

Investigación Operativa

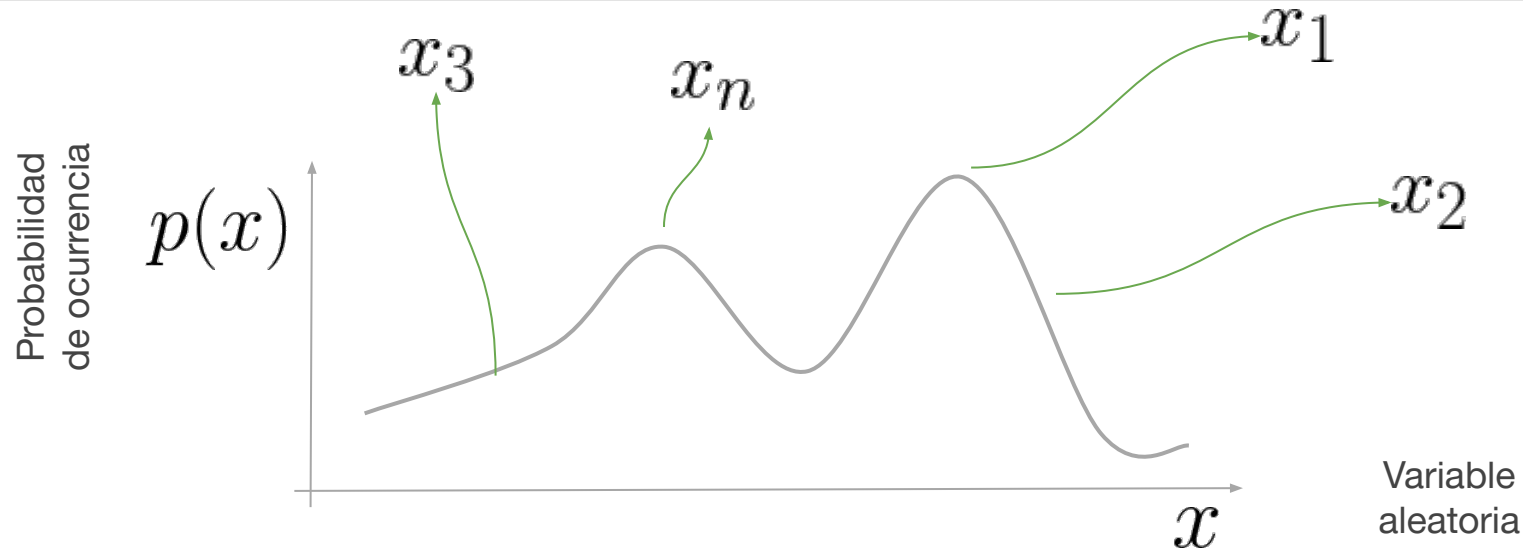
Simulación

Clase 02

Investigación Operativa UTN FRBA

Martín Palazzo

Muestreo desde una función de densidad de probabilidad



Suponiendo que **conocemos** la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria, vamos a **muestrear** multiples veces dicha funcion y obtener distintos valores de la variable aleatoria a simular. En el caso contrario si solo tenemos los datos y no conocemos la funcion de densidad que los genero se abordaran estrategias de maxima verosimilitud o metodos de estimacion no parametrica de la densidad [2]

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_likelihood_estimation

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Kernel_density_estimation .

Procesos estocásticos: categorización según memoria

Proceso estocástico

Proceso aleatorio puro

El estado del sistema en cada tiempo t es independiente de cualquier estado pasado. La probabilidad de estado se determinará por una variable aleatoria.



Proceso de markov

El estado del sistema en cada tiempo t es determinado directamente por el estado del sistema en el tiempo $t-1$. Es un proceso con memoria = 1.



Procesos con memoria

El estado del sistema en cada tiempo t es determinado por los estados que tomó el sistema en un período de tiempo $\Delta t = m$ con $m > 1$.



Método de la transformada inversa

Simulación muestreando funciones de densidad de probabilidad

Método de la transformada inversa

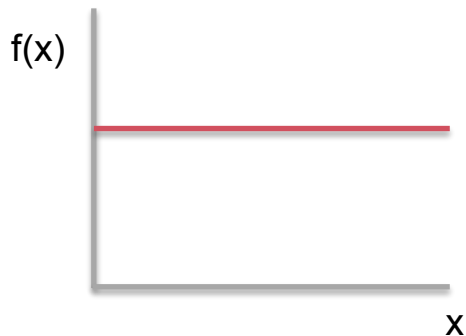
Objetivo: Generación de observaciones aleatorias a partir de una distribución de probabilidad determinada

Partiendo de una sucesión de números aleatorios uniformes queremos generar una sucesión de observaciones aleatorias que sigan una distribución de probabilidad determinada (p. 890 Hillier).

1. Generaremos números aleatorios uniformes (ejemplo: un dado de N caras) entre 0 y 1 representados con 'U'
2. Establecer $F(x) = u$ siendo $F(x)$ la distribución acumulada de probabilidad.
3. Despejar x que será la observación simulada

método de la transformada inversa: distribución exponencial

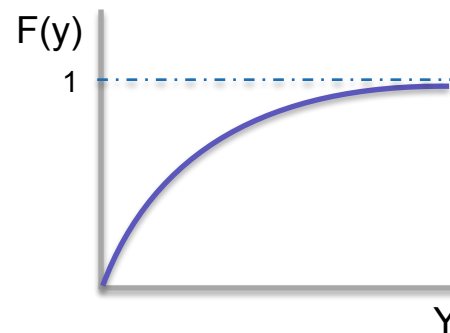
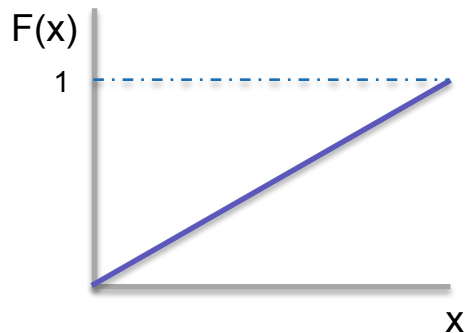
Función de probabilidad
uniforme (dado de n caras)



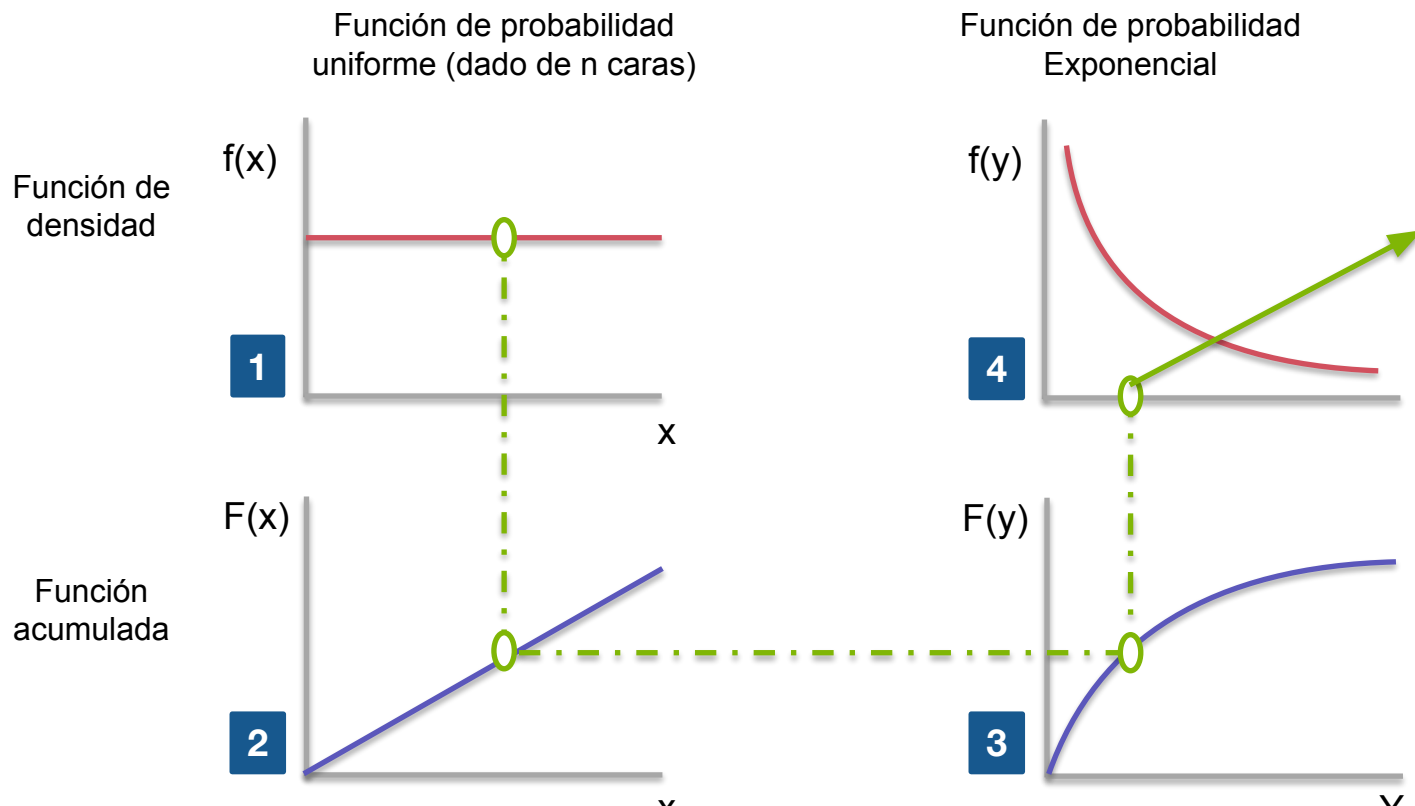
Función de probabilidad
Exponencial



Distribución de
probabilidad a
simular

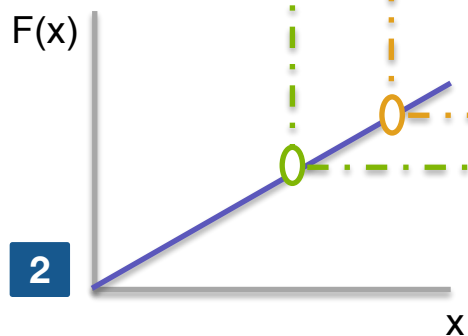
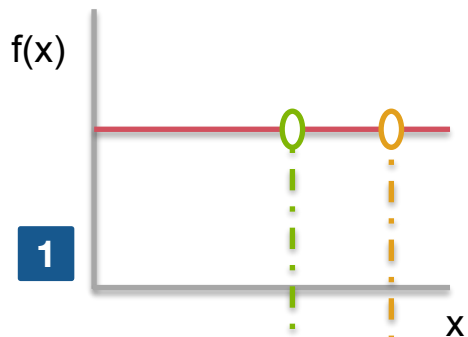


método de la transformada inversa: distribución exponencial

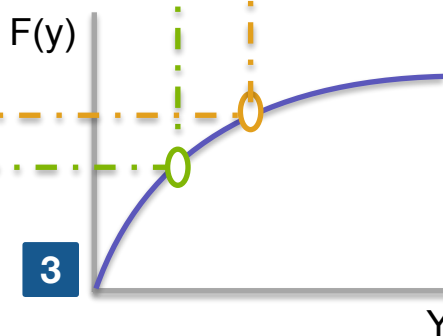
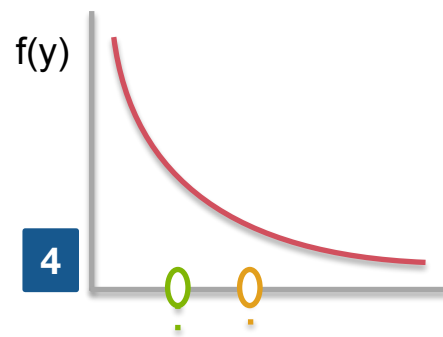


método de la transformada inversa: distribución exponencial

Función de probabilidad
uniforme (dado de n caras)



Función de probabilidad
Exponencial



Iterando múltiples veces podemos simular valores aleatorios de una determinada distribución de probabilidad (en este caso exponencial).

Metodo de la transformada inversa: muestreo de una distribución de probabilidad exponencial

Utilizamos la función de densidad de probabilidad **exponencial**, donde x representa el tiempo entre eventos con una **media** $[1/\lambda]$ -> **λ representa la cantidad media de eventos para un Δt fijo.**

Esperanza de la variable aleatoria X gobernada por una distribución de probabilidad exponencial.

Función de densidad acumulada exponencial

Expresión para calcular el tiempo entre arribos siendo U una v.a. Uniforme entre 0 y 1.

$$u \sim U(0, 1)$$

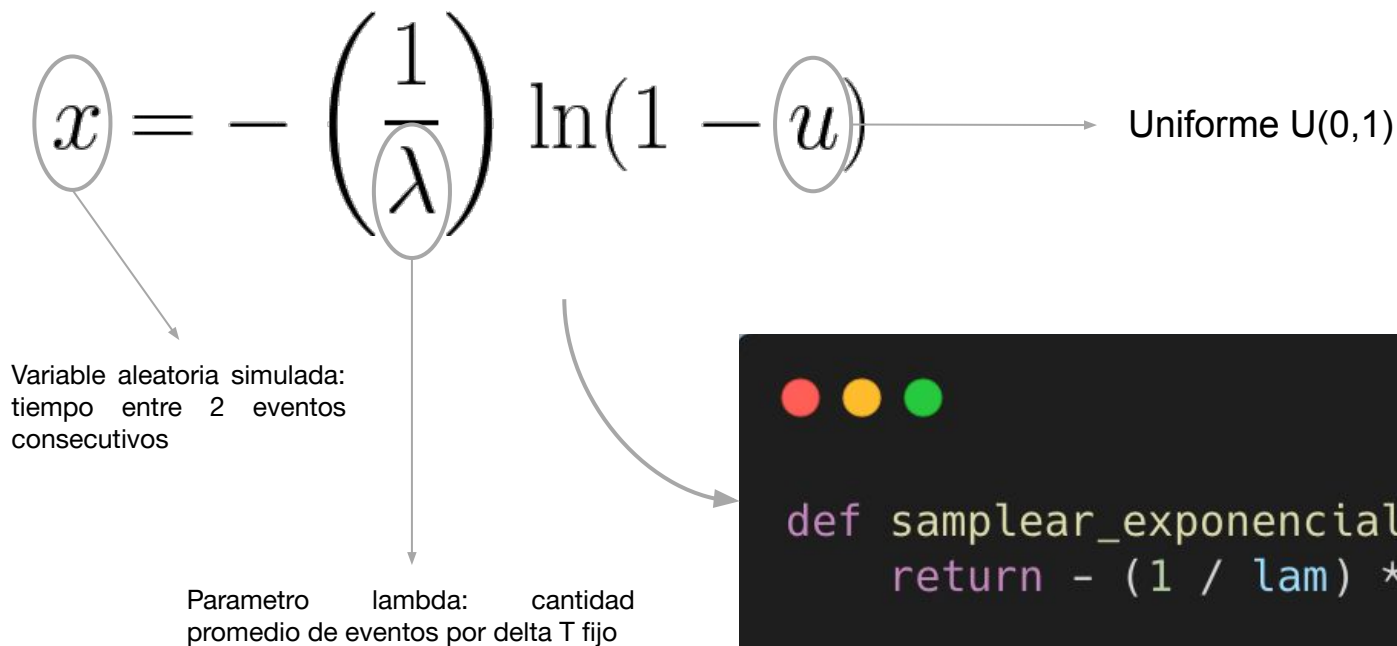
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$x = - \left(\frac{1}{\lambda} \right) \ln(1 - u)$$

Muestreo desde una distribución de probabilidad exponencial



simulación: método de la transformada inversa

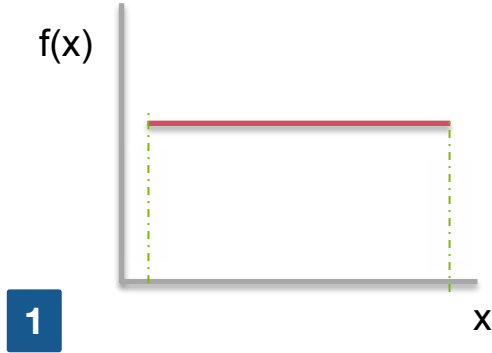
Ejemplo de simulación partiendo de una distribución de probabilidad específica

El tiempo de falla en una máquina es cada 4, 5 o 6 días con probabilidades de 0.25, 0.5 y 0.25. Quisiéramos simular las fallas de la máquina. Para eso definimos la distribución de densidad y su acumulada respectiva.

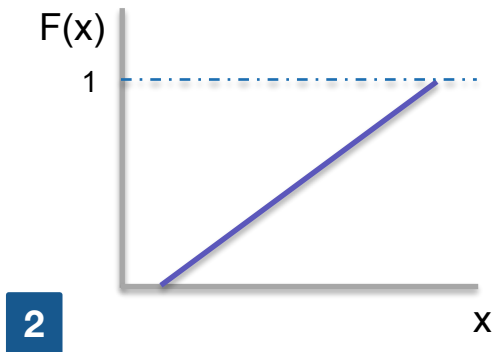
Número de días	Probabilidad	Acumulada
4	0.25	0.25
5	0.5	0.75
6	0.25	1

simulación: método de la transformada inversa

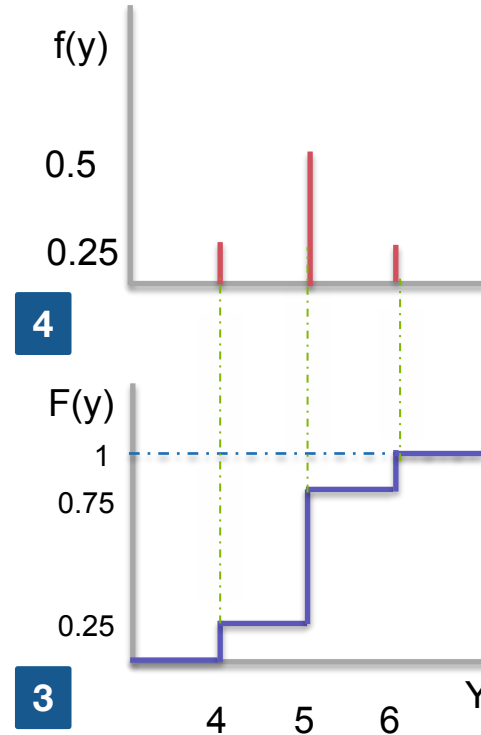
Distribución de probabilidad uniforme.



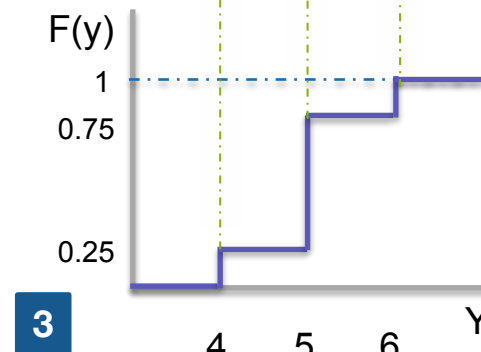
Function acumulada de distribución uniforme.



Distribución de probabilidad especial (en partes)

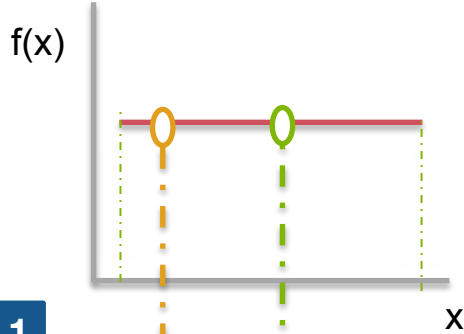


Function acumulada de distribución especial.

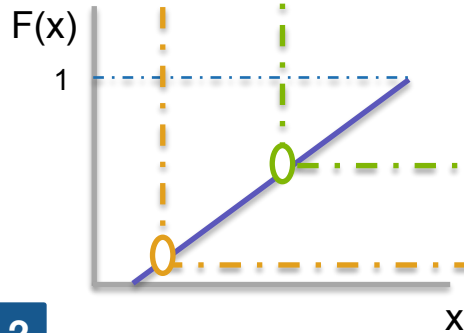


simulación: método de la transformada inversa

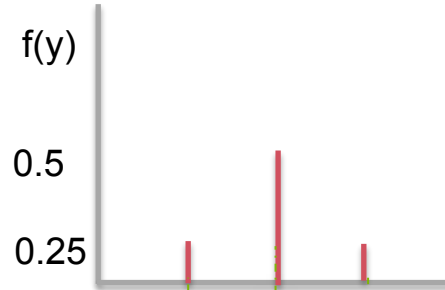
Distribución de probabilidad uniforme.



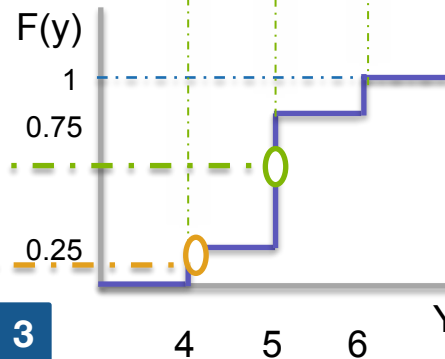
Function acumulada de distribución uniforme.



Distribución de probabilidad especial (en partes)



Function acumulada de distribución especial.



arribos con distribución exponencial: 1000 iteraciones y $\lambda = 4$

Ahora que tenemos la función de probabilidad acumulada podemos realizar muestreos aleatorios partiendo desde una distribución de probabilidad uniforme y así poder simular distintos tiempos de falla de la máquina.

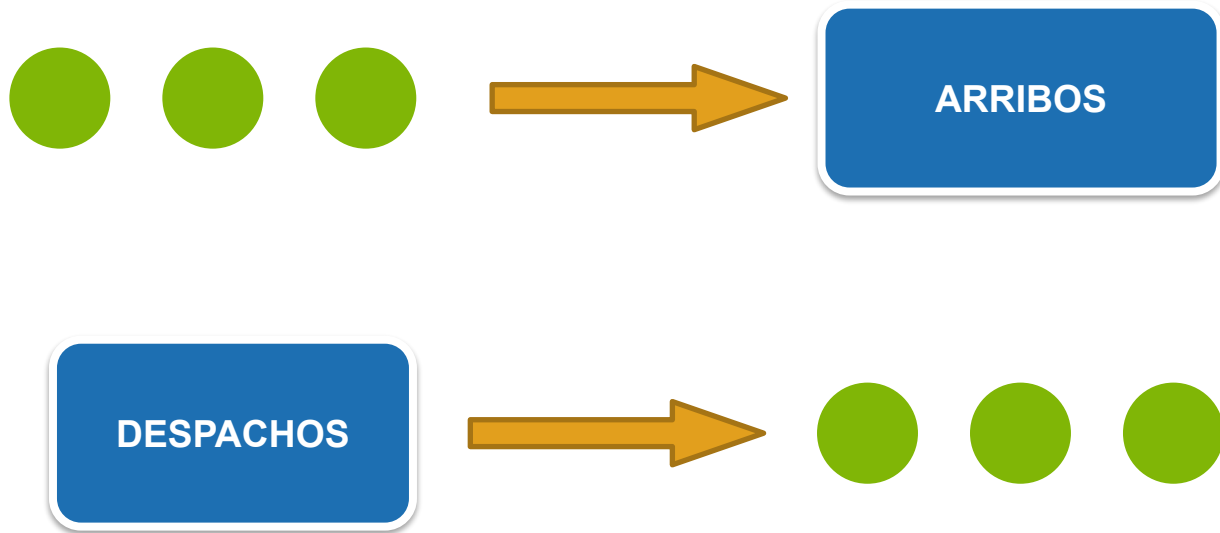
U	Tiempo de falla de la máquina
0.15	?
0.34	?
...	?
0.27	?

Si realizamos este proceso 20 veces, podemos entonces construir un histograma de frecuencias con los tiempos de falla obtenidos y observar si el histograma se aproxima a la distribución de probabilidad de falla de maquinas (densidad).

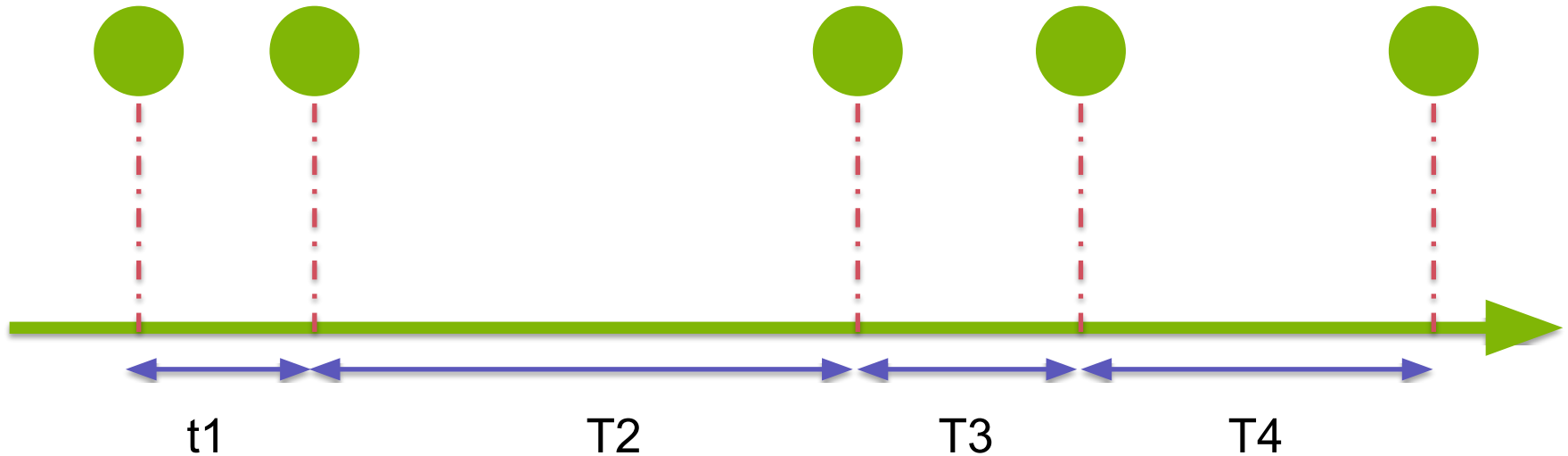
Simulando arribos y despachos

simulacion

¿cuándo usar dist. Exponencial y Poisson?

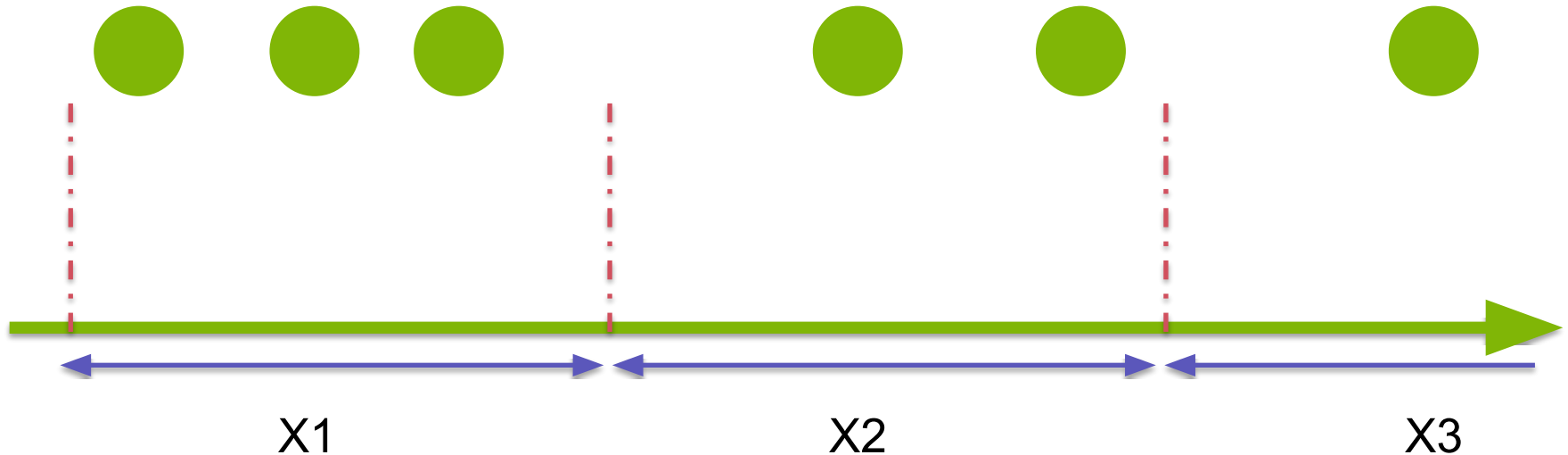


Modelar con distribución exponencial



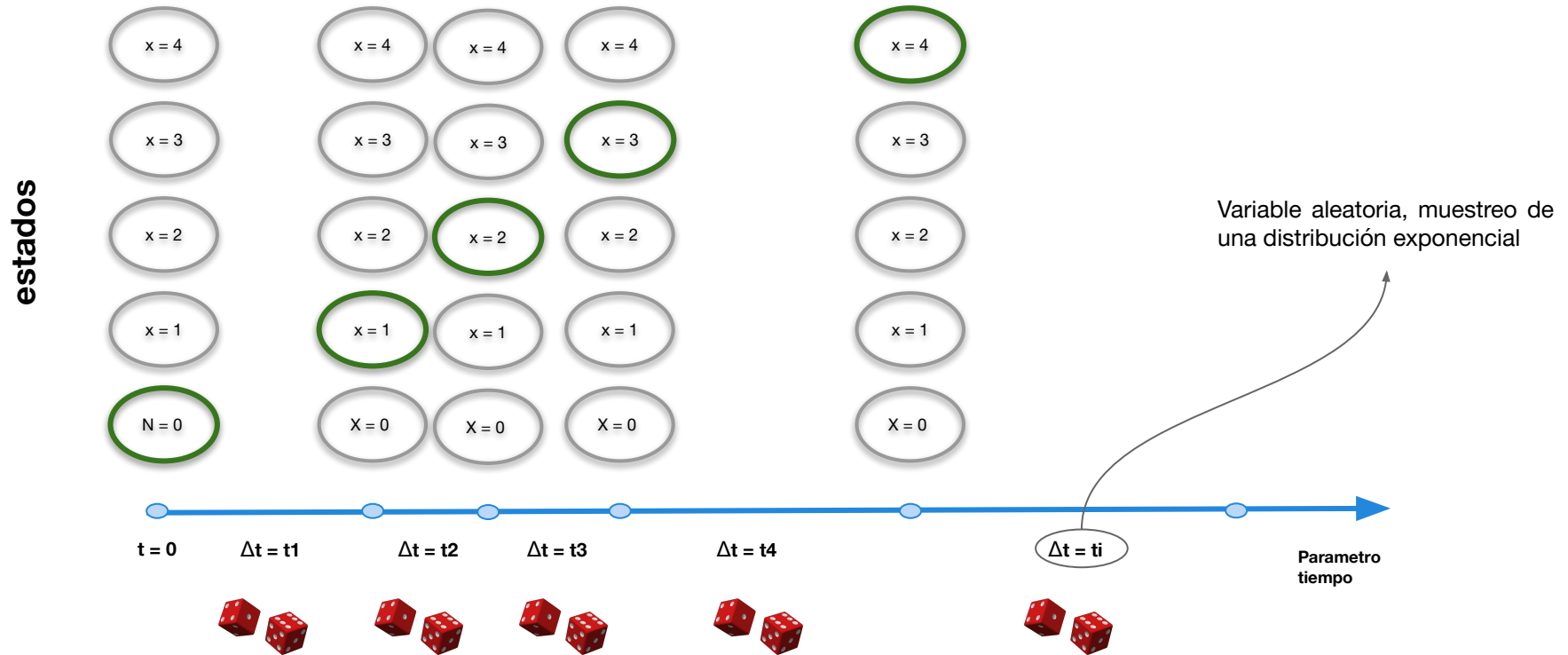
Podemos modelar el tiempo entre eventos. Por ejemplo el tiempo entre arribos

Modelar con distribución Poisson



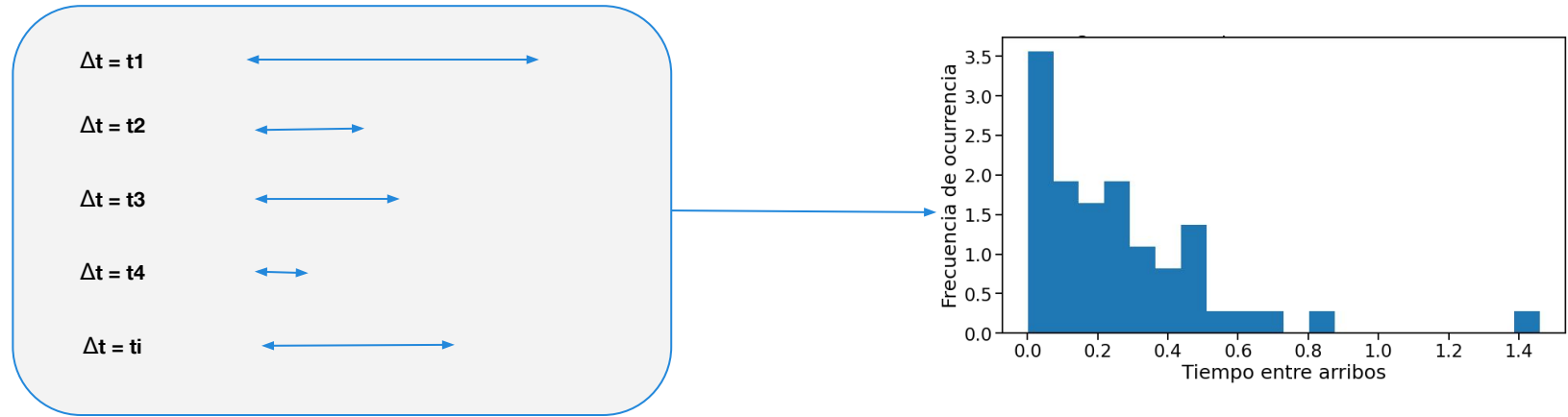
Podemos modelar la cantidad de eventos en intervalos de tiempo fijos.
Es decir, cantidad de arribos por hora.

Cadenas de Markov: simulación de 1 experimento



Supongamos un sistema donde arriban clientes uno detrás del otro. Vamos a determinar que el estado del sistema es la cantidad de clientes que se encuentran en el sistema. Cada vez que arribe un cliente nuevo el sistema incrementará su estado en +1. Supongamos que conocemos la distribución de probabilidad que genera el tiempo entre arribos siendo una exponencial de parámetro λ conocido. Muestreando múltiples veces la variable aleatoria con la distribución que conocemos y así podemos simular el tiempo entre eventos donde cada evento es el arribo de un cliente al sistema.

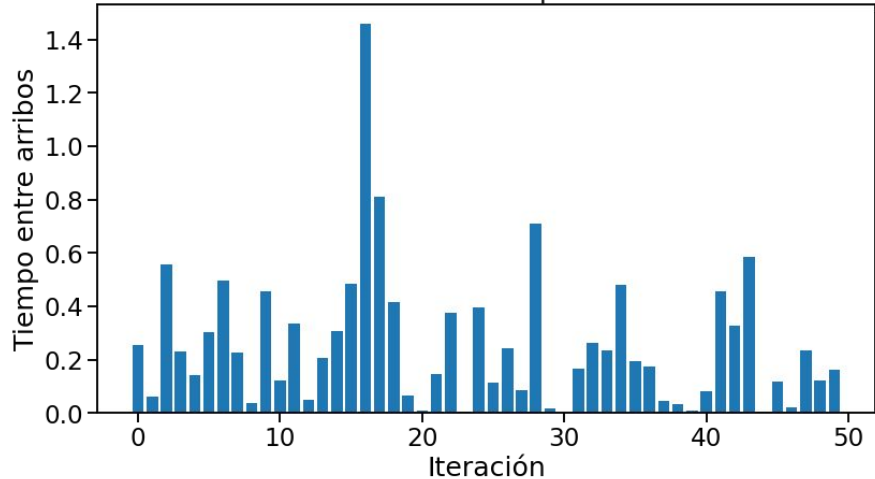
Cadenas de Markov: simulación de 1 experimento



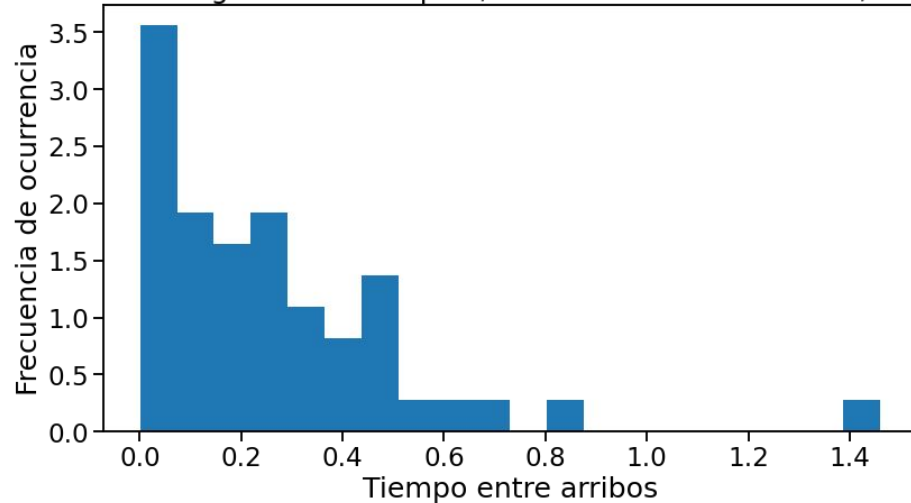
Una vez que registramos todos los tiempos entre arribos, podemos realizar un histograma de frecuencias para determinar que rango de tiempos simulados son mas frecuentes y cuales menos frecuentes. Si los tiempos muestreados fueron generados por una distribución exponencial de λ conocido, es esperado entonces que el histograma resultante tambien se aproxime a la distribución teorica que genero dichos datos.

Muestreo de una distribución exponencial

Valores simulados de una V.A. Exponencial. 50 iteraciones



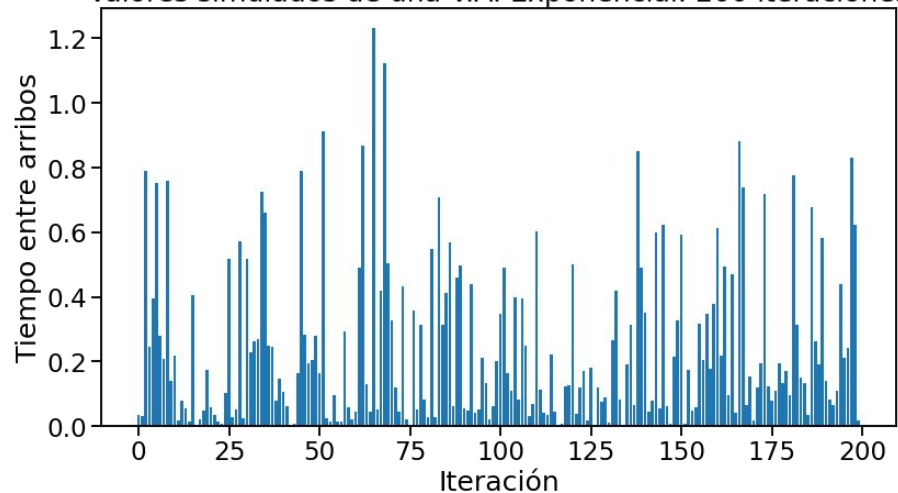
Histograma de tiempo e/arribos. Lambda = 4.0 un./t



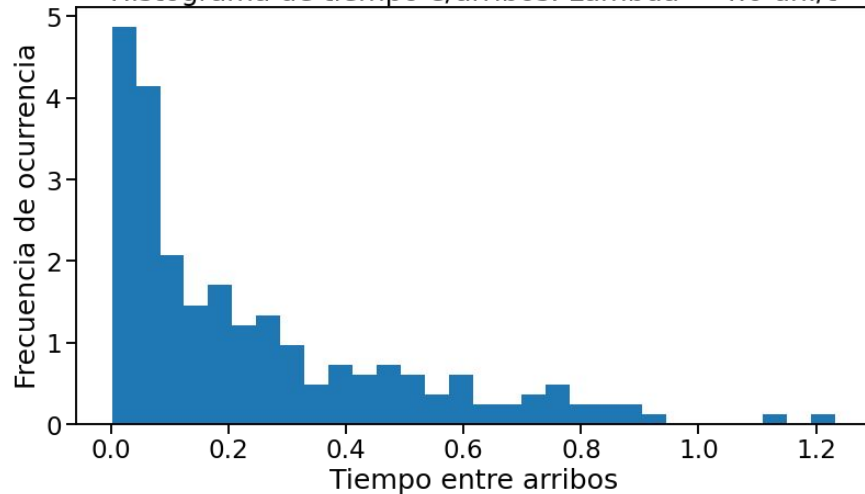
$$x = -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln(1 - u)$$

Muestreo de una distribución exponencial

Valores simulados de una V.A. Exponencial. 200 iteraciones

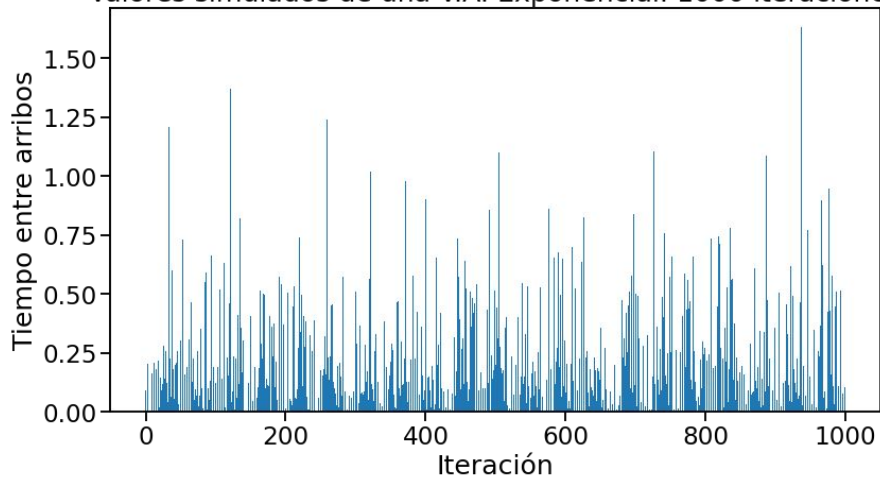


Histograma de tiempo e/arribos. Lambda = 4.0 un./t

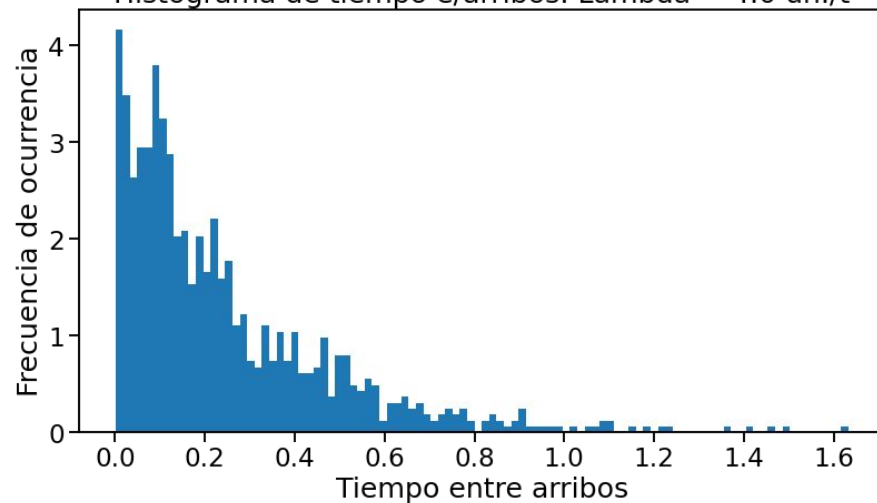


Muestreo de una distribución exponencial

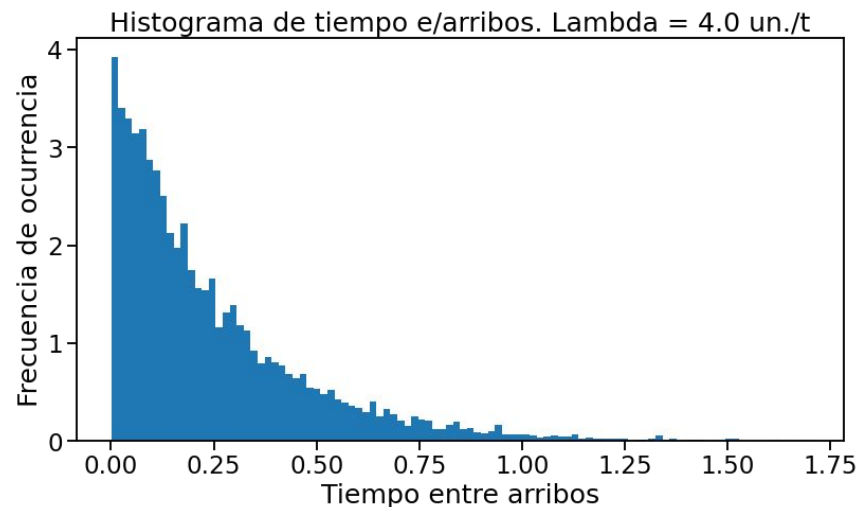
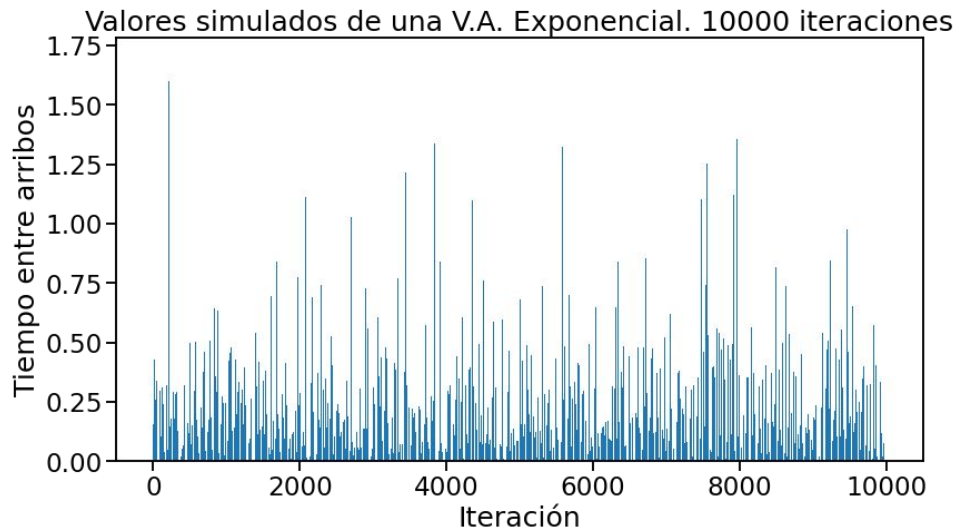
Valores simulados de una V.A. Exponencial. 1000 iteraciones



Histograma de tiempo e/arribos. Lambda = 4.0 un./t

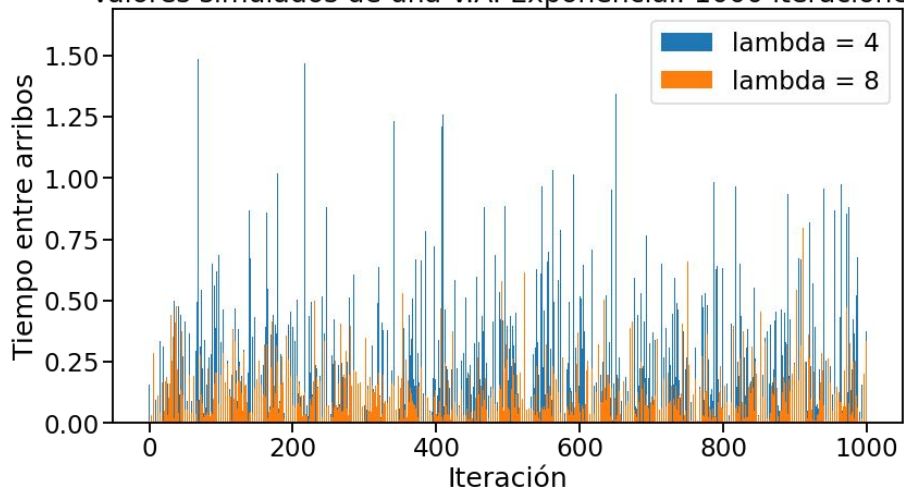


Muestreo de una distribución exponencial

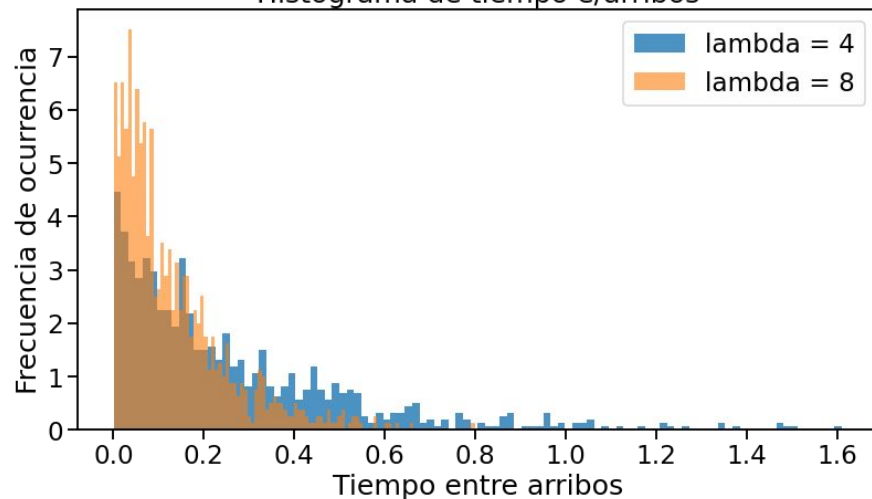


Muestreo de una distribución exponencial

Valores simulados de una V.A. Exponencial. 1000 iteraciones



Histograma de tiempo e/arribos



Ejercicios adicionales

Ejercicio de simulación A

Considere una habitación de capacidad infinita donde entran pallets bajo una distribución Poisson con parámetro λ 4/hora. Definiendo una grilla temporal de 3 horas de longitud simular la cantidad de pallets que habría en la habitación al finalizar cada hora. Para simular puede utilizar como herramienta el cálculo del tiempo entre arribos entre dos pallets con una distribución exponencial. Definir el estado del sistema, graficarlo en función del tiempo y detallar en una tabla la simulación.

Ejercicio de simulación B

Considere ahora un caso con la misma habitación del ejercicio 02 de capacidad infinita con la misma tasa de arribos. También considere ahora que de la habitación salen pallets a una tasa $\lambda = 5/\text{hora}$ bajo una distribución Poisson. Simular el sistema luego de 4 horas. Definir el estado del sistema, graficarlo en función del tiempo y detallar en una tabla la simulación contemplando los arribos y los despachos.