УДК 517.39

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ

А.К.Волосов, Е.К.Вдовина, А.К.Волосова

Метод нефиксированной конструктивной замены переменных ставит в соответствие уравнению второго порядка с частными производными с двумя независимыми переменными матрицу размерности четыре. Поставлен математический эксперимент и установлена связь собственных чисел этой матрицы с характером поведения решения смешанных задач. Получен ответ на вопрос: Как ведут себя собственные числа этой матрицы когда в смешанной задаче существует "предельное притягивающее"решение.

Ключевые слова:метод нефиксированной конструктивной замены переменных, смешанные задачи стабилизации.

1. Введение.

Метод нефиксированной конструктивной замены переменных предложен в [1]-[6]. Доказательство детально приведено в [7]. Квазилинейное параболическое уравнение можно записать как систему функциональных линейных алгебраических уравнений (СФЛАУ). Примеры построения точных решений приведены в цитируемых работах[1]

2. *Матричная форма записи уравнения с частными производными.*

Приведем основные формулы для квазилинейного параболического

[1]Академик РАН В.П.Маслов представил работу в "Доклады РАН"[4]. Член корр. РАН В.В.Пухначев представил работу в "Сибирский жур. индустр. математики"[5]. Отметим, что отзыв ведущей организации к диссертации [3] был подписан зав. каф. математики Московского физико-технического института, факультета нано –, био –, информационных и когнетивных технологий, зав. лаб. Институт прикладной механики РАН профессором, д.ф.– м.н. С.Ю.Доброхотовым и академиком В.П.Масловым. Диссертация выставлена на сайте "Мир дифференциальных уравнений http:// eqworld.ipmnet.ru.,www.aplsmath.ru. Проф. фак. информатики университета Дебрецена Аттила Гилани представил работу в "Международный жур. Математики и Математических наук"[6]. http://www.hindawi.com/journals/ijmms/2009/319269.html. doi:10.1155./2009/319269,www.aplsmath.ru

уравнения

$$Z'_t - (K(Z)Z'_x)'_x + B(Z'_x, Z, x, t) = 0. \tag{1}$$

Приведенный алгоритм работает в предположении, что все используемые функции имеют необходимую гладкость.

Сделаем произвольную замену переменных

$$Z(x,t)|_{x=x(\xi,\ \delta),t=t(\xi,\delta)} = U(\xi,\delta). \tag{2}$$

Обратная замена, хотя бы локально, восстанавливает решение $Z(x,t)$ уравнения (1)по функции $U(\xi,\delta)$ если якобиан замены переменных

$detJ = x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta \neq 0$ не равен нулю и бесконечности. При этом существуют формулы пересчёта производных старых переменных x, t по новым переменным ξ, δ

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = detJ\frac{\partial \delta}{\partial t},\ \frac{\partial t}{\partial \xi} = -detJ\frac{\partial \delta}{\partial x},\ \ \frac{\partial x}{\partial \delta} = -detJ\frac{\partial \xi}{\partial t},\ \frac{\partial t}{\partial \delta} = detJ\frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{3}$$

Далее установим дифференциальные связи

$$\begin{aligned} K(Z)\frac{\partial Z}{\partial x}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} &= Y(\xi,\delta), \\ K(Z)\frac{\partial Z}{\partial t}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} &= T(\xi,\delta). \end{aligned} \tag{4}$$

Используя (2),(3) из (4), получим выражения

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi}\right) = Y(\xi,\delta)[x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta]/K(U(\xi,\delta)), \\ &\left(-\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) = T(\xi,\delta)[x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta]/K(U(\xi,\delta)). \end{aligned} \tag{5}$$

Уравнение (1) принимает вид

$$\begin{aligned} &[x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta]\left(T + K(U)B(Y,U,x(\xi,\delta),t(\xi,\delta)\right)/K(U) = \\ &\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial Y}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

С необходимостью должно быть выполнено соотношение,

$$Z''_{xt} = Z''_{tx} \tag{7}$$

равенства смешанных производных в переменных ξ, δ.

Тогда это соотношение, с учетом (2),(3) можно записать в виде

$$-\frac{\partial x}{\partial \delta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{Y}{K(U)}\right) + \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \delta}\left(\frac{Y}{K(U)}\right) - \frac{\partial t}{\partial \delta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{T}{K(U)}\right) + \frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \delta}\left(\frac{T}{K(U)}\right) = 0. \tag{8}$$

В работах [1]-[6] доказано, что система четырёх уравнений (5),(6),(8) является СФЛАУ относительно производных $x'_\xi,\ x'_\delta,\ t'_\xi,\ t'_\delta$.

Теорема 1

Алгебраическая система (5),(6),(8) $\mathbf{A_1\ X} = \mathbf{b}$ относительно производных $x'_\xi,\ x'_\delta,\ t'_\xi,\ t'_\delta$, имеет единственное решение

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \Psi_1(\xi,\delta),\ \ \frac{\partial x}{\partial \delta} = \Psi_2,\ \ \frac{\partial t}{\partial \xi} = \Psi_3,\ \ \frac{\partial t}{\partial \delta} = \Psi_4. \tag{9}$$

Это новая система, где

$$\Psi_1(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} (K[-BKU'_\xi(U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi) - (-TU'_\delta {Y'_\xi}^2 - TT'_\delta {U'_\xi}^2 + TU'_\delta T'_\xi U'_\xi - YY'_\delta T'_\xi U'_\xi + TY'_\delta Y'_\xi U'_\xi + YT'_\delta U'_\xi Y'_\xi)])/P_1(\xi,\delta), \tag{10}$$

$$\Psi_2(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} K[-BKU'_\delta[U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi] - TT'_\xi {U'_\delta}^2 + YY'_\delta T'_\xi U'_\delta + TT'_\delta U'_\xi U'_\delta - YT'_\delta Y'_\xi U'_\delta + TY'_\delta Y'_\xi U'_\delta - T{Y'_\delta}^2 U'_\xi]/P_1(\xi,\delta), \tag{11}$$

$$\Psi_3(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} K[-YY'_\xi + BKU'_\xi + TU'_\xi][U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi]/P_1(\xi,\delta), \tag{12}$$

$$\Psi_4(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} K[-YY'_\delta + BKU'_\delta + TU'_\delta][U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi]/P_1(\xi,\delta). \tag{13}$$

Здесь обозначено

$$P_1(\xi,\delta)) = BK[(TY'_\xi - T'_\xi Y)U'_\delta + (YT'_\delta - TY'_\delta)U'_\xi] + TY[-U'_\delta T'_\xi + U'_\xi T'_\delta] + Y^2[Y'_\delta T'_\xi - T'_\delta Y'_\xi] + T^2[U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi], \tag{14}$$

и кроме того якобиан имеет вид

$$detJ = \frac{K(U)^2(Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi)^2}{P_1(\xi,\delta)}. \tag{15}$$

Доказательство теоремы 1 приведено в [1]-[6] и очень подробно в [7]. Делим первое уравнение (5) на Y а второе на T и вычитаем два уравнения и получим линейное уравнение.

$\frac{K(U)}{Y}\left(U'_\xi t'_\delta - U'_\delta t'_\xi\right) - \frac{K(U)}{T}\left(-U'_\xi x'_\delta + U'_\delta x'_\xi\right) = 0.$

Умножим это выражение на множитель $-TY/K(U)$. Коэффициенты этого уравнения соответствуют первой строке матрицы $\mathbf{A_1}$. Второй строке матрицы соответствуют коэффициенты выражения (8), умноженные на множитель $-K^2(U)$.

Далее умножим уравнение (6) на множитель $detJ/(T+K(U)B)$ и вычтем его из первого уравнения (5) разделенного на Y.

Домножим результат на множитель $Y(T+K(U)F(U))$ получим коэффициенты третьей строки матрицы a_{33}, a_{34}.

Такая процедура выбраны нами потому что в этом случае матрица $\mathbf{A_1}$ имеет вид близкий к треугольной. Далее мы можем выразить любые три производные, например, $x'_\xi,\ x'_\delta,\ t'_\xi,$ через одно из них t'_δ. После подстановки в первое уравнение (5) получим линейное алгебраическое уравнение. Заметим, что эти производные можно подставить в любое уравнение системы (5),(6),(8)и также получим линейное уравнение или тождество. Таким образом, имеем СФЛАУ.

Теорема 2.

Система (5),(6),(8) эквивалентна уравнению (1) и может быть записана как СФЛАУ $\mathbf{A_1}\ \mathbf{X} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} YU'_\delta & -YU'_\xi & TU'_\delta & -TU'_\xi \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_\xi \\ x'_\delta \\ t'_\xi \\ t'_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

Здесь вектор $\mathbf{X} = (\mathbf{x}'_\xi,\ \mathbf{x}'_\delta,\ \mathbf{t}'_\xi,\ \mathbf{t}'_\delta)^\tau$, а вектор $\mathbf{b} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{b_4})^\tau$, где $b_4 = K[-YY'_\delta + BKU'_\delta + TU'_\delta][U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi]$. [2]

$a_{21} = -K(U)Y'_\delta + YK'(U)U'_\delta,\ a_{22} = K(U)Y'_\xi - YK'(U)U'_\xi,$

$a_{23} = -K(U)T'_\delta + TK'(U)U'_\delta,\ a_{24} = K(U)T'_\xi - TK'(U)U'_\xi,$

$a_{33} = -YY'_\delta + (BK(U) + T)U'_\delta,$

$a_{34} = YY'_\xi - (BK(U) + T)U'_\xi,$

$a_{44} = BK[(TY'_\xi - T'_\xi Y)U'_\delta + (YT'_\delta - TY'_\delta)U'_\xi] + TY[-U'_\delta T'_\xi + U'_\xi T'_\delta] + Y^2[Y'_\delta T'_\xi - T'_\delta Y'_\xi] + T^2[U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi].$

Собственные числа имеют вид

$\lambda_1 = -YY'_\delta + BKU'_\delta + TU'_\delta,$

$\lambda_2 = P_1 = Y^2[T'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta T'_\xi] - T[BK + T][U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi] +$
$+ Y[BK + T][U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi],$

$\lambda_3 = \frac{1}{2}[M - \sqrt{D}], \lambda_4 = \frac{1}{2}[M + \sqrt{D}],\ M = KY'_\xi + Y(U'_\delta - K'(U)U'_\xi),$

$D = 4YK(Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi) + [KY'_\xi + Y(U'_\delta - K'(U)U'_\xi))^2].$ □

Собственные числа матрицы в данном случае уже функции независимых переменных, но мы оставляем общепринятую классическую терминологию.

Условия разрешимости новой системы (9) исследованы в [1]-[6].[3]

Замечание 1.

---

[2]Знак τ означает транспонирование.

[3]В случае двух независимых переменных (x, t) утверждение аналогичное теореме 1 приведено в [3] для квазилинейных эллиптических и квазилинейных гиперболических уравнений с частными производными.

Все выше приведенные формулы данного параграфа верны и для функции $B(Z'_x, Z, x, t)$ в уравнении (1).Различие между случаями $F(Z)$ и $B(Z'_x, Z, x, t)$ возникает при вычислении условий разрешимости. Это объяснено в [3] в теореме 1.6.2.

Матрицу можно записать и по другому.

Действительно, подставляя производные (9)и (10)-(13)в выражение для якобиана получим (15.) Подставляя (15) в уравнения (5),(6),(8) получим теорему.

Теорема 3.

Система (5),(6),(8) эквивалентна уравнению (1) и может быть записана как СФЛАУ $\mathbf{A_2}\ \mathbf{X} = \mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} -(Y/K)'_\delta & (Y/K)'_\xi & -(T/K)'_\delta & (T/K)'_\xi \\ U'_\delta & -U'_\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -U'_\delta & U'_\xi \\ 0 & 0 & -Y'_\delta & Y'_\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_\xi \\ x'_\delta \\ t'_\xi \\ t'_\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

Здесь

Вектор $\mathbf{X} = (\mathbf{x}'_\xi,\ \mathbf{x}'_\delta,\ \mathbf{t}'_\xi,\ \mathbf{t}'_\delta)^\tau$, а вектор $\mathbf{b} = (\mathbf{0}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}, \mathbf{b_4})^\tau$, где

$b_1 = 0, b_2 = TdetJ/K,\ b_3 = YdetJ/K,\ b_4 = detY(BK+T)/K.$ [4]

$detJ$ определен выражением (15).

Собственные числа имеют вид

$\tilde{\lambda_{1,2}} = [-U'_\delta + Y'_\xi \mp \sqrt{D_1}]/2,$

$D_1 = (U'_\delta)^2 - 4Y'_\delta U'_\xi + 2U'_\delta Y'_\xi + (Y'_\delta)^2,$

$\tilde{\lambda_{3,4}} = [M \mp \sqrt{D}]/(2K^2),$

$M = YK'_U U'_\delta - KY'_\xi - K^2 U'_\xi,$

$D_2 = [\left(-YK'_U U'_\delta + KY'_\delta + K^2 U'_\xi\right)^2 - 4K^3\left(Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi\right)]. \square$

[4] Знак τ означает транспонирование.

Далее сравним результаты вычисления на конкретных решениях задачи, которое учитывает начальное и граничное условие. Данные полученные на нескольких матрицах на нескольких десятков решений коррелируют. В итоговую теорему 5 включены худшие, необходимые условия.

3. Связь собственных чисел с характером эволюции решений нелинейных уравнений.

Вопрос об устойчивости решения относительно "предельного притягивающего"решения[5], если такое существует в задаче и эволюция решения нелинейного уравнения является сложным. Волосовым К.А. был поставлен вопрос о связи собственных чисел и трека матрицы с поведением и эволюцией решений смешанных задач и проведен математический эксперимент.[6]

В работах Волосова К.А. проанализировано несколько десятков решений в различных задачах по работам Баренблатта Г.И., Ландау Л.Д., Зельдовича Я,Б., Калашникова А.С., Самарского А.А., Курдюмова С.П., Мартинсона Л.К., Граника И.С., Галактионова В.В., Дородницина В.А., Михайлова С.П., Воробьева Е.М., Змитриенко Н.В., Похажаева С.И., Малинецкого Г.Г., Маслова В.П., Данилова В.Г., Рудных Г.А., Семенова Э.И., Разживайкина В.Н., Зайцева В.Ф., Денисова В.Н., Либровича В.В., Махвиладзе Г.М., Колмогорова А.Н., Петровского И.Г., Пискунова И.С., Фишера Р., авторами [1]-[8],[9],[11] и других авторов с точки зрения поведения собственных чисел матриц $\mathbf{A_i}, \mathbf{i = 1, 2}$.

[5]Термин "притягивающие множества " широко применяется в теории динамических систем и позаимствован из неё.

[6]На заседании Французского математического общества академик РАН В.И.Арнольд сказал: "*...математика — это часть физики, являющейся, как и физика, экспериментальной наукой*: разница только в том, что в физике эксперименты стоят обычно миллионы долларов, а в математике — единицы рублей." [10], с.10. Материал был доложен академику РАН В.И.Арнольду в 2008 году на международной конференции по дифференциальным уравнениям в г. Суздале. В его резюме было следующим: "Исследование одобряю. Я всегда так и думал, но не знал, что можно написать точные формулы".

Большое число задач указанных авторов можно условно разделить на три больших части.

1- ый случай. Существует класс решений в смешанных (с начальными и краевыми условиями) задачах для различных более конкретных функциях в уравнении (1), когда при наличии диссипации, распределенных стоков переносимой величины решение убывает со временем и стремится к нулю при любом значении x при t стремящемся к бесконечности. К такому типу решений относится, например, решение о стабилизации задачи Коши, рассмотренные в большом цикле работ В.Н. Денисова и других авторов. Ссылки на эти работы приведены в [8].В пункте (**c**) рассмотрена задача Коши для линейного параболического уравнения. Для квазилинейных вырождающихся параболических решений Л.К.Мартинсоном построено важное решение [9]. Это решение выделяется тем, что оно построено для различных значений размерностей пространства. Решение в случае двух независимых переменных x, t определено в области $x \in (x_1(t), x_2(t))$, является дважды непрерывно дифференцируемыми функциями внутри области. В крайних точках области локализации существуют слабые особенности и функция Z обращается в нуль. Начальные условия в данном случае заданы положительной гладкой функцией обращающейся в нуль на конечном или бесконечном расстоянии начала координат. Граничные условия равны нулю. Это решение убывает со временем и стремится к нулю при любом значении x при t стремящемся к бесконечности внутри области локализации. В данном случае, с нашей точки зрения, "предельное притягивающее" решение здесь константа равная нулю.

2-ой случай. Второй тип решения возникает в смешанных задачах для полулинейных уравнений, рассмотренных в [1]-[5]. Для уравнений Колмогорова, Петровского, Пискунова, Фишера, Зельдовича, Фитц-Хью-

Нагумо и других доказано, что существует решение задачи с предельным профилем бегущей волны с областью изменения $Z \in [a_o, a_1]$, где a_o, a_1 корни алгебраического уравнения $B \equiv F(Z) = 0$. Начальное условие в данном случае задано гладкой функцией равной a_o при $x \to -\infty$ и a_1 при $x \to \infty$. Функцию - решение смешанной задачи описывающее волну с предельным профилем, с нашей точки зрения, можно считать "предельным притягивающим" решением. Все остальные решения задачи с теми же краевыми условиями, с близкими, но другими начальными данными стремятся к этому "предельному притягивающему" решению.

3-ий случай. Если в задаче существует стационарное решение, то есть решение не зависящее от переменной t — времени, то другие решения, которые отличаются начальными данными эволюционируют к стационарному решению. Первая краевая задача с начальным условием в виде стационарного решения для квазилинейного параболического уравнения была исследована в [11]. При этом краевое условие было задано таким образом, что решение смешанной задачи переходило, стабилизировалось на новом стационарном решении. Таким образом стационарные решения, с нашей точки зрения, можно считать "предельным притягивающим" решением. Краевые условия в данных задачах таковы, что позволяют существовать стационарному решению.

По результатам вычисления и анализа собственных чисел мы объединяем эти три случая вместе. В работах перечисленных выше авторов и упомянутых в списке библиографии, который далеко не полон, мы находим большое количество точных решений соответствующих описанным случаям.

Так как все формулы в теоремах 1-3 были выведены для произвольной замены переменных можно её конкретизировать. Сделаем тривиальную замену переменных $Z(x,t)|_{x(\xi,\delta)=\xi,\ t(\xi,\delta)=\delta} \equiv U(\xi,\delta), \quad x(\xi,\delta)=\xi, \quad t(\xi,\delta)=\delta.$

Имеем изоморфизм- решение переходит само в себя, уравнение переходит само в себя, а следовательно вычисленные коэффициенты матрицы A_1 и все ее характеристики приписываются исходному уравнению.

После этого на нескольких десятков известных решениях вышеперечисленных авторов мы вычислили значения собственных чисел и трека матрицы, и обнаружены удивительные закономерности. Полученные совпадение результатов нельзя считать случайностью. Эти факты обобщены в итоговой теореме 5.

Вырожденным случаем будем называть случай, когда все формулы приведенные в теореме 1,-3 выведены для произвольных функций U, Y, T, потом объявляется, что $U(\xi,\delta) = U(\xi + b\delta)$, а затем мы делаем тривиальную замену $x(\xi,\delta) = \xi, t(\xi,\delta) = \delta$. Тогда функция $U(\xi + b\delta)$ удовлетворяет соответствующему ОДУ, а из собственных чисел матрицы $\mathbf{A_1}$ только одно отлично от нуля.

Будем называть "предельным притягивающим " решением $\Omega(x,t)$ неизвестное решение смешанной задачи для уравнения (1), к которому эволюционирует, стремится функция $Z(x,t)$ при определенных граничных условиях в некотором смысле. $Z(x,t)$ есть задачи Коши со специальными начальными данными и краевыми условиями. Решение $\Omega(x,t)$ существует далеко не во всех задачах.

Далее рассмотрим примеры, в которых решение задачи заранее известно.

Вырожденные случаи.

(а) Решение полулинейного уравнения Зельдовича приведено [7],[12]и восходит к работам вышеперечисленных авторов. Здесь

$F(Z) = -Z^2(1-Z), K(Z) = 1$. Это решение задачи Коши со специальными начальными условиями, описывает решение типа бегущей волны,(2-ой случай) для двух независимых переменных и имеет вид

$$Z(x,t) = \left(1 + \exp\left(-t - x\sqrt{2}\right)/2\right)^{-1}, \tag{16}$$

то есть это решение уравнения в частных производных и соответствующего ОДУ.

Положим $x(\xi,\delta) = \xi,\ t(\xi,\delta) = \delta$, - якобиан равен единице.

Поскольку замена тривиальная, дифференциальные связи (4) имеют вид

$Y(\xi,\delta) = {U'}_{\xi}(\xi,\delta),\ T(\xi,\delta) = {U'}_{\delta}(\xi,\delta)$. Уравнение для функции $U(\xi,\delta)$ переходит само в себя и решение (16) переходит само в себя.

Вычисляем собственные числа матрицы $\mathbf{A_1}$. Получим $\lambda_1 = 0$,

$\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0,\ \lambda_4 = \frac{1}{64}\left(sech(\rho/2)\right)^4\left(\sqrt{2} - 4\sinh(\rho/2)\right)$.

Здесь введено обозначение $\rho = \delta + \sqrt{2}\xi$. Модуль $|\lambda_4| < 1$ меньше единицы. Это вырожденный случай, так как ненулевое собственное число только одно. График этой функции при отрицательных значениях переменной ρ положительный и имеет локальный максимум. Затем при некотором значении переменной $\rho = \rho_o > 0$ функция равна нулю, а затем функция принимает отрицательные значения и имеет локальный минимум.

В [3],[12]приведены подробные ссылки на работы Зельдовича Я,Б., Баренблатта Г.И., Либровича В.В., Махвиладзе Г.М. где давно показано, и проверено в данной работе, что если взять (16) при любом значении $t = t_o$ в качестве начального условия, то численное решение эволюционирует к "предельному притягивающему " решению - предельной волне при любом значении x, при $t \to \infty$. Трек матрицы $TrA = \lambda_4$, то есть меняет знак.

Если то же самое повторить для матрицы $\mathbf{A_2}$, то получим четыре собственных числа

$$\left\{-\exp(\rho)/(1+\exp(\rho))^3,\ \ 0, -\exp(\rho)(3+\exp(\rho))/(2\sqrt{2}(1+\exp(\rho)))^3,\ 0\right\}.$$

два отрицательных и два равных нулю.

(b.) Решение уравнения Колмогорова, Петровского, Пискунова, Фишера

$$Z'_t - Z''_{xx} - Z(1-Z) = 0. \tag{17}$$

Здесь $F(Z) = -Z(1-Z), K(Z) = 1$. Формула решения задачи Коши со специальными начальными условиями, описывает решение типа бегущей волны имеет вид

$$Z(x,t) = \left(\exp(5t/6 + x/\sqrt{6})\right) / \left(1 + \exp(5t/6 + x/\sqrt{6})\right)^2. \tag{18}$$

Подробные ссылки приведены в [3]. Таким образом, это решение обыкновенного дифференциального уравнения, здесь введено обозначение

$\rho = 5\delta/6 + \xi/\sqrt{6}\xi$. Сделаем аналогично предыдущему пункте **(a)** тривиальную замену переменных. $Z(x,t)|_{x(\xi,\delta)=\xi,\ t(\xi,\delta)=\delta} = U(\xi,\delta)$.

В вычисляем собственные числа для матрицы $\mathbf{A_1}$ на этом решении. Получим $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$,

$\lambda_4 = \exp(2\rho)\left(6 + 9\exp(\rho) + 5\sqrt{6}\exp(2\rho) - 3\exp(3\rho)\right)/K_1$

$K_1 = (9(1+\exp(\rho))^6)$. Собственное число λ_4 меняет знак и оно меньше нуля при значениях переменной $\rho > \rho_o > 0$. График функции похож не предыдущий случай. Для матрицы $\mathbf{A_2}$ получим такой же результат как в пункте **a**.

Таким образом все вырожденные случаи похожи, когда в задаче существует "предельное притягивающее " решение. Анализ матрицы $\mathbf{A_1}$ проще.

Невырожденные случаи.

Вырожденным случаем будем называть случай когда точное решение удовлетворяет уравнению с частными производными, а собственные числа не нулевые и различны.

Теорема 4

Пусть окончательных формулах теоремы 1,2 сделана тривиальная замена переменных $x(\xi,\delta)=\xi,\ t(\xi,\delta)=\delta$.

Тогда дифференциальные связи (4)имеют вид

$Y(\xi,\delta)=K(U)U'_{\xi}(\xi,\delta),\ T(\xi,\delta)=K(U)U'_{\delta}(\xi,\delta)$. Собственное число $\lambda_2\le 0$ матрицы $\mathbf{A_1}$ при всех значений независимых переменных и имеет вид

$\lambda_2=-K(U)^2[F(U)U'_{\delta}+(U'_{\delta})^2-K'(U)U'_{\delta}(U'_{\xi})^2-K(U)U'_{\xi}U''_{\xi\delta}]^2\le 0.$

□

Доказательство.

Уравнение (1) переходит само в себя

$U'_{\delta}=K'_U(U)(U'_{\xi})^2+K(U)U''_{\xi\xi}-B(U'_{\xi},U,\xi,\delta).$

Таким образом $\lambda_2\le 0$.

Таким образом остается проанализировать одно значение λ_3 и поэтому вариант с матрицей $\mathbf{A_1}$ предпочтительней.

□

(c.) Рассмотрим решение линейного параболического уравнения

$$Z'_{t}-Z''_{xx}+\gamma Z=0. \tag{19}$$

Здесь $B=\gamma Z, K(Z)=1$. Если $\gamma>0$, то такое слагаемое описывает диссипацию переносимой величины.

Если $\gamma<0$, то такое слагаемое описывает источник.

Рассмотрим, например, формула решения задачи Коши в этом случае хорошо известна и имеет вид

$$Z(x,t)=\Big(\exp(-\gamma t)/(2\sqrt{\pi t})\Big)\exp(-x^2/(4t)). \tag{20}$$

В данном случае это функция не является решение типа простой волны, а удовлетворяет уравнению с частными производными.

В данном случае, с нашей точки зрения, роль "предельного притягивающего " решения играет константа тождественно равная нулю. Обычно, в таких задачах другие авторы говорят о растущем или убывающем решении. Существует огромный цикл работ по построению априорных оценок, с целью выявления условий поведения решения. Ссылки на авторов этих работ приведены [3],[12]. В данной работе предпринята попытка альтернативной классификации решений, о чем заявлено в [6],[7]. В данном примере поведение решения очевидно и определяется знаком коэффициента γ.

Посмотрим, что дает вычисление собственных чисел и трека матрица $\mathbf{A_1}$ в данном случае.

Сделаем тривиальную замену переменных как в пункте **a**.

Получим выражения для собственных чисел

$\lambda_1 = \exp(-2\gamma t - x^2/(2t))(2t + 4\gamma t^2 + x^2)/(32\pi t^4)$.

$\lambda_2 = -\exp(-4\gamma t - x^2/t)(2t + 4\gamma t^2 + x^2)^2/(1024\pi^2 t^4)$.

Так как в теореме 4 доказано что собственное число λ_2 матрицы $\mathbf{A_1}$, то остается проанализировать λ_3.

Собственные числа λ_3, λ_4 явно вычисляются, но имеют сложный вид и мы их не приводим.

Обсудим полученный результат при $\gamma > 0$.

Все собственные числа вещественные. Важно, что собственные числа

λ_2, λ_3 отрицательные. Собственные числа λ_1, λ_4 положительные. Трек матрицы меняет знак, то есть на некотором множестве принимает положительные значения, а на дополнении к нему принимает отрицательное значение.

В данном случае, если проводить аналогию с динамическими системами, такая особая точка при фиксированном значении независимых переменных x_o, t_o является сложной и называется устойчивый седло- узел. В данной работе это сложная особая точка параметры которой меняются в некоторой области, а тип точки сохраняется. Решение задачи Коши в случае наличия диссипации "расплывается ", и убывает по амплитуде, то есть притягивается к нулю $Z(x,t) \to 0$ для любого значения x при $t \to \infty$ в некотором смысле.

Таким образом в этом случае условие теоремы 5 выполнены.

Если сменить знак $\gamma < 0$, то оказывается, что собственные числа $\lambda_{3,4}$ определены не при всех значениях независимых переменных. Дискриминант D в этих выражениях отрицательный. Очевидно, что решение в этом случае "отталкивается " от нуля, то есть возрастает, во всех точках x при $t \to \infty$.

Таким образом условия теоремы 5 не выполнены.

Стабилизация решения задачи Коши и краевых задач.

В цикле работ В.Н.Денисова [8] рассмотрены условия стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений с переменными коэффициентами.

Предположим, что в уравнении (1) с переменными коэффициентами присутствует диссипация. Тогда возникает сложная борьба этих двух противоположных причин: диссипация в уравнение и рост начальных данных. Что победит в этой борьбе и установлено в работах В.Н.Денисова. Им получены оценки на рост начальных данных.

Много примеров, которые мы использовали в наших расчетах есть в [12]. Рассмотрим пример 4 на стр.65. Уравнение имеет вид

$$Z'_t - Z''_{xx} + (b\, x^2 + c)Z = 0. \tag{21}$$

При $b > 0, \quad c > 0$ в уравнение присутствует диссипация. Там же приведено решение (21).

$$Z = A\exp[sign(\sqrt{b} - sign\ c)t + sign\ b\ x^2/2] \tag{22}$$

где $sign = \pm 1$, а A, b, c — константы.

Начальные условия следуют из (22), если $t = 0$, то $Z(x,0) = A\exp(sign\ b\ x^2/2)$.

Рассмотрим что дает вычисления собственных чисел.

При $b > 0, \quad sign = -1$ существует область $\omega(x,t)$ такая, что $\lambda_3 \leq 0$ в этой области. Четвертое собственное число $\lambda_4 > 0$. Условия теоремы 5 выполнены и можно говорить об аналогии с теорией динамических систем: формируется особая точка устойчивый седло-узел. Решение притягивается к нулю при больших значениях x, t и стабилизируется.

Аналогично можно рассмотреть стабилизацию решения смешанной задачи с начальными и краевыми условиями первого, второго и третьего рода для линейного параболического уравнения с переменными коэффициентами $K(Z) = 1$. Как показано в [14] на стр.263, [15] начальные данные $u_0(x)$ и краевые данные $\psi(x,t)$ добавляются к функции источника B. А именно новая функция источника имеет вид

$$\tilde{B} = \gamma(x,t)Z - u_0(x)\tilde{\delta(t)} - \psi(x,t), \tag{23}$$

где $\tilde{\delta(t)}$ — функция Дирака.

Эти результаты приведены в [12] и упорядочены в таблице [13] стр.49. При вычислении λ_3 можно взять функцию из дельтаобразной последовательности. Например $\exp(-t^2/\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 1$.

Далее вычисляем собственное значение на известных решениях или можно пытаться пытаемся оценить собственное число $\lambda_3 \leq 0$ и найти условия на рост начальных данных и краевых условий когда условия теоремы

5 выполнены. Перспективы здесь есть. Заметим, что из условия $\lambda_3 \leq 0$ следует неравенство $M^2 \leq D$ и $\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(Z'_t/Z'_x)\right) \geq 0$. Далее надо использовать уравнение (1), где $K(Z) = 1$, (23) и проводить более тонкий анализ.

(**d**.) Приведем пример решения полулинейного уравнения Зельдовича, которое найдено в [4]. Уравнение (1) в этом случае имеет вид

$$Z'_t - Z''_{xx} - Z^2(1 - Z) = 0. \tag{24}$$

Здесь $F(Z) = -Z^2(1 - Z), K(Z) = 1$. Формула решения задачи Коши со специальными начальными условиями имеет вид

$$Z(x,t) = \left(2\exp(t/2) - 2\exp(x/\sqrt{2})\right)/K_2, \tag{25}$$

где $K_2 = 2\exp(t/2) + \exp(x/\sqrt{2})(-2 + 2t + x\sqrt{2})$. Это функция не является решение типа простой волны, а удовлетворяет уравнению с частными производными. Численные исследования показывают, что функция (25) стремятся к "предельному, притягивающему" решению. Посмотрим, что дает вычисление собственных чисел в данном случае.

Сделаем как и выше тривиальную замену переменных. Все собственные числа $\mathbf{A_1}$ вещественные. Собственные числа вычисляются, $\lambda_1 > 0$, а $\lambda_2 \leq 0, \lambda_3 \leq 0$ отрицательные. Трек матрицы меняет знак.

Анализ матрицы $\mathbf{A_2}$ аналогичные результаты, но анализ более сложный. Объем статьи не дает возможность привести другие примеры.

Далее сформулирована теорема об эволюции решения уравнения с частными производными к "предельному притягивающему" решению.

Предлагаем называть "предельным притягивающим" решением $\Omega(x,t)$ неизвестное решение смешанной задачи (со специальными начальными и граничными условиями) квазилинейного параболического уравнения (1).

В теореме 5 мы не пишем норму, так как переход от произвольного решения задачи к "предельному притягивающему" решению в каждой конкретной задаче надо понимать по-своему. В каждой задаче есть предположение в каких функциональных пространствах существует решение.

Теорема 5

Пусть $\Omega(x,t)$ неизвестное решение квазилинейного параболического уравнения (1) является "предельным притягивающим" решением, может быть и тождественным нулем. Пусть собственные числа $\mathbf{A_1}$ определены в теореме 2.

а. В вырожденном случае функция $Z(x,t) = Z(x+bt)$ удовлетворяет квазилинейному уравнению в частных производных (1) и соответствующему ОДУ. С необходимостью выполнены условия: дискриминант $D \geq 0$, три собственных числа равны нулю, а одно собственное число отлично от нуля $\lambda = TrA \leq 0$ в некоторой области $\omega(x,t) \subset R^2$.

б. В невырожденном случае с необходимостью выполнено условие: собственное число матрицы A_1, $\lambda_2 \leq 0$, и существует область $\omega(x,t) \subset R^2$ такая, в которой дискриминант $D \geq 0$, и собственное число $\lambda_3 \leq 0$, при любом t в указанной области. Трек матрицы TrA меняет знак в области определения.

Тогда выполнено: $Z_1(x,t) \to \Omega(x,t)$ для любого значения x, при $t \to \infty$, где $Z_1(x,t)$ решение смешанной задачи с начальными и краевыми условиями соответствующим одному из трех случаев (выделенных в начале параграфа) для уравнения (1) стремится к "предельному притягивающему" решению в некотором смысле определенном в каждой конкретной задаче. $\square$

Подобную теорему можно сформулировать для случая многих независимых переменных при некоторых дополнительных предположениях. Теорема 5 сформулирована для не локализованных решений.

Расчеты выполненные на известных локализованных решениях взятых их работ вышеперечисленных авторов показывают, что условия теоремы верны внутри области локализации. Анализ растущих и обостряющихся решений, показывают, что условия теоремы 5 нарушаются.

Ясно, что теория применима к широкому классу уравнений и систем.

Авторы выражает благодарность В.П.Маслову, В.В.Пухначеву, М.В.Карасеву, С.Ю.Доброхотову, В.Г.Данилову, Ю.П.Власову, Е.М.Воробьеву, А.С.Братусю, В.В. Жикову, А.А. Давыдову, В.Н. Денисову, А.П. Чупахину за полезные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1.Волосов К.А. Метод построения решений квазилинейных параболических уравнений в параметрической форме. Изд.С-Петербургский педагогический университет., Материалы научной конфер. Герценовские чтения,(17-22 04.2006), С-Петербург,2006 с.35-40.

2. Волосов К.А. Российский гос. Педагогический университет А.И.Герцена. Фундаментальная библиотека имени императрицы Марии Федоровны. Научный журнал "Известия Российского гос. Пед. унив. А.И. Герцена"2007, N 7, (26) Естественные и точные науки с.13-20. http:// lib.herzen.spb.ru/ page154a.asp?s=11

3. Волосов К.А. Дис. на соискание уч.ст. д.ф-м.н.,"Методика анализа эволюционных систем с распределенными параметрами 2007,М.: МИЭМ.

4. Волосов К.А. Формулы для точных решений квазилинейных уравнений с частными производными в неявной форме. Доклады АН 2008,т.77, н.1,С.1-4. Eng. transl. in Dokludy Akademii Nauk. 2008, V.418, No.1, pp.11-14.

5. Волосов К.А. Конструирование решений квазилинейных уравнений с частными производными. Сибирский журнал индустриальной математики 2008,т.11, н.2(34),С.29-39.Eng. transl.in J. of Applied and Industrial Math.2009, V.3,No.4,pp.519-527.

6. Волосова А.К., Волосов К.А. Конструирование решений уравнений с частными производными. Международный журнал Математики и Математических наук. International Journal of Mathematics and Mathematical Sgiences. V.2009,Article ID, 319268,17 p.

7. Волосов К.А., Вдовина Е.К., Волосова А.К. Построение точных решений квазилинейных параболических уравнений методом нефиксированной конструктивной замены переменных. М.:МИИТ, 2010.

8. Денисов В.Н. О стабилизации решений задачи Коши линейных параболических уравнений с растущими младшими коэффициентами. Доклады РАН, 2010, Т. 430, N 5, С.586-588

9. Мартинсон Л.К. Исследование математической модели процесса нелинейной теплопроводности в средах с объемным поглащением. с.279–309. Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. Под редакцией Самарского А.А., Галактионова В.А., Курдюмова С.П. Сборник статей. М.:Наука,1986.

10. В.И.Арнольд.Что такое математика. М.,Изд.МЦНМО,2008.

11. Волосов К.А., Федотов И.А. Асимптотическое представление решения квазилинейного параболического уравнения в окрестности фронта. ЖВМ и МФ,1983.,Т.5, N 5,С.93-104.

12. Полянин А.Д., Вязьмин А.В., Журов А.И., Казенин Д.А. Справочник по точным решениям уравнений тепломассапереноса. М.: Факториал,1998.

13. Полянин А.Д. Справочник. Линейные уравнения математической физики. М.:Физматлит. 2001.

14. Владимиров В.С. Уравнения математической физики.М.Наука.1971

15. Бабич В.М., Капелевич М.Б., Михлин С.Б. и др. Линейные уравнения математической физики. М.:Наука. 1964.