Cadenas de Markov
Clase 04

Investigación Operativa UTN FRBA 2020
Curso: I4051
Docente: Martín Palazzo

Agenda clase 04

- Tipos de Cadenas de Markov
- Calculo Estado Estacionario
- Caso cadenas de markov marketing online
- Ejercicios Cadenas de Markov

Caso de estudio: marketing digital

Toy example de Cadenas de Markov

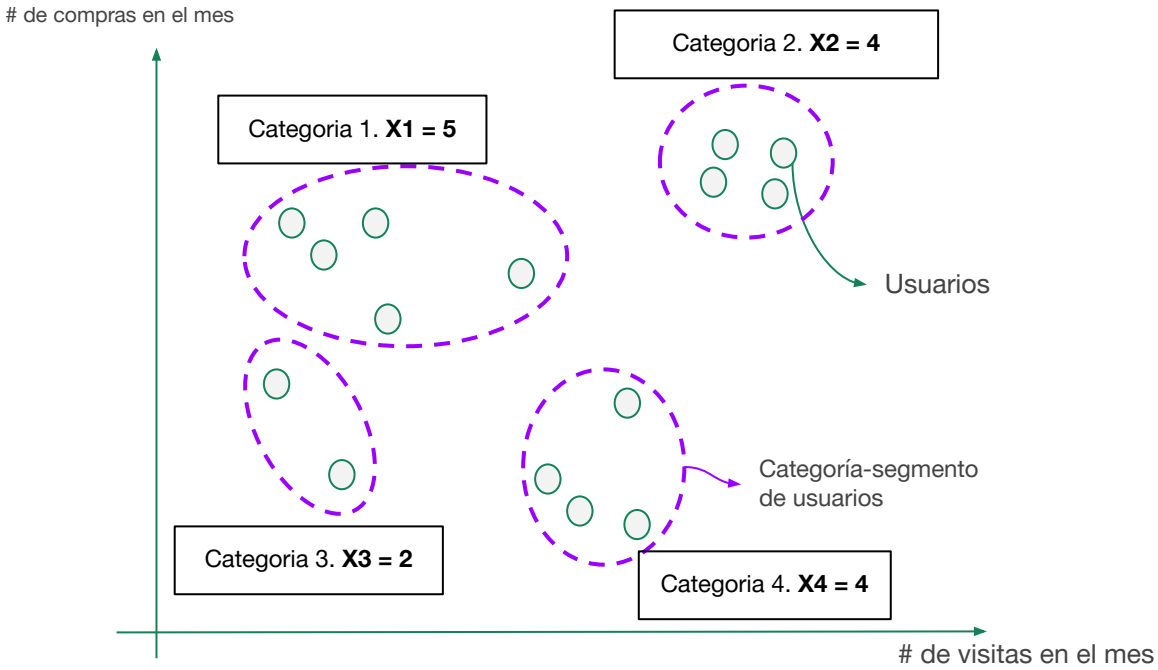
Marketing online (aka growth hacking)

Métricas importantes en marketing online

- DAUs (Daily Active Users)
- MAUs (Montly active users)
- Daily Installs (#)
- Retention (days/months)
- Life time value ($)
- Impressions (#)
- Clicks (#)
- Cost per click ($)
- Conversion rate (%)
- **# conversiones (compra)**
- **Cantidad de visitas**

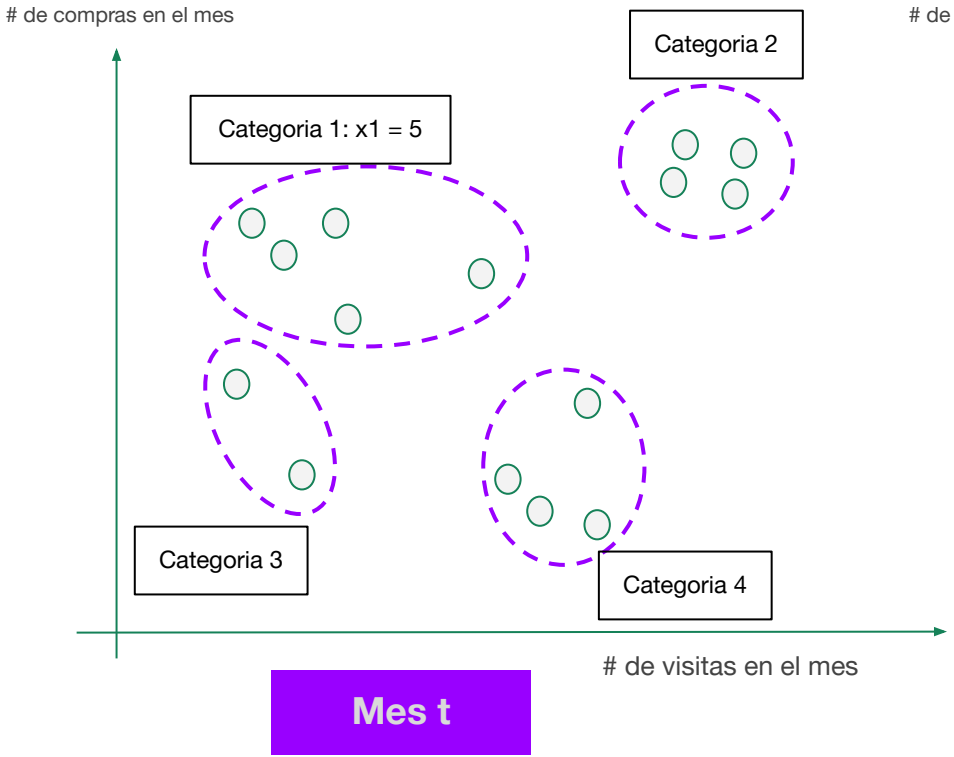
En el equipo de marketing online de una startup de la industria de internet tenemos una user-base de 1000 clientes con seguimiento en el mes 0 y el mes 1. Entre las múltiples métricas a mensurar nos enfocamos en cantidad de conversiones y cantidad de visitas a la app. Utilizando las métricas mencionadas categorizamos a los clientes en 9 grupos para realizar marketing de precisión. Conociendo la transición de clientes entre el mes 0 y el mes 1 queremos estimar el número de clientes en cada categoría luego de 20 meses.

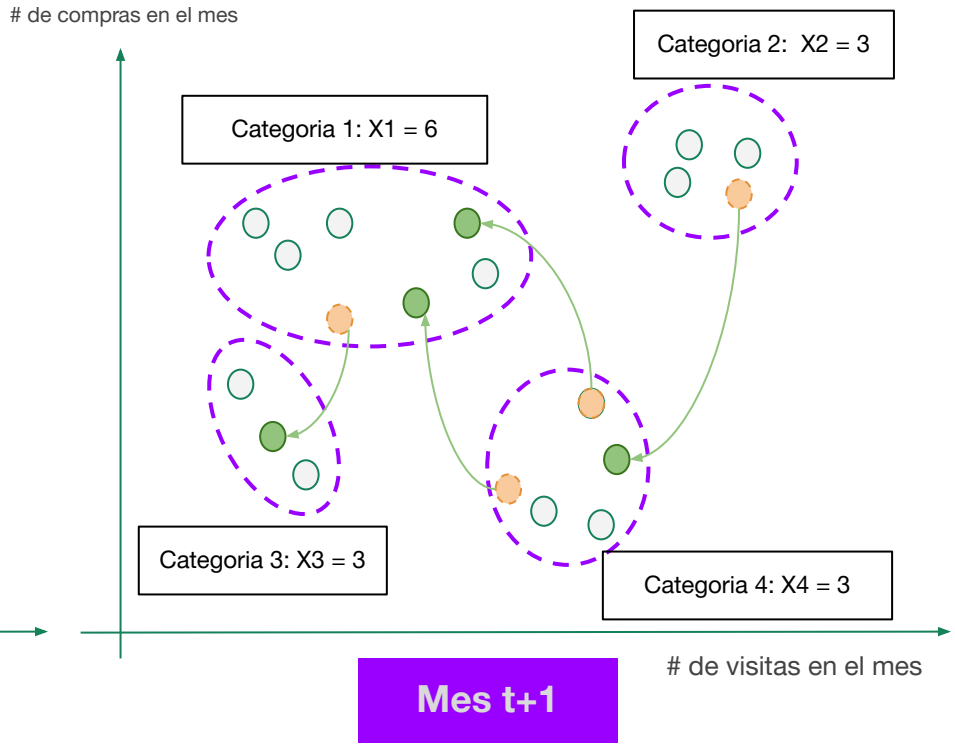
Modelado del problema



Estado del sistema: categorias. Las categorías las descubrimos con un algoritmo de clustering (aprendizaje no supervisado) llamado k-means. El algoritmo determina grupos basados en la similaridad (distancia) entre muestras/usuarios.

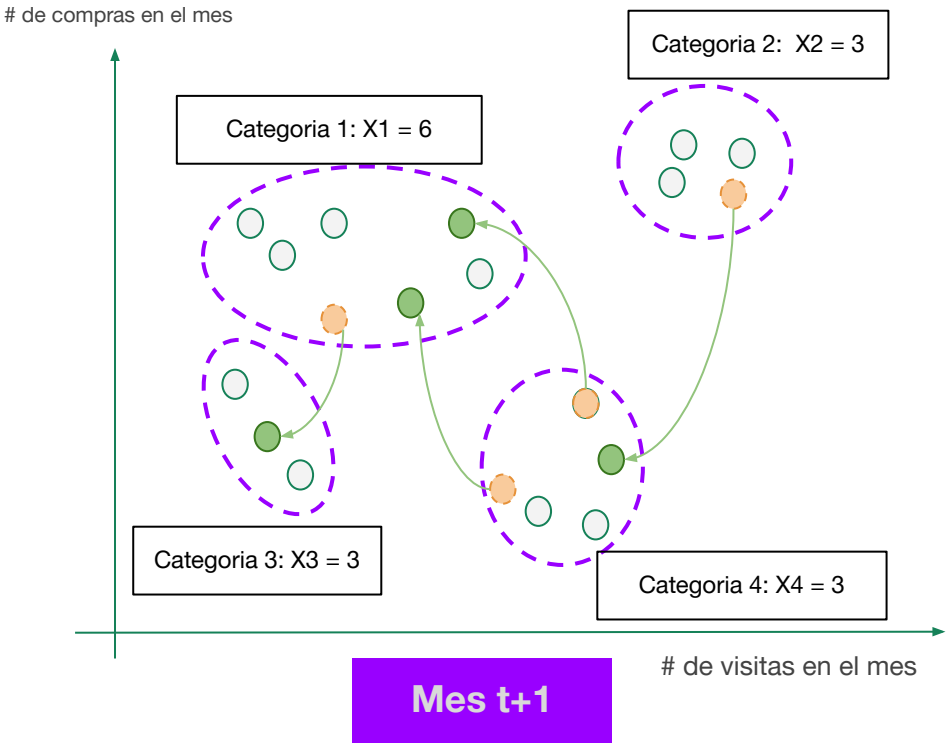
Modelado del problema





El estado del sistema en cada mes corresponderá a la cantidad de clientes en cada categoría. La transición corresponderá a la cantidad de clientes que migran de un estado al otro en 1 mes.

Modelado del problema



	Cat 1.	Cat 2.	Cat. 3	Cat. 4
Cat. 1				
Cat. 2		P_{ij}		
Cat. 3				
Cat. 4				

$$P_{ij} = \frac{\sum_{c=1}^{n} x_c^{(t+1)} = j}{\sum_{c=1}^{n} x_c^{(t)} = i}$$

Simulación Cadena de Markov en Python

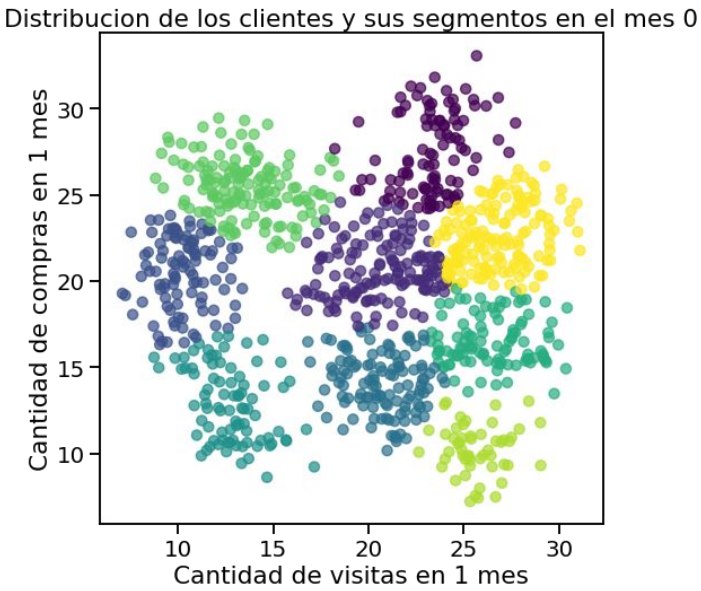
Pseudo codigo

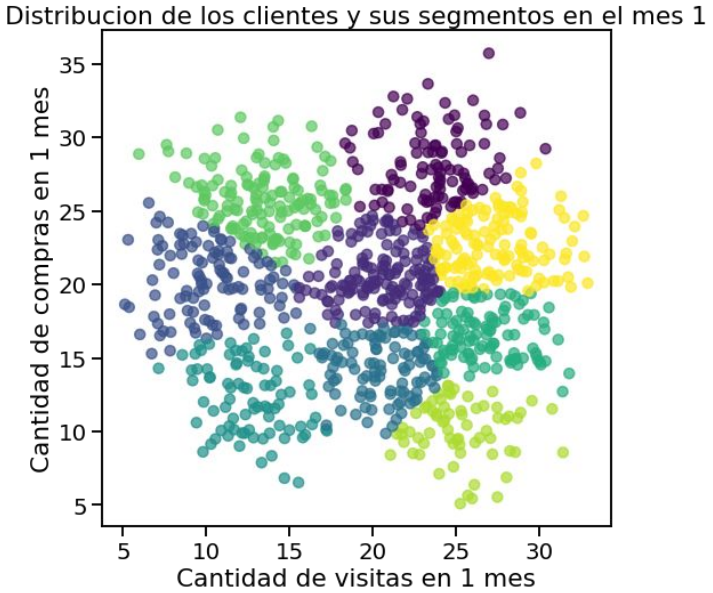
1. Calculamos la transición de clientes entre el mes 0 y el 1 entre estados/categorias. Es decir que construimos la matriz de transición basándonos en la cantidad de clientes que migraron de un estado al otro entre el mes 0 y 1.

1. Con la distribución de clientes en los diferentes estados del mes 0 armamos el vector de probabilidad de estado inicial.

1. Simulamos la cadena de markov m meses hacia adelante utilizando la matriz de transición de 1 paso y los clientes en el t=0.

Segmentamos los usuarios en mes 0 y 1



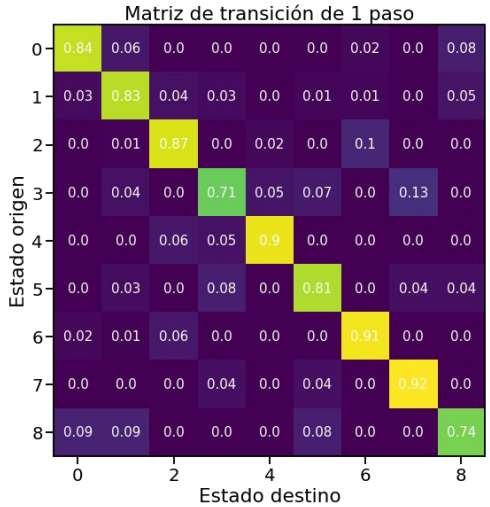


En nuestro problema real tenemos 1000 clientes distribuidos en 7 segmentos visualizados con un color cada uno. La visualización detalla la distribución de clientes por categoría en el mes 0 y el mes 1.

Calculamos la matriz de transición de 1 paso

```python
# vector de nx1 con indice de cada cliente en cada categoria/estado
# mes 0
states0
# mes 1
states1

# cantidad de estados
n = 7

# Genero una matriz de 7x7 llena de zeros con np.zeros(dim0, dim1).
# Esta sera mi matriz de transicion de 1 paso
tr = np.zeros((n,n))

# con un doble ciclo for completo la matriz de transicion "tr"
for i in range(0,n):
    for j in range(0,n):
        # Para el renglon i y columna j me pregunto cuantos
        # clientes estaban en el estado "i" y pasaron al "j" en 1 mes.
        tr[i,j] = (states1[states0 == i] == j).sum()/(states0 == i).sum()
```

$$P\left(\Delta t = 1\right) = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & P_{32} & \dots & P_{2n} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & \dots & P_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & P_{ij} & \dots \\ P_{n1} & \dots & \dots & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$



Sabiendo en qué estado estaba cada cliente en el mes 0 y en cual estaba en el mes 1 podemos calcular la fracción de clientes que migran de un estado “i” a otro “j” en 1 mes.

https://github.com/investigacion-operativa/pyOperativ/blob/main/04_markov/casos_codigo/ioperativ_clase04_simulacion_cadenas_markov.ipynb

Determinamos el vector estado inicial

$$p\left(t_0\right) = \left[p_1(t_0), p_2(t_0), ..., p_i(t_0), ..., p_n(t_0)\right]$$

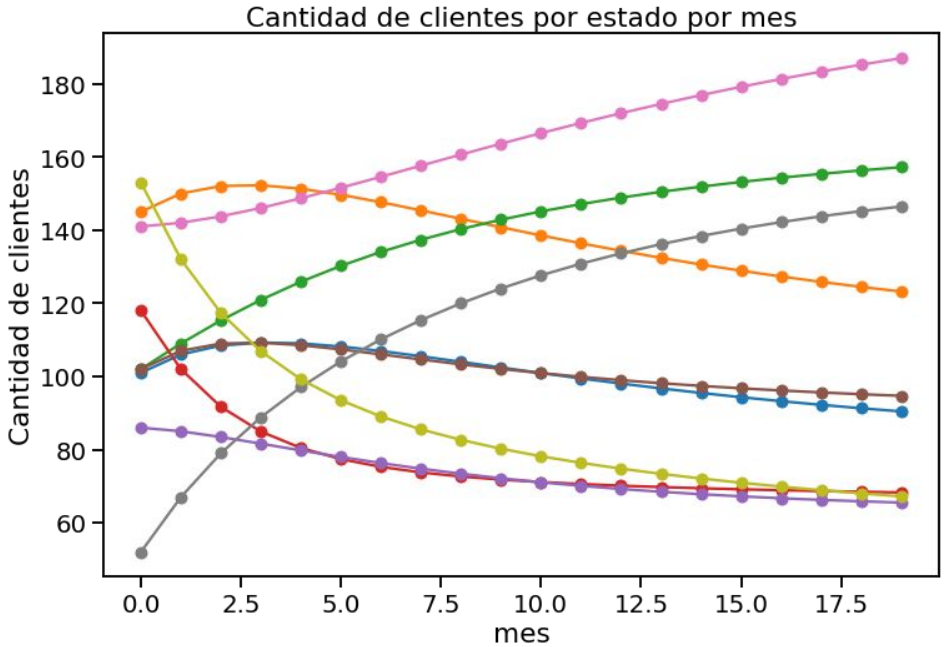
```python
# Determino el estado inicial
estado_0 = np.zeros(n)

# Completo el vector de estado inicial
for g in range(0,n):
    estado_0[g] = (states0 == g).sum()/ len(states0)
```

Con los datos iniciales del problema podríamos determinar la cantidad de clientes que hay por estado en el mes 0 y considerarlo como el vector de estado inicial. Si bien tenemos las cantidades absolutas y trabajaremos con ellas en este problema, podríamos pasar estas a valores de probabilidad determinando la fracción del total de clientes por estado.

https://github.com/investigacion-operativa/pyOperativ/blob/main/04_markov/casos_codigo/ioperativ_clase04_simulacion_cadenas_markov.ipynb

Simulamos la cantidad de clientes por estado utilizando la matriz de transición definida

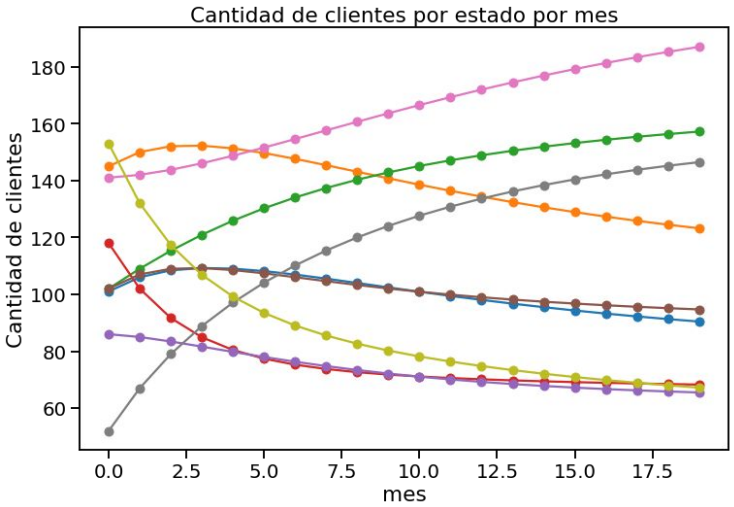
```python
# cantidad de pasos que quiero simular la cadena de markov
iteraciones = 10

# matriz donde voy a simular la cantidad de clientes por estado paso-a-paso
valor_estados = np.zeros((cant_estados, iteraciones))

# ciclo for para la cantidad de pasos
for j in range(iteraciones):

    # ciclo for para la cantidad de estados
    for i in range(0,cant_estados):
        # basandome en el vector
        valor_estados[i,j] = vec_estado_t[i]
        # En cada paso (mes) el vector de estado ira cambiando.

    vec_estado_tplus1 = tr.T.dot(valor_estados[:,j])
    # luego en los pasos siguientes el vector de estado
```

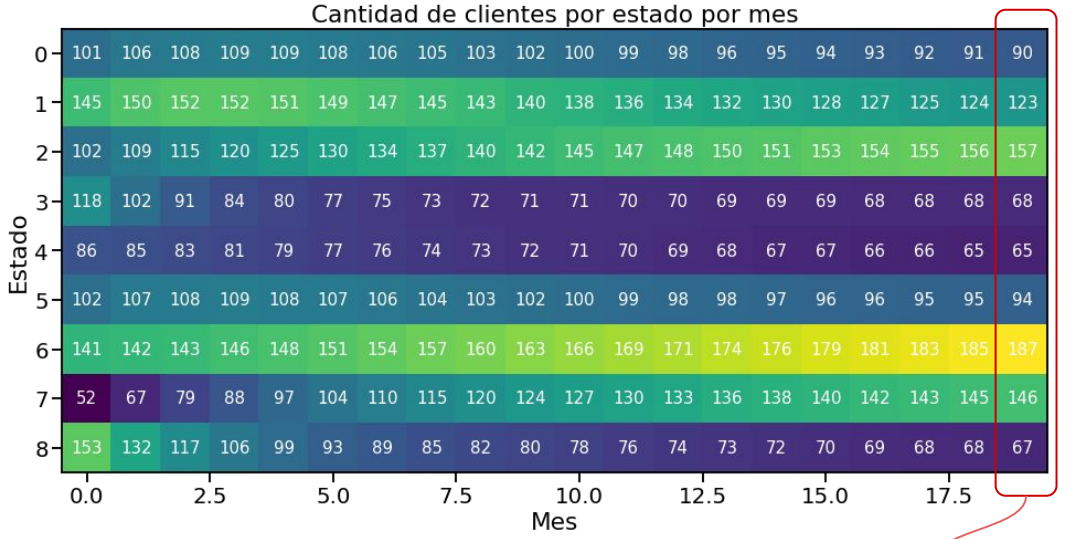


Simulamos la cantidad de clientes por estado considerando la matriz de transición obtenida y el vector de estado inicial en el mes 0. El resultado indicará cómo evolucionaría la cantidad de clientes por estado en cada mes considerando el vector de estado inicial y la matriz de transiciòn de 1 paso y dado una cantidad “m” de meses (o pasos). En el ejemplo realizamos la simulación con 20 meses (20 pasos). Observamos que el sistema converge.

https://github.com/investigacion-operativa/pyOperativ/blob/main/04_markov/casos_codigo/ioperativ_clase04_simulacion_cadenas_markov.ipynb

Simulamos la cantidad de clientes por estado utilizando la cadena de markov definida





$$\lim_{m \to \infty} p^{(m)}$$

Aproximación al vector de estado estacionario luego de m=20 iteraciones.

Recordar que en estas visualizaciones mostramos la cantidad de clientes en cada estado luego de “m” pasos dada una matriz de transiciòn y un estado inicial en t0. Tranquilamente con estos datos podríamos transformar las cantidades absolutas de cada estado en probabilidades de estado. Si bien con m=20 no llegamos al estado estacionario aunque se puede observar la convergencia luego de m pasos.

https://github.com/investigacion-operativa/pyOperativ/blob/main/04_markov/casos_codigo/ioperativ_clase04_simulacion_cadenas_markov.ipynb

Tipos de cadenas de markov

Toy example de Cadenas de Markov

Tipos de Cadenas de Markov

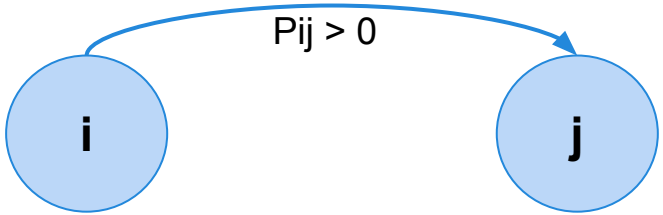
- Estados
  - Estados Accesibles
  - Estados Comunicantes
- Clases
  - Clase Recurrente
  - Clase Transitoria
  - Cadena Ergodica

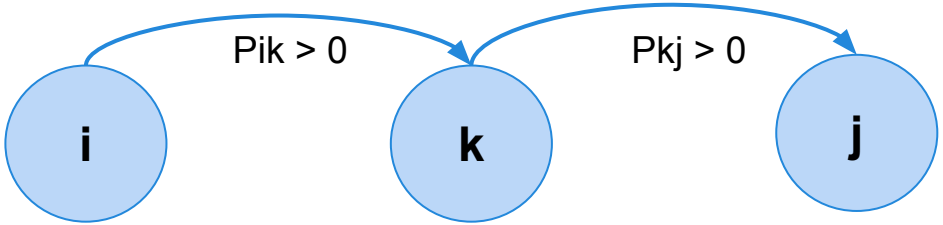
Tipos de Cadenas de Markov

- Estado “j” es **Accesible** desde “i” en algún paso n si pij(n) > 0.
- Dos estados “i” y “j” son **Comunicantes** si “j” es accesible desde “i” y viceversa.
- Estado **absorbente**, caso particular de clase recurrente (una vez que la cadena lo ha alcanzado no puede abandonarlo).

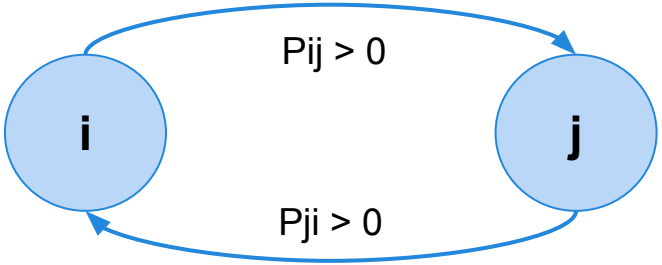
Tipos de Cadenas de Markov

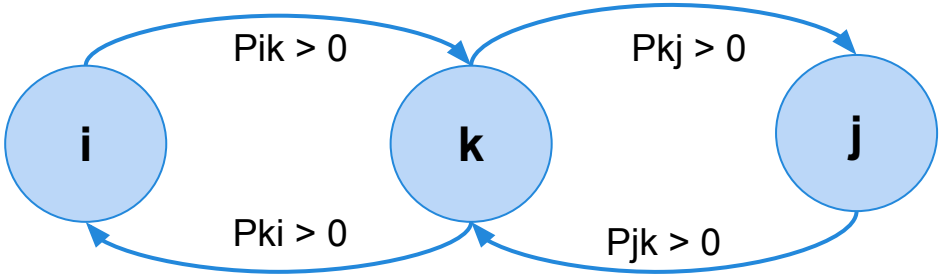
Estado “j” <u>accesible</u> desde “i” en “n” pasos (n es finito)





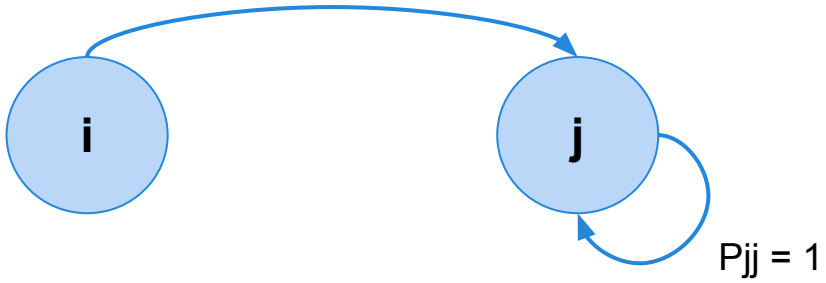
Estado “i” es <u>comunicante</u> con “j” en “n” pasos (n es finito)





Tipos de Cadenas de Markov

Estado “j” es absorbente

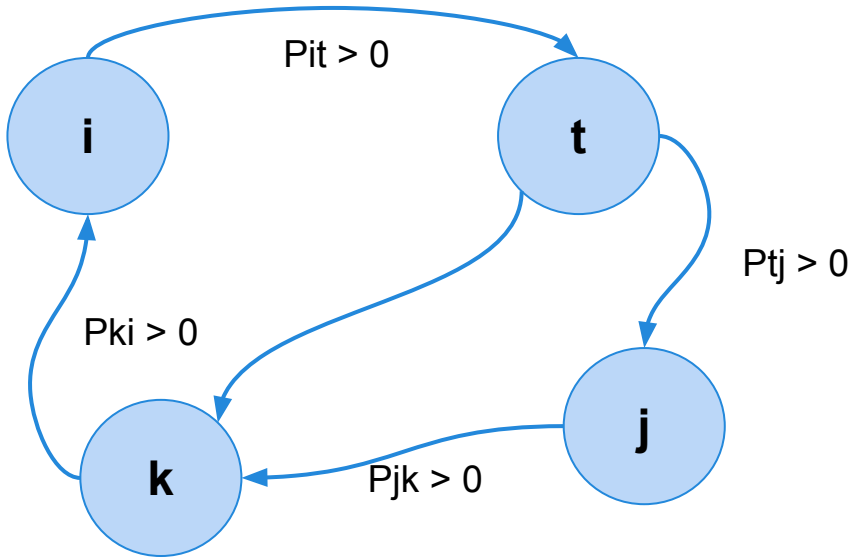


Tipos de Cadenas de Markov

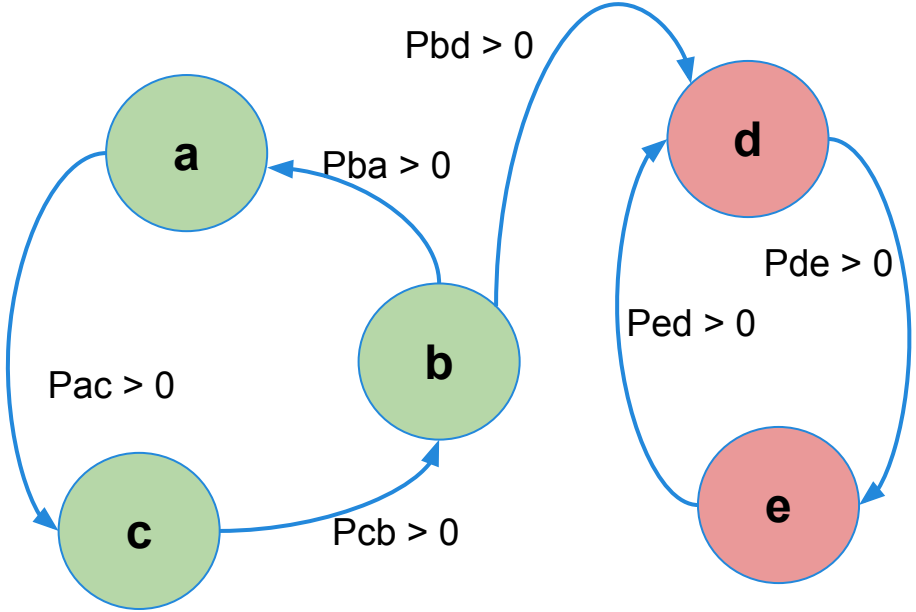
- **Clase**: conjunto de estados en una cadena de markov
- Una clase es **comunicante** si sus estados se comunican todos entre si.
- Clase **recurrente** es aquella cuando la probabilidad de que la cadena se encuentre en un estado de dicha clase después de ∞ transicíones es positiva.
- Una clase es **Transitoria** si la probabilidad de que la cadena se encuentre en un estado de dicha clase después de ∞ transiciones es nula;es decir que una vez que se ha alcanzado dicha clase, hay una probabilidad de nunca regresar.

Tipos de Cadenas de Markov

La clase “i-t-j-k” es comunicante y recurrente



La clase “a-b-c” es solo comunicante. La clase “d-e” es comunicante y recurrente.



Cadenas de Markov Ergodicas

- Son aquellas cadenas irreducibles (no pueden sub-dividirse en más clases) de clase recurrente donde todos sus estados son comunicantes.

- En el estado estacionario las probabilidades de estado se estabilizan a ciertos valores

Calculo del estado estacionario

Toy example de Cadenas de Markov

Estado Estacionario

Existen 3 maneras de calcular el vector de probabilidad en el estado estacionario:

1. **Metodo directo**
2. **Chapman-Kolmogorov**
3. **Flujo Probabilistico**

Estado Estacionario: método directo

A medida que incremento el paso de la matriz de transición, comenzará a suceder que los valores de las columnas convergerán al mismo valor. Es decir que las probabilidades de transición de “n” pasos con “n” tendiendo a infinito serán igual no importa desde que estado se inicie la transición.

$$\lim_{n \mapsto \infty} P^n = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_n \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_n \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_n \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_n \end{bmatrix}$$

Estado Estacionario: chapman-kolmogorov

La probabilidad de estado en “n” cuando tiende a infinito será igual que la probabilidad de estado en “n-1”. De esta manera multiplicando el vector de probabilidad de estado por la matriz de transición de un paso dará por resultado el vector de probabilidad de estado en regimen permanente.

$$\lim_{n\mapsto\infty} p^{(n)} = \lim_{n\mapsto\infty} p^{(n-1)}.P_{ij}^{(1)}$$

$$\rightarrow p^{(n)}.P^{(1)} = p^{(n)}$$

$$\sum p_j = 1$$

Estado Estacionario: Flujo Probabilístico

Para cada estado “j” se establece que la probabilidad de arribar a dicho estado desde otro será igual que la probabilidad de estar en dicho estado y transicionar a otro. La suma de flujos probabilísticos que confluyen al nodo “j” será igual a la suma de flujos que salen del mismo.

Probabilidad de estar en el nodo “i” y transicionar al “j”

$$\sum_{\forall i \neq j} p_i \cdot p_{ij} = p_j \cdot \sum_{\forall k \neq j} p_{jk}$$

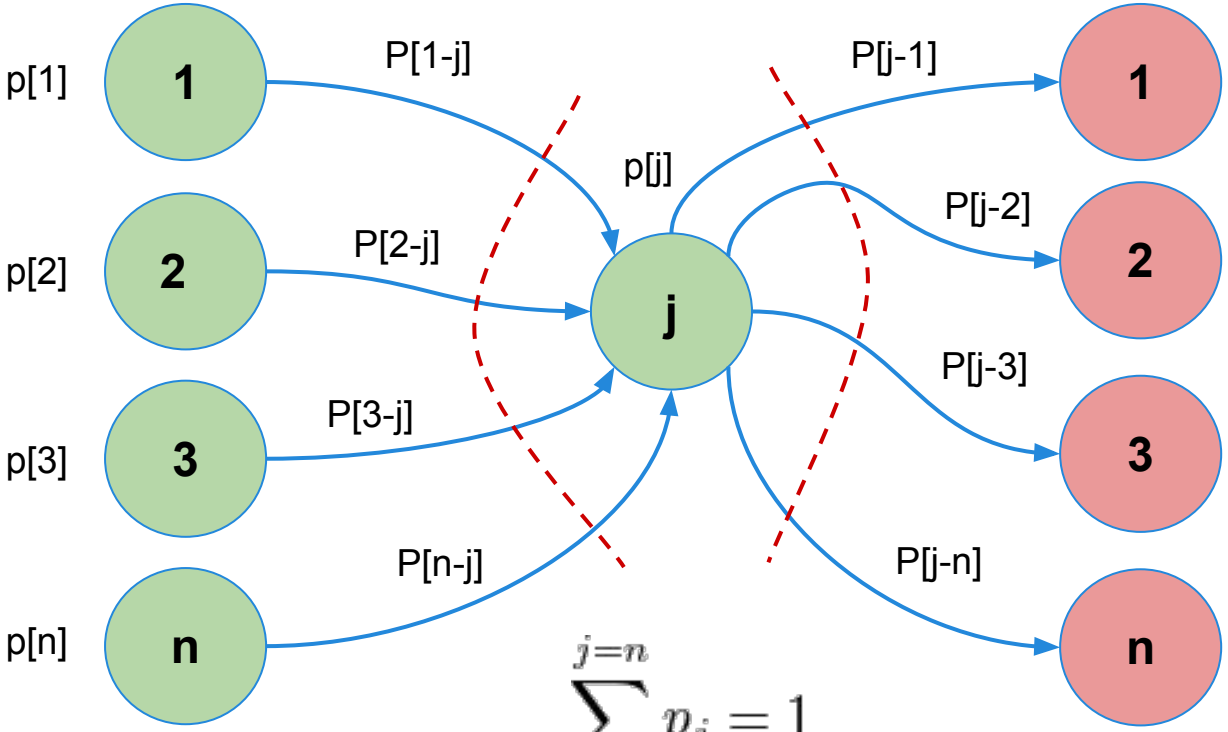
Probabilidad de estar en el nodo “j” y transicionar al “k”

Si realizamos el balance de flujos para cada nodo más la ecuación de cierre, podremos obtener el estado estacionario.

$$\sum p_j = 1$$

Estado Estacionario: Flujo Probabilístico

$$\sum_{\forall i \neq j} p_i \cdot p_{ij}$$



$$p_j \cdot \sum_{\forall k \neq j} p_{jk}$$

$$\sum_{j=1}^{j=n} p_j = 1$$