Cadenas de Markov
Ejercicio 03: el agente comercial

Rodrigo Maranzana

Enunciado

Un agente comercial realiza un circuito entre tres ciudades A, B y C.

Al recibir un pedido en una ciudad, se dirige a la misma, en donde pasa el resto del día. Si recibe una orden de traslado, la ejecuta al día siguiente.

Si se encuentra en la ciudad C, la probabilidad de tener que seguir trabajando en ella es del 0,4, viajar a B es de 0,4.

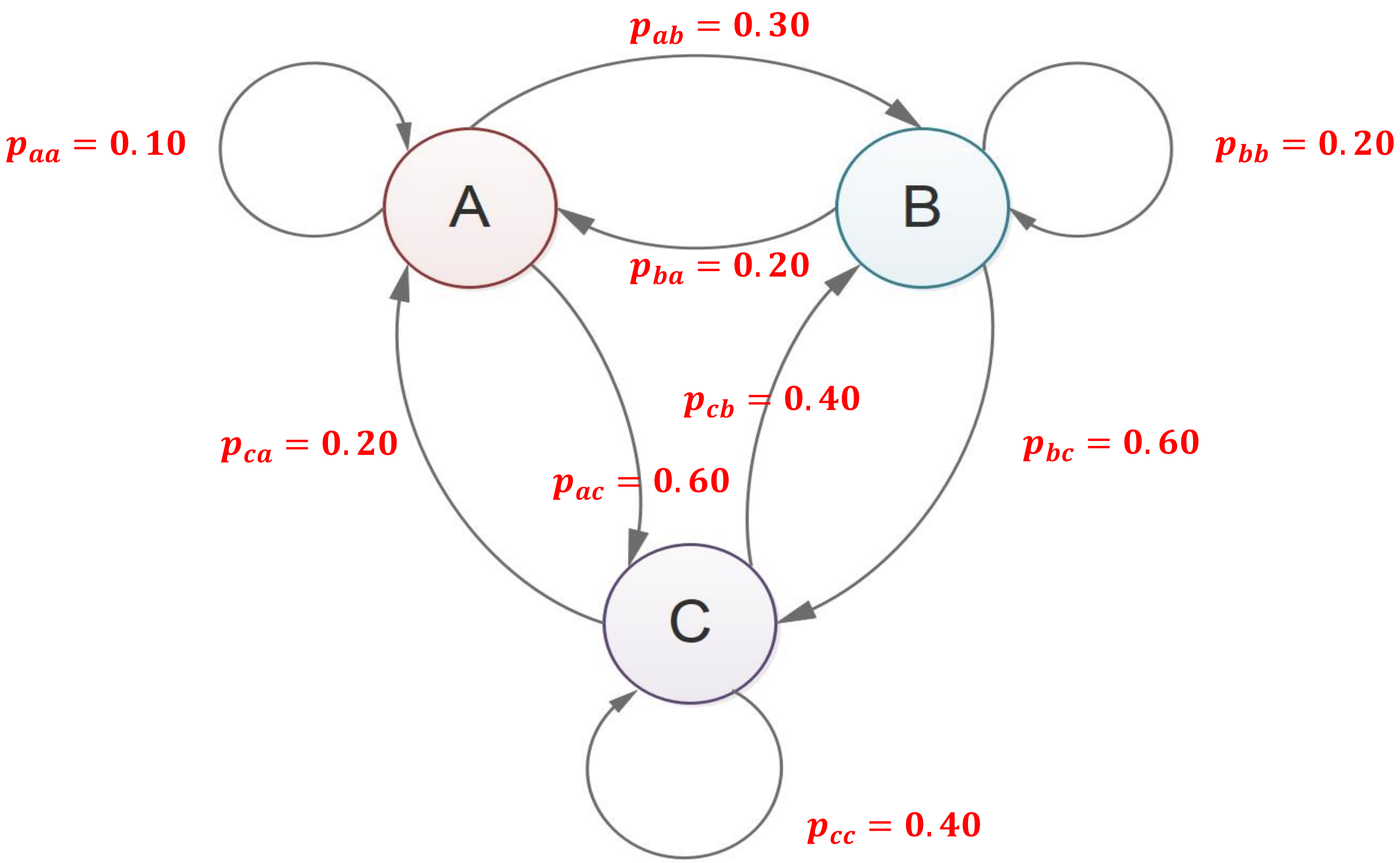
Si el viajante se encuentra en B, existe un 20% de probabilidad que se quede. Por otro lado, viajará a C con un 60% de probabilidad.

Si el viajante trabajó en A, se quedará en esa ciudad un 10% de los casos, irá a C con una probabilidad de 0,6.

Se pide:

1. Modelizar el proceso mediante una Cadena de Markov. Construir el grafo.
2. Construir la Matriz de transición.
3. Si hoy está en C ¿cuál es la probabilidad de trabajar en C en 4 días?
4. ¿Qué porcentaje de días el agente está en cada una de las ciudades?

1- Grafo

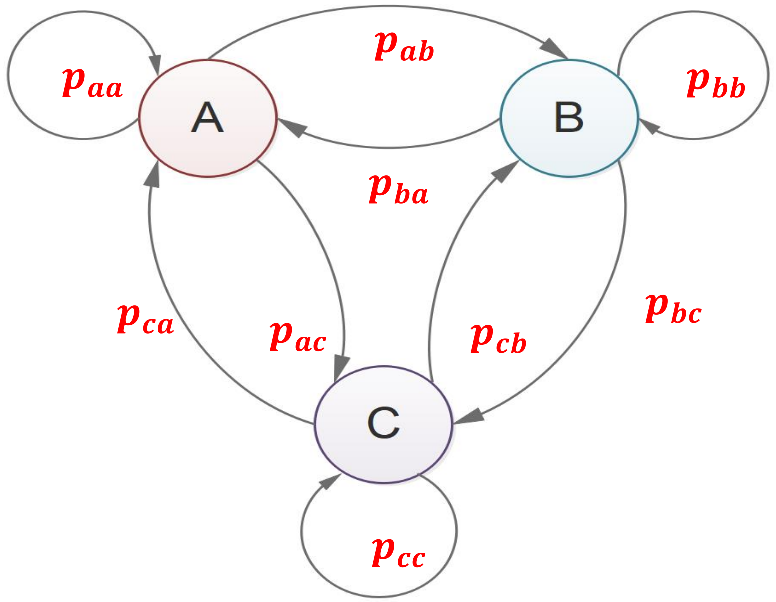

$p_{ab} = 0.30$
$p_{aa} = 0.10$
A
B
$p_{bb} = 0.20$
$p_{ba} = 0.20$
$p_{cb} = 0.40$
$p_{ca} = 0.20$
$p_{bc} = 0.60$
$p_{ac} = 0.60$
C
$p_{cc} = 0.40$

2- Matriz de transición

$$T = \begin{bmatrix} p_{aa} & p_{ab} & p_{ac} \\ p_{ba} & p_{bb} & p_{bc} \\ p_{ca} & p_{cb} & p_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix} \begin{matrix} = 1 \\ = 1 \\ = 1 \end{matrix}$$

Intuición matemática en iteraciones

$$p_{aa}^2 = p_{aa} * p_{aa} + p_{ab} * p_{ba} + p_{ac} * p_{ca}$$
$$p_{ab}^2 = p_{aa} * p_{ab} + p_{ab} * p_{bb} + p_{ac} * p_{cb}$$



Intuición matemática en iteraciones

$$p_{aa}^2 = p_{aa} * p_{aa} + p_{ab} * p_{ba} + p_{ac} * p_{ca}$$

$$T^2 = \begin{bmatrix} \boxed{p_{aa} \quad p_{ab} \quad p_{ac}} \\ p_{ba} \quad p_{bb} \quad p_{bc} \\ p_{ca} \quad p_{cb} \quad p_{cc} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p_{aa} & p_{ab} & p_{ac} \\ p_{ba} & p_{bb} & p_{bc} \\ p_{ca} & p_{cb} & p_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{p_{aa}^2} & p_{ab}^2 & p_{ac}^2 \\ p_{ba}^2 & p_{bb}^2 & p_{bc}^2 \\ p_{ca}^2 & p_{cb}^2 & p_{cc}^2 \end{bmatrix}$$

$$p_{aa}^2 = p_{aa} * p_{aa} + p_{ab} * p_{ba} + p_{ac} * p_{ca}$$

3- Probabilidad de estar en C en 4 días dado C hoy

$$T^4 = \begin{bmatrix} 0{,}1819 & 0{,}3189 & 0{,}4992 \\ 0{,}1818 & 0{,}3190 & 0{,}4992 \\ 0{,}1818 & 0{,}3174 & \boxed{0{,}5008} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p_{cc}^4}$$

$$\boldsymbol{p_0 T^4 = p_4} \rightarrow (p_a \quad p_b \quad p_c) \times T^4$$

$$\boldsymbol{p_4} = (0 \quad 0 \quad 1) \times T^4$$

$$\boldsymbol{p_4} = (0{,}1818 \quad 0{,}3174 \quad \boxed{0{,}5008})$$

Estado estable

$$\boldsymbol{\pi}\mathrm{T} = \boldsymbol{\pi}$$

$$(\pi_A \quad \pi_B \quad \pi_C)\begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,6 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix} = (\pi_A \quad \pi_B \quad \pi_C)$$

Sistema de ecuaciones lineales:

$$0,1\pi_A + 0,2\pi_B + 0,2\pi_C = \pi_A$$
$$0,3\pi_A + 0,2\pi_B + 0,4\pi_C = \pi_B$$
$$0,6\pi_A + 0,6\pi_B + 0,4\pi_C = \pi_C$$

4- Cálculo del estado estable

Despejamos:

$$-0,9\pi_A + 0,2\pi_B + 0,2\pi_C = 0$$
$$0,3\pi_A - 0,8\pi_B + 0,4\pi_C = 0$$
$$0,6\pi_A + 0,6\pi_B - 0,6\pi_C = 0$$

Forma matricial

$$\begin{bmatrix} -0,9 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & -0,8 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 & -0,6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \pi_A \\ \pi_B \\ \pi_C \end{bmatrix} = \bar{0}$$

Sistema Homogéneo
Det(Matriz) = 0
-> Compatible indeterminado

Fórmula adicional

$$\sum_i \pi_i = 1 \rightarrow \pi_a + \pi_b + \pi_c = 1$$

4- Cálculo del estado estable

Sistema de ecuaciones a resolver:

$$-0,9\pi_A + 0,2\pi_B + 0,2\pi_C = 0$$
$$0,3\pi_A - 0,8\pi_B + 0,4\pi_C = 0$$
$$0,6\pi_A + 0,6\pi_B - 0,6\pi_C = 0$$
$$\pi_A + \pi_B + \pi_C = 1$$

Forma matricial

$$\begin{bmatrix} -0,9 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & -0,8 & 0,4 \\ 0,6 & 0,6 & -0,6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \pi_A \\ \pi_B \\ \pi_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4- Cálculo del estado estable

A) $-0,9\pi_A + 0,2\pi_B + 0,2\pi_C = 0$
B) $0,3\pi_A - 0,8\pi_B + 0,4\pi_C = 0$
C) $0,6\pi_A + 0,6\pi_B - 0,6\pi_C = 0$
D) $\pi_A + \pi_B + \pi_C = 1$

Resolvemos el Sistema y obtenemos el estado estable:

$$\pi_A = 0,18$$
$$\pi_B = 0,32$$
$$\pi_C = 0,50$$