

SIMPLEX con método de la M

Clase 20

Investigación Operativa UTN FRBA 2020

Curso: I4051

Elaborado por: Rodrigo Maranzana

Docente: Martín Palazzo

Región del poliedro factible

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2$$

sujeto a:

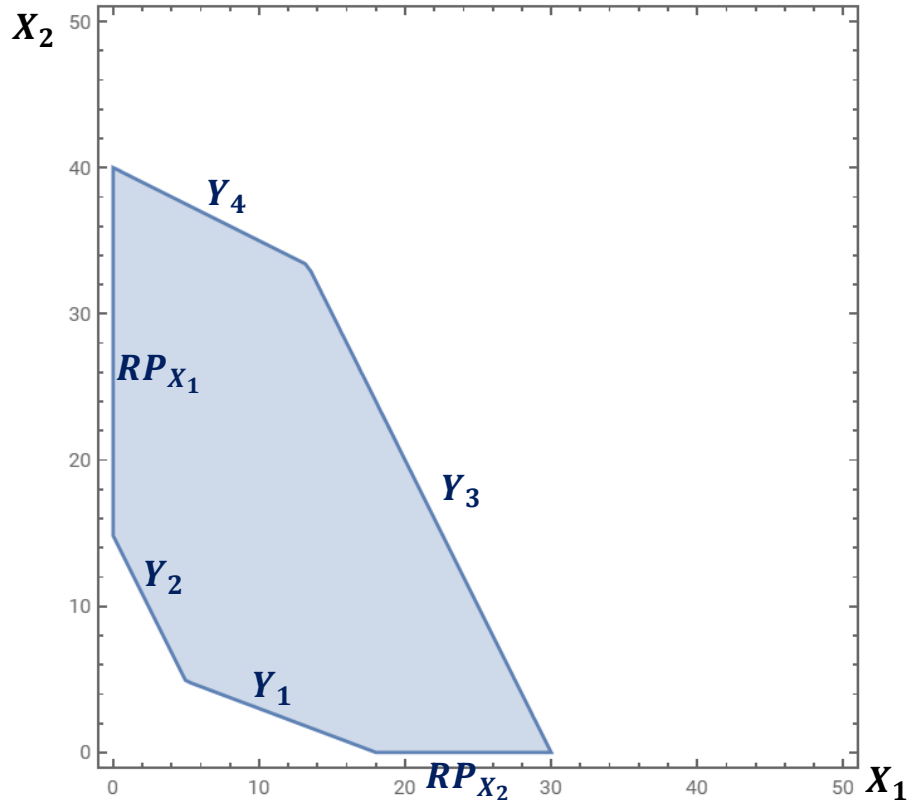
$$Y_1: 6X_1 + 16X_2 \geq 108$$

$$Y_2: 12X_1 + 6X_2 \geq 89$$

$$Y_3: 2X_1 + X_2 \leq 160$$

$$Y_4: X_1 + 2X_2 \leq 180$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



Modelo extendido

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2$$

sujeto a:

$$Y_1: 6X_1 + 16X_2 \geq 108$$

$$Y_2: 12X_1 + 6X_2 \geq 89$$

$$Y_3: 2X_1 + X_2 \leq 160$$

$$Y_4: X_1 + 2X_2 \leq 180$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Modelo Extendido



$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2 - Mu_1 - Mu_2$$

sujeto a:

$$Y_1: 6X_1 + 16X_2 - X_3 + u_1 = 108$$

$$Y_2: 12X_1 + 6X_2 - X_4 + u_2 = 89$$

$$Y_3: 2X_1 + X_2 + X_5 = 160$$

$$Y_4: X_1 + 2X_2 + X_6 = 180$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

M: un número muy grande

u_i : variable ficticia

Modelo Matricial

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2 - Mu_1 - Mu_2$$

sujeto a:

$$Y_1: 6X_1 + 16X_2 - X_3 + u_1 = 108$$

$$Y_2: 12X_1 + 6X_2 - X_4 + u_2 = 89$$

$$Y_3: 2X_1 + X_2 + X_5 = 160$$

$$Y_4: X_1 + 2X_2 + X_6 = 180$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



Modelo Extendido Matricial

$$\text{Max } Z = C^T X$$

sujeto a:

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

Valores de matrices:

$$b = \begin{bmatrix} 108 \\ 89 \\ 160 \\ 180 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M \\ -M \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Resolución con SIMPLEX

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
-M	u_1	108	6	16	-1	0	0	0	1	0	
-M	u_2	89	12	6	0	-1	0	0	0	1	
0	X_5	160	2	1	0	0	1	0	0	0	
0	X_6	180	1	2	0	0	0	1	0	0	
-197M	$Z_j - C_j$		-18M-4	-22M-3	M	M	0	0	0	0	

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡ Z puede mejorar!

Seleccionamos X_2 para entrar a la base

Resolución con SIMPLEX

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
-M	u_1	108	6	16	-1	0	0	0	1	0	6.75
-M	u_2	89	12	6	0	-1	0	0	0	1	14.83
0	X_5	160	2	1	0	0	1	0	0	0	160.00
0	X_6	180	1	2	0	0	0	1	0	0	90.00
Z	$Z_j - C_j$		-18M-4	-22M-3	M	M	0	0	0	0	

Resolvemos B_k / A_{ij}

Mínimo positivo B_k / A_{ij} en u_1

Sale u_1 , entra X_2

Resolución con SIMPLEX

Tabla
iteración 0

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
-M	u_1	108	6	16	-1	0	0	0	1	0	6.75
-M	u_2	89	12	6	0	-1	0	0	0	1	14.83
0	X_5	160	2	1	0	0	1	0	0	0	160.00
0	X_6	180	1	2	0	0	0	1	0	0	90.00
Z	$Z_j - C_j$		-18M-4	-22M-3	M	M	0	0	0	0	

Tabla
iteración 1

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
3	X_2	6.75	0.375	1	-0.062	0	0	0	0.062	0	
-M	u_2	48.50	9.750	0	0.375	-1	0	0	-0.375	1	
0	X_5	153.25	1.625	0	0.062	0	1	0	-0.062	0	
0	X_6	166.5	0.250	0	0.125	0	0	1	-0.125	0	
Z	$Z_j - C_j$		-9.75M -2.875	0	-0.37M -0.187	M	0	0	1.37M +0.187	0	

Resolución con SIMPLEX

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
3	X_2	6.75	0.375	1	-0.062	0	0	0	0.062	0	
-M	u_2	48.50	9.750	0	0.375	-1	0	0	-0.375	1	
0	X_5	153.25	1.625	0	0.062	0	1	0	-0.062	0	
0	X_6	166.5	0.250	0	0.125	0	0	1	-0.125	0	
-48.5M + 20.25	$Z_j - C_j$		-9.75M -2.875	0	-0.37M -0.187	M	0	0	1.37M +0.187	0	

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡ Z puede mejorar!

Seleccionamos X_1 para entrar a la base

Resolución con SIMPLEX

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
3	X_2	6.75	0.375	1	-0.062	0	0	0	0.062	0	18.00
-M	u_2	48.50	9.750	0	0.375	-1	0	0	-0.375	1	4.97
0	X_5	153.25	1.625	0	0.062	0	1	0	-0.062	0	92.88
0	X_6	166.5	0.250	0	0.125	0	0	1	-0.125	0	666.00
-48.5M + 20.25	$Z_j - C_j$		-9.75M -2.875	0	-0.37M -0.187	M	0	0	1.37M +0.187	0	

Resolvemos B_k / A_{ij}

Mínimo positivo B_k / A_{ij} en u_2

Sale u_2 , entra X_1

Resolución con SIMPLEX

Tabla
iteración 1

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
3	X_2	6.75	0.375	1	-0.062	0	0	0	0.062	0	18.00
-M	u_2	48.50	9.750	0	0.375	-1	0	0	-0.375	1	4.97
0	X_5	153.25	1.625	0	0.062	0	1	0	-0.062	0	92.88
0	X_6	166.5	0.250	0	0.125	0	0	1	-0.125	0	666.00
-48.5M + 20.25	$Z_j - C_j$		-9.75M -2.875	0	-0.37M -0.187	M	0	0	1.37M +0.187	0	

Tabla
iteración 2

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
3	X_2	4.88	0	1	-0.077	0.038	0	0	0.077	-0.038	
4	X_1	4.97	1	0	0.038	-0.102	0	0	-0.038	0.102	
0	X_5	145.17	0	0	0	0.167	1	0	0	-0.166	
0	X_6	165.26	0	0	0.115	0.025	0	1	-0.115	-0.025	
Z	$Z_j - C_j$		0	0	-0.076	-0.294	0	0	M +0.076	M +0.294	

Resolución con SIMPLEX

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
3	X_2	4.88	0	1	-0.077	0.038	0	0	0.077	-0.038	
4	X_1	4.97	1	0	0.038	-0.102	0	0	-0.038	0.102	
0	X_5	145.17	0	0	0	0.167	1	0	0	-0.166	
0	X_6	165.26	0	0	0.115	0.025	0	1	-0.115	-0.025	
34.52	$Z_j - C_j$		0	0	-0.076	-0.294	0	0	M +0.076	M +0.294	

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡ Z puede mejorar!

Seleccionamos X_4 para entrar a la base

Resolución con SIMPLEX

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
3	X_2	4.88	0	1	-0.077	0.038	0	0	0.077	-0.038	128.42
4	X_1	4.97	1	0	0.038	-0.102	0	0	-0.038	0.102	-497.00
0	X_5	145.17	0	0	0	0.167	1	0	0	-0.166	869.28
0	X_6	165.26	0	0	0.115	0.025	0	1	-0.115	-0.025	6610.4
34.52	$Z_j - C_j$		0	0	-0.076	-0.294	0	0	M +0.076	M +0.294	

Resolvemos B_k / A_{ij}

Mínimo positivo B_k / A_{ij} en X_2

Sale X_2 , entra X_4

Resolución con SIMPLEX

Tabla
iteración 2

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
3	X_2	4.88	0	1	-0.077	0.038	0	0	0.077	-0.038	128.42
4	X_1	4.97	1	0	0.038	-0.102	0	0	-0.038	0.102	-497.00
0	X_5	145.17	0	0	0	0.167	1	0	0	-0.166	869.28
0	X_6	165.26	0	0	0.115	0.025	0	1	-0.115	-0.025	6610.4
34.52	$Z_j - C_j$		0	0	-0.076	-0.294	0	0	M +0.076	M +0.294	

Tabla
iteración 3

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
0	X_4	128.42	0	26.31	-2.026	1	0	0			
4	X_1	18.07	1	2.667	-0.167	0	0	0			
0	X_5	123.72	0	-4.334	0.334	0	1	0			
0	X_6	162.05	0	-0.667	0.167	0	0	1			
Z	$Z_j - C_j$		0	7.667	-0.667	0	0	0			

Resolución con SIMPLEX

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
0	X_4	128.42	0	26.31	-2.026	1	0	0			
4	X_1	18.07	1	2.667	-0.167	0	0	0			
0	X_5	123.72	0	-4.334	0.334	0	1	0			
0	X_6	162.05	0	-0.667	0.167	0	0	1			
72.28	$Z_j - C_j$		0	7.667	-0.667	0	0	0			

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡ Z puede mejorar!

Seleccionamos X_3 para entrar a la base

Resolución con SIMPLEX

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	B_k / A_{ij}
0	X_4	128.42	0	26.31	-2.026	1	0	0			-64.21
4	X_1	18.07	1	2.667	-0.167	0	0	0			-108.20
0	X_5	123.72	0	-4.334	0.334	0	1	0			370.42
0	X_6	162.05	0	-0.667	0.167	0	0	1			970.36
72.28	$Z_j - C_j$		0	7.667	-0.667	0	0	0			

Resolvemos B_k / A_{ij}

Mínimo positivo B_k / A_{ij} en X_5

Sale X_5 , entra X_3

Resolución con SIMPLEX

Tabla
iteración 3

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
0	X_4	128.42	0	26.31	-2.026	1	0	0			-64.21
4	X_1	18.07	1	2.667	-0.167	0	0	0			-108.20
0	X_5	123.72	0	-4.334	0.334	0	1	0			370.42
0	X_6	162.05	0	-0.667	0.167	0	0	1			970.36
72.28	$Z_j - C_j$		0	7.667	-0.667	0	0	0			

Tabla
iteración 4

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
0	X_4	878.89	0	0.02	0	1	6.06	0			
4	X_1	79.93	1	0.50	0	0	0.50	0			
0	X_3	370.42	0	-13.00	1	0	3.00	0			
0	X_6	100.19	0	1.50	0	0	-0.50	1			
Z	$Z_j - C_j$		0	-1.00	0	0	2.00	0			

Resolución con SIMPLEX

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
0	X_4	878.89	0	0.02	0	1	6.06	0			
4	X_1	79.93	1	0.50	0	0	0.50	0			
0	X_3	370.42	0	-13.00	1	0	3.00	0			
0	X_6	100.19	0	1.50	0	0	-0.50	1			
319.72	$Z_j - C_j$		0	-1.00	0	0	2.00	0			

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡ Z puede mejorar!

Seleccionamos X_2 para entrar a la base

Resolución con SIMPLEX

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
0	X_4	878.89	0	0.02	0	1	6.06	0			43944.50
4	X_1	79.93	1	0.50	0	0	0.50	0			159.86
0	X_3	370.42	0	-13.00	1	0	3.00	0			-28.49
0	X_6	100.19	0	1.50	0	0	-0.50	1			66.79
319.72	$Z_j - C_j$		0	-1.00	0	0	2.00	0			

Resolvemos B_k / A_{ij}

Mínimo positivo B_k / A_{ij} en X_6

Sale X_6 , entra X_2

Resolución con SIMPLEX

Tabla
iteración 4

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
0	X_4	878.89	0	0.02	0	1	6.06	0			43944.50
4	X_1	79.93	1	0.50	0	0	0.50	0			159.86
0	X_3	370.42	0	-13.00	1	0	3.00	0			-28.49
0	X_6	100.19	0	1.50	0	0	-0.50	1			66.79
319.72	$Z_j - C_j$		0	-1.00	0	0	2.00	0			

Tabla
iteración 5

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
0	X_4	877.50	0	0	0	1	6.00	0			
4	X_1	46.67	1	0	0	0	0.67	-0.34			
0	X_3	1238.67	0	0	1	0	-1.34	8.67			
3	X_2	66.67	0	1	0	0	-0.34	0.67			
Z	$Z_j - C_j$		0	0	0	0	1.67	0.67			

Resolución con SIMPLEX

C_j			4	3	0	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	u_1	u_2	
0	X_4	877.50	0	0	0	1	6.00	0			
4	X_1	46.67	1	0	0	0	0.67	-0.34			
0	X_3	1238.67	0	0	1	0	-1.34	8.67			
3	X_2	66.67	0	1	0	0	-0.34	0.67			
386.67	$Z_j - C_j$		0	0	0	0	1.67	0.67			

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

No existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡ Z es óptimo!

Resolución con SIMPLEX

Solución:

$$Z^* = 386.67$$

$$X_1^* = 46.67$$

$$X_2^* = 66.67$$

