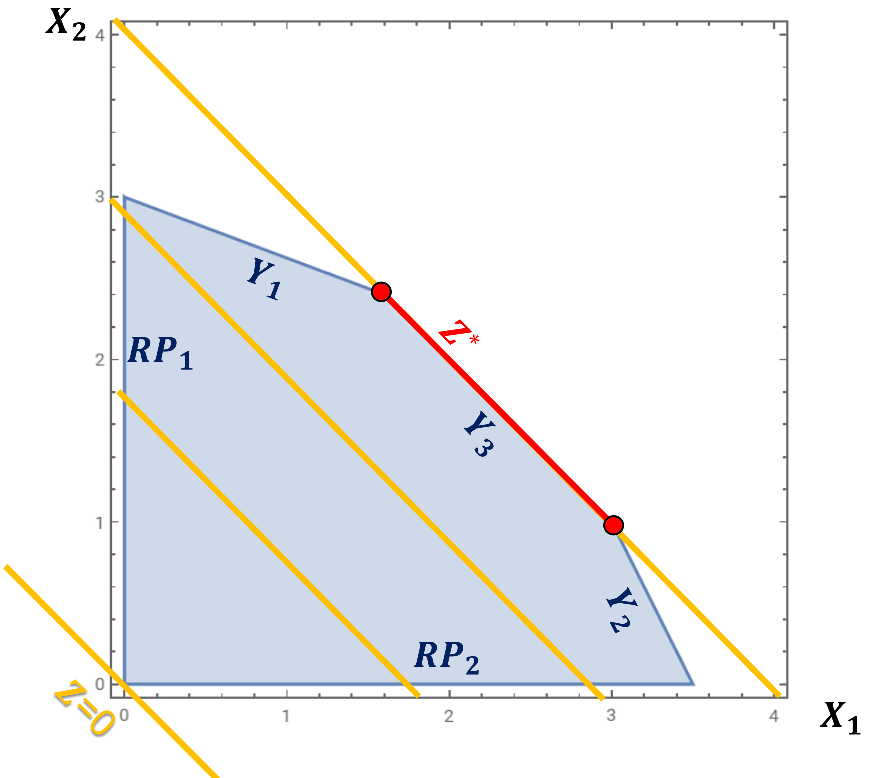
Casos Particulares en SIMPLEX Clase 18

Investigación Operativa UTN FRBA 2021
Elaborado por Docente: Rodrigo Maranzana
Curso: I4051 (Prof. Martin Palazzo)

Soluciones alternativas

$$Max\ Z = 3X_1 + 3X_2$$
$$sujeto\ a:$$
$$Y_1:\ 6X_1 + 16X_2 \leq 48$$
$$Y_2:\ 12X_1 + 6X_2 \leq 42$$
$$Y_3:\ 9X_1 + 9X_2 \leq 36$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



RP_i: restricciones de positividad

Soluciones alternativas

$$Max\ Z = 3X_1 + 3X_2$$
$$sujeto\ a:$$
$$Y_1:\ 6X_1 + 16X_2 \leq 48$$
$$Y_2:\ 12X_1 + 6X_2 \leq 42$$
$$Y_3:\ 9X_1 + 9X_2 \leq 36$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Modelo Extendido

$$Max\ Z = 3X_1 + 3X_2$$
$$sujeto\ a:$$
$$Y_1:\ 6X_1 + 16X_2 + X_3 = 48$$
$$Y_2:\ 12X_1 + 6X_2 + X_4 = 42$$
$$Y_3:\ 9X_1 + 9X_2 + X_5 = 36$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Soluciones alternativas

$$\boldsymbol{Max\ Z = 3X_1 + 3X_2}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a:}$$
$$\begin{aligned}
&Y_1:\ 6X_1 + 16X_2 + X_3 &&= 48\\
&Y_2:\ 12X_1 + 6X_2 + X_4 &&= 42\\
&Y_3:\ 9X_1 + 9X_2 + X_5 &&= 36
\end{aligned}$$
$$\boldsymbol{X_1, X_2 \geq 0}$$

Modelo Extendido Matricial

$$\boldsymbol{Max\ Z = C^T X}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a:}$$
$$\boldsymbol{AX = b}$$
$$\boldsymbol{X \geq 0}$$

<u>Valores de matrices:</u>

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 48 \\ 42 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Soluciones alternativas

$$\boldsymbol{Max\ Z = 3X_1 + 3X_2}$$

$\boldsymbol{sujeto\ a}$:

$$\boldsymbol{Y_1:\quad 6X_1 + 16X_2 + X_3 \qquad = 48}$$

$$\boldsymbol{Y_2:\quad 12X_1 + 6X_2 \qquad + X_4 \qquad = 42}$$

$$\boldsymbol{Y_3:\quad 9X_1 + 9X_2 \qquad\qquad + X_5 \quad = 36}$$

$$\boldsymbol{X_1, X_2 \geq 0}$$

$$\boldsymbol{Max\ Z = C^T X}$$

$\boldsymbol{sujeto\ a}$:

$$\boldsymbol{AX = b}$$

$$\boldsymbol{X \geq 0}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 48 \\ 42 \\ 36 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}$$

C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
$\boldsymbol{C_j\ Base}$	$\boldsymbol{X_j\ Base}$	$\boldsymbol{B_k}$	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{X_2}$	$\boldsymbol{X_3}$	$\boldsymbol{X_4}$	$\boldsymbol{X_5}$	
0	$\boldsymbol{X_3}$	**48**	6	16	1	0	0	
0	$\boldsymbol{X_4}$	**42**	12	6	0	1	0	
0	$\boldsymbol{X_5}$	**36**	9	9	0	0	1	
$\boldsymbol{Z}$	$Z_j - C_j$							

Soluciones alternativas

C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	**48**	6	16	1	0	0	
0	X_4	**42**	12	6	0	1	0	
0	X_5	**36**	9	9	0	0	1	
0	$Z_j - C_j$		-3	-3	0	0	0	

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡Z puede mejorar!

$\boldsymbol{X_1}$ y $\boldsymbol{X_2}$ igual $Z_j - C_j$, elegimos $\boldsymbol{X_1}$ arbitrariamente para entrar a la base

Soluciones alternativas

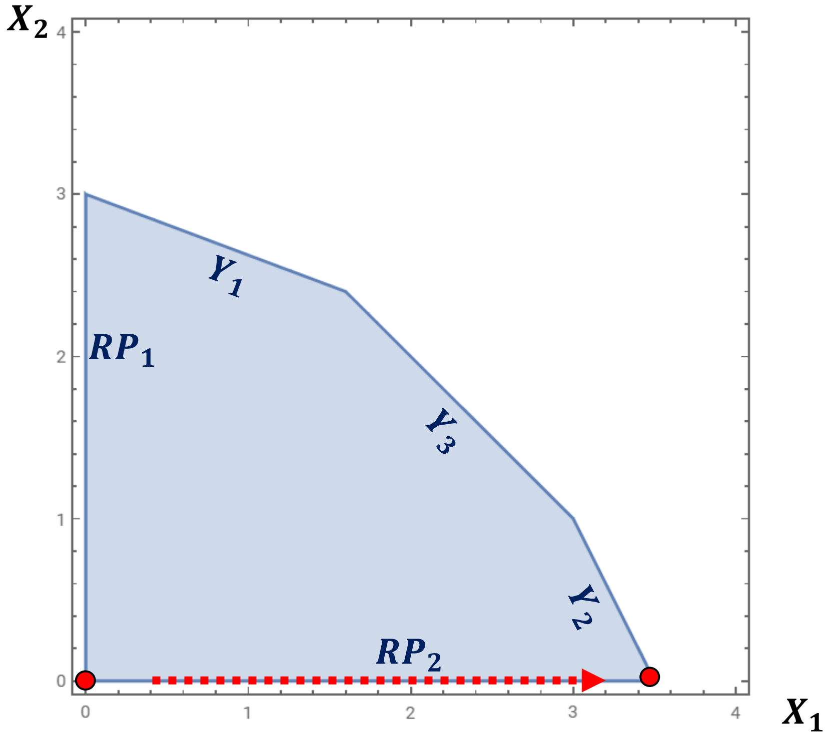
C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	48	6	16	1	0	0	8
0	X_4	42	12	6	0	1	0	3,5
0	X_5	36	9	9	0	0	1	4
0	$Z_j - C_j$		-3	-3	0	0	0	

Resolvemos B_k / A_{ij}

Mínimo positivo B_k / A_{ij} en X_4

Sale X_4, entra X_1

Soluciones alternativas



Soluciones alternativas

Tabla iteración 0

C_j			3	3	0	0	0	B_k/A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	**48**	6	16	1	0	0	8
0	X_4	**42**	12	6	0	1	0	3,5
0	X_5	**36**	9	9	0	0	1	4
0	$Z_j - C_j$		-3	-3	0	0	0	

Tabla iteración 1

C_j			3	3	0	0	0	B_k/A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	**27,0**	**0**	**13**	**1**	**-0,5**	**0**	
3	X_1	**3,5**	**1**	**0,5**	**0**	**0,08**	**0**	
0	X_5	**4,5**	**0**	**4,5**	**0**	**-0,75**	**1**	
	$Z_j - C_j$		**0**	**-1,5**	**0**	**0,25**	**0**	

Soluciones alternativas

C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
$\boldsymbol{C_j\ Base}$	$\boldsymbol{X_j\ Base}$	$\boldsymbol{B_k}$	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{X_2}$	$\boldsymbol{X_3}$	$\boldsymbol{X_4}$	$\boldsymbol{X_5}$	
0	$\boldsymbol{X_3}$	27,0	0	13	1	-0,5	0	
3	$\boldsymbol{X_1}$	3,5	1	0,5	0	0,08	0	
0	$\boldsymbol{X_5}$	4,5	0	4,5	0	-0,75	1	
$\mathbf{10,5}$	$Z_j - C_j$		0	**-1,5**	0	0,25	0	

Resolvemos el valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡Z puede mejorar!

$\boldsymbol{X_2}$ debe entrar a la base

Soluciones alternativas

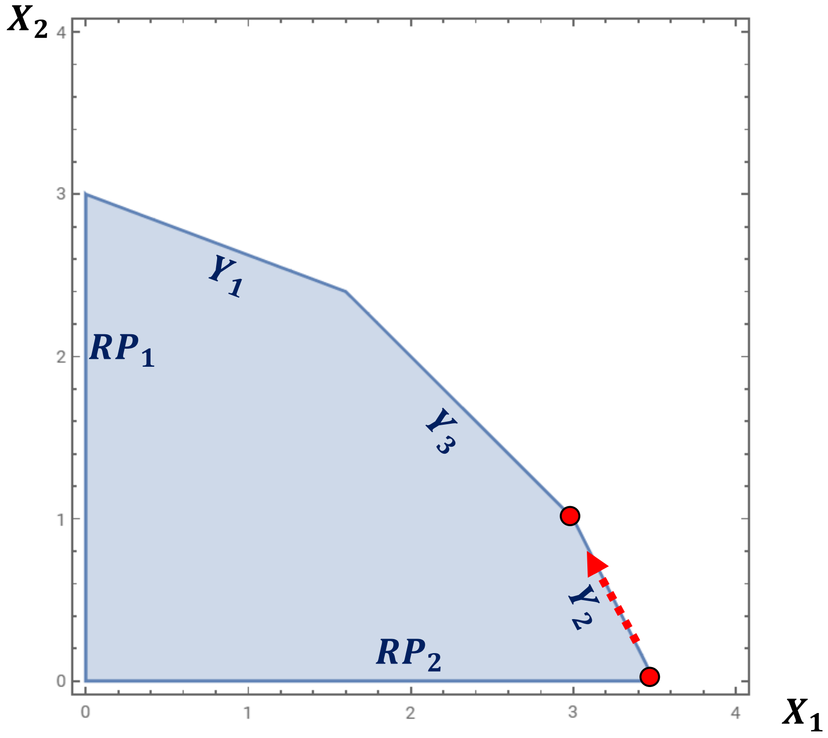
C_j			3	3	0	0	0	$B_k\ /A_{ij}$
$\boldsymbol{C_j\ Base}$	$\boldsymbol{X_j\ Base}$	$\boldsymbol{B_k}$	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{X_2}$	$\boldsymbol{X_3}$	$\boldsymbol{X_4}$	$\boldsymbol{X_5}$	
0	$\boldsymbol{X_3}$	27,0	0	13	1	-0,5	0	2,076
3	$\boldsymbol{X_1}$	3,5	1	0,5	0	0,08	0	7,000
0	$\boldsymbol{X_5}$	4,5	0	4,5	0	-0,75	1	1,000
$\mathbf{10,5}$	$Z_j - C_j$		0	**-1,5**	0	0,25	0	

Resolvemos $B_k\ /A_{ij}$

Mínimo positivo $B_k\ /A_{ij}$ en $\boldsymbol{X_5}$

Sale $\boldsymbol{X_5}$, entra $\boldsymbol{X_2}$

Soluciones alternativas



Soluciones alternativas

Tabla iteración 1

C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	27,0	0	13	1	-0,5	0	2,076
3	X_1	3,5	1	0,5	0	0,08	0	7,000
0	X_5	4,5	0	4,5	0	-0,75	1	1,000
10, 5	$Z_j - C_j$		0	-1,5	0	0,25	0	

Tabla iteración 2

C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	**14,0**	**0**	**0**	**1**	**1,67**	**-2,88**	
3	X_1	**3,0**	**1**	**0**	**0**	**0.16**	**-0,11**	
3	X_2	**1,0**	**0**	**1**	**0**	**-0,16**	**0,23**	
	$Z_j - C_j$		**0**	**0**	**0**	**0**	**0,33**	

Soluciones alternativas

C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j ***Base***	X_j ***Base***	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	14,0	0	0	1	1,67	-2,88	
3	X_1	3,0	1	0	0	0,16	-0,11	
3	X_2	1,0	0	1	0	-0,16	0,23	
12	$Z_j - C_j$		0	0	0	0	0,33	

Resolvemos el valor del funcional Z

No existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡pero sí con 0 alternativo (0*)!

Encontramos caso particular de soluciones alternativas

Soluciones alternativas

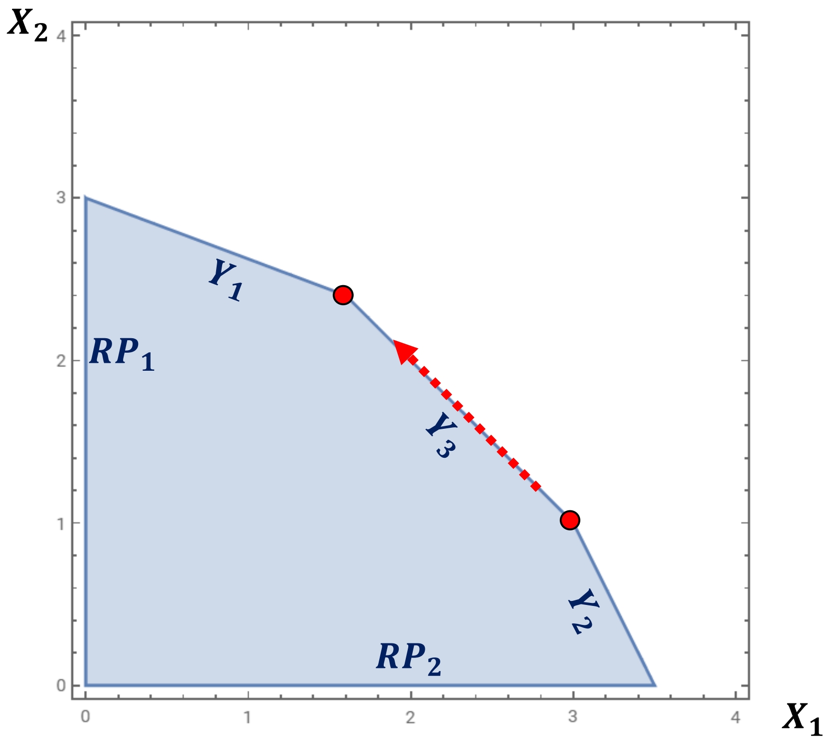
C_j			3	3	0	0	0	$B_k\ /A_{ij}$
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	14,0	0	0	1	1,67	-2,88	**8,383**
3	X_1	3,0	1	0	0	0,16	-0,11	**18,750**
3	X_2	1,0	0	1	0	-0,16	0,23	**-6,250**
12	$Z_j - C_j$		0	0	0	**0**	0,33	

Resolvemos $B_k\ /A_{ij}$

Mínimo positivo $B_k\ /A_{ij}$ en $\boldsymbol{X_5}$

Sale $\boldsymbol{X_3}$, entra $\boldsymbol{X_4}$ (por el 0*). Las dos son variables Slack.

Soluciones alternativas



Soluciones alternativas

Tabla iteración 2

C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	14,0	0	0	1	1,67	-2,88	8,383
3	X_1	3,0	1	0	0	0,16	-0,11	18,750
3	X_2	1,0	0	1	0	-0,16	0,23	-6,250
12	$Z_j - C_j$		0	0	0	0	0,33	

Tabla iteración 3

C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_4	**8,38**	**0**	**0**	**0,6**	**1**	**-1,72**	
3	X_1	**1,66**	**1**	**0**	**-0,096**	**0**	**0,17**	
3	X_2	**2,34**	**0**	**1**	**0,096**	**0**	**-0,05**	
	$Z_j - C_j$		**0**	**0**	**0**	**0**	**0,33**	

Soluciones alternativas

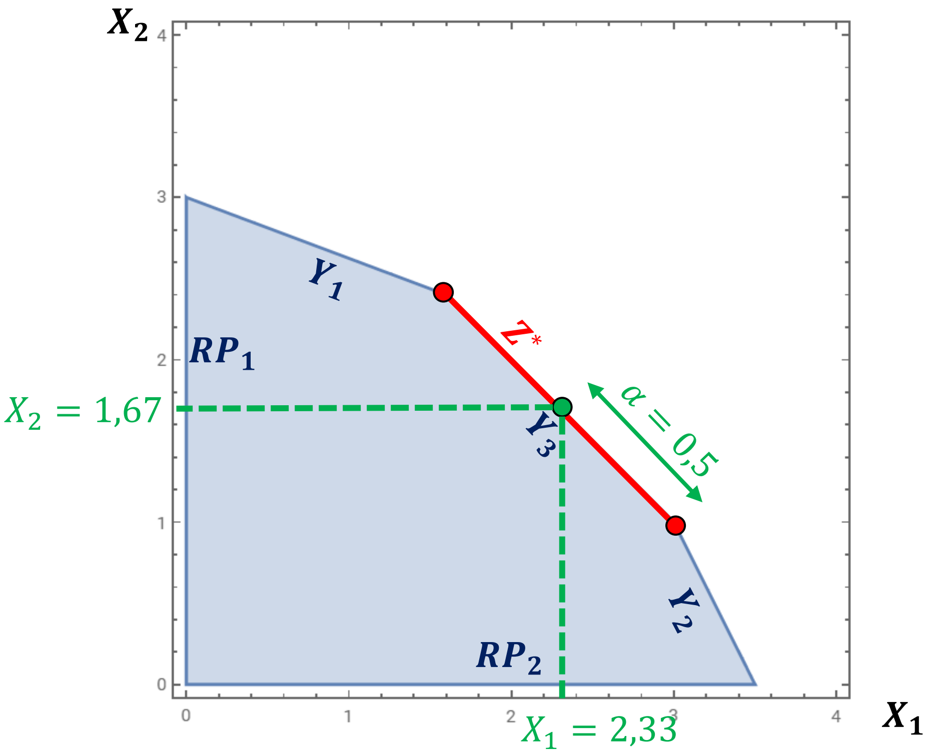
C_j			3	3	0	0	0	B_k / A_{ij}
$\boldsymbol{C_j}$ **Base**	$\boldsymbol{X_j}$ **Base**	$\boldsymbol{B_k}$	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{X_2}$	$\boldsymbol{X_3}$	$\boldsymbol{X_4}$	$\boldsymbol{X_5}$	
0	$\boldsymbol{X_4}$	8,38	0	0	0,6	1	-1,72	
3	$\boldsymbol{X_1}$	1,66	1	0	-0,096	0	-2,6	
3	$\boldsymbol{X_2}$	2,34	0	1	0,096	0	-0,05	
12	$Z_j - C_j$		0	0	**0**	0	0,33	

Resolvemos el valor del funcional Z

$\boldsymbol{X_3}$ con 0 alternativo (0*), la solución de la iteración anterior

La solución se mantiene igual $Z = 12$

Soluciones alternativas



¿Cómo se escribe la solución?

$Z^* = 12$

Combinación lineal de las soluciones en los vértices:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 3,00 \\ 1,00 \\ 14,00 \\ 0,00 \\ 0,00 \end{bmatrix} + (1-\alpha) \begin{bmatrix} 1,66 \\ 2,34 \\ 0,00 \\ 8,38 \\ 0,00 \end{bmatrix} \qquad 0 \le \alpha \le 1$$

Ej: $\alpha = 0,5$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,33 \\ 1,67 \\ 7,00 \\ 4,19 \\ 0,00 \end{bmatrix}$$

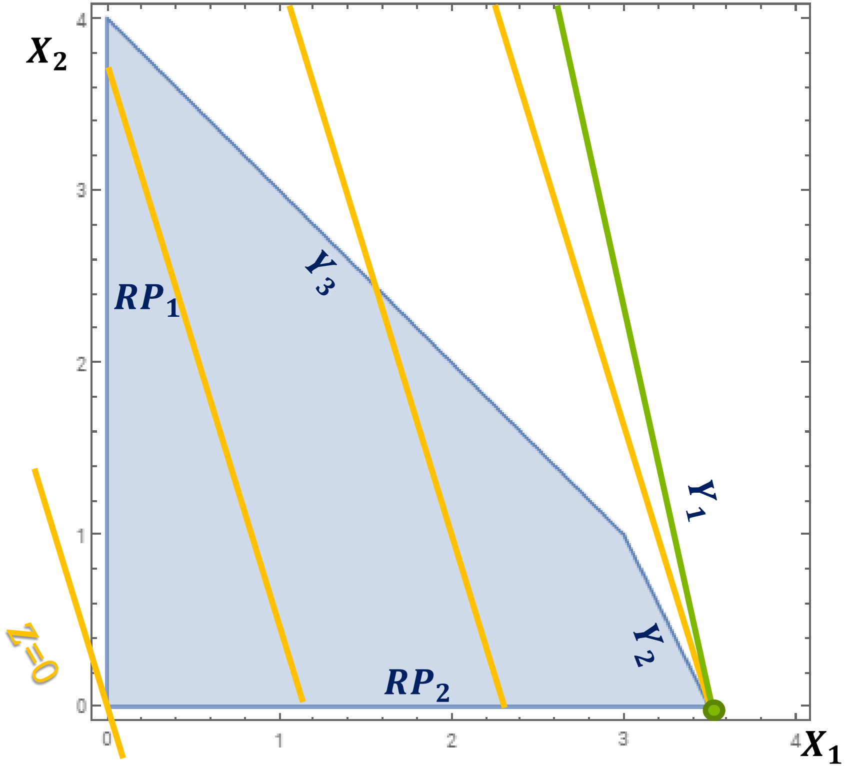
Puntos degenerados

$$Max\ Z = 12X_1 + 4X_2$$

sujeto a:

$$10X_1 + 4X_2 \leq 35$$
$$12X_1 + 6X_2 \leq 42$$
$$9X_1 + 9X_2 \leq 36$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



RP_i: restricciones de positividad

Soluciones degeneradas

$$Max\ Z = 12X_1 + 4X_2$$
$$sujeto\ a:$$
$$10X_1 + 4X_2 \leq 35$$
$$12X_1 + 6X_2 \leq 42$$
$$9X_1 + 9X_2 \leq 36$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Modelo Extendido

$$Max\ Z = 12X_1 + 4X_2$$
$$sujeto\ a:$$
$$Y_1: 10X_1 + 4X_2 + X_3 = 35$$
$$Y_2: 12X_1 + 6X_2 + X_4 = 42$$
$$Y_3: 9X_1 + 9X_2 + X_5 = 36$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Soluciones degeneradas

$$\boldsymbol{Max\ Z = 12X_1 + 4X_2}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a:}$$
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Y_1: 10X_1 + 4X_2} &\quad \boldsymbol{+X_3} & & & \boldsymbol{= 35}\\
\boldsymbol{Y_2: 12X_1 + 6X_2} & & \boldsymbol{+X_4} & & \boldsymbol{= 42}\\
\boldsymbol{Y_3: \quad 9X_1 + \quad 9X_2} & & & \boldsymbol{+X_5} & \boldsymbol{= 36}
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{X_1, X_2 \geq 0}$$

Modelo Extendido Matricial

$$\boldsymbol{Max\ Z = C^T X}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a:}$$
$$\boldsymbol{AX = b}$$
$$\boldsymbol{X \geq 0}$$

Valores de matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 35 \\ 42 \\ 36 \end{bmatrix}$$

Soluciones degeneradas

$$\boldsymbol{Max\ Z = 12X_1 + 4X_2}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a:}$$
$$\boldsymbol{Y_1: 10X_1 + 4X_2 \quad +X_3 \qquad\qquad = 35}$$
$$\boldsymbol{Y_2: 12X_1 + 6X_2 \qquad\quad +X_4 \qquad = 42}$$
$$\boldsymbol{Y_3: \quad 9X_1 + \quad 9X_2 \qquad\qquad\quad +X_5 \quad = 36}$$
$$\boldsymbol{X_1, X_2 \geq 0}$$

$$\boldsymbol{Max\ Z = C^T X}$$
$$\boldsymbol{sujeto\ a:}$$
$$\boldsymbol{AX = b}$$
$$\boldsymbol{X \geq 0}$$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 35 \\ 42 \\ 36 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}$$

C_j			12	4	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	35	10	4	1	0	0	
0	X_4	42	12	6	0	1	0	
0	X_5	36	9	9	0	0	1	
Z	$Z_j - C_j$							

Soluciones degeneradas

C_j			12	4	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	35	10	4	1	0	0	
0	X_4	42	12	6	0	1	0	
0	X_5	36	9	9	0	0	1	
0	$Z_j - C_j$		-12	-4	0	0	0	

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡Z puede mejorar!

$\boldsymbol{X_1}$ con menor $Z_j - C_j$, para entrar a la base

Soluciones degeneradas

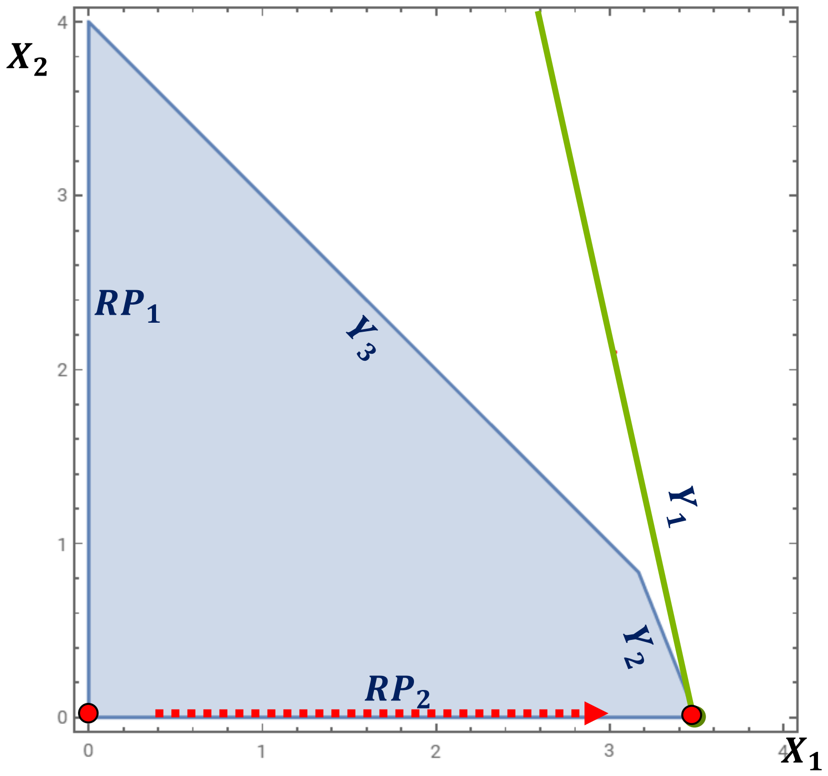
C_j			12	4	0	0	0	$B_k\ /A_{ij}$
$\boldsymbol{C_j\ Base}$	$\boldsymbol{X_j\ Base}$	$\boldsymbol{B_k}$	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{X_2}$	$\boldsymbol{X_3}$	$\boldsymbol{X_4}$	$\boldsymbol{X_5}$	
0	$\boldsymbol{X_3}$	35	10	4	1	0	0	3,5
0	$\boldsymbol{X_4}$	42	12	6	0	1	0	3,5
0	$\boldsymbol{X_5}$	36	9	9	0	0	1	4
0	$Z_j - C_j$		-12	-4	0	0	0	

Resolvemos $B_k\ /A_{ij}$

Mínimo positivo $B_k\ /A_{ij}$ en $\boldsymbol{X_3}$ y $\boldsymbol{X_4}$, elegimos arbitrariamente $\boldsymbol{X_3}$.

Sale $\boldsymbol{X_3}$, entra $\boldsymbol{X_1}$

Soluciones degeneradas



Soluciones degeneradas

Tabla iteración 0

C_j			12	4	0	0	0	B_k/A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	35	10	4	1	0	0	3,5
0	X_4	42	12	6	0	1	0	3,5
0	X_5	36	9	9	0	0	1	4
0	$Z_j - C_j$		-12	-4	0	0	0	

Tabla iteración 1

C_j			12	4	0	0	0	B_k/A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
12	X_1	**3,5**	**1**	**0,4**	**0,1**	**0**	**0**	
0	X_4	**0**	**0**	**1,2**	**-1,2**	**1**	**0**	
0	X_5	**4,5**	**0**	**5,4**	**-0,9**	**0**	**1**	
	$Z_j - C_j$		**0**	**0,8**	**1,2**	**0**	**0**	

Soluciones degeneradas

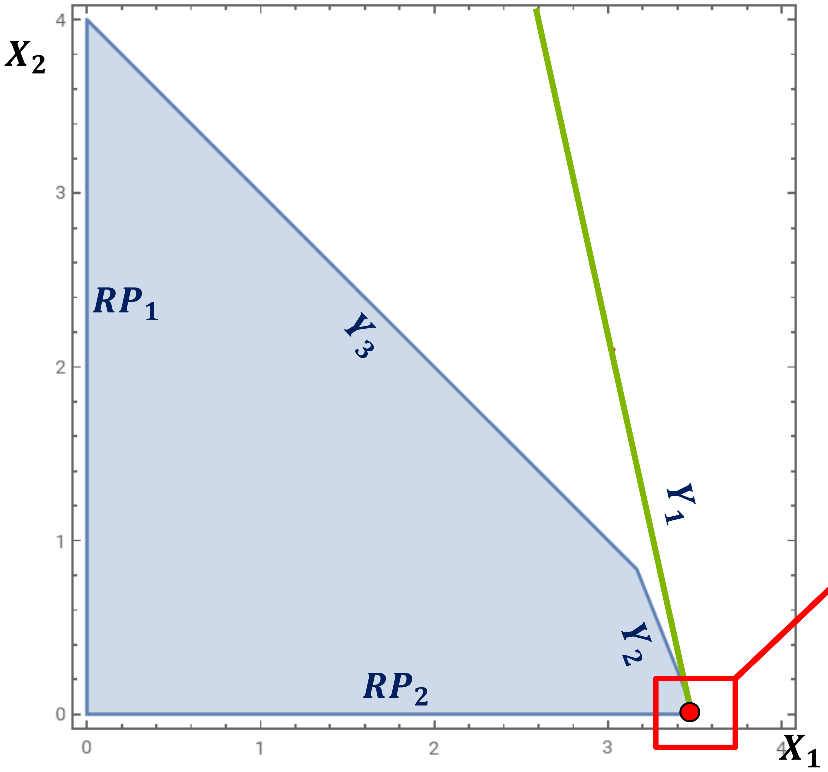
C_j			12	4	0	0	0	B_k / A_{ij}
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
12	X_1	3,5	1	0,4	0,1	0	0	
0	X_4	0	0	1,2	-1,2	1	0	
0	X_5	4,5	0	5,4	-0,9	0	1	
42	$Z_j - C_j$		0	0,8	1,2	0	0	

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

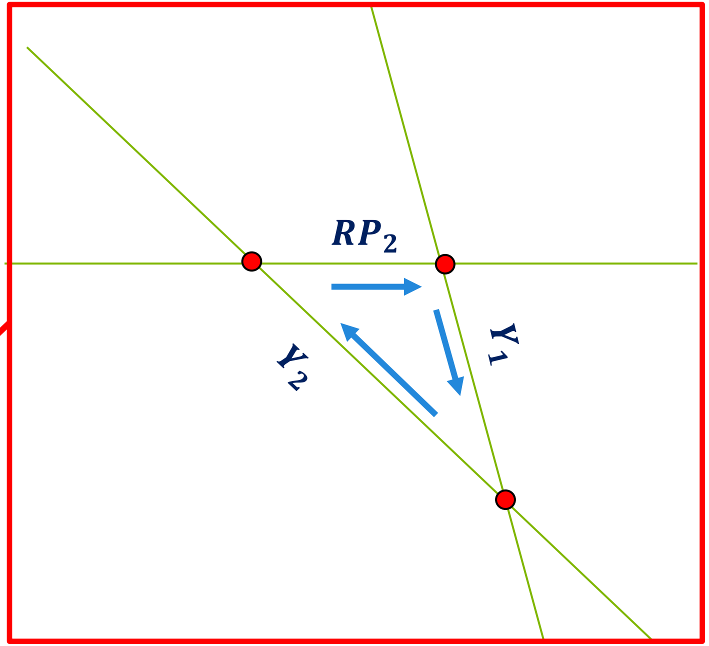
Es el óptimo.

X_4 es básica y tiene valor 0, solución degenerada.

Soluciones degeneradas



Como lo ve la computadora:



Hay riesgo de ciclo, ¿Cómo lo evitamos?

Soluciones degeneradas

Volvemos al punto donde teníamos dos $B_k\ /A_{ij}$ iguales:

C_j			12	4	0	0	0	$B_k\ /A_{ij}$
C_j **Base**	X_j **Base**	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	35	10	4	1	0	0	3,5
0	X_4	42	12	6	0	1	0	3,5
0	X_5	36	9	9	0	0	1	4
0	$Z_j - C_j$		-12	-4	0	0	0	

Computacionalmente aplicamos un algoritmo heurístico para evitar el ciclo:

1. Aislamos las filas de los candidatos a salir.
2. Dividimos la fila por el pivote de cada candidato
3. De izquierda a derecha, ante la primera desigualdad entre los dos conservamos el mínimo.

Soluciones degeneradas

1- Aislamos las filas de los candidatos a salir.

C_j *Base*	X_j *Base*	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	35	10	4	1	0	0	3,5
0	X_4	42	12	6	0	1	0	3,5

2- Dividimos la fila por el pivote de cada candidato

C_j *Base*	X_j *Base*	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	3,5	1	0,4	0,1	0	0	
0	X_4	3,5	1	0,5	0	0,08	0	

3- De izquierda a derecha, ante la primera desigualdad entre los dos conservamos el mínimo.

C_j *Base*	X_j *Base*	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
0	X_3	3,5	1	0,4	0,1	0	0	
0	X_4	3,5	1	0,5	0	0,08	0	

-> Debe salir X_3