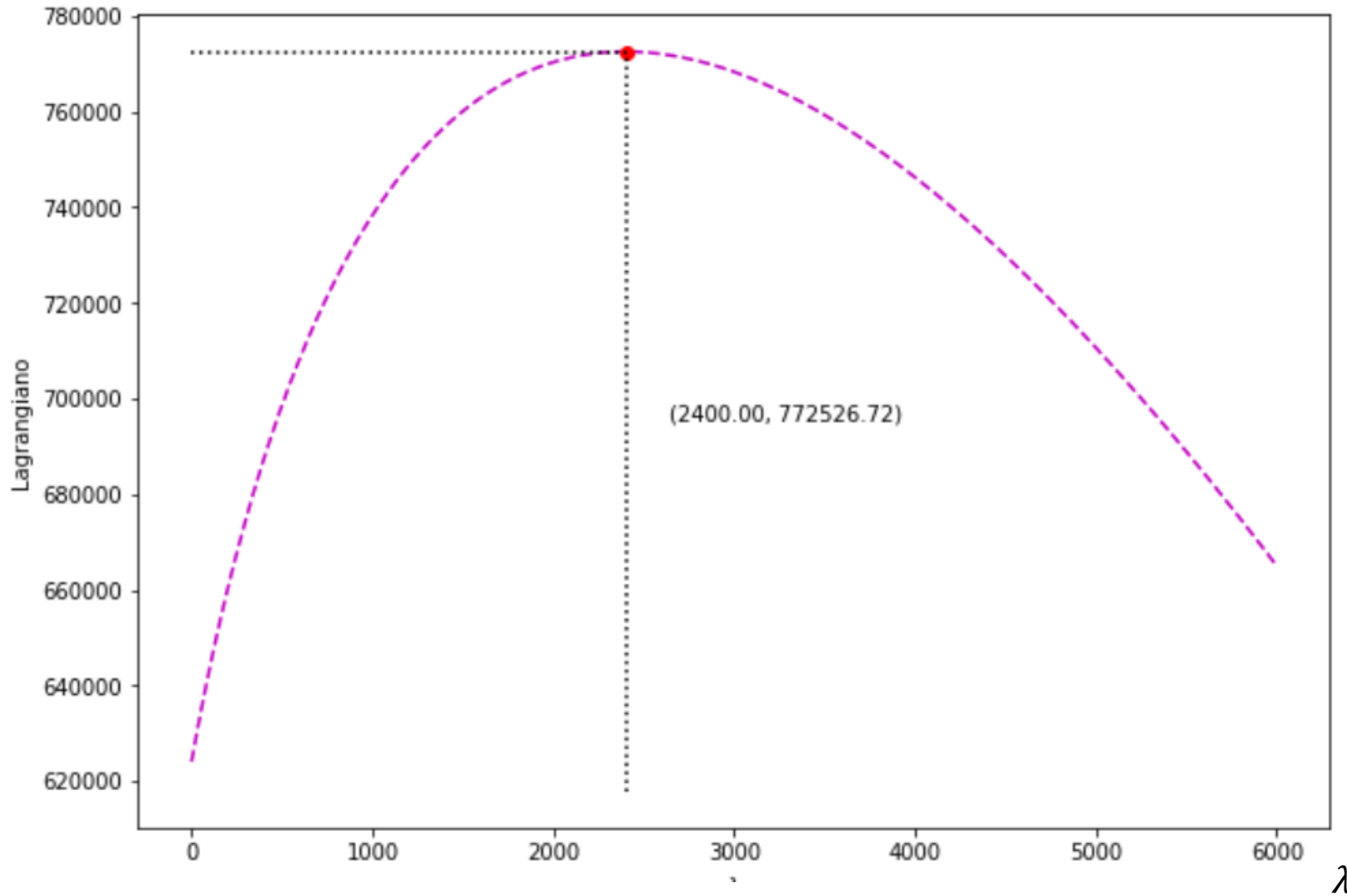
	λ	$\sum f$	g	L
λ_0	0	624.044,51	210,89	624.044,52
λ_1	1.000	679.831,26	58,47	738.300,61
λ_2	2.000	747.279,40	11,51	770.314,18
λ_3	2.500	778.761,63	-2,54	772.397,02
λ_4	3.000	808.718,15	-13,47	768.286,00

$$\lambda_3 = 2.500 \approx \lambda^*$$

Búsqueda de λ^* con Grid Search



Búsqueda de λ^* con Grid Search



RESULTADOS:

El lambda óptimo es: 2400.00

Las cantidades óptimas son: 5.53, 6.31

El CTE óptimo es: 772591.03

600 valores de λ

Búsqueda de λ^* con Método del Gradiente

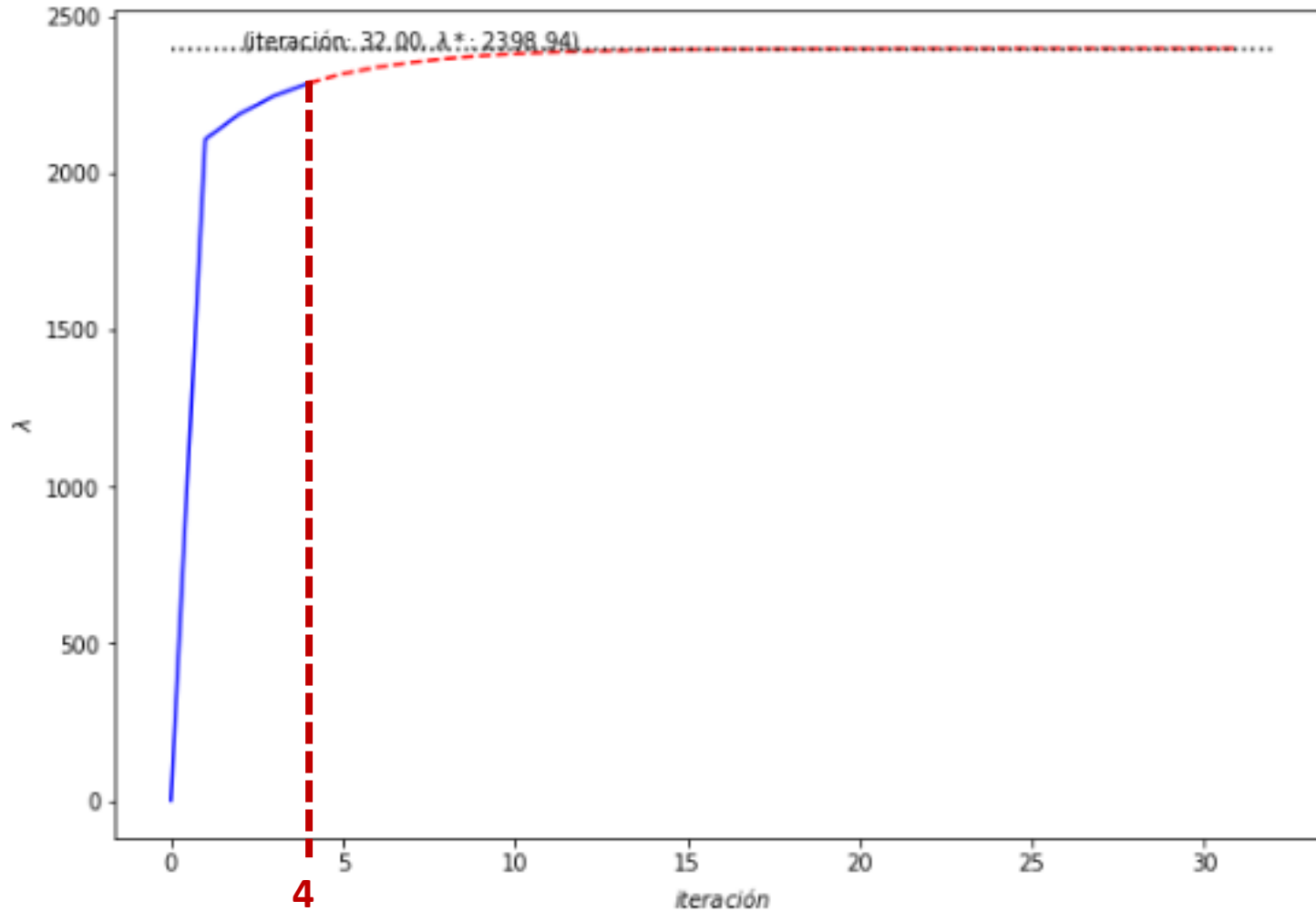
Pseudocódigo:

- Inicializar λ_0
- Calcular $L(\lambda)$
- Calcular $\nabla L(\lambda)$
- Actualizar λ : $\lambda_{i+1} = \lambda_i + step * \nabla L(\lambda)$
- Calcular $\Delta\lambda = |\lambda_{i+1} - \lambda_i|$
- Revisar si $\Delta\lambda > tol$, continuar; sino parar.

step=10

	λ	$\sum f$	$g = \nabla f$	L
λ_0	0	624.044,51	210,89	624.044,52
λ_1	2.108,90	754.271,45	8,11	771.381,06
λ_2	2.190,02	759.431,19	5,71	771.941,14
λ_3	2.247,15	763.038,87	4,09	772.220,75
λ_4	2.288,01	765.606,78	2,95	772.364,48

Búsqueda de λ^* con Método del Gradiente



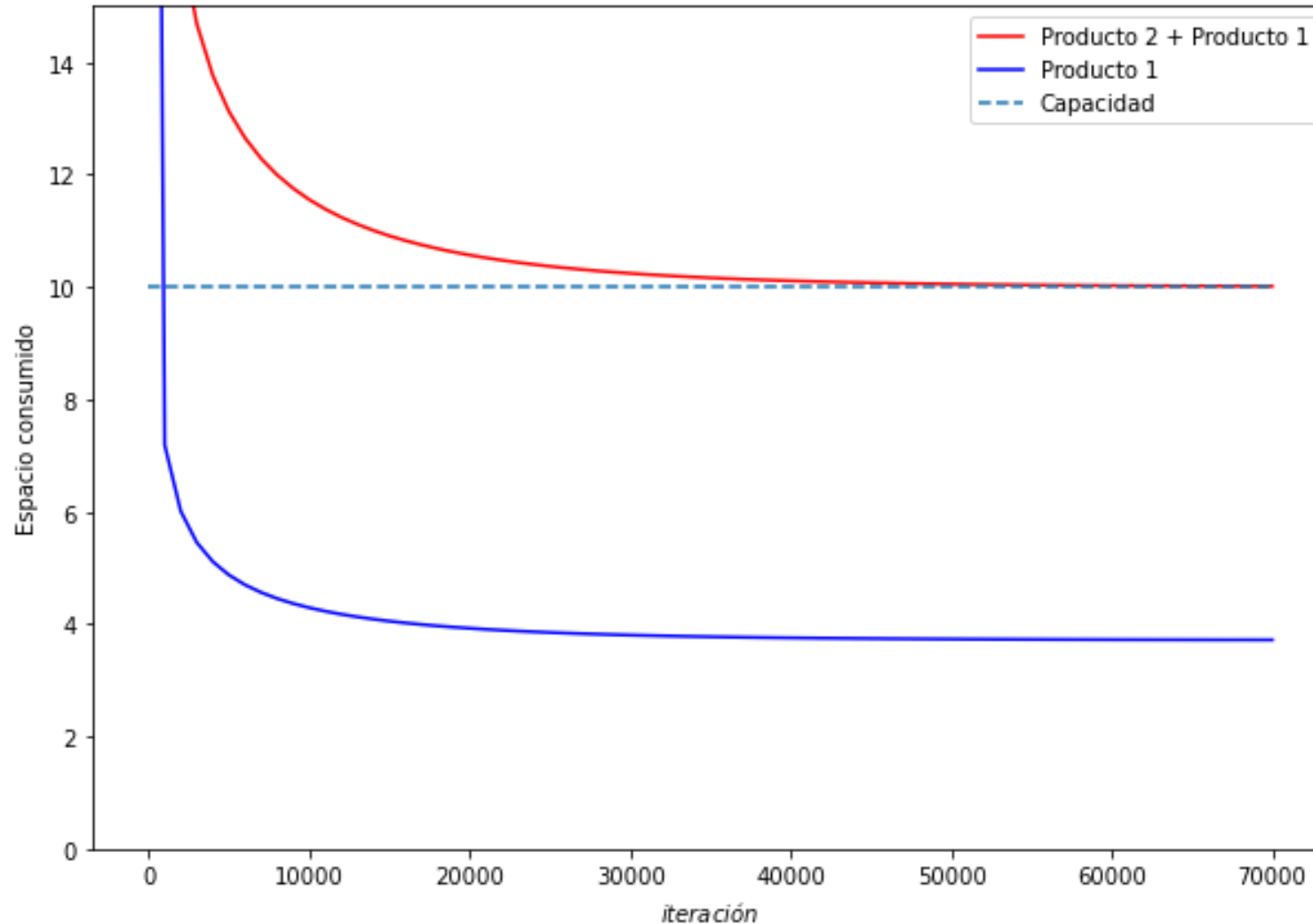
RESULTADOS:

El lambda óptimo es: 2398.94

Las cantidades óptimas son: 5.53, 6.31

El CTE óptimo es: 772524.68

Búsqueda de λ^* con Método del Gradiente



Podemos ver el efecto del método del Lagrangiano, buscando con dualidad débil y llegando a la fuerte.