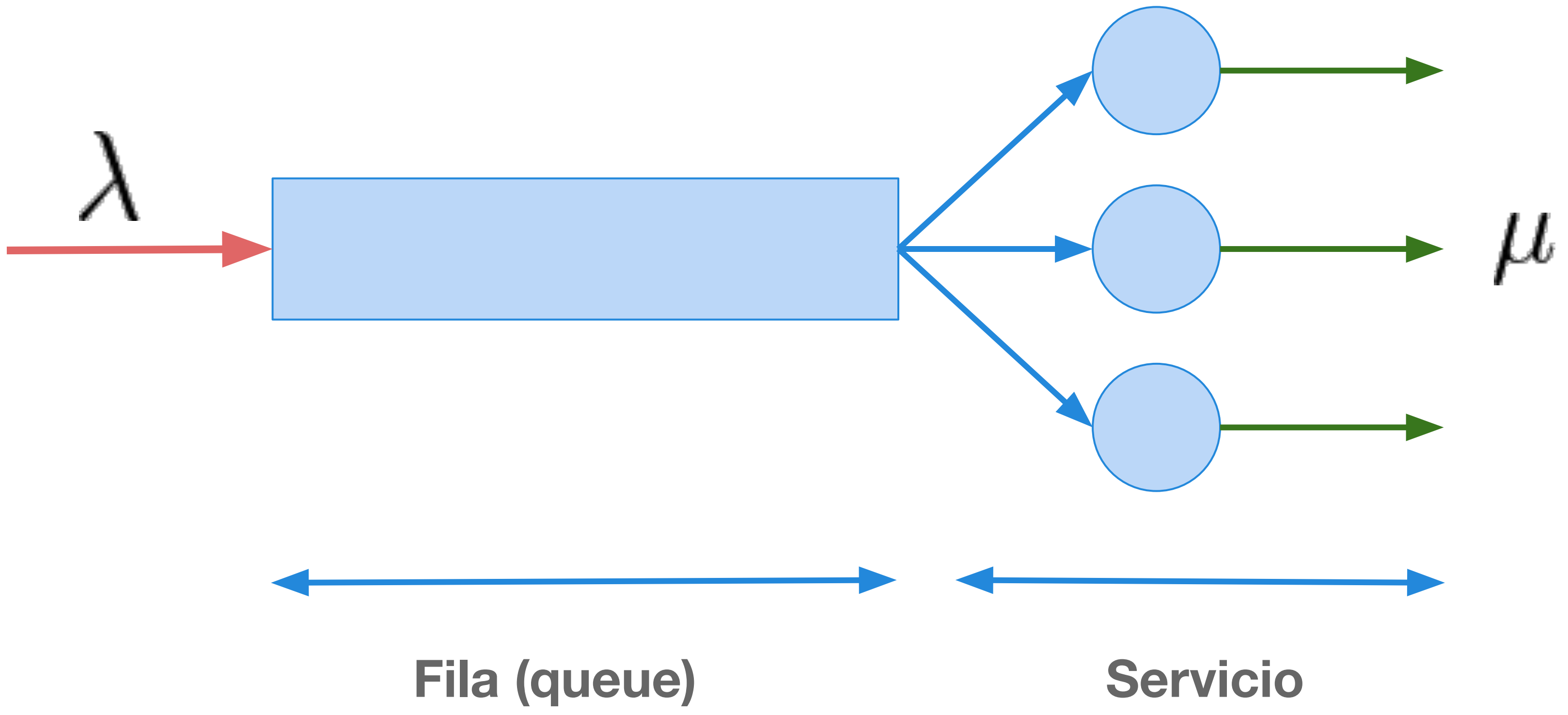
Filas de Espera
Clase 07

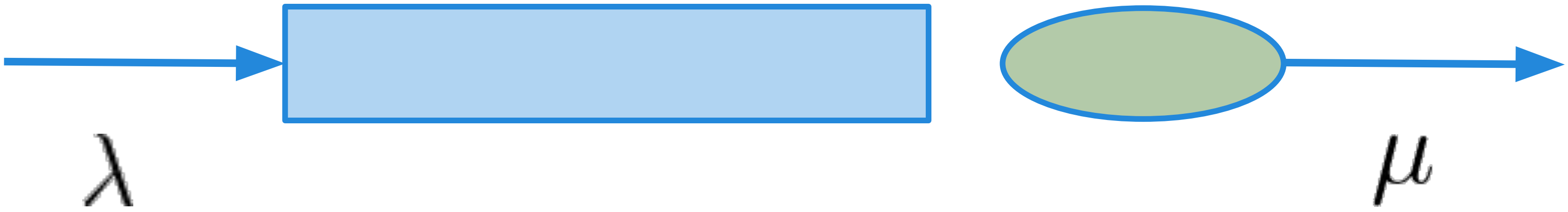
Investigación Operativa UTN FRBA
Curso: I4051
Docente: Martín Palazzo

modelos de filas de espera

Elementos de un sistema de Filas

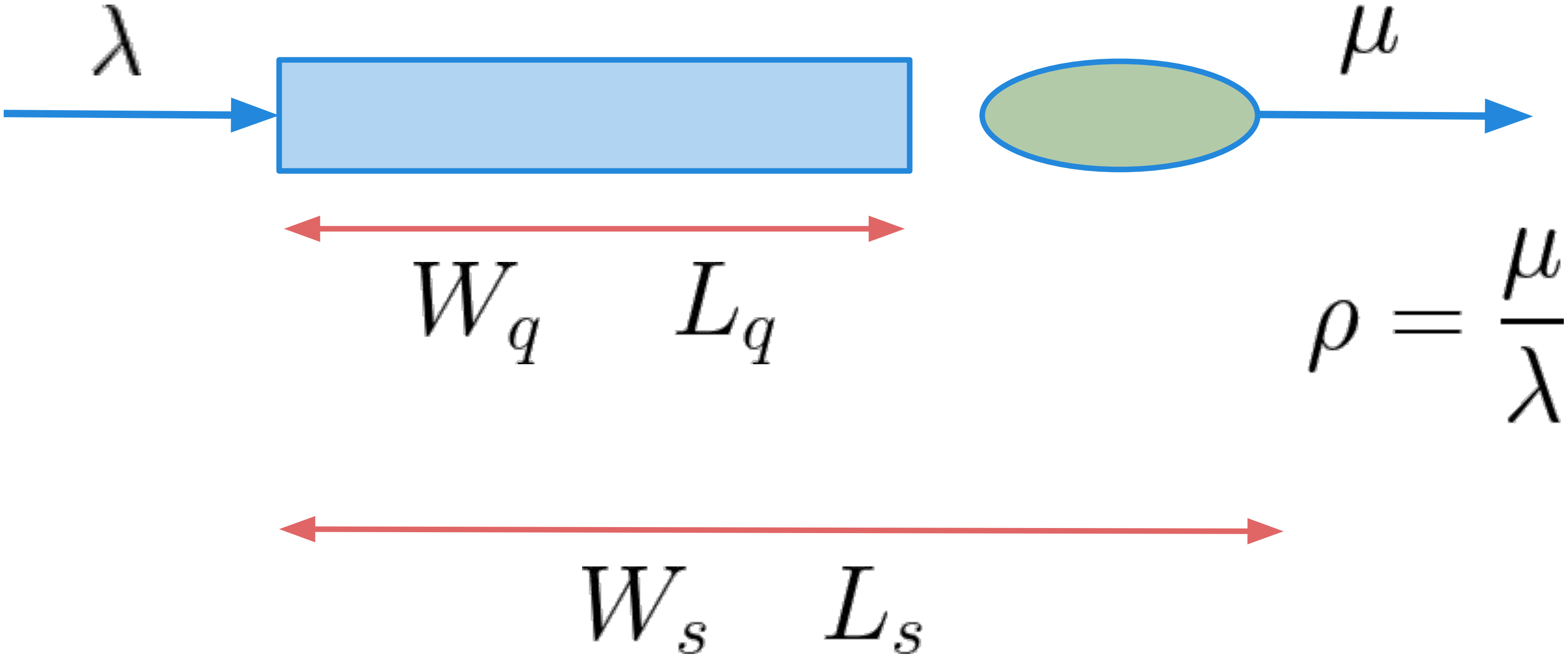


Filas de espera: métricas



- Tasa de arribos [un/t] (**lambda**)
- Tasa de despachos [un/t] (**mu**)
- Cantidad de canales de atención **M**
- Factor de tráfico (**rho** = lambda/mu*M)
- Cantidad esperada de clientes en la fila **Lq** [un]
- Cantidad esperada de clientes en el sistema **Ls** [un]
- Tiempo esperado de espera en la fila **Wq** [t]
- Tiempo esperado de espera en el sistema **Ws** [t]
- Probabilidad de estado **P**(x = i)

Filas de espera: métricas



Filas de espera: M = 1

$$M/M/1/\infty$$

Arribos y despachos Poisson, capacidad de espera infinita, fuente de clientes infinita, M = 1 (un solo canal)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_n = \rho^n . P_0$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L_q = \lambda . W_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$L = \lambda . W_s = L_q + \rho = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Filas de espera: M > 1

$$\rho = \frac{\lambda}{M\mu}$$

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{M-1} \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!}\right] + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^M}{M!(1-\rho)}}$$

$$L_q = \frac{P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M \rho}{M!(1-\rho)^2}$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$L_s = L_q + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$W_s = W_q + \left(\frac{1}{\mu}\right)$$

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0}{n!} \quad , 0 < n \leq M$$

$$P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0}{M!\left(M^{(n-M)}\right)} \quad , n > M$$

Elementos de un sistema de Filas

Arribos	λ
Despachos	μ
Factor de tráfico	φ
Tiempo promedio de espera en fila	Wq
Tiempo promedio de espera en sistema	Ws
Cantidad promedio de unidades en fila	Lq
Cantidad promedio de unidades en sistema	Ls
Probabilidad de N unidades en el sistema	P(x = n)
Cantidad de Canales en paralelo	M

Costo de filas de espera

Filas de espera: Costo

El costo total de un sistema de filas de espera es la función objetivo a optimizar. Hay 2 tipos de costos a considerar en un sistema de filas de espera:

- **Costo de oportunidad:** aquel que considera “las unidades que el sistema se pierde de despachar en un delta t por que es muy lento”.

- **Costo operativo:** considera el costo de mantener la infraestructura del sistema de filas en el mismo delta t.

Existe un equilibrio que optimiza el costo operativo vs el de oportunidad.

Filas de espera: Costo

$$C_t = C_{opo} + C_{ope} = \begin{cases} C_{opo} = \lambda . W_s . e \\ C_{ope} = M . C_m \end{cases}$$

$\lambda :$ tasa de fallas o arribos

$W :$ Tiempo promedio de espera en el sistema

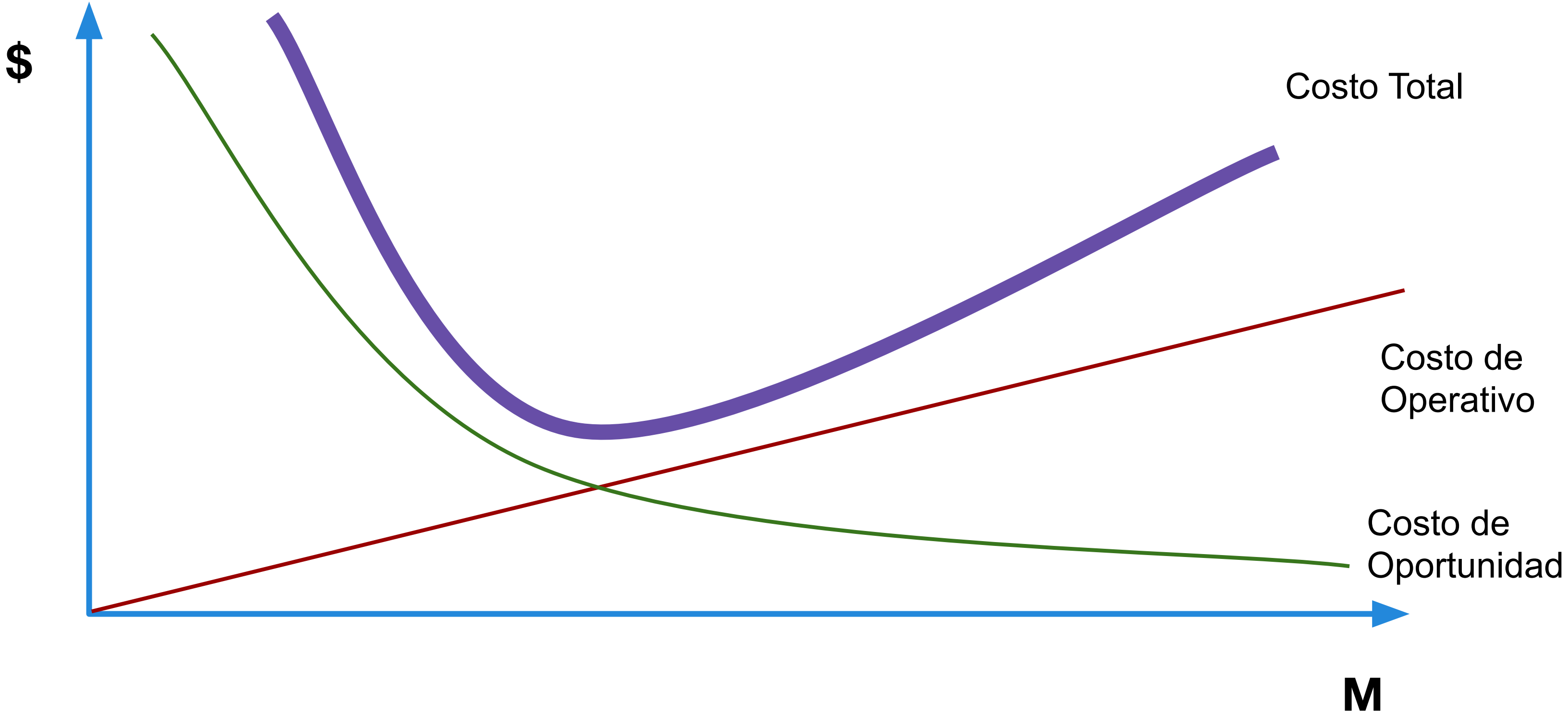
$e :$ Costo de inactividad por equipo

$M :$ Cantidad de canales

$Cm :$ Costo operativo de un canal

- Cm es al costo ($/t) de cada canal de servicio.
- e significa la ganancia $ obtenida por cada unidad despachada.

Filas de espera: Costo



Estimacion de parametros desde los datos

Estimación del parámetro lambda de una distribución exponencial desde un conjunto de datos reales.

Estimar los parámetros desde datos

$$S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

- Dado un set de datos **S** donde cada uno representa una medición entre tiempos entre eventos.

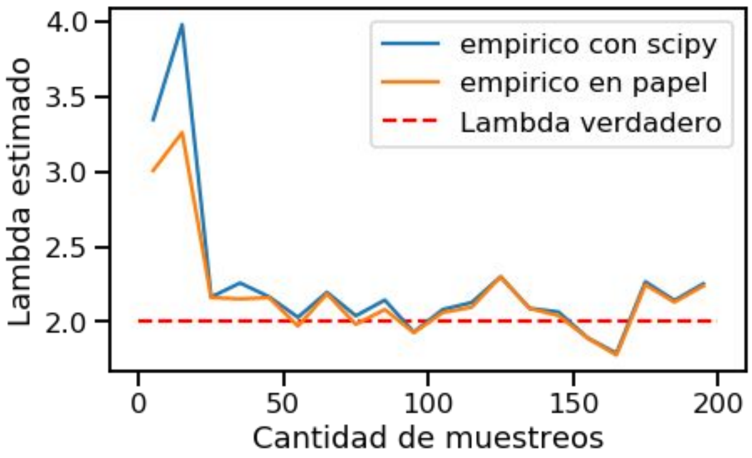
$$\beta = \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_n)}{n}$$

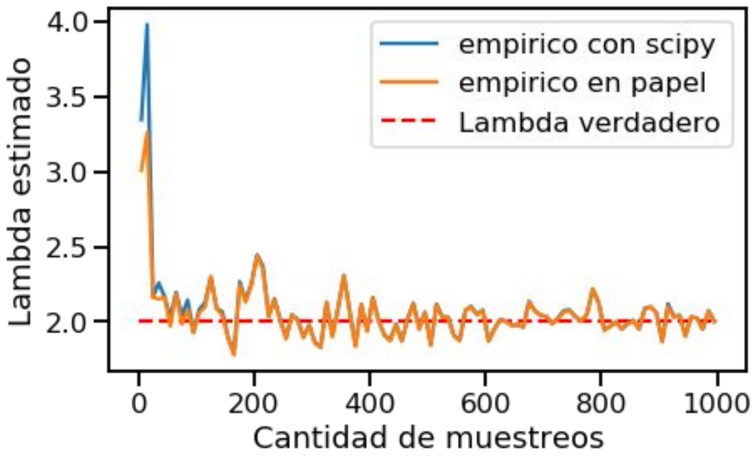
- Por medio de **máxima verosimilitud** podemos calcular de manera analítica el parámetro **Beta** que aproxima el tiempo medio entre eventos de S de una **distribución exponencial**

$$\lambda = 1/\beta$$

- Con el 1/tiempo medio entre eventos **Beta** podemos estimar entonces la cantidad media de eventos por unidad de tiempo fijo **Lambda** para luego modelar sistemas de filas de espera.

Estimar los parámetros desde datos





- Supongamos que el parámetro verdadero de un proceso de dist. Exponencial tiene lambda = 2.
- Realizamos muestreos de distintas cantidades para obtener datos. Podremos estimar el lambda analíticamente o con python librearía scipy -> exponential.fit().
- Con pocos muestreos (<10) el valor obtenido no será demasiado preciso y mismo Python (scipy) y Analíticamente en papel pueden tener algunas diferencias.
- A medida que aumentamos los muestreamos el parámetro estimado se aproximará al verdadero y la diferencia entre la estimación de Python y la analítica no será significativa

Caso re-ingeniería de mantenimiento

Ejercicio re-ingeniería: contexto

Una empresa que fabrica componentes electrónicos con miles de equipos automáticos de producción. Estos equipos eventualmente fallan y deben recibir mantenimiento.

- Cuando un equipo sale de funcionamiento, la empresa se perjudica a razón de **$60**/(hora-no-funcionamiento).

- Los estándares de calidad solicitan que un equipo no debe estar fuera de operación más de **2 horas**.

- El costo **total** de mantenimiento no puede exceder los **140**$/hora.

- Hay una sola unidad de reparación.

Ejercicio re-ingeniería: opciones

Para eso se decide analizar la situación actual y analizar alternativas de servicios de otras unidades de negocios así determinar cuál es la mejor opción:

Situación Actual -> **servicio 0**

- El service cuesta $**10**/hora
- Se disponen de 20 mediciones de tiempo entre reparaciones

Alternativas -> **servicio 1**

- El service cuesta $**140**/hora
- Se disponen de 20 mediciones de tiempo entre reparaciones

Alternativas -> **servicio 2**

- El service cuesta $**80**/hora
- Se disponen de 20 mediciones de tiempo entre reparaciones

Se solicita determinar cuál opción deberá implementarse.

Ejercicio re-ingeniería: mediciones

Se dispone de muestras de 20 mediciones de tiempo entre eventos para los tiempos entre arribos de maquinas falladas, para los despachos de reparaciones de la situación actual (0), para la alternativa 1 y la alternativa 2.

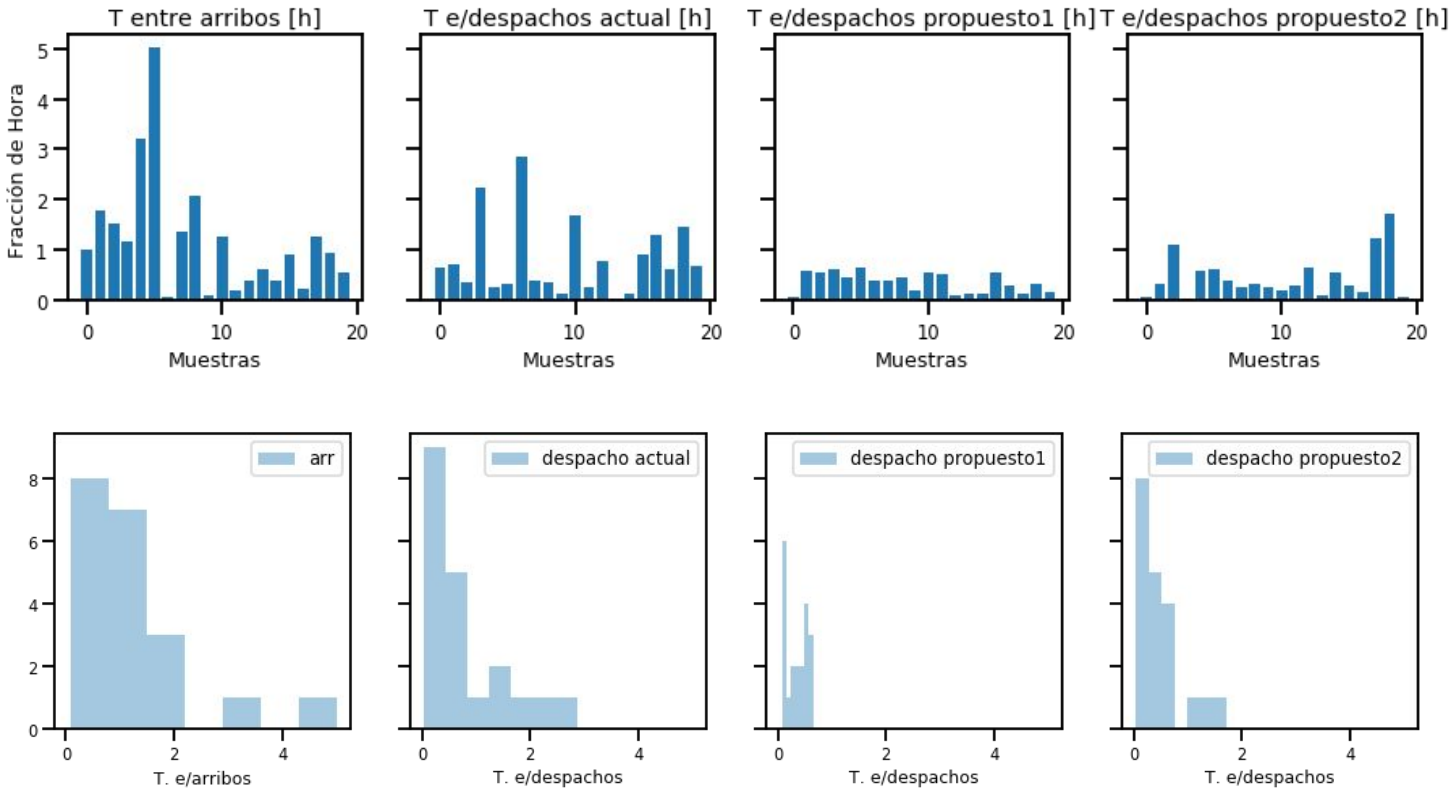
Datos de tiempo entre arribos
[1.02, 1.77, 1.53, 1.18, 3.2 , 5.02, 0.09, 1.36, 2.08, 0.11, 1.28, 0.19, 0.41, 0.63, 0.4 , 0.91, 0.23, 1.26, 0.94, 0.56]

Datos de tiempo entre despachos 0
[0.65, 0.74, 0.36, 2.24, 0.27, 0.34, 2.86, 0.39, 0.37, 0.14, 1.68, 0.26, 0.78, 0.04, 0.15, 0.91, 1.31, 0.64, 1.47, 0.7]

Datos de tiempo entre despachos 1
[0.09, 0.61, 0.57, 0.63, 0.47, 0.65, 0.39, 0.4 , 0.46, 0.21, 0.57, 0.52, 0.1 , 0.15, 0.14, 0.55, 0.31, 0.14, 0.32, 0.16]

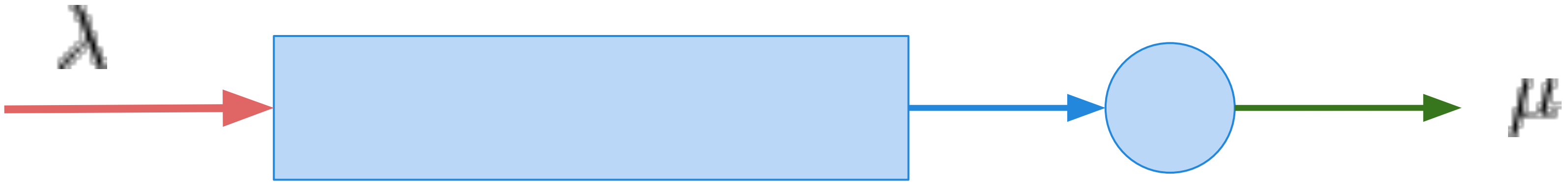
Datos de tiempo entre despachos 2
[0.08, 0.35, 1.12, 0.04, 0.59, 0.62, 0.4 , 0.25, 0.32, 0.27, 0.21, 0.31, 0.66, 0.12, 0.56, 0.31, 0.18, 1.24, 1.71, 0.06]

Análisis exploratorio de datos



Partiendo de cada set de datos podemos primero visualizar con gráficos de barras el tiempo entre eventos (arriba) y también podemos realizar un histograma sobre los tiempos entre eventos para cada set de datos para saber cómo se distribuyen.

Resolución



Suponemos M = 1

Filas de espera: M = 1

$M/M/1/\infty$ Arribos y despachos Poisson, capacidad de espera infinita, fuente de clientes infinita, M = 1 (un solo canal)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_n = \rho^n . P_0$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L_q = \lambda . W_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$L = \lambda . W_s = L_q + \rho = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Resolución en clase

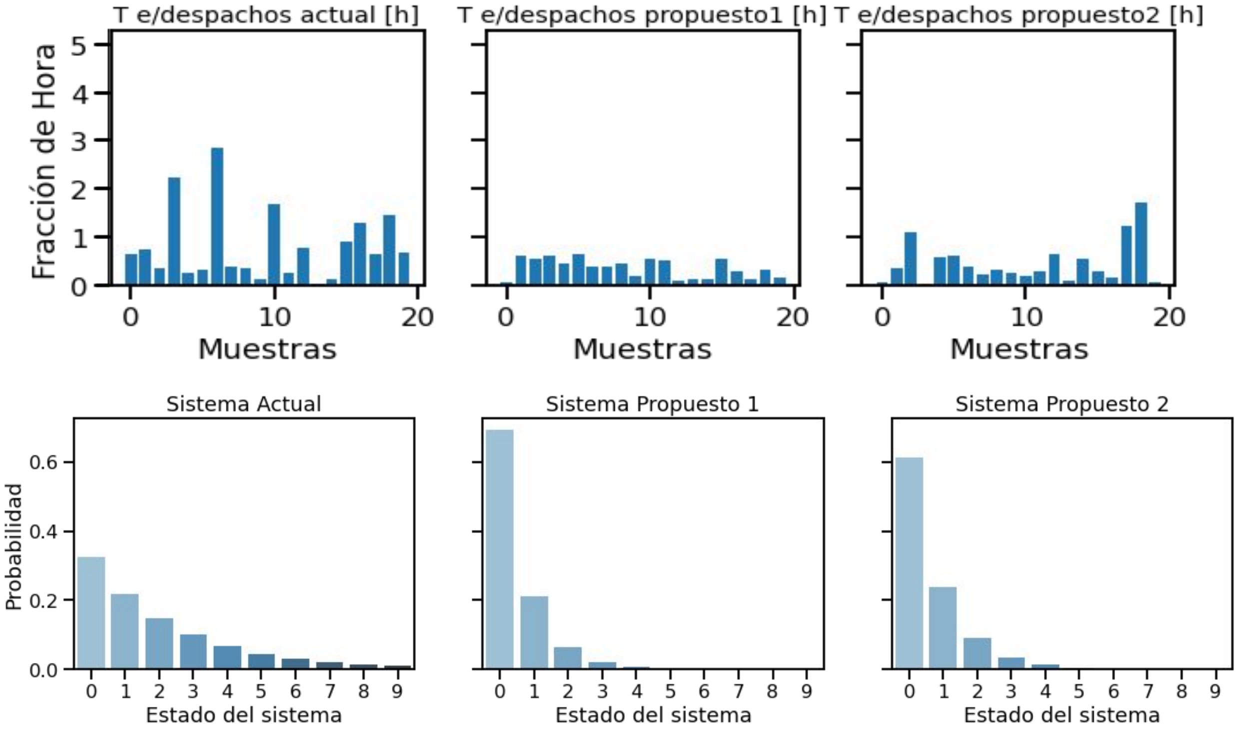
1. Estimar parámetros desde los datos
2. Computar métricas de cada alternativa
3. Analizar las opciones y decidir por la mejor
4. Solucion en Python

Computamos los parámetros desde los datos

$$\hat{\lambda} =$$

$$\hat{\mu} =$$

Algunas respuestas: probabilidad de estado



https://github.com/investigacion-operativa/pyOperativ/blob/main/05_filas/casos_codigo/ioperativ_clase07_filas_caso_mantenimiento.ipynb