Ejercicio Resuelto Programación Lineal

Elaborado por: Martín Palazzo
Cátedra: Investigación Operativa UTN FRBA

Supongamos que tenemos el siguiente problema inicial y queremos resolverlo utilizando el algoritmo del simplex:

$$\boldsymbol{max Z} = 1000\boldsymbol{x_1} + 1200\boldsymbol{x_2}$$

sujeto a:

$$10x_1 + 5x_2 \leq 200$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 60$$
$$x_1 \leq 34$$
$$x2 \leq 14$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Recordemos que un problema de programación lineal en la forma primal (original como se plantea) se puede ver matricialmente como:

$$\boldsymbol{max Z} = cX$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

$$x = (x_1, x_2) \;\; c = (1000, 1200)$$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = (200, 60, 34, 14)$$

Donde X son las variables de decisión, c representa los coeficientes de las variables en el funcional, A representa los coeficientes de las variables en las restricciones (también llamado coeficientes tecnológicos) y b representa el valor de las restricciones. Recordar que en un contexto de Ingeniería Industrial, cada inecuación puede representar un recurso que suele ser limitado. Es decir, si tengo 4 inecuaciones como es en este caso, entonces tengo 4 recursos. Es importante no confundir recursos con variables de decisión X1 y X2. Podemos resolver este tipo de problema de Programación Lineal con el algoritmo del simplex. Para eso debemos transformar nuestro problema a la forma standard. Eso significa que debemos transformar las inecuaciones en ecuaciones y en consecuencia agregar una variable Holgura (slack) a cada restricción, es decir, a cada ecuación. Así quedaría entonces el modelo primal inicial antes de optimizar:

$$\boldsymbol{maxZ} = 1000\boldsymbol{x_1} + 1200\boldsymbol{x_2}$$

sujeto a

$$\begin{gathered}
10x_1 + 5x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 200 \\
2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + x_4 + 0_x5 + 0_x6 = 60 \\
x_1 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6 = 34 \\
x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 = 14
\end{gathered}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Ver que agregamos las variables slack x3, x4, x5 y x6, una por cada restricción.
Antes de seguir: ¿qué era una variable slack más allá de la matemática? En nuestro problema puede representar la cantidad de recurso que no se está aprovechando, que no se está utilizando, lo que me sobra del mismo. Si la variable slack asociada a un recurso, ejemplo la variable slack X3 asociada al primer recurso (cada ecuación representa un recurso), es mayor a cero quiere decir que en mi problema no he aprovechado al 100% ese recurso.

Ahora estamos en condiciones de ingresar nuestros datos a la tabla inicial del primal.

coef en Z (cj) ->			1000	1200	0	0	0	0
coef en Z de var. basica	Var. Basica	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
0	x3	200	10	5	1	0	0	0
0	x4	60	2	3	0	1	0	0
0	x5	34	1	0	0	0	1	0
0	x6	14	0	1	0	0	0	1
0	zj - cj		-1000	-1200	0	0	0	0

Tabla01: tabla inicial del simplex

Vamos a describir esta tabla inicial del simplex antes de continuar:

- El primer renglón amarillo representa los coeficientes de las variables del funcional (la función que queremos optimizar). Este renglón no se modifica durante la resolución, es dato.

- Los casilleros verdes a la izquierda (columnas “coef…” y “var. básica”) representan que variables están en la base, es decir que tienen un valor mayor a cero (columna “Var. Básica”) y que coeficientes tienen estas variables en el funcional (columna “Coef en Z de Var. Básica”). La pregunta que puede surgir es “¿qué significa que una variable este en la base?” a lo que se puede responder: si consideramos un sistema de “n” variables (6, las 2 iniciales + las 4 que agregamos) y “m” ecuaciones (4), diremos que (n-m) variables serán igual a cero. Las variables = 0 son llamadas variables no básicas y las variables > 0 son llamadas básicas. En nuestro problema n-m = 2, entonces tendremos 2 variables no básicas y 4 variables básicas. Al inicio, suponiendo que no hemos consumido ningún recurso, las únicas variables > 0 son las variables de holgura/slack (x3, x4, x5, x6) como se ve en la tabla01 y las variables x1 y x2 serán variables no-básicas ya que son igual a cero. **Diremos entonces que las variables básicas son las que determinarán el valor de nuestro funcional/función objetivo Z ya que obviamente son las que tendrán un valor distinto de cero.** Como queremos optimizar (ej maximizar) nuestra función objetivo, en cada iteración del algoritmo simplex, iremos tomando variables básicas para transformarlas en no-básicas (es decir llevarlas a cero) y variables no-básicas (las que tienen valor cero) a básicas (que tengan un valor mayor a cero). Entonces en cada iteración del algoritmo simplex, entra una variable y sale otra de la base (una no-básica se transforma en básica y una básica se transforma en no-básica).
- La columna verde a la izquierda “Bk” indica el valor de las variables que están en la base, que obviamente si están en la base son mayor a cero.
- El renglón “zj-cj” representa el costo de oportunidad que tiene esa variable de aumentar el funcional Z.
- La celda en rojo abajo a la izquierda indica el valor del funcional Z con la actual solución (es decir con las variables que son básicas).
- Toda la zona gris representa los coeficientes Aij de las variables en las restricciones (ver la matriz A que describimos mas arriba en la forma matricial del simplex)

Ahora dado que queremos maximizar nuestro funcional Z debemos entonces ver qué variable no-básica transformar en básica y cuál de las básicas transformaremos en no-básica (en otras palabras, qué variable entrará a la solución básica y cuál saldrá de dicha solución).

Selección de variable no-básica que entra a la base

Primero determinaremos qué variable no-básica entrará a la base. Para eso utilizaremos la siguiente regla:

- Entra la variable no-básica que tenga el menor zj-cj para problemas de maximización
- Entra la variable no-básica que tenga el mayor zj-cj para problemas de minimización

En nuestro caso, x2 posee el menor zj-cj = - 1200 y por eso será será la variable que entre a la base.

Selección de variable básica que sale de la base

Realizaremos para cada variable básica (ver tabla que inicialmente son x3, x4, x5, x6) el siguiente cálculo (Bk / Aik) donde Aik representa el coeficiente de la variable no-básica que seleccionamos en el paso anterior (columna “X2”) siempre y cuando Aik sea mayor a 0. La variable básica que presente el mínimo resultado de dicho cálculo será la variable que sale. En nuestro ejemplo:

- Variable x3 -> bi / Aij = 200 / 5 = 40
- Variable x4 -> bi / Aij = 60 / 3 = 20
- Variable x6 -> bi / Aij = 14 / 1 = **14** -> 14 es el menor resultado de los 3, sale de la base la variable x6, que de ahora en más será variable no básica y entrará en su lugar a la base la variable x2.

coef en Z (cj) ->			1000	1200	0	0	0	0
coef en Z de var. basica	Var. Basica	Bk	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**
0	x3	200	10	5	1	0	0	0
0	x4	60	2	3	0	1	0	0
0	x5	34	1	0	0	0	1	0
0	**x6**	**14**	**0**	**1 (pivot)**	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**zj - cj**		-1000	-1200	0	0	0	0

Tabla02: se observa que la variable x2 presenta el menor zj - cj (variable que entra a la base) y la variable hasta ahora básica x6 presenta el menor bK / Aik = 14 / 1 = 14 (variable que sale de la base). La celda que se encuentra en la intersección se la denomina “Pivot”.

Aún no hemos terminado la primer iteración del algoritmo del simplex. Antes de comenzar en una nueva iteración debemos completar el resto de los casilleros de la tabla utilizando la celda pivot con los siguientes pasos:

- Dividir el renglón del pivot por el valor del pivot (esto tambien incluye al valor de Bk en el renglón del pivot). En la columna del pivot, todos los elementos menos el pivot los llevamos a cero.

- Las columnas (dentro de la zona gris) de las variables que se mantienen en la base no sufren modificaciones. Es decir que las columnas x1, x3, x4 y x5 se mantienen igual.

- Para cada celda restante (de la zona gris y la columna Bk) lo que se deberá hacer es actualizarla utilizando el pivot y el método gauss-jordan. Para eso, para cada celda lo que deberán hacer es:

    - buscar el elemento de la columna del pivot que se encuentre en el mismo renglón que la celda que querramos calcular. Llamemoslo “valor en el renglón del pivot”.
    - buscar el elemento del renglón del pivot que se encuentre en la misma columna que la celda que querramos calcular. Llamemoslo “valor en la columna del pivot”

- el nuevo valor de la celda en cuestión será

Valor nuevo de la celda = valor actual de la celda - [(“valor en el renglón del pivot” * “valor en la columna del pivot”)/pivot]

coef en Z (cj) ->			1000	1200	0	0	0	0
coef en Z de var. basica	Var. Basica	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
0	x3	200	10	5	1	0	0	0
0	x4	60	2	3	0	1	0	0
0	x5	34	1	0	0	0	1	0
0	x6	14	0	1 (pivot)	0	0	0	1
0	zj - cj		-1000	-1200	0	0	0	0

Tabla03

En la tabla03 vemos como hacer este paso para una sola celda: si queremos calcular el nuevo valor de la celda pintada de morado (la que contiene el número “0”), debemos hacer:

Nuevo valor = 0 - (5*1)/1 = -5

Entonces este cálculo debe hacerse para el resto de las celdas que quedaron sin calcular. Las celdas que debemos calcular por este método se detallan a continuación

coef en Z (cj) ->			1000	1200	0	0	0	0
coef en Z de var. basica	Var. Basica	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
0	x3	*calcular por g.j.*	*calcular por g.j.*	5	1	0	0	*calcular por g.j.*
0	x4	*calcular por g.j.*	*calcular por g.j.*	3	0	1	0	*calcular por g.j.*
0	x5	*calcular por g.j.*	*calcular por g.j.*	0	0	0	1	*calcular por g.j.*
0	x6	14	0	1 (pivot)	0	0	0	1
0	zj - cj		*calcular por g.j*	0	*calcular por g.j.*	*calcular por g.j.*	*calcular por g.j.*	*calcular por g.j.*

Tabla04: se detallan las celdas que deben ser calculadas por gauss jordan.

- Luego se quita de la zona verde (lista de variables básicas) la variable x6 y ponemos la variable x2 con su respectivo coeficiente en la función objetivo Z.
- También calculamos los nuevos zj-cj y el Z total con la nueva solución básica

Si llegaste hasta acá felicitaciones, comprendiste la primer iteración del algoritmo Simplex. El proceso se debe repetir hasta que no se puedan ingresar mas variables en la base para optimizar el funcional Z, es decir que no exista ningún zj-cj <0. La tabla del simplex en el inicio de la segunda iteración quedaría de la siguiente forma:

coef en Z (cj) ->			1000	1200	0	0	0	0
coef en Z de var. basica	Var. Basica	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
0	x3	130	10	0	1	0	0	-5
0	x4	18	2	0	0	1	0	-3
0	x5	34	1	0	0	0	1	0
1200	x2	14	0	1	0	0	0	1
16800	zj - cj		-1000	0	0	0	0	1200

Tabla05: es la tabla del simplex luego de la primera iteración, al inicio de la segunda.

En este momento debemos repetir el mismo proceso para detectar qué variable entra a la base y qué variable sale de la base. Interpretando los valores de la tabla, nuestra solución es Z = 16800 con las variables básicas x3 = 130, x4 = 18, x5 = 34 y x2 = 1200. ¿Es nuestra solución óptima?¿se puede mejorar este resultado? Por supuesto que podemos. Todavía tenemos variables cuyo zj-cj es negativo, esto quiere decir que aún tenemos un costo de oportunidad para incrementar nuestra función objetivo/funcional Z con estas variables.

Seleccionamos la variable x1 para que entre a la base (ver que antes era no-básica) por tener el menor zj-cj. También seleccionaremos x4 para salir de la base ya que presenta el menor Bk/Aik = 18/2 = 9. Luego de aplicar gauss-jordan para completar la nueva tabla del simplex para la tercer iteración logramos:

coef en Z (cj) ->			1000	1200	0	0	0	0
coef en Z de var. basica	Var. Basica	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
0	x3	40	0	0	1	-5	0	10
1000	x1	9	1	0	0	1/2	0	-3/2
0	x5	25	0	0	0	-1/2	1	3/2
1200	x2	14	0	1	0	0	0	1
25800	zj - cj		0	0	0	500	0	-300

Tabla06: tabla al inicio de la tercer iteración.

Actualmente logramos una solución de x3 = 40, x1 = 9, x5 = 25 y x2 = 14. De esta manera logramos un Z = 25800. Ver que entre este paso y el anterior el Z se incrementó. Como seguimos teniendo zj-cj negativo aún podemos seguir optimizando nuestro resultado. Repetimos el proceso del pivote y obtenemos la siguiente tabla:

coef en Z (cj) ->			1000	1200	0	0	0	0
coef en Z de var. basica	Var. Basica	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
0	x6	4	0	0	1/10	-1/2	0	1
1000	x1	15	1	0	3/20	-1/4	0	0
0	x5	19	0	0	-3/20	1/4	1	0
1200	x2	10	0	1	-1/10	1/2	0	0
27000	zj - cj		0	0	30	350	0	0

Tabla07: tabla final con la optimización resuelta.

Como no observamos más zj-cj negativos entonces logramos la optimización global del problema. Hemos logrado pasar de un Z = 0 en la tabla inicial a un Z = 27000. La solución se obtiene de las siguientes variables básicas con sus respectivos valores: x1 = 15, x2 = 10, x5 = 19, x6 = 4.

Hemos resuelto nuestro problema de programación lineal por el método simplex partiendo de la tabla del primal.