# Modelo de Flujo de Mínimo Costo: Transporte

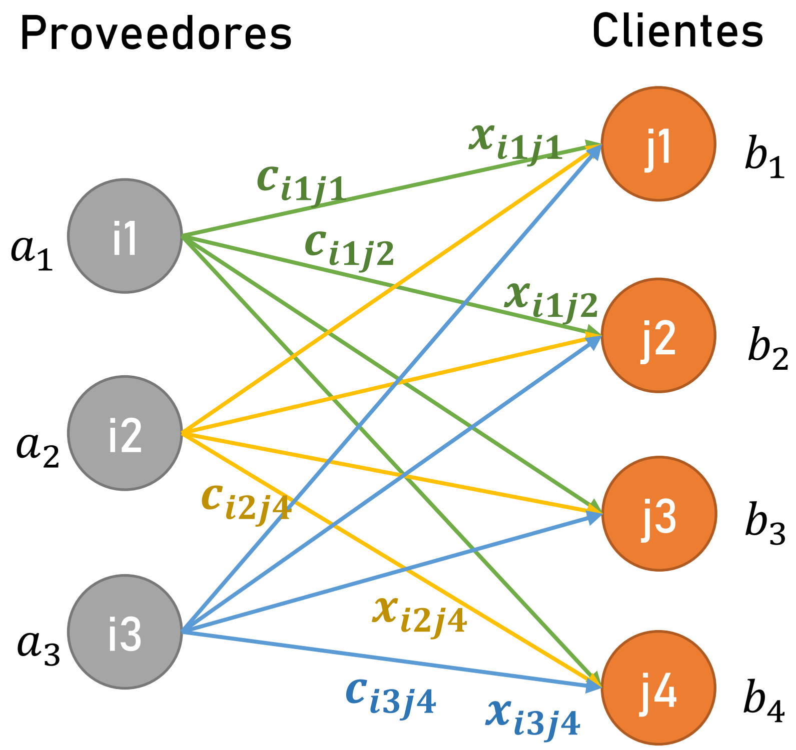
Rodrigo Maranzana

# Transporte como FMC

El problema de transporte tiene como objetivo enviar producto desde nodos oferentes hacia nodos demandantes.

- Existe un costo generalmente asociado a la distancia entre oferentes y demandantes.
- La oferta y la demanda son conocidas.
- El problema puede ser balanceado o desbalanceado.
  - Balanceado: oferta iguala a la demanda.

# Grafo asociado y componentes




Conjuntos (sets)

$i$: nodos oferentes

$j$: nodos demandantes

Parámetros

$b_i$: demanda

$a_i$: oferta

$c_{ij}$: costo del arco de i a j

Variables de decisión

$x_{ij}$: cantidad de producto a enviar de i a j

# Representación tabular

Tabla de costos

| | destino 1 | destino 2 | destino 3 | | destino m |
|---|---|---|---|---|---|
| origen 1 | $c_{11}$ | $c_{12}$ | $c_{13}$ | … | $c_{1m}$ |
| origen 2 | $c_{21}$ | $c_{22}$ | $c_{23}$ | … | $c_{2m}$ |
| origen 3 | $c_{31}$ | $c_{32}$ | $c_{33}$ | … | $c_{3m}$ |
| … | … | … | … | … | … |
| origen n | $c_{n1}$ | $c_{n2}$ | $c_{n3}$ | … | $c_{nm}$ |

Tabla de cantidades a enviar

| | destino 1 | destino 2 | destino 3 | | destino m | oferta |
|---|---|---|---|---|---|---|
| origen 1 | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | … | $x_{1m}$ | $a_1$ |
| origen 2 | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | … | $x_{2m}$ | $a_2$ |
| origen 3 | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | … | $x_{3m}$ | $a_3$ |
| … | … | … | … | … | … | … |
| origen n | $x_{n1}$ | $x_{n2}$ | $x_{n3}$ | … | $x_{nm}$ | $a_n$ |
| | | | | | | $\sum a_i$ (oferta total) |
| **demanda** | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | | $b_m$ | $\sum b_i$ (demanda total) |

# Ejemplo

3 plantas productoras y 4 puntos de almacenamiento


## Plantas productoras:

- Parque industrial “La Cantábrica”
- Mini Parque industrial Vergara
- Parque industrial Pilar

## Almacenamiento:

- Villa Martelli
- Parque Patricios
- Flores
- Ciudadela

# Ejemplo

Tabla de costos

| origen / destino | Villa Martelli | Parque Patricios | Flores | Ciudadela |
|---|---|---|---|---|
| Parque industrial “La Cantábrica” | 434 | 523 | 640 | 850 |
| Mini Parque industrial Vergara | 323 | 480 | 670 | 770 |
| Parque industrial Pilar | 997 | 680 | 390 | 590 |

Tabla de cantidades a enviar

| | Villa Martelli | Parque Patricios | Flores | Ciudadela | oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| Parque industrial “La Cantábrica” | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{1m}$ | 75 |
| Mini Parque industrial Vergara | $x_{21}$ | $x_{22}$ | $x_{23}$ | $x_{2m}$ | 100 |
| Parque industrial Pilar | $x_{31}$ | $x_{32}$ | $x_{33}$ | $x_{3m}$ | 125 |
| | | | | | total oferta: 300 |
| demanda | 80 | 70 | 70 | 80 | total demanda: 300 |

# Modelo de optimización: transporte balanceado

$$Min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

$$\sum_j x_{ij} = a_i \qquad \forall i$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j \qquad \forall j$$

$$x \geq 0; \; x \epsilon \mathbb{R}$$

Conjuntos (sets)

$i$: nodos oferentes

$j$: nodos demandantes

Parámetros

$b_j$: demanda

$a_i$: oferta

$c_{ij}$: costo del arco de i a j

Variables de decisión

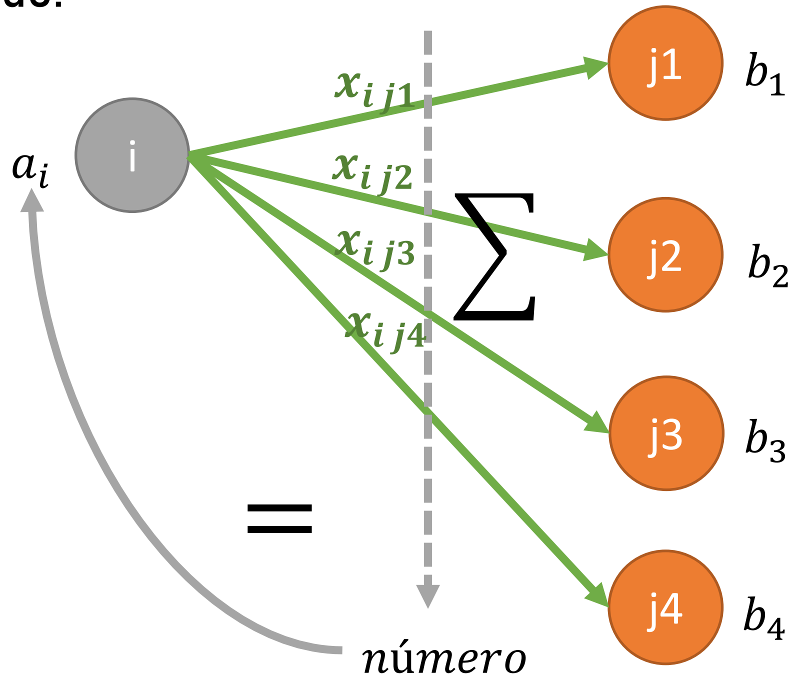
$x_{ij}$: cantidad de producto a enviar de i a j

# Modelo de optimización

Oferta de un proveedor "i" se coloca completamente en el mercado:

$$\sum_{j} x_{ij} = a_i \qquad \forall i$$

"Suma de salidas del nodo i"

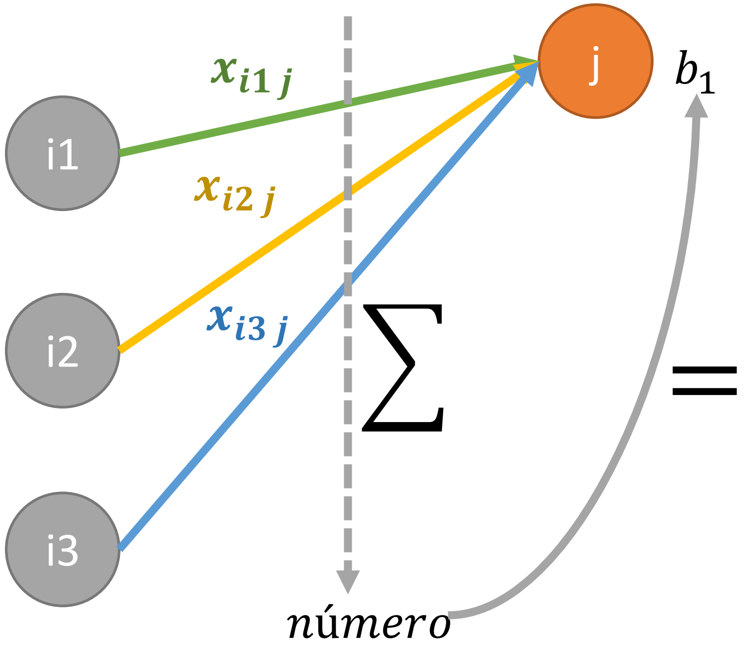


# Modelo de optimización

Demanda de un “j” cliente se satisface completamente en el mercado:

$$\sum_i x_{ij} = b_j \qquad \forall j$$

“Suma de llegadas al nodo j”



# Modelo general de Flujo de Mínimo Costo

$$Min \sum_{i} \sum_{j} X_{ij} d_{ij}$$

st:

$$b_i = \sum_{j,\ \ ij \subset A} X_{ij} - \sum_{j,\ \ ji \subset A} X_{ji} \quad ; \forall i$$

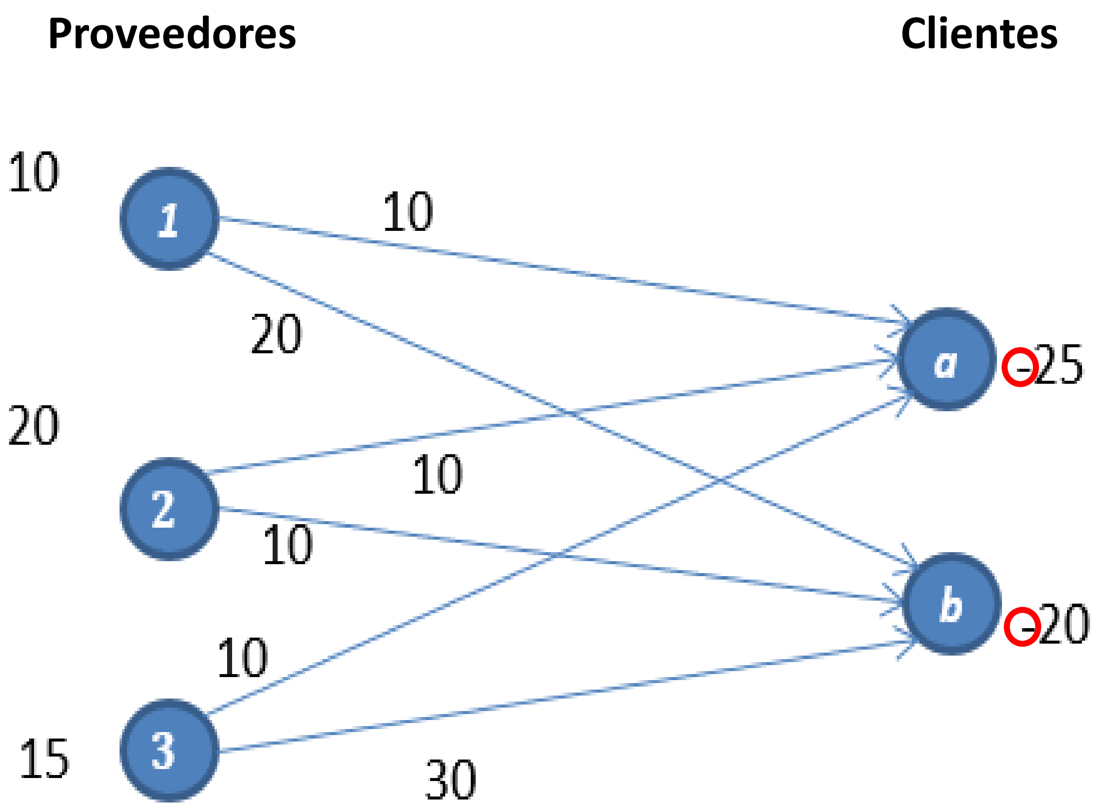
$$Min\ C^T X$$

st:

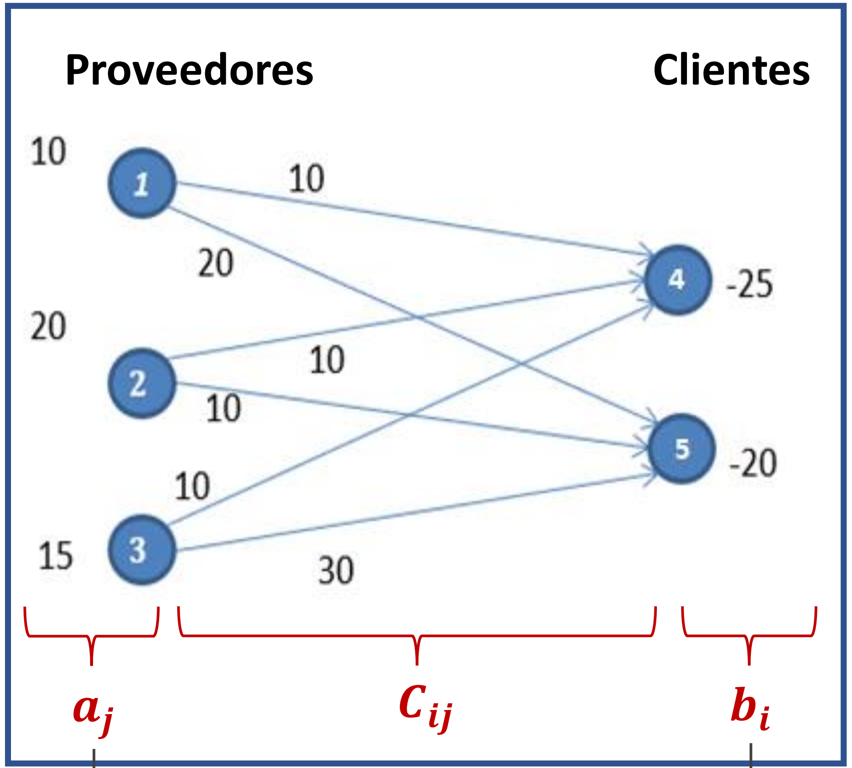
$$AX = b$$

$$\text{cota inferior} \leq X \leq cota\ superior$$

# Ejemplo



# Flujo de Mínimo Costo algebraico




*Consideramos oferta y demanda como $b_i$ para un set compuesto solo por "i"*

$$Min \sum_i \sum_j X_{ij} d_{ij}$$

$$\boldsymbol{Min \quad 10x_{14} + 20x_{15} + 10x_{24} + 10x_{25} + 10x_{34} + 30x_{35}}$$

$$b_i = \sum_{j,\ ij \subset A} X_{ij} - \sum_{j,\ ji \subset A} X_{ji} \quad ; \forall i$$

$$\boldsymbol{x_{14} + x_{15} = 10} \qquad \boldsymbol{-(x_{14} + x_{24} + x_{34}) = -25}$$

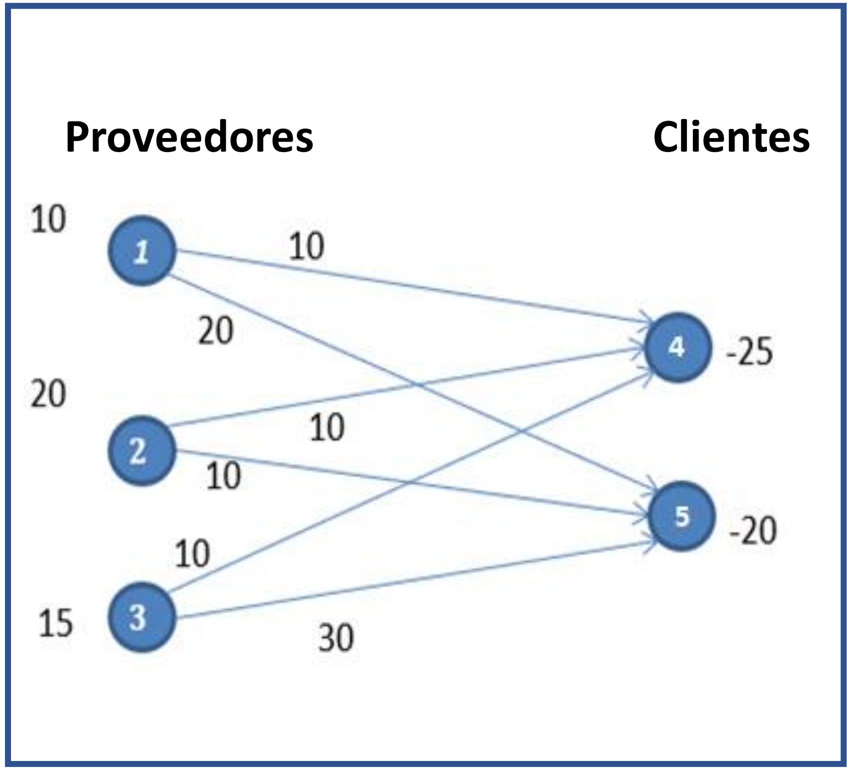
$$\boldsymbol{x_{24} + x_{25} = 20} \qquad \boldsymbol{-(x_{15} + x_{25} + x_{35}) = -20}$$

$$\boldsymbol{x_{34} + x_{35} = 15}$$

$$cota\ inferior \leq X \leq cota\ superior$$

$$\boldsymbol{x_{14}, x_{15}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{35} \geq 0}$$

# Flujo de Mínimo Costo matricial




$$\text{Min } C^T X$$

st:

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 10 & 10 & 10 & 30 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \\ -25 \\ -20 \end{bmatrix}$$

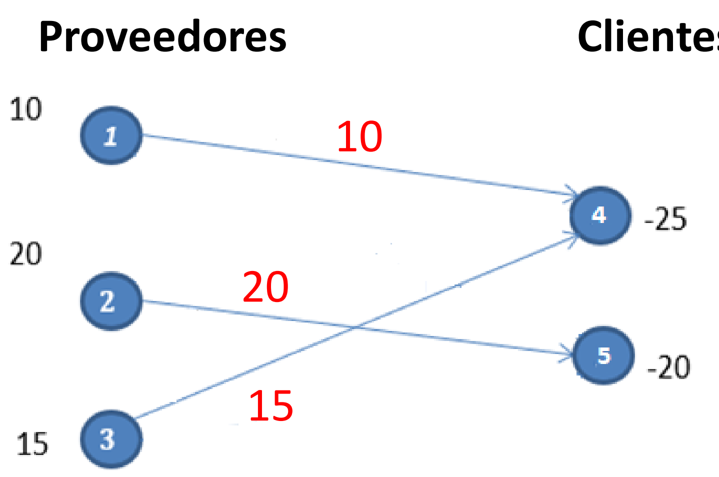
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# Solución con scipy.optimize.linprog

```python
import numpy as np
from scipy.optimize import linprog

# Matriz de adyacencia
Aeq = np.array([[ 1, 1, 0, 0, 0, 0],
                [ 0, 0, 1, 1, 0, 0],
                [ 0, 0, 0, 0, 1, 1],
                [-1, 0,-1, 0,-1, 0],
                [ 0,-1, 0,-1, 0,-1]])

# Vector de costos por arco:
C = np.array([10, 20, 15, 10, 10, 30])

# Vector de oferta y demanda:
beq = np.array([10, 20, 15, -25, -20])

# Cotas:
bounds = tuple([(0, None) for arcs in range(0, C.shape[0])])
```

```python
# OPTIMIZE:
res = linprog(C, A_eq=Aeq, b_eq=beq, bounds=bounds)
```

```
>> Cantidad para cada arco: [10.  0.  0. 20. 15.  0.]
>> Costo mínimo total: 450.0
```



# Transporte desbalanceado (1)

## Caso: La oferta supera a la demanda, $\sum_i a_i \geq \sum_j b_j$

$$Min \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

s.t.

Se permite tener oferta sin colocar

$$\sum_j x_{ij} \leq a_i \qquad \forall i$$

$$\sum_i x_{ij} = b_j \qquad \forall j$$

$$x \geq 0;\ x \epsilon \mathbb{R}$$

Conjuntos (sets)

$i$: nodos oferentes

$j$: nodos demandantes

Parámetros

$b_i$: demanda

$a_i$: oferta

$c_{ij}$: costo del arco de i a j

Variables de decisión

$x_{ij}$: cantidad de producto a enviar de i a j

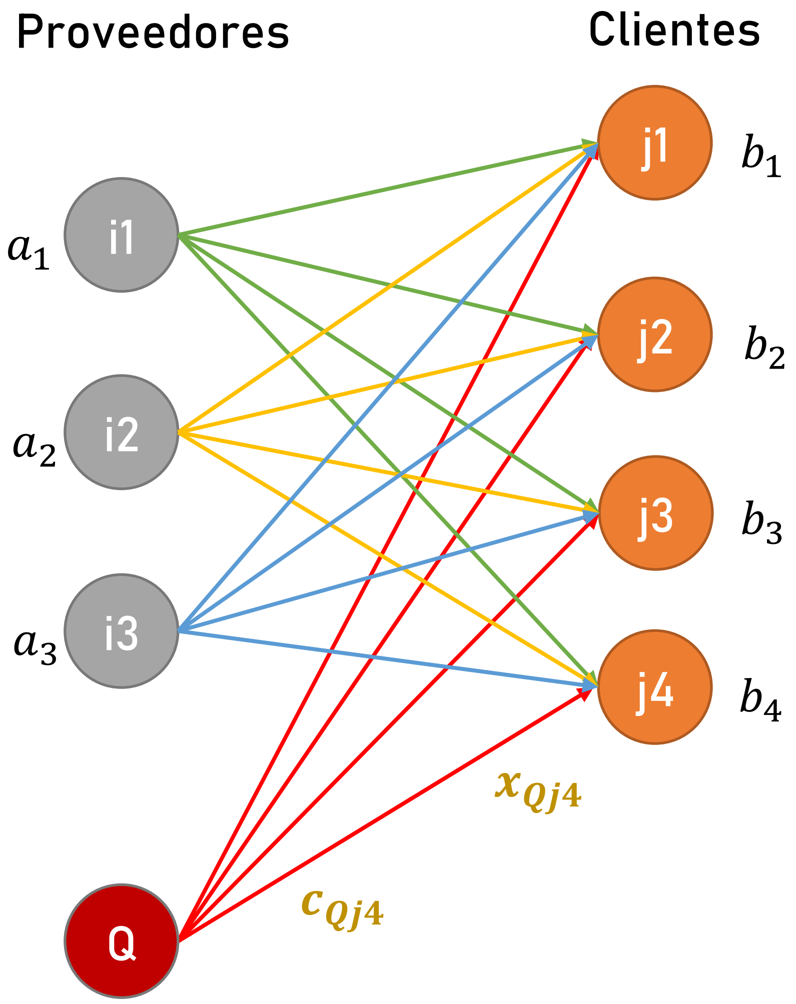
# Transporte desbalanceado (2)

## Caso: La demanda supera a la oferta, $\sum_i a_i \leq \sum_j b_j$

El modelo es el mismo, agregamos un proveedor adicional, que representa el quiebre de stock.

El costo asociado al quiebre de stock suele ser elevado.

Además de su uso en desbalanceo, se puede agregar como toma de decisiones entre enviar de "i" a "j" o quebrar stock.



# ¿Cómo afecta el desbalanceo a FMC?

Caso (1) oferta mayor a demanda, se dividen las restricciones:

- Restricciones de = para nodos de demanda.
- Restricciones de <= para nodos de oferta.

$$Min\ C^T X$$

st:

$$AX \leq b$$

$$A_{eq}X = b_{eq}$$

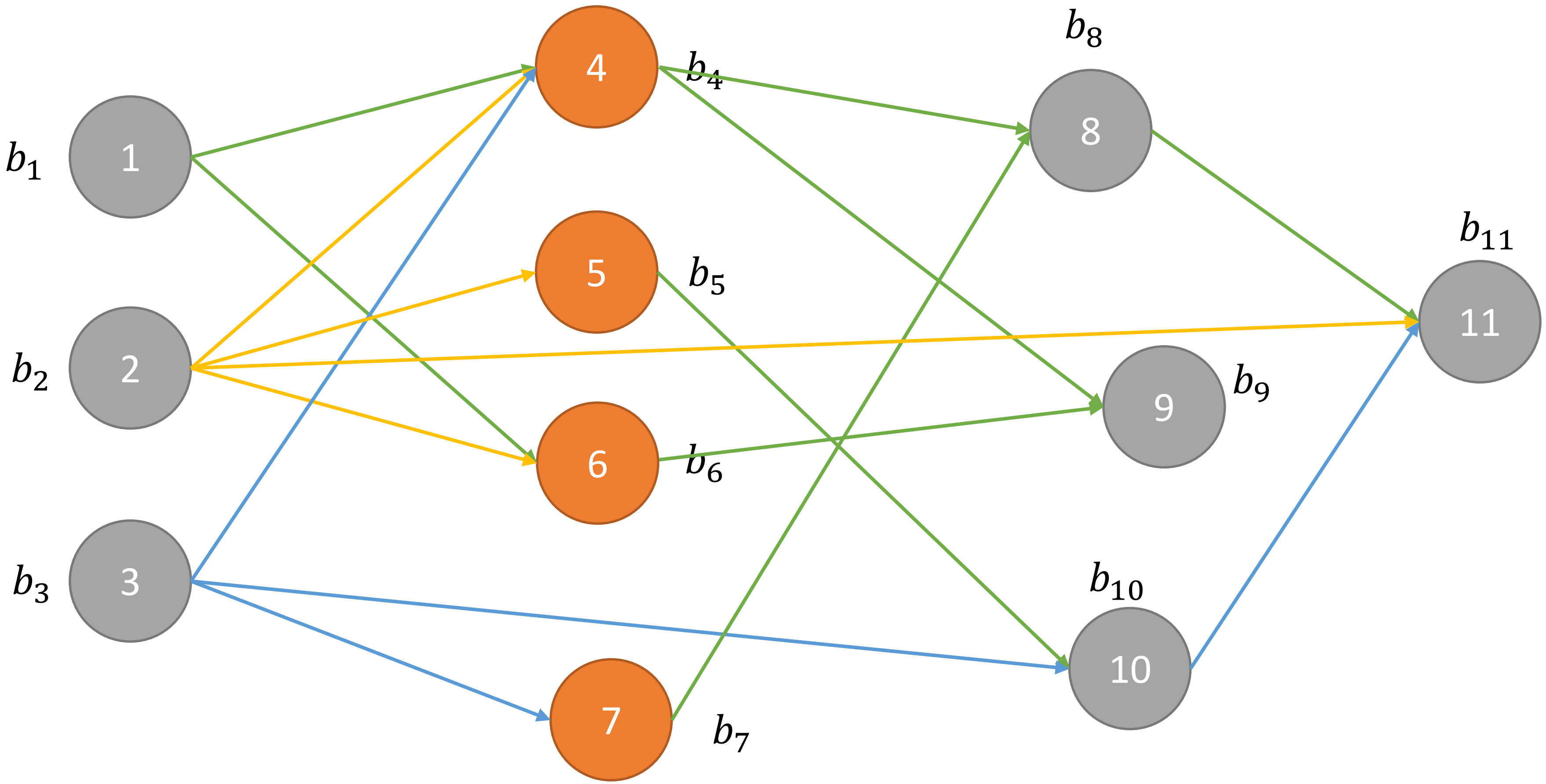
$$X \geq 0$$

Caso (2) demanda mayor a oferta, solo se agrega un nodo de quiebre.

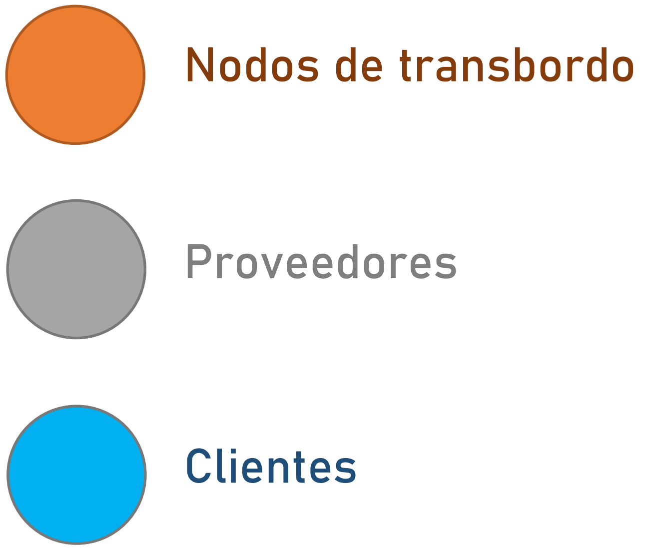
# Generalización: optimización de supply chain

Podemos complejizar el grafo como necesitemos:

- Nodos intermedios de transbordo (transshipment)
- Stock intermedio.
- Cadena logística de múltiples niveles.
- Más de un producto.



# Caso particular de cadena logística: transshipment



Los nodos de transbordo tienen siempre stock 0,

Todo lo que ingresa, sale del nodo.

$$A_{eq}X = b_{eq} = 0$$