Programación Lineal Primal Dual Clase 20

Investigación Operativa UTN FRBA
Curso: I4051
Docente: Martín Palazzo

Programación lineal: Problema Primal

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}^T\mathbf{x} &= \mathbf{z} \\
A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq 0
\end{aligned}
\quad \longleftrightarrow \quad
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &= z && \rightarrow \max \\
\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\leq b_i && (\forall i = 1, 2, ..., m) \\
x_j &> 0 && (\forall j = 1, 2, ..., n)
\end{aligned}
$$

El problema planteado de manera original es conocido como problema **Primal**.

Programación Lineal: problema primal

Un problema genérico de optimización a ser resuelto por programación lineal se estructura matricial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &= \mathbf{z} \longrightarrow \text{Max} \\ A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Donde **c** es un vector [n,1] de 'n' coeficientes, **x** es un vector [n,1] de 'n' variables de decisión, **A** es una matriz [m,n] de coeficientes (tecnológicos) sobre las 'n' variables de decisión **x** en las 'm' restricciones **b**. Tanto **c**, **b** y **A** son conocidos mientras que **x** es la incógnita multidimensional a averiguar. Notar que cuando n>3 nos encontramos con un problema de alta dimensión que no puede ser resuelto por el método gráfico.

Programación Lineal: primal - dual

El modelo original será llamado modelo Primal. En el ejemplo: problema de optimización (maximizacion) de programación lineal

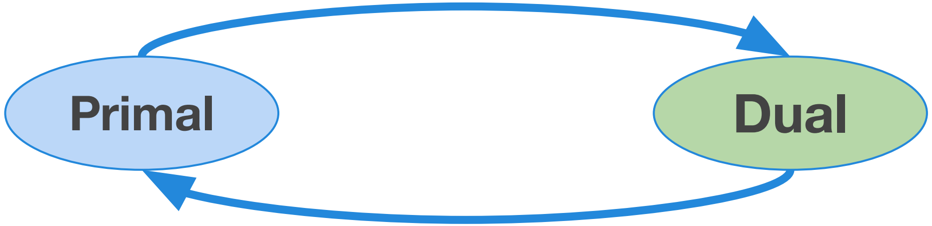
$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &= \mathbf{z} \rightarrow \text{Max} \\ A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &= z \rightarrow \text{Min} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

El problema **dual** es un problema de programación lineal definido de manera directa a partir del modelo original **primal**. Ambos problemas están relacionados de tal forma que la solución óptima del primal produce la solución óptima del dual [1].

[1] Taha, H. A. (2011). *Operations research: an introduction* (Vol. 790). Upper Saddle River, NJ, USA: Pearson/Prentice Hall.

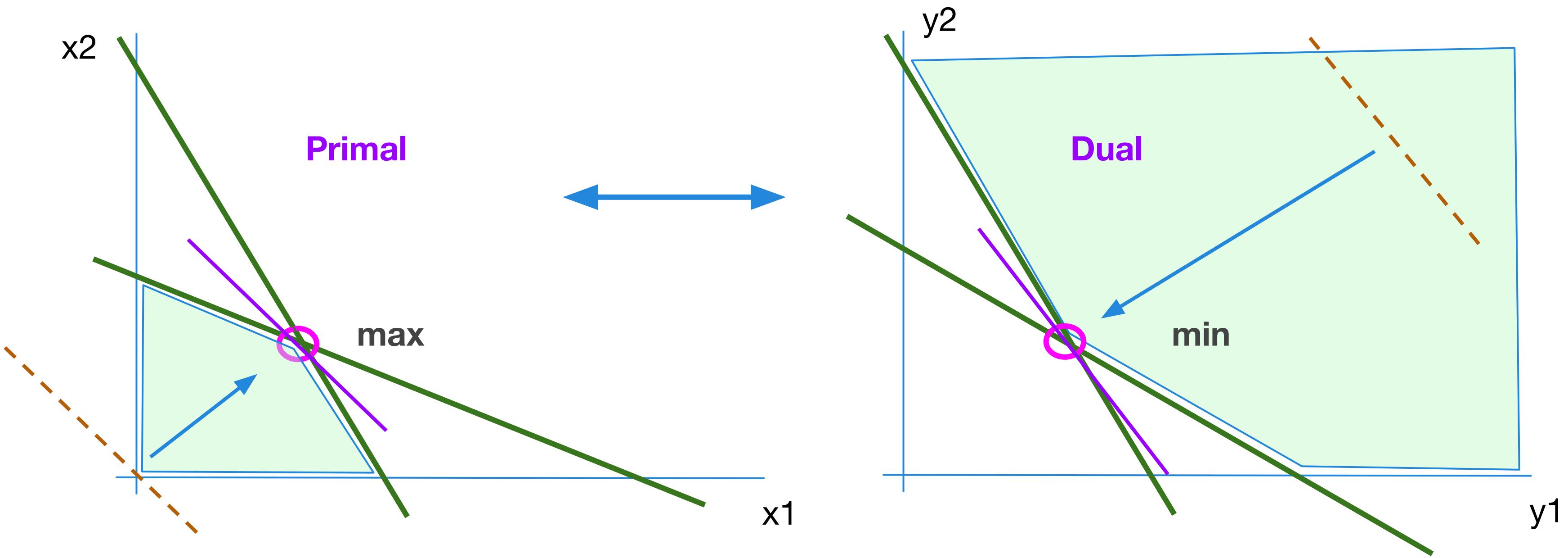
Optimizacion Primal-Dual



En programación lineal, para cada problema Primal existirá un problema **Dual** asociado definido en forma directa y sistemática a partir del primal. Si existe solución óptima en el problema Primal entonces también existirá en el problema dual y en ambos casos la solución será la misma (no así sus argumentos maximo o minimo).

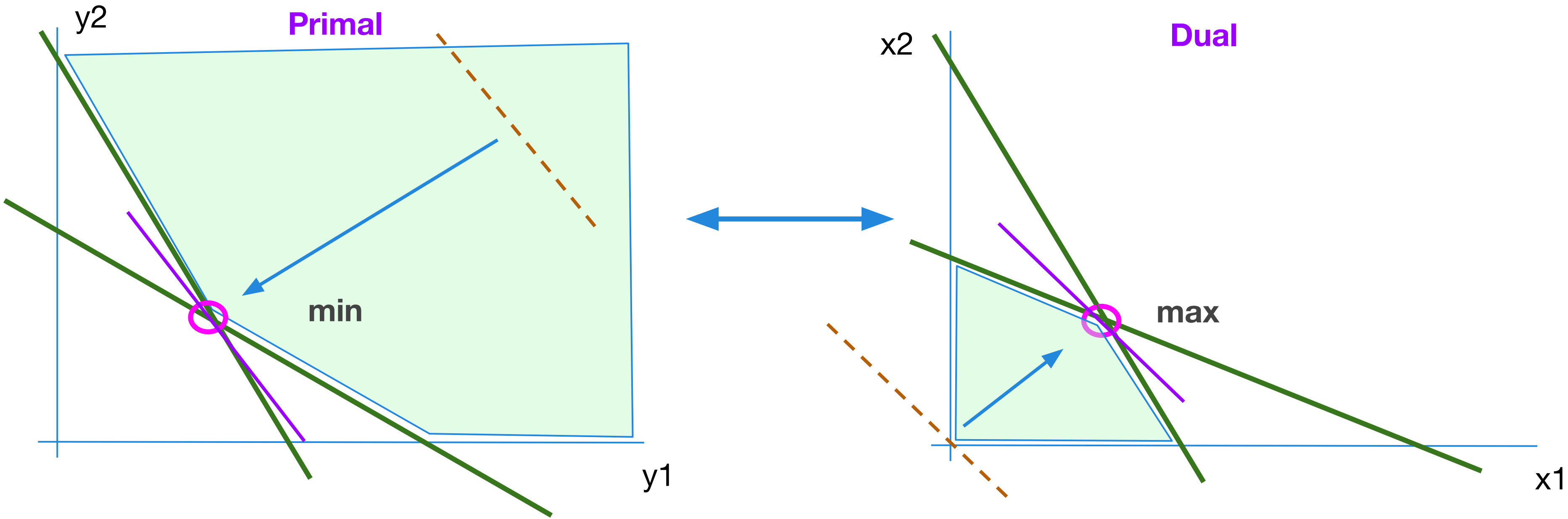
Problema	Objetivo		Restricciones	
Primal	Maximizacion	Minimizacion	<	>
Dual	Minimizacion	Maximizacion	>	<

Primal-Dual (grafico)



El problema de maximizacion (izq) tiene asociado un problema de minimización (der). Ambos problemas pueden traducirse de uno a otro mediante el planteo primal-dual. La solución del funcional Z en ambos casos será la misma aunque los valores que tomen las variables de decisión en cada caso serán propios de cada problema.

Primal-Dual (grafico)



El problema primal de minimizacion (izq) tiene asociado un problema dual de maximizacion (der). Ambos problemas pueden traducirse de uno a otro mediante el planteo primal-dual. La solución del funcional Z en ambos casos será la misma aunque los valores que tomen las variables de decisión en cada caso serán propios de cada problema.

Programación lineal: primal - dual

Ambos problemas pueden traducirse de uno a otro mediante el planteo primal-dual. La solución del funcional Z en ambos casos será la misma aunque los valores que tomen las variables de decisión en cada caso serán propios de cada problema.

Primal - Dual

En un problema primal-dual, si uno es de maximización el otro debe ser de minimización (Taha). Desde esta perspectiva, los valores objetivo en los dos problemas se relacionan de la siguiente manera:

$$(\text{Valor objetivo en Maximizacion}) \leq (\text{Valor objetivo en Minimizacion})$$

Esta relación es válida para cualquier par de soluciones primales y duales factibles. <u>Es importante observar que la relación no especifica cuál problema es primal y cuál es dual</u>. El problema primal suele ser el problema que se presenta originalmente. En este caso solo importa el sentido de la optimización (maximización o minimización).

Primal-Dual

Para construir el problema Dual partiendo del Primal debemos:

1. Por cada restricción del Primal se definirá una variable de decisión en el Dual.
2. Los valores de las restricciones **b** del Primal son los coeficientes **c** de la función objetivo del Dual.
3. Por cada variable de decisión del Primal se definirá una restricción en el dual.
4. La matriz **A** de coeficientes tecnológicos (coeficientes de las variables de decisión en las restricciones) del dual es equivalente a trasponer la del primal.
5. Los coeficientes **c** del primal equivalen a las restricciones **b** del dual.
6. La optimización se invierte en cada caso. Un problema de maximización en el Primal

Primal - Dual

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &= z \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned} \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} \mathbf{b}^T\mathbf{y} &= w \\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n &= z \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \ldots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\ \ldots \quad &\quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots + a_{mn}x_n &\leq b_m \end{aligned} \qquad \begin{aligned} b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m &= w \\ a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \ldots + a_{1m}y_m &\geq c_1 \\ \ldots \quad &\quad \ldots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 \ldots + a_{nm}y_m &\geq c_n \end{aligned}$$

Ejemplo Primal Dual

Primal: Maximizacion

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 4x_2 &= z \\
\text{s.t.} \\
6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\
-x_1 + x_2 &\leq 1 \\
0x_1 + x_2 &\leq 2
\end{aligned}
$$

Dual: Minimizacion

$$
\begin{aligned}
24y_1 + 6y_2 + y_3 + 2y_4 &= w \\
\text{s.t.} \\
6y_1 + y_2 - y_3 + 0y_4 &\geq 5 \\
4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 &\geq 4
\end{aligned}
$$

Ejemplo Primal Dual

Primal: Maximizacion

```
import pulp
# definimos si es un problema de minimizacion o maximizacion
linprog_primal = LpProblem("Primal", LpMaximize)

# definimos las variables de decision, el tipo de variable y la cota inferior
x1 = LpVariable('x1', lowBound=0, cat='Continuous')
x2 = LpVariable('x2', lowBound=0, cat='Continuous')

# primero agregamos la funcion objetivo
linprog_primal += 5*x1 + 4*x2 , "Funcion objetivo"

# luego agregamos restricciones
linprog_primal += 6*x1 + 4*x2 <= 24 , "restriccion1"
linprog_primal += x1 + 2*x2 <= 6, "restriccion2"
linprog_primal += -1*x1 + x2 <= 1, "restriccion3"
linprog_primal += 0*x1 + x2 <= 2, "restriccion4"

# Resolver el problema con el solver de PULP
linprog_primal.solve()

# obtenemos el valor de la variable de decision X1....X12 en el punto optimo
solucion_primal = np.array([[linprog_primal.variables()[0].varValue,
                            linprog_primal.variables()[1].varValue]])
```

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 4x_2 &= z \\
\text{s.t.} & \\
6x_1 + 4x_2 &\le 24 \\
x_1 + 2x_2 &\le 6 \\
-x_1 + x_2 &\le 1 \\
0x_1 + x_2 &\le 2
\end{aligned}
$$

```
# valor de la funcion objetivo
value(linprog_primal.objective)
21.0

# valor del argumento optimo
print(solucion_primal)
[[3.  1.5]]
```

Dual: Minimizacion

```
# definimos si es un problema de minimizacion o maximizacion
linprog_dual = LpProblem("dual", LpMinimize)

# definimos las variables de decision, el tipo de variable y la cota inferior
y1 = LpVariable('y1', lowBound=0, cat='Continuous')
y2 = LpVariable('y2', lowBound=0, cat='Continuous')
y3 = LpVariable('y3', lowBound=0, cat='Continuous')
y4 = LpVariable('y4', lowBound=0, cat='Continuous')

# primero agregamos la funcion objetivo
linprog_dual += 24*y1 + 6*y2 + y3 + 2*y4, "Funcion objetivo"

# luego agregamos restricciones
linprog_dual += 6*y1 + y2 - y3 + 0*y4 >= 5 , "restriccion1_dual"
linprog_dual += 4*y1 + 2*y2 + y3 + y4 >= 4 , "restriccion2_dual"

# Resolver el problema con el solver de PULP
linprog_dual.solve()

# obtenemos el valor de la variable de decision X1....X12 en el punto optimo
solucion_dual = np.array([[linprog_dual.variables()[0].varValue,
                            linprog_dual.variables()[1].varValue,
                           linprog_dual.variables()[2].varValue,
                           linprog_dual.variables()[3].varValue]])
```

$$
\begin{aligned}
24y_1 + 6y_2 + y_3 + 2y_4 &= w \\
\text{s.t.} & \\
6y_1 + y_2 - y_3 + 0y_4 &\ge 5 \\
4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 &\ge 4
\end{aligned}
$$

```
# valor de la funcion objetivo
value(linprog_dual.objective)
21.0

# valor del argumento optimo
print(solucion_dual)
[[0.75 0.5  0.   0.  ]]
```

Código fuente: ioperativ_clase20_linprog_primal_dual.ipynb

Ejemplo Primal Dual

Primal: Maximizacion

$$
\begin{aligned}
5x_1 + 4x_2 \quad &= z \\
\text{s.t.} \\
6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\
x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\
-x_1 + x_2 &\leq 1 \\
0x_1 + x_2 &\leq 2
\end{aligned}
$$

Dual: Minimizacion

$$
\begin{aligned}
24y_1 + 6y_2 + y_3 + 2y_4 \quad &= w \\
\text{s.t.} \\
6y_1 + y_2 - y_3 + 0y_4 &\geq 5 \\
4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 &\geq 4
\end{aligned}
$$

Solución factible óptima Primal

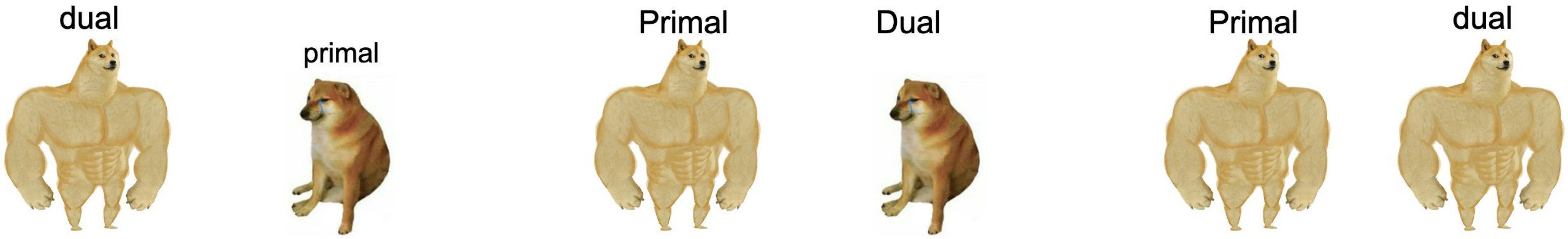
$$(x_1 = 3, x_2 = 1.5) \rightarrow z = 21$$

Solución factible óptima Dual

$$(y_1 = 0.75, y_2 = 0.5, y_3 = y_4 =) \rightarrow w = 21$$

Programación Lineal: Primal-dual

Programación Lineal:



El hecho de que un problema de optimización presente un equivalente dual permite evaluar cuál de los dos problemas es más conveniente de resolver. Si un problema primal tiene más restricciones que variables en su dual tendrá más variables que restricciones y viceversa. Dependiendo de estos contextos en algunos casos convendrá resolver el problema en el dual. En otros casos el dual será más complejo y el primal será conveniente. Y en otros casos tanto primal como dual no presentaran complicaciones.

Primal Dual

Función objetivo en el primal (max)

Función objetivo en el dual (min)

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i = w$$

Únicamente en la solución óptima el valor del funcional del primal sera igual al funcional del dual y viceversa de manera que **z = w**. Para el resto de las soluciones factibles el valor del funcional en maximización será menor al de minimización.

Programación Lineal

Primal Dual

El problema **Primal** como lo planteamos originalmente es un modelo que representa la **asignación de recursos**, la función objetivo z podría representar la utilidad monetaria y b la disponibilidad en unidades de un determinado recurso. Si consideramos la solución óptima z = w

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

Como Z representa utilidad monetaria entonces en el dual

$$\$ = \sum_{i} (\text{unidades recurso i}) \times (\$ \text{ por unidad de recurso i})$$

Esto quiere decir que las variables de decisión duales representan el **valor por unidad** del **recurso** i (Taha). Las variables **y** se las conoce como precios duales.

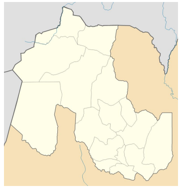
Ademas: las variables de decisión en el Dual representaran el Shadow Price en el Primal (y viceversa).

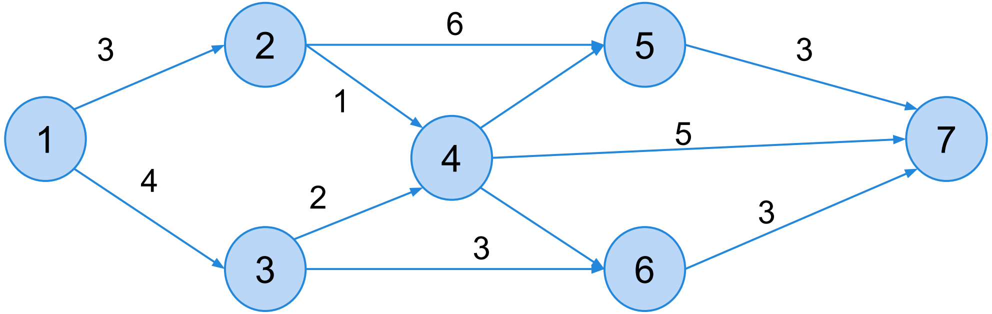
Programacion Lineal en grafos
Camino mas corto

Primal-Dual

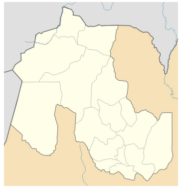
Programación Lineal: camino mas corto

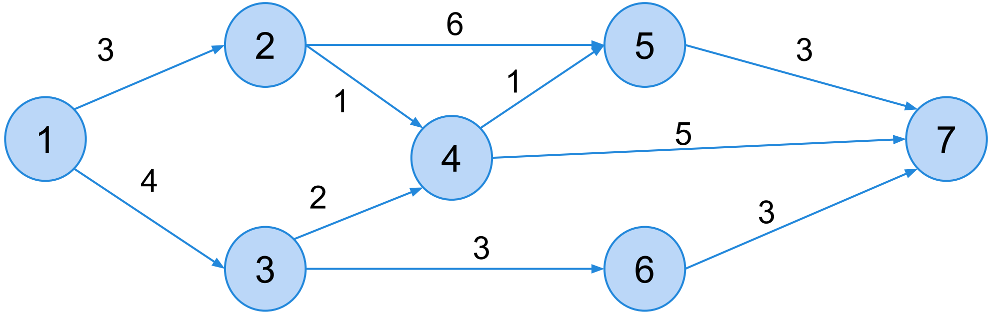
Queremos enviar paquetes por tierra aprovechando la red de centros de distribución del correo Argentino. Los paquetes se envía desde el centro de distribución en San Salvador de Jujuy y tienen que entregarse en el centro de distribución en Tierra del Fuego. Para ellos los paquetes tendrán que atravesar la red de centros de distribución de todo el país. Sabemos que el costo de transporte entre centros i-j es “d”. Queremos encontrar la ruta más corta entre ambos centros de distribución basándose en las distancias entre ellos.





Programación Lineal: camino mas corto





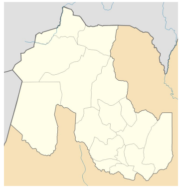
Para modelar el problema como programación lineal la variable de decisión será si un arco es o no parte de la ruta mas corta. Como hay 7 arcos entonces tenemos 7 variables de decisión.

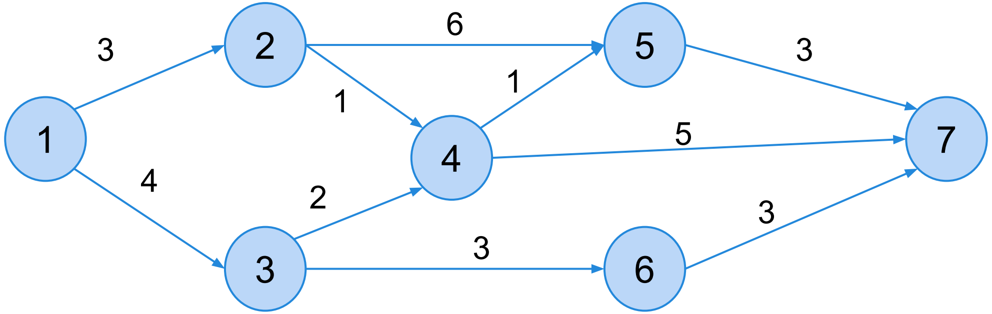
$$y = [y_{12}, y_{12}, y_{24}, , y_{25}, y_{34}, y_{36}, y_{45}, y_{47}, y_{57}, y_{67}]$$

Además la función objetivo queda determinada como

$$\min_{y} w = \sum d_{ij} y_{ij}$$

Programación Lineal: camino mas corto

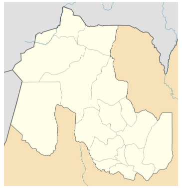


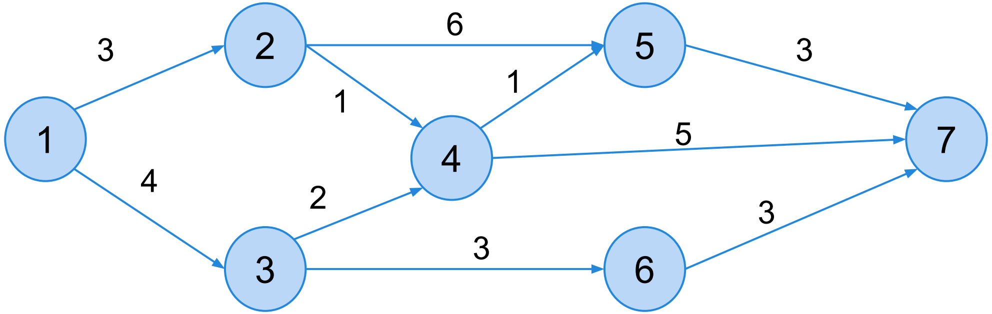


Además vamos a asumir que se envia una unidad de **flujo** desde el nodo origen 1 (Jujuy) al nodo destino 7 (TdF). Para cualquiera de los nodos intermedios el flujo de entrada debe ser igual al flujo de salida, para el nodo de origen el flujo saliente sera = 1 y el nodo destino el flujo entrante sera = 1. Se plantean restricciones de flujo para los nodos.

$$
\begin{aligned}
y_{12} + y_{13} &= 1 && \text{Nodo 1}\\
y_{12} - y_{24} - y_{25} &= 0 && \text{Nodo 2}\\
y_{13} - y_{34} - y_{36} &= 0 && \text{Nodo 3}\\
y_{24} + y_{34} - y_{45} - y_{47} &= 0 && \text{Nodo 4}\\
y_{25} + y_{45} - y_{57} &= 0 && \text{Nodo 5}\\
y_{36} - y_{67} &= 0 && \text{Nodo 6}\\
y_{57} + y_{67} &= 1 && \text{Nodo 7}
\end{aligned}
$$

Programación Lineal: camino mas corto





Tarea: resolver el problema propuesto en Python. Plantear el problema Dual y resolverlo también para verificar que la función objetivo es la misma en el argumento máximo de cada problema. Qué interpretación podemos darle al problema dual? Si en el primal estamos minimizando una distancia a recorrer, que maximizamos en el dual?

Simplex: minimizacion

Programación Lineal: Minimizacion

Volviendo a la Programación Lineal y específicamente a los problemas de minimización:

- Si la minimización está en el primal podemos solucionarlo transformándolo a su respectivo dual y maximizar.
- También podemos resolver el problema de minimización directamente con el Simplex. En caso que tengamos restricciones de > usamos el método de la M.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^T\mathbf{y} &= w \longrightarrow \text{Min} \\ \mathbf{A}^T\mathbf{y} &\geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} &\geq 0 \end{aligned} \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &= \mathbf{z} \longrightarrow \text{Max} \\ A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Primal <> Dual

Programación Lineal: Minimizacion

Volviendo a la Programación Lineal y específicamente a los problemas de minimización:

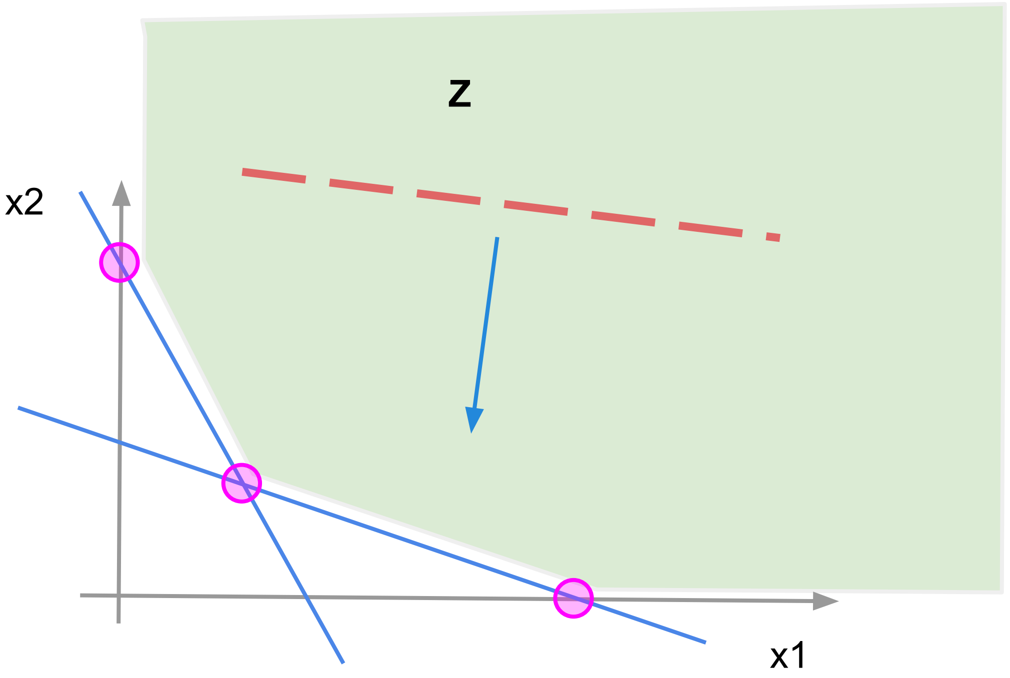
- Si la minimización está en el primal podemos solucionarlo transformándolo a su respectivo dual y maximizar.
- Podemos resolver el problema de minimización directamente. En caso que tengamos restricciones de > usamos el método de la M.

$$3y_1 + 9y_2 = w \quad \textbf{Min}$$
$$2y_1 + y_2 \geq 8$$
$$1y_1 + 2y_2 \geq 8$$

Cómo quedaría este problema en el dual para resolverse por maximización?

Programación Lineal: Minimizacion

$$\begin{aligned} 3x_1 + 9x_2 &= w \\ 2x_1 + x_2 &\geq 8 \\ 1x_1 + 2x_2 &\geq 8 \end{aligned}$$



Minimizacion: método de la M

$$
\begin{aligned}
b_1 y_1 + ... + b_m y_m + .. + M R_n \quad &= w \\
a_{11} y_1 + ... + a_{1m} y_m - \xi_1 + R_1 ... \; &\geq c_1 \\
... \qquad\qquad\qquad\qquad &\quad ... \\
a_{n1} y_1 + ... + a_{nm} y_m - \xi_n + R_n \quad &\geq c_n
\end{aligned}
$$

Para ingresar el problema de minimización en el algoritmo del simplex se agregan variables slack (Xi) y variables artificiales R por cada restricción de mayor o igual del problema. Las variables slack en el funcional tienen coeficiente cero. Las variables artificiales en el funcional tienen coeficiente M siendo M un número muy grande (idealmente infinito).

Las variables artificiales solo son utilizadas para inicializar el problema y su coeficiente M muy alto ayuda a que sean descartadas en las primeras iteraciones del simplex. La idea no es que formen parte del funcional en la solución final (idealmente optima).

Agregar variables artificiales y slack

$$\begin{aligned} 3y_1 + 9y_2 &= w \\ 2y_1 + y_2 &\geq 8 \\ 1y_1 + 2y_2 &\geq 8 \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} 3y_1 + 9y_2 + 0y_3 + 0y_4 + MR_1 + MR_2 &= W \\ 2y_1 + y_2 + -1y_3 + 0y_4 + R_1 + 0R_2 &= 8 \\ y1 + 2y_2 + 0y_3 - 1y_4 + 0R_1 + R_2 &= 8 \end{aligned}$$

Luego de procesar el problema original y adaptarlo para poder computarlo con el algoritmo del simplex obtenemos 2 variables slack (y3 e y4) y dos variables artificiales (R1 y R2).

Minimización en el Simplex

Se carga la tabla inicial del primal del simplex. Inicialmente la solución al inicio es un número muy alto tendiendo a infinito gracias a que la variables artificiales son parte de la solución en t=0.

T = 0			3	9	0	0	M	M	Bk/Aij
Coef. en Z de var. básica	Variable Básica	**Bi**	**y1**	**y2**	**y3**	**y4**	**R1**	**R2**	
M	R1	8	$\boxed{2}$	1	-1	0	1	0	**4**
M	R2	8	1	2	0	-1	0	1	8
W = 16 M	-(Zj - Cj)		**-3M + 3**	-3M + 9	M	M	0	0	

Como las variables artificiales tienen un coeficiente muy alto en el funcional a minimizar, estas dos variables serán las primeras en salir de la solución básica. Notar que como estamos en minimización, al Zj - Cj lo multiplicamos por -1 y así mantenemos el mismo sistema de reglas que en maximización.

Tarea

Tarea:

- Resolver el problema de minimización planteado por el metodo grafico y de manera analitica partiendo de la tabla inicial del simplex presentada.
- Transformar el problema inicial de minimización a su dual y resolver mediante maximización. Asegurarse que se llega por ambos métodos al mismo resultado de la función objetivo.

Respuesta del problema: **w = z = 24**

La solución está calculada con el archivo de python
io2020_clase19_linprog_minimizacion_scipy.ipynb