

# Transporte: Modelización y Resolución con programación lineal

## Clase 21

Investigación Operativa UTN FRBA 2021

Docente: Rodrigo Maranzana

Curso: I4051 (Palazzo)

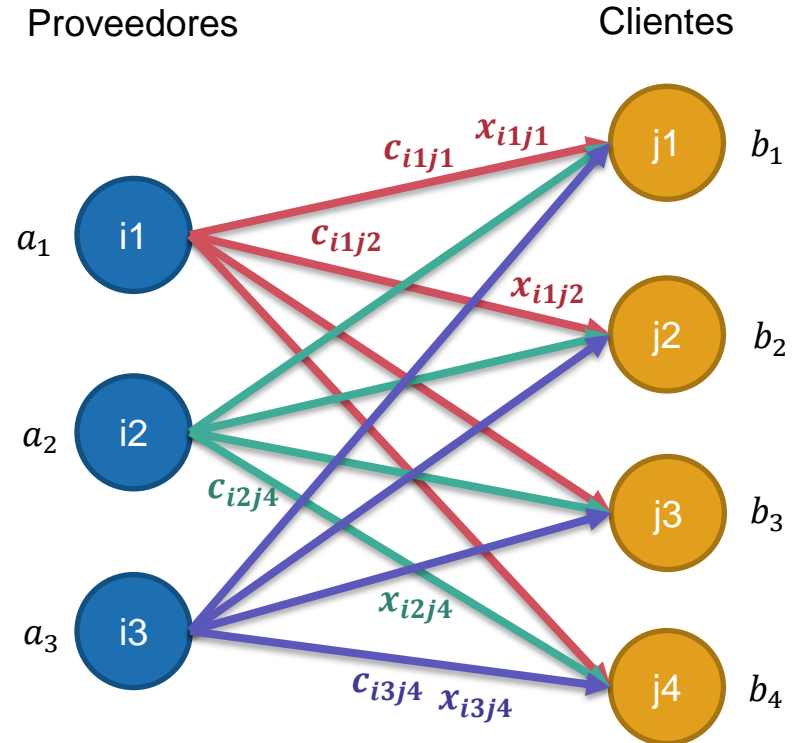
# Transporte: repaso del modelo

Ejemplo con  $m=3$  y  $n=4$

$$Z = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 c_{ij} x_{ij}$$

s.a:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^4 x_{ij} = a_i, & i = (1, 2, 3) \\ \sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j, & j = (1, 2, 3, 4) \end{cases}$$



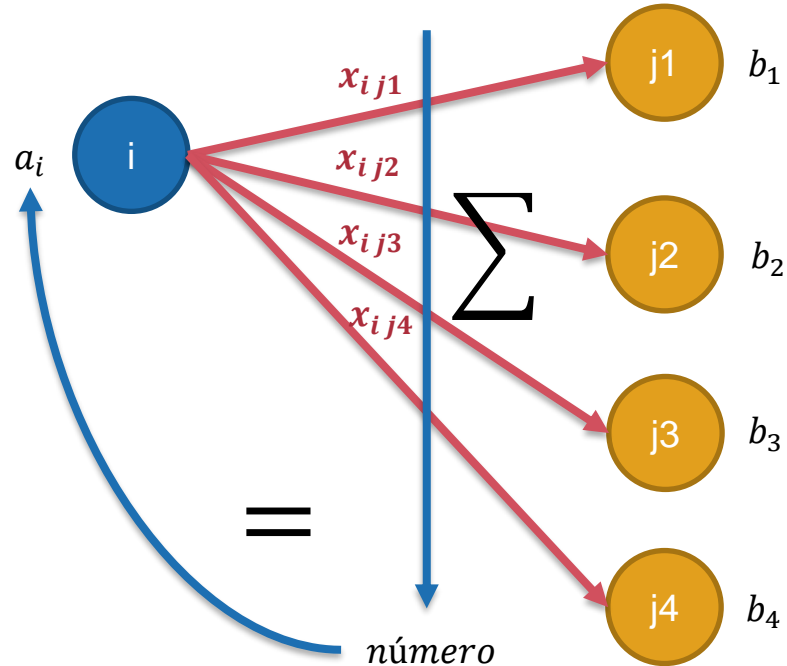
\*\* Por una cuestión de legibilidad, solo algunos costos  $c_{ij}$  están puestos en el gráfico

# Transporte: repaso del modelo

Oferta de 1 proveedor se coloca completamente en el mercado:

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} = a_i, i = (1, 2, 3)$$

“Suma de salidas del nodo i”

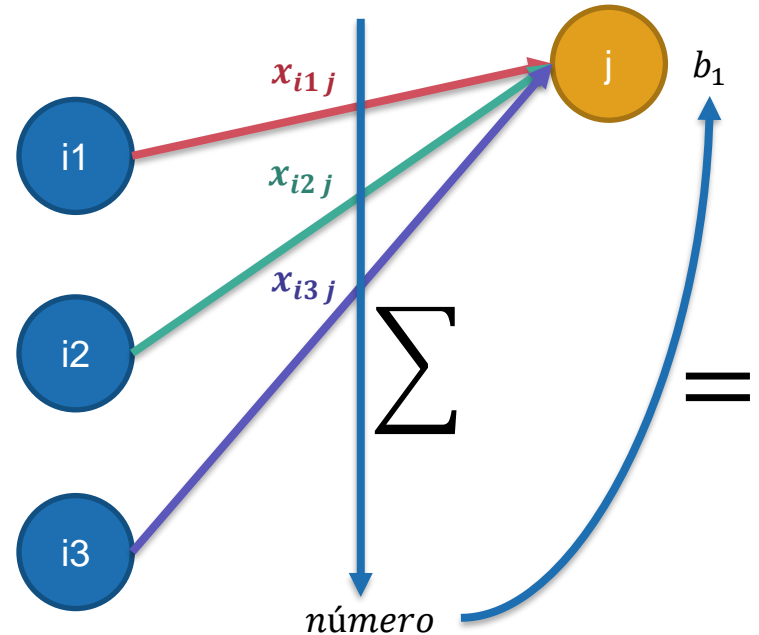


# Transporte: repaso del modelo

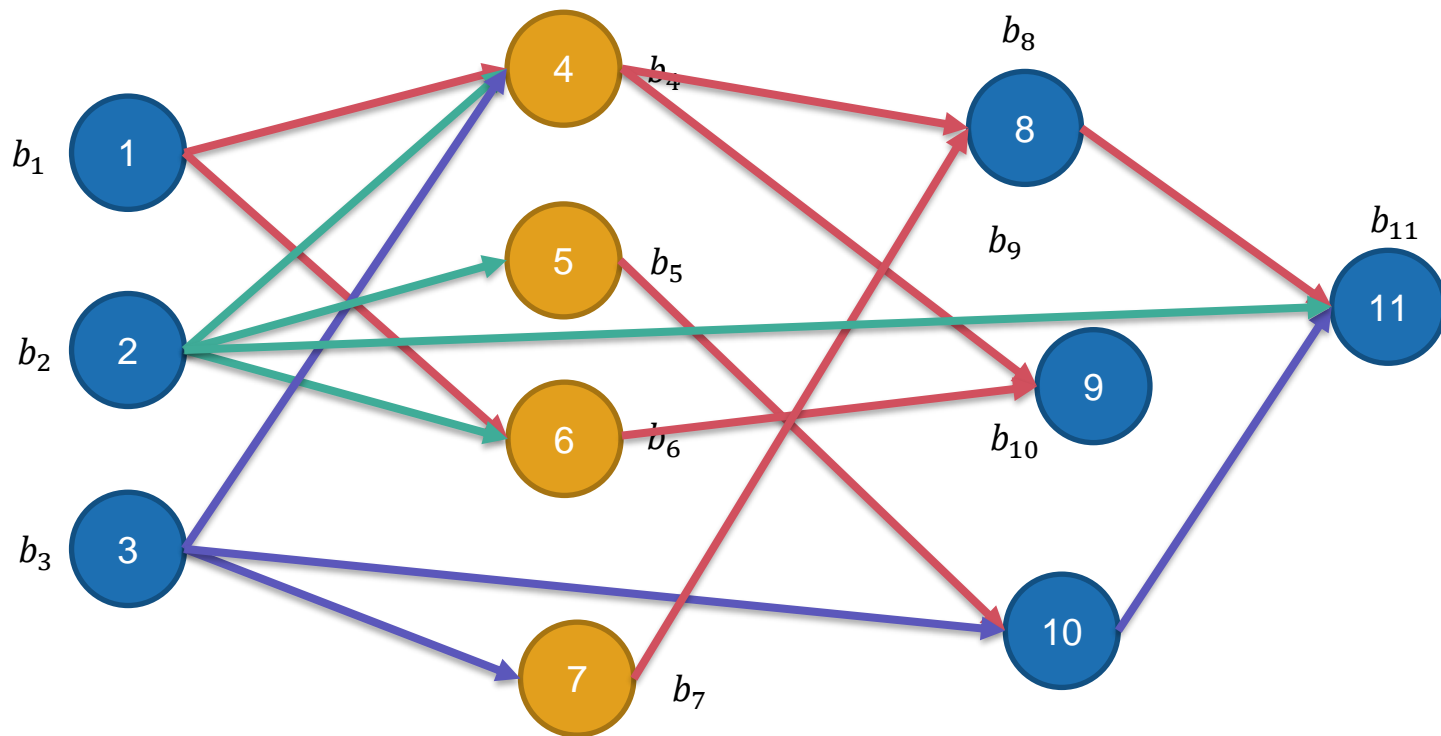
Demanda de 1 cliente se satisface completamente en el mercado:

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j, j = (1, 2, 3, 4)$$

“Suma de llegadas al nodo j”

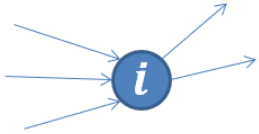


# ¿Hay alguna manera de generalizar el modelo?



# Modelo de Flujo de Mínimo Costo (FMC)

$$\min \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij}$$



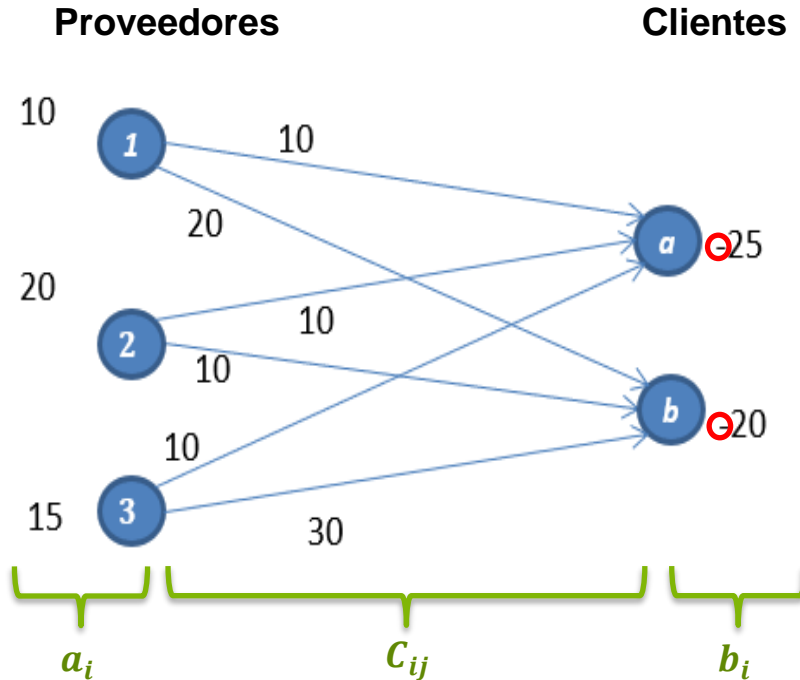
$$\sum_{j \in A} x_{ij} - \sum_{j \in A} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in N$$

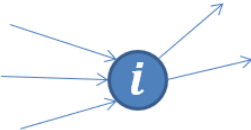
$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall ij \in A$$

**Con este modelo se puede resolver:**

- Camino más corto
- Máximo flujo
- **Transporte**
- Asignación
- Distribución
- Camino crítico
- ....

# Ejemplo de Transporte como FMC

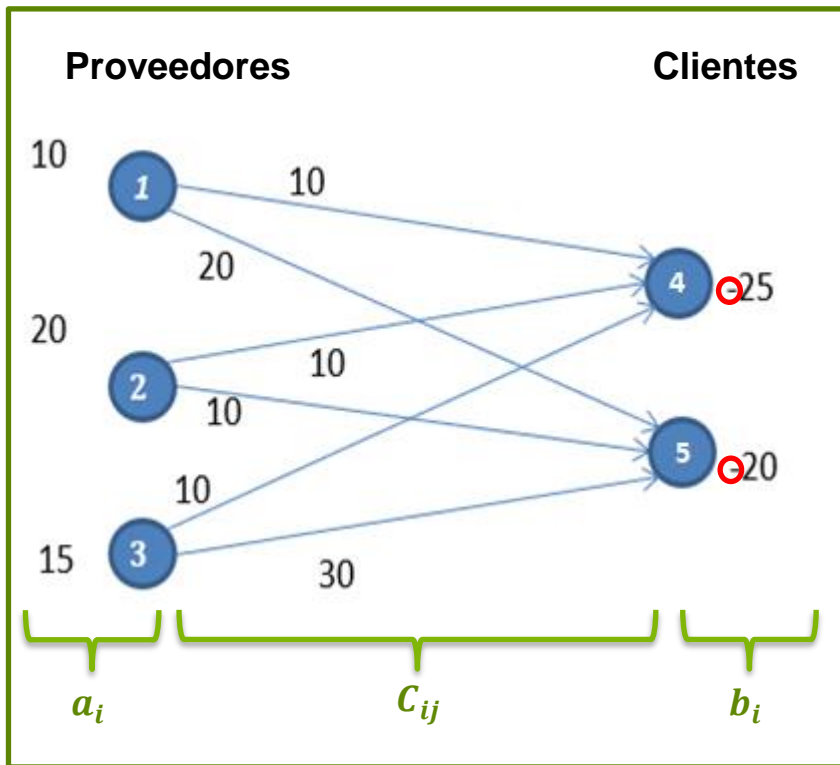


$$\min \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij}$$


$$\sum_j x_{ij} - \sum_j x_{ji} = b_i \quad \forall i \in N$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall ij \in A$$

# FMC en para SIMPLEX



$$\min \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij} \quad \text{MIN } 10x_{14} + 20x_{15} + 10x_{24} + 10x_{25} + 10x_{34} + 30x_{35}$$

$$\sum_j x_{ij} - \sum_{ji \in A} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in N$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall ij \in A$$

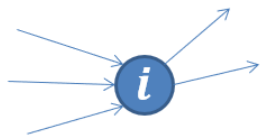
$$\left\{ \begin{array}{l} x_{14} + x_{15} = 10 \\ x_{24} + x_{25} = 20 \\ x_{34} + x_{35} = 15 \\ -(x_{14} + x_{24} + x_{34}) = -25 \\ -(x_{15} + x_{25} + x_{35}) = -20 \end{array} \right.$$

$$x_{14}, x_{15}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{35} \geq 0$$



# Forma Matricial FMC

$$\min \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij}$$



$$\sum_{ij \in A} x_{ij} - \sum_{ji \in A} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in N$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij} \quad \forall ij \in A$$

$$\text{Min } C^T X$$

Matriz Nodo-Arco

$$\textcircled{A} X = b$$

$$L \leq X \leq U$$

“n” arcos

“m” nodos

$$\text{Min } [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

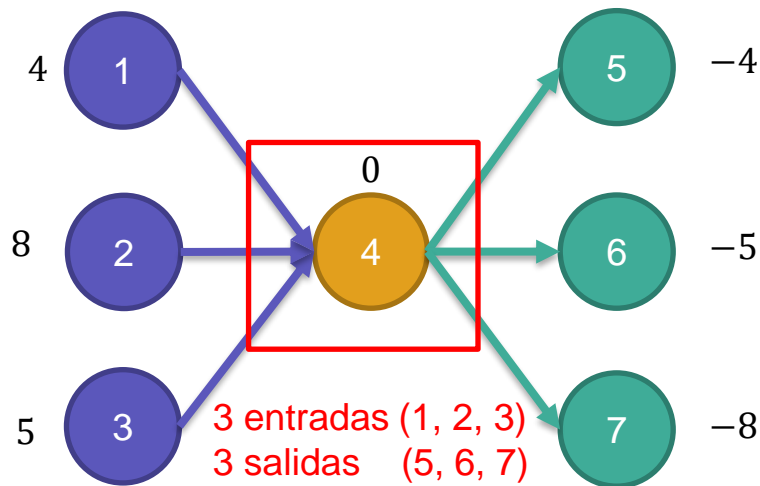
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_n \end{bmatrix}$$

# ¿Cómo funciona la Matriz Nodo-Arco?

Nodo	Arco						
	14	24	34	45	46	47	
1	1	0	0	0	0	0	$x_1$
2	0	1	0	0	0	0	$x_2$
3	0	0	1	0	0	0	$x_3$
4	-1	-1	-1	1	1	1	$x_4$
5	0	0	0	-1	0	0	$x_5$
6	0	0	0	0	-1	0	$x_6$
7	0	0	0	0	0	-1	$x_7$

Matriz Nodo-Arco



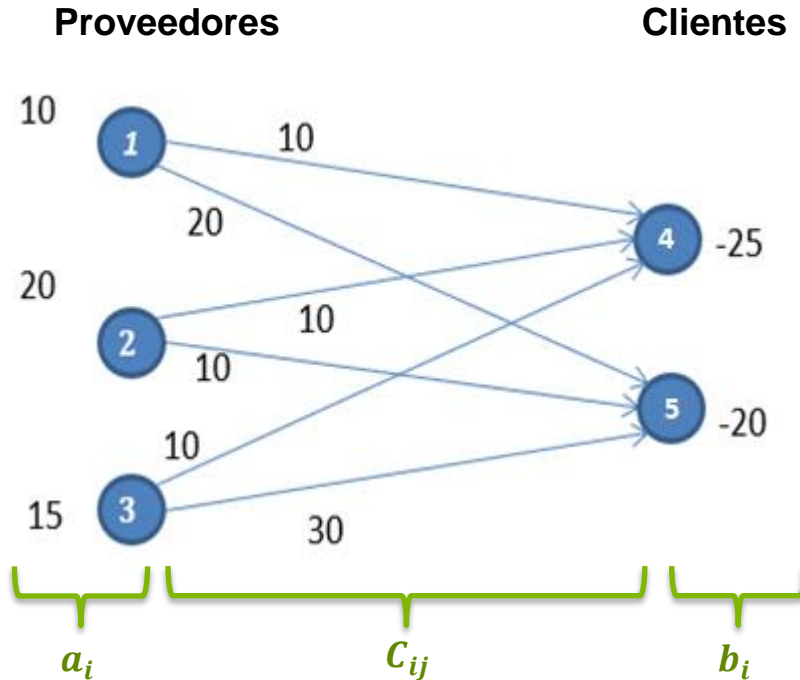
$$-x_{14} - x_{24} - x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{47} = 0$$

$$(x_{45} + x_{46} + x_{47}) - (x_{14} + x_{24} + x_{34}) = 0$$

$$\sum \text{salidas} - \sum \text{entradas} = \text{neto del nodo} \longrightarrow \sum_{ij \in A} x_{ij} - \sum_{ji \in A} x_{ji} = b_i \quad \forall i \in N$$

# Ejemplo de Transporte como FMC Matricial

"6" arcos  
"5" nodos



$$\text{Min } [10 \quad 20 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 30] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Arco

Nodo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \\ -25 \\ -20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

# Resolución con *scipy.optimize*

$$\begin{array}{c} \text{Min} [10 \quad 20 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 30] \end{array} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$
  

		Arco						
		1	2	3	4	5	6	
1	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \\ -25 \\ -20 \end{bmatrix}$					
2	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$							
3	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$							
4	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$							
5	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$							

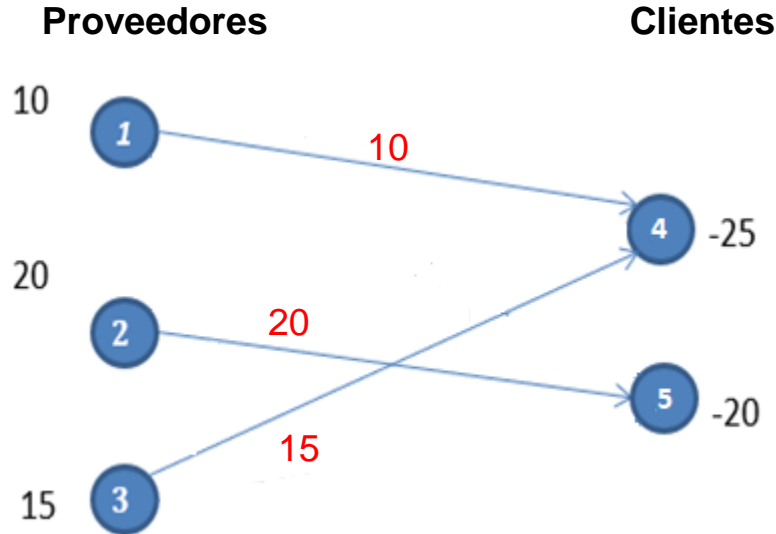
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

```
from scipy.optimize import linprog
```

```
res = linprog(C, A_eq, b_eq, bounds=bounds, method='revised simplex')
```

```
print(res.fun, res.x)
```

# Ejemplo de Transporte como FMC Matricial



Cantidad para cada arco: [10. 0. 0. 20. 15. 0.]

Costo mínimo total: 450.0