Ejercicio Inventarios Multi-producto con restricciones Clase 25

Investigación Operativa UTN FRBA
Curso: I4051
Docente: Martín Palazzo

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

Inventarios con multiples items

SKU 1

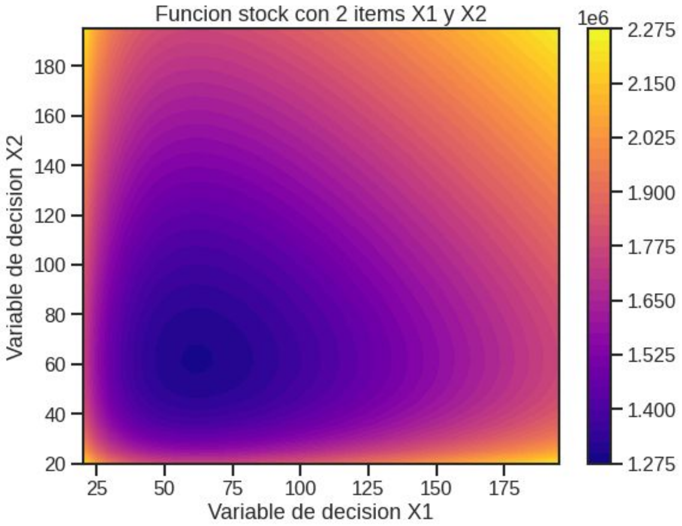
SKU 2

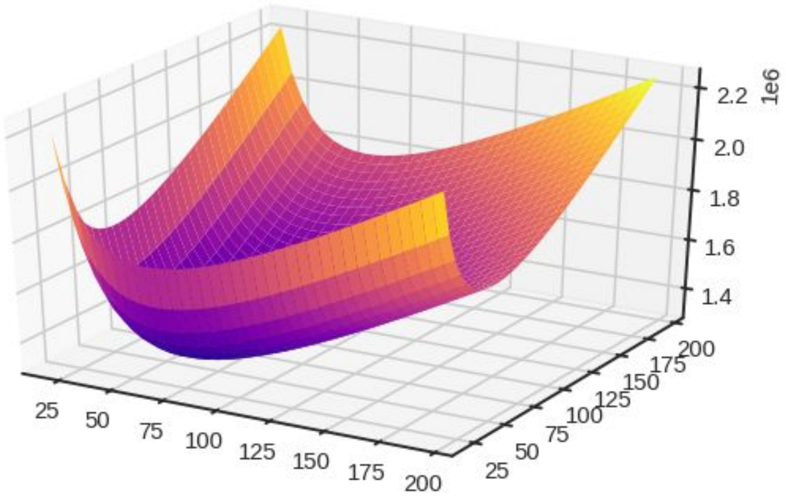
SKU 3

SKU 4

SKU 5

Función de costo de inventarios de 2 item






```
def costo_stock_2d(p1,p2, x1, x2, k1, k2, d1, d2, b1, b2):
  costo_item1 = p*x1 +  k*d*(1/x1) + 0.5*x1*b*p
  costo_item2 = p*x2 +  k*d*(1/x2) + 0.5*x2*b*p
  return
```

Costo del inventario de 1 item

$$\text{Costo Adq.} \quad = b_i.D$$

$$\text{Costo pedido} \quad = k.\frac{D_i}{q_i}$$

$$\text{Costo alm.} \quad = \frac{1}{2}.q_i.i_i.b_i$$

$$\frac{D_i}{q_i} = n$$

$$z_i = b_i.D_i + k.\frac{D_i}{q_i} + \frac{1}{2}.q_i.i.b_i$$

n : cant. veces a pedir en T
D_i : Demanda del producto i en T
b_i : Precio de adquisicion por unidad de i
i_i : Tasa Anual de almacenamiento
k : Costo de orden de compra
q_i : Cantidad a pedir en cada orden
T : Periodo de analisis

Función objetivo a minimizar -> costo total de almacenamiento en todo el periodo T

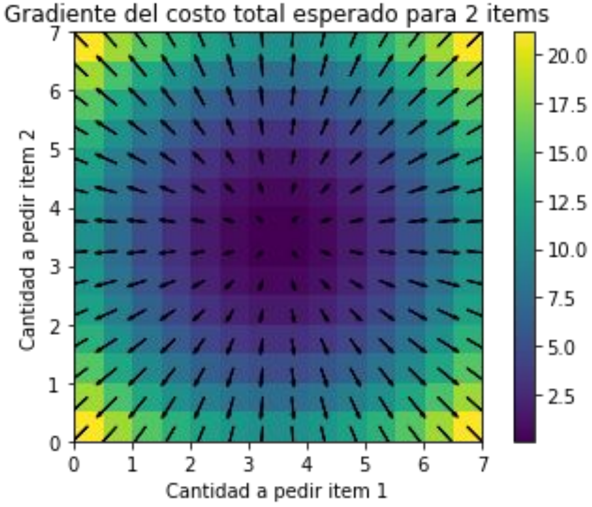
Inventarios: multi-item sin restricción de espacio

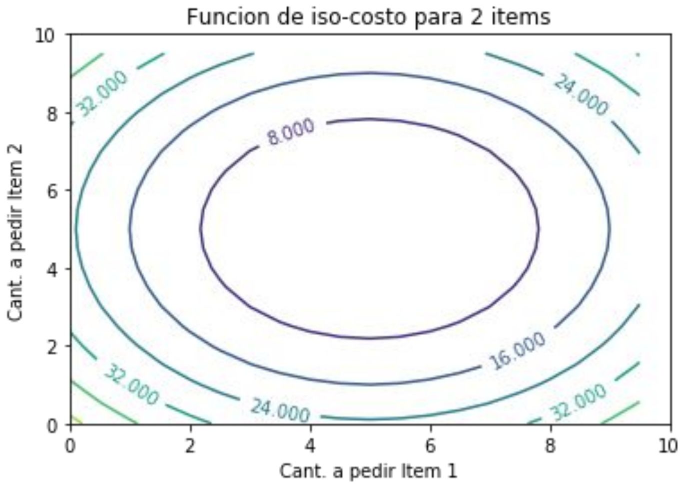
$$\mathrm{CTE}_o = \sum_{i=1}^{m} b_i D_i + \frac{1}{2}.q_i.c_{1i}.T + k_i \frac{D_i}{q_i}$$

$$Q_o = [q_{o1}, q_{o2}, \ldots, q_{om}]$$

- En el caso de tener “m” items sin restricción de volumen la solución que determine el Costo Total Esperado óptimo estará dada por un vector de “m” posiciones donde cada una determinará la cantidad óptima a solicitar de cada item.
- Para calcular el vector de items que minimice el costo lo que haremos es calcular de manera univariada/independiente el lote optimo de cada item y su respectivo costo.
- Una vez calculados los costos de cada item sumaremos cada término para obtener un costo total.

Inventarios: multi-item sin restricción de espacio





En el caso de dos items obtendremos una función de costo similar a una cuadrática. Existirá una coordenada Qo = [qo1, qo2] (valores de cantidad a pedir de cada item) que minimizará el costo total. Donde el gradiente sea = 0 es donde se encontrará el óptimo.

$$\nabla f(q_{o1}, q_{o2}) = 0$$

Inventarios: multi-item con restricción de espacio

$$\min \rightarrow \mathrm{CTE}(q_1, q_2, \ldots, q_m)$$

$$q_1 s_1 + q_2 s_2 + \ldots + q_m s_m \leq S$$

- En el caso de tener “m” items **con** restricción de volumen total “S” vamos a tener una función objetivo de costo a minimizar que dependerá de las cantidades a pedir de cada item.

- En simultáneo dicha función objetivo estará condicionada por una restricción que puede ser de volúmen “S” total a almacenar o de otra naturaleza. La restricción condicionará las cantidades a pedir de cada item. Cada item ocupará una cantidad “Si”

- La pregunta entonces es: cuanto vamos a pedir Qi de cada item i de manera tal de satisfacer las restricciones de volumen?

Inventarios: multi-item con restricción de espacio

En el contexto de minimizar una función continua derivable con restricciones la manera de llegar a un vector óptimo que cumpla las restricciones y optimice la función objetivo es mediante la aplicación de **Multiplicadores de Lagrange.**

$$\begin{array}{ll} \min & f(q_1, q_2) \\ \text{sujeto a} & [g(q_1, q_2) - S] = 0 \end{array}$$

Donde F(Q) es la función de costo a optimizar y depende de las cantidades a adquirir. Por otro lado G(Q) es una función que esta restringida a una cantidad disponible de espacio “S”. Para optimizar en estas condiciones lo que haremos es crear una nueva función L llamada “lagrangiano” que contiene en conjunto la función objetivo original y las restricciones afectadas por coeficientes **lambda**. Estos coeficientes son los multiplicadores de lagrange.

$$L(Q, \lambda) = f(Q) + \lambda g(Q)$$

$$L = f(q_1, q_2, ..., q_m) + \lambda[(s_1 * q_1 + s_2 * q_2 + ... + s_m * q_m) - S]$$

Inventarios: multi-item con restricción de espacio

La manera de minimizar contemplando en simultáneo la restricción es aplicando los **Multiplicadores de Lagrange** a las restricciones y luego calcular su respectiva derivada.

$$\frac{\partial L}{\partial Q} = 0$$

Reemplazando F(Q) por la expresión del Costo Total Esperado y G(Q) por la restricción de volumen asociada a cada item obtenemos la expresión de la cantidad óptima a pedir por cada item incluyendo la restricción de espacio. El multiplicador de lagrange lambda toma el mismo valor para todos los items en simultáneo.

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{1}{2} C_{1i} T - \frac{K_i D_i}{q_i^2} + \lambda S_i \rightarrow q_i = \boxed{\sqrt{\frac{2 K_i D_i}{T c_{1i} + 2\lambda S_i}}}$$

Inventarios: multi-item con restricción de espacio

Entonces volvemos a obtener una expresión para calcular las cantidades de Q de cada item que minimice la función objetivo respetando las restricciones.

$$\boxed{q_i = \sqrt{\frac{2K_iD_i}{Tc_{1i} + 2\lambda S_i}}}$$

Probaremos distintos valores de lambda = 1,2,3,4,5.. (cada valor de lambda se aplica igual a cada item) para obtener distintas soluciones, es decir distintos vectores Q. Nos quedaremos con el valor de lambda que resulte en cantidades totales de cada qi que satisfaga las restricciones y que minimice la función objetivo.

Grilla con distintas penalizaciones al espacio

$$\lambda_0 = 0 \rightarrow q_{\text{opt}}^{(\lambda_0)} \quad \rightarrow s_0 > s_{\text{limit}}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

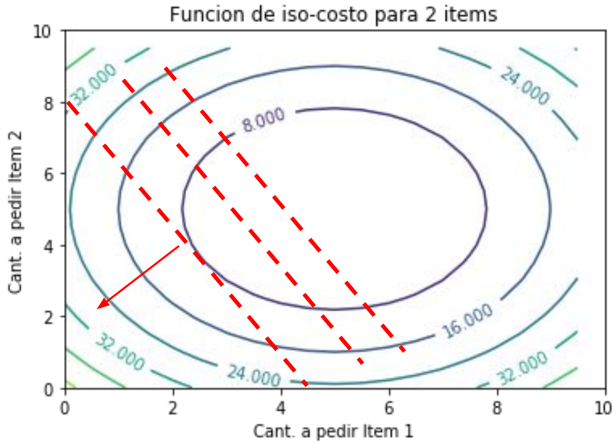
$$\lambda_i = 0.2 \rightarrow q_{\text{opt}}^{(\lambda_i)} \quad \rightarrow s_i > s_{\text{limit}}$$

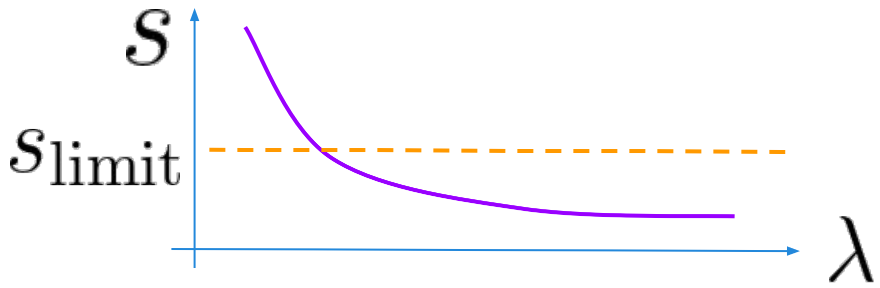
$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\lambda_j = 0.6 \rightarrow q_{\text{opt}}^{(\lambda_j)} \quad \rightarrow s_j < s_{\text{limit}}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

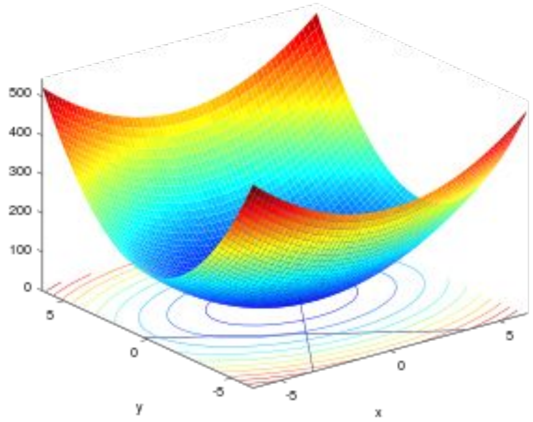
$$\lambda_m = 0.8 \rightarrow q_{\text{opt}}^{(\lambda_m)} \quad \rightarrow s_m < s_{\text{limit}}$$

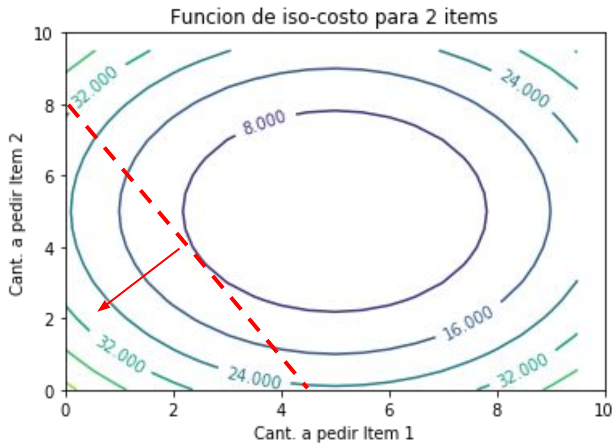




$$q_i = \sqrt{\frac{2K_iD_i}{Tc_{1i} + 2\lambda S_i}}$$

Inventarios: multi-item con restricción de espacio





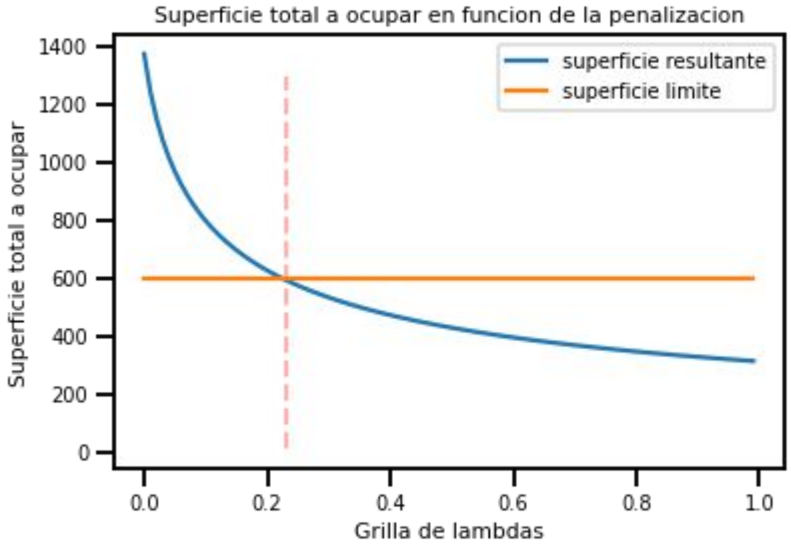
- En el caso de tener “m” items **con** restricción de volumen la solución que determine el Costo Total Esperado mínimo será aquella que satisfaga la restricción de volumen (que no será la óptima original sin restricción).
- De todas las soluciones posibles que satisfagan la restricción queremos quedarnos con aquella que minimiza el costo. En otras palabras, queremos quedarnos con aquella cuya combinación de items se encuentre sobre la curva de iso-costo mas baja.
- La linea roja determina varias combinaciones distintas de item 1 y 2. Dentro de la linea roja hay una combinación que minimiza el costo dado que roza la menor curva de iso-costo.
- La solución de menor costo que satisfaga las restricciones no será la que iguale el gradiente original a 0.

Ejercicio MELI

Suponer un caso de 5 items, cada uno con su respectiva demanda, costo de orden de compra, costo unitario de almacenamiento diario y área unitaria que ocupa en el almacén. La superficie total de almacenamiento es 600 metros cuadrados. Encontrar el mix de productos a ordenar que minimizan el costo y se adaptan a la restricción de superficie. Cual es el lote Q a pedir en este caso de multi-producto?

SKU	K($)	D (u/t)	C1 = C unitario alm. / t (i*b)	Area unitaria
1	10	200	0.3	1
2	5	400	0.1	1
3	15	400	0.2	1
4	6	300	0.1	2
5	9	700	0.15	1.5

Grilla de lambdas vs superficie resultante



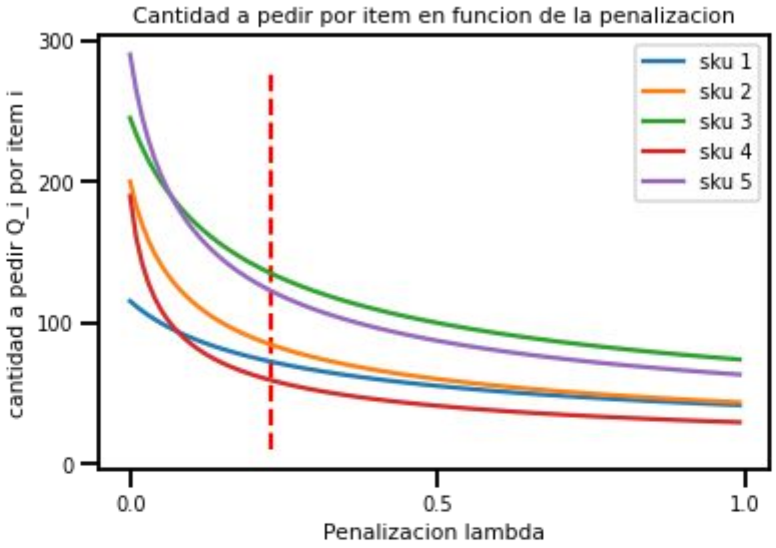
$$q_1 s_1 + q_2 s_2 + \ldots + q_m s_m \leq S$$

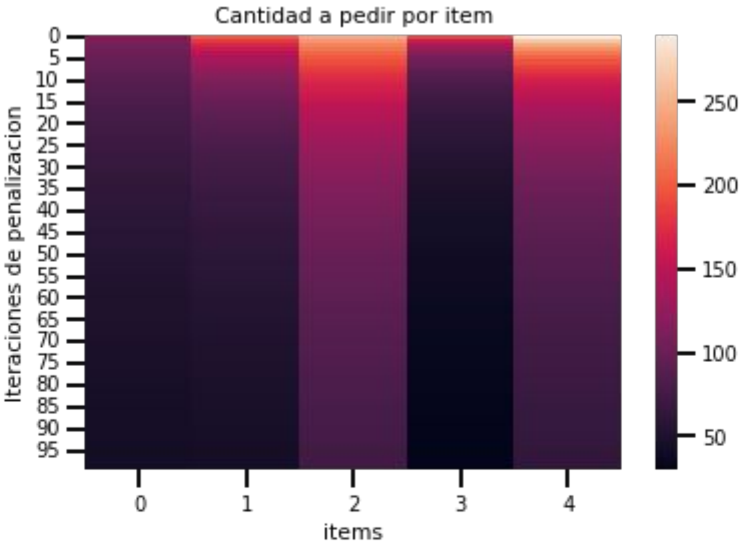
$$q_i = \sqrt{\frac{2K_i D_i}{Tc_{1i} + 2\lambda S_i}}$$

$$\lambda = 0.23$$

ioperativ_clase25_multiproducto_restriccion.ipynb

Grilla de lambdas vs q a pedir por SKU





$$\lambda = 0.23$$