

Práctica Programación lineal: Ejercicio 10 Clase 19

Investigación Operativa UTN FRBA 2020
Curso: I4051(Palazzo)
Elaborado por Docente: Milagros Bochor

Ejercicio 10

Ejercicio 10 Un fraccionador de Whisky importa el licor en tres distintas graduaciones: A, B y C. Mediante la mezcla de estos de acuerdo a sus fórmulas obtiene los Whiskies de calidades comerciales Escocés, Kilt y Tartan. Las citadas fórmulas especifican las siguientes relaciones entre los elementos a mezclar:

Marca	Especificación	Precio Venta
Escoces	60 A, 70 C	680
Kilt	15 A, 30 B, 60 C	570
Tartán	20 B, 50 C	450

Se conocen asimismo las disponibilidades y precios de los licores A, B, C que se indican en el siguiente cuadro:

Tipo	Disponibilidad
A	2000
B	2500
C	2400

Determine cuál es la cantidad que debe ordenar de las graduaciones A, B y C para maximizar la venta de sus marcas.

Pasos a seguir

1. Modelar el problema
2. Identificar las variables de decisión y función objetivo a optimizar ¿Qué tipo de funciones hay en el problema? ¿Como son las variables de decisión?
3. Armar las restricciones
4. Pasar inecuaciones a ecuaciones con variables Slack. Modelo Extendido.
5. Realizar iteraciones hasta conseguir el Z óptimo

1&2) FUNCIÓN OBJETIVO A MAXIMIZAR: “MAXIMIZAR LAS VENTAS”

¿ Como obtengo las ventas totales de la empresa?

Marca	Especificación	Precio Venta
Escoces	60 A, 70 C	680
Kilt	15 A, 30 B, 60 C	570
Tartán	20 B, 50 C	450

$$\text{VENTAS \$} = 680 \times q \text{ ESCOCES} + 570 \times q \text{ KILT} + 450 \times q \text{ TARTAN}$$

X1 : ESCOSES

X2: KILT

X3: TARTÁN

$$Z = 680X1 + 570X2 + 450X3$$

→ **FUNCIÓN
OBJETIVO
O
FUNCIONAL**

3) RESTRICCIONES

¿Cuánto de cada licor lleva cada whisky?

¿Cuánta disponibilidad de cada licor tengo?

Marca	Especificación	Precio Venta
Escoces	60 A, 70 C	680
Kilt	15 A, 30 B, 60 C	570
Tartán	20 B, 50 C	450

	Escoses	KILT	TARTAN
	X1	X2	X3
A	60	15	0
B	0	30	20
C	70	60	50

¿Qué valores nos faltan para que sean restricciones?

Tipos	Disponibilidad
A	2000
B	2500
C	2400

	Escoses	KILT	TARTAN	
	X1	X2	X3	
A	60	15	0	2000
B	0	30	20	2500
C	70	60	50	2400

RESTRICCIONES

$$60 X1 + 15 X2 + 0X3 \leq 2000$$

$$0 X1 + 30 X2 + 20X3 \leq 2500$$

$$70 X1 + 60 X2 + 50 X3 \leq 2400$$

4) FORMA MATRICIAL

Funcional

Variables de decisión

$$\max Z = C^T X$$

Coef de las variables de decisión en el funcional (Coeficientes de costos)

Coef de las variables en las restricciones (coef tecnológicos)

$$Ax \leq b$$

Valor de las restricciones

$$x \geq 0$$

Condiciones de no negatividad

$$x = (x_1, x_2, x_3)$$

$$c = (680, 570, 450)$$

$$A = \begin{bmatrix} 60 & 15 & 0 \\ 0 & 30 & 20 \\ 70 & 60 & 50 \end{bmatrix}$$

$$b = (2000, 2500, 2400)$$

4) PASAJE A ECUACIÓN

INECUACIONES

$$\begin{aligned}60 X_1 + 15 X_2 + 0X_3 &\leq 2000 \\0 X_1 + 30 X_2 + 20X_3 &\leq 2500 \\70 X_1 + 60 X_2 + 50 X_3 &\leq 2400\end{aligned}$$



ECUACIONES

$$\begin{aligned}60 X_1 + 15 X_2 + 0X_3 + 1X_4 + 0X_5 + 0X_6 &= 2000 \\0 X_1 + 30 X_2 + 20X_3 + 0X_4 + 1X_5 + 0X_6 &= 2500 \\70 X_1 + 60 X_2 + 50 X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 1X_6 &= 2400\end{aligned}$$

AGREGO TANTAS
VARIABLES DE HOLGURA
O SLACK COMO
RESTRICCIONES TENGA

- \leq , la variable de holgura suma
- \geq , la variable de holgura resta

MODELO EXTENDIDO MATRICIAL

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$b = (2000, 2500, 2400)$$

$$c = (680, 570, 450, 0, 0, 0)$$

$$A = \begin{bmatrix} 60 & 15 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 20 & 0 & 1 & 0 \\ 70 & 60 & 50 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4) MÉTODO SIMPLEX

Coef. En Z (Cj) ---								
coef en Z de la variable básica	Variable básica (variable solución)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
0	Xi							
0	Xi							
0	Xi							
	Zj - cj							

n= cantidad de variables

m= cantidad de restricciones

n-m = cantidad de variables **no básicas**
(= 0)

**Entonces, n menos cantidad de
variables NB nos da cantidad de VB**



ITERACIÓN 0

En t=0: $x_1, x_2, x_3 = 0$

Coef de las variables de decisión en el funcional

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable basica	Variable basica (variable solucion)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
0	x4	2000	60	15	0	1	0	0
0	x5	2500	0	30	20	0	1	0
0	x6	2400	70	60	50	0	0	1
Zj - cj								

Valor de la variable activada

Coef de las variables en las restricciones (coef tecnológicos)

Matriz identidad, variables slack

FUNCIÓN OBJETIVO

$$Z = 680X_1 + 570X_2 + 450X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6$$

RESTRICCIONES

$$60 X_1 + 15 X_2 + 0X_3 + 1X_4 + 0X_5 + 0X_6 = 2000$$

$$0 X_1 + 30 X_2 + 20X_3 + 0X_4 + 1X_5 + 0X_6 = 2500$$

$$70 X_1 + 60 X_2 + 50 X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 1X_6 = 2400$$

ITERACIÓN 0: TABLA INICIAL

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable basica	Variable basica (variable solucion)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
0	x4	2000	60	15	0	1	0	0
0	x5	2500	0	30	20	0	1	0
0	x6	2400	70	60	50	0	0	1
0	Zj - cj		-680	-570	-450	0	0	0

Costos de oportunidad Zj - cj

$$Z_1 = c_4 * A_{11} + c_5 * A_{21} + c_6 * A_{31} = (0 * 60) + (0 * 0) + (0 * 70) = 0$$

$$Z = 0 * 2000 + 0 * 2500 + 0 * 2400 = 0$$

$$C_1 = 680$$

$$Z_1 - C_1 = 0 - 680 = -680$$

¿Hay Zj - Cj negativo? Si, entonces la solución puede mejorar.

ITERACIÓN 0

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable basica	Variable basica (variable solucion)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
0	x4	2000	60	15	0	1	0	0
0	x5	2500	0	30	20	0	1	0
0	x6	2400	70	60	50	0	0	1
0	Zj - cj		-680	-570	-450	0	0	0

¿Que variable NO BÁSICA entra a la base?

Si es maximización -----> Entra la variable con **menor $Z_j - C_j$**

Si es minimización -----> Entra la variable con **mayor $Z_j - C_j$**

Entra X1

ITERACIÓN 0

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable basica	Variable basica (variable solucion)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
0	x4	2000	60	15	0	1	0	0
0	x5	2500	0	30	20	0	1	0
0	x6	2400	70	60	50	0	0	1
0	Zj - cj		-680	-570	-450	0	0	0

¿Qué variable BÁSICA sale de la base?

- . Hacer el cociente entre B_k/A_i , siempre que A_i sea positivo
- . Elijo la variable básica que me arroje el **menor** cociente positivo

X4 ----> $2000/60$ ----> **33,33**

X5 ----> $2500/0$ ----> N/A

X6 ----> $2400/70$ ----> 34,28

Sale X4

ITERACIÓN 0

COLUMNA PIVOT

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable básica	Variable básica (variable solución)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
0	x4	2000	60	15	0	1	0	0
0	x5	2500	0	30	20	0	1	0
0	x6	2400	70	60	50	0	0	1
0	Zj - cj		-680	-570	-450	0	0	0

FILA PIVOT

La intersección entre X1 y X4 es el **pivot**.

ITERACIÓN 0

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable básica	Variable básica (variable solución)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
coef en Z de la variable básica que entra	x1	Ai/pivot	1	Ai/pivot	Ai/pivot	Ai/pivot	Ai/pivot	Ai/pivot
0	x5	GJ	llevo a 0	GJ	GJ	GJ	mantiene =	mantiene =
0	x6	GJ	llevo a 0	GJ	GJ	GJ	mantiene =	mantiene =
0	Zj - cj		llevo a 0	GJ	GJ	GJ	GJ	GJ

Pasos a seguir

- A la fila del pivot, divido todo por el pivot ($A_{11} = 60$). Celda del pivot queda en 1
- Columna de pivot la completo con ceros
- A la columna de coeficientes en Z, coloco el coeficiente correspondiente a la variable que entro a la base
- Columnas de variables que siguen en la base quedan igual (x5 y x6) menos el Zj - Cj que actualiza por GJ
- Columnas de variables que no están en la base las actualizo por GJ (X2, X3, X4 y Bk)
- Calculo el Z

ITERACIÓN 0

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable básica	Variable básica (variable solución)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
680	x1	33,3	1	0,3	0	0,02	0	0
0	x5	GJ	0	GJ	GJ	GJ	mantiene =	mantiene =
0	x6	GJ	0	GJ	GJ	GJ	mantiene =	mantiene =
	Zj - cj		0	GJ	GJ	GJ	GJ	GJ

- 1) A la fila del pivot, divido todo por el pivot. Celda del pivot queda en 1.
- 2) Columna de pivot la completo con ceros.
- 3) A la columna de coeficientes en Z, coloco el coeficiente correspondiente a la variable que entro a la base

ITERACIÓN 0

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable básica	Variable básica (variable solución)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
680,0	x1	33,3	1	0,3	0	0	0	0
0,0	x5	GJ	0	GJ	GJ	GJ	1	0
0,0	x6	GJ	0	GJ	GJ	GJ	0	1
	Zj - cj		0	GJ	GJ	GJ	GJ	GJ

4) Columnas de variables que siguen en la base quedan igual (x5 y x6) menos el Zj - Cj que actualiza por GJ

ITERACIÓN 0

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 60 & 15 \\ \hline 0 & 30 \\ \hline \end{array} \rightarrow 30 - \left(\frac{0 \times 15}{60} \right)$$

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable básica	Variable básica (variable solución)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
680,0	x1	33,3	1	0,3	0	0	0	0
0,0	x5	GJ	0	GJ	GJ	GJ	1	0
0,0	x6	GJ	0	GJ	GJ	GJ	0	1
	Zj - cj		0	GJ	GJ	GJ	GJ	GJ

5) Columnas de variables que no están en la base las actualizo por GJ (X2, X3,X4,Bk,Zj-Cj)

K	P _c	
P _f	P	

$$K' = K - [(P_f * P_c)/P]$$

ACTUALIZACION
POR GJ



ITERACIÓN 0

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable básica	Variable básica (variable solución)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
680	x1	33,3	1	0,3	0	0	0	0
0	x5	$2500 - (2000 * 0 / 60) = 2500$	0	$30 - (0 * 15 / 60) = 30$	$20 - (0 * 0 / 60) = 20$	$0 - (0 * 1 / 60) = 0$	1	0
0	x6	$2400 - (2000 * 70 / 60) = 66,7$	0	$60 - (70 * 15 / 60) = 42,5$	$50 - (70 * 0 / 60) = 50$	$0 - (70 * 1 / 60) = -1,20$	0	1
	Zj - cj	0	0	$-570 - (-680 * 15 / 60) = -400$	$-450 - (-680 * 0 / 60) = -450$	$0 - (-680 * 1 / 60) = 11,33$	$0 - (-680 * 0 / 60) = 0$	$0 - (-680 * 0 / 60) = 0$

5) Columnas de variables que no están en la base las actualizo por GJ (X2, X3, X4, Bk, Zj-Cj)

K	P _c	
P _f	P	

$$K' = K - [(P_f * P_c) / P]$$

ACTUALIZACION
POR GJ



ITERACIÓN 0: TABLA FINAL

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable básica	Variable básica (variable solución)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
680	x1	33,3	1	0,3	0	0	0	0
0	x5	2500	0	30	20	0	1	0
0	x6	66,7	0	42,5	50	-1,2	0	1
$680 \cdot 33,3 + 0 \cdot 2500 + 0 \cdot 66,7 = 22666,7$ $Z_j - c_j$			0	-400	-450	11,3	0	0

6) Calculo Z para $t = 0$

¿Quedan $Z_j - C_j$ negativo? Si, entonces la solución puede mejorar.

ITERACIÓN 1: TABLA INICIAL

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable básica	Variable básica (variable solución)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
680	x1	33,3	1	0,3	0	0	0	0
0	x5	2500	0	30,0	20	0	1	0
0	x6	66,7	0	42,5	50	-1,2	0	1
22666,7	Zj - cj		0	-400	-450	11,3	0	0

¿Que variable **NO BÁSICA** entra a la base?

El más negativo de los Zj - Cj

Entra X3

¿Qué variable **BÁSICA** sale de la base?

Elijo la variable básica que me arroje el **menor** cociente positivo.

X1 ----> $33,3/0$ ----> N/A

X5 ----> $2500/20$ ----> 125

X6 ----> $66,7/50$ ----> **1,33**

Sale X6

ITERACIÓN 1

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable básica	Variable básica (variable solución)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
680	x1	33,3	1	0,3	0	0	0,0	0
0	x5	2500	0	30	20	0	1,0	0
0	x6	66,7	0	42,5	50	-1,2	0	1
22666,7	Zj - cj		0	-400	-450	11,3	0	0

- Intersección entre X3 (entra) y X6 (sale) es el **pivot**

ITERACIÓN 1

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable básica	Variable básica (variable solución)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
680	x1	GJ	mantiene =	GJ	llevo a 0	GJ	mantiene =	GJ
0	x5	GJ	mantiene =	GJ	llevo a 0	GJ	mantiene =	GJ
0	x6	Ai/pivot	mantiene =	Ai/pivot	1	Ai/pivot	mantiene =	Ai/pivot
	Zj - cj		GJ	GJ	llevo a 0	GJ	GJ	GJ

- A la fila del pivot, divido todo por el pivot. Celda del pivot queda en 1
- Columna de pivot (x3) la completo con ceros
- Columnas X1, X5 se mantienen igual porque quedan en la base
- Columnas x2,x4,x6 actualizo por GJ
- Cambio coef en Z de variable que entra a base (x6 sale por x3)
- Calculo el nuevo Z

ITERACIÓN 1: TABLA FINAL

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable básica	Variable básica (variable solución)	Bk	X1	x2	x3	x4	x5	X6
680	x1	33,3	1	0,3	0	0	0	0
0	x5	2473,3	0	13	0	0,5	1	-0,4
450	x3	1,33	0	0,9	1	-0,02	0	0,02
23266,7	Zj - cj		0	-17,5	0	0,8	0	9

- A la fila del pivot, divido todo por el pivot. Celda del pivot queda en 1
- Columna de pivot (x3) la completo con ceros
- Columnas X1, X5 se mantienen igual porque quedan en la base
- Columnas x2,x4,x6 actualizo por GJ
- Bk actualizo por GJ
- Cambio coef en Z de variable que entra a base (x6 sale por x3)----> 450
- Calculo el nuevo Z
- **Sigo teniendo $Z_j - C_j$ negativo? Si, hago una una iteración más**

ITERACIÓN 2: TABLA INICIAL

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable básica	Variable básica (variable solución)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
680	x1	33,3	1	0,3	0	0	0	0
0	x5	2473,3	0	13	0	0,5	1	-0,4
450	x3	1,33	0	0,9	1	-0,02	0	0,02
23266,7	Zj - cj		0	-17,5	0	0,8	0	9

¿Que variable **NO BÁSICA** entra a la base?

El más negativo de los Zj - Cj

Entra X2

¿Qué variable **BÁSICA** sale de la base?

Elijo la variable básica que me arroje el **menor** cociente positivo.

X1 ----> 33,3/0,3 111
 X5 ----> 2473,3/13 190,25
 X3 ----> 1,33/0,90 1,48

Sale X3

ITERACIÓN 2

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable básica	Variable básica (variable solución)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
680	x1	GJ	se mantiene =	llevo a 0	GJ	GJ	se mantiene =	GJ
0	x5	GJ	se mantiene =	llevo a 0	GJ	GJ	se mantiene =	GJ
coef en Z de la variable que entra	X2	Ai/pivot	Ai/pivot	1	Ai/pivot	Ai/pivot	Ai/pivot	Ai/pivot
	Zj - cj		GJ	llevo a 0	GJ	GJ	GJ	GJ

- A la fila del pivot , divido todo por el pivot. Celda del pivot queda en 1
- Columna de pivot (x2) la completo con ceros
- Columnas X1, X5 se mantienen igual porque quedan en la base
- Columnas x3,x4,x6 actualizo por GJ
- Bk actualizo por GJ
- Cambio coef en Z de variable que entra a base (x3 sale por x2)
- Calcular Z en t=2

ITERACIÓN 2

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable básica	Variable básica (variable solución)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
680	x1	32,9	1	0	-0,3	0,02	0	0
0	x5	2452,9	0	0	-15,3	0,8	1	-0,7
570	X2	1,6	0	1	1,2	-0,02	0	0,02
23294,1	Zj - cj		0	0	20,6	0,4	0	9,4

- A la fila del pivot , divido todo por el pivot. Celda del pivot queda en 1
- Columna de pivot (x2) la completo con ceros
- Columnas X1, X5 se mantienen igual porque quedan en la base
- Columnas x3,x4,x6 actualizo por GJ
- Bk actualizo por GJ
- Cambio coef en Z de variable que entra a base (x3 sale por x2)----> 570
- Calcular Z en t=2

ITERACIÓN 2: TABLA FINAL

Coef. En Z (Cj) ---			680	570	450	0	0	0
coef en Z de la variable básica	Variable básica (variable solución)	Bk	x1	x2	x3	x4	x5	x6
680	x1	32,9	1	0	-0,3	0,02	0	0
0	x5	2452,9	0	0	-15,3	0,8	1	-0,7
570	X2	1,6	0	1	1,2	-0,02	0	0,02
23294,1	Zj - cj		0	0	20,6	0,4	0	9,4

¿Quedan $Z_j - C_j$ negativo? No, entonces llegamos a un optimo del funcional.

Z = 23294,1

La solución se obtiene con los siguientes valores de variables:

$$\begin{array}{lcl}
 \mathbf{x_1=32,9} & \left. \vphantom{\begin{array}{l} \mathbf{x_1=32,9} \\ \mathbf{x_2=1,60} \\ \mathbf{x_3=0} \end{array}} \right\} & \mathbf{A= 1998} \leq 2000 \\
 \mathbf{x_2= 1,60} & & \mathbf{B = 48} \leq 2500 \\
 \mathbf{x_3=0} & & \mathbf{C= 2399} \leq 2400
 \end{array}$$