Filas de Espera
Clase 06

Investigación Operativa UTN FRBA
Curso: I4051
Docente: Martín Palazzo

Agenda clase 06

- Repaso procesos estocásticos parámetro continuo
- Introducción a Filas de Espera
- Ejemplo Python Filas de espera 1 canal
- Ejercicios Filas

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Vamos a trabajar con probabilidades de transición entre instantes de tiempo muy próximos, el **parámetro "t" es continuo**. Esta situación conduce a que dichas probabilidades de transición tiendan a cero (es menos probable observar una transición de estado cuando la ventana de tiempo es menor).

$$P\left(X_{t+\Delta t \cong 0} = i \middle| X_t = j\right)$$

De hecho, la probabilidad de transición como vimos anteriormente varía en función de la ventana de tiempo que se asigne.

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Para solucionar este inconveniente, se introduce el concepto de la **derivada de la probabilidad de transición** entre dos estados i y j distintos en Δt=0. Esta nueva magnitud, llamada **tasa (o intensidad) de transición**, expresa la variación de la probabilidad de transición entre dos estados diferentes ("i" distinto de "j") de la cadena en un intervalo Δt pequeño. Esta tasa es positiva dado que a medida que crece Δt la probabilidad de transicionar a un estado distinto aumenta.

$$d_{ij} = \left[\frac{dp_{ij}^{\Delta t}}{d\Delta t} \right]_{\Delta t}$$

Para estados iguales llamamos **tasa de permanencia** en el estado i que será un valor negativo porque la probabilidad de permanecer en el mismo estado decrece al aumentar t.

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Sabiendo que la sumatoria de las probabilidades es 1, derivando todas las probabilidades de transición entonces obtenemos:

$$\sum_{j=0}^{n} P_{ij}^{(\Delta t)} = 1$$

$$\frac{d\left[\sum_{j=0}^{n} P_{ij}^{(\Delta t)}\right]_{\Delta t=0}}{d\Delta t} = \boxed{\sum_{j=0}^{n} d_{ij}^{(\Delta t)} = 0}$$

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

$$d_{ii} + \sum_{j \neq i}^{n} d_{ij}^{(\Delta t)} = 0 \longrightarrow \boxed{d_{ii} = -\sum_{j \neq i}^{n} d_{ij}^{(\Delta t)}}$$

Obtenemos entonces una expresión que relaciona la tasa de transición (tasa de variación de probabilidad de transición) entre distintos estados y la tasa de permanencia en un mismo estado.

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Con todas las tasas de transición / permanencia del sistema podemos entonces construir una matriz que las agrupe llamada **Matriz de tasas de transición D**. La matriz tendrá tantas dimensiones como estados (similar a la matriz de probabilidad de transición, solo que ahora su contenido en vez de tener probabilidades tendrá derivadas).

$$D = \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} & \dots & d_{0n} \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{20} & d_{21} & d_{12} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Al igual que las cadenas de markov de parámetro discreto, en el caso del parámetro continuo en el régimen permanente también podremos calcular un vector de probabilidad estado estacionario.

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{21} & p_{12} & \cdots & p_{0n} \\ p_{10} & p_{21} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{20} & p_{21} & p_{12} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n0} & p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Podríamos plantear el cálculo del vector de probabilidad en el estado estacionario como lo hicimos anteriormente

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{00}(\Delta t) & p_{21}(\Delta t) & p_{12}(\Delta t) & \dots & p_{0n}(\Delta t) \\ p_{10}(\Delta t)) & p_{21}(\Delta t) & p_{12}(\Delta t) & \dots & p_{1n}(\Delta t) \\ p_{20}(\Delta t) & p_{21}(\Delta t) & p_{12}(\Delta t) & \dots & p_{2n}(\Delta t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n0}(\Delta t) & p_{n1}(\Delta t) & p_{n2}(\Delta t) & \dots & p_{nn}(\Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix}$$

$$p.P(\Delta t) = p$$

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Si derivamos todos los términos respecto a Δt con Δt=0 obtenemos lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} & \dots & d_{0n} \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{20} & d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$p.D = 0$$

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Cómo $\sum p_j = 1$ podríamos incorporar esta expresión en el sistema de ecuaciones anterior obteniendo n+1 ecuaciones. Podríamos reemplazar una columna de la matriz D (ahora llamada "A") y agregar un "1" al vector de ceros, ahora llamado "B".

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{00} & d_{01} & d_{02} & \dots & 1 \\ d_{10} & d_{11} & d_{12} & \dots & 1 \\ d_{20} & d_{21} & d_{22} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ d_{n0} & d_{n1} & d_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$p.A = B$$

Cadenas de Markov de Parámetro Continuo

Despejando las matrices obtenemos el vector de probabilidad de estado en el regimen permanente.

$$p.A = B \rightarrow p = B.A^{-1}$$

Procesos de Nacimiento y Muerte

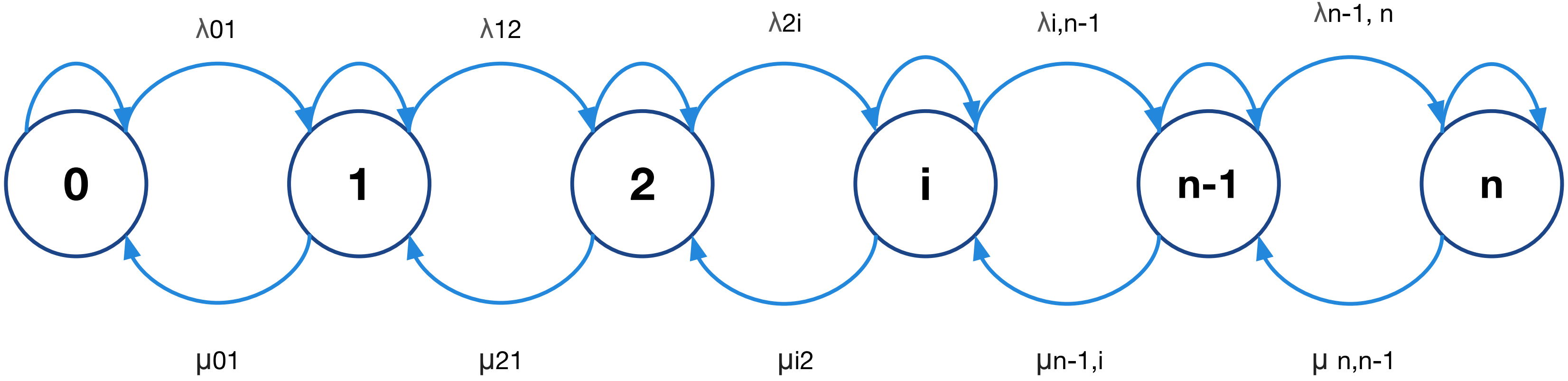
Un caso especial de las Cadenas de Markov en parámetro continuo es el llamado proceso de nacimiento y muerte en donde:

- el estado del sistema n en un instante t queda definido por su tamaño, es decir por la cantidad de unidades presentes en el sistema (utilizado para modelar filas)
- los eventos se dan en forma independiente y son solamente de dos tipos:
  - "nacimientos", en donde la variable que representa el estado se incrementa +1
  - "muertes", en donde la variable que representa el estado decrece -1
- Se considera nula la probabilidad de que ocurra más de 1 evento en un intervalo de tiempo muy pequeño.

Filas de Espera

Procesos de Nacimiento y Muerte

La manera de representar una cadena de markov de nacimiento y muerte es con un grafo de las siguientes características y considerando esta vez las tasas de transición en vez de las probabilidades de transición.



Procesos de Nacimiento y Muerte

Matemáticamente, las tasas de transición de un proceso de nacimiento y muerte queda expresado de la siguiente manera. ¿Cómo quedaría la matriz de tasas de transición?

$$d_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & ; j = i + 1 \\ \mu_i & ; j = i - 1 \\ 0 & \forall i, j / \, |i - j| > 1 \end{cases}$$

$$d_{ii} = -\sum_{j \neq i}^{n} d_{ij}^{(\Delta t)}$$

Matriz de tasas de transición: nacimiento y muerte

$$
\begin{array}{ccccccc}
-\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
0 & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\
0 & 0 & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Estado estacionario para procesos de nacimiento y muerte

Multiplicamos el vector de estado estacionario con la matriz de tasas instantánea de transición (con la última columna reemplazada por un vector de “1s”).

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & \dots & p_{n-1} & p_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Estado estacionario para procesos de nacimiento y muerte

La expresión matricial anterior deriva en la siguiente serie de ecuaciones dependientes de las probabilidades de estado y las tasas de nacimiento y muerte (considerar este desarrollo de manera genérica independientemente de la cantidad de canales)

$$\begin{aligned}
\boxed{-p_0.\lambda + p_1.\mu \quad = 0} \\
p_0.\lambda - p_1.(\mu + \lambda) + p_2.\mu &= 0 \\
p_1.\lambda - p_2.(\mu + \lambda) + p_3.\mu &= 0 \\
p_{n-2}.\lambda - p_{n-1}.(\mu + \lambda) + p_n.\mu &= 0 \\
\ldots \\
p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \ldots + p_n &= 1
\end{aligned}$$

Estado estacionario para procesos de nacimiento y muerte

Entonces podemos empezar a despejar cada probabilidad de estado en el sistema

$$p_0.\lambda = p_1.\mu \quad \therefore \quad p_1 = \frac{\lambda}{\mu}.p_0$$

$$p_1.\lambda = p_2.\mu \quad \therefore \quad p_2 = \frac{\lambda}{\mu}.p_1$$

$$\ldots \quad \therefore \quad \ldots$$

$$\boxed{p_{n-1}.\lambda = p_n.\mu \quad \therefore \quad p_n = \frac{\lambda}{\mu}.p_{n-1}}$$

Estado estacionario para procesos de nacimiento y muerte

A lo que podríamos llegar a una expresión que me permita obtener la probabilidad del estado “n” reemplazando a cada una de las ecuaciones anteriores dentro de la otra .

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n . p_0 = \rho^n . p_0$$

*(considerar esta explicación únicamente para desarrollo teórico de sistemas de filas de espera de 1 solo canal)

Filas de espera en cadenas logísticas

Filas de espera: caso Justina

Reunion con Ezequiel Lo Cane, impulsor de la **Ley Justina** 27.447.

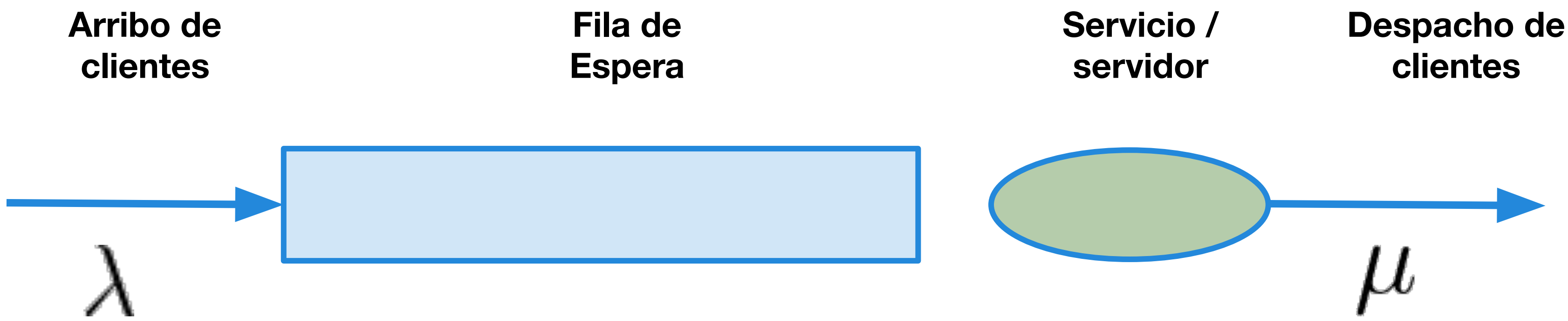
La misma transforma el sistema de donaciones de órganos: **por default** tod@s son donadores a menos que se diga lo contrario.

Operativamente hablando, ¿que cambios genera esta ley?

Filas de espera: caso Justina

La nueva ley aumenta la oferta de órganos aptos para donaciones y por ende **reduce significativamente el tiempo de espera** de muchos pacientes, aumentando así los casos de éxito en trasplantes.

Filas de espera



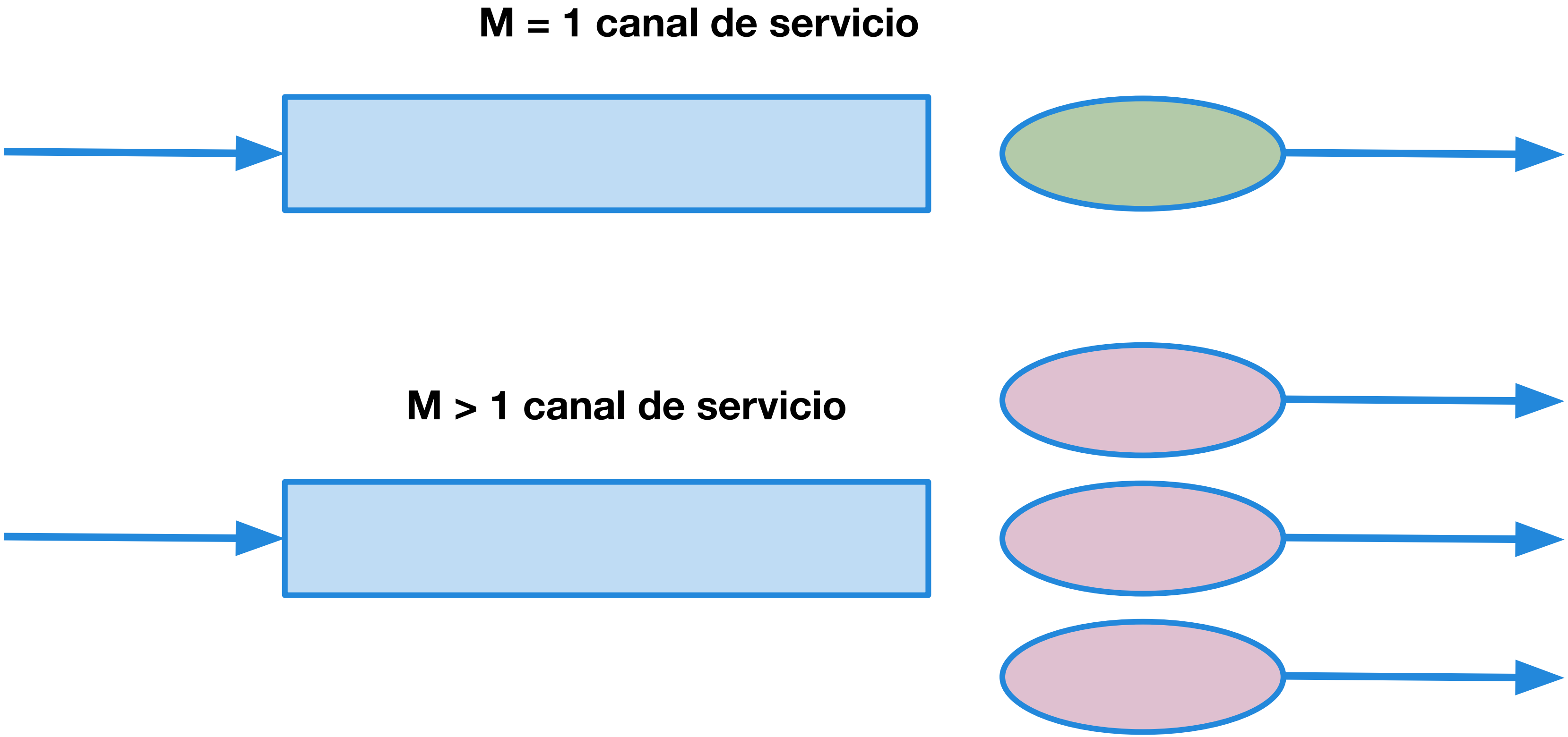
Un sistema de filas de espera está compuesto por una parte de espera y otra de servicio. Los clientes del sistema siempre están en alguna de las dos etapas. Asimismo hay un arribo y despacho de clientes bajo distribuciones de probabilidad independientes entre sí. Los estados del sistema (clientes dentro del sistema) se basan en una cadena de markov de parámetro continuo de nacimiento y muerte. El arribo de un cliente es nacimiento y el despacho es muerte.

Filas de Espera: Factor de trafico

¿Como debe ser la relación entre la tasa de arribos vs la tasa de despachos?

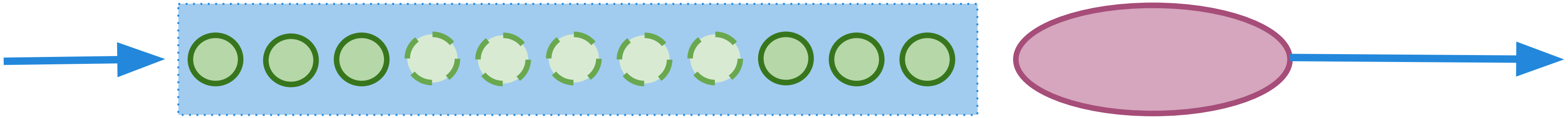
$$\rho = \frac{\lambda}{M.\mu}$$

Filas de espera: arquitecturas

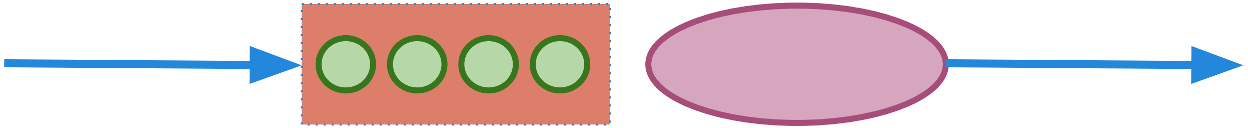


Filas de espera: arquitecturas

Capacidad de espera de fila infinita

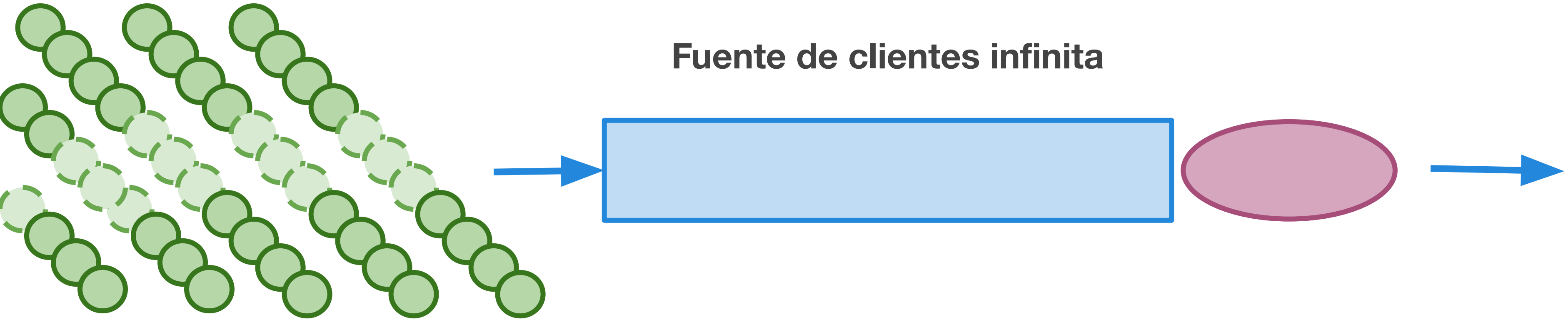


Capacidad de espera de fila finita

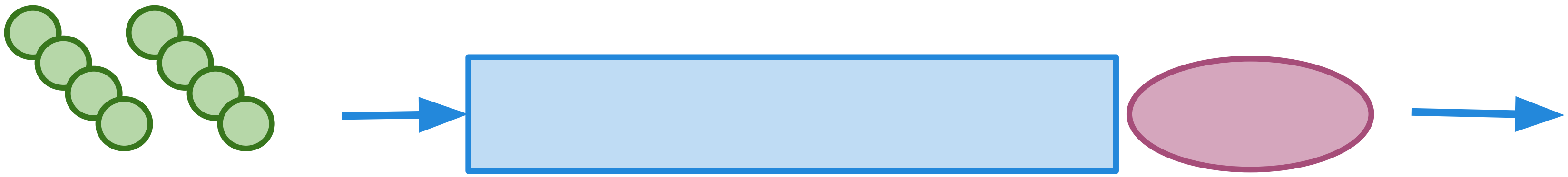


clientes

Fuente de clientes infinita



Fuentes de clientes finita

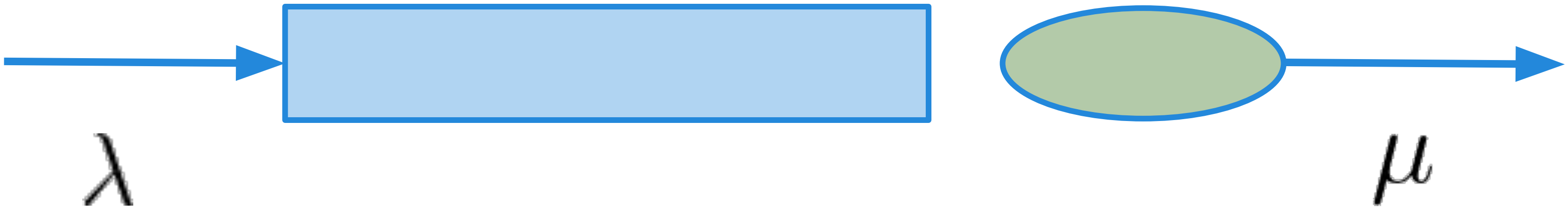


Filas de espera: supuestos

A la hora de modelar con sistemas de filas de espera suponemos lo siguiente:

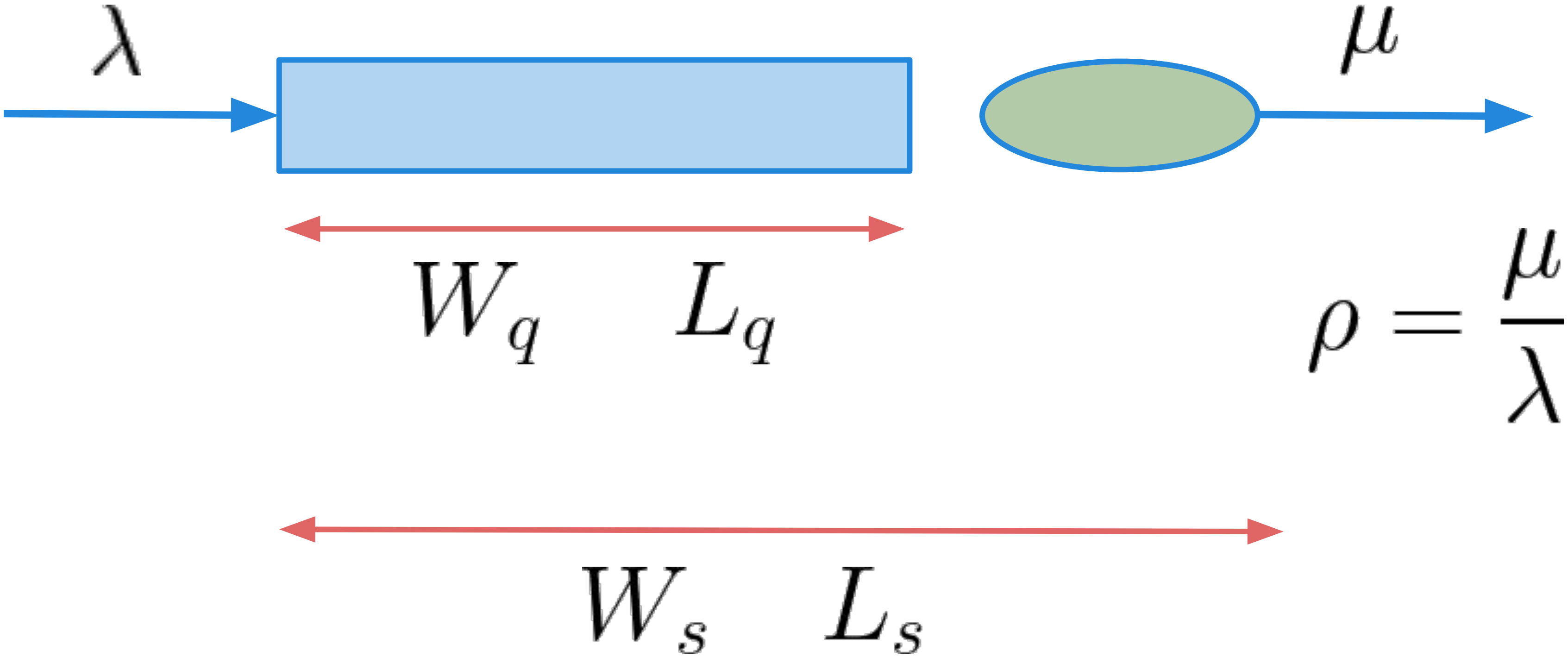
- Arribos y despachos bajo distribución de probabilidad Poisson/Exponencial.
- No existe la estacionalidad en los arribos.
- La política de servicio es FIFO.
- Puede (o no) existir el fenómeno de “impaciencia”.
- Cuando existen varios servidores todos trabajan igual.
- Suponemos que la fuente de clientes es infinita.

Filas de espera: métricas



- Tasa de arribos [un/t] (**lambda**)
- Tasa de despachos [un/t] (**mu**)
- Factor de tráfico (**rho** = lambda/mu*M)
- Cantidad esperada de clientes en la fila **Lq** [un]
- Cantidad esperada de clientes en el sistema **Ls** [un]
- Tiempo esperado de espera en la fila **Wq** [t]
- Tiempo esperado de espera en el sistema **Ws** [t]
- Probabilidad de estado **P**(x = i)

Filas de espera: métricas



Filas de Espera: Notación de Kendall

La utilizaremos para definir la arquitectura del sistema de filas de espera y las distribuciones de probabilidad que la afectan.

$M/M/1/30 \rightarrow$ Arribos y despachos exponencial. 1 Canal. Hasta 30 unidades en el sistema.

$M/M/5/\infty \rightarrow$ Arribos y despachos exponencial. 5 Canales. Capacidad infinita de unidades en el sistema.

La primer posición refiere a la distribución de probabilidad de arribos, la segunda a la dist. de proba de despachos, la tercera a la cantidad de canales y la última a la capacidad de unidades en el sistema (espera + servicio).

Filas de espera: M = 1

$M/M/1/\infty$ Arribos y despachos Poisson, capacidad de espera infinita, fuente de clientes infinita, M = 1 (un solo canal)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_n = \rho^n . P_0$$

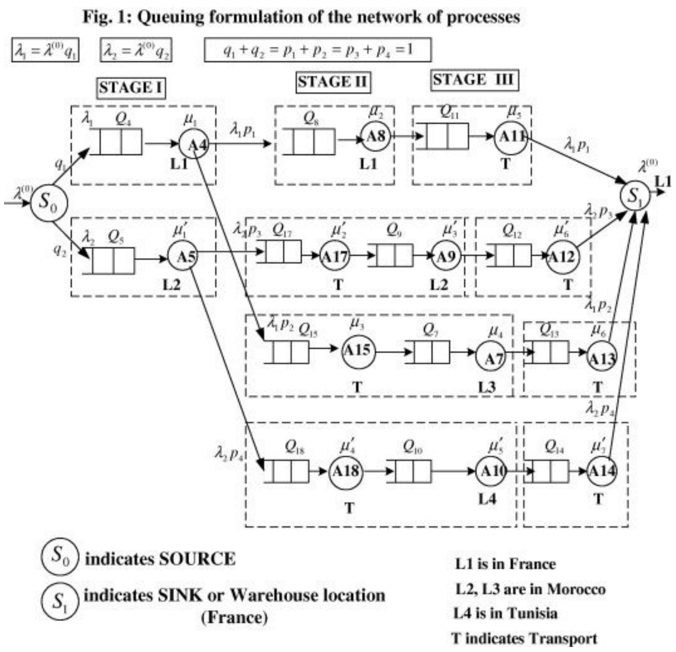
$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L_q = \lambda . W_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$L = \lambda . W_s = L_q + \rho = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Redes de filas de espera en supply chains



Si a un sistema de filas de espera básico se lo considera una unidad básica (un bloque) se podrían construir redes de filas de espera y así modelizar una cadena de abastecimiento mas compleja y extensa.

‘*Modeling a supply chain using a network of queues*’ (https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.10.019)

Simulación de un sistema de filas M = 1

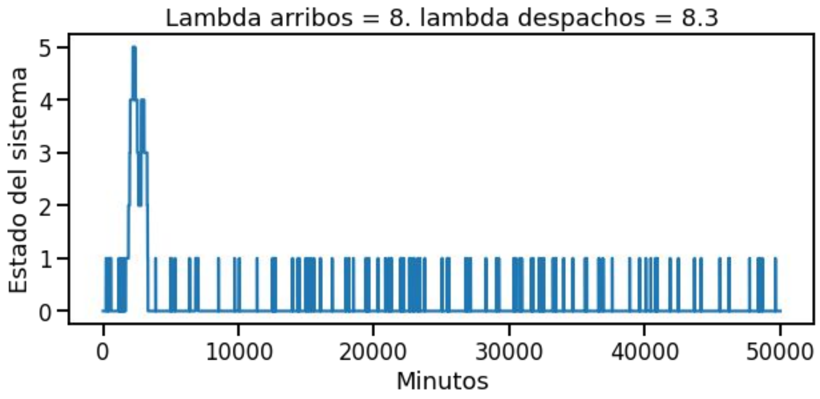
```python
# definimos una funcion que simula la cantidad de clientes en el sistema en base a eventos de arribos y
despachos que suceden

def simular_fila_1canal(mins, n_eventos, lambda_arribos, lambda_despachos):

  # generamos eventos aleatorios de arribos y despachos utilizando distribucion exponencial
  arribos = np.random.exponential(1/lambda_arribos,n_eventos)*60
  despachos = np.random.exponential(1/lambda_despachos,n_eventos)*60

  # acumulamos los eventos en el tiempo
  arribos_cum = np.cumsum(arribos)*60
  despachos_cum = np.cumsum(despachos)*60

  # el vector clientes guardara el N de clientes que se encuentren en el sistema a cada minuto
  clientes = np.zeros((mins))

  # guardamos la cantidad de arribos y despachos que suceden en toda la simulacion
  num_arribos = 0
  num_despachos = 0

  # guardamos en que instante sucedio un evento de arribo o despacho
  tiempo_arribos = np.zeros((n_eventos))
  tiempo_despachos = np.zeros((n_eventos))

  counter = 1

  # for loop por la cantidad de minutos
  for i in range(1,mins):

    # preguntamos si hubo un arribo en el minuto actual
    if i > arribos_cum[num_arribos]:
      clientes[counter] = clientes[counter-1]+1
      tiempo_arribos[num_arribos] = i
      num_arribos += 1

    # preguntamos si hubo un despacho en el minuto actual
    elif i > despachos_cum[num_despachos]:
      if clientes[counter-1] > 0:
        tiempo_despachos[num_despachos] = i
        clientes[counter] = clientes[counter-1] - 1
        num_despachos += 1

    # si no hubo eventos dejamos todo igual
    else:
      clientes[counter] = clientes[counter-1]

    counter += 1

  return num_despachos, num_arribos, tiempo_despachos, tiempo_arribos, clientes
```

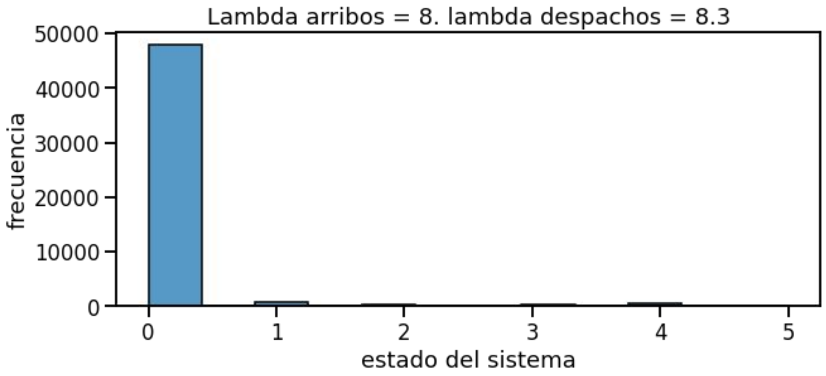
Generamos eventos aleatorios de arribos y despachos en el tiempo

Definimos vectores donde guardaremos el momento en el que suceden los eventos

Ciclo for minuto-a-minuto donde preguntamos si hubo algun arribo o despacho.

Simulación de un sistema de filas M = 1

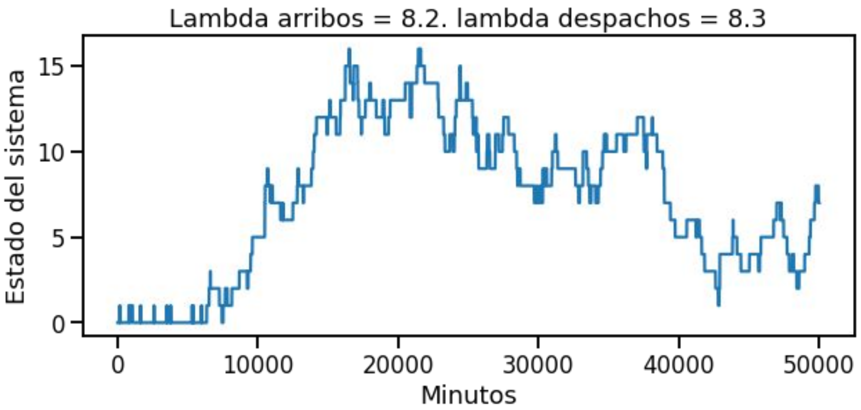


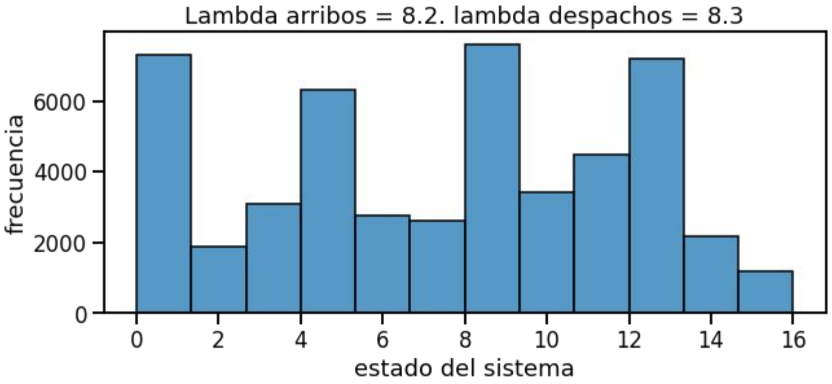


Estado del sistema en cada Δt

Histograma de frecuencias de los estados del sistema en toda la simulación

Simulación de un sistema de filas M = 1

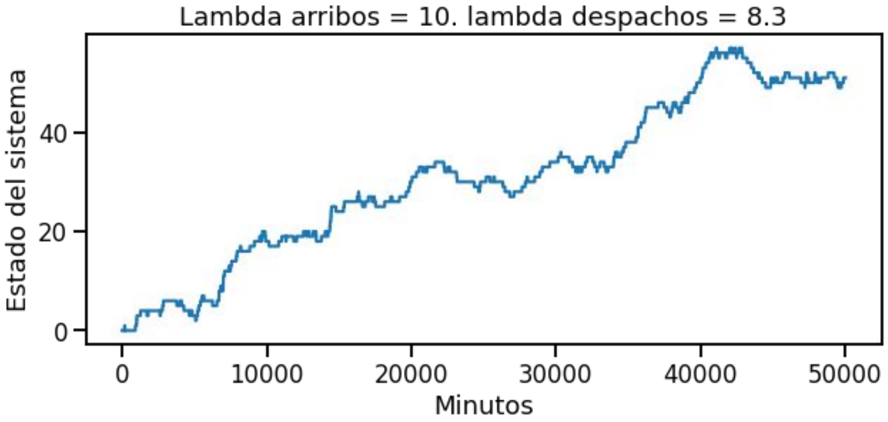


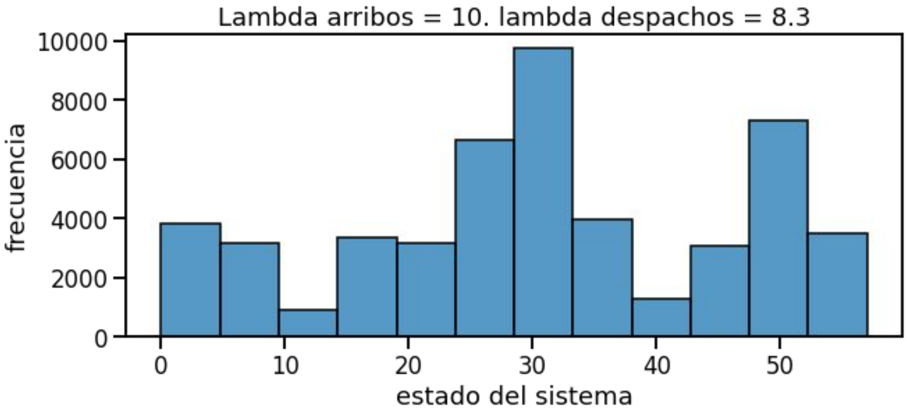


Estado del sistema en cada Δt

Histograma de frecuencias de los estados del sistema en toda la simulación

Simulación de un sistema de filas M = 1





Estado del sistema en cada Δt

Histograma de frecuencias de los estados del sistema en toda la simulación

Filas de Espera: Ejercicio 01

Un promedio de 10 automóviles por hora llegan a un cajero. Suponga que el tiempo promedio de servicio por cada cliente es de 4 minutos.

1. ¿Que tipo de modelo de filas de espera utilizaría? Indicar supuestos.
2. ¿Cual es la probabilidad de encontrar el cajero vacío?
3. ¿Cual es número promedio de automóviles que se encontraría en la fila? Considerar que si un automóvil está siendo atendido en el cajero no se encuentra en la fila.
4. ¿Cual es el tiempo promedio que un cliente se encuentra esperando?
5. ¿Cuántos clientes promedio atenderá el cajero por hora?