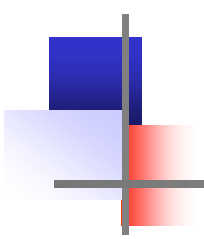


PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL (LP)



Planteamiento del problema de programación Lineal

Un problema de programación lineal es cuando la función objetivo es una función lineal y las restricciones son ecuaciones lineales; la forma estándar de un problema con m restricciones y n variables se representa.

$$\min \quad z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

s.a.

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

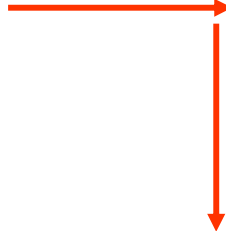
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

$$b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \dots, b_m \geq 0$$

matricial


$$z = cx$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0, \quad b \geq 0$$



Ejemplo

$$\begin{array}{ll}\max & x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} & 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0\end{array}$$

En forma matricial sería:

$$\begin{array}{ll}\max & (1 \quad 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ \text{s.a.} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{array}$$



Formulación de problemas 1

Problema de la dieta

Una persona para su alimentación normal debe tomar diariamente 75 mg de proteínas, 1.2 mg de calcio, 1.2 mg de hierro y 3600 calorías.

¿Qué cantidad mínima de leche, huevos y pan debe tomar diariamente una persona para cubrir las necesidades de calcio y hierro si consume al día por lo menos 2 rebanadas de pan?

	<i>Leche</i> (por taza)	<i>Huevos</i> (por unidad)	<i>Carne</i> (por onza)	<i>Pan</i> (por rebanada)	<i>Queso</i> (por onza)
Proteínas	8 gm	7 gm	20 gm	2 gm	7 gm
Calcio	0.3 gm	0.03 gm	0.01 gm	0.01 gm	0.25 gm
Hierro	0.1 mg	1.5 mg	3.0 mg	0.6 mg	0.1 mg
Calorías	175	75	150	75	100



Formulación de Problemas 2

Un estudiante debe realizar un examen de problemas y se le da la posibilidad de escogerlos entre los que figuran en tres listas. Los problemas de la lista 1 se puntúan con 5 puntos cada uno, los de la 2 con 4 puntos y los de la tres con 6. El alumno sabe que necesita 3 minutos para resolver cada problema de la lista 1, 2 minutos para los de la 2 y 4 minutos para los de la 3. Dispone de 3 horas y media para realizar el examen. Los problemas de las listas 1 y 2 emplean bastante cálculo y el alumno no desea dedicarles más de 2 horas y media. ¿Cómo puede alcanzar la puntuación máxima?



Formulación de Problemas 3

Se desea encontrar la mezcla más barata de las tres harinas tal que la fracción de los nutrientes uno, dos y tres en la mezcla sea mayor o igual a 0.04, 0.02 y 0.07, respectivamente.

<i>Harina</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>Coste por Unidad</i>
1	0.06	0.02	0.09	15
2	0.03	0.04	0.05	12
3	0.04	0.01	0.03	3

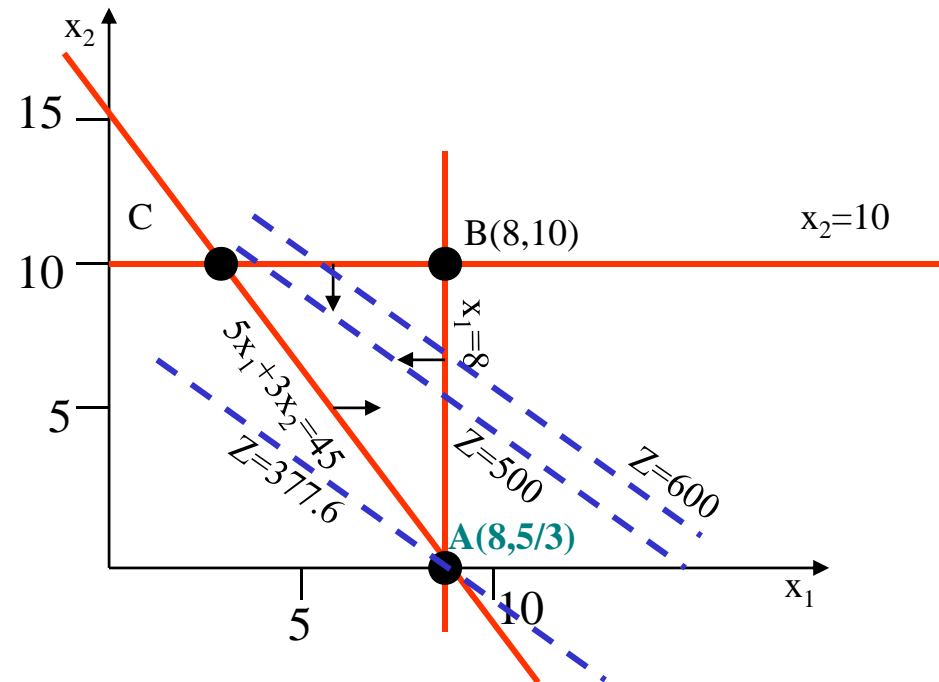


Formulación de Problemas 4

Una compañía tiene dos grados de inspectores 1 y 2, que son asignados al control de calidad. Se requiere inspeccionar al menos 1800 piezas por día (8 horas). El inspector de grado 1 chequea piezas a velocidad de 25 piezas por hora con una exactitud del 98%. Los de grado 2 chequean a velocidad de 15 piezas por hora con una exactitud del 95%. El salario del inspector de grado 1 es de 4 €/hora, y el de grado 2 de 3€/hora. Cada vez que se produce un error, el coste a la compañía es de 2 €. La compañía tiene 8 inspectores de grado 1 y 10 de grado 2. Determinar la asignación óptima de inspectores que minimicen el coste total de inspección.

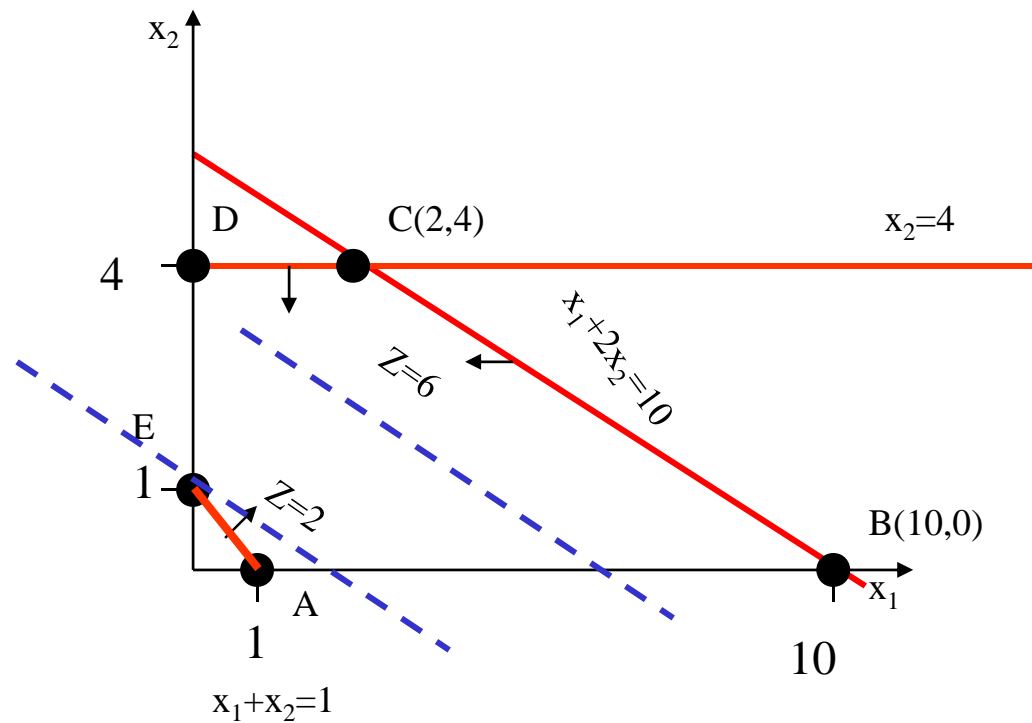
Solución Gráfica de un problema de PL con dos variables

$$\begin{array}{ll}\min & z = 40x_1 + 36x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 \leq 8 \quad x_2 \leq 10 \\ & 5x_1 + 3x_2 \geq 45 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0\end{array}$$



Solución Gráfica

$$\begin{array}{ll}\max & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} & x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0\end{array}$$





Algunas definiciones

Solución factible: La solución que satisface todas las restricciones

Región factible: Conjunto de todas las soluciones factibles

Solución óptima: Es una solución factible y su valor de la función objetivo es mayor que el del resto de las soluciones factibles

Valor óptimo: El valor de la función que corresponde a la solución óptima

Solución alternativa: Cuando existe más de una solución óptima

Óptimo único: Cuando no existe otro óptimo

Óptimo sin límite: Cuando el problema no tiene un óptimo finito.



Principios del Método Simplex 1

$$\max \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

s.a.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$$

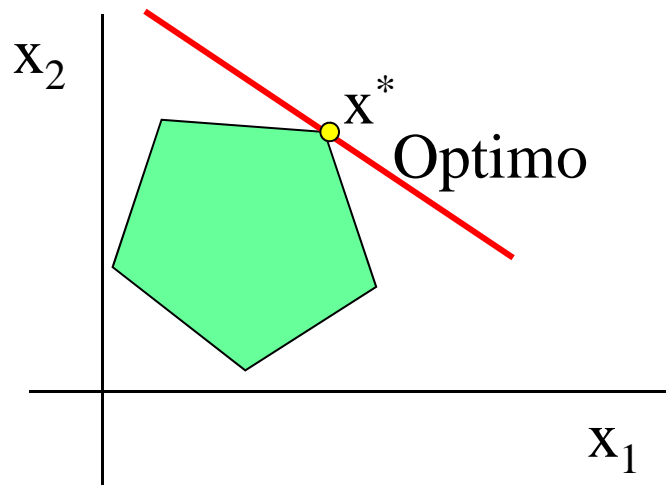
$$b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \dots, b_m \geq 0$$

Si $m < n$, el problema
tiene infinitas
soluciones



El problema no tiene
solución trivial

Problema LP



Si la solución se encuentra en un vértice, podría pensarse en un método de solución que evaluase $J = c'x$ en cada vértice y escogiera el mejor, si existe.

El número máximo de vértices corresponde a los distintos grupos de m columnas que podemos formar con las n existentes en A , o sea:

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Para n grande puede ser un número excesivo.
p.e. $n=100, m=50$ resultan 10^{29} combinaciones



Algoritmo Simplex (Dantzig 1947)

El algoritmo Simplex es una forma inteligente de recorrer los vértices que

- ✓ Encuentra un vértice
- ✓ Determina si es óptimo
- ✓ En caso contrario, encuentra otro vértice vecino con un valor mejor de J
- ✓ También indica si no hay solución debido a no factibilidad o a soluciones no acotadas

Por tanto, en un número finito de pasos puede encontrar el óptimo

Suele dividirse en dos fases:

- I encontrar el vértice inicial, o detectar que no existe solución
- II encontrar el óptimo, o detectar que no hay máximo



Manipulación de desigualdades

Convertir las desigualdades en igualdades a través de las variables de holgura

1. Desigualdad “menor o igual”

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 25 \quad \longrightarrow \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 25$$

2. Desigualdad “mayor o igual”

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 12 \quad \longrightarrow \quad 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_6 = 12$$

3. Variables sin restricciones

$$x_1 = x_2 - x_3$$

$$x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$



Principios del Método Simplex 2

Se convierte en una forma canónica:

$$\begin{aligned}x_1 &+ \bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{1n}x_n = \bar{b}_1 \\x_r &+ \bar{a}_{r,m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{rn}x_n = \bar{b}_r \\x_m &+ \bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{mn}x_n = \bar{b}_m\end{aligned}\tag{S1}$$

Las variables con coeficiente 1 que aparecen en una sola ecuación y con coeficiente cero en el resto de las ecuaciones (x_1, x_2, \dots, x_m) se les llaman variables básicas o dependientes

En la forma canónica hay una variable básica en cada ecuación

Una forma canónica permite obtener múltiples soluciones eligiendo valores diferentes de las variables independientes y resolviendo el sistema para las variables dependientes



Principios del Método Simplex 3

Una forma de transformar un sistema a canónico, es:

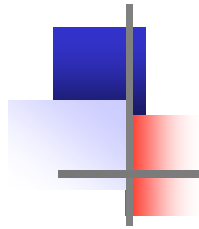
- 1.- Multiplicar cualquier ecuación del sistema por un número
- 2.- Sumar a cualquier ecuación una constante multiplicada por cualquier otra ecuación del sistema

*Una solución que se obtiene a partir de un sistema canónico igualando las variables independientes o no básicas a cero, es una **solución básica***

Una **solución básica factible** es una solución básica en la cual los valores de las variables dependientes son no negativas

¿Cómo resolver el programa lineal?

Generando todas las posibles soluciones básicas factibles a través de la reducción canónica y determinar cuál da el mejor valor de la función objetivo



Principios del Método Simplex 4

Los pasos generales del Simplex son los siguientes

Comenzar con una solución básica factible inicial en la forma canónica

Mejorar la solución inicial encontrando otras soluciones básicas factibles con un mejor valor de la función objetivo.

Continuar buscando mejores soluciones básicas factibles que mejoren el valor de la función objetivo. Cuando nos encontremos con una solución que no puede mejorar dicho valor, entonces estamos en el óptimo y el algoritmo termina



Principios del Método Simplex 5

Tenemos una solución básica factible de la forma:

básica $x_i = \bar{b}_i \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, m$

no básica $x_j = 0$ para $j = m+1, \dots, n$

Al conjunto de las variables básicas se le llama base y se denota: \mathbf{x}_B

Sea los coeficientes de la función objetivo de las variables básicas \mathbf{c}_B

Para las bases iniciales: $\mathbf{x}_B = (x_1, \dots, x_m)$ y $\mathbf{c}_B = (c_1, c_2, \dots, c_m)$, entonces:

$$Z = \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B = c_1 \bar{b}_1 + \dots + c_m \bar{b}_m$$

De aquí se deduce que el algoritmo, verifica si es posible encontrar mejores soluciones básicas factibles que proporcionen un mayor valor de Z y si la solución actual es óptima. En caso contrario, el método obtiene una **solución básica factible adyacente** con un valor mayor de Z .



Principios del Método Simplex 6

¿Cómo se obtiene una solución básica factible adyacente?

Una de las variables *básicas* pasa a ser una variable *no básica* y hace una variable no básica cómo básica en su lugar.

¿Cómo se seleccionan estas dos variables?

En una solución básica factible, las variables básicas tienen valores positivos y las no básicas siempre son cero. Por tanto pasar de una no básica a básica, basta con incrementar su valor de cero a una cantidad positiva.

La elección se hace basándonos en cuál de las variables no básicas puede mejorar el valor de la función objetivo. Por ejemplo incrementando en 1 y examinar el cambio resultante en la función objetivo.

Principios del Método Simplex 7

Consideremos a x_s como una variable no básica e incrementamos su valor de 0 a 1, y estudiamos su efecto en la función objetivo. El sistema S1 queda de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & + \bar{a}_{1s} x_s & = \bar{b}_1 \\ & \vdots & \\ x_r & + \bar{a}_{rs} x_s & = \bar{b}_r \\ & \vdots & \\ x_m & + \bar{a}_{ms} x_s & = \bar{b}_m \end{array} \quad (\text{S2}) \quad \xrightarrow{\text{La solución:}} \quad \begin{array}{ll} x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is} & i = 1, \dots, m \\ x_s = 1 \\ x_j = 0 & j = m+1, \dots, n, j \neq s \end{array}$$

Valor de la Función Objetivo:
$$Z = \sum_{i=1}^m c_i (\bar{b}_i - \bar{a}_{is}) + c_s$$



Principios del Método Simplex 8

El incremento en el valor de la función objetivo será



$$\bar{c}_s = \sum_{i=1}^m c_i (\bar{b}_i - \bar{a}_{is}) + c_s - \sum_{i=1}^m c_i \bar{b}_i = c_s - \sum_{i=1}^m c_i \bar{a}_{is}$$

c_s se llama **ganancia relativa** de la variable no básica x_s .

$\bar{c}_s > 0$ La función objetivo puede ser incrementada haciendo x_s una variable básica

$\bar{c}_j = c_j - c_B \bar{P}_j$ Es el cociente de ganancia relativa de una variable no básica x_j

c_B corresponde a los coeficientes de ganancia de las variables básicas

\bar{P}_j corresponde a la columna j del sistema canónico



Criterio de Optimalidad 1

En un problema de maximización, una solución básica factible es óptima, si las ganancias relativas de sus variables no básicas son todas negativas o cero

Si $\bar{c}_j \leq 0$ para las variables no básicas, entonces todas las soluciones básicas factibles adyacentes tienen un valor de la función objetivo menor que la solución presente, por lo tanto tenemos un máximo local en ese punto.



Criterio de Optimalidad 2


Cuando x_s se incrementa, los valores de las variables básicas cambian, ya que:


$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is} x_s \quad i = 1, \dots, m$$

Si:

$\bar{a}_{is} < 0$  x_i se incrementa si x_s se incrementa

$\bar{a}_{is} = 0$  x_i no varía

$\bar{a}_{is} > 0$  x_i disminuye cuando x_s incrementa. Y si x_s crece indefinidamente x_i puede hacerse negativa haciendo la solución no factible

Por tanto el incremento de x_s tiene que ser: $\max x_s = \min_{\bar{a}_{is} > 0} \left[\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right]$  Regla del radio mínimo



Soluciones degeneradas

Si al calcular una solución básica alguna de las variables básicas resulta ser cero, se dice que el vértice es degenerado, o que se trata de una solución básica factible degenerada.

Puede aparecer en el vértice inicial cuando una \bar{b}_i es cero, o al calcular un nuevo vértice. En este caso, puede ocurrir que

$$\min_{\bar{a}_{is} > 0} \left[\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{is}} \right] = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} = 0 \quad \text{Con lo que el incremento en J:} \quad \bar{c}_s \left(\frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rs}} \right) = 0$$

Con lo cual no habrá mejora en esta o en algunas otras iteraciones, reduciendo la eficiencia del método. En teoría es posible que se vaya a vértices sin mejora y se vuelva a uno de partida apareciendo ciclos que impidan la convergencia del algoritmo simplex. No obstante en la práctica no suelen aparecer si está adecuadamente programado.

Resumen

1 Poner el problema en forma canónica, escribiendo en problema en forma de tabla y escoger la base

2 Para cada variable no básica calcular las ganancias relativas, escoger la mayor. Si es ≤ 0 , es el óptimo, sino, seleccionar esa variable x_s para entrar en la base. Si todos los a_{is} son <0 , no hay solución.

3 Calcular el menor de los cocientes b_i/a_{is} ($a_{is}>0$) que determina la variable que sale de la base.

		c1	c2	c3	c4	c5			
		3	2	0	0	0			
c_B	Base	x1	x2	x3	x4	x5	b		($a_{is}>0$) b_i/a_{is}
0	x3	-1	2	1	0	0	4		
0	x4	3	2	0	1	0	14		4,3
0	x5	1	-1	0	0	1	3		3
$c_s - \sum(c_i a_{is})$	ganancia relativa	3	2				0	J	

4 Pivotar sobre el elemento de esa fila y columna para pasar a forma canónica y repetir el proceso

Variables artificiales 1

- El principal requerimiento del método del Simplex es la disponibilidad de una solución básica factible inicial:
 - Poner el problema de forma estándar
 - Se examina cada restricción, para ver la existencia de una variable básica, si no existe se añade una variable nueva para actuar como básica => **variable artificial**.
 - Cualquier solución básica factible con las variables artificiales = 0 es una solución básica factible del sistema original. Se resuelve el **problema artificial**:



$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m y_i \\ \text{s.a} & Ax+y = b; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0; \end{array}$$



Variables artificiales 2

- Si el valor mínimo del problema artificial es cero, todas las variables artificiales se hacen cero, tenemos una solución básica factible inicial del problema PL original
- Si el valor mínimo es positivo \Rightarrow el problema original no es factible.

Problema de minimización:

- Convertir el problema en uno de maximización, multiplicando a la función por (-1) .
- Se utiliza el algoritmo del simplex con la siguiente modificación
 - Calcular las ganancias relativas: c_s . Si $c_s \geq 0$ para todas las variables no básicas, x^* es óptimo, sino seleccionar la variable con menor c_s para entrar en la base.



Teoría de la dualidad 1

- Asociado a cada problema de PL hay un problema de PL correspondiente llamado **dual**

Primario

$$\min \quad z = cx$$

$$\text{s.a.} \quad Ax \geq b$$

$$x \geq 0, \quad b \geq 0$$

Dual

$$\max \quad z = \lambda b$$

$$\text{s.a.} \quad \lambda A \leq c$$

$$\lambda \geq 0, \quad c \geq 0$$

} Forma
simétrica

Primario

$$\min \quad z = cx$$

$$\text{s.a.} \quad Ax = b$$

$$x \geq 0, \quad b \geq 0$$

Dual

$$\max \quad z = \lambda b$$

$$\text{s.a.} \quad \lambda A \leq c$$

$$\lambda \text{ libres}$$

} Forma
asimétrica

Ejemplo

Primario

$$\max_{\mathbf{x}} 6x_1 + 4x_2$$

sujeto a :

$$2x_1 + 4x_2 \leq 48$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 60$$

$$3x_1 \leq 42$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Dual

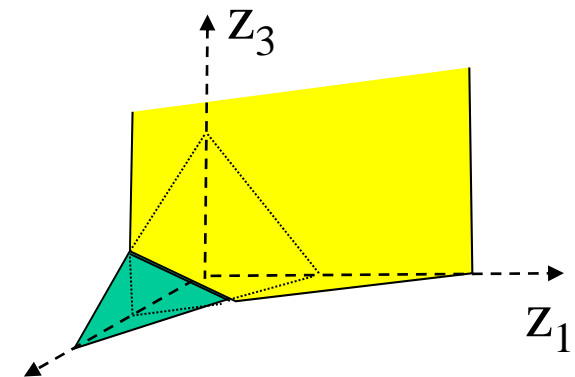
$$\min_{\mathbf{z}} 48z_1 + 60z_2 + 42z_3$$

sujeto a :

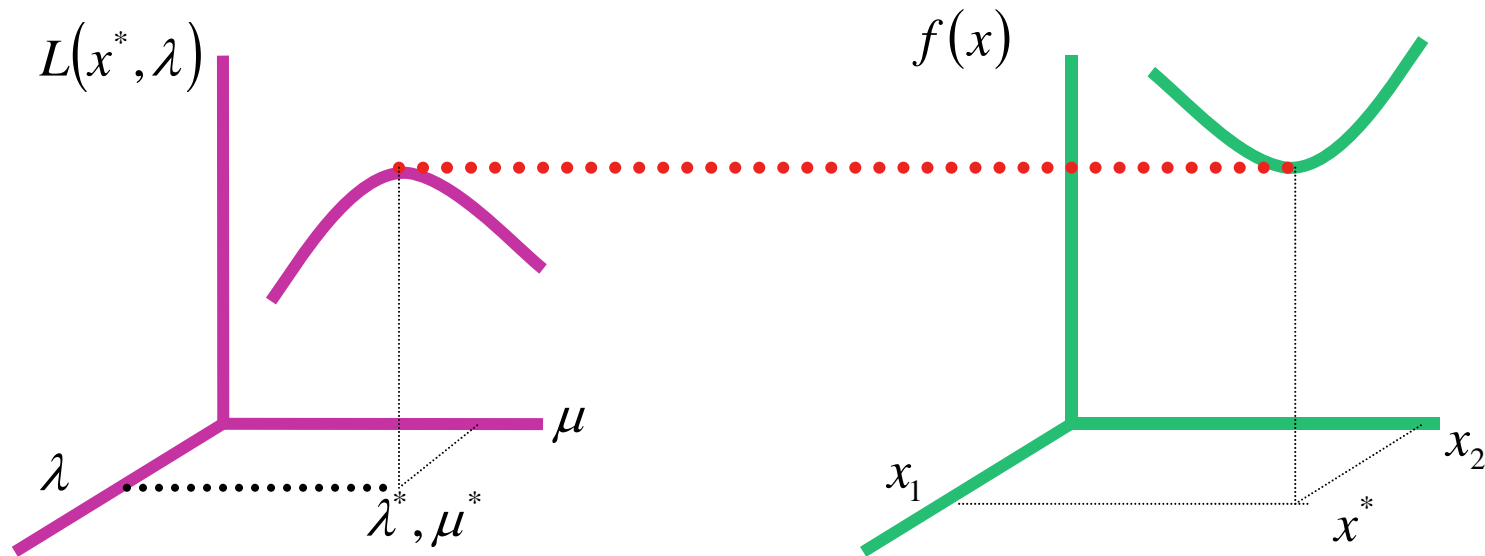
$$2z_1 + 4z_2 + 3z_3 \geq 6$$

$$4z_1 + 2z_2 + 0z_3 \geq 4$$

$$z_1 \geq 0, \quad z_2 \geq 0, \quad z_3 \geq 0$$



Teoría de la Dualidad 2





Teoremas de Dualidad

Teorema 1: El dual del dual es el primario

Teorema 2: Cualquier solución factible del primario da un valor de ρ mayor que o al menos igual al valor de ν obtenido para cualquier solución factible del dual

$$\rho = cx \geq \nu = \lambda b$$

Teorema 3: Si los problemas del dual y primario tienen soluciones factibles, entonces ambos tienen soluciones óptimas y $\min \rho = \max \nu$

Teorema 4: Si el primario o el dual tienen una solución sin límites, entonces el otro problema no es factible

Teorema 5: Si el PL tiene solución básica factible óptima correspondiente a la base B , entonces el vector $\lambda = C_B B^{-1}$ es una solución óptima del dual



Análisis de la sensibilidad 1

1.- Cambio en los parámetros b_j

Si los coeficientes del lado derecho de las restricciones cambian de $b \Rightarrow b + \Delta b$ la solución óptima es:

$$x_B = B^{-1} b \quad \longrightarrow \quad x'_B = B^{-1} (b + \Delta b) = x_B + \Delta x_B$$

El correspondiente incremento en la función de coste es:

$$\Delta z = C_B \Delta x_B = C_B B^{-1} \Delta b = \lambda \Delta b$$

$\lambda \Rightarrow$ precio sombra

Siempre que $x'_B = B^{-1} (b + \Delta b) \geq 0$



Análisis de la sensibilidad 2

2.- Cambio en los coeficientes de coste: $c_j \Rightarrow c_j + \Delta c_j$

Hay que volver a calcular la ganancia relativa de las variables no básicas:

$$\bar{c}_j = c_j - c_B \bar{P}_j$$

Sustituyendo c_j por su nuevo valor.

Si se cumple que las nuevas $\bar{c}_j \leq 0$ los cambios no afectan a la solución óptima inicial, sino sólo al valor óptimo de la función: $\longrightarrow z = (c_j + \Delta c_j)x_j$

Si no se cumple \Rightarrow habría que introducir esa variable como una nueva variable básica y seguir con el algoritmo del simplex



Análisis de la sensibilidad 3

3.- Añadir variables nuevas x_{n+j} $j=1,2,\dots$

Las nuevas variables se toman como no básicas y se calculan las ganancias relativas:

$$\bar{c}_{n+j} = c_{n+j} - c_B \bar{P}_j = c_{n+j} - C_B B^{-1} A_{n+j}$$

El óptimo original permanece óptimo si todos los $\bar{c}_{n+j} \leq 0$

Si alguno de ellos $\bar{c}_{n+j} > 0$, entonces hay que meter esa variable en la base y sacar una variable de la base aplicando las reglas del simplex

Para pasar de los coeficientes de A_{n+j} a la forma canónica óptima: $\bar{A}_{n+j} = B^{-1} A_{n+j}$



Análisis de la sensibilidad 4

4.- Cambio en los coeficientes de la matriz A: $a_{ij} \Rightarrow a_{ij} + \Delta a_{ij}$

Si los coeficientes que cambian sólo son los de las variables no-básicas, hay que calcular nuevamente las ganancias relativas:

$$\bar{c}_j = c_j - C_B B^{-1} A_j$$

El óptimo original permanece óptimo si todos los $\bar{c}_j \leq 0$

Si alguno de ellos $\bar{c}_j > 0$, entonces hay que meter esa variable en la base y sacar una variable de la base aplicando las reglas del simplex

Si los coeficientes que cambian son debidos a variables básicas, empezar de nuevo