

# SIMPLEX con método de la M

## Clase 20

Investigación Operativa UTN FRBA 2021

Docente: Rodrigo Maranzana

Curso: I4051 (Palazzo)

# Región del poliedro factible

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2$$

*sujeto a:*

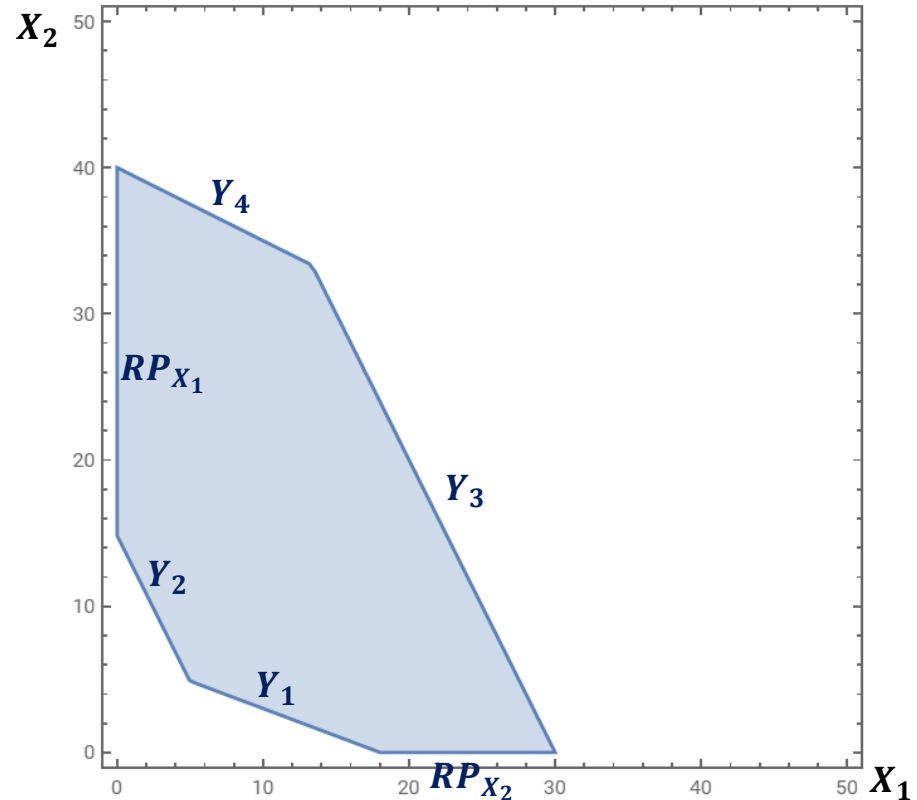
$$Y_1: 6X_1 + 16X_2 \geq 108$$

$$Y_2: 12X_1 + 6X_2 \geq 89$$

$$Y_3: 2X_1 + X_2 \leq 160$$

$$Y_4: X_1 + 2X_2 \leq 180$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



# Modelo extendido

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2$$

sujeto a:

$$Y_1: 6X_1 + 16X_2 \geq 108$$

$$Y_2: 12X_1 + 6X_2 \geq 89$$

$$Y_3: 2X_1 + X_2 \leq 160$$

$$Y_4: X_1 + 2X_2 \leq 180$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Modelo Extendido



$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2 - Mu_1 - Mu_2$$

sujeto a:

$$Y_1: 6X_1 + 16X_2 - X_3 + u_1 = 108$$

$$Y_2: 12X_1 + 6X_2 - X_4 + u_2 = 89$$

$$Y_3: 2X_1 + X_2 + X_5 = 160$$

$$Y_4: X_1 + 2X_2 + X_6 = 180$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

M: un número muy grande

$u_i$ : variable ficticia

# Modelo Matricial

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2 - Mu_1 - Mu_2$$

sujeto a:

$$Y_1: \quad 6X_1 + 16X_2 \quad -X_3 \quad \quad \quad +u_1 \quad = 108$$

$$Y_2: \quad 12X_1 + \quad 6X_2 \quad \quad -X_4 \quad \quad \quad +u_2 = 89$$

$$Y_3: \quad 2X_1 + \quad X_2 \quad \quad \quad +X_5 \quad \quad \quad = 160$$

$$Y_4: \quad X_1 + \quad 2X_2 \quad \quad \quad +X_6 \quad \quad \quad = 180$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



**Modelo Extendido Matricial**

$$\text{Max } Z = C^T X$$

sujeto a:

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

Valores de matrices:

$$b = \begin{bmatrix} 108 \\ 89 \\ 160 \\ 180 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M \\ -M \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$



# Resolución con SIMPLEX

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
-M	$u_1$	108	6	16	-1	0	0	0	1	0	
-M	$u_2$	89	12	6	0	-1	0	0	0	1	
0	$X_5$	160	2	1	0	0	1	0	0	0	
0	$X_6$	180	1	2	0	0	0	1	0	0	
-197M	$Z_j - C_j$		-18M-4	-22M-3	M	M	0	0	0	0	

Resolvemos  $Z_j - C_j$  y valor del funcional  $Z$

Existen variables no básicas con  $Z_j - C_j$  negativo, ¡ $Z$  puede mejorar!

Seleccionamos  $X_2$  para entrar a la base

# Resolución con SIMPLEX

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j$ Base	$X_j$ Base	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
-M	$u_1$	108	6	16	-1	0	0	0	1	0	6.75
-M	$u_2$	89	12	6	0	-1	0	0	0	1	14.83
0	$X_5$	160	2	1	0	0	1	0	0	0	160.00
0	$X_6$	180	1	2	0	0	0	1	0	0	90.00
$Z$	$Z_j - C_j$		-18M-4	-22M-3	M	M	0	0	0	0	

Resolvemos  $B_k / A_{ij}$

Mínimo positivo  $B_k / A_{ij}$  en  $u_1$

Sale  $u_1$ , entra  $X_2$

# Resolución con SIMPLEX

Tabla  
iteración 0

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j$ Base	$X_j$ Base	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
-M	$u_1$	108	6	16	-1	0	0	0	1	0	6.75
-M	$u_2$	89	12	6	0	-1	0	0	0	1	14.83
0	$X_5$	160	2	1	0	0	1	0	0	0	160.00
0	$X_6$	180	1	2	0	0	0	1	0	0	90.00
Z	$Z_j - C_j$		-18M-4	-22M-3	M	M	0	0	0	0	

Tabla  
iteración 1

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j$ Base	$X_j$ Base	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
3	$X_2$	6.75	0.375	1	-0.062	0	0	0	0.062	0	
-M	$u_2$	48.50	9.750	0	0.375	-1	0	0	-0.375	1	
0	$X_5$	153.25	1.625	0	0.062	0	1	0	-0.062	0	
0	$X_6$	166.5	0.250	0	0.125	0	0	1	-0.125	0	
Z	$Z_j - C_j$		-9.75M -2.875	0	-0.37M -0.187	M	0	0	1.37M +0.187	0	



# Resolución con SIMPLEX

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
3	$X_2$	6.75	0.375	1	-0.062	0	0	0	0.062	0	
-M	$u_2$	48.50	9.750	0	0.375	-1	0	0	-0.375	1	
0	$X_5$	153.25	1.625	0	0.062	0	1	0	-0.062	0	
0	$X_6$	166.5	0.250	0	0.125	0	0	1	-0.125	0	
-48.5M + 20.25	$Z_j - C_j$		-9.75M -2.875	0	-0.37M -0.187	M	0	0	1.37M +0.187	0	

Resolvemos  $Z_j - C_j$  y valor del funcional  $Z$

Existen variables no básicas con  $Z_j - C_j$  negativo, ¡ $Z$  puede mejorar!

Seleccionamos  $X_1$  para entrar a la base

# Resolución con SIMPLEX

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
3	$X_2$	6.75	0.375	1	-0.062	0	0	0	0.062	0	18.00
-M	$u_2$	48.50	9.750	0	0.375	-1	0	0	-0.375	1	4.97
0	$X_5$	153.25	1.625	0	0.062	0	1	0	-0.062	0	92.88
0	$X_6$	166.5	0.250	0	0.125	0	0	1	-0.125	0	666.00
-48.5M + 20.25	$Z_j - C_j$		-9.75M -2.875	0	-0.37M -0.187	M	0	0	1.37M +0.187	0	

Resolvemos  $B_k / A_{ij}$

Mínimo positivo  $B_k / A_{ij}$  en  $u_2$

Sale  $u_2$ , entra  $X_1$

# Resolución con SIMPLEX

Tabla  
iteración 1

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j$ Base	$X_j$ Base	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
3	$X_2$	6.75	0.375	1	-0.062	0	0	0	0.062	0	18.00
-M	$u_2$	48.50	9.750	0	0.375	-1	0	0	-0.375	1	4.97
0	$X_5$	153.25	1.625	0	0.062	0	1	0	-0.062	0	92.88
0	$X_6$	166.5	0.250	0	0.125	0	0	1	-0.125	0	666.00
-48.5M + 20.25	$Z_j - C_j$		-9.75M -2.875	0	-0.37M -0.187	M	0	0	1.37M +0.187	0	

Tabla  
iteración 2

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j$ Base	$X_j$ Base	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
3	$X_2$	4.88	0	1	-0.077	0.038	0	0	0.077	-0.038	
4	$X_1$	4.97	1	0	0.038	-0.102	0	0	-0.038	0.102	
0	$X_5$	145.17	0	0	0	0.167	1	0	0	-0.166	
0	$X_6$	165.26	0	0	0.115	0.025	0	1	-0.115	-0.025	
Z	$Z_j - C_j$		0	0	-0.076	-0.294	0	0	M +0.076	M +0.294	

# Resolución con SIMPLEX

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
3	$X_2$	4.88	0	1	-0.077	0.038	0	0	0.077	-0.038	
4	$X_1$	4.97	1	0	0.038	-0.102	0	0	-0.038	0.102	
0	$X_5$	145.17	0	0	0	0.167	1	0	0	-0.166	
0	$X_6$	165.26	0	0	0.115	0.025	0	1	-0.115	-0.025	
34.52	$Z_j - C_j$		0	0	-0.076	-0.294	0	0	M +0.076	M +0.294	

Resolvemos  $Z_j - C_j$  y valor del funcional  $Z$

Existen variables no básicas con  $Z_j - C_j$  negativo, ¡ $Z$  puede mejorar!

Seleccionamos  $X_4$  para entrar a la base

# Resolución con SIMPLEX

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
3	$X_2$	4.88	0	1	-0.077	0.038	0	0	0.077	-0.038	128.42
4	$X_1$	4.97	1	0	0.038	-0.102	0	0	-0.038	0.102	-497.00
0	$X_5$	145.17	0	0	0	0.167	1	0	0	-0.166	869.28
0	$X_6$	165.26	0	0	0.115	0.025	0	1	-0.115	-0.025	6610.4
34.52	$Z_j - C_j$		0	0	-0.076	-0.294	0	0	M +0.076	M +0.294	

Resolvemos  $B_k / A_{ij}$

Mínimo positivo  $B_k / A_{ij}$  en  $X_2$

Sale  $X_2$ , entra  $X_4$

# Resolución con SIMPLEX

Tabla  
iteración 2

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j$ Base	$X_j$ Base	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
3	$X_2$	4.88	0	1	-0.077	0.038	0	0	0.077	-0.038	128.42
4	$X_1$	4.97	1	0	0.038	-0.102	0	0	-0.038	0.102	-497.00
0	$X_5$	145.17	0	0	0	0.167	1	0	0	-0.166	869.28
0	$X_6$	165.26	0	0	0.115	0.025	0	1	-0.115	-0.025	6610.4
34.52	$Z_j - C_j$		0	0	-0.076	-0.294	0	0	M +0.076	M +0.294	

Tabla  
iteración 3

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j$ Base	$X_j$ Base	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
0	$X_4$	128.42	0	26.31	-2.026	1	0	0			
4	$X_1$	18.07	1	2.667	-0.167	0	0	0			
0	$X_5$	123.72	0	-4.334	0.334	0	1	0			
0	$X_6$	162.05	0	-0.667	0.167	0	0	1			
Z	$Z_j - C_j$		0	7.667	-0.667	0	0	0			

# Resolución con SIMPLEX

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
0	$X_4$	128.42	0	26.31	-2.026	1	0	0			
4	$X_1$	18.07	1	2.667	-0.167	0	0	0			
0	$X_5$	123.72	0	-4.334	0.334	0	1	0			
0	$X_6$	162.05	0	-0.667	0.167	0	0	1			
72.28	$Z_j - C_j$		0	7.667	-0.667	0	0	0			

Resolvemos  $Z_j - C_j$  y valor del funcional  $Z$

Existen variables no básicas con  $Z_j - C_j$  negativo, ¡ $Z$  puede mejorar!

Seleccionamos  $X_3$  para entrar a la base

# Resolución con SIMPLEX

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	$B_k / A_{ij}$
0	$X_4$	128.42	0	26.31	-2.026	1	0	0			-64.21
4	$X_1$	18.07	1	2.667	-0.167	0	0	0			-108.20
0	$X_5$	123.72	0	-4.334	0.334	0	1	0			370.42
0	$X_6$	162.05	0	-0.667	0.167	0	0	1			970.36
72.28	$Z_j - C_j$		0	7.667	-0.667	0	0	0			

Resolvemos  $B_k / A_{ij}$

Mínimo positivo  $B_k / A_{ij}$  en  $X_5$

Sale  $X_5$ , entra  $X_3$



# Resolución con SIMPLEX

Tabla  
iteración 3

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j$ Base	$X_j$ Base	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
0	$X_4$	128.42	0	26.31	-2.026	1	0	0			-64.21
4	$X_1$	18.07	1	2.667	-0.167	0	0	0			-108.20
0	$X_5$	123.72	0	-4.334	0.334	0	1	0			370.42
0	$X_6$	162.05	0	-0.667	0.167	0	0	1			970.36
72.28	$Z_j - C_j$		0	7.667	-0.667	0	0	0			

Tabla  
iteración 4

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j$ Base	$X_j$ Base	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
0	$X_4$	878.89	0	0.02	0	1	6.06	0			
4	$X_1$	79.93	1	0.50	0	0	0.50	0			
0	$X_3$	370.42	0	-13.00	1	0	3.00	0			
0	$X_6$	100.19	0	1.50	0	0	-0.50	1			
Z	$Z_j - C_j$		0	-1.00	0	0	2.00	0			

# Resolución con SIMPLEX

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
0	$X_4$	878.89	0	0.02	0	1	6.06	0			
4	$X_1$	79.93	1	0.50	0	0	0.50	0			
0	$X_3$	370.42	0	-13.00	1	0	3.00	0			
0	$X_6$	100.19	0	1.50	0	0	-0.50	1			
319.72	$Z_j - C_j$		0	-1.00	0	0	2.00	0			

Resolvemos  $Z_j - C_j$  y valor del funcional  $Z$

Existen variables no básicas con  $Z_j - C_j$  negativo, ¡ $Z$  puede mejorar!

Seleccionamos  $X_2$  para entrar a la base

# Resolución con SIMPLEX

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
0	$X_4$	878.89	0	0.02	0	1	6.06	0			43944.50
4	$X_1$	79.93	1	0.50	0	0	0.50	0			159.86
0	$X_3$	370.42	0	-13.00	1	0	3.00	0			-28.49
0	$X_6$	100.19	0	1.50	0	0	-0.50	1			66.79
319.72	$Z_j - C_j$		0	-1.00	0	0	2.00	0			

Resolvemos  $B_k / A_{ij}$

Mínimo positivo  $B_k / A_{ij}$  en  $X_6$

Sale  $X_6$ , entra  $X_2$

# Resolución con SIMPLEX

Tabla  
iteración 4

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j$ Base	$X_j$ Base	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
0	$X_4$	878.89	0	0.02	0	1	6.06	0			43944.50
4	$X_1$	79.93	1	0.50	0	0	0.50	0			159.86
0	$X_3$	370.42	0	-13.00	1	0	3.00	0			-28.49
0	$X_6$	100.19	0	1.50	0	0	-0.50	1			66.79
319.72	$Z_j - C_j$		0	-1.00	0	0	2.00	0			

Tabla  
iteración 5

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j$ Base	$X_j$ Base	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
0	$X_4$	877.50	0	0	0	1	6.00	0			
4	$X_1$	46.67	1	0	0	0	0.67	-0.34			
0	$X_3$	1238.67	0	0	1	0	-1.34	8.67			
3	$X_2$	66.67	0	1	0	0	-0.34	0.67			
Z	$Z_j - C_j$		0	0	0	0	1.67	0.67			

# Resolución con SIMPLEX

$C_j$			4	3	0	0	0	0	-M	-M	$B_k / A_{ij}$
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	$B_k$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$u_1$	$u_2$	
0	$X_4$	877.50	0	0	0	1	6.00	0			
4	$X_1$	46.67	1	0	0	0	0.67	-0.34			
0	$X_3$	1238.67	0	0	1	0	-1.34	8.67			
3	$X_2$	66.67	0	1	0	0	-0.34	0.67			
386.67	$Z_j - C_j$		0	0	0	0	1.67	0.67			

Resolvemos  $Z_j - C_j$  y valor del funcional  $Z$

No existen variables no básicas con  $Z_j - C_j$  negativo, ¡ $Z$  es óptimo!

# Resolución con SIMPLEX

Solución:

$$Z^* = 386.67$$

$$X_1^* = 46.67$$

$$X_2^* = 66.67$$

