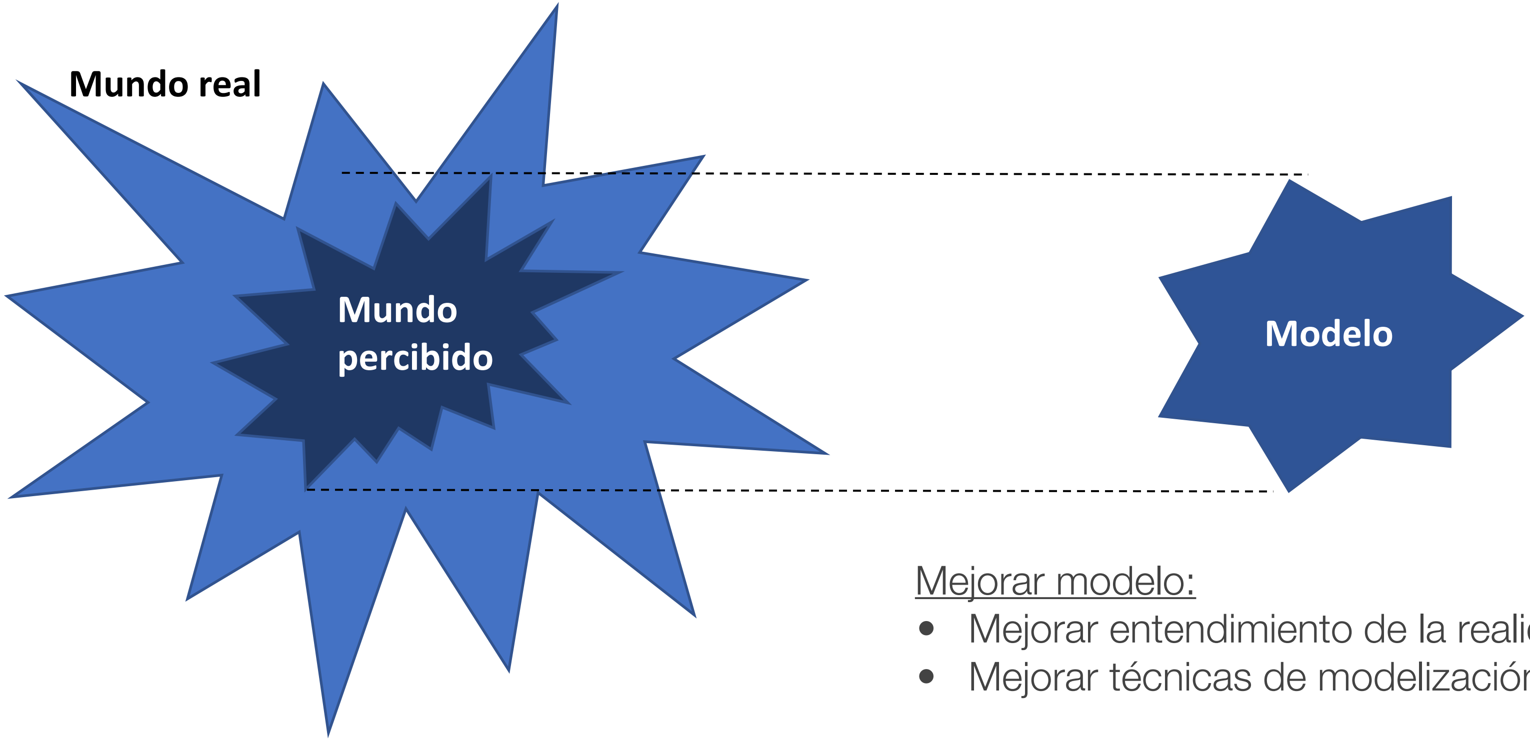
Programación Lineal
Clase 15

Investigación Operativa UTN FRBA 2021
Docente: Rodrigo Maranzana
Curso: I4051 (Palazzo)

Modelización



Mejorar modelo:

- Mejorar entendimiento de la realidad
- Mejorar técnicas de modelización

¿Cuál es el mejor modelo?

Fases de estudio de un problema de optimización

1. Definición del problema
2. Construcción de un modelo
3. Solución del modelo
4. Validación
5. Implementación de la solución

Modelos de optimización

- Componentes:
  - Variables de decisión

    x

  - Función objetivo

    $\min/\max f(x)$

  - Restricciones

    $g(x) \leq = \geq b$

Definiciones

- Puntos factibles:

  Valores de la variable que satisfacen todas las restricciones.

- Puntos infactibles

  Puntos que no satisfacen una o más restricciones.

- Región factible:

  Conjunto de todos los puntos factibles.

- Solución óptima:

  Puntos factibles x^* que arrojan el mejor valor de la función objetivo.

Caso de estudio 1: modelización

Una empresa fabrica dos productos (x, y) usando dos máquinas (A y B)
Cada unidad de x producida requiere 50 minutos de trabajo en A y 30 minutos en B.

Cada unidad de y requiere 24 minutos en la máquina A y 33 minutos en B.
Existe un stock de al inicio de la semana de 30 unidades de x y 90 unidades de y.

El tiempo total disponible de procesamiento en A es de 40 horas y en B de 35 horas.
La demanda en el mercado es de 75 unidades de x y 95 unidades de y.

Dado un contexto inflacionario, se pide maximizar el stock de unidades de x e y combinadas.
¿Cómo podría modelizarse este problema?

Modelos de optimización

Resultados de la búsqueda de un óptimo:

- Problema no factible: no existe la región factible, $S = \emptyset$.

- Problema no acotado: existe la región factible, pero la función objetivo puede crecer hasta el infinito.

- Problema con óptimo: cuando existe x* tal que $f(x*) \geq f(x) \; \forall \; x \in S$

Caso de estudio 2: modelización

Un cliente necesita fabricar un tanque cilíndrico que soporte una capacidad de 500 litros de líquido. Determinar las dimensiones que minimizan la cantidad de material a utilizar.

¿Cómo podría modelizarse este problema?

¿Es de programación lineal?

Clasificación de problemas de Programación

- Según las funciones:
    - Programa lineal (LP): funciones $f(x)$ y $g(x)$ lineales

    - Programa no lineal (LP): funciones $f(x)$ y/o $g(x)$ no lineales

Según las variables:

- Programación entera: una o más variables son enteras, $x \in \{0, 1\}$

- Programación continua: las variables son reales.

Modelo de programación lineal

Función objetivo:

$$Max\ o\ Min\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

Sujeto a las restricciones (s.t.):

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_m$$

$\boldsymbol{c_j}$: coeficiente de la variable de decisión j. Costo.
$\boldsymbol{a_{ij}}$: coeficiente tecnológico de la restricción i para la variable j.
$\boldsymbol{b_i}$: término independiente de la restricción i.

Formas de expresar un modelo LP

<u>Algebraica:</u>

$$\max o \min \sum_j c_j x_j$$

s.t:

$$\sum_j a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_i \ \forall i$$

<u>Matricial</u>

$$C^T X$$

s.t:

$$AX \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} B$$

Estandarización del problema

- Variables Slack: convertir desigualdades de restricciones en igualdades:

$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b_1$$
$$a_1x_1 + a_2x_2 + S_1 = b_1$$
Si $S_1 \geq 0$

Consigna: ¿Cómo se incorporan las "S" en la función objetivo?

Variables Libres: cuando x es libre de ser positiva o negativa se la puede considerar:

$$x_k^+ - x_k^- = x_k$$
Si $x_k^+ \geq 0$ y $x_k^- \geq 0$

Resolución por método gráfico

- <u>Condiciones:</u>
  - Problemas pequeños.
  - Solo para problemas con dos o tres dimensiones.

- <u>Aplicación real</u>
  - Solo para introducción y didáctica.
  - Entendimiento del procedimiento.
  - No es aplicable a contextos reales.

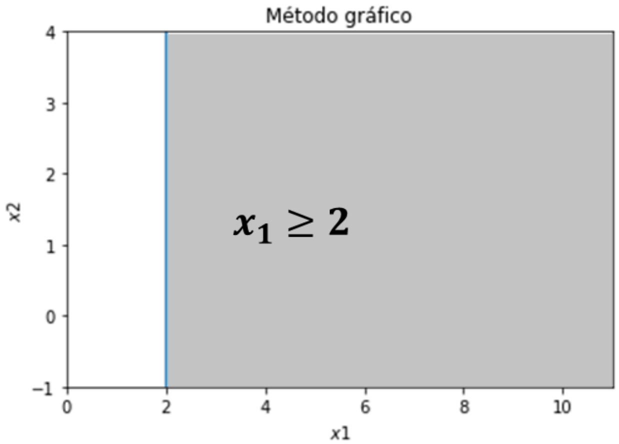
Ejemplo inicial:

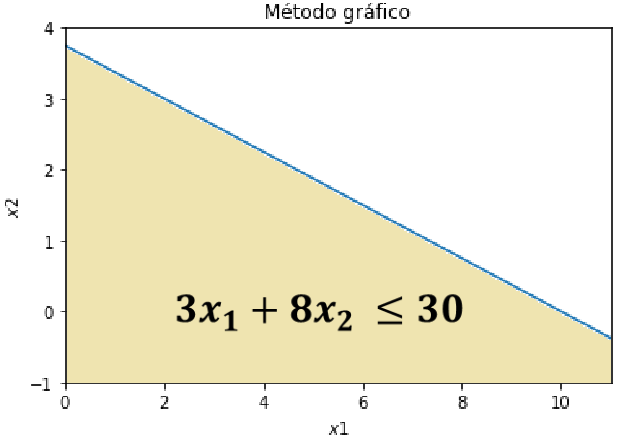
- $Max\ z = 10x_1 + 5x_2$

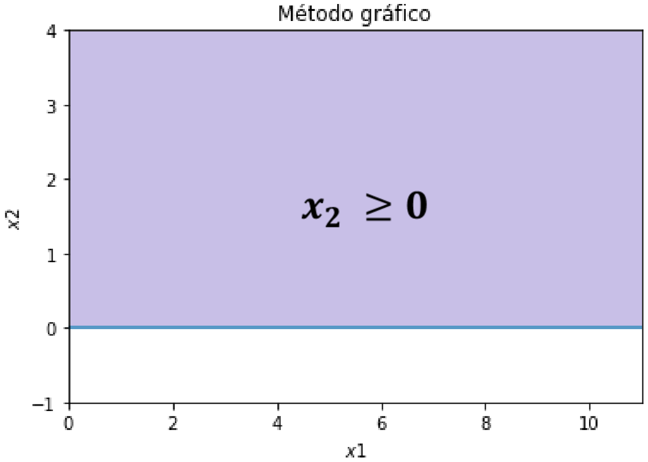
s.t.

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad\quad\quad\quad &\geq 2 \\
3x_1 + 8x_2 &\leq 30 \\
x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

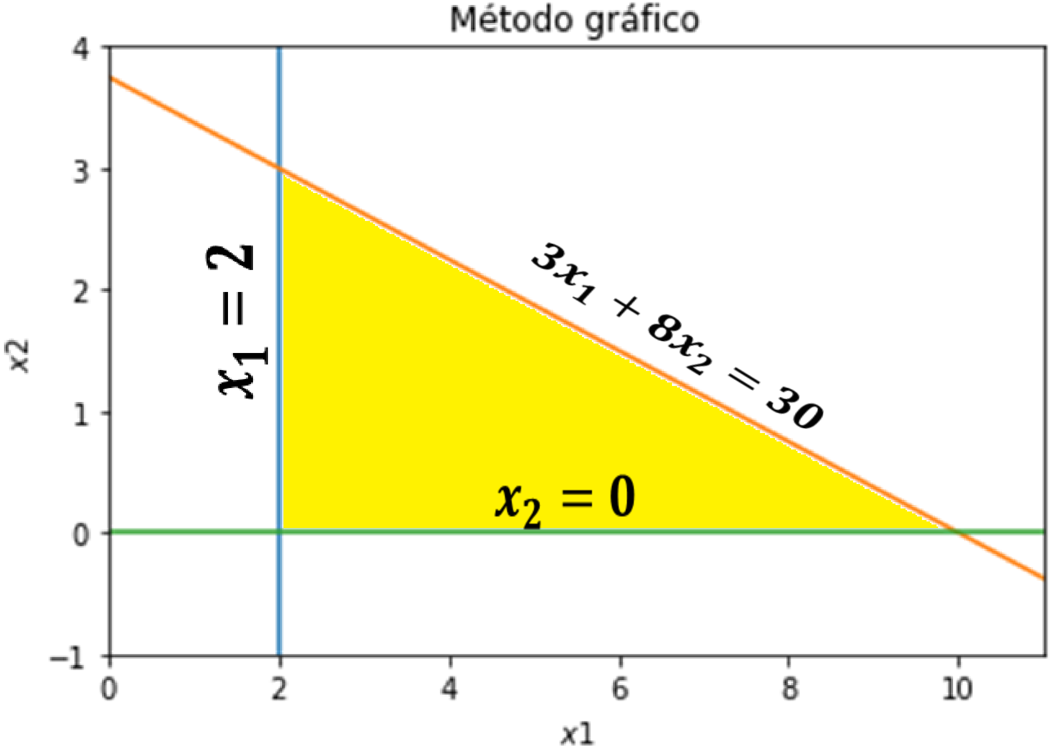
Paso 1: representar restricciones





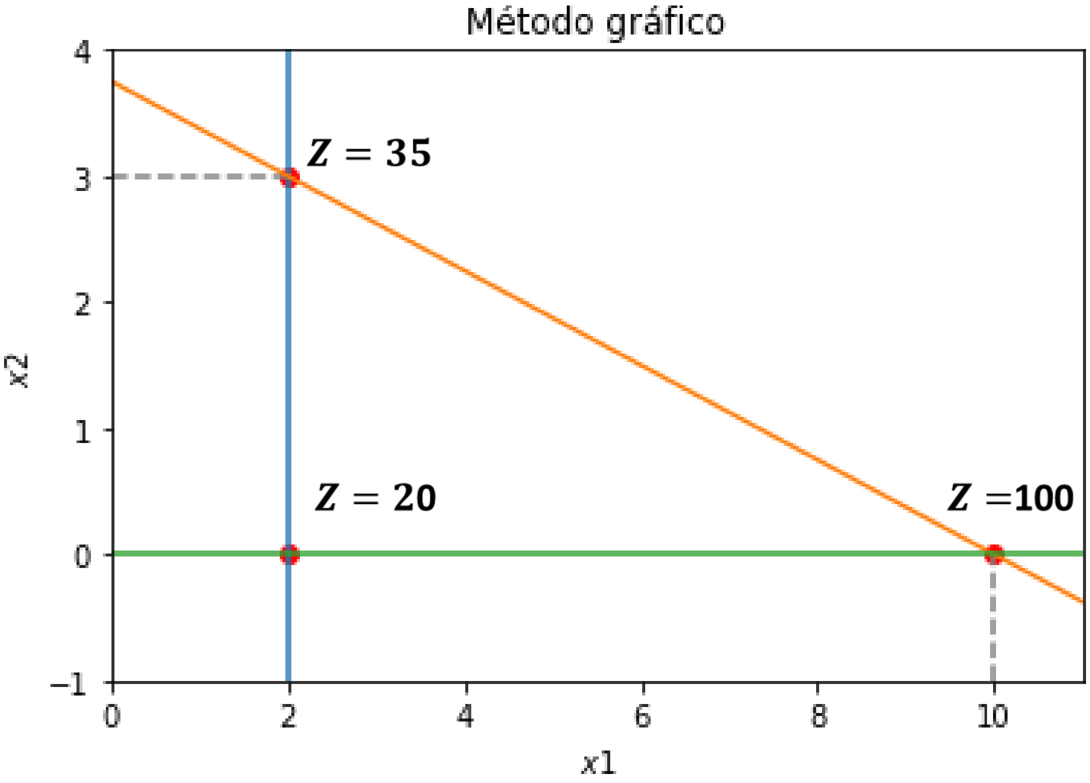


Paso 1: encontrar región factible



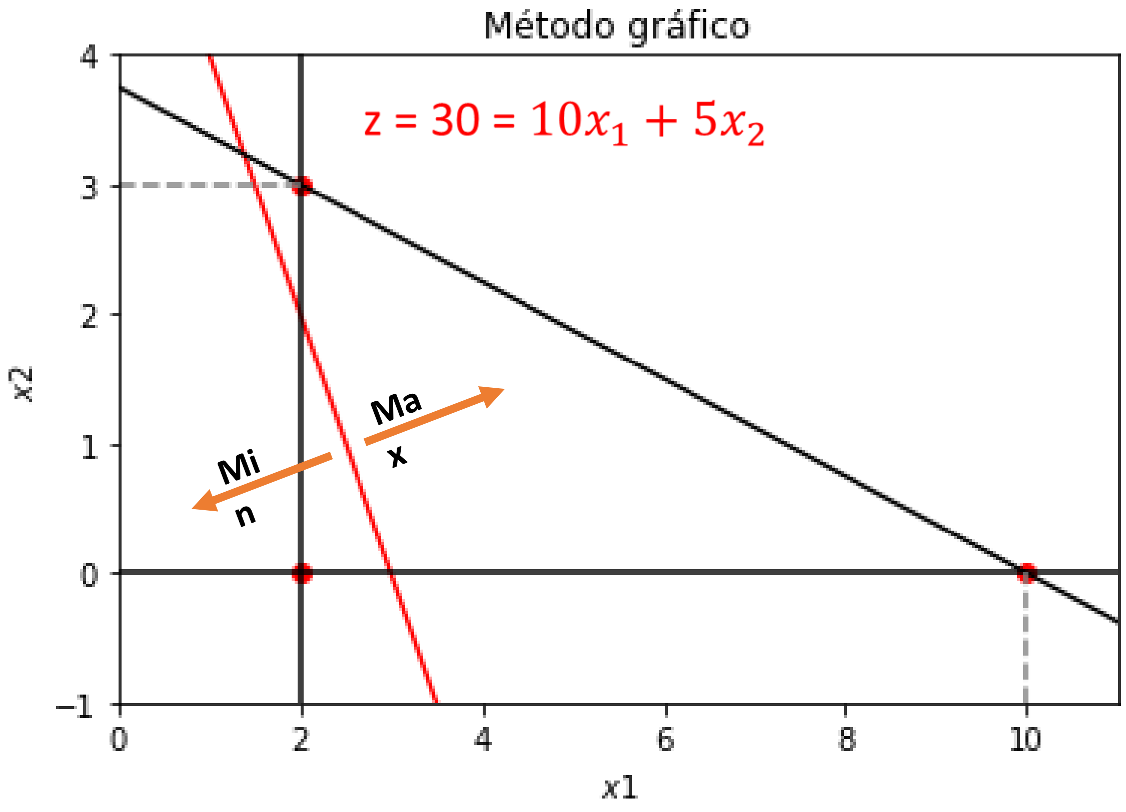
Encontrar óptimo gráficamente

- 1) Encontrar valor de Z máximo entre los vértices del poliedro.



Encontrar óptimo gráficamente

- 2) Método con curvas de nivel.



Encontrar óptimo gráficamente

- 2) Método con curvas de nivel.