

Casos Particulares en SIMPLEX

Clase 18

Investigación Operativa UTN FRBA 2021

Elaborado por Docente: Rodrigo Maranzana

Curso: I4051 (Prof. Martin Palazzo)

Problema incompatible

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2$$

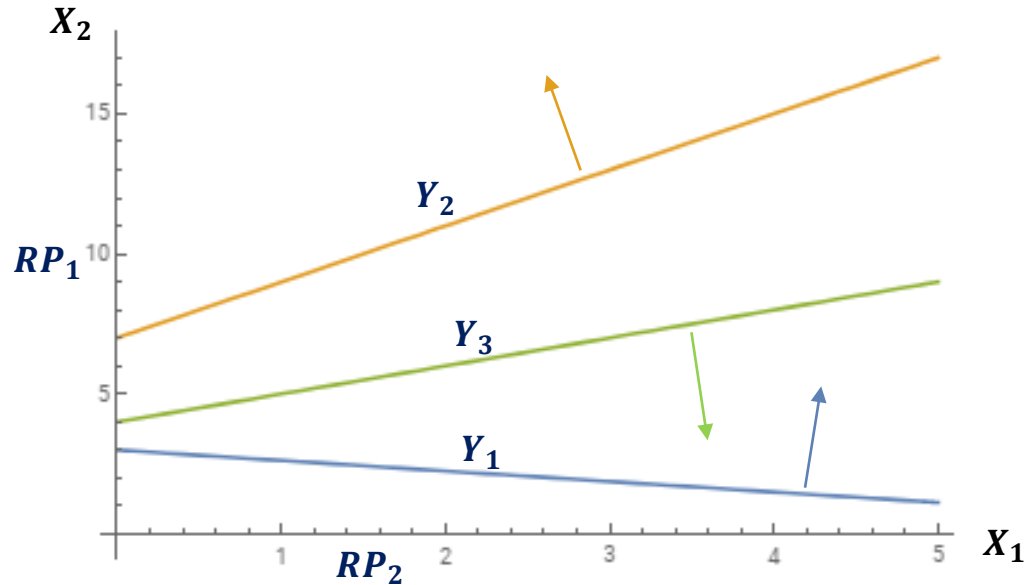
sujeto a:

$$Y_1: 6X_1 + 16X_2 \geq 48$$

$$Y_2: 12X_1 + 6X_2 \geq 42$$

$$Y_3: 9X_1 + 9X_2 \leq 36$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



Problema incompatible

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2$$

sujeto a:

$$Y_1: 6X_1 + 16X_2 \geq 48$$

$$Y_2: 12X_1 + 6X_2 \geq 42$$

$$Y_3: 9X_1 + 9X_2 \leq 36$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Modelo Extendido



$$\text{Max } Z = 4X_1 + 3X_2 - Mu_1 - Mu_2$$

sujeto a:

$$Y_1: 6X_1 + 16X_2 - X_3 + u_1 = 48$$

$$Y_2: 12X_1 + 6X_2 - X_4 + u_2 = 42$$

$$Y_3: 9X_1 + 9X_2 + X_5 = 36$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

M: un número muy grande

u_i : variable ficticia

Problema incompatible

$$\text{Max } Z = 4 + 3X_2$$

sujeto a:

$$Y_1: 6X_1 + 16X_2 - X_3 + u_1 = 48$$

$$Y_2: 12X_1 + 6X_2 - X_4 + u_2 = 42$$

$$Y_3: 9X_1 + 9X_2 + X_5 = 36$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



**Modelo Extendido
Matricial**

$$\text{Max } Z = C^T X$$

sujeto a:

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

Valores de matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 48 \\ 42 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M \\ -M \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Problema incompatible

$$\text{Max } Z = 4 + 3X_2$$

sujeto a:

$$Y_1: 6X_1 + 16X_2 - X_3 + u_1 = 48$$

$$Y_2: 12X_1 + 6X_2 - X_4 + u_2 = 42$$

$$Y_3: 9X_1 + 9X_2 + X_5 = 36$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = C^T X$$

sujeto a:

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 16 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 48 \\ 42 \\ 36 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -M \\ -M \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
-M	u_1	48	6	16	-1	0	0	1	0	
-M	u_2	42	12	6	0	-1	0	0	1	
0	X_5	36	9	9	0	0	1	0	0	
Z	$Z_j - C_j$									

Problema incompatible

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
-M	u_1	48	6	16	-1	0	0	1	0	
-M	u_2	42	12	6	0	-1	0	0	1	
0	X_5	36	9	9	0	0	1	0	0	
-90M	$Z_j - C_j$		-18M - 4	-22M - 3	M	M	0	0	0	

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡ Z puede mejorar!

Seleccionamos X_2 para entrar a la base

Problema incompatible

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	B_k / A_{ij}
-M	u_1	48	6	16	-1	0	0	1	0	3
-M	u_2	42	12	6	0	-1	0	0	1	7
0	X_5	36	9	9	0	0	1	0	0	4
-90M	$Z_j - C_j$		-18M - 4	-22M - 3	M	M	0	0	0	

Resolvemos B_k / A_{ij}

Mínimo positivo B_k / A_{ij} en u_2

Sale u_1 , entra X_2

De ahora en más: $-M - c \approx -M \dots$
ya que “-c” es despreciable

Problema incompatible

Tabla
iteración 0

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
-M	u_1	48	6	16	-1	0	0	1	0	3
-M	u_2	42	12	6	0	-1	0	0	1	7
0	X_5	36	9	9	0	0	1	0	0	4
0	$Z_j - C_j$		-18M ...	-22M ...	M	M	0	0	0	

Tabla
iteración 1

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
3	X_2	3	0,37	1	-0,06	0	0	0,06	0	
-M	u_2	24	9,75	0	0,37	-1	0	-0,37	1	
0	X_5	9	5,62	0	0,56	0	1	-0,56	0	
	$Z_j - C_j$		-9,75M ...	0	-0,37M ...	M	0	1,37M ...	0	

Problema incompatible

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
3	X_2	3	0,37	1	-0,06	0	0	0,06	0	
-M	u_2	24	9,75	0	0,37	-1	0	-0,37	1	
0	X_5	9	5,62	0	0,56	0	1	-0,56	0	
-24M ...	$Z_j - C_j$		-9,75M ...	0	-0,37M ...	M	0	1,37M ...	0	

Resolvemos el valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡ Z puede mejorar!

X_1 debe entrar a la base

Problema incompatible

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
$C_j \text{ Base}$	$X_j \text{ Base}$	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
3	X_2	3	0,37	1	-0,06	0	0	0,06	0	8,1
-M	u_2	24	9,75	0	0,37	-1	0	-0,37	1	2,4
0	X_5	9	5,62	0	0,56	0	1	-0,56	0	1,6
-24M ...	$Z_j - C_j$		-9,75M ...	0	-0,37M ...	M	0	1,37M ...	0	

Resolvemos B_k / A_{ij}

Mínimo positivo B_k / A_{ij} en X_5

Sale X_5 , entra X_1

Problema incompatible

Tabla
iteración 1

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
3	X_2	3	0,37	1	-0,06	0	0	0,06	0	8,1
-M	u_2	24	9,75	0	0,37	-1	0	-0,37	1	2,4
0	X_5	9	5,62	0	0,56	0	1	-0,56	0	1,6
-24M ...	$Z_j - C_j$		-9,75M ...	0	-0,37M ...	M	0	1,37M ...	0	

Tabla
iteración 2

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
3	X_2	2,41	0	1	-0,096	0	-0,06	0,097	0	
-M	u_2	8,39	0	0	-0,60	-1	-1,73	0,60	1	
4	X_1	1,60	1	0	0,10	0	0,18	-0,10	0	
	$Z_j - C_j$		0	0	0,6M	M	1,73M	0,4M	0	

Problema incompatible

C_j			4	3	0	0	0	-M	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	u_1	u_2	
3	X_2	2,41	0	1	-0,096	0	-0,06	0,097	0	
-M	u_2	8,39	0	0	-0,60	-1	-1,73	0,60	1	
4	X_1	1,60	1	0	0,10	0	0,18	-0,10	0	
	$Z_j - C_j$		0	0	0,6M	M	1,73M	0,4M	0	

Resolvemos el valor del funcional Z

No existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, la variable ficticia u_2 sigue en la base

Encontramos caso particular de problema incompatible

Problema no acotado

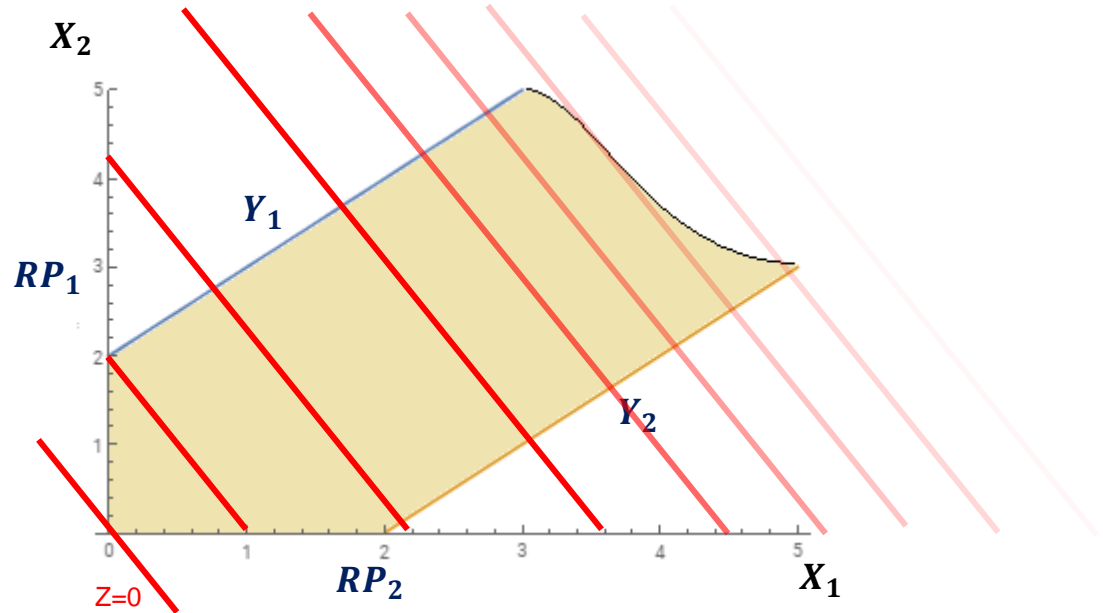
$$\text{Max } Z = X_1 + X_2$$

sujeto a:

$$Y_1: -X_1 + X_2 \leq 2$$

$$Y_2: X_1 - X_2 \geq 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



Problema no acotado

$$\text{Max } Z = X_1 + X_2$$

sujeto a:

$$Y_1: -X_1 + X_2 \leq 2$$

$$Y_2: X_1 - X_2 \geq 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Modelo Extendido



$$\text{Max } Z = X_1 + X_2 - Mu_1$$

sujeto a:

$$Y_1: -X_1 + X_2 + X_3 = 2$$

$$Y_2: X_1 - X_2 - X_4 + u_1 = 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

M: un número muy grande

u_i : variable ficticia

Problema no acotado

$$\text{Max } Z = X_1 + X_2 - Mu_1$$

sujeto a:

$$Y_1: -X_1 + X_2 + X_3 = 2$$

$$Y_2: X_1 - X_2 - X_4 + u_1 = 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



**Modelo Extendido
Matricial**

$$\text{Max } Z = C^T X$$

sujeto a:

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

Valores de matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -M \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ u_1 \end{bmatrix}$$

Problema no acotado

$$\text{Max } Z = X_1 + X_2 - M u_1$$

sujeto a:

$$Y_1: -X_1 + X_2 + X_3 = 2$$

$$Y_2: X_1 - X_2 - X_4 + u_1 = 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z = C^T X$$

sujeto a:

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -M \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ u_1 \end{bmatrix}$$

C_j			1	1	0	0	-M	B_k $/A_{ij}$
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	u_1	
0	X_3	2	-1	1	1	0	0	
-M	u_1	2	1	-1	0	-1	1	
Z	$Z_j - C_j$							

Problema no acotado

C_j			1	1	0	0	-M	B_k $/A_{ij}$
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	u_1	
0	X_3	2	-1	1	1	0	0	
-M	u_1	2	1	-1	0	-1	1	
$-2M$	$Z_j - C_j$		-M ...	M ...	0	M	0	

Resolvemos $Z_j - C_j$ y valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡ Z puede mejorar!

Seleccionamos X_1 para entrar a la base

Problema no acotado

C_j			1	1	0	0	-M	B_k
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	u_1	$/A_{ij}$
0	X_3	2	-1	1	1	0	0	-2
-M	u_1	2	1	-1	0	-1	1	2
-2M	$Z_j - C_j$		-M ...	M ...	0	M	0	

Resolvemos B_k / A_{ij}

Mínimo positivo B_k / A_{ij} en u_1

Sale u_1 , entra X_1

Problema no acotado

Tabla
iteración 0

C_j			1	1	0	0	-M	B_k $/A_{ij}$
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	u_1	
0	X_3	2	-1	1	1	0	0	-2
-M	u_1	2	1	-1	0	-1	1	2
$-2M$	$Z_j - C_j$		$-M \dots$	$M \dots$	0	M	0	

Tabla
iteración 1

C_j			1	1	0	0	-M	B_k $/A_{ij}$
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	u_1	
0	X_3	4	0	0	1	-1	1	
1	X_1	2	1	-1	0	-1	1	
	$Z_j - C_j$		0	~ 0	0	~ 0	$M \dots$	

Problema no acotado

C_j			1	1	0	0	-M	B_k $/A_{ij}$
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	u_1	
0	X_3	4	0	0	1	-1	1	
1	X_1	2	1	-1	0	-1	1	
2	$Z_j - C_j$		0	~0	0	~0	M ...	

Resolvemos el valor del funcional Z

Existen variables no básicas con $Z_j - C_j$ negativo, ¡ Z puede mejorar!

X_2 podría entrar a la base

Problema no acotado

C_j			1	1	0	0	-M	B_k / A_{ij}
C_j Base	X_j Base	B_k	X_1	X_2	X_3	X_4	u_1	
0	X_3	4	0	0	1	-1	1	∞
-M	X_1	2	1	-1	0	-1	1	-2
	$Z_j - C_j$		0	~ 0	0	~ 0	M ...	

Resolvemos B_k / A_{ij}

No existe mínimo positivo B_k / A_{ij} , problema no acotado.