Ejercicio: modelo de inventarios con restricción de espacio

Rodrigo Maranzana

Enunciado

Se desea conocer la cantidad óptima de pedido y el costo total esperado en la gestión de inventario de dos productos minoristas. Los productos compiten por el espacio en unidades de slots. Existen disponibles 150 slots.

	Producto 1	Producto 2
Costo unitario	30 $/u	40 $/u
Costo de alquiler variable (diario)	30 $/(día*u)	30 $/(día*u)
Costo administrativo de compra	100 $/pedido	150 $/pedido
Costo de calidad y recepción	200 $/pedido	250 $/pedido
Demanda anual	3000 u	4300 u
Superficie ocupada por el producto	10 slots	15 slots
Interés	10% anual	

Se trabaja 30 días al mes.

Enunciado

Parámetros:

	Producto 1	Producto 2
Costo unitario (b_j)	**30 $/u**	**40 $/u**
Costo administrativo de compra	100 $/pedido	150 $/pedido
Costo de calidad y recepción	200 $/pedido	250 $/pedido
Costo de pedido (k_j)	**300 $/pedido**	**400 $/pedido**
Demanda anual (D_j)	**3000 u**	**4300 u**
Costo de alquiler (ca_j)	30 $/(día*u)	30 $/(día*u)
	30 $/(día*u) * 30 * 12 días/año	30 $/(día*u) * 30 * 12 días/año
Costo fijo de almacenamiento (ca_j)	**10.800 $/u**	**10.800 $/u**
Superficie (s_j)	**10 slots**	**15 slots**
Interés (i)	**10% anual**	

Modelo EOQ multiproducto con restricción

Siendo:

- s_i: espacio necesario para almacenar el ítem i.
- S: espacio total en el almacén.

El modelo resulta:

$c_1 = b_j * i + ca_j$

$$Min \sum_{j} CTE(q_j) = b_j . D_j + k_j . \frac{D_j}{q_j} + \frac{1}{2} . q_j . c_1$$

$$s.t. \quad \sum_{j} q_j s_j \leq S$$

“Minimizar el costo total de inventario sujeto a que cada ítem “j” compite en el mismo espacio total S”

Método del Lagrangiano en inventarios EOQ

Siendo:

- $f(q_j) = CTE(q_j)$
- $g(q_j) = \sum_j q_j s_j - S$

Si el modelo primal es:

$$Min \sum_j f(q_j)$$
$$st \quad g(q_j) = 0$$

El modelo del Lagrangiano resulta:

Penaliza (+) por el Min primal

$$Max_{\boldsymbol{\lambda}}\, Min_{q_j} \sum_j f(q_j) + \boldsymbol{\lambda}\, g(q_j)$$
$$q_j \geq 0, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$$

Siendo λ multiplicadores de Lagrange.

Fórmulas modelo EOQ con restricciones

Funciones:

$$f(q_j) = b_j . D_j + k_j . \frac{D_j}{q_j} + \frac{1}{2} . q_j . c_1$$

$$g(q_j) = \sum_j q_j s_j - S$$

Lagrangiano:

$$L = \sum_j f(q_j) + \lambda g(q_j)$$

$$q_j \geq 0, \lambda \geq 0$$

Lote óptimo:

$$q_{opt_j} = \sqrt{\frac{2.D_j.k_j}{c_1 + 2\lambda s_j}}$$

Costo Total Esperado:

$$CTE = f(q_j)$$

Función f o CTE

$$f(q_j) = b_j . D_j + k_j . \frac{D_j}{q_j} + \frac{1}{2} . q_j . c_1$$

$$c_1 = b_j * i + ca_j$$

Producto 1, $f(q_1)$	Producto 2, $f(q_j)$
$30\$/u. 3000\ u + 300\ \$/p. \frac{3000\ u}{q_1} + \frac{1}{2}.(30\ \$/u. 0{,}1 + 10800\ \$/u). q_1$	$40\$/u. 4300\ u + 400\ \$/p. \frac{4300\ u}{q_2} + \frac{1}{2}.(40\ \$/u. 0{,}1 + 10800\ \$/u). q_2$
$f(q_1) = 90.000\ \$ + \frac{900.000\ \$.u}{q_1} + 5401{,}5\ \$/u. q_1$	$f(q_2) = 172.000\ \$ + \frac{1.720.000\ \$.u}{q_2} + 7202\ \$/u. q_2$
$CTE = f(q_1) + f(q_2)$	

	Producto 1	Producto 2
Costo unitario (b_j)	30 $/u	40 $/u
Costo de pedido (k_j)	300 $/pedido	400 $/pedido
Demanda anual (D_j)	3000 u	4300 u
Costo fijo de almacenamiento (ca_j)	10.800 $/u	10.800 $/u
Superficie (s_j)	10 slots	15 slots
Interés (i)	10% anual	

Función g

$$g(q_j) = \sum_j q_j s_j - S$$

$$g(q_1, q_2) = q_1.10 + q_2.15 - 150$$

Además, sabemos que: $\nabla L(q_1, q_2) = g(q_1, q_2)$

	Producto 1	Producto 2
Costo unitario (b_j)	30 $/u	40 $/u
Costo de pedido (k_j)	300 $/pedido	400 $/pedido
Demanda anual (D_j)	3000 u	4300 u
Costo fijo de almacenamiento (ca_j)	10.800 $/u	10.800 $/u
Superficie (s_j)	10 slots	15 slots
Interés (i)	10% anual	

Lagrangiano

Siendo:

- $f(q_1) = 90.000\ \$ + \frac{900.000\ \$.u}{q_1} + 5401{,}5\ \$/u.q_1$
- $f(q_2) = 172.000\ \$ + \frac{1.720.000\ \$.u}{q_2} + 7202\ \$/u.q_2$
- $\sum_j f(q_j) = f(q_1) + f(q_2)$
- $\sum_j f(q_j) = \left[90.000\ \$ + \frac{900.000\ \$.u}{q_1} + 5401{,}5\ \$/u.q_1\right] + \left[172.000\ \$ + \frac{1.720.000\ \$.u}{q_2} + 7202\ \$/u.q_2\right]$

$$\sum_j f(q_j) = \mathbf{262.000\ \$ + \frac{2.620.000\ \$.u}{q_1} + 12.603\ \$/u.q_1}$$

$$\boldsymbol{g(q_1, q_2) = q_1.10 + q_2.15 - 150}$$

Lagrangiano

Siendo:

- $\sum_j f(q_j) = \mathbf{262.000\ \$ + \frac{2.620.000\ \$.u}{q_1} + 12.603\ \$/u.q_1}$
- $\boldsymbol{g(q_1, q_2) = q_1.10 + q_2.15 - 150}$

El Lagrangiano resulta:

$$L = \sum_j f(q_j) + \lambda g(q_j)$$

$$\boldsymbol{L = 262.000\ \$ + \frac{2.620.000\ \$.u}{q_1} + 12.603\ \$/u.q_1 + \lambda[q_1.10 + q_2.15 - 150]}$$

Lote económico

$$q_{opt_j} = \sqrt{\frac{2.D_j.k_j}{c_1+2\lambda s_j}}$$

$$c_1 = b_j * i + ca_j$$

Producto 1, q_{opt_1}	Producto 2, q_{opt_2}
$\sqrt{\frac{2.3000u\ .300\ \$/p}{(30\ \$/u.0{,}1 + 10800\ \$/u) + 2\lambda 10 slots}}$	$\sqrt{\frac{2.4300u\ .400\ \$/p}{(40\ \$/u.0{,}1 + 10800\ \$/u) + 2\lambda 15 slots}}$
$q_{opt_1} = \sqrt{\frac{1.800.000}{10.803 + 20\lambda}} u$	$q_{opt_2} = \sqrt{\frac{3.440.000}{14.404 + 30\lambda}} u$

	Producto 1	Producto 2
Costo unitario (b_j)	30 $/u	40 $/u
Costo de pedido (k_j)	300 $/pedido	400 $/pedido
Demanda anual (D_j)	3000 u	4300 u
Costo fijo de almacenamiento (ca_j)	10.800 $/u	10.800 $/u
Superficie (s_j)	10 slots	15 slots
Interés (i)	10% anual	

Resumen

Fórmula	
$CTE = \sum_j f(q_1, q_2)$	$262.000\ \$ + \dfrac{2.620.000\ \$.u}{q_1} + 12.603\ \$/u.q_1$
$\nabla L(q_1, q_2) = g(q_1, q_2)$	$q_1.10 + q_2.15 - 150$
$L(q_1, q_2, \lambda)$	$262.000\ \$ + \dfrac{2.620.000\ \$.u}{q_1} + 12.603\ \$/u.q_1 + \lambda[q_1.10 + q_2.15 - 150]$
${q_{opt}}_j$	${q_{opt}}_1 = \sqrt{\dfrac{1.800.000}{10.803 + 20\lambda}}u$
	${q_{opt}}_2 = \sqrt{\dfrac{3.440.000}{14.404 + 30\lambda}}u$

Búsqueda de λ^* con Grid Search

- Pseudocódigo:

- Creamos un vector de lambdas $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n]$

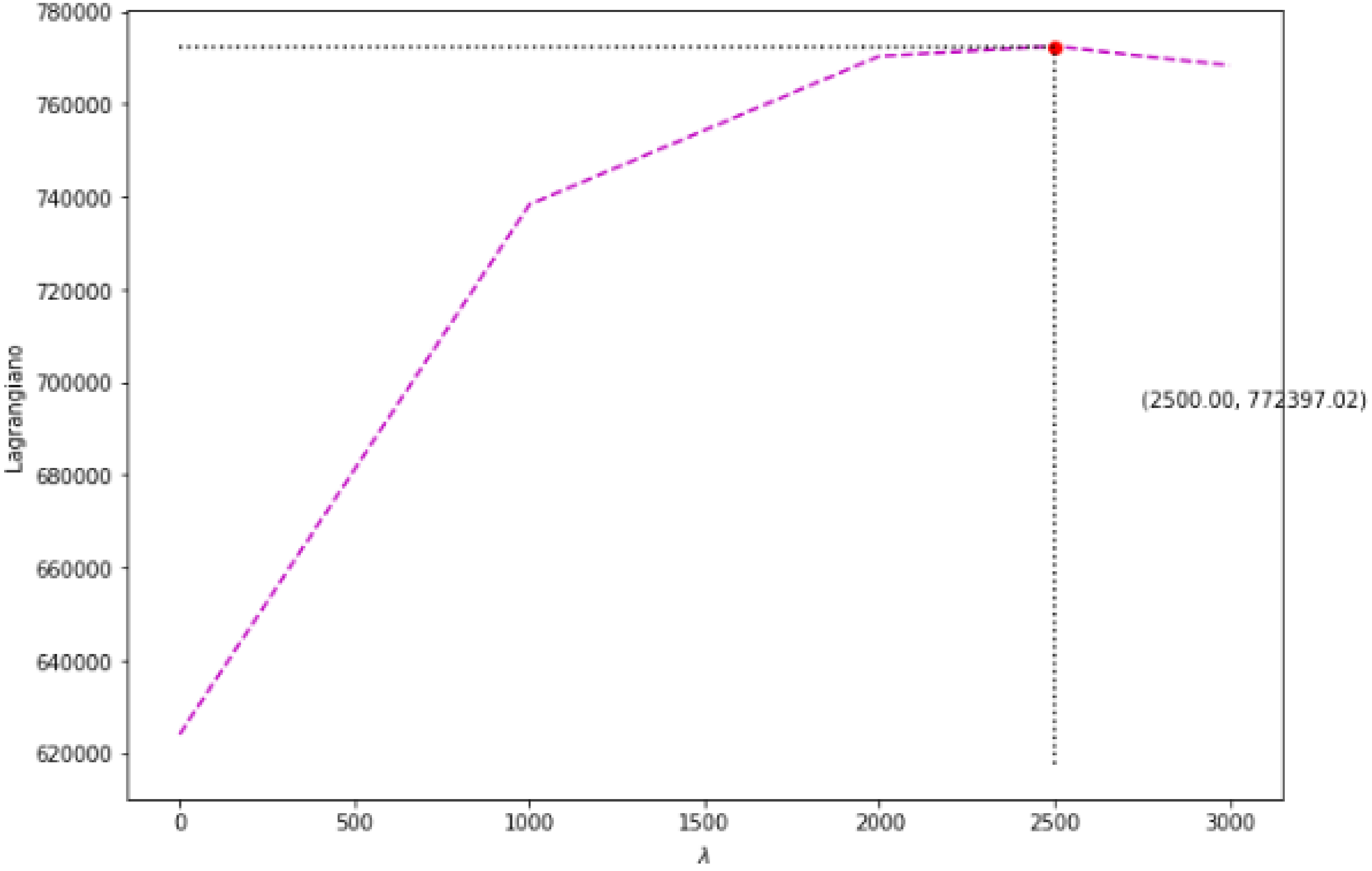
- Para cada λ_i:
  - Calculamos el óptimo q_i
  - Construimos el vector de óptimos $Q = [q_1, q_2, \dots, q_m]$
  - Calculamos g y f
  - Calculamos $L(\lambda_i)$ para el lambda actual.
  - Guardamos $L(\lambda_i)$ en un vector de soluciones $Lvector$

- Buscamos el máximo $L(\lambda_i)$ en $Lvector$

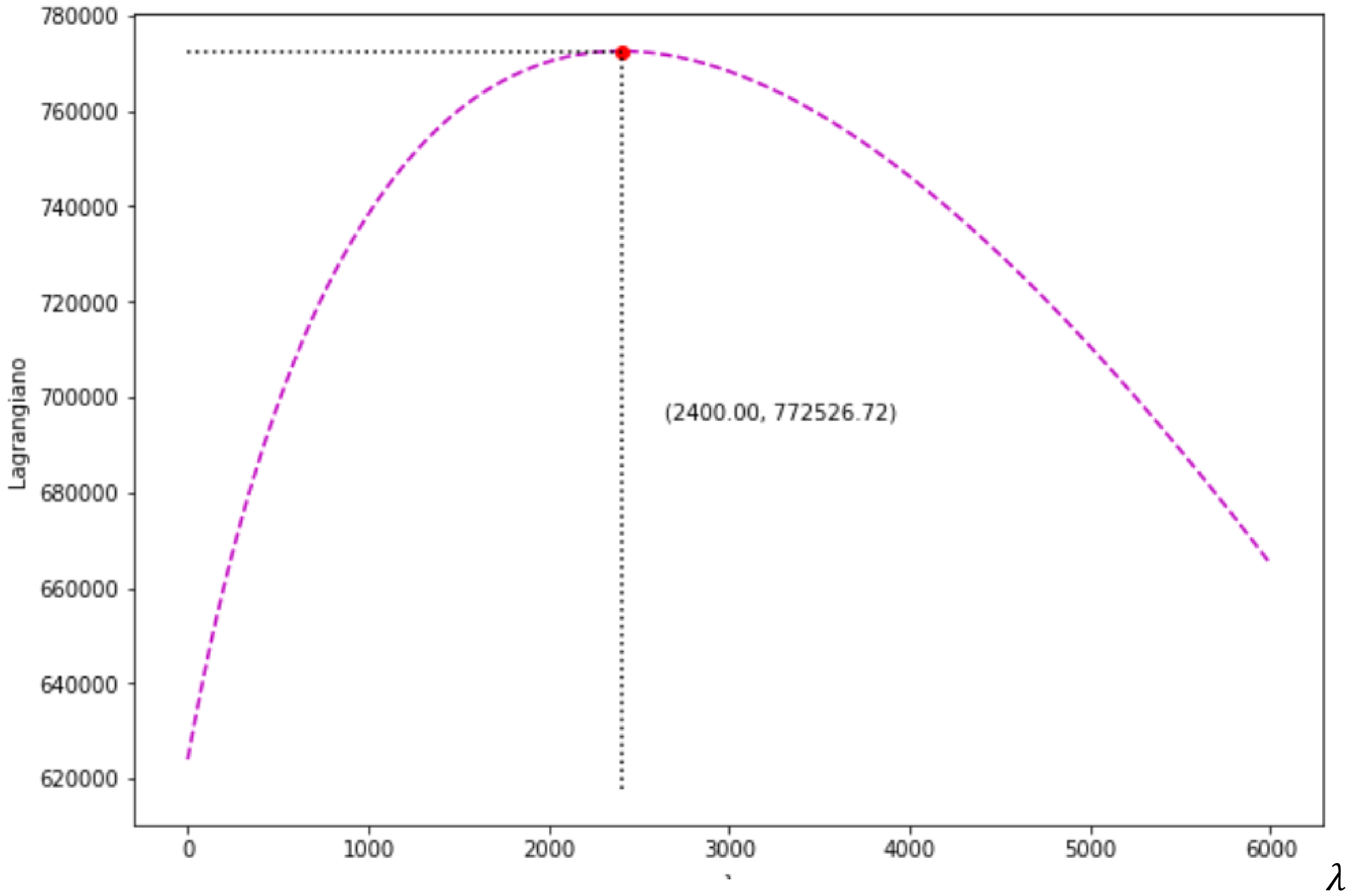
	$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{g}$	$\boldsymbol{L}$
λ_0	0	624.044,51	210,89	624.044,52
λ_1	1.000	679.831,26	58,47	738.300,61
λ_2	2.000	747.279,40	11,51	770.314,18
λ_3	2.500	778.761,63	-2,54	772.397,02
λ_4	3.000	808.718,15	-13,47	768.286,00

$$\boldsymbol{\lambda_3 = 2.500 \approx \lambda^*}$$

Búsqueda de λ^* con Grid Search



Búsqueda de λ^* con Grid Search




```
RESULTADOS:
El lambda óptimo es: 2400.00
Las cantidades óptimas son: 5.53, 6.31
El CTE óptimo es: 772591.03
```

600 valores de λ

Búsqueda de λ^* con Método del Gradiente

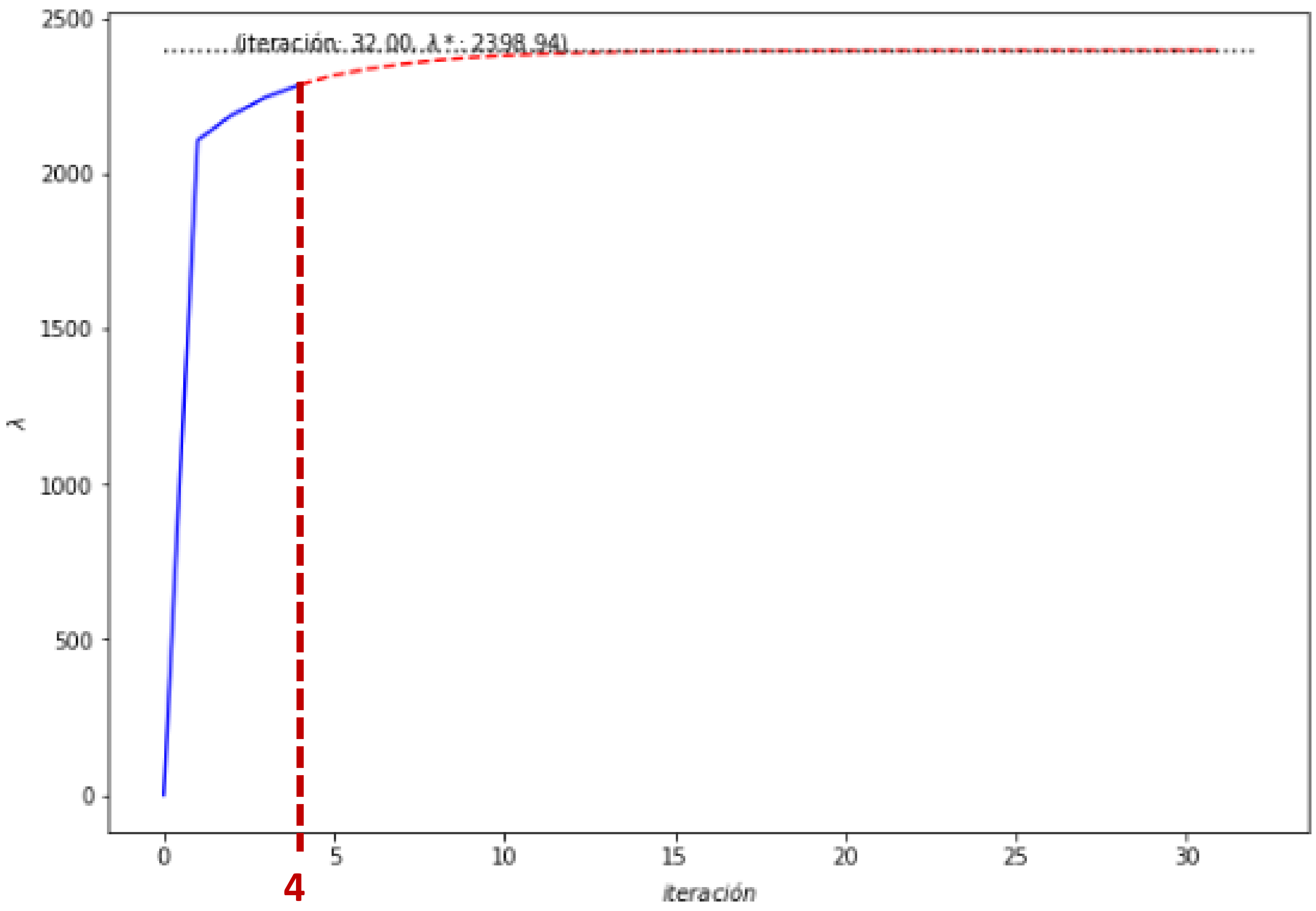
step=10

	$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{g = \nabla f}$	$\boldsymbol{L}$
λ_0	0	624.044,51	210,89	624.044,52
λ_1	2.108,90	754.271,45	8,11	771.381,06
λ_2	2.190,02	759.431,19	5,71	771.941,14
λ_3	2.247,15	763.038,87	4,09	772.220,75
λ_4	2.288,01	765.606,78	2,95	772.364,48

Pseudocódigo:

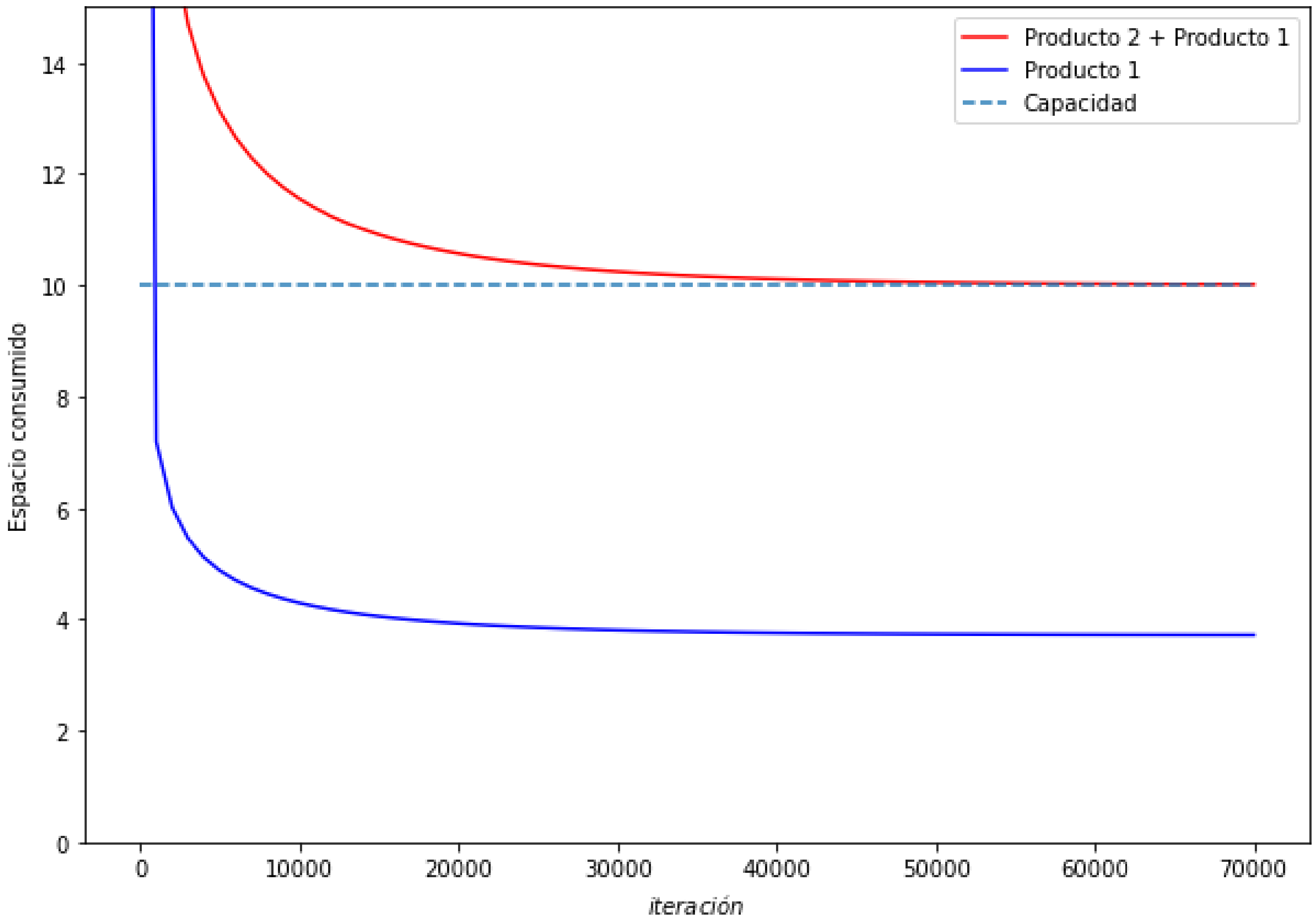
- Inicializar λ_0
- Calcular $L(\lambda)$
- Calcular $\nabla L(\lambda)$
- Actualizar λ: $\lambda_{i+1} = \lambda_i + step * \nabla L(\lambda)$
- Calcular $\Delta\lambda = |\lambda_{i+1} - \lambda_i|$
- Revisar si $\Delta\lambda > tol$, continuar; sino parar.

Búsqueda de λ^* con Método del Gradiente




```
RESULTADOS:
El lambda óptimo es: 2398.94
Las cantidades óptimas son: 5.53, 6.31
El CTE óptimo es: 772524.68
```

Búsqueda de λ^* con Método del Gradiente



Podemos ver el efecto del método del Lagrangiano, buscando con dualidad débil y llegando a la fuerte.