Экспоненциальная неустойчивость в обратной задаче Гельфанда-Кальдерона

М.И. Исаев, МФТИ(ГУ)

научный руководитель: Р.Г. Новиков

Содержание

Введение, постановка задачи.

Рассмотрим уравнение

$$-\Delta u + q(x)u = 0 \ \text{ для } x \in \Omega, \tag{1}$$

где

- Ω — открытая связная область в $\mathbb{R}^d$,
- $d \geq 2$,
- $\partial\Omega \in C^2$,
- $q \in L^\infty(\Omega)$.

Определим оператор* $\boldsymbol{\Lambda_q}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{\Lambda_q(u|_{\partial\Omega}) = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega}.}$$

Здесь предполагаем, что

$\mathbf{0}$ не является собственным значением для $\boldsymbol{-\Delta + q}$ в $\boldsymbol{\Omega}$.

* Этот оператор называется Dirichlet to Neumann map.

Введение, постановка задачи.

Задача.

- Задан* оператор Λ_q.
- Требуется восстановить q.

* например, считаем известным его ядро.

Введение, постановка задачи.

Задача может быть рассмотрена как:

- частный случай обратной задачи Гельфанда для уравнения Шредингера с нулевой энергией,
- обобщение задачи Кальдерона в electrical impedance tomography.

Введение, постановка задачи.

Уравнение выглядит следующим образом:

$$div(\sigma(x)\nabla v) = 0 \text{ для } x \in \Omega.$$

Требуется восстановить $\sigma(x)$ при известном операторе* $\tilde{\Lambda}_\sigma$

$$\tilde{\Lambda}_\sigma(v|_{\partial\Omega}) = \sigma\frac{\partial v}{\partial\nu}|_{\partial\Omega}.$$

* Этот оператор называется voltage to current map.

Введение, постановка задачи.

Задача сводится к (1) следующим образом:

- $q(x) = (\sigma(x))^{-1/2}\Delta(\sigma(x))^{1/2}, \ x \in \Omega,$
- $\Lambda_q = \sigma^{-1/2}\Big(\tilde{\Lambda}_\sigma \sigma^{-1/2} + \frac{\partial \sigma^{1/2}}{\partial \nu}\Big).$

Ранее полученные результаты.

1. Единственность.
   - J.Sylvester and G.Uhlmann, 1987.
   - R.G.Novikov, 1988.
2. Восстановление.
   - R.G.Novikov, 1988.
3. Устойчивость.
   - G.Alessandrini, 1988.

Для размерности $d = 2$:

- A.Nachman, 1995.
- A.L.Bukhgeim, 2008.

Ранее полученные результаты.

Теорема 1.

При выполненных условиях задачи (1) а также при

- $d \geq 3$, $m > 0$ и $M > 0$,
- $||q_i||_{C^m} \leq M$, $i = 1, 2$,
- $\alpha = (m - d)/m$

существует такая константа $C = C(M, \Omega, m)$, что

$$||q_1 - q_2||_\infty \leq C\Big(\log(1 + ||\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}||^{-1}_{H^{1/2} \to H^{-1/2}})\Big)^{-\alpha}.$$

Недостаток этой оценки в том, что $\alpha < 1$ даже для очень больших m.

Ранее полученные результаты.

- R.G.Novikov, 2010.

  Оценка остается верной для $\boldsymbol{\alpha = m - d}$.

- N.Mandache, 2001.

  Оценка не верна при $\boldsymbol{\alpha > 2m - m/d}$.

Ранее полученные результаты.

Здесь и далее зафиксируем $\Omega = B(0,1)$.

Теорема 2.

- Для любого $m > 0$, любой размерности $d \geq 2$ и любого $s \geq 0$
- существует константа $\beta > 0$ такая, что для любого $\epsilon \in (0,1)$
- найдутся потенциалы $q_1, q_2 \in C^m$ с носителем, принадлежащим $B(0,1/2)$:

$$||q_1 - q_2||_\infty \geq \left(\log(1 + ||\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}||^{*-1}) \log\log(1 + ||\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}||^{-1})\right)^{-m},$$

$$||q_i||_{C^m} \leq \beta, \quad i = 1,2,$$

$$||q_i||_\infty \leq \epsilon, \quad i = 1,2.$$

* Имеется ввиду $||\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}|| = ||\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}||_{H^{-s} \to H^s}$.

Вспомогательные утверждения.

Пусть f_{jp} — ортонормированный базис в $L^2(S^{d-1}) = L^2(\partial\Omega)$:

- f_{jp} - сферические гармоники степени j,
- $0 \leq j; 1 \leq p \leq p_j$
- $p_j = C_{j+d-1}^{d-1} - C_{j+d-3}^{d-1}$.

Для оператора $A : L^2(S^{d-1}) \to L^2(S^{d-1})$ обозначим матрицу компонент в базисе (f_{jp}):

$$a_{jpkq} = \langle Af_{jp}, f_{kq} \rangle .$$

Вспомогательные утверждения.

Лемма 1.

Оператор $\boldsymbol{A : L^2(S^{d-1}) \to L^2(S^{d-1})}$, коммутирующий с поворотами, имеет матрицу компонент $\boldsymbol{a_{jpkq} = a_j \delta_{jk} \delta_{pq}}$.

Вспомогательные утверждения.

Идея доказательства:

1. $K_A(x,y) = F(dist(x,y))$.
2. $F(dist(x,e_d)) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} f_m(x)$, причем f_m:
   - сферическая гармоника степени m,
   - функция от $dist(x,e_d)$,
   - четная или нечетная, в зависимости от m.
3. $F(dist(x,e_d)) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m P_m(dist(x,e_d))$.
4. $A = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m \Pi_m$.

Здесь Π_m и P_m — проектор и его ядро на пространство сферических гармоник степени m.

Вспомогательные утверждения.

Лемма 2.

Обозначим $\Gamma(q) = \Lambda_q - \Lambda_0$.

- Пусть $r_0 \in (0, 1)$,
- q ограничена и $supp q \subset B(0, r_0)$,
- 0 не является собственным значением $-\Delta + q$.

Тогда существует константа $\rho = \rho(r_0, d)$ такая, что:

$$|\langle \Gamma(q) f_{jp}, f_{kq} \rangle| \le \rho\, r_0^{\max(j,k)} ||q||_\infty ||(-\Delta + q)^{-1}||_{L^2}$$

для любых $0 \le j, 1 \le p \le p_j$ и $0 \le k, 1 \le q \le p_k$.

В дальнейшем мы будем использовать $\rho = \rho(1/2, d)$.

Идея доказательства:

1. u — решение задачи (1) с краевым условием f_{jp}
$$u_0(r,\omega) = r^j f_{jp}(\omega).$$
2. Так как $(-\Delta + q)(u - u_0) = -qu_0$ в Ω, получаем:
$$u - u_0 = -(-\Delta + q)^{-1} q u_0.$$
3. $v = u - u_0$ — гармоническая в $\Omega \setminus B(0, r_0)$ и равна 0 на $\partial\Omega$.
$$\left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \rho ||v||_{L^2(r_0<|x|<1)}.$$
4. Учитывая $\Gamma(q) f_{jp} = \frac{\partial v}{\partial \nu}|_{\partial\Omega}$ и $\Lambda_q^* = \Lambda_{\bar{q}}$, получаем искомое.

Построение ϵ-дискретного множества и δ-сети.

Лемма 3.

Пусть $d \geq 2$ и $m > 0$. Для $\epsilon, \beta > 0$ рассмотрим метрическое пространство:

$$X_{m\epsilon\beta} = \{f \in C_0^m(B(0,1/2)) : f = f(r), ||f||_\infty \leq \epsilon, ||f||_{C^m} \leq \beta\}$$

с метрикой, индуцированной из L^∞. Тогда существует μ такое, что для произвольного $\beta > 0$ и $\epsilon \in (0, \mu\beta)$ существует ϵ-дискретное множество $Z \subset X_{m\epsilon\beta}$ с по крайней мере $\exp\left(\frac{1}{4}(\mu\beta/\epsilon)^{1/m}\right)$ элементами.

Частный случай результатов A.N.Kolmogorov, V.M.Tikhomirov, 1959.

Построение ϵ-дискретного множества и δ-сети.

Идея доказательства:

1. Пусть $\psi = \psi(r)$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ с носителем в $B(0, 1/2) \setminus B(0, 1/4)$ и $||\psi||_\infty = 1$.
2. Положим $\mu = \frac{1}{||\psi||_{C^m}}$ и обозначим $N = \left[\left(\frac{\mu\beta}{\epsilon} \right)^{1/m} \right]$.
3. Функция $\psi_j = \epsilon\psi(Nr - j/2)$ имеет носитель в $B(0, \frac{j+1}{2N}) \setminus B(0, \frac{j}{2N})$.
4. $Z = \left\{ \sum\limits_{j=0}^{N-1} \sigma_j \psi_j \;\middle|\; \psi(x) = 0 \text{ для } x < 0 \text{ и } \sigma_j \in \{0, 1\} \text{ для любого } j \right\}$.

Построение ϵ-дискретного множества и δ-сети.

Определим банахово пространство

$$X_s = \{(a_{jpkq}) \mid \sup_{j,p,k,q} (1+\max(j,k))^{2s+d}|a_{jpkq}| < \infty\},$$

$$||(a_{jpkq})||_{X_s} = \sup_{j,p,k,q} (1+\max(j,k))^{2s+d}|a_{jpkq}|.$$

Рассмотрим оператор $A : H^{-s}(S^{d-1}) \to H^s(S^{d-1})$. Тогда:

$$||A||_{H^{-s}\to H^s} \leq 4||(a_{jpkq})||_{X_s}.$$

Построение ϵ-дискретного множества и δ-сети.

Обозначим B^∞ шар с центром в 0 и радиусом 2 в $L^\infty(B(0,1/2))$. Подмножество B^∞ функций f таких, что $f = f(r)$ обозначим B^∞_r.

Лемма 4.

- Γ отображает B^∞_r в X_s для любого $s \geq 0$.
- Существует $0 < \eta = \eta(s,d)$ такое, что для любого $\delta \in (0, e^{-1})$ существует δ-сеть Y для $\Gamma(B^\infty_r)$ в X_s с не более чем $\exp(\eta \log \delta^{-1} \log\log \delta^{-1})$ элементами.

Напоминаем, что $\Gamma(q) = \Lambda_q - \Lambda_0$.

Построение ϵ-дискретного множества и δ-сети.

Доказательство первой части.

1. Для $q \in B_r^\infty$ имеем $||q||_\infty \leq 2$ поэтому:
$$||(-\Delta + q)^{-1}||_{L^2} \leq (\lambda_{\min} - 2)^{-1}.$$
2. $\lambda_{\min}$ возрастает с повышением размерности, а при $d = 2$ $\lambda_{\min} \approx 5.78$, следовательно:
$$||q||_\infty ||(-\Delta + q)^{-1}||_{L^2} \leq 1.$$
3. Воспользовавшись Леммой 2, получим:
$$|a_{jpkq}| \leq \rho\, 2^{-\max(j,k)},$$
$$||a_{jpkq}||_{X_s} \leq \sup_l (1 + l)^{2s+d} \rho\, 2^{-l} < \infty.$$

Построение ϵ-дискретного множества и δ-сети.

Доказательство второй части.

1. Обозначим $l_{\delta s}$ наименьшее натуральное число такое, что $(1+l)^{2s+d}\rho\,2^{-l} \le \delta$ для любого $l \ge l_{\delta s}$.

$$l_{\delta s} \le C \log \delta^{-1}.$$

2. Для $l \le l_{\delta s}$ обозначим $\delta_l = (1+l)^{-2s-d}\delta$ и рассмотрим множество

$$Y_l := \delta_l \mathbb{Z} \bigcap [-\rho\,2^{-l}, \rho\,2^{-l}].$$

3. Рассмотрим

$$Y = \left\{ (a_{jpkq}) \mid a_{jpkq} = a_l \in Y_l \text{ для } j = k = l \le l_{\delta s} \text{ и } p = q \right\}.$$

Построение ϵ-дискретного множества и δ-сети.

Теорема 2.

- Для любого $m > 0$, любой размерности $d \geq 2$ и любого $s \geq 0$
- существует константа $\beta > 0$ такая, что для любого $\epsilon \in (0, 1)$
- найдутся потенциалы $q_1, q_2 \in C^m$ с носителем, принадлежащим $B(0, 1/2)$:

$$||q_1 - q_2||_\infty \geq \Big(\log(1 + ||\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}||^{*-1}) \log\log(1 + ||\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}||^{-1}) \Big)^{-m},$$

$$||q_i||_{C^m} \leq \beta, \quad i = 1, 2$$

$$||q_i||_\infty \leq \epsilon. \quad i = 1, 2.$$

* Имеется ввиду $||\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}|| = ||\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}||_{H^{-s} \to H^s}$.

Построение ϵ-дискретного множества и δ-сети.

Идея доказательства:

1. Воспользуемся Леммой 3 и Леммой 4 и предположим $|Z| > |Y|$.
2. Тогда найдутся два потенциала q_1 и q_2 такие, что их образы под действием Γ лежат в одном X_s-шаре радиуса δ с центром в точке из |Y|. Имеем:

$$||\Lambda_{q_1} - \Lambda_{q_2}||_{H^{-s}\to H^s} \leq 4||\Gamma(q_1) - \Gamma(q_2)||_{X_s} \leq 8\delta.$$

3. Подходящим образом выбирая параметры β и δ, получаем искомое.

Пример для комплексного потенциала.

Рассмотрим цилиндрические координаты (r_1, θ, x'):

- $x' = (x3, \dots, x_d)$,
- $r_1 \cos\theta = x_1$,
- $r_1 \sin\theta = x_2$.

Возьмем $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ с носителем в $B(0, 1/2) \cap \{x_1 > 1/4\}$ и $||\phi||_\infty = 1$.

Пример для комплексного потенциала.

Теорема 3.

Для $m > 0$ и $n > 0$ определим:

$$q_{mn}(x) = n^{-m} e^{in\theta} \phi(r_1, |x'|).$$

Тогда $||q_{mn}||_\infty = n^{-m}$ и для любых d и m существуют константы $c, c' > 0$ такие, что $||q_{mn}||_{C^m} \leq c$ и $||\Lambda_{q_{mn}} - \Lambda_0||_{L^2} \leq c' 2^{-n/2}$.

Основная идея состоит в том, что:

$$\langle (\Lambda_{q_{mn}} - \Lambda_0) f_{jp}, f_{kq} \rangle = 0 \text{ для } j, k < n/2.$$

Заключение.

Спасибо за внимание!

G.Alessandrini, *Stable determination of conductivity by boundary measurements*, Appl.Anal. 27 (1988) 153-172.

G.Alessandrini, *Singular solutions of elliptic equations and the determination of conductivity by boundary measurements* J. Diff. Eq. 84(1990) 252–72

I.M.Gelfand, *Some problems of functional analysis and algebra*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam, 1954, pp.253-276.

Niculae Mandache, *Exponential instability in an inverse problem for the Schrödinger equation* Inverse Problems. 17(2001) 1435–1444.

R.G.Novikov, *Multidimensional inverse spectral problem for the equation* $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$ Funkt. Anal. Prilozhen. 22(1988) 11–22 (in Russian) (Engl. Transl. Funct. Anal. Appl. 22(1988) 263–72).

R.G.Novikov, *New global stability estimates for the Gel'fand-Calderon inverse problem*

L.D. Faddeev, *Increasing solutions of the Schrödinger equation* Dokl. Akad. Nauk SSSR 165(1965) 514–17 (in Russian) (Engl. Transl. Sov. Phys.–Dokl. 10(1966) 1033–5).

A.P.Calderon *On an inverse boundary value problem Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics* (Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemr̛atica)(1980) pp 65–73.

J.Sylvester and G.Uhlmann, *A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem* Ann. Math. 125(1987) 153–69.

J.Sylvester and G.Uhlmann, *Inverse boundary value problems at the boundary—continuous dependence* Commun. Pure Appl. Math. 41(1988) 197–221.

R.Beals and R.R.Coifman, *Multidimensional inverse scattering and nonlinear differential equations* Proc. Symp. Pure Math. 43(1985) 45–70.

L. Liu , *Stability estimates for the two-dimensional inverse conductivity problem* PhD Thesis Department of Mathematics, University of Rochester, New York(1997)

A.Nachman, *Global uniqueness for a two-dimensional inverse boundary value problem* Ann. Math. 142(1995) 71–96.

A.N. Kolmogorov,V.M. Tikhomirov *e-entropy and e-capacity in functional spaces* Usp. Mat. Nauk 14(1959) 3–86 (in Russian) (Engl. Transl. Am. Math. Soc. Transl. 17 (1961) 277–364)