

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ
(МИИТ),

кафедра « "Прикладная математика-1»>

К.А.Волосов, Е.К.Вдовина

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО И ЧЕТВЕРТОГО
ПОРЯДКОВ

Учебное пособие - 2012

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Математическое моделирование «эффекта» остановки спиральных волн	31
1.1 Введение к главе	31
1.2 Спиральные структуры в модели ФитцХью - Нагумо (ФХН)	36
1.3 Влияние диффузии в модели ФХН	56
1.4 Сильная нелинейность. Модель гомогенной кинетики свертывания крови	65
Глава 2. Феноменологическая модель свёртывания крови	85
2.1 Постановка и описание задачи	85
2.2 Эффект остановки спиральной структуры	96
Глава 3. Е.К.Волосова. Оптимальное «тактическое» управление портфелем в модели линейного стохастического рынка.	107
3.1 Постановка задачи для уравнения Колмогорова- Фоккера-Планка с начальным гауссовским распределением.	107
3.2 Вычисление условного математического ожидания и условной дисперсии в задаче о портфеле из двух активов	129

3.3 Задача с двумя активами при равномерном распределении начальных данных	140
3.4 Постановка задачи о портфеле с двумя активами	151
3.5 Вычисление стратегий инвестирования и сравнение их со стратегией Белецкого - Плиски.	155
 Глава 4. А.К. Волосова., А.С. Братусь. Модель нелинейной динамики открытого гиперцикла	 167
4.1 Модель Эйгена и конкуренция циклов	167
4.2 Влияние коэффициента диффузии и эффект «локального вращения»	170

Введение

Профессор, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой «Математический анализ» Московского технического университета связи и информатики В.Г. Данилов написал небольшое введение.

В СССР большое внимание уделялось математическому образованию молодого поколения. Выходило большими тиражами большое количество книг по численным методам, и они были доступны по цене и распространялись по всей территории страны. Однако начиная с 1991 года наиболее способные, одаренные молодые люди начали уходить в экономические и юридические специальности. Уровень их математических знаний соответствует 7-9 классу общеобразовательного школьного курса. Понятна их полная беспомощность в анализе глобальных экономических процессов. В настоящее кризисное время они берутся за любую работу

и заполняют очереди на бирже труда. Ухудшение жизненного уровня населения, старение кадров преподавателей в школах и вузах, «утечка мозгов» специалистов за рубеж и т.д. привело к значительному ухудшению математического образования и общей культуры населения. Уезжали, по различным мотивам, в основном представители различных диаспор за «запахом гамбургеров» – люди не имеющие глубоких корней в России. В настоящее время большинство студентов не могут, из-за отсутствия знаний, читать и понимать литературу по методам вычислений. Статистика запросов этих книг в библиотеке МИИТ свидетельство этому. Разнообразная математическая литература передается на кафедры или уничтожается как в средневековье. Книги Г.М.Фихтенгольца и других классиков по которым училось наше поколение просто потеряны для современного студента. В этом есть и часть нашей вины. Одной из причин является отсутствие требования (а не мягкая рекомендация) преподавателя взять конкретную книгу и изучить в ней конкретную главу, разобрать определенную тему. В оправдание этого, можно сказать, что и

ранее читать такую литературу было трудно в силу ряда психологических причин. Трудность самого предмета и необходимости большого объема самостоятельной практической работы для овладения и истинного понимания численных методов приводила к «отторжению» предмета. В настоящее время ситуация близка к катастрофической. В силу отсутствия достаточного количества преподавательских кадров (дорабатывается старый советский ресурс) и в среде преподавателей слышны голоса о том, что «численные методы» не нужны и можно обойтись импортными программами (Mathcad, Matlab, Mathematica ...) во всех случаях жизни. Однако, это после окончания мирового кризиса, приведет к глобальному отставанию страны, провалу в средневековье, как это видно на примере многих стран Азии и Африки, не обладающих своей базой электроники, техники и кадрами вычислителей-программистов. Хорошая, конкурентоспособная программа не может быть написана без эффективного алгоритма, без понимания математики. Начали появляться работы и программы, в которых новые авторы заново пытаются (доморощен-

ным способом) обойти те проблемы, которые были грамотно решены 40 – 60 лет назад. В силу изложенных причин необходимо новое пособие, которое в легкой, доступной форме знакомило бы студентов с лучшими достижениями отечественной научной мысли, которыми можно гордиться. В пособии изложена только малая часть обширного материала, без освоения которого не возможно освоить следующий более сложный материал. Используя психологический прием «подстройка под партнера», автор пытался подобрать нужные, понятные молодежи слова и изложить материал в «дружественной форме» специальным образом. При этом авторы руководствовались программой, составленной лауреатом Нобелевской, государственных премий СССР, активным участником реализации атомного проекта в СССР, академиком многих академий Л.Д.Ландау, который эффективно применял принципы научного программирования еще шестьдесят лет тому назад. Он писал «Мне не хочется дискутировать с достойной средневековой схоластики мыслью, что путем изучения ненужных (скучных и занудных) вещей люди будто бы на-

учатся мыслить логически. Я категорически считаю, что из математики изучаемой (инженерами) должны быть полностью изгнаны всякие (громоздкие) теоремы существования, слишком строгие (затянутые, и много уровневые) доказательства и т.д.»... «Вам никогда не тронуть ничьей души, если ваша речь скучна и сера. Убив в своей душе огнедышащее слово, вы замуруете ее. Глядя на унылые (сонные) физиономии своих слушателей, вы забудете радость жизни (радость преподавания и общения с молодым поколением)».

Как пишет, профессор А. Мигдал «Россия больна, но отнюдь не мертва. Она пережила куда более худший период кризиса после революции, когда лучшие мозги бежали из страны... Здесь что-то такое носится в воздухе, что порождает новые научные таланты и, вопреки всем препятствиям, побуждают их к развитию».

Российская наука, в конце концов, расцветет, ибо для этого у нее имеются и таланты, и склонности, и предыстория и традиции.

«Считаю пособие полезным, и оно должно быть опубликовано» - выразил свое мнение В.Г. Данилов.

После этого введения известного ученого перейдем к излагаемому материалу.

Математическое моделирование имеет большое значение в передовых странах в настоящее время, в связи с бурным развитием вычислительной техники и численных методов. Появилась возможность проводить анализ задач большой размерности. Однако, для этого необходимо привлекать большие вычислительные и материальные ресурсы. Это одна из причин по которой построение точных решений остается актуальной проблемой.

В подавляющем большинстве случаев, как заметил В. Ф. Зайцев [13], не исследователи «управляют методом», а метод «управляет исследователями», то есть существует возможность получения решения не всегда именно той задачи, которую хотелось бы решить, а той задачи, которая может быть решена данным методом. В групповых методах можно найти множество точных решений и выбрать то, что больше всего «подходит» в данной конкретной задаче. Как правило, для полного решения сложной задачи симметрий не хватает.

Использование точного решения позволяет облегчить анализ и последующее моделирование и исследование задачи на компьютере, что значительно уменьшит число вариантов. Таким образом, теоретический анализ, сочетание точных или приближенных методов, остается основным инструментом исследования во всех областях приложений: реальных физических явлений и систем, биологических и экономических моделей.

Таким образом, несмотря на то что компьютеры становятся более быстрыми и дешевыми, надо ещё и ещё раз продумать постановку задачи и провести предварительное аналитическое исследование. Эта тема затронута и в главе 3.

В пособии приведены модели из разных актуальных областей человеческой деятельности. Всех их объединяет, то что они связаны с системами дифференциальных уравнений с частными производными (УсЧП). Известно, что системы УсЧП это форма записи нелинейных уравнений высокого порядка с ЧП. Проблемы свёртывания крови актуальна для всех людей в любом возрасте. Изучение и математическое моделирование этого

процесса даст еще одну крупицу новых знаний в копилку человечества.

Другая актуальная проблема рассмотренная в третьей главе. Это задача, исследованная Е.К.Волосовой, относится к моделированию в экономике. Алгоритм построения стратегии «тактического» оптимального управления портфелем ценных бумаг в модели стохастического рынка Т.Р.Белецкого, С.Р.Плиски - важная в приложении задача. Диссертации по математическому моделированию всегда были образцом для обучения и подражания молодого поколения. Поэтому становится важным исправить грубые ошибки (не описки) в [30] и восстановить авторитет математических исследований. Мы сформулировали вопросы к автору [30] и послали ей по электронной почте. Но в ответ получили только наспех переделанную, с некоторыми исправленными ошибками, версию диссертации. Но та версия диссертации, которая была представлена к защите и изучалась оппонентами уже депонирована в Международном центре по информатике и электронике и выставлена в библиотеках страны. Кроме того, она широко разрекламиро-

вана в Интернете.

Математическое моделирование самосборки и эволюции макро биологических молекул построено на базе модели открытого гиперцикла Эйгена проведено А.К. Волосовой под руководством А.С.Братуся (гл.4). Материал любезно предоставлен нам для ознакомления с ним студентов.

В истории науки в России выражение "дифференциальная связь" впервые использовал Мещерский И.В. в 1887 году. Его работа «Дифференциальные связи в случае одной материальной точки» опубликована в журнале "Сообщения Харьковского Математического Общества". В двадцатом веке интерес к «дифференциальным связям» возобновился после ряда работ Яненко Н.Н. [16] и позже книга его учеников Сидорова А.Ф., Шапеева В.П.

Все рассмотренные в пособии задачи объединяются наличием ряда общих черт и общим взглядом на построение решений, как традиционными точными и асимптотическими методами, так и недавно появившимся методом, который базируются на некотором интерес-

ном свойстве дифференциальных уравнений с частными производными, замеченном К. А. Волосовым в [4]–[6]. Первая публикация по этой теме была в 1994 году. См. историю вопроса в [11]-[12]. Этот метод позволяет выявлять сложные дифференциальные связи существующие «внутри» задачи. В каждой задаче, используются свои конкретные дифференциальные связи, и метод нефиксированной конструктивной замены переменных (МНФКЗП), кроме употребления этого термина, не имеет с работами Яненко Н.Н. никакого пересечения. Ранее многие думали, что они знают все о методе замены переменных.

Именные нелинейные уравнения, такие как уравнение Кортвега де Вриза, уравнение пограничного слоя Прандтля, уравнение ФитцХью - Нагумо (ФХН), уравнение Колмогорова - Фоккера - Планка, и другие уравнения с частными производными третьего и четвертого уравнения, можно записать в матричном виде - как систему линейных функциональных уравнений (СФЛАУ) относительно некоторых функций. Сопутствующая матрица для уравнения с частными производными впер-

вые построена в [5]-[7]. Вычислены собственные числа сопутствующей матрицы в символьном виде. Показано, что есть связь этих собственных чисел с характером эволюции решения. Эта связь для квазилинейных параболических уравнений указана в работах [5], [8],[11], [12].

Если найдутся люди, которые считают, что этот факт был недостаточно строго доказан, то авторы могут сделать ссылку на следующее высказывание. Как сказал заведующий кафедрой прикладной математики 1 МИИТ профессор А. С. Братусь: «*Если бы люди ждали, когда математики строго докажут свои теоремы существования решения, то водопровода сегодня бы не было.*»

Можно привести другой поучительный пример из прошлого [38]: Оливер Хевисайд в последней четверти 19 века предложил революционный символический метод решения дифференциальных уравнений путем замены оператора дифференцирования d/dt умножением на символ оператора дифференцирования - параметр r . О. Хевисайд опередил свое время. Переход к пере-

менной r позволяет заменить дифференциальное уравнение алгебраическим. Эта методика была подвергнута беспощадной критике математиками¹, имен которых сейчас никто и не помнит. А ответ О. Хевисайда известен: « *Должен ли я отказаться от своего обеда, если не до конца понимаю процесс пищеварения?* » Прошло время, математики (П.С.Лаплас) «подтянули» теорию, и операционный метод занял свое достойное место в математике. Академик В.И. Арнольд писал ([10], с.12) об «эпонимическом принципе», который состоит в том, что *если какой-либо объект* (непример, метод Лапласа) *носит чье-то имя*, то это - *не имя первооткрывателя*.

Отметим, что полный объем вычислений, проведенный автором в рамках метода *нефиксированной конструктивной замены переменных* (МНЕФКЗП), довольно значительный с точки зрения человека, который полагает, что сто строчек выкладок это много. Объем набора данных (файла) условий разрешимости, напри-

¹Во все времена находятся люди которые «кичатся, через мерно гордятся» своими знаниями, вместо того чтобы постараться передать их молодежи. Для этого надо приложить усилия, применить знания психологии обучаемых. Обругать и разогнать «буратин» это самое простое.

мер, оценивается в 2 МБ. Анализ файлов такого объема, как показал старший из авторов, дает возможность получить качественно новые результаты. Эффективными средствами работы с ними в настоящем являются системы символьного программирования «Mathematica», а в будущем — системы *символьного параллельного* программирования.

Обращаясь к историческим аналогиям, можно вспомнить случай с Алексисом Клодом Клеро, который проделал громоздкие по тем временам выкладки и получил новые результаты [38]. Леонард Эйлер по этому поводу писал: « *В этом вопросе у г. Клеро, пожалуй, не было сильнее противника, чем я. Хотя я и был в этом вопросе предшественником г. Клеро, у меня не хватило терпения пуститься в столь пространные вычисления.* »

Далее я хочу поделиться своими воспоминаниями о беседах с выдающимся ученым, академиком РАН В.И.Арнольдом в июле 2008 на конференции, в городе Суздале. Он был очень заинтересован результатами работы [4] и рекомендовал применить метод МНФКЗП к

проблемам которые связаны с уравнениями Колмогорова–Фоккера–Планка (КФП), Кортевега де Бриза и т.д. Его мнение коротко можно сформулировать так: «Исследование ободряю. Я всегда примерно так и думал, но не знал, что можно написать точные формулы...» Он перечислил те проблемы, к которым следует применить метод и новую технику. Это получилась целая программа.

Обсуждая вопрос о происхождении математики на заседании Французского математического общества, В.И.Арнольд сказал: «... математика — это часть физики, являющаяся, как и физика, экспериментальной наукой: разница только в том, что в физике эксперименты стоят обычно миллионы долларов, а в математике — единицы рублей.» [10], с.10.

Здесь можно только добавить, с нашей точки зрения, что стоимость математического эксперимента значительно выше, чем это оценил он.

Во-первых, нужна идея, которая приходит в голову далеко не каждому.

Во-вторых, нужно много труда и усидчивости для доведения нетривиальных расчетов до логического конца.

В-третьих, нужно осознать и обобщить результаты примеров и понять, что речь идет не об ошибках вычисления, а о математической закономерности, математическом открытии.

Еще нужно иметь крепкую нервную систему, чтобы довести до коллег полученные результаты.

В качестве образца для подражания приведем исторический пример научной смелости Э.Лоренца, выбравшего простейшую модель — систему всего трех ОДУ, просчитавшего её на компьютере и сумевшего понять, что он имеет дело не с ошибками вычислений, а с математическим открытием [38], с.209. Так в математике появилось понятие *аттрактор Лоренца*.

В 1986 году К.А. Волосов помогал редактировать академику СССР В.П. Маслову книгу [23]. Эта эпопея была школой обучения науке и жизни. Особенностью работы с Виктором Павловичем было то, что он умел создать в маленьком коллективе творческую, напря-

женную обстановку конкуренции за математический результат. Его харизматическая личность, талант преподавателя заключается в умении поставить ученика в такое положение, что он как спортсмен— прыгун «выскакивал, лез из кожи» и показывал результат, который в обычных условиях не мог бы быть получен. Громким, командирским, хорошо поставленным голосом он требовал кратко и четко отвечать на поставленные вопросы: «Отвечайте только да или нет». В целом его метод простой: «Внимательно рассматривайте формулы, проверяйте все возможные боковые варианты...»

В редактируемую книгу [23] входила его статья с В.П. Белавкиным. Идея этой статьи привела в дальнейшем к развитию идемпотентного анализа в работах В.П. Маслова с другими учениками. Для студентов МИИТ, которым не читают курса «общей алгебры » простыми словами эту идею можно объяснить так: Можно подобрать такие операции на «кольцах—математических объектах с определенным набором аксиом», что некоторые нелинейные дискретные уравнения Гамильтона— Якоби—Беллмана обладают относитель-

но этих операций теми же свойствами, что и линейные уравнения.

Далее старший автор начал поиски аналогов задач в теории уравнений с частными производными, в которых можно реализовать аналогичную идею. В математике, как в каждом из аспектов жизни, есть понятие «красоты», гармонии. Это как чувство юмора, как красивая шахматная партия — объяснить словами очень трудно. Если личность развита, то она понимает о чем идет речь. Просто считать допускаемые данным уравнением стандартные группы преобразований скучно. Такая работа - как ремесло. Другое дело, найти что-то новое - «изюминку», удивиться, получить удовольствие от результата. *Если уравнения становятся линейными, то задача становится проще. Можно построить решение, затем можно попытаться удовлетворить краевым и начальным условия.*

А.С.Братусь предложил постановки ряда задач оптимального управления. Старший автор их изучил и отобрал такую задачу в которой решение уравнения Гамильтона– Якоби–Беллмана выражается через реше-

ние линейной задачи. Нелинейная краевая задача заменой переменных была приведена к задаче для линейного параболического уравнения. Это отражено в цикле работ [39].

Поставленный вопрос можно отнести и к рассмотренным задачам. Результаты поиска замены переменных, позволяющие построить точное и асимптотическое решение исходной задачи, приведены в пособии.

Многие сотни авторов строили решение задач о фазовом переходе, плавлении, кристаллизации, задаче Стефана с подвижной границей и т.д. Только малое количество ссылок на такие работы есть в [15],[23]. Однако в живой природе есть еще один переход от жидкой фазы к твердому веществу- это процесс свёртывания крови. Этот процесс широко распространен, касается каждого и изучается в главе 1 [1]-[3]. Известен также цикл работ А.А.Самарского, С.П. Курдюмова с сотрудниками об «обострении» решений нелинейных параболических уравнений. Ссылки на ряд работ по этой теме приведены в [15]. Введен даже термин «blow-up» означающий, что решения уравнения нелинейного параболического

неограниченно возрастает. Но в более точных моделях свертывания крови показано [1]-[3], что природе «blow-up» не неужен и ей достаточно, чтобы функция увеличилась на несколько порядков, на некоторое время.

В главе 4 изложено исследование А.К. Волосовой под руководством А.С. Братуся. Она построила структуры спиральных волн, которые существуют в распределенной системе открытого гиперцикла [7]. Был объяснен эффект локального «коллективного вращения» в системе с множеством ведущих центров.

Все пособие пронизано идеей метода МНФКЗП и поэтому в заключение приведем отзыв заведующего кафедрой прикладной математики Московского государственного института электроники и математики, лауреат Государственной премии России, д.ф.-м.н., профессор Карасева М.В. к диссертации [4] К. А. Волосова. Этот текст вносит определенную ясность в процедуру построения решения.

«В диссертации [4] собран ряд интересных решений и целых классов решений (точных и асимптотических) для нелинейных дифференциальных уравнений с част-

ными производными второго порядка, важных в приложениях. Эти решения были получены К.А. Волосовым более, чем за 20 лет. Можно было бы подробно обсудить их одно за другим. Еще можно было бы высказать замечания о некоторых местах текста диссертации с точки зрения отсутствия ясности изложения. Но цель данного отзыва - обратить внимание на метод, изложенный в главе 1 диссертации.

В теории нелинейных дифференциальных уравнений иногда успешно срабатывает прием, когда данное уравнение неким преобразованием (скажем, заменой переменных) сводится к другому уравнению, решение которого уже известно. Таким образом, это известное решение генерирует достаточно нетривиальное решение исходного уравнения. В подходе Волосова предлагается априори не фиксировать вид замены переменных, оставив его на первом шаге произвольным. Получившаяся в итоге, после замены переменных, система содержит как искомую вектор-функцию (искомое решение и его производные), так и неизвестное координатное преобразование (матрицу Якоби замены переменных). Ко-

личество уравнений в этой системе всегда меньше количества неизвестных, что открывает возможности для построения решения с помощью введения тех или иных связей между компонентами искомой вектор-функции.

Ограничение на выбор связей заключается в том, что после их введения уравнения на функции координатной замены должны быть совместными. Условие совместности – это условие на оставшиеся независимые компоненты искомой вектор-функции.

Например, в классическом случае, для дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, искомая вектор-функция имеет три компоненты, координатная замена содержит еще две функции, и все они вместе подчинены четырем дифференциальным уравнениям первого порядка. Оказывается, из этих уравнений все элементы 2×2 матрицы Якоби координатной замены *удается явно* выразить через компоненты искомой вектор-функции. На данном этапе здесь нет необходимости вводить дополнительные связи. Далее, полученная формула для матрицы Якоби рассматривается как система уравнений первого поряд-

ка относительно двух функций координатной замены, и записывается условие совместности этой системы. Оно сводится всего к одному уравнению, но содержит три компоненты искомой вектор-функции. В итоге, появляется большая свобода для удовлетворения условию совместности. Здесь уже полезно вводить связи, что позволяет во многих случаях свести условие совместности к обыкновенному дифференциальному уравнению или даже явно разрешить. После этого нужно вернуться к построению координатной замены, т.е., к интегрированию упомянутой системы первого порядка, но теперь уже с известной правой частью. В той степени насколько это интегрирование можно выполнить явно в квадратурах, в той же степени удается построить явное решение исходного нелинейного уравнения с частными производными.

Этот алгоритм не привязан ни к каким групповым или симметрийным свойствам. Предлагаемое преобразование нелинейных дифференциальных уравнений со многими переменными и механизм интегрирования имеют общую природу. При этом коэффициенты и вид нели-

нейностей в решаемом уравнении не конкретизируются, а остаются общими функциями.

Нужно заметить, что К.А. Волосов смог найти этот новый метод только благодаря наблюдательности, умению внимательно "рассматривать" формулы в примерах и применению компьютерной техники. Сначала был изучен известный пример решения квазилинейного параболического уравнения Зельдовича-Компанейца, а затем результат был обобщен на все виды уравнений с частными производными. Получить окончательные ключевые теоремы 1.2.1 – 1.2.3 гл. 1 без использования компьютера было бы очень не просто, и даже вообще, - проблематично, поскольку никто не взялся бы за такой большой ручной счет просто по причине неуверенности получения в конце какого-либо результата. Работа Волосова в этом плане исключительная.

Конечно, после того как с помощью вычислительной техники получены основные формулы, задающие решение в символьной форме, их в принципе уже можно «проверить» дедовским методом, т.е., вручную, проводя довольно длинные (на несколько страниц) алгебра-

ические выкладки. Я не поленился выполнить такую ручную проверку для класса нелинейных параболических уравнений с двумя независимыми переменными, рассмотренного в разделе 1.2 диссертации, и явно убедился в том, что рожденные на компьютере и весьма сложные формулы К.А. Волосова дают точные решения для этого важного класса нелинейных дифференциальных уравнений математической физики.

В заключение - комментарий о названии диссертации, где использован редко встречающийся в математических текстах термин «методика». Для всех привычней звучал бы термин «метод» или «методы». С другой стороны, древнегреческое по своему происхождению слово «методика», если отвлечься от его дидактического и бюрократического значения, изначально имеет несколько иной, расширительный, обобщающий оттенок, и сродни слову «технология». С этих позиций такой термин вполне применим к данной диссертации, содержащей не только конкретные классы новых решений, но и новую концептуальную «технологическую» идею.

Эта работа открывает очень интересное направление в целом ряде областей математики и ее приложений, имеющих дело с нелинейными уравнениями с частными производными высокого порядка.»

Глава 1. Математическое моделирование «эффекта» остановки спиральных волн

1.1. Введение к главе

Замечательной способностью биологических систем является их способность к самоорганизации, то есть к спонтанному образованию и эволюции сложных упорядоченных структур. Поскольку эти системы обмениваются веществом и энергией с окружающей средой и являются открытыми, то здесь нет противоречий с законами термодинамики. Анализ модели автоволн «реакции - диффузии » ФитцХью - Нагумо (ФХН) рассмотрен в [1] в случае одной пространственной переменной. В этой работе приведены результаты численных расчета импульсов возникающих в такой модели в различных ситуациях. Попытки анализа подобных моделей ФХН предпринимались и ранее многими авторами. Подробные ссылки на их статьи приведены в цитируемых работах. Подробный анализ моделей по математическому моделированию пространственной динамики процесса свертывания крови проводился в [2]-[3].

Эффект остановки спиральной волны впервые обнаружен при численном моделировании процесса в [2].

Некоторые авторы писали, что нет метода, а также и возможности построить точные решения, описывающие спиральные волны в элементарных функциях. Высказывалось также мнение, что используя численные методы можно получить любые эффекты, включая эффекты, которые описываются с привлечением аппарата обобщенных функций. Покажем, что существует семейство точных решений, которое содержит элементарные функции с малыми параметрами.

В данной работе рассмотрены три модели. Модель ФХН имеет полиномиальную нелинейность. Самая сложная и сильная нелинейность, с нашей точки зрения, присутствует в модели гомогенной кинетики свертывания крови, и наконец рассмотрена феноменологическая модель свертывания крови. Модель ФХН является «жесткой», с общепринятым сочетанием больших и малых параметров, которая описывает «жесткие» эффекты и тонкие пограничные слои. Рассмотрена сверх «жесткая» модель гомогенной кинетики свертывания

крови, исследование которой подтверждают её удивительные свойства. Фактически построено точное (!) решение которое описывает переход от биологической жидкости к твердому тромбу. Хотя в этой модели нет традиционного фронта раздела разных фаз. Изучение свойств построенных ниже точных формул говорит о том, что название работы [1] полностью оправдано и имеет дополнительный смысл вложенный в него авторами нашей работы.

Точное решение позволяет выяснить зависимость его поведения и его свойств от параметров задачи, проанализировать качественные эффекты, связанные с «жесткостью» задачи. В функции решения существуют малые в некоторых областях слагаемые, которыми нельзя пренебречь. Эти же слагаемые в других областях - тонких пограничных слоях- становятся большими и определяющими. Более того, при численном интегрировании, именно это малое слагаемое диктует величину малого шага сетки. Это необходимо для того, чтобы это малое слагаемое вне пограничного слоя было аппроксимировано достаточно точно. Поэтому для того

чтобы получить аналогичные данные используя численные методы требуется значительные затраты труда и ресурсов. Одно точное решение позволяет получить информации больше, чем десятки вариантов численных расчетов. Анализ большого числа численных расчетов человеком также становится проблемой. Таким образом, перевес в пользу точных решений увеличивается с увеличением числа переменных, нелинейности и сложности задачи. Убедиться в этом может каждый внимательно рассматривая рисунки приведенные в работе. По нелинейности и экспоненциальному слагаемому в точном решении можно вычислить величину шага сетки и зависимость его от параметров задачи. Отметим, что вопрос о сложности построения точных решений системы реакция - диффузия в многомерном случае с разными коэффициентами диффузии ставился в [8] Р.М. Чернигой.

Сделаем следующее, важное для математического моделирования во всех областях приложений, замечание.

Замечание 1.2.1. На сайте eqwold.ipmnet.ru (Мир дифференциальных уравнений) в разделе «*Типичные*

ошибки при построении точных решений » приведена подборка статей академика Н.А.Кудряшова в которых обсуждается следующий вопрос. Там сказано: « В последние годы в научных журналах (в том числе и весьма авторитетных) появилось большое количество статей, содержащих ошибки при построении «новых» точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. Часто ошибки связаны с «*тупым* » использованием популярных программ аналитических вычислений Maple и Mathematica, которые часто выдают большой список точных решений. Многие авторы при этом наивно полагают, что таким образом они получают новые решения. Однако детальный анализ этих решений показывает, что многие из них эквивалентны и сводятся к одному и тому же хорошо известному решению. Нередко встречаются «*новые* » решения, которые просто не удовлетворяют рассматриваемому уравнению (авторы делают много громоздких промежуточных выкладок и забывают после этого сделать прямую проверку). » Мы полностью поддерживаем данное высказывание и можем добавить, что указанная причина при-

водит к «открытию новых эффектов». В главе 3 развенчан один из таких эффектов. В нашей данной работе результирующие формулы проверяются старым «дедовским» способом- вручную на бумаге. Этот вопрос авторы обсуждали с Н.А.Кудряшовым на конференции в Суздале в июле 2012.

Замечание 1.2.2. На одном из докладов старшего автора результатов работ [8]-[11] на конференции в Суздале в 2006 году известный специалист по дифференциальным уравнениям с частными производными профессор В.В.Жиков задал вопрос: «Можно ли методом нефиксированной конструктивной замены (МНФКЗП) переменных строить решения эллиптических уравнений?» В данной главе получен положительный ответ на этот вопрос.

1.2. Спиральные структуры в модели ФитцХью - Нагумо (Φ ХН)

Как принято при моделировании, чтобы описать основное явление, абстрагируемся от мелких, не существенных деталей. Будем считать, что модельная сре-

да состоит из двух химических компонент, называемых активатором и ингибитором, свободно диффундирующими в двухмерном пространстве. Система уравнений модели ФХН в случае двух пространственных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} Q'_t - d \Delta Q + Q(Q-1)(Q-n) + S &= 0, \\ S'_t - d \Delta S - \varepsilon(Q-a)S + b &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $a, n, \varepsilon, d, d_1, b$ константы модели. Предполагаем, что $S(t, x, y), Q(t, x, y)$ -дважды непрерывно дифференцируемые функции независимых переменных. Δ -оператор Лапласа.

Предполагается, что уравнения (1.1) рассматриваются в некоторой выпуклой области на границе $r \gg \rho_0$ которой ставится краевое условие второго рода (условие Неймана) для обоих функций. Здесь ρ_0 характерный размер задачи.

Фактически процедура построения решения протекает следующим образом. Проводится в два этапа замена переменных, функций и производных. Строится некоторое точное решение, а затем проводим анализ по

критериям:

а) Удовлетворяются ли краевые условия второго рода (условия Неймана) при больших значениях радиуса, большего чем характерный размер ρ_0 ? Имеется в виду условие равенства нулю производной функции по радиусу при радиусе $r > \rho_0$.

в) Не являются ли построенное решение тривиальным, то есть соответствующим простым группам преобразований, которое можно построить классическим групповым анализом?

с) Удовлетворяет ли построенное решение требованиям специалистов, авторов цитируемых работ?

Если эти условия выполнены, то следует уделить им внимание, в противном случае их надо отбросить и искаать другие решения.

Модель из двух нелинейных параболических уравнений (1.1) перепишем в системе координат χ, θ связанной с медленно вращающейся полярной системой координат r, φ

$$Q(t, x, y) = U(\chi, \theta), \quad S(t, x, y) = V(\chi, \theta), \quad \text{где } \chi = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \varphi - \omega t = \arctan(y/x) - \omega t.$$

$$\begin{aligned}
& -\omega \exp(2 \chi) U'_{\theta} - d \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} U(\chi, \theta) + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} U(\chi, \theta) \right) + \\
& + \exp(2 \chi) U (U - 1)(U - n) + \exp(2 \chi) V = 0, \\
& -\omega \exp(2 \chi) V'_{\theta} - d \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} V(\chi, \theta) + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} V(\chi, \theta) \right) + \\
& + \exp(2 \chi) \varepsilon (b + U - a V) = 0. \tag{1.2}
\end{aligned}$$

Оператор Лапласа в переменных χ, θ , например, примененный к функции $V(\chi, \theta)$ имеет вид

$$\Delta V(\chi, \theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} V(\chi, \theta) + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} V(\chi, \theta) \right) \exp(-2 \chi).$$

Для построения точного решения используется метод нефиксированной конструктивной замены переменных (МНФКЗП) предложенный в [4]-[7]. Это способ позволяет найти «дифференциальные связи», которые следуют из внутренней структуры уравнений и на их базе можно построить решение в неявной, параметрической форме. Имеется много исторических примеров, когда одно точное решение открывало целую область новых математических работ. Так было с теорией солитонов и обратной задачей рассеяния, теорией «обостряющихся» локализованных решений и т.д. Смотри введение в [4], [7] и [15].

Делаем «плавающую», нефиксированную конструк-

тивную замену переменных (МНФКЗП)

$$U(\chi, \theta)|_{\theta=\theta(\xi, \delta), \chi=\chi(\xi, \delta)} = P(\xi, \delta), \\ V(\chi, \theta)|_{\theta=\theta(\xi, \delta), \chi=\chi(\xi, \delta)} = W(\xi, \delta). \quad (1.3)$$

Введены «дифференциальные связи» [4]–[7]

$$\frac{\partial U}{\partial \chi}|_{\chi=\chi(\xi, \delta), \theta=\theta(\xi, \delta)} = Y(\xi, \delta), \quad \frac{\partial U}{\partial \theta}|_{\chi=\chi(\xi, \delta), \theta=\theta(\xi, \delta)} = T(\xi, \delta), \\ \frac{\partial V}{\partial \chi}|_{\chi=\chi(\xi, \delta), \theta=\theta(\xi, \delta)} = R(\xi, \delta), \quad \frac{\partial V}{\partial \theta}|_{\chi=\chi(\xi, \delta), \theta=\theta(\xi, \delta)} = B(\xi, \delta). \quad (1.4)$$

Существует решение построенное МНФКЗП, которое приведем в теореме

Теорема 1.2.1.

Пусть дана система (1.2) для функций

$$P(\xi, \delta)|_{\xi=\xi(\chi, \theta), \delta=\delta(\chi, \theta)} = U(\chi, \theta)|_{\chi=\ln \sqrt{x^2+y^2}, \theta=\arctan(y/x)-\omega t} = \\ = Q(t, x, y), \quad W(\xi, \delta)|_{\xi=\xi(\chi, \theta), \delta=\delta(\chi, \theta)} = \\ = V(\chi, \theta)|_{\chi=\ln \sqrt{x^2+y^2}, \theta=\arctan(y/x)-\omega t} = S(t, x, y), \quad (1.5)$$

и даны функции $B(\xi, \delta) = \xi + C_1 P(\xi, \delta)$, $R(\xi, \delta) = \xi$.

Тогда существует точное решение, где функция $V(\chi, \theta)$ определена в неявной, параметрической форме равенством:

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} A_0(\xi) + A_1(\xi) V + A_2(\xi) V^2 + A_3 V^3 = 0, \quad (1.6)$$

$$\varepsilon \partial e \quad \xi = [1/(2 \Phi_2)] * [\Sigma_1 \mp$$

$$\mp \sqrt{[\Sigma_1^2 - 4 [C_1^2 (b-a V(\chi, \theta))^2 \varepsilon^2 - \exp(\Phi_1)] \Phi_2]} \quad],$$

$$\Sigma_1 = 2C_1(b-a V(\chi, \theta)) \varepsilon^2,$$

$$\Phi_1 = 2 a C_1 \varepsilon (\varepsilon \theta - \varepsilon \chi + C_1 \theta \omega) / \Phi_2,$$

$$\Phi_2 = 2 \varepsilon^2 + 2 C_1 \varepsilon \omega + C_1^2 \omega^2,$$

Все функции $A_j, j = 0, 3$ явно вычислены

$$A_0(\xi) = g_0 + g_1(\xi) \omega + g_2(\xi) \omega^2 + g_3(\xi) \omega^3 + g_4(\xi) \omega^4 + g_5(\xi) \omega^5,$$

$$g_0 = -2 b \varepsilon^5 [1+b] [b+n],$$

$$g_1(\xi) = -2 b C_1 \varepsilon^4 [2 b + b^2 + 3 n + 2 b n - a \varepsilon] -$$

$$-2 \varepsilon^4 \xi (2 b + 3 b^2 + n + 2 b n + a \varepsilon),$$

$$g_2(\xi) = -b C_1^2 \varepsilon^3 [3 b + b^2 + 7 n + 3 b n - 5 a \varepsilon] -$$

$$-2 C_1 \varepsilon^3 \xi [4b + 3b + 3n + 4bn + 2 a \varepsilon] - 2 [1 + 3 b + n] \varepsilon^3 \xi^2,$$

$$g_3(\xi) = -b C_1^3 \varepsilon^2 [b + 4 n + b n - 4 a \varepsilon] - C_1^2 \varepsilon^2 \xi [6 b +$$

$$+ 3 b^2 + 7 n + 6 b n + a \varepsilon] - 2 C_1 \varepsilon^2 \xi^2 [2 + 3b + 2n] - 2 \varepsilon^2 \xi^3,$$

$$g_4(\xi) = b C_1^4 \varepsilon [a \varepsilon - n] - 2 C_1^3 \varepsilon \xi [b + 2 n + b n - a \varepsilon] -$$

$$-3 C_1^2 \varepsilon \xi^2 [1 + b + n] - 2 C_1 \varepsilon \xi^3,$$

$$g_5(\xi) = C_1^4 [a \varepsilon - n] \xi - C_1^3 [1 + n] \xi - C_1^2 \xi^3,$$

$$A_1(\xi) = h_0 + h_1(\xi) \omega + h_2(\xi) \omega^2 + h_3(\xi) \omega^3 + h_4(\xi) \omega^4 + C_1^5 \omega^5,$$

$$h_0 = 2 \varepsilon^5 [1 + 2 a b + 3 a b^2 + a n + 2 a b n],$$

$$h_1(\xi) = 2 C_1 \varepsilon^4 [4 + 4 a b + 3 a b^2 + 3 a n + 4 a b n - a^2 \varepsilon] +$$

$$+ 4 a \varepsilon^4 \xi (1 + 3b + n),$$

$$\begin{aligned}
h_2(\xi) = & \ C_1^2 \ \varepsilon^3 [13 + 6 \ a \ b + 3 \ a \ b^2 + 7a \ n + 6 \ a \ b \ n - \\
& - 5a^2\varepsilon] + 4 \ a \ C_1 \varepsilon^3 \xi (2 + 3b + 2n) + 6 \ a \ C_1 \ \varepsilon^3 \ \xi^2, \\
h_3(\xi) = & \ C_1^3 \ \varepsilon^2 [11 + 2 \ a \ b + 4 \ a \ n + 2 \ a \ b \ n - 4a^2\varepsilon] + \\
& + 6 \ a \ C_1^2 \varepsilon^2 \xi (1 + b + n) + 6 \ a \ C_1 \ \varepsilon^2 \ \xi^2, \\
h_4(\xi) = & \ C_1^4 \ \varepsilon [5 + a \ n - a^2\varepsilon] + 2 \ a \ C_1^3 \varepsilon \xi (1 + n) + 3 \ a \ C_1^2 \ \varepsilon \ \xi^2, \\
A_2(\xi) = & \mu_0 + \mu_1(\xi) \ \omega + \mu_2(\xi) \ \omega^2 + \mu_3(\xi) \ \omega^3, \\
\mu_0 = & -2 \ a^2 \ \varepsilon^5 (1 + 3 \ b + n), \\
\mu_1(\xi) = & -2 \ a^2 \ \varepsilon^4 (2 \ C_1 + 3 \ b \ C_1 + 2 \ C_1 \ n + 3 \ \xi), \\
\mu_2(\xi) = & -3 \ a^2 \ C_1 \ \varepsilon^3 (C_1 + b \ C_1 + C_1 \ n + 2 \ \xi), \\
\mu_3(\xi) = & -a^2 \ C_1^2 \ \varepsilon^2 (C_1 + C_1 \ n + 3 \ \xi), \\
A_3 = & a^3 \ \varepsilon^3 (2 \ \varepsilon^2 + 2 \ C_1 \ \varepsilon \ \omega + C_1^2 \ \omega^2),
\end{aligned}$$

Функция $U(\chi, \theta)$ определяется явно

$$U(\chi, \theta) = [-b \ \varepsilon + \xi \ \omega + a \ \varepsilon \ V(\chi, \theta)] / [\varepsilon + C_1 \ \omega]. \quad (1.7)$$

Здесь C_1 – константа.

Доказательство. Как известно, произведение матрицы на обратную матрицу равно единичной матрице. Расписывая это произведение по элементам для матрицы Якоби, получим формулы пересчёта производных

старых переменных χ, θ по новым ξ, δ

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta}{\partial \theta} &= \frac{\partial \chi}{\partial \xi} / \det J, & \frac{\partial \delta}{\partial \chi} &= -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \det J, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \theta} &= -\frac{\partial \chi}{\partial \delta} / \det J, & \frac{\partial \xi}{\partial \chi} &= \frac{\partial \theta}{\partial \delta} / \det J.\end{aligned}\quad (1.8)$$

После преобразований аналогичных [4]–[7] получим

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \delta} - \frac{\partial P}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) &= Y(\xi, \delta) [\chi'_\xi \theta'_\delta - \theta'_\xi \chi'_\delta], \\ \left(-\frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \delta} + \frac{\partial P}{\partial \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) &= T(\xi, \delta) [\chi'_\xi \theta'_\delta - \theta'_\xi \chi'_\delta],\end{aligned}\quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \delta} - \frac{\partial W}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) &= R(\xi, \delta) \det J, \\ \left(-\frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \delta} + \frac{\partial W}{\partial \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) &= B(\xi, \delta) \det J.\end{aligned}\quad (1.10)$$

Первое уравнение системы (1.2) принимает вид

$$\begin{aligned}&\exp(2\chi) P [P - 1] [P - n] - \exp(2 \chi(\xi, \delta)) \omega T + \\ &+ d \left(-\frac{\partial T}{\partial \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \delta} + \frac{\partial Y}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \delta} \right) / \det J + \\ &+ \exp(2 \chi(\xi, \delta)) W = 0.\end{aligned}\quad (1.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\det J &= \chi'_\xi \theta'_\delta - \theta'_\xi \chi'_\delta = \\ &= -(\varepsilon + C_1 \omega)(2\varepsilon^2 + 2C_1 \varepsilon \omega + C_1^2 \omega^2) W'_\delta / (a C_1 \varepsilon Z_1), \\ Z_1 &= b^2 C_1^2 \varepsilon^2 - 2 b C_1 \varepsilon^2 \xi + \xi^2 \Phi_2 + 2a C_1 \varepsilon^2 (\xi - b C_1) W(\xi, \delta) + \\ &+ a^2 C_1^2 \varepsilon^2 W^2.\end{aligned}$$

Второе уравнение системы (1.2) имеет вид

$$\varepsilon (a W(\xi, \delta) - b - P(\xi, \delta)) \exp(2 \chi(\xi, \delta)) - \exp(2 \chi) \omega B + \\ + d \left(-\frac{\partial B}{\partial \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \delta} + \frac{\partial R}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial R}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \delta} \right) / \det J = 0. \quad (1.12)$$

Далее с необходимостью, системы уравнения дополняются двумя условиями равенства смешанных производных в переменных ξ, δ :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} U'_{\chi} = \frac{\partial}{\partial \chi} U'_{\theta}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} V'_{\chi} = \frac{\partial}{\partial \chi} V'_{\theta}. \quad (1.13)$$

Их можно записать в виде

$$-\frac{\partial \chi}{\partial \delta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \delta} - \frac{\partial \theta}{\partial \delta} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \delta} = 0, \quad (1.14)$$

$$-\frac{\partial \chi}{\partial \delta} \frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial R}{\partial \delta} - \frac{\partial \theta}{\partial \delta} \frac{\partial B}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial B}{\partial \delta} = 0. \quad (1.15)$$

Здесь не будем повторять всю схему построения решения МНФКЗП подробно. Коротко укажем, что из четырех уравнений (1.9),(1.11),(1.14) строим систему функциональных линейных алгебраических уравнений
(СФЛАУ) $A_1 X = b_1$. Доказательство того факта, что система уравнений аналогичная (1.9),(1.11),(1.14) приводится к СФЛАУ относительно переменных

$X = \left(\frac{\partial \chi}{\partial \xi}, \frac{\partial \chi}{\partial \delta}, \frac{\partial \theta}{\partial \xi}, \frac{\partial \theta}{\partial \delta} \right)$ проведенное в [4]–[7] лежит в основе метода МНФКЗП. Из четырех уравнений (1.10),

(1.12),(1.15) строим вторую СФЛАУ $A_2 X = b_2$. Матрицы $A_i, i = 1, 2$ названы в [5],[7] «сопутствующими» матрицами для уравнений (1.2) соответственно. Решение обоих систем естественно, должно быть одним и тем же.

Доказательство того факта, что система (1.9),(1.11), (1.14) приводится к линейной было проведено в [4]–[7]. Здесь учитывается тот факт, что уравнение (1.14) является линейным относительно этих переменных. Из трех уравнений (1.9),(1.11), проводя исключение нелинейных слагаемых, можно получить два линейных по указанным переменным. Можно выразить любые три производные, например, $\chi'_\xi, \chi'_\delta, \theta'_\xi$, через одну из них θ'_δ . Эти производные можно подставить в любое уравнение системы (1.9), (1.11), (1.14) и также можно получить линейное уравнение или тождество. Это новое, ранее незамеченное, свойство уравнений с частными производными позволяет строить точные решения. В настоящее время СФЛАУ решается в системе «Mathematica» за одну минуту в символьном виде.

Мы выяснили, что в зависимости от порядка при-

менения МНФКЗП сначала к первому или второму уравнению системы (1.2) можно получить то или иное решение. В данном примере предлагаем поиск решения начинать с анализа системы которая следует из второго уравнения (1.2), то есть из системы (1.10),(1.12),(1.15). Последовательность шагов алгоритма следующая. Сначала решаем СЛАУ, которая следует из (1.10),(1.12),(1.15).

Замечание 1.2.3. Анализ общего случая является громоздким и не всегда возможен. Опыт применения метода МНФКЗП позволяет сделать устраивающие предположения и построить конкретного представителя семейства точных решений.

Положим $B(\xi, \delta) = \xi + C_1 P(\xi, \delta)$, $R(\xi, \delta) = \xi$.

Затем в числителе правых частей построенных решений приравниваем к нулю коэффициент при $\exp(2\chi(\xi, \delta))$. Интересно отметить, что этот коэффициент в числителе правых частей всех четырех решений χ'_ξ , χ'_δ , θ'_ξ , θ'_δ один и тот же. Из равенства нулю коэффициента находим $P(\xi, \delta) = [-b\varepsilon + \xi\omega + a\varepsilon W(\xi, \delta)]/[\varepsilon + C_1\omega]$. Отсюда, в силу (1.3), следует (1.7). Далее после вычисления производных и подстановки этих выражений в решение

СЛАУ получим теорему.

Теорема 1.2.2.

Пусть дана система уравнений первого порядка с частными производными (1.10), (1.12), (1.15), эквивалентная второму уравнению с частными производными второго порядка (1.1) и (1.2).

Пусть выполнено соотношение

$$P(\xi, \delta) = [-b \varepsilon + \xi \omega + a \varepsilon W(\xi, \delta)] / [\varepsilon + C_1 \omega].$$

Тогда система (1.10), (1.12), (1.15) приводится к СФЛАУ $A_2 X = b_2$, которое имеет единственное решение

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi} = g_1(\xi, \delta), \quad \frac{\partial \chi}{\partial \delta} = g_2(\xi, \delta), \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = g_3, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \delta} = g_4. \quad (1.16)$$

Это новая система уравнений с частными производными первого порядка с формально «известной» правой частью, где

$$\begin{aligned} g_1(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} [(b C_1 - \xi) \Phi_2 - a C_1 \Phi_2 W(\xi, \delta) + \\ &+ a C_1^2 (b \varepsilon^2 + 2 \varepsilon \xi \omega + C_1 \xi \omega^2 - a \varepsilon^2 W) W'_{\xi}] / (a C_1 Z_1), \\ g_2(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} C_1 (b \varepsilon^2 + 2 \varepsilon \xi \omega + C_1 \xi \omega^2 - a \varepsilon^2 W) W'_{\delta} / Z_1, \\ g_3(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon + C_1 \omega) [\xi \Phi_2 + a C_1 \varepsilon^2 (-b C_1 + 2 \xi + \\ &+ a C_1 W) W'_{\xi}] / (a C_1 \varepsilon Z_1), \end{aligned}$$

$$g_4(\xi, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon(\varepsilon + C_1\omega)(2\xi - bC_1 + aC_1W)W'^\delta/Z_1. \quad (1.17)$$

Здесь через $Z_1(\xi, \delta)$) обозначен знаменатель выражение которого приведено ниже (1.11).

□

Доказательство. Новая система дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными, с формально «известными» правыми частями (1.16) записывается явно. Условия разрешимости системы (1.16) давно известны, это два равенства смешанных производных $\chi''_{\xi \delta} = \chi''_{\delta \xi}$, $\theta''_{\xi \delta} = \theta''_{\delta \xi}$. Их анализу в [4]-[7]делено много внимания. В данном случае (1.16),(1.17) условие разрешимости выполнено. В этом можно убедиться проводя непосредственные вычисления.

Интегралы системы (1.16), (1.17) имеют вид

$$\begin{aligned} \theta &= C_\theta + (2aC_1\varepsilon)^{-1}[(\varepsilon + C_1\omega) \ln(Z_1) + \\ &+ 2\varepsilon \arctan[\varepsilon(\xi - bC_1 + aC_1V)/(\xi(\varepsilon + C_1\omega))]], \\ \chi &= C_r + [-\varepsilon \ln(Z_1) + 2(\varepsilon + C_1\omega)* \\ &* \arctan[\varepsilon(\xi - bC_1 + aC_1V)/(\xi(\varepsilon + C_1\omega))]] (2aC_1\varepsilon)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Вычитая интегралы и полагая, для простоты, равными нулю константы сдвига C_θ , C_r , возвращаемся в исходные переменные θ , χ . Тогда можно получить квадратное уравнение $\Phi_2 \xi^2 - 2 C_1 \varepsilon^2 (b - a V) \xi + [C^2_1 (b - a V(\chi, \theta))^2 \varepsilon^2 - \exp(\Phi_1)] = 0$.

Отсюда следует выражение для ξ приведенное в теореме 1.2 (1.6).

Зададим значения констант из работы [1] $C_1 = 1$,
 $\varepsilon = 0.001$, $a = 4$, $b = -0.55$, $n = 0.4$.

Остальные константы можно задавать произвольно. Фактически в теореме 1.2.1 описаны два семейства решений. Одно из них соответствует знаку плюс перед квадратным корнем в выражении для ξ в (1.6), а второе семейство соответствует знаку минус перед квадратным корнем в выражении для ξ в (1.6).

Графики построенные ниже по формулам теоремы 1.2.1 со знаком минус перед квадратным корнем в выражении для ξ в (1.6) Рис.1.2.

Из (1.9) получим выражения для $Y(\xi, \delta)$, $T(\xi, \delta)$.

$$Y(\xi, \delta) = a \varepsilon [\xi \Phi_2 + C_1^2 \varepsilon \omega (a W - b)] / ((\varepsilon + C_1 \omega) \Phi_2),$$

$$T(\xi, \delta) = a \varepsilon [\xi (2 \varepsilon^2 - C_1^2 \omega^2) + C_1 \varepsilon (2 \varepsilon + C_1 \omega) *]$$

$$*(a \ W - b)]/((\varepsilon + C_1\omega) \ \Phi_2).$$

Вычисляем производные этих функций и подставляем в (1.11). Тогда уравнение (1.11) примет вид

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} A_0(\xi) + A_1(\xi) \ W(\xi, \delta) + A_2(\xi) \ W^2 + A_3 \ W^3 = 0.$$

Отсюда, в силу (1.3), следует соотношение (1.6). Убедимся, что (1.14) также удовлетворяются тождественно непосредственными вычислениями.

Таким образом, все введенные в (1.3),(1.4) функции определены однозначно. Возвращаясь в исходные переменные получим выражения для $U(\chi, \theta)$, $V(\chi, \theta)$ приведенное в теореме 1.2.1. Выражение (1.6) определяет решение $V(\chi, \theta)$ задачи или согласно (1.5) определяет решение $S(t, x, y)$ построенное в неявной, параметрической форме. Выражение для функции $U(\chi, \theta)$ имеем в явном виде (1.7).

На верхнем левом рисунке 1.1 показан фазовый портрет системы ФХН (1.1) если отсутствует диффузия. В системе ФХН существует единственная стационарная точка. Две связные области на Рис 1.2 в которых определена вещественная функция решения соединены узким перешейком (здесь находится особая точка). (Рис.

1.2c,b). Рассматривая построенные формулы видно, что они не теряют своих свойств при нулевом значении угловой скорости $\omega = 0$. То есть, в этом случае, построено решение эллиптического уравнения.

Сравним полученные результаты с результатами работы [1]. По Рис. 1.1.b приведены импульсы полученные численными методами в модели ФХН. Задача является «жесткой» задачей, однако её параметры не выделяются из ряда других жестких задач. Это задачи с малым параметром при старшей производной и в ряде работ говорят о существовании тонкого пограничного слоя на фронте импульса [15], [23], [38]. В вертикальном сечении структур приведенных на Рис. 1.2, при постоянном значении радиуса, получим импульсы с параметрами того же порядка. Два импульса бегают (вращаются) друг за другом по кругу. Примеры рассчитанных по точному решению (1.6) импульсов при тех же значениях параметров и $\omega = -1$, $\chi = -1$ и знаку минус перед квадратным корнем в формуле для ξ приведены на Рис 1.3a,b. Переменная $\theta = \varphi - \omega t$ при нулевом значении угла φ соответствует переменной времени t .

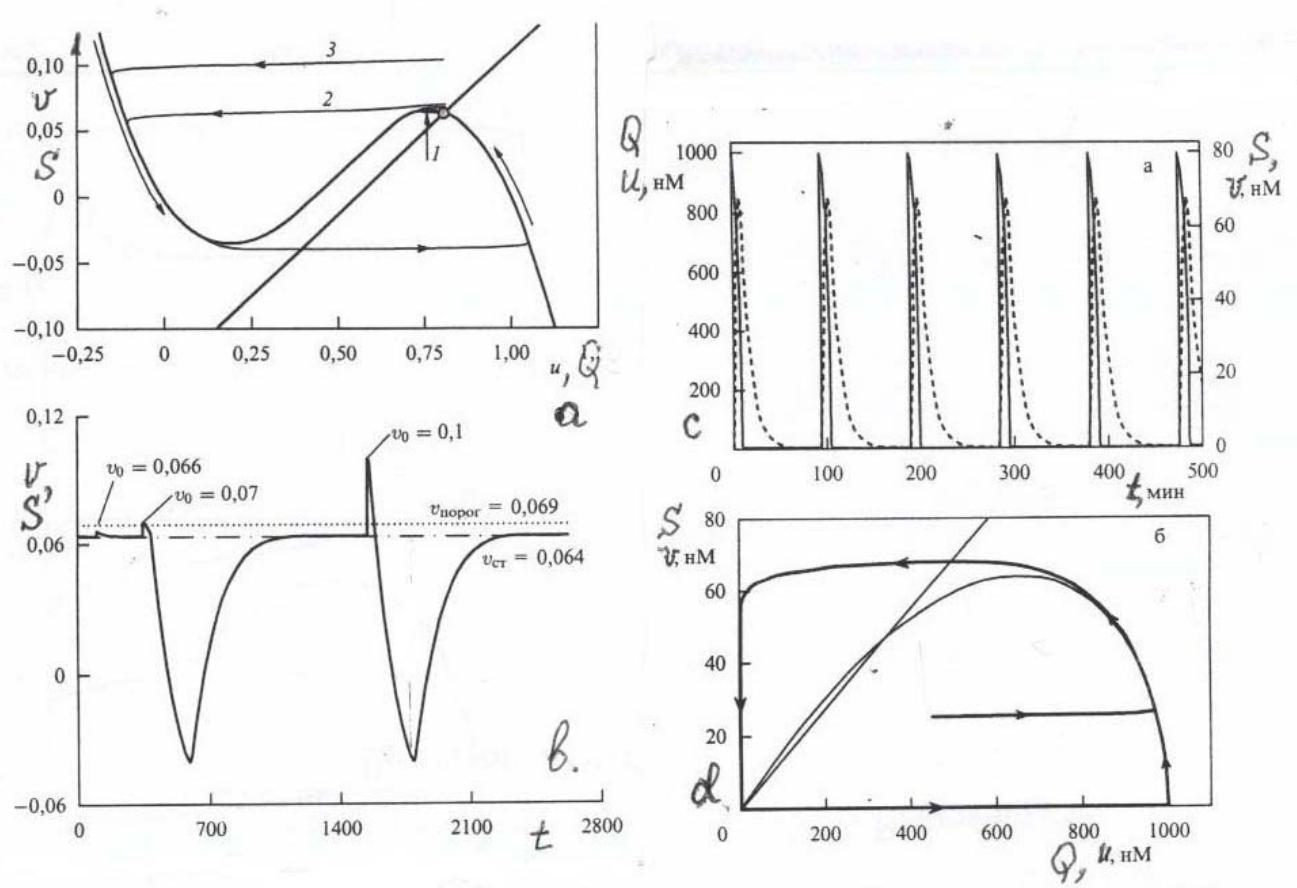


Рис. 1.1: Рис. 1.1 из [1]. На верхнем левом рисунке показан фазовый портрет системы ФХН (1.1) если отсутствует диффузия. Если $S \leq 0.069$ - порога, то начальное условие быстро затухает. (В [1] эта функция обозначена v .) Если возмущение больше порога, например, $S = 0.07$, то возвращение в стационарную точку проходит по кривой 2. На Рис. 1.1d в окрестности нуля функция резко меняется в узком пограничном слое толщиной несколько нМ.

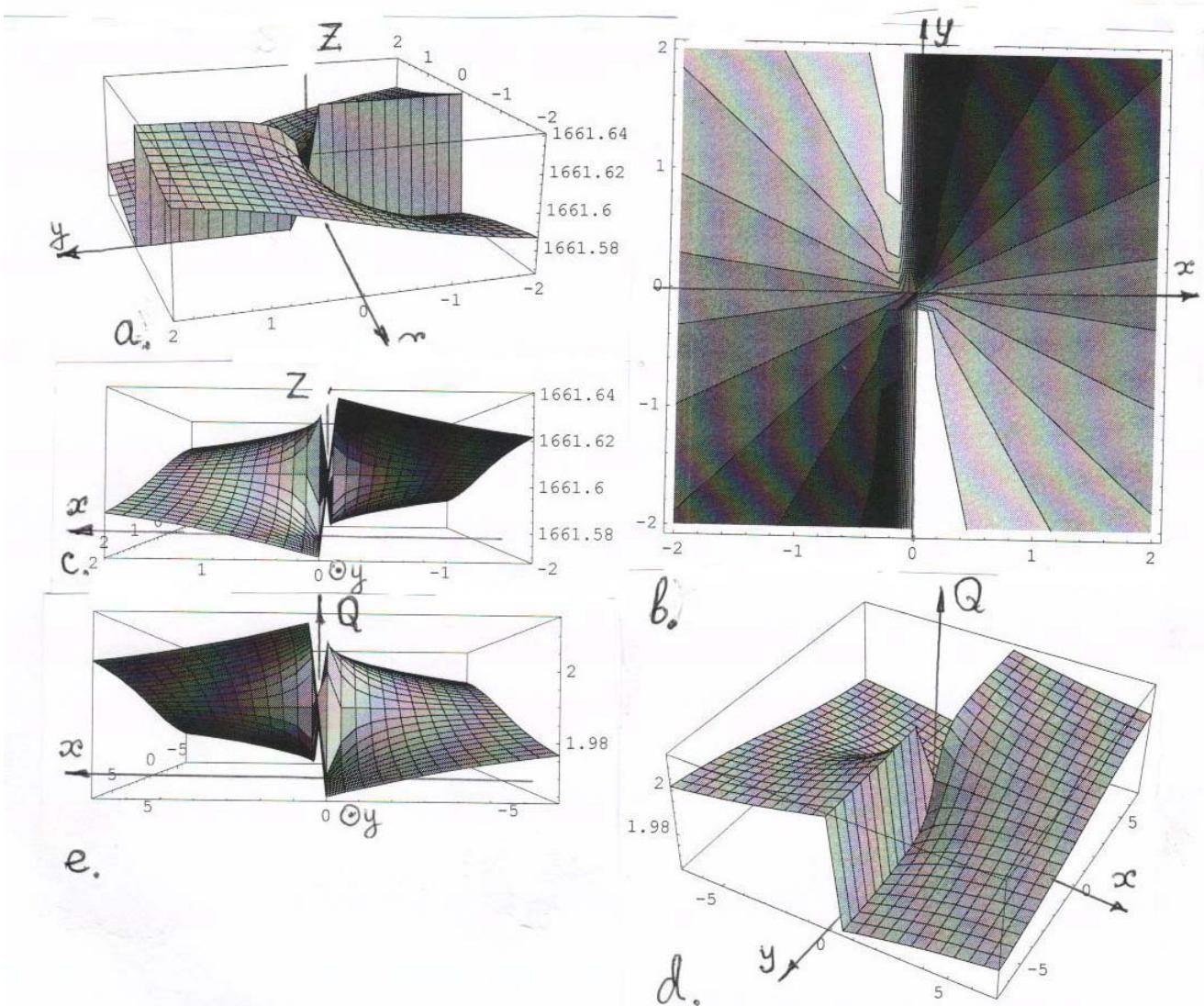


Рис. 1.2: На Рис.1.2а,с показана поверхность $Z = 0$ и соответствующая картина линий уровня (1.6) при значении функции ингибитора $S = V = 0.5$. Значения констант взяты из работы [1] $C_1 = 1$, $\varepsilon = 0.001$, $a = 4$, $b = -0.55$, $n = 0.4$ и здесь положили $\omega t = 0.1$. Сечения этой поверхности при $r = \text{const}$ даёт два импульса бегущие по кругу друг за другом. На Рис. 1.2б,е показана функция активатора Q .

Графики можно перестроить в координатах $W(\theta)$ или $W(t)$. Зависимость от знака и величины угловой скорости приведена на нижних рисунках Рис.1.3 при нулевом значении угла. Видно, что свойства зависят от направления вращения.

Замечание 1.2.4. В заключение данного пункта укажем, что для того, чтобы усилить роль диффузионных слагаемых в решении, следует усложнить вид функции $B(\xi, \delta)$, $R(\xi, \delta)$ в (1.5). Это в свою очередь приводит к усложнению всех последующих формул и не известно даст ли возможность вычислить интегралы аналогичные (1.18) в системе аналогичной (1.16), (1.17). В следующем параграфе найден случай когда роль диффузионных слагаемых в решении можно усилить и проследить их влияние. Отметим, что решение построенные в параграфах 1.2 и 1.3 разные и результат зависит от порядка в котором провели анализа уравнений системы (1.2).

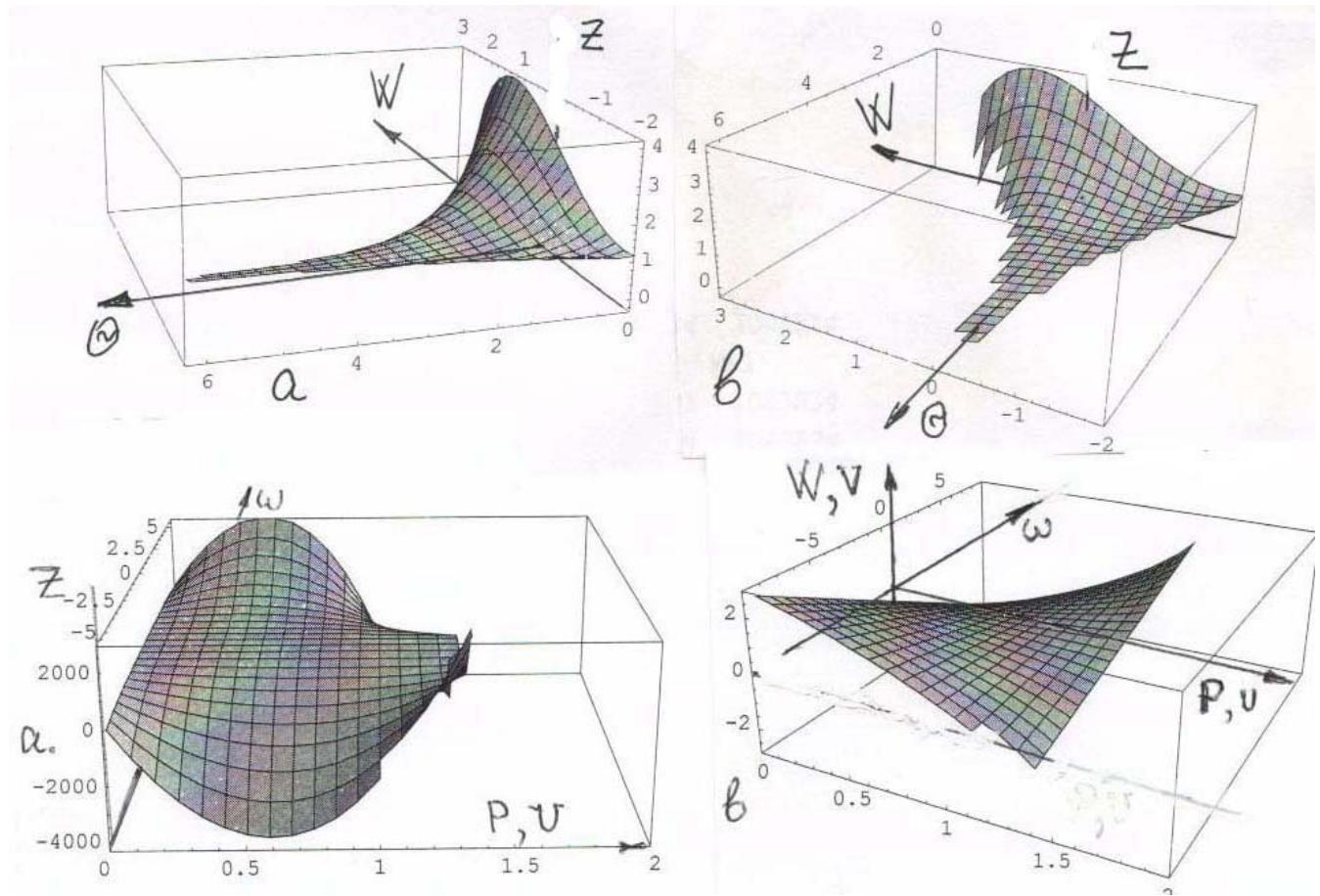


Рис. 1.3: Вид на импульс с двух точек зрения (под двумя углами), построенный по формулам точного решения теоремы 1.2.1 в параметрической форме на Рис. 1.2 при $\omega = -1$, $\chi = -1$, со знаком минус в (1.6). Зависимость вычисленных функций от угловой скорости показано на нижних рисунках.

1.3. Влияние диффузии в модели ФХН

В данном параграфе начнем процедуру построения решения с первого уравнения системы (1.2).

Теорема 1.3.1.

Пусть дана система (1.2) для функций

$$\begin{aligned} P(\xi, \delta)|_{\xi=\xi(\chi, \theta), \delta=\delta(\chi, \theta)} &= U(\chi, \theta)|_{\chi=\ln \sqrt{x^2+y^2}, \theta=\arctan(y/x)-\omega t} = \\ &= Q(t, x, y), \quad W(\xi, \delta)|_{\xi=\xi(\chi, \theta), \delta=\delta(\chi, \theta)} = \\ &= V(\chi, \theta)|_{\chi=\ln \sqrt{x^2+y^2}, \theta=\arctan(y/x)-\omega t} = S(t, x, y), \end{aligned} \quad (1.19)$$

и даны функции $T(\xi, \delta) = \xi + C_1 P(\xi, \delta)$, $Y(\xi, \delta) = \xi$.

Тогда существует точное решение, где функция $U(\chi, \theta)$ в силу (1.3), определена в неявной, параметрической форме равенством:

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{G_0(\xi, \delta) + G_1(\xi, \delta) U + G_2(\xi, \delta) U^2 + G_3 U^3}{G_0(\xi, \delta) + G_1(\xi, \delta) U + G_2(\xi, \delta) U^2} = 0, \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \text{зде} \quad \xi &= -C_1 U(\chi, \theta)/2 \pm \\ &\pm (1/2) \exp(-C_1 \chi/2) \sqrt{2 \exp(C_1 \theta) - C_1^2 U^2 \exp(C_1 \chi)}. \end{aligned}$$

Все функции $G_j, j = 0, 3$ явно вычислены

$$\begin{aligned}
 G_0(\xi, \delta) &= -8 d \xi^2 - 8 d n \xi^2 + \\
 &+ \exp(2 \chi)[-2b\varepsilon + 2\xi\omega(n + a\varepsilon - C_1\omega)], \\
 G_1(\xi, \delta) &= -8 C_1 d (n + 1) \xi + 24 d \xi^2 + \exp(2 \chi) * \\
 &*[2 (C_1 n \omega - \varepsilon - a n \varepsilon + a C_1 \varepsilon \omega) - 4 (n + 1) \xi \omega - C_1^2 \omega^2], \\
 G_2(\xi, \delta) &= -4 C_1^2 (n + 1) + 24 \xi C_1 d + \\
 &+ \exp(2 \chi(\xi, \delta)) [2 a (n + 1) \varepsilon - 4 C_1 \omega - 4 n \omega C_1 - 6 \xi \omega], \\
 G_3(\xi, \delta) &= 12 C_1^2 d - 2 \exp(2 \chi(\xi, \delta)) [a \varepsilon - 3 C_1 \omega]. \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

Функция $V(\chi, \theta)$, в силу (1.3) определяется явно

$$V(\chi, \theta) = \xi \omega + (C_1 \omega - n)U + (n + 1)U^2 - U^3, \quad (1.22)$$

Здесь C_1 – константа.

Коэффициент диффузии, после подстановки ξ в (1.20), имеет вид

$$\begin{aligned}
 d &= [\exp(-C_1\theta)(\exp(2\chi) \omega * \\
 &*(\pm \sqrt{2 \exp(C_1(\theta + \chi)) - C_1^2 U^2 \exp(2 C_1 \chi)} (2U - \\
 &- n + 2nU - 3U^2 - a\varepsilon + C_1\omega) - aC_1 U \varepsilon \exp(C_1\chi)) + \\
 &+ \exp(\chi (2 + C_1))[2b\varepsilon + U^3(2a\varepsilon - 3C_1\omega) + U(2\varepsilon + 2an\varepsilon - \\
 &- C_1(n + a \varepsilon)\omega) + 2(1 + n)U^2(C_1\omega - a\varepsilon)])]/(4(1 - 3 U + n)).
 \end{aligned}$$

Доказательство. В данном случае сначала решаем

ем СФЛАУ которое следует из (1.9),(1.11),(1.14) и положим

$$T(\xi, \delta) = \xi + C_1 P(\xi, \delta), \quad Y(\xi, \delta) = \xi. \quad \text{См. замечание 1.2.3.}$$

Затем в числителе правых частей построенных решений приравниваем к нулю коэффициент при $\exp(2\chi(\xi, \delta))$. Интересно отметить, что этот коэффициент в числителе правых частей всех четырех решений $x'_\xi, x'_\delta, t'_\xi, t'_\delta$ один и тот же. Из равенства нулю коэффициента находим $W(\xi, \delta) = \xi \omega + (C_1 \omega - n)P + (n+1)P^2 - P^3$.

Обычно из возможных соотношений выбираем самый простой вариант.

Отсюда в силу (1.3), следует (1.22). Далее после вычисления производных и подстановки этих выражений в решение СФЛАУ получим теорему.

Теорема 1.3.2.

Пусть дана система уравнений первого порядка с частными производными (1.9),(1.11), (1.14), эквивалентная первому уравнению с частными производными второго порядка (1.1) и (1.2).

Тогда система (1.9),(1.11), (1.14) приводится к СФЛАУ $A_1 X = b_1$, которое имеет единственное

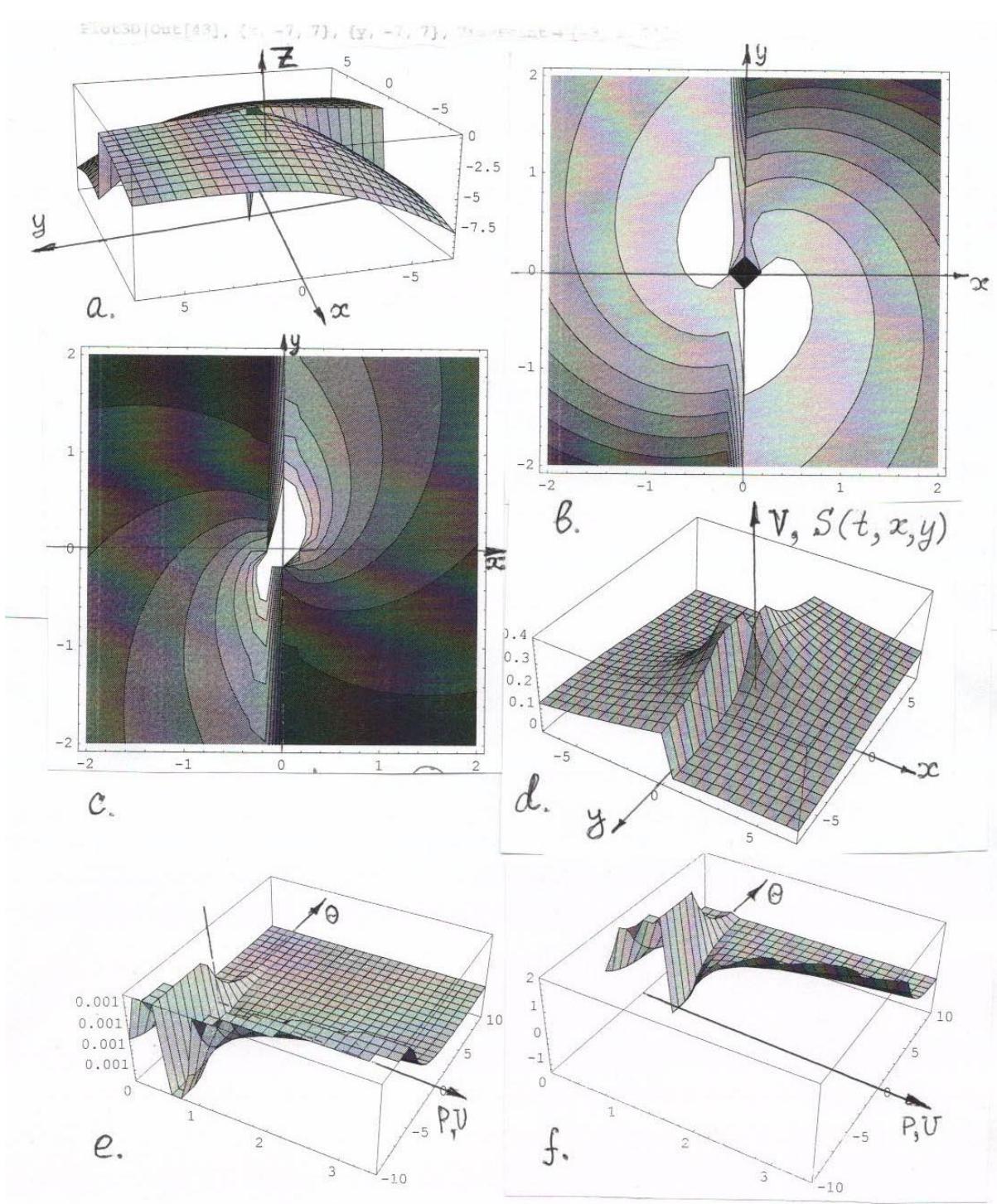


Рис. 1.4: На Рис.1.4а,б показана поверхность $Z = 0$ и соответствующая картина линий уровня (1.20) при значении функции активатора $U = 0.1$. Значения константы взяты из работы [1] $C_1 = 1$, $\varepsilon = 0.001$, $a = 4$, $b = -0.55$, $n = 0.4$, и $\omega t = 0.5$, $d_1 = 0.005$. Вертикальные сечения структуры при постоянном радиусе дают импульсы аналогичные рассмотренным в [1]. Рис.1.1. Вид функции ингибитора S показаны на рисунках с,д.

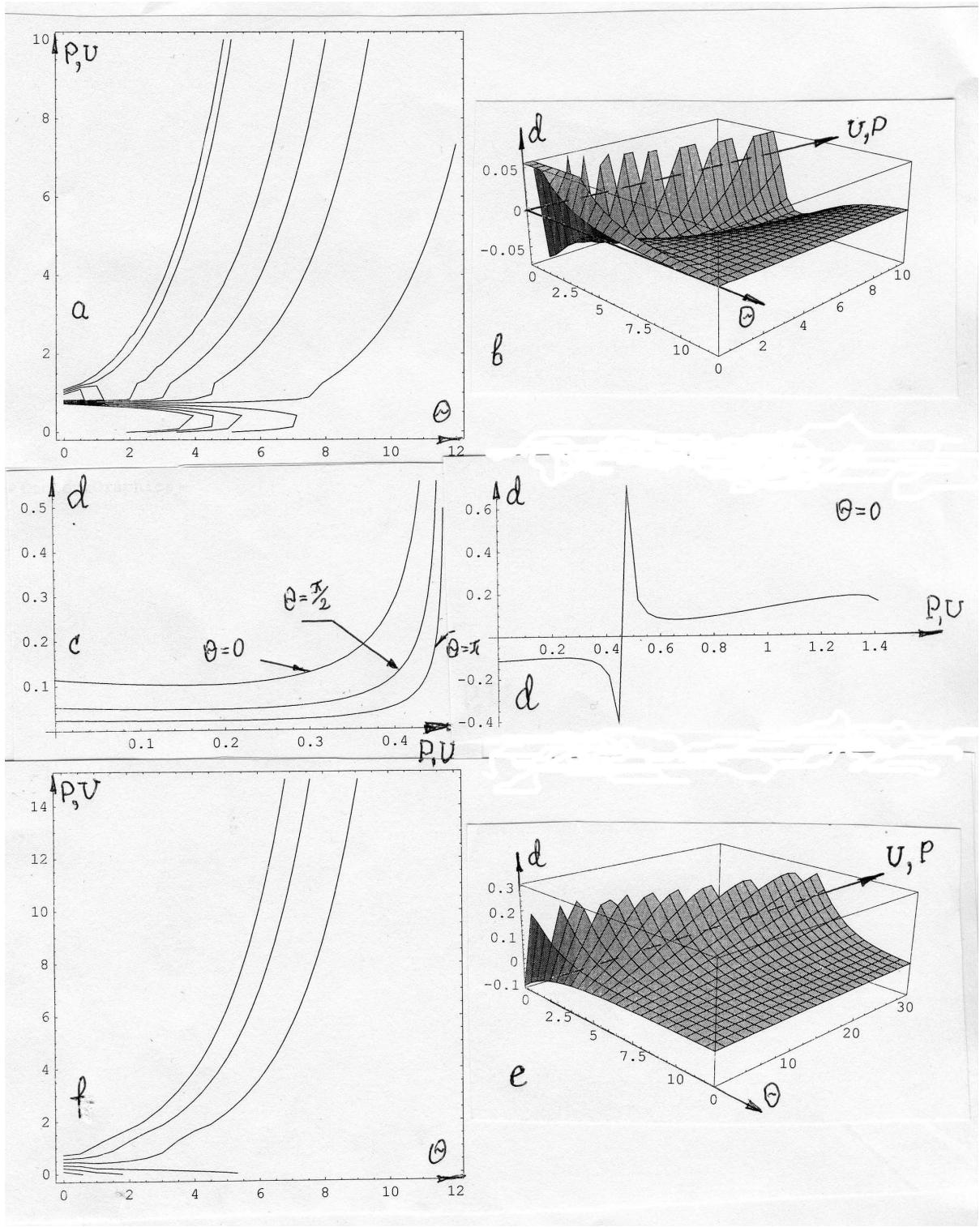


Рис. 1.5: На Рис.1.5а,б,с (при знаке плюс в формуле ξ в (1.20)) показана зависимость коэффициента диффузии d и соответствующая картина линий уровня при тех же значениях констант, что и на предыдущем рисунке . Рис.1.5 д,е те же рисунки при знаке минус в формуле ξ в (1.20).

решение

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi} = g_1(\xi, \delta), \quad \frac{\partial \chi}{\partial \delta} = g_2(\xi, \delta), \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = g_3, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \delta} = g_4. \quad (1.23)$$

Это новая система уравнений с частными производными первого порядка с «известной» правой частью, где

$$\begin{aligned} g_1(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} [2 \xi - 2 C_1 P - C_1^2 P P'_\xi] / (C_1 Z_2), \\ g_2(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} -C_1 P P'_\delta / Z_2, \\ g_3(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} [2 \xi + 2 C_1 \xi P'_\xi + C_1^2 P P'_\xi] / (C_1 Z_2), \\ g_4(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} (2 \xi + C_1 P) P'_\delta / Z_2. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Здесь через $Z_2(\xi, \delta)$ обозначен знаменатель.

$$Z_2(\xi, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \xi^2 + 2 C_1 \xi P + C_1^2 P^2. \quad (1.25)$$

□

Доказательство.

Интегралы системы (1.23),(1.24) имеют вид

$$\begin{aligned} \theta &= C_\theta + [2 \arctan(1 + C_1 U/\xi) + \ln(Z_2)] / (2 C_1), \\ \chi &= C_r + [2 \arctan(1 + C_1 U/\xi) - \ln(Z_2)] / (2 C_1). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Вычитая интегралы и полагая, для простоты, равными нулю константы сдвига C_θ, C_r возвращаемся в исход-

ные переменные θ , χ . Тогда можно получить выражение для ξ приведенное в теореме 1.3.1 после формулы (1.20). Графики построенные ниже по формулам со знаком плюс перед корнем в выражении для ξ . Рис.

1.4. Сечение поверхностей при фиксированном значении радиуса представляет из себя два импульса, которые врачаются, бегают друг за другом. Сравни с левым рисунком Рис.1.1.

Из соотношений (1.10) получим выражения для

$$B(\xi, \delta) = [2\xi(C_1\omega - n) + (4\xi - 2C_1n + 4n\xi + C_1^2\omega)P + \\ + 2(2C_1 + 2C_1n - 3\xi)P^2 - 6C_1P^3]/2,$$

$$R(\xi, \delta) = -\xi n + (2(n+1)\xi - C_1^2\omega/2)P - 3\xi P^2.$$

Вычисляем производные этих функций и подставляем в уравнение (1.12) и получим

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} G_0(\xi, \delta) + G_1(\xi, \delta)P + G_2(\xi, \delta)P^2 + G_3(\xi, \delta)P^3 = 0.$$

В силу замены (1.3), получим (1.20). Убедимся, что (1.15) также удовлетворяются тождественно. Таким образом, все введенные в (1.3), (1.4) функции определены однозначно. Возвращаясь в исходные переменные получим выражения для $U(\chi, \theta)$, $V(\chi, \theta)$ приведенное в теореме 1.3.1. Выражение (1.20) определяет реше-

ние $U(\chi, \theta)$ задачи и определяет решение $Q(t, x, y)$ построенное в неявной, параметрической форме. Выражение для функции $V(\chi, \theta)$ и $S(t, x, y)$ имеем в явном виде (1.22).

Можно построить графики d коэффициента диффузии от остальных параметров по последнему выражению в теореме 1.3.1. Получаем подтверждение оценки сверху коэффициента диффузии полученной в [28]. Вещественные решения типа спиральных волн существуют при малых значениях коэффициента диффузии.

А.М. Тьюринг опубликовал работу «Химические основы морфогенеза» [47] в двух редакциях. В этой работе впервые описан математически процесс самоорганизации материи. Там доказано, что резкие изменения свойств- «бифуркация».

Можно построить графики решения при различных значениях коэффициентов d и ω . Переменная $\theta = \varphi - \omega t$ учитывает зависимость от угла и угловой скорости. Поверхность $Z = 0$ (20) приведена на Рис.1.4e при тех же значениях параметров и коэффициенте диффузии $d = 0.001$ на окружности радиуса $r = \exp(-10)$, $\chi = -10$,

а на Рис. 1.4f на окружности радиуса $r = \exp(1)$, $\chi = 1$. Структуры меняют геометрию и амплитуду. Кратко можно отметить, что в зависимости от направления вращения также изменяется геометрия и форма структур. При этом область существования решений вращающихся с отрицательной угловой скоростью значительно больше, чем с положительной.

На Рис.1.5а,b,c (при знаке плюс в формуле (1.20)) показана зависимость коэффициента диффузии d и соответствующая картина линий уровня при тех же значениях констант, что и на предыдущем рисунке. Можно перестроить зависимость концентрации в любых переменных $P(\xi, \delta)$, $U(\chi, \theta)$ при их малых значениях от коэффициента диффузии при фиксированных углах, то есть значениях переменной θ . Рис.1.5 d,f,e те же рисунки при знаке минус в формуле (1.20). Положительное решение существует при значениях больших некоторой константы. См. рисунок 1.5d.

1.4. Сильная нелинейность. Модель гомогенной кинетики свертывания крови

В данном параграфе изучаются свойства точных решений сверх «жесткой» модели которая рассмотрена в [1] в пункте с соответствующим названием. Фазовый портрет системы ОДУ изучен в цитируемой работе на стр. 680. См. правый Рис.1.1. Для этой модели, в цитируемой работе, амплитуда импульса изменяется на два - пять, порядков. Показано, что существует пороговый в уровень активирующего параметра A втока факто-ра X_a . После превышения порога, образуется последовательность импульсов -авто-колебательный режим. В [1] указано, что скачек концентрации в импульсе может составить 4-5 порядков. Рис. 1.1.

Известен цикл работ А.А.Самарского, С.П. Курдюмова, С.И. Похожаева с сотрудниками об «обострении» решений нелинейных параболических уравнений. То есть решение нелинейного параболического уравнения рас-тет неограничено. Ссылки на ряд работ по этой теме приведены в [15]. Введен даже термин «blow-up» озна-чающий, что решения уравнения нелинейного парабо-

лического неограниченно возрастает.

Природе явление «blow-up» не нужно. В данной модели, для того, чтобы жидкая фаза стала твердым тромбом показано [1]-[3], что достаточно, чтобы функция в импульсе увеличилась на несколько порядков, на некоторое время.

Имея в распоряжение точное решение можно поставить вопрос: «До какой величины, изменяя константы, может быть увеличена амплитуда импульса, оставаясь конечной? ». Ответ на этот вопрос можно получить изменяя «руками» константы модели. Результаты расчетов по точному решению показывают, что область изменения функции гиперплоскости $Z = 0$ может изменяться от нуля до $10^{18} \div 10^{30}$!.

Тот факт, что данная задача, с некоторым предположением, описывается точным решением, выражаемся через элементарные функции, является удивительным фактом даже для авторов данной работы.

Таким образом, «природе» не требуются бесконечно большие амплитуды. Выявленный эффект демонстри-

руется с целью привлечения внимания математиков к такому виду нелинейности, который ранее не подвергался анализу.

Замечание 1.2.5. Здесь надо отметить аналогию с имеющейся в математике методикой разрешения особенностей. Рекомендуется увеличить размерность задачи. В данном случае мы увеличиваем число переменных на две переменные. Возьмем за основу модель гомогенной кинетики из [1] и для того чтобы применить МНФКЗП, допишем в неё диффузионные слагаемые с одинаковым коэффициентом диффузии.

Система уравнений для активатора процесса свертываемости $Q(t, x, y)$ (тромбина) и ингибитора (активированного протеина) $S(t, x, y)$ имеет вид

$$\begin{aligned} Q'_t - d \Delta Q + K_6 Q - K_1 (1 + K_2 Q/(1 + K_3 S)) * \\ * [K_4 Q (1 + K_5 Q/(1 + K_3 S)) + A] (1 + Q/u_0) = 0, \\ S'_t - d \Delta S - K_7 Q + K_8 S = 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Здесь A - вток фактора X_a , u_0 - концентрация протромбина, предшественника тромбина, d - коэффициент диффузии, K_j , $j = 1, 8$ -константы модели. Предполагаем,

что $S(t, x, y)$, $Q(t, x, y)$ - дважды непрерывно дифференцируемые функции независимых переменных.

Математическая модель из двух нелинейных параболических уравнений (1.27) перепишем в системе координат χ , θ связанной с медленно вращающейся полярной системой координат $Q(t, x, y) = U(\chi, \theta)$, $S(t, x, y) = V(\chi, \theta)$, где $\chi = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctan(y/x) - \omega t$. Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} -\omega U'_{\theta} - d \exp(-2\chi) [U''_{\theta\theta} + U''_{\chi\chi}] + K_6 U(\chi, \theta) - \\ -K_1 (1 + K_2 U/(1 + K_3 V)) * \\ *[K_4 U (1 + K_5 U/(1 + K_3 V)) + A] \left(1 + \frac{U}{u_0}\right) = 0, \\ \omega V'_{\theta} + d \exp(-2\chi) [V''_{\theta\theta} + V''_{\chi\chi}] + K_7 U - K_8 V = 0. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Делаем «плавающую», нефиксированную конструктивную замену переменных (1.3). Введем «дифференциальные связи» (1.4). Существует точное решение.

Теорема 1.4.5.

Пусть дана система (1.27), (1.28) для функций

$$\begin{aligned} P(\xi, \delta)|_{\xi=\xi(\chi, \theta), \delta=\delta(\chi, \theta)} &= U(\chi, \theta)|_{\chi=\ln \sqrt{x^2+y^2}, \theta=\arctan(y/x)-\omega t} = \\ &= Q(t, x, y), \quad W(\xi, \delta)|_{\xi=\xi(\chi, \theta), \delta=\delta(\chi, \theta)} = \\ &= V(\chi, \theta)|_{\chi=\ln \sqrt{x^2+y^2}, \theta=\arctan(y/x)-\omega t} = S(t, x, y), \end{aligned} \quad (1.29)$$

и справедливо предположение о виде функций

$$R(\xi, \delta) = \xi, \quad B(\xi, \delta) = C_1 P(\xi, \delta) + \xi.$$

Тогда существует точное решение, где функция $U(\chi, \theta)$ определена в неявной, параметрической форме равенством:

$$\begin{aligned} Z &\stackrel{\text{def}}{=} H_0 + H_1(\xi) U(\chi, \theta) + H_2(\xi) U^2 + \\ &+ H_3(\xi) U^3 + H_4(\xi) U^4 = 0, \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\text{где} \quad \xi = [-C_1 U(\chi, \theta) \pm \sqrt{-C_1^2 U^2 + 2 \exp(\Psi_1)}] / 2,$$

$$\Psi_1 = 2 C_1 K_8 (K_7(\theta - \chi) + C_1 \theta \omega) / \Psi_2,$$

$$\Psi_2 = 2 K_7^2 + 2 C_1 K_7 \omega + C_1^2 \omega^2.$$

Все функции $H_j, j = 0, 4$ явно вычислены.

$$H_0 = h_0 + h_1 \omega + h_2 \omega^2 + h_3 \omega^3 + h_4 \omega^4,$$

$$h_0 = -2 A K_1 K_8^2 K_7^2 u_0,$$

$$h_1(\xi) = -2 A C_1 K_1 K_8^2 K_7 u_0 - 2 K_8 K_7 (K_8^2 + 2 A K_1 K_3 K_7) u_0 \xi,$$

$$\begin{aligned} h_2(\xi) &= -A C_1^2 K_1 K_8^2 u_0 - 4 A C_1 K_1 K_3 K_8 K_7 u_0 \xi - \\ &- 2 K_3 K_7 (2 K_8^2 + A K_1 K_3 K_7) u_0 \xi^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_3(\xi) &= -2 K_3 u_0 \xi (A C_1^2 K_1 K_8 + A C_1 K_1 K_3 K_7 \xi + \\ &+ K_3 K_8 K_7 \xi^2), \end{aligned}$$

$$h_4(\xi) = -4 A C_1^2 K_1 K_3^2 u_0 \xi^2,$$

$$H_1 = m_0 + m_1 \omega + m_2 \omega^2 + m_3 \omega^3 + m_4 \omega^4,$$

$$m_0 = -2 K_8 {K_7}^2 (-A K_1 K_8 + (2 A K_1 K_3 K_7 + A K_1 K_2 K_8 - K_6 K_8 + K_1 K_4 K_8) u_0),$$

$$\begin{aligned} m_1(\xi) = & -2 C_1 K_7 K_8 (-A K_1 K_8 + 4 A K_1 K_3 K_7 u_0 + \\ & + A K_1 K_2 K_8 u_0 + K_1 K_4 K_8 u_0) - K_6 K_8 u_0 + {K_8}^2 u_0) + \\ & + (-2 K_1 K_3 {K_7}^2 (A (2 K_3 K_7 u_0 + K_8 (K_2 u_0 - 2)) + \\ & + 2 K_4 K_8 u_0) + 4 {K_7}^2 K_3 (K_6 - K_8) K_8 u_0) \xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_2(\xi) = & -C_1^2 K_1 K_8 (-A K_8 + 6 A K_3 K_7 u_0 + A K_2 K_8 u_0 + \\ & + K_4 K_8 u_0) + C_1^2 (K_6 - K_8) {K_8}^2 u_0 - 2 C_1 K_3 K_7 (2 K_8 (K_1 K_4 - \\ & - K_6 + 2 K_8) u_0 + A K_1 (4 K_3 K_7 u_0 + K_8 (-2 + K_2 u_0))) \xi + \\ & + 2 {K_3}^2 {K_7}^2 (A K_1 - (K_1 K_4 - K_6 + 2 K_8) u_0) \xi^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_3(\xi) = & -2 A {C_1}^3 K_1 K_3 K_8 u_0 - C_1^2 K_1 K_3 (-2 A K_8 + \\ & + 6 A K_3 K_7 u_0 + A K_2 K_8 u_0 + 2 K_4 K_8 u_0) \xi + \\ & + 2 K_3 {C_1}^2 (K_6 - K_8) K_8 u_0 \xi - \\ & + 2 C_1 {K_3}^2 K_7 (-A K_1 + (K_1 K_4 - K_6 + 3 K_8) u_0) \xi^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_4(\xi) = & C_1^2 K_1 {K_3}^2 \xi (-K_4 u_0 \xi + A (\xi - 2 C_1 u_0)) + \\ & + C_1^2 {K_3}^2 (K_6 - K_8) u_0 \xi^2, \end{aligned}$$

$$H_2 = n_0 + n_1 \omega + n_2 \omega^2 + n_3 \omega^3 + n^4 \omega^4,$$

$$\begin{aligned} n_0 = & -2 {K_7}^2 (A K_1 (K_3 K_7 (-2 K_8 + K_3 K_7 u_0) - \\ & - K_2 K_8 (K_8 - K_3 K_7 u_0)) + K_8 (-2 K_3 K_6 K_7 u_0 + \\ & + K_1 K_4 (2 K_3 K_7 u_0 + K_8 (K_2 u_0 - 1 + K_5 u_0)))), \end{aligned}$$

$$n_1(\xi) = -2 C_1 K_7 (A K_1 (K_3 K_7 (-4 K_8 + 3 K_3 K_7 u_0) -$$

$$\begin{aligned}
& -K_2 K_8(K_8 - 2 K_3 K_7 u_0)) + K_8(-4 K_3 K_6 K_7 u_0 + \\
& + K_1 K_4(4 K_3 K_7 u_0 + K_8(K_2 u_0 - 1 + K_5 u_0)) + 2 K_3 K_7 K_8 u_0)) + \\
& + 2 K_3 K_7^2 (A K_1 (K_2 K_8 + 2 K_3 K_7) - K_1 K_4 (2 K_3 K_7 u_0 + \\
& + K_8 (-2 + K_2 u_0 + K_5 u_0)) + K_3 K_7 (2 K_6 - K_8) u_0) \xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_2(\xi) = & -C_1^2 K_1 (A(K_3 K_7 (-6 K_8 + 7 K_3 K_7 u_0) - K_2 K_8 (K_8 - \\
& - 3 K_3 K_7 u_0)) + K_4 K_8 (6 K_3 K_7 u_0 + \\
& + K_8 (-1 + K_2 u_0 + K_5 u_0))) - 6 C_1^2 K_8 K_3 K_7 (K_8 + \\
& + K_6) u_0 + (2 C_1 K_1 K_3 K_7 (A(4 K_3 K_7 + K_2 K_8) - \\
& - K_4 (4 K_3 K_7 u_0 + K_8 (-2 + K_2 u_0 + K_5 u_0))) + \\
& + 8 C_1 K_3^2 K_7^2 (K_6 - K_8) u_0) \xi + 2 K_1 K_3^2 K_4 K_7^2 \xi^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_3(\xi) = & -C_1^3 K_1 K_3 (A (4 K_3 K_7 u_0 + K_8 (-2 + K_2 u_0)) + \\
& + 2 K_4 K_8 u_0) + 2 C_1^3 K_3 (K_6 - K_8) K_8 u_0 + \\
& + C_1^2 K_3 (A K_1 (6 K_3 K_7 + K_2 K_8) - K_1 K_4 (6 K_3 K_7 u_0 + \\
& + K_8 (-2 + K_2 u_0 + K_5 u_0)) + 2 K_3 K_7 (3 K_6 - 4 K_8) u_0) \xi + \\
& 2 C_1 K_1 K_3^2 K_4 K_7 \xi^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_4(\xi) = & -C_1^3 K_1 K_3^2 (A C_1 u_0 + 2 (K_4 u_0 - A) \xi) + \\
& + 2 C_1^3 K_3^2 (K_6 - K_8) u_0 \xi + C_1^2 K_1 K_3^2 K_4 \xi^2),
\end{aligned}$$

$$H_3 = l_0 + l_1 \omega + l_2 \omega^2 + l_3 \omega^3 + l^4 \omega^4,$$

$$\begin{aligned}
l_0(\xi) = & 2 K_7^2 (K_3^2 K_6 K_7^2 u_0 + K_1 (A K_3^2 K_7^2 + A K_2 K_3 K_7 K_8 - \\
& - K_4 (K_3^2 K_7^2 u_0 + K_3 K_7 K_8 (-2 + K_2 u_0 + K_5 u_0)) + \\
& + K_8^2 (-K_2 - K_5 + K_2 K_5 u_0))),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_1(\xi) = & 2K_7(C_1(K_3^2 K_7^2 (3K_6 - K_8)u_0 + K_1 (3A K_3^2 K_7^2 + \\
& + 2A K_2 K_3 K_7 K_8 - K_4(K_3 K_7 (-4K_8 + 3K_3 K_7 u_0) - \\
& - K_8(-(K_2 + K_5) K_8 + 2K_3 (K_2 + K_5) K_7 u_0 + K_2 K_5 K_8 u_0)))))) + \\
& + 2K_1 K_3 K_4 K_7^2 (2 K_3 K_7 + K_2 K_8 + K_5 K_8) \xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_2 = & C_1^2 (7A K_1 K_3^2 K_7^2 + 3A K_1 K_2 K_3 K_7 K_8 + \\
& + 6K_1 K_3 K_4 K_7 K_8 + K_1 K_2 K_4 K_8^2 + K_1 K_4 K_5 K_8^2 - \\
& - 7K_1 K_3^2 K_4 K_7^2 u_0 + 7 K_3^2 K_6 K_7^2 u_0 - \\
& - 3K_1 K_2 K_3 K_4 K_7 K_8 u_0 - 3 K_1 K_3 K_4 K_5 K_7 K_8 u_0 - \\
& - 5K_3^2 K_7^2 K_8 u_0 - K_1 K_2 K_4 K_5 K_8^2 u_0) + \\
& + 8 C_1 K_1 K_3^2 K_4 K_7^2 \xi + 2C_1 K_1 K_2 K_3 K_4 K_7 K_8 \xi + \\
& + 2C_1 K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_7 K_8 \xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_3(\xi) = & 4A C_1^3 K_1 K_3^2 K_7 + A C_1^3 K_1 K_2 K_3 K_8 + \\
& + 2C_1^3 K_1 K_3 K_4 K_8 - \\
& - 4C_1^3 K_1 K_3^2 K_4 K_7 u_0 + 4C_1^3 K_3^2 K_6 K_7 u_0 - \\
& - C_1^3 K_1 K_2 K_3 K_4 K_8 u_0 - C_1^3 K_1 K_3 K_4 K_5 K_8 u_0 - \\
& - 4C_1^3 K_3^2 K_7 K_8 u_0 + 6C_1^2 K_1 K_3 K_3^2 K_4 K_7 \xi + \\
& + C_1^2 K_1 K_2 K_3 K_4 K_8 \xi + C_1^2 K_1 K_3 K_4 K_5 K_8 \xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_4(\xi) = & A C_1^4 K_1 K_3^2 - C_1^4 K_1 K_3^2 K_4 u_0 + C_1^4 K_3^2 K_6 u_0 - \\
& - C_1^4 K_3^2 K_8 u_0 + 2C_1^3 K_1 K_3^2 K_4 \xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_4 = & K_1 K_4 (K_2 K_8 + K_3 K_7 + C_1 K_3 \omega) (K_5 K_8 + \\
& + K_3 K_7 + C_1 K_3 \omega) * (2 K_7^2 + 2 C_1 + K_7 \omega + C_1^2 \omega^2).31)
\end{aligned}$$

Функция $V(\chi, \theta)$ определяется формулой

$$V(\chi, \theta) = \xi \omega / K_8 + U(\chi, \theta)(K_7 + C_1 \omega) / K_8, \quad (1.32)$$

Здесь C_1 – константа.

Доказательство. Сделаем замену (1.3),(1.4) для системы (1.27),(1.28). Отсюда следуют уравнения (1.9),(1.10).

Уравнения системы (1.28) принимают вид

$$\begin{aligned} & \exp(-2\chi) d/det J \left(-\frac{\partial T}{\partial \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \delta} + \frac{\partial Y}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \delta} \right) - \\ & - K_1 (1 + K_2 P/(1 + K_3 W)) [K_4 P (1 + K_5 P/(1 + K_3 W)) + A] * \\ & * (1 - P/u_0) - \omega T + K_6 P(\xi, \delta) = 0, \\ & d \exp(-2\chi) / det J \left(\frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \delta} - \frac{\partial B}{\partial \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{\partial R}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial R}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \delta} \right) - \\ & - \omega B(\xi, \delta) - K_7 P(\xi, \delta) + K_8 W(\xi, \delta) = 0, \end{aligned} \quad (1.33)$$

Далее с необходимостью, системы уравнения дополняются двумя условиями равенства смешанных производных в переменных ξ, δ (1.14),(1.15). Из четырех уравнений (1.10),(1.34),(1.15) строим вторую СФЛАУ $A_2 X = b_2$.

Положим $B(\xi, \delta) = \xi + C_1 P(\xi, \delta)$, $R(\xi, \delta) = \xi$.

Затем в числителе правых частей построенных решений приравниваем к нулю коэффициент при $\exp(2\chi(\xi, \delta))$.

Интересно отметить, что этот коэффициент в числителе правых частей всех четырех решений $\chi'_\xi, \chi'_\delta, \theta'_\xi, \theta'_\delta$

один и тот же. Из равенства нулю коэффициента находим $W(\xi, \delta) = \xi \omega / K_6 + P(\xi, \delta)[K_7 + C_1 \omega] / K_8$. Отсюда, в силу (1.3), следует (1.32). Сформулируем утверждение.

Теорема 1.4.6.

Пусть дана система уравнений первого порядка с частными производными (1.10), (1.34), (1.15), эквивалентная второму уравнению с частными производными второго порядка (1.33).

Тогда система (1.10), (1.34), (1.15) приводится к СФЛАУ $\mathbf{A}_2 \mathbf{X} = \mathbf{b}_2$, которое имеет единственное решение

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi} = g_1(\xi, \delta), \quad \frac{\partial \chi}{\partial \delta} = g_2(\xi, \delta), \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = g_3, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \delta} = g_4. \quad (1.34)$$

Это новая система уравнений с частными производными первого порядка с формально «известной» правой частью, где

$$\begin{aligned} g_1(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} [-2 K_7 \xi - C_1 (2 K_3 + C_1 \omega) P + \\ &+ C_1^2 (\xi \omega - K_7 P) P'_\xi] / (C_1 K_8 Z_3), \\ g_2(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} C_1 (\xi \omega - K_7 P) P'_\delta / (K_8 Z_3), \\ g_3 &\stackrel{\text{def}}{=} [2 \xi (K_7 + C_1 \omega) + C_1^2 \omega P + C_1 (2 K_7 \xi + \\ &+ C_1 \xi \omega + K_7 C_1 P + C_1^2 \omega P) P'_\xi] / (C_1 K_8 Z_3), \end{aligned}$$

$$g_4(\xi, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} [\xi(2 K_7 + C_1 \omega) + C_1(K_7 + C_1 \omega) P] P' \delta / (K_8 Z_3),$$

$$Z_3 = 2 \xi^2 + 2 C_1 \xi P + C_1^2 P^2. \quad (1.35)$$

\square *Доказательство.*

Из исходной СФЛАУ $\mathbf{A}_2 \mathbf{X} = \mathbf{b}_2$ суммируя всю информацию, получим новую систему уравнений с частными производными с формально «известной» правой частью (1.34),(1.35) которая значительно упростилась.

Интегралы системы имеют вид

$$\begin{aligned} \theta &= C_\theta - K_7 (C_1 K_8)^{-1} \arctan[1 + C_1 P/\xi] + \\ &+ (K_7 + C_1 \omega)(2 C_1 K_8)^{-1} \ln[Z_3], \\ \chi &= C_r + (K_7 + C_1 \omega) (C_1 K_8)^{-1} \arctan[1 + C_1 P/\xi] - \\ &- K_7 (2 C_1 K_8)^{-1} \ln[Z_3]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Вычитая интегралы и полагая, для простоты, равными нулю константы сдвига C_θ, C_r возвращаемся в исходные переменные θ, χ . Тогда можно получить выражение для ξ приведенное в теореме 1.4.5. Графики построенные ниже по формулам со знаком плюс перед корнем в выражении для ξ приведенное в теореме 1.4.5 (1.30). Из соотношения (1.13) следует (1.6).

Из соотношений (1.9) получим выражения для

$$Y(\xi, \delta) = K_8[2(K_7 + C_1 \omega) + C_1^2 \omega P'_\xi]/\Psi_2,$$

$$T(\xi, \delta) = K_8[2K_7 \xi + 2C_1 K_7 P + C_1^2 \omega P P'_\xi]/\Psi_2.$$

Убедимся, что (1.14) также удовлетворяются тождественно. Таким образом, все введенные в (1.3), (1.4) функции определены однозначно.

Возвращаясь в исходные переменные θ, χ получим выражение для $U(\chi, \theta), V(\chi, \theta)$ приведенное в теореме 1.4.5.

Зададим значения констант из работы [1]

$$K_1 = 2.45 \text{ мин}^{-1}, K_2 = 447.66 \text{ нМ}^{-1}, K_3 = 3.87 \text{ нМ}^{-1},$$

$$K_4 = 1.65 \cdot 10^{-4} \text{ мин}^{-1}, K_5 = 4.89 \text{ нМ}^{-1}, K_6 = 2.3 \text{ мин}^{-1},$$

$$K_7 = 0.0014 \text{ мин}^{-1}, K_8 = 0.1 \text{ мин}^{-1}.$$

Остальные константы можно задавать произвольно.

На Рис. 1.6а в логарифмическом масштабе показан график функции Z (30) при значении $P = 0.1$, в силу (3) $Q = 0.1$. Значения других констант и переменных заданы $\omega = 0.1, t = 1, C_1 = 1, A = 0.002$. Здесь функция должна быть умножена на некоторый большой множитель, в зависимости от набора констант. В отличии от Рис. 1.2, 1.4 поверхность «разваливается» на две односвязные

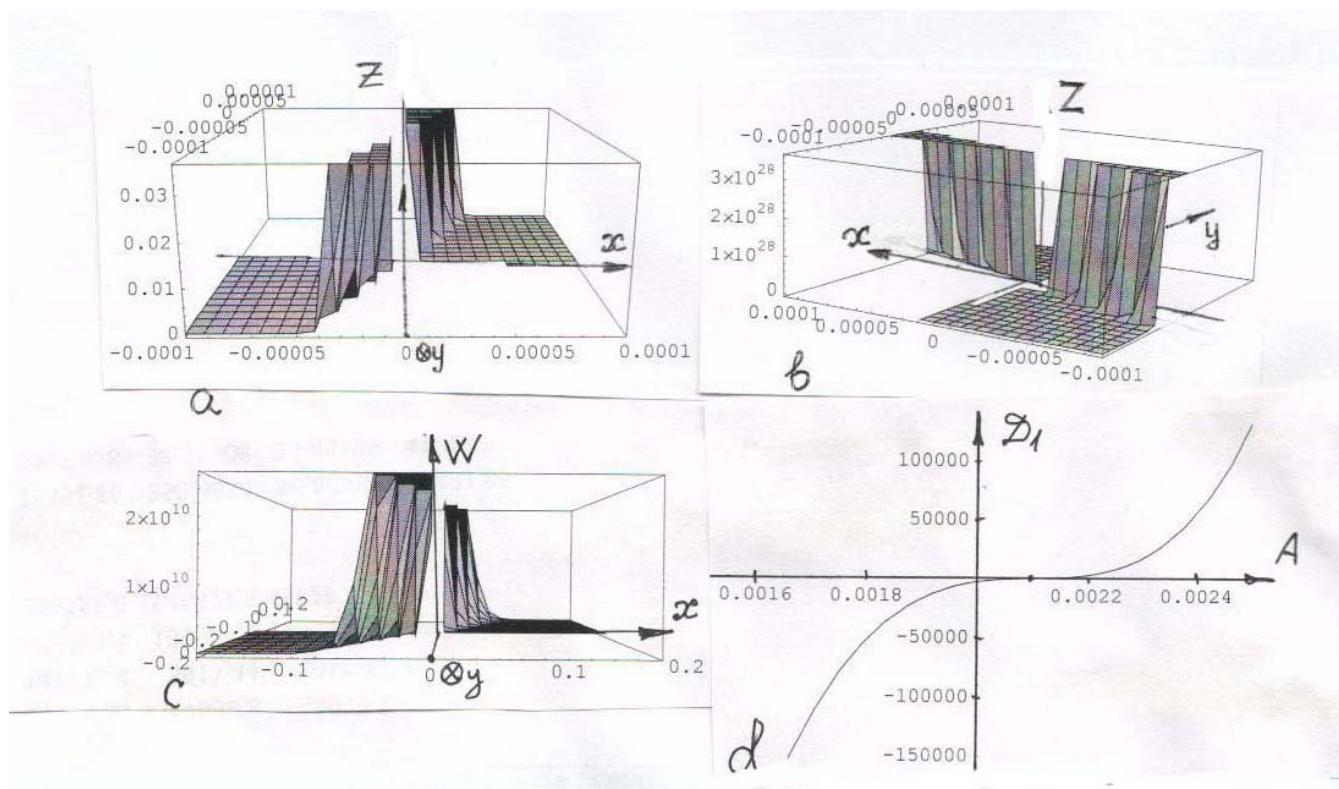


Рис. 1.6: На Рис.1.6а,б показана поверхность $Z = 0$ с двух ракурсов. Здесь на одном рисунке показаны области в которых функция принимает большие и малые значения. Функции P и W принимают малые значения в большой области.

области, которые врачаются вокруг начала координат.

Гиперплоскость резко изгибается под почти прямым углом. Горизонтальная область соответствует жидкой фазе, а верхняя часть соответствует твердой фазе. Верхняя её часть соответствует импульсу большой амплитуды.

Замечание 1.2.6. На Рис 1.6 б показан та же структура, под другим углом зрения, после поворота структуры на 180 градусов. Эта поверхность приводится из следующих соображений. В [8],[11],[13] обсуждались недостатки графического пакета программы "Математика". К ним относится «обрезание» поверхности, если запрограммированная настройка вступает в противоречие с данной функцией, график которой надо построить. Здесь амплитуда и градиент слишком большие и гиперповерхность не влезает в стандартный ящик. Поэтому в верхней части наблюдается горизонтальная полка. Конечно, можно было провести корректировку рисунка и убрать полку. Однако в этом случае, исследователи которые захотели бы повторить наши результаты, испытывали бы недоумение от не совпадения результатов. Заметим,

что такими же недостатками графического пакета объясняется симметрии в окрестности нуля на предыдущих рисунках. Исходные функции, обладают симметрией при замене переменных x, y на $-x, -y$. \square

Импульс активированного протеина (Рис 1.6 с.) имеет несколько меньшую амплитуду. На рис 1.7 а, для примера, вычислены поверхность соответствующая одному импульсу в случае знака минус в выражении для ξ в (1.30) на круге единичного радиуса в точке $x = \sqrt{1 - y^2}, y = 3/4$. Видно, что передний фронт по переменной t очень крутой, и имеет две части импульса положительная и отрицательная, которая не имеет, по видимому, смысла. На рис 1.7б, для примера, показана поверхность соответствующая второму импульсу на круге единичного радиуса в точке $x = \sqrt{1 - y^2}, y = 1/2$. Зависимость решения от угловой скорости ω при следующих значениях параметров $\theta = \varphi - \omega t, \chi = -1, t = 2, \varphi = \pi$ показаны на Рис. 1.8 а,б со знаком плюс в формуле для ξ (1.30). На Рис. 1.8 с,д показана та же зависимость рассчитанная по формуле со знаком минус в формуле для ξ в (1.30). Видно, что свойства в зависи-

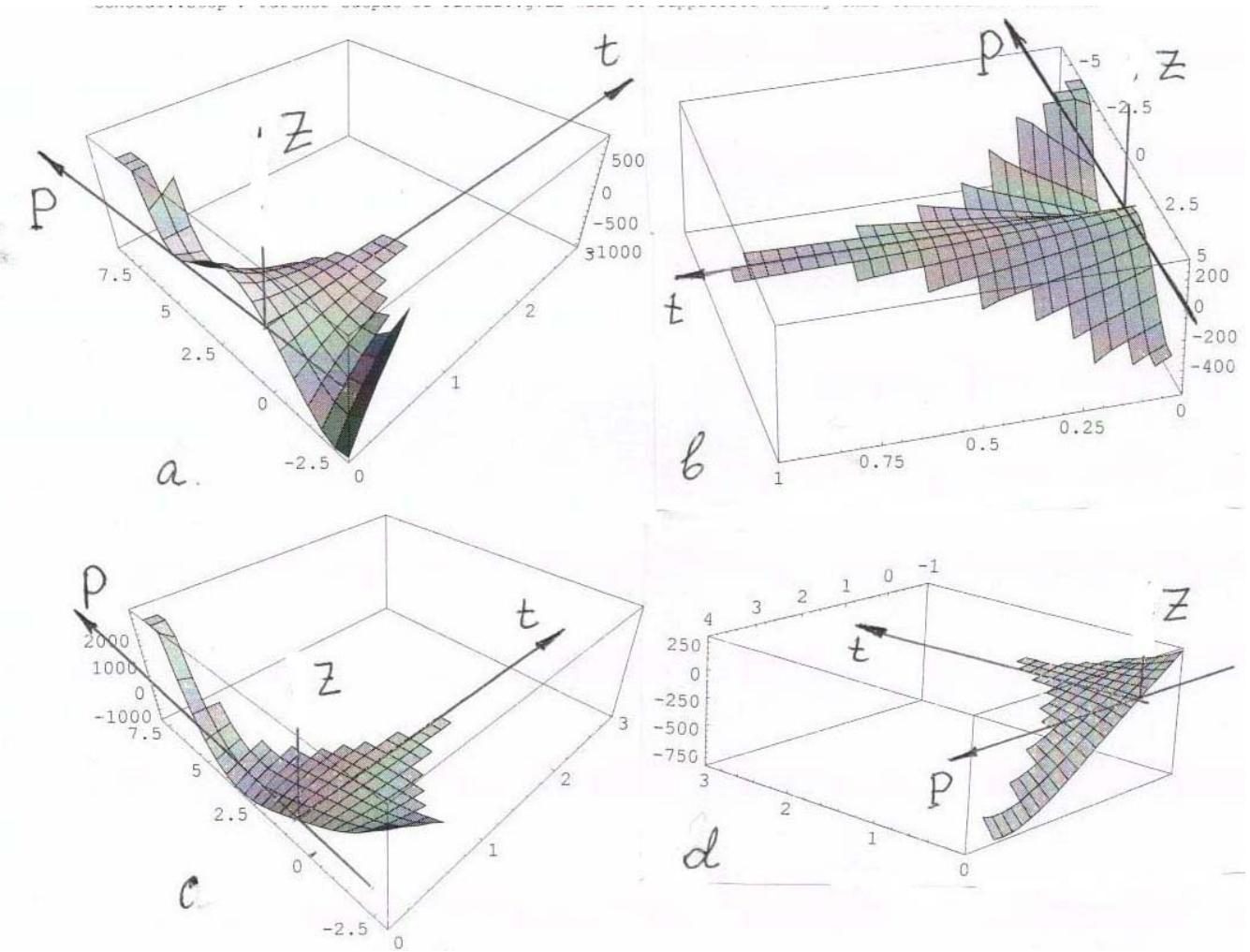


Рис. 1.7: Импульс в параметрическом виде вычислен в точках $x = \sqrt{1 - y^2}$, $y = 3/4$ (a,c) и $y = 1/2$ (b,d). На Рис.1.7 a,b при расчетах выбран знак минус в формуле для ξ в (30). На Рис.1.7 c,d при расчетах выбран знак плюс в формуле для ξ в (30) в тех же точках.

симости от направления вращения спиральной волны, сильно изменяются.

1.5. Эффект остановки спиральной волны $\omega = 0$.

Вычисление формулы порога активации A и оценки характерного размера структуры.

Проведем анализ формул при нулевой угловой скорости. После подстановки $\omega = 0$, $K_8 = K_6$ и из (1.30) поучим алгебраическое уравнение четвертой степени

$$\begin{aligned}
 & U^4 + q_3 U^3 + q_2 U^2 + q_1 U + q_0 = 0, \\
 & q_0 = -A K_6^2 u_0 / Z_4, \\
 & q_1 = K_6 [K_6(K_2 - K_1 K_4)u_0 + A K_1(K_6 - K_2 K_6)u_0 - \\
 & - 2 K_3 K_7 u_0] / (K_1 Z_4), \\
 & q_2 = -[[A K_1 (K_3 K_7(K_3 K_7 u_0 - 2 K_6) + \\
 & + K_2 K_6(K_3 K_7 u_0 - K_6)) + K_6(-2 K_3 K_6 K_7 u_0 + \\
 & + K_1 K_4 (2 K_3 K_7 u_0 + K_6(K_2 u_0 - 1 + K_3 u_0)))]] / (K_1 Z_4), \\
 & q_3 = -[[-K_3^2 K_6 K_7^2 u_0 + K_1 (-A K_3^2 K_7^2 + \\
 & + K_4 (K_3 K_7 (K_3 K_7 u_0 - 2 K_6) + K_5 K_6 (K_3 K_7 u_0 - K_6)) + \\
 & + K_2 K_6(-A K_3 K_7 + K_4(K_5 K_6 u_0 - K_6 + K_3 K_7 u_0)))] / (K_1 Z_4)], \\
 & Z_4 = K_4 (K_2 K_6 + K_3 K_7) (K_5 K_6 + K_3 K_7). \tag{1.37}
 \end{aligned}$$

Решение алгебраического уравнения четвертой степени

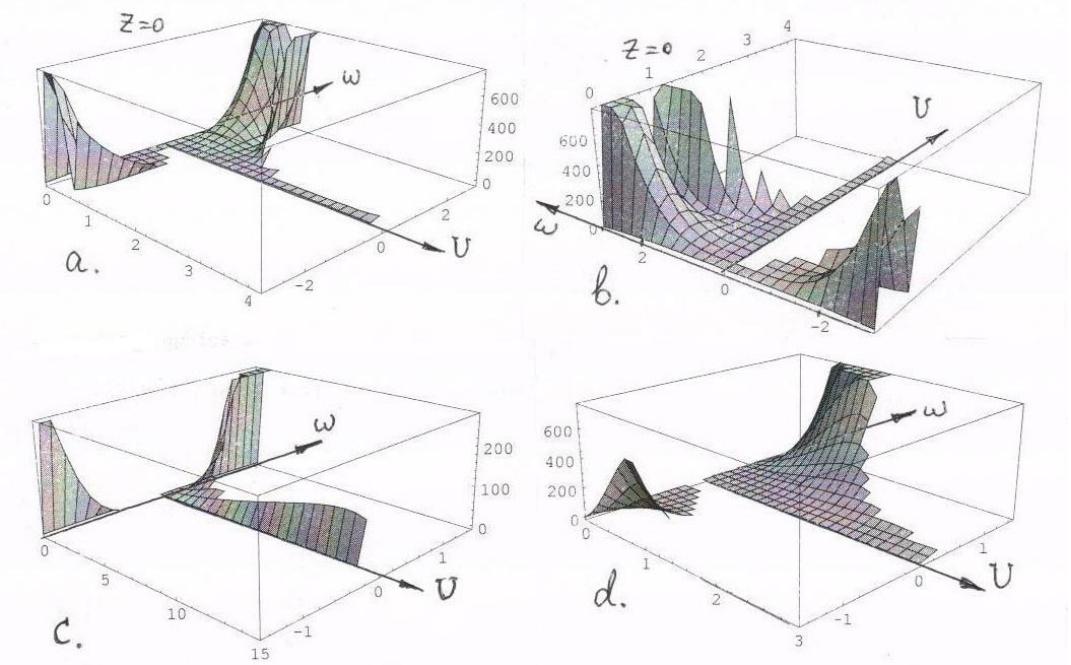


Рис. 1.8: Зависимость решения от угловой скорости ω при следующих значениях параметров $\theta = \varphi - \omega t$, $\chi = -1$, $t = 2$, $\varphi = \pi$ показаны на Рис. 1.8 а,б со знаком плюс в формуле для ξ (1.30). На Рис. 1.8 с,д показана та же зависимость рассчитанная по формуле со знаком минус в формуле для ξ в (1.30).

содержит, в частности, квадратные корни из дискриминанта

$$D_1 = -4 (q^2 - 3 q_1 q U_3 + 12 q_0)^3 + (27 q_{12} + 2 q_2^3 - 9 q_1 q_2 q_3 - 72 q_2 q_0 + 27 q_3^2 q_0)^2. \quad (1.38)$$

Для того чтобы получить вещественные решения дискриминант должен быть неотрицательным. Уравнение $D_1 = 0$ определяет пороговое значение активации A . Для параметра A получаем алгебраическое уравнение шестой степени. График A приведен на Рис. 1.6d. Два корня отрицательные, два корня комплексные, сопряженные они посторонние. Остаются два положительных корня: $A = 0.00209767$, $A = 581.748$. Первый корень дает пороговое значение, а смысл второго корня связан с еще одной особой точкой на фазовой плоскости, о которой упоминается в [1] на стр. 680.

Из неравенства неотрицательности подкоренного выражения для ξ в (1.30) следует оценка характерного размера области (тромба). Так как $\chi = \ln r$, см. (1.2), то получим

$$r \leq (\sqrt{2}/(C_1 U))^{(\Phi_2/(C_1 K_8 K_7))} \exp[\theta (K_7 + C_1 \omega)/K_7].$$

Анализ этого выражения показывает, что когда значения функции U малы, то размер области, в котором находится жидкая кровь, большой. Но когда значения функции U на десятки порядков возрастают, то размер области резко уменьшается и это уже не жидкость, а тромб.

Построенные решения будут полезны в теории разрабатываемой в работах [1]-[4]. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что аналогичное семейство решений распространяется на широкий класс систем типа (1) и им соответствующих нелинейных уравнений четвертого порядка.

Глава 2. Феноменологическая модель свёртывания крови

2.1. Постановка и описание задачи

Большой цикл работ по математическому моделированию пространственной динамики процесса свертывания крови представлен в [1]-[3]. Эффект остановки спиральной волны впервые обнаружен при численном моделировании процесса в [2]. В этих работах сформулировано несколько феноменологических распределенных моделей. Эта модель по оценке степени нелинейности занимает промежуточное место между моделью ФХН и гомогенной кинетики. Система уравнений для активатора процесса свертываемости $Q(t, x, y)$ (тромбина) и ингибитора $S(t, x, y)$ в первой, наиболее простой, распределенной модели модели [3]-[4] имеет вид

$$\begin{aligned} Q'_t - d \Delta Q - \alpha Q^2 / (u_0 + Q) + Q (\gamma S + k_1) &= 0, \\ S'_t - d \Delta S - \beta Q (1 - S/C_0) (1 + S^2/v_0^2) + k_2 S &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь C_0 , v_0 , u_0 , d , k_j , $j = 1, 2$ константы модели, и предполагаем, что $S(t, x, y)$, $Q(t, x, y)$ -двойды непрерывно дифференцируемые функции независимых пе-

ременных. Δ - оператор Лапласа. Эти результаты опубликованы нами в [35], [36].

Предполагается, что уравнения (2.1) рассматриваютсѧ в некоторой выпуклой области на границе которой ставится краевое условие второго рода (условие Неймана) для обоих функций.

Математическая модель из двух нелинейных параболических уравнений (2.1) перепишем в системе координат χ, θ связанный с медленно вращающейся полярной системой координат $Q(t, x, y) = U(\chi, \theta), S(t, x, y) = V(\chi, \theta)$, где $\chi = \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan(y/x) - \omega t$.

Для задачи выставляются краевые условия второго рода на окружности радиуса много большего, чем характерный размер ρ_0 .

$$\begin{aligned} & -\omega \exp(2 \chi) U'_{\theta} - d \Delta U(\chi, \theta) - \exp(2 \chi) \alpha U^2 / (u_0 + U) + \\ & + \exp(2 \chi) U (\gamma V + k_1) = 0, \\ & -\exp(2 \chi) \beta U (1 - V/C_0) (1 + V^2/v_0^2) + \\ & + \exp(2 \chi) k_2 V - \omega \exp(2 \chi) V'_{\theta} - d \Delta V = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В таких переменных оператор Лапласа примененный к функции U имеет вид

$\Delta U = [U''_{\theta\theta} + U''_{\chi\chi}] \exp(-2\chi)$. Для построения точного решения используется метод нефиксированной конструктивной замены переменных (МНФКЗП). Делаем «плавающую», нефиксированную конструктивную замену переменных

$$U(\chi, \theta)|_{\theta=\theta(\xi, \delta), \chi=\chi(\xi, \delta)} = P(\xi, \delta), \\ V(\chi, \theta)|_{\theta=\theta(\xi, \delta), \chi=\chi(\xi, \delta)} = W(\xi, \delta). \quad (2.3)$$

Введены «дифференциальные связи» [4]–[7]

$$\frac{\partial U}{\partial \chi}|_{\chi=\chi(\xi, \delta), \theta=\theta(\xi, \delta)} = Y(\xi, \delta), \quad \frac{\partial U}{\partial \theta}|_{\chi=\chi(\xi, \delta), \theta=\theta(\xi, \delta)} = T(\xi, \delta), \\ \frac{\partial V}{\partial \chi}|_{\chi=\chi(\xi, \delta), \theta=\theta(\xi, \delta)} = R(\xi, \delta), \\ \frac{\partial V}{\partial \theta}|_{\chi=\chi(\xi, \delta), \theta=\theta(\xi, \delta)} = B(\xi, \delta). \quad (2.4)$$

Существует решение построенное МНФКЗП, которое приведем коротко в теореме

Теорема 2.1.

Пусть дана система (2.2) для функций

$$P(\xi, \delta)|_{\xi=\xi(\chi, \theta), \delta=\delta(\chi, \theta)} = U(\chi, \theta)|_{\chi=\ln \sqrt{x^2+y^2}, \theta=\arctan(y/x)-\omega t} = \\ = Q(t, x, y), \quad W(\xi, \delta)|_{\xi=\xi(\chi, \theta), \delta=\delta(\chi, \theta)} = \\ = V(\chi, \theta)|_{\chi=\ln \sqrt{x^2+y^2}, \theta=\arctan(y/x)-\omega t} = S(t, x, y). \quad (2.5)$$

Тогда существует точное решение, где функция $U(\chi, \theta)$ определена в неявной, параметрической форме равенством:

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &\stackrel{\text{def}}{=} 8 C_0 d u_0^3 v_0^2 \omega \xi^3 + A_1(\xi, \chi) U + A_2(\xi, \chi) U^2 + \\ &+ A_3(\xi, \chi) U^3 + A_4(\xi, \chi) U^4 + A_5(\xi, \chi) U^5 + \\ &+ A_6(\xi, \chi) U^6 + A_7(\xi, \chi) U^7 = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \text{зде } \xi &= -C_1 U(\chi, \theta) / 2 \mp \\ &\mp (1/2) \exp(-C_1 \chi / 2) \sqrt{2 \exp(C_1 \theta) - C_1^2 U^2 \exp(C_1 \chi)}. \end{aligned}$$

Все функции $A_j, j = 1, 7$ явно вычислены

$$\begin{aligned} A_1(\xi, \chi) &= 2 u_0^2 \omega \xi^2 [6C_1 C_0 du_0 v_0^2 \gamma^2 + 12C_0 dv_0^2 \xi \gamma^2 - \\ &- \exp(2 \chi) u_0 \omega (C_0 v_0^2 \gamma^2 + \beta \xi \omega)], \\ A_2(\xi, \chi) &= 2u_0 \omega \xi [4C_1^2 C_0 du_0^2 v_0^2 \gamma^2 + 18 C_1 C_0 du_0 v_0^2 \xi \gamma^2 + \\ &+ 12 C_0 d v_0^2 \gamma^2 \xi^2 + \exp(2 \chi) (-C_0 k_2 u_0^2 v_0^2 \gamma^2 + \\ &+ u_0 (-C_1 C_0 u_0 v_0^2 \gamma^2 + 3k_1 u_0 \beta \xi + C_0 u_0 \beta \gamma \xi - \\ &- 3 C_0 v_0^2 \gamma^2 \xi) \omega - 3 u_0 \beta \xi (C_1 u_0 + \xi) \omega^2)], \\ A_3(\xi, \chi) &= -8C_0 du_0 v_0^2 \alpha \gamma^2 \xi^2 + 2C_0 dv_0^2 \gamma^2 (C_1^3 u_0^3 + \\ &+ 12 C_1^2 u_0^2 \xi + 18 C_1 u_0 \xi^2 + 4 \xi^3) \omega + \\ &+ \exp(2 \chi) (2C_0 k_1 k_2 u_0^3 v_0^2 \gamma^2 - 2u_0^2 (C_1 C_0 k_2 u_0 v_0^2 \gamma^2 + \\ &+ 3 k_1^2 u_0 \beta \xi + 2 C_0 k_1 u_0 \beta \gamma \xi + 3 C_0 k_2 v_0^2 \gamma^2 \xi - \\ &- C_0 v_0^2 \alpha \gamma^2 \xi + u_0 v_0^2 \beta \gamma^2 \xi) \omega - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -u_0(C_1^2 C_0 u_0^2 v_0^2 \gamma^2 - 12C_1 k_1 u_0^2 \beta \xi - 4C_1 C_0 u_0^2 \beta \gamma \xi + \\
& + 6C_1 C_0 u_0 v_0^2 \gamma^2 \xi - 18k_1 u_0 \beta \xi^2 + 6u_0 \alpha \beta \xi^2 - 6C_0 u_0 \beta \gamma \xi^2 + \\
& + 6 C_0 v_0^2 \gamma^2 \xi^2) \omega^2 - 6u_0 \beta \xi (C_1^2 u_0^2 + 3C_1 u_0 \xi + \xi^2) \omega^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4(\xi, \chi) = & (-8 C_1 C_0 d u_0 v_0^2 \alpha \gamma^2 \xi + \\
& + 6 C_1 C_0 d v_0^2 \gamma^2 (C_1^2 u_0^2 + 4 C_1 u_0 \xi + 2 \xi^2) \omega + \\
& + \exp(2 \chi) (2 k_1^3 u_0^3 \beta + 2 C_0 k_1^2 u_0^3 \beta \gamma + \\
& + 6 C_0 k_1 k_2 u_0^2 v_0^2 \gamma^2 - 2 C_0 k_2 u_0^2 v_0^2 \alpha \gamma^2 + \\
& + 2 k_1 u_0^3 v_0^2 \beta \gamma^2 + 2 C_0 u_0^3 v_0^2 \beta \gamma^3 - 2u_0 (3C_1 k_1^2 u_0^2 \beta + \\
& + 2 C_1 C_0 k_1 u_0^2 \beta \gamma + 3 C_1 C_0 k_2 u_0 v_0^2 \gamma^2 - \\
& - C_1 C_0 u_0 v_0^2 \alpha \gamma^2 + C_1 u_0^2 v_0^2 \beta \gamma^2 + 9 k_1^2 u_0 \beta \xi - \\
& - 6 k_1 u_0 \alpha \beta \xi + 6 C_0 k_1 u_0 \beta \gamma \xi - 2 C_0 u_0 \alpha \beta \gamma \xi + \\
& + 3 C_0 k_2 v_0^2 \gamma^2 \xi - C_0 v_0^2 \alpha \gamma^2 \xi + \\
& + 3u_0 v_0^2 \beta \gamma^2 \xi) \omega + (6 C_1^2 k_1 u_0^3 \beta + 2C_1^2 C_0 u_0^3 \beta \gamma - \\
& - 3C_1^2 C_0 u_0^2 v_0^2 \gamma^2 + 36C_1 k_1 u_0^2 \beta \xi - 12C_1 u_0^2 \alpha \beta \xi + \\
& + 12 C_1 C_0 u_0^2 \beta \gamma \xi - 6 C_1 C_0 u_0 v_0^2 \gamma^2 \xi + 18 k_1 u_0 \beta \xi^2 - \\
& - 12 u_0 \alpha \beta \xi^2 + 6 C_0 u_0 \beta \gamma \xi^2 - 26 v_0^2 \gamma^2 \xi^2) \omega^2 - \\
& - 2 \beta (C_1 u_0 + \xi) (C_1^2 u_0^2 + 8 C_1 u_0 \xi + \xi^2) \omega^3), \quad (2.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_5(\xi, \chi) = & -4 C_1^2 C_0 d u_0 v_0^2 \alpha \gamma^2 + \\
& + 6 C_1^3 C_0 d u_0 v_0^2 \gamma^2 \omega + 8 C_1^2 C_0 d \xi v_0^2 \gamma^2 \omega +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \exp(2 \chi) (6k_1^3 u_0^2 \beta - 6k_1^2 u_0^2 \beta \alpha + 6C_0 k_1^2 u_0^2 \beta \gamma - \\
& - 4 C_0 k_1 u_0^2 \alpha \beta \gamma + 6 C_0 k_1 k_2 u_0 v_0^2 \gamma^2 - \\
& - 4 C_0 k_2 u_0 v_0^2 \alpha \gamma^2 + 6 k_1 u_0^2 v_0^2 \beta \gamma^2 - 2u_0^2 v_0^2 \alpha \beta \gamma^2 + \\
& + 6C_0 u_0^2 v_0^2 \beta \gamma^3 - 2(9C_1 k_1^2 u_0^2 \beta - 6C_1 k_1 u_0^2 \alpha \beta + \\
& + 6 C_1 C_0 k_1 u_0^2 \beta \gamma - 2 C_1 C_0 u_0^2 \alpha \beta \gamma + \\
& + 3C_1 C_0 k_2 u_0 v_0^2 \gamma^2 - C_1 C_0 u_0 v_0^2 \alpha \gamma^2 + 3C_1 u_0^2 v_0^2 \beta \gamma^2 + \\
& + 9 u_0 k_1^2 \beta \xi - 12 k_1 u_0 \alpha \beta \xi + 3 u_0 \alpha^2 \beta \xi + \\
& + 6 C_0 k_1 u_0 \beta \gamma \xi - 4 C_0 u_0 \alpha \beta \gamma \xi + \\
& + C_0 k_2 v_0^2 \gamma \xi + 3u_0 v_0^2 \beta \gamma^2 \xi) \omega + (18u_0 C_1^2 k_1 u_0^2 \beta - \\
& - 6 C_1^2 u_0^2 \alpha \beta + 6 C_1^2 C_0 u_0^2 \beta \gamma - \\
& - 3C_1^2 C_0 u_0 v_0^2 \gamma^2 + 36C_1 k_1 u_0 \beta \xi - 24C_1 u_0 \alpha \beta \xi + \\
& + 12C_1 C_0 u_0 \beta \gamma \xi - 2C_1 C_0 v_0^2 \gamma^2 \xi + 6k_1 \beta \xi^2 - 6\alpha \beta \xi^2 + \\
& + 2 C_0 \beta \gamma \xi^2) \omega^2 - 6 C_1 \beta (C_1^2 u_0^2 + 3 C_1 u_0 \xi + \xi^2) \omega^3)), \\
A_6(\xi, \chi) = & (2 C_1^3 C_0 d v_0^2 \gamma^2 \omega + \exp(2 \chi) (6 k_1^3 u_0 \beta - \\
& - 12 k_1^2 u_0 \alpha \beta + 6 k_1 u_0 \alpha^2 \beta + 6 C_0 k_1^2 u_0 \beta \gamma - \\
& - 8C_0 k_1 u_0 \alpha \beta \gamma + 2C_0 u_0 \alpha^2 \beta \gamma + 2C_0 k_1 k_2 v_0^2 \gamma^2 - \\
& - 2C_0 k_2 v_0^2 \alpha \gamma^2 + 6k_1 C_0 v_0^2 \beta \gamma^2 - 4 u_0 v_0^2 \alpha \beta \gamma^2 + \\
& + 6 C_0 u_0 v_0^2 \beta \gamma^3 - 2(9 C_1 k_1^2 u_0 \beta - 12 C_1 k_1 u_0 \alpha \beta + \\
& + 3 C_1 u_0 \alpha^2 \beta + 6 C_1 C_0 k_1 u_0 \beta \gamma - \\
& - 4 C_1 C_0 u_0 \alpha \beta \gamma + C_1 C_0 k_2 v_0^2 \gamma^2 + 3 C_1 C_0 v_0^2 \beta \gamma^2 + \\
& + 3 k_1^2 \beta \xi - 6 k_1 \alpha \beta \xi + 3 \alpha^2 \beta \xi + 2 C_0 k_1 \beta \gamma \xi -)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 C_0 \alpha \beta \gamma \xi + v_0^2 \beta \gamma^2 \xi) \omega + C_1 (12 C_1 k_1 u_0 \beta - \\
& -12 C_1 u_0 \alpha \beta + 6 C_1 C_0 u_0 \beta \gamma - C_1 C_0 v_0^2 \gamma^2 + 12 k_1 \beta \xi - \\
& -12 \alpha \beta \xi + 4 C_0 \beta \gamma \xi) \omega^2 - 6 C_1^2 \beta (C_1 u_0 + \xi) \omega^3), \\
A_7(\xi, \chi) &= 2 \exp(2 \chi) \beta (k_1 - \alpha + C_0 \gamma - C_1 \omega) (k_1^2 - \\
& -2k_1 \alpha + \alpha^2 + v_0^2 \gamma^2 - 2C_1 k_1 \omega + 2 C_1 \alpha \omega + C_1^2 \omega^2).
\end{aligned}$$

Функция $V(\chi, \theta)$ определяется явно

$$\begin{aligned}
V(\chi, \theta) &= [u_0 \xi \omega + (-k_1 u_0 + C_1 u_0 \omega + \xi \omega) U + \\
& + (-k_1 + \alpha + C_1 \omega) U^2] / [\gamma U (u_0 + U)]. \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Здесь C_1 – константа. Из (2.6), (2.7) следует выражение для коэффициента диффузии d .

Доказательство. Как известно, произведение матрицы на обратную матрицу равно единичной матрице. Расписывая это произведение по элементам для матрицы Якоби, получим формулы пересчёта производных старых переменных χ, θ по новым ξ, δ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta}{\partial \theta} &= \frac{\partial \chi}{\partial \xi} / \det J, \quad \frac{\partial \delta}{\partial \chi} = -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \det J, \\
\frac{\partial \xi}{\partial \theta} &= -\frac{\partial \chi}{\partial \delta} / \det J, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \chi} = \frac{\partial \theta}{\partial \delta} / \det J. \tag{2.9}
\end{aligned}$$

После преобразований аналогичных [4]–[7] получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P(\xi, \delta)}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \delta} - \frac{\partial P}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) &= Y(\xi, \delta) [\chi'_{\xi} \theta'_{\delta} - \theta'_{\xi} \chi'_{\delta}], \\ \left(-\frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \delta} + \frac{\partial P}{\partial \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) &= T(\xi, \delta) [\chi'_{\xi} \theta'_{\delta} - \theta'_{\xi} \chi'_{\delta}], \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial W(\xi, \delta)}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \delta} - \frac{\partial W}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) &= R(\xi, \delta) \det J, \\ \left(-\frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \delta} + \frac{\partial W}{\partial \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) &= B(\xi, \delta) \det J. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Уравнения системы (2.2) принимают вид

$$\begin{aligned} &(\gamma P(\xi, \delta) W - \omega T + k_1 P) \exp(2 \chi(\xi, \delta)) + \\ &- \exp(2 \chi) \alpha P^2 / (u_0 + P) + d \left(-\frac{\partial T}{\partial \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \delta} \right) / \det J + \\ &+ d \left(\frac{\partial Y}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \delta} \right) / [\chi'_{\xi} \theta'_{\delta} - \theta'_{\xi} \chi'_{\delta}] = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} &\exp(2 \chi(\xi, \delta)) [(k_2 W(\xi, \delta) - \omega B) - \\ &- \beta P (1 - W/C_0) (1 + W^2/v_0^2)] + \\ &+ d \left(-\frac{\partial B}{\partial \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \delta} + \frac{\partial R}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial R}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \delta} \right) / \det J = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Далее с необходимостью, системы уравнения дополняются двумя условиями равенства смешанных производных в переменных ξ, δ :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} U'_{\chi} = \frac{\partial}{\partial \chi} U'_{\theta}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} V'_{\chi} = \frac{\partial}{\partial \chi} V'_{\theta}. \quad (2.14)$$

Их можно записать в виде

$$-\frac{\partial \chi}{\partial \delta} \frac{\partial Y}{\partial \xi} + \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial Y}{\partial \delta} - \frac{\partial \theta}{\partial \delta} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial T}{\partial \delta} = 0, \quad (2.15)$$

$$-\frac{\partial \chi}{\partial \delta} \frac{\partial R}{\partial \xi} + \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{\partial R}{\partial \delta} - \frac{\partial \theta}{\partial \delta} \frac{\partial B}{\partial \xi} + \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial B}{\partial \delta} = 0. \quad (2.16)$$

Здесь не будем повторять всю схему построения решения МНФКЗП подробно. Коротко укажем, что из четырех уравнений (2.10),(2.12),(2.15) строим систему функциональных линейных алгебраических уравнений (СФЛАУ) $A_1 X = b_1$. Из четырех уравнений (2.11),(2.13),(2.16) строим вторую СФЛАУ $A_2 X = b_2$.

Теорема 2.2.

Пусть дана система уравнений первого порядка с частными производными (2.10),(2.12), (2.15), эквивалентная первому уравнению с частными производными второго порядка (2.2).

Тогда система (2.10),(2.12), (2.15) приводится к СФЛАУ $A_1 X = b_1$, которое имеет единственное решение

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi} = g_1(\xi, \delta), \quad \frac{\partial \chi}{\partial \delta} = g_2, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = g_3(\xi, \delta), \quad \frac{\partial \theta}{\partial \delta} = g_4. \quad (2.17)$$

Это новая система уравнений с частными про-

изводными первого порядка с формально «известной» правой частью, где

$$\begin{aligned}
g_1(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} ((\exp(2\chi)) (-u_0 \omega T + P^2 (k_1 - \alpha + \gamma W)) + \\
&+ P (-\omega T + u_0 (k_1 + \gamma W))) T'_{\delta}) (P'_{\xi})^2 + \\
&+ d (u_0 + P) T P'_{\delta} ((T'_{\xi})^2 + (Y'_{\xi})^2) + \\
&+ P'_{\xi} (-\exp(2\chi) P^2 (k_1 - \alpha + \gamma W) P'_{\delta} T'_{\xi} + \\
&+ u_0 (d Y (Y'_{\delta} T'_{\xi} - T'_{\delta} Y'_{\xi}) + T (\exp(2\chi) \omega P'_{\delta} T'_{\xi} - \\
&- d (T'_{\delta} T'_{\xi} + Y'_{\delta} Y'_{\xi}))) - P (\exp(2\chi) * \\
&* (-\omega T + u_0 (k_1 + \gamma W)) P'_{\delta} T'_{\xi} + \\
&+ d (Y (-Y'_{\delta} T'_{\xi} + T'_{\delta} Y'_{\xi})) + \\
&+ T (T'_{\delta} T'_{\xi} + Y'_{\delta} Y'_{\xi})))) / P_1(\xi, \delta). \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Остальные функции и $P_1(\xi, \delta)$ приведены в [36]. \square

Доказательство. Условия разрешимости системы (2.17) давно известны, это два равенства смешанных производных $\chi''_{\xi \delta} = \chi''_{\delta \xi}$, $\theta''_{\xi \delta} = \theta''_{\delta \xi}$. Здесь приводим пример из семейства решений. Положим

$$Y(\xi, \delta) = \xi, \quad T(\xi, \delta) = C_1 P(\xi, \delta) + \xi, \tag{2.19}$$

и из общего множителя в условии разрешимости следует (2.8).

Из (2.17) получим новую систему уравнений первого порядка с частными производными с формально «известной» правой частью, которая значительно упростилась

$$\begin{aligned}\chi'_{\xi} &= [-2 \xi - C_1 P(\xi, \delta) (2 + C_1 P'_{\xi})]/(C_1 P_2) \\ \chi'_{\delta} &= -C_1 P P'_{\delta}/P_2, \\ \theta'_{\xi} &= [2 \xi + C_1(2 \xi + C_1 P) P'_{\xi}]/(C_1 P_2) \\ \theta'_{\delta} &= (2 \xi + C_1 P) P'_{\delta}/P_2, \\ P_2 &= 2 \xi^2 + 2 C_1 \xi P + (C_1 P)^2.\end{aligned}\tag{2.20}$$

Интегралы системы имеют вид

$$\begin{aligned}\theta &= C_{\theta} - C_1^{-1} \arctan[1 + C_1 P/\xi] + \\ &\quad +(2 C_1)^{-2} \ln[2 \xi^2 + 2 C_1 \xi P + (C_1 P)^2], \\ \chi &= C_r - C_1^{-1} \arctan[1 + C_1 P/\xi] - \\ &\quad -(2 C_1)^{-2} \ln[2 \xi^2 + 2 C_1 \xi P + (C_1 P)^2].\end{aligned}\tag{2.21}$$

Вычитая интегралы и полагая, для простоты, равными нулю константы сдвига C_{θ}, C_r , возвращаемся в исходные переменные θ, χ . Тогда можно получить выражение для ξ приведенное в теореме 2.1. Графики построенные ниже по формулам со знаком плюс перед корнем

в выражении для ξ приведенное в теореме 2.1. Из уравнения (2.13) следует (2.6).

Из соотношений (2.11) получим выражения для $B(\xi, \delta)$, $R(\xi, \delta)$, так как левые части уже определены. Убедимся, что (2.16) также удовлетворяются тождественно.

Таким образом, все введенные в (2.3), (2.4) функции определены однозначно.

Возвращаясь в исходные переменные θ , χ получим выражение для $U(\chi, \theta)$, $V(\chi, \theta)$ приведенное в теореме 2.1. Выражение (2.6) определяет решение $U(\chi, \theta)$ задачи или согласно (2.5) определяет решение $Q(t, x, y)$ построенное в неявной, параметрической форме. Выражение для функции $V(\chi, \theta)$ имеем в явном виде (2.8).

2.2. Эффект остановки спиральной структуры

Зададим значения констант из работы [3]-[4] $\alpha = 2$, $\beta = 0.0015$, $\gamma = 5$, $u_0 = 2.95$, $v_0 = 0.525$, $k_1 = 0.05$, $k_2 = 0.35$.

Остальные константы можно задавать произвольно.

На верхних рисунках Рис. 2.1 показаны линии уровня и вид поверхности $\tilde{Z} = 0$ при значении функции

$U = 0.1$ или $Q = 0.1$. На нижних рисунках Рис. 2.1 показан график функции S в силу замены (2.5) V при значении $Q = 0.1$.

Построены решения типа локализованных структур, которые могут вращаться вокруг начала координат, как спиральные волны с угловой скоростью ω . Видно, что концентрация «ингибитора» подстраивается под распределение тромбина и играет роль отрицательной обратной связи. Одни из выводов работы можно сформулировать таким образом. Краевая задача (2.1) является «жесткой», содержит малый параметр при старшей производной. В решении есть области, где функции имеют большой градиент, но это классические функции. Формируется пограничный слой шириной порядка значения малого параметра в некоторой области. Из точных формул можно вычислить поведение функций в любой точке внутри области определения. Построенные решения будут полезны в теории развивающейся в работах [1]-[4]. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что аналогичное семейство решений распространяется на широкий класс систем типа (2.1) и

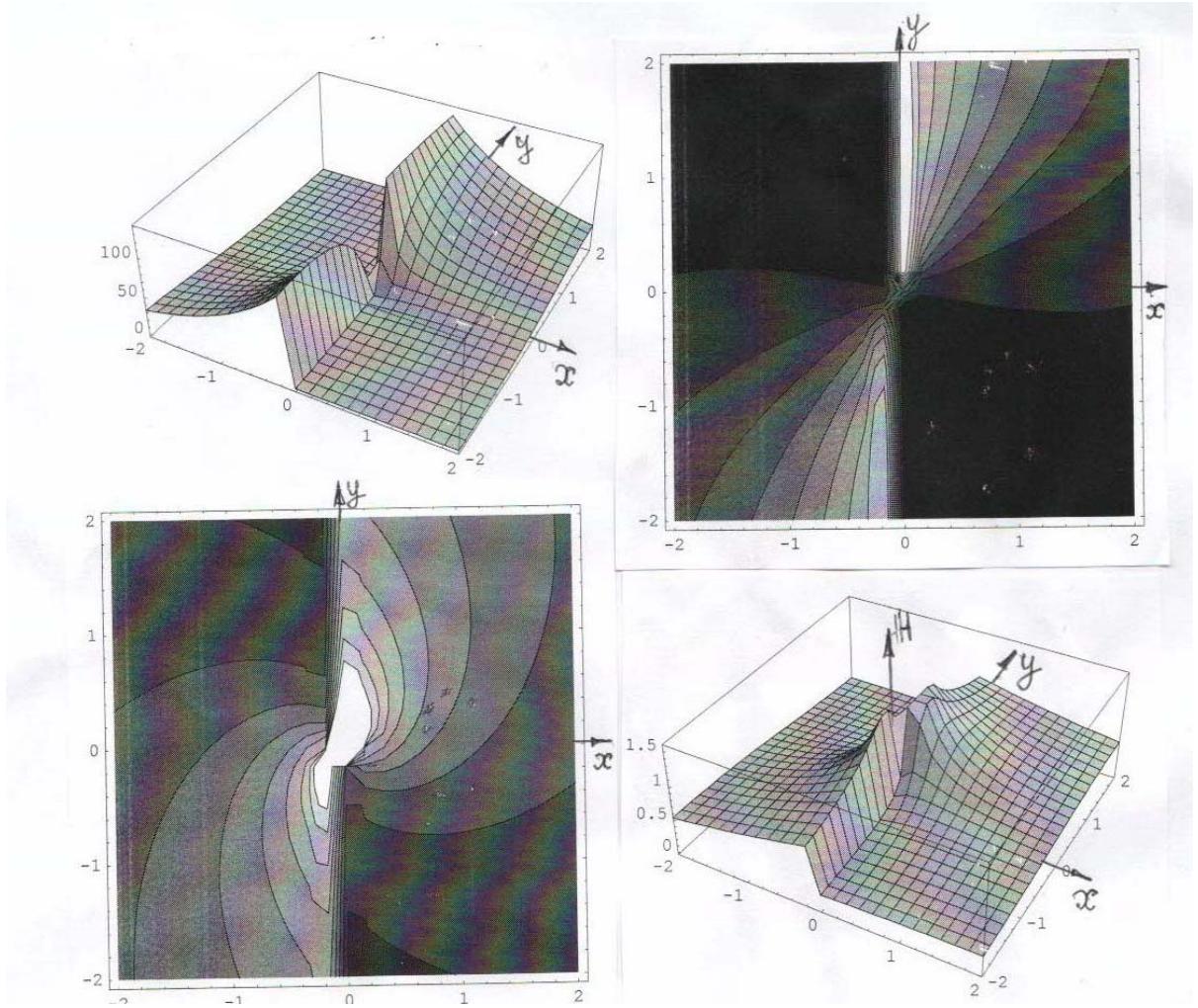


Рис. 2.1: На верхних рисунках показана поверхность $\tilde{Z} = 0$ при значении функции $Q = 0.1$. На нижних рисунках показаны графики для ингибитора.

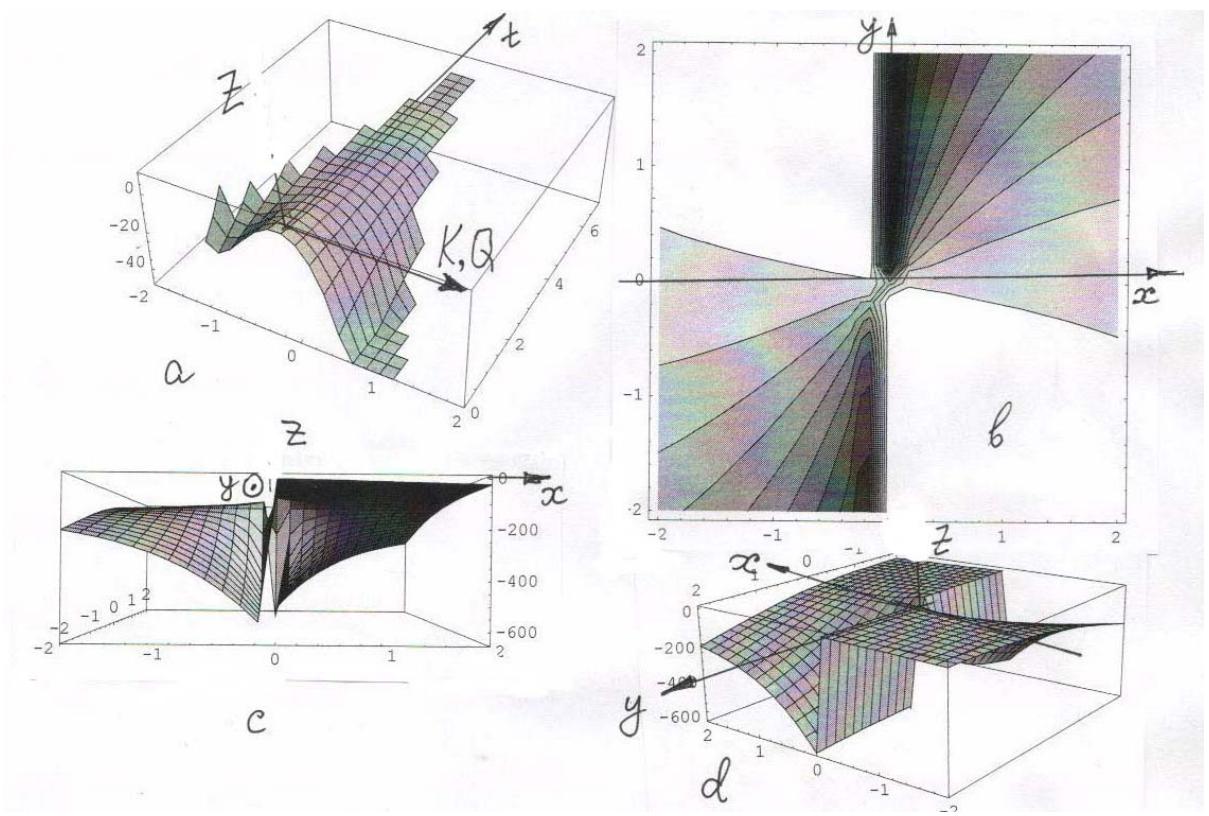


Рис. 2.2: На Рис 2.2а показан импульс в параметрической форме. На Рис 2.2 b,c,d показаны линии уровня и график поверхности $\tilde{Z} = 0$ под другим углом зрения.

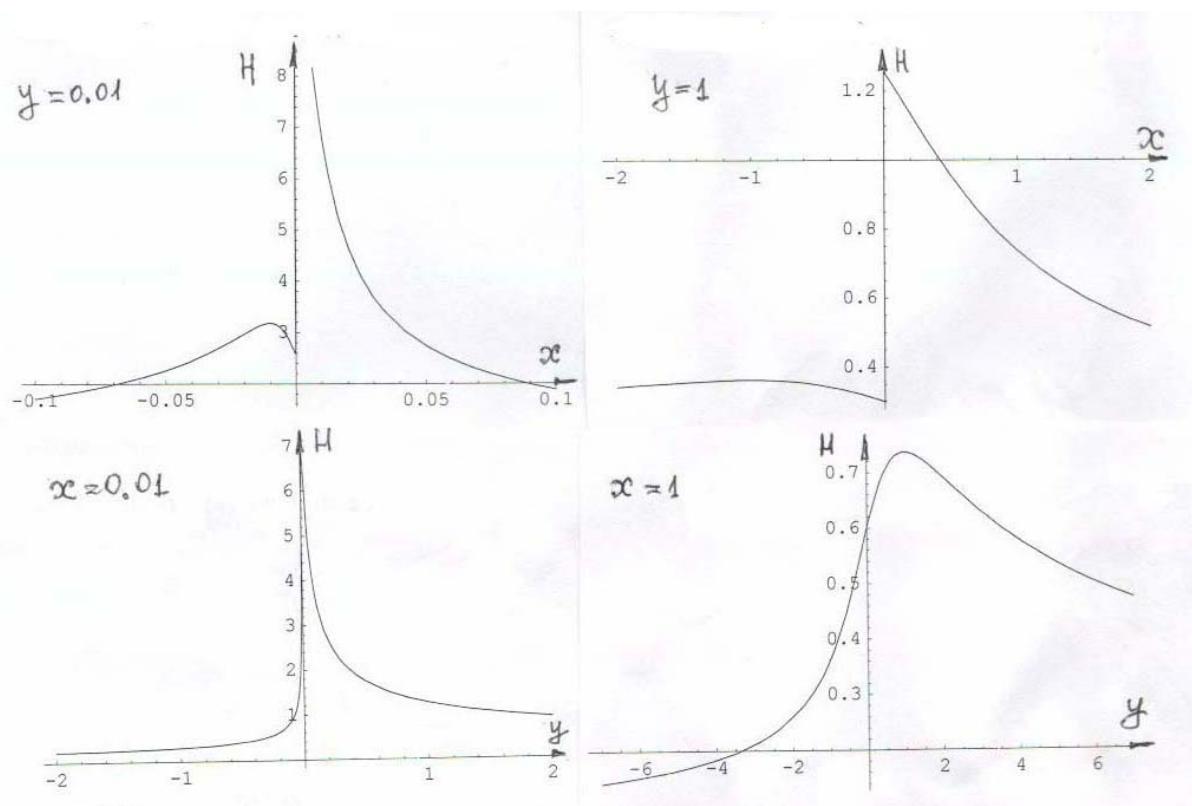


Рис. 2.3: Показаны сечения поверхности для функции ингибитора H приведенной в правом нижнем углу Рис. 2.1.

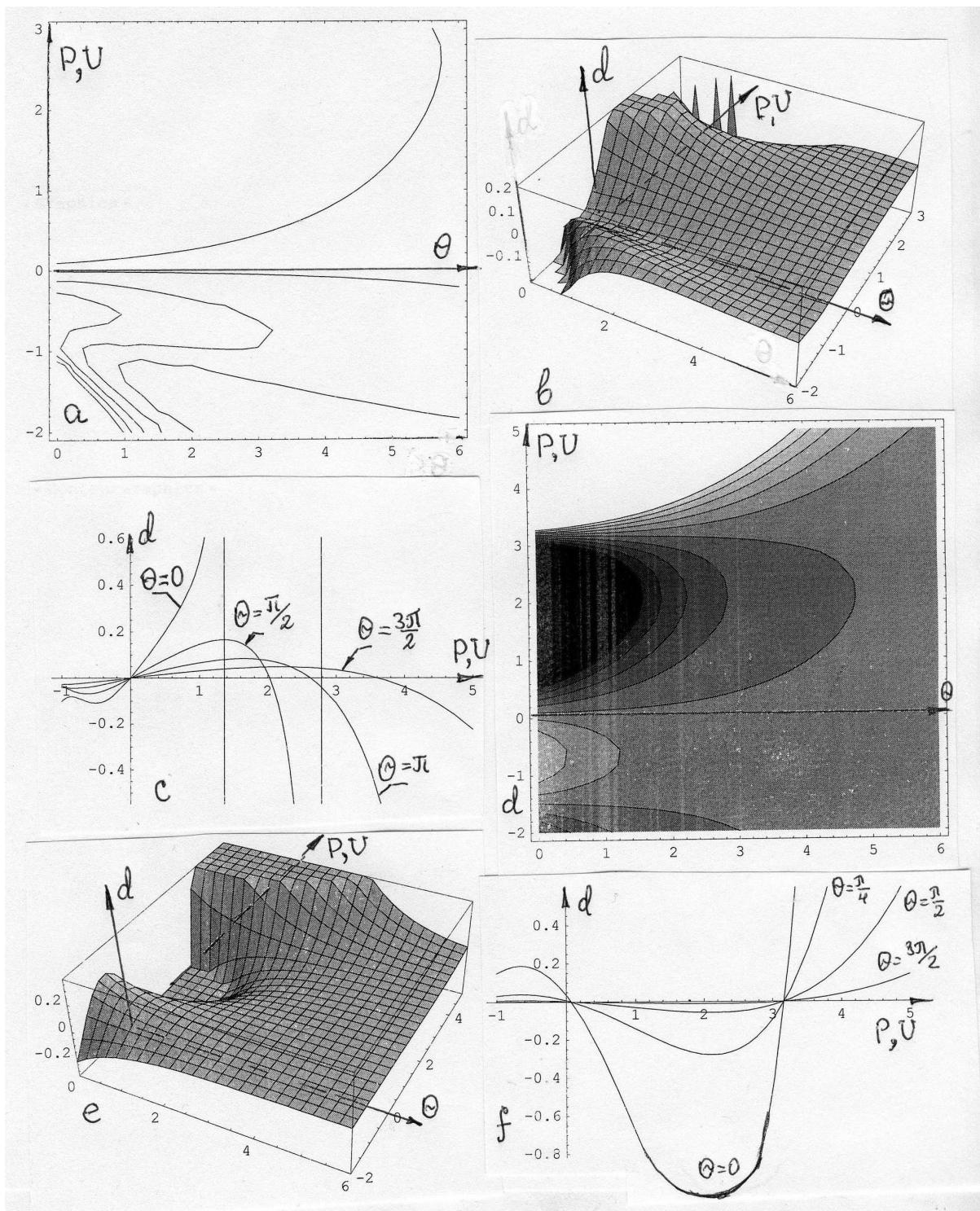


Рис. 2.4: На Рис.2.4а,б,с (при знаке плюс в формуле (2.6)) показана зависимость коэффициента диффузии d , $\omega t = 0.5$ и соответствующая картина линий уровня при тех же значениях констант, что и на предыдущем рисунке. Характер этой зависимости при малых концентрациях резко меняется!

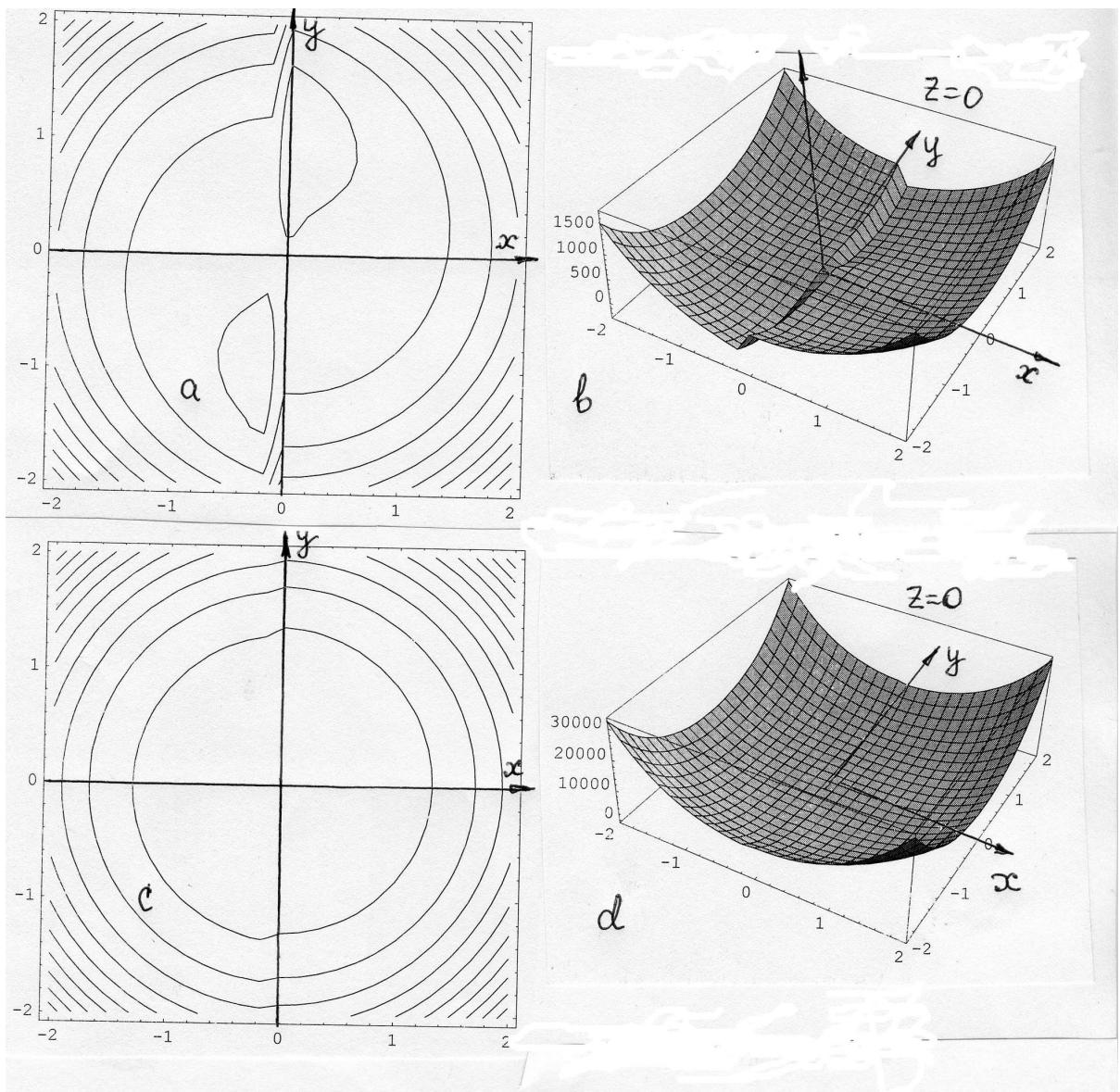


Рис. 2.5: На Рис.2.6а,б показана поверхность $Z = 0$ (2.22) при нулевой угловой скорости и соответствующая картина линий уровня при тех же значениях констант, что и на предыдущем рисунке . $P = 3.2$, $d = 0.2$. Это рисунки в области где концентрации положительные. См. Рис. 2.5 f. На Рис. 2.6 с,d выбраны значения $P = 3.5$, $d = 0.2$ при фиксированном значении переменной θ . В этой области находится уже твердое вещество- тромб.

им соответствующих нелинейных уравнений четвертого порядка. В данном случае, в отличие от [7], существует возможность из построенного решения перейти к решению соответствующей (2.1) эллиптической системе уравнений. Тогда из (2.6)- (2.8) получим теорему.

Теорема 2.3.

Пусть верна теорема 2.1 и $\omega = 0$ и дана система (2.2) для функций (2.5).

Тогда существует точное решение, где функция $U(\chi, \theta)$ определена в неявной, параметрической форме уравнением алгебраическим четвертого порядка, которое следует из (2.6) при $\omega = 0$. Полагая $k_1 = \alpha - C_0 \gamma$ получим уравнение третьего порядка

$$Z \stackrel{\text{def}}{=} B_1 + B_2 U + B_3 U^2 + B_4 U^3 = 0 \quad (2.22)$$

которое имеет один вещественный корень, где коэффициенты $B_j, j = 1, 4$ явно вычислены

$$\begin{aligned} B_1 &= C_0 u_0 v_0^2 \gamma^2 (-2 d \alpha \exp(C_1 \theta) + \\ &+ \exp(2 \chi + C_1 \chi) k_2 u_0^2 (\alpha - C_0 \gamma)), \\ B_2 &= \exp((2 + C_1) \chi) u_0^2 (u_0 \alpha^3 \beta - \\ &- 2 C_0 u_0 \alpha^2 \beta \gamma + 2 C_0 k_2 v_0^2 \alpha \gamma^2 + \end{aligned}$$

$$+ C_0^2 u_0^2 \alpha \beta \gamma^2 + u_0 v_0^2 \alpha \beta \gamma^2 - 3 C_0^2 k_2 v_0^2 \gamma^3),$$

$$\begin{aligned} B_3 = & u_0 \gamma \exp((2 + C_1) \chi) (-2 C_0 u_0 \alpha^2 \beta + \\ & + C_0 k_2 v_0^2 \alpha \gamma + 2 C_0^2 u_0 \alpha \beta \gamma + \\ & + 2 u_0 v_0^2 \alpha \beta \gamma - 3 C_0^2 k_2 v_0^2 \gamma^2), \\ B_4 = & \gamma^2 \exp((2 + C_1) \chi) u_0 \gamma (C_0^2 u_0 \alpha \beta + \\ & + u_0 v_0^2 \alpha \beta - C_0^2 k_2 v_0^2 \gamma), \end{aligned} \quad (2.23)$$

Функция $V(\chi, \theta)$ определяется явно

$$V(\chi, \theta) = [-u_0 \alpha + C_0 u_0 \gamma + C_0 \gamma U] / [\gamma (u_0 + U)]. \quad (2.24)$$

Здесь C_1 – константа.

Доказательство. Вся цепочка рассуждений приведена выше. Как уже отмечалось, в работах автором [1],[3] обсуждается вопрос о эффекте "остановки" "спиральной волны. В решениях построенных в [7] при переходе $\omega \rightarrow 0$ происходит вырождение. В данном случае возможен переход при $\omega \rightarrow 0$ и решения сохраняют вид спиральной структуры. Коэффициент B_5 при U^4 имеет вид $B_5 = \beta (k_1 - \alpha + C_0 \gamma)$. Этот коэффициент вычисляется по приведенным выше численным значениям из работ [3]-[4] и оказывается малым. Положим $k_1 = \alpha - C_0 \gamma$ тогда

$B_5 = 0$ и можно выделить явно вещественный корень кубического уравнения. Это дает возможность выразить решение задачи (2.3) в явном виде.

Таким образом в теореме 3 описан эффект "остановки" структуры.

Структуры имеют вид аналогичный приведенным на Рис.2.2.

Здесь справедливо *Замечание 1.2.6* о качестве графиков построенных с помощью пакета «Математика». Точные формулы обладают симметрией относительно преобразования x, y на $-x, -y$. Из-за того, что в начале координат имеет место особенность, градиент функции по модулю принимает большие значения. Поэтому в окрестности начала координат наблюдаем искажение графиков на Рис 2.1.

На Рис.2.4а,б,с (при знаке плюс в формуле (2.6)) показана зависимость коэффициента диффузии d , $\omega t = 0.5$ и соответствующая картина линий уровня при тех же значениях констант, что и на предыдущем рисунке. Можно перестроить зависимость концентрации в любых переменных $P(\xi, \delta)$, $U(\chi, \theta)$ при малых значениях

коэффициента диффузии при фиксированных углах θ . Рис.2.4 d,f,e те же рисунки при нулевой угловой скорости. Положительное решение существует при значениях больших некоторой константы. См. рисунок 2.4 f при фиксированных углах.

Заключение главы 2.

1. Построенное семейство точных решений может аналитически описывать эффект «остановки» спиральной волны.
2. Задача (2.1) имеет все признаки «жестких» задач и задач с малым параметром при старшей производной. Построенное точное решение позволяет изучить зависимость структуры от параметров задачи.

Глава 3. Е.К.Волосова. Оптимальное «тактическое» управление портфелем в модели линейного стохастического рынка.

3.1. Постановка задачи для уравнения Колмогорова- Фоккера- Планка с начальным гауссовским рас- пределением.

В настоящее время общепризнанным является тот факт, что без применения математических методов невозможно решение задач, возникающих при работе с облигациями и с другими процентными инструментами. Принято разделять две задачи, которые дополняют друг друга. Первая задача: это задача о защите от процентных рисков, то есть защите от тех потерь, к которым может привести активных участников рынка неблагоприятное для них изменение процентных ставок. Ко второй задаче относят расчет возможности извлечения прибыли путем игры на изменении процентных ставок. Для решения данных задач используются современные математические методы, такие как теория случайных процессов, теория уравнений с частными производны-

ми и теория стохастических дифференциальных уравнений, вычислительная математика, теория разностных схем, системный анализ. Необходимо знать и уметь использовать современные математические и статистические пакеты прикладных программ, разработанные к настоящему моменту. Альтернативы такому пути нет. Выбор пути выбирается каждым самостоятельно, но ответственность берет на себя менеджер - лицо, принимающее решение при оперативных действиях на рынке, которое находится в условиях неопределенности. Лицо принимающее решение может собрать данные результатов расчетов момента времени для принятия инвестиционных решений, по разным критериям, которые предлагаются ниже. Предлагается пессимистический критерий - оценка момента времени, в который следует обновить параметры модели и сменить стратегию. Этот критерий основан на свойстве предельной условной дисперсии. Предлагается оптимистический критерий -то есть оптимистично предполагается, что менеджер-наивный оптимист, уверен, что знает значение параметров рынка в данный момент с достаточной точностью.

Следовательно, оптимистично предполагается, что момент времени в который следует принять решение о смене стратегии может быть вычислен на основе ниже изложенного алгоритма Белецкого Плиски с линейной процентной ставкой по модели Васичека. Далее менеджеру следует принять решение, суммируя полученную информацию и находясь в условиях неопределенности. Он привлекает свой опыт и берет на себя все имеющиеся риски. На практике инвестор осуществляет лишь общее руководство и принимает отчеты о деятельности менеджеров- лиц принимающих оперативные решения. Конечно, мы не можем требовать полное понимание математических методов от всех менеджеров и участников рынка. Кто-то довольствуется готовыми компьютерными программами или готовыми результатами расчетов и ставит себя в положение обезьяны из известной басни русского классика И.А.Крылова «Мартишка и очки» [31].

Имеется много исторических хорошо известных примеров. Ряд основополагающих результатов математической теории портфелей ценных бумаг был получен в

пятидесятые годы двадцатого века в США. Обще признано, что основополагающей является модель Г.Марковица, на которой основывается большое количество последующих моделей оптимальных инвестиционных портфелей. Он ввел понятие эффективного портфеля. Доходность портфеля рассматривается как случайная величина и разные портфели оцениваются по математическому ожиданию и среднему квадратичному отклонению этой случайной величины. Предложенные модели были сразу же востребованы на рынке акций и других финансовых инструментов. В силу известных исторических причин первый компьютерный центр начал функционировать в 1946 году в США. И именно в это время появились математические модели, рассчитывающие как надо распределить капитал по различным видам ценных бумаг в условиях неопределенности. И это не случайное совпадение. Расчеты в таких моделях требуют известной квалификации и невозможны без применения компьютеров. В настоящее время это уже азбучная истинка.

Под инвестиционным портфелем принято понимать

набор реальных или финансовых инвестиций. В частности, можно считать, что это совокупность ценных бумаг разного вида, которые имеют различный срок действия и различную степень ликвидности. Все они принадлежат одному инвестору и управляются как единое целое, лицом принимающим решения (ЛПР). Основная идея портфельной теории заключается в поиске компромисса между риском и ожидаемой доходностью портфеля в поиске наилучших стратегий диверсификации. Методы этой теории позволяют принять «лучшие» эффективные решения в условиях неопределенности применительно к описанным задачам. Портфель принято называть эффективным, если из тех же ценных бумаг и при тех же ограничениях на их пропорции нельзя составить другой портфель, который имел бы такое же математическое ожидание доходности и меньшее среднеквадратичное отклонение (волатильность), либо такое же среднеквадратичное отклонение и большее математическое ожидание доходности.

Следующий существенный вклад в развитие портфельной теории сделал Джеймс Тобин, советник пре-

зидента США, лауреат Нобелевской премии 1981 года. Он написал ряд книг, ссылки на которые можно найти в [30]. Он с энтузиазмом воспринял новую в то время экономическую теорию Джона Мейнарда Кейнса, которая носила в то время «революционный характер» в американском обществе. «Новая политэкономия» Кейнса отвергла устоявшуюся в те времена теорию свободной конкуренции и выступала за государственное вмешательство в экономику с использованием методов фискальной и монетарной политики ради достижения целей экономического роста и полной занятости населения. В книге «Американское экономическое кредо» (The American Business Creed, 1956) и в ряде статей он изложил свое понимание проблем макроэкономики, статистического анализа спроса и изложил теорию рационализации. В это время Джеймс Тобин разработал свою «теорию выбора портфельных инвестиций», согласно которой инвесторы лишь в редких случаях должны стремиться получить наивысшую прибыль, не принимая во внимание другие факторы. Он пришел к выводу, что инвесторы стремятся сочетать инвестиции с повышен-

ной степенью риска и менее рискованные, с тем чтобы добиться сбалансированности в своих инвестиционных портфелях. Следующим этапом развития теории было появление в 1970 году широко известной сейчас книги У.Ф. Шарпа, на которую ссылаются в [30]. Устойчивость прибыльности индивидуального капитала связана с действием двух различных факторов. Первый фактор определяется объективными различиями в уровне риска, сопровождающего функционирование индивидуального капитала в различных сферах и сегментах рынка. Второй фактор отражает различия в «монопольной силе» между корпорациями. На устойчивость прибыли от инвестиций в крупные корпорации влияют два фактора – «фактор риска» и «фактор монополии». Так, если различия в устойчивости прибыли определяются в основном степенью риска, то нестабильность прибыли должна компенсироваться её величиной. Если же она зависит от фактора монополии, то менее высокая прибыль будет более положительно связана с её устойчивостью. Исходя из своего понимания процессов в экономике, У. Ф. Шарп в 1964 году, а Ж. Линтнер в

1965 году предложили, широко известную в настоящее время, модель ценообразования на рынке ценных бумаг и капиталов. Эта модель имеет сокращенное название (Capital Asset Price Model) САРМ и является признанной в настоящее время концепцией обоснования зависимости между рисковыми и устойчивыми курсами ценных бумаг на финансовых рынках. Инвестор стремится к максимизации дохода и к минимизации риска, и он должен стремиться составить портфель, максимально приближенный к оптимальному. Но как это понять на практике, что портфель уже оптимальный. Этот риск лицо принимающее решение берет на себя. Общий процесс формирования таких портфелей многими инвесторами продолжается непрерывно. Множество других неучтенных факторов приводит к колебаниям курса акций, и процесс продолжается. В условиях видоизменения рынка, его гибкости и универсальности, все большее значение приобретают его краткосрочные перспективы, появилась острая необходимость возможности оценки и глубокого изучения краткосрочного дохода и быстрой замены пакетов ценных бумаг. Эта

новая ситуация на финансовом рынке стимулировала разработку У.Ф.Шарпом методов активного управления портфелями инвестиций по средневзвешенным срокам погашения всего портфеля и по секторам рынка, а также через создание специализированных и структурированных портфелей, через разработку специального индекса - ориентира, отражающего чувствительность портфеля к изменению процентных ставок, и через другие важные характеристики. У.Ф.Шарп дополнил свои разработки определением зависимости между ожидаемой доходностью и риском обладания отдельными акциями, составившими портфель. Для этого он ввел условное деление риска на две части: «риск систематический» и «риск спецефический». Здесь первая часть представляет собой следствие неблагоприятных общеэкономических условий, а вторая - результат воздействия совокупности случайных факторов, касающихся отдельных предприятий. При большом массиве акций в портфеле может быть существенно ограничен риск первого вида - систематический. Этот риск не поддается надежной страховке на уровне отдельных пред-

приятий. В связи с этим, по мнению У.Ф.Шарпа, в условиях равновесия на финансовом рынке могут формироваться рациональные связи между ожидаемым уровнем доходности и рисковыми покупками отдельных акций. Благодаря применению эффективной диверсификации портфеля акций специфический риск можно существенно минимизировать, а в ряде случаев даже полностью исключить.

Модель стохастического рынка Т.Р.Белецкого - С.Р.Плиски

В 1999 году в печать вышла работа Т.Р.Белецкого и С.Р.Плиски [32]. В работе находится максимум функционала, который зависит от параметра риска выбираемого инвестором. Это функционал темпа роста капитала в долгосрочной перспективе, в условиях оговоренных в работе. Активы также зависят от факторов, которые моделируются стохастическими процессами. Таким образом строится рисковчувствительная оптимальная стратегия инвестирования на больших временах. Во многих экономических работах используют термин «на бесконечном горизонте времени». В [32] интересен

случай, когда в работе осуществлен предельный переход при больших временах. Тогда могут быть получены оптимальные стратегии более простого вида и они могут быть рассчитаны для любого количества факторов. В цикле работ этих авторов рассмотрен важный, ставший уже классическим, пример. Это случай линейной процентной ставки и одного рыночного фактора. Однако в данной работе исследуется случай «*тактического*» управления портфелем, на конечных временах. Рассмотрена задача о вычислении условного математического ожидания и условной дисперсии для портфеля, состоящего из двух активов. Все выкладки проведены нами самостоятельно, для того чтобы понять можно ли применять данное решение для конкретных экономических расчетов, или такие построения можно использовать только в целях обучения студентов.

Следуя [30] с. 48 можно записать стохастические дифференциальные уравнения для двух случайных величин F и X имеет вид

$$dF(t) = (A + \alpha X(t))) dt + \sigma dW(t),$$

$$dX(t) = (B + \beta X(t)) dt + \lambda dW(t),$$

$$F(0) = f, \quad X(0) = x, \quad t \geq 0, \quad f \in R, \quad x \in R. \quad (3.1)$$

Отметим, что данные два уравнения дополняются ниже в параграфе 3.4 еще тремя дифференциальными стохастическими уравнениями (3.38), (3.39). Поэтому в данном параграфе также описана задача суммарного порядка превышающего два. Здесь введены обозначения

$$A = \sum_{j=1}^m \left(h_j A_j - h_j^2 / 2 \sum_{k=1}^{m+1} \sigma_{jk}^2 \right),$$

$$\alpha = \sum_{j=1}^m h_j \alpha_j, \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}),$$

$$\sigma = \left(\sum_{j=1}^m h_j \sigma_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^m h_j \sigma_{jm+1} \right),$$

$$F(0) = f, \quad X(0) = x, \quad t \geq 0, \quad f \in \mathfrak{R}, \quad x \in \mathfrak{R}. \quad (3.2)$$

В данной главе величины A , B считаются постоянными. В цитируемых работах дано определение допустимой стратегии инвестирования, и в данной работе будем ему следовать. К нашим целям не относится полностью цитировать вышеприведенные работы. Поэтому коротко укажем, что в упомянутых работах введен функци-

онал, который интерпретируется как ожидаемый темп роста капитала портфеля в долгосрочной перспективе. Далее выписывается два члена разложения функционала в ряд Тейлора в окрестности точки $\gamma = 0$. Через γ обозначен параметр, который интерпретирован как параметр риска. Значение параметра $\gamma > 0$ соответствует нерисковому инвестору, значение $\gamma < 0$ соответствует рисковому инвестору и значение $\gamma = 0$ соответствует случаю, когда лицо принимающее решение избегает риска и хочет всегда иметь риск тождественно равный нулю. Таким образом два члена разложения функционала имеет вид

$$\bar{Q}_\gamma(t, x, h) = \tilde{f}(t, x, h) - \gamma \tilde{v}(t, x, h). \quad (3.3)$$

Здесь $\tilde{f}(t, x, h)$ – условное математическое ожидание, а $\tilde{v}(t, x, h)$ – условная дисперсия величины $F(t)$ при фиксированных значениях факторов $X_1 = x_1, \dots$. Предельное значение коэффициента риска $\gamma < 1$, так как по нему функционал раскладывается в ряд Тейлора. Смысл этого коэффициента выявленный в данной работе, говорит о том, что инвестору противопоказан реальный риск в данной модели.

Функция распределения случайной величины (плотность вероятности) $P(t, f, x)$ определяется уравнением Колмогорова - Фоккера - Планка, которое приведем ниже. Условное математическое ожидание (среднее случайной величины учитываяющее её функцию распределения) величины F при фиксированном значении X в момент времени t , определенное формулой

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t, x, h) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}(F|_{X=x}) = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f P(t, x, f) df \right) / \left(\int_{-\infty}^{\infty} P(t, x, f) df \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Условная дисперсия величины F при фиксированном значении X в момент времени t , определенное формулой

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t, x, h) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Var}(F|_{X=x}) = -\tilde{f}(t, x, h)^2 + \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2 P(t, x, f) df \right) / \left(\int_{-\infty}^{\infty} P(t, x, f) df \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

В данном случае рассматривается система стохастических дифференциальных уравнений с постоянными волатильностями. Исследованию моделирования оптимальных стратегий инвестирования в линейной модели рынка посвящена работа [32], [34].

Решается задача: «При фиксированном значении t найти максимум функционала $\max_{h=(h_1, \dots, h_m)} \bar{Q}_\gamma(t, x, h)$ над классом допустимых стратегий инвестирования h , заданных в рамках модели Белецкого - Плиски, при фиксированных значениях факторов $X_1(t) = x_1, \dots, X_n(t) = x_n$ в заданный момент времени t ». Здесь функционал $\bar{Q}_\gamma(t, x, h)$ определяется формулой (3.3).

Определение понятия «допустимой стратегии» дано в цитируемых работах. Решение задачи экстремума дает возможность получить стратегию инвестирования, позволяющую получить максимальный доход портфеля ценных активов с учетом потерь в модели стохастического рынка.

В данной главе основное внимание уделено построению оптимальных стратегий позволяющий реализовывать «тактический» способ инвестирования на коротком отрезке времени. Использование такой стратегии, для умеренных значений коэффициента отвращения к риску богатство агента-менеджера растет быстрее, чем при асимптотически оптимальной стратегии исходной задачи, рассмотренной в работах Белецкого - Плиски.

Важно ответить на вопрос который сформулирован автором данной главы: «*Зависит ли форма функции оптимальной стратегии и момент времени, в который следует изменять параметры модели от решения уравнения Колмогорова - Фоккера - Планка (КФП), на базе которого она вычислена?*»

Основное отличие результатов данной работы [37] от работы [30] заключается в том, что исправлены ошибки и получены правильные обозримые формулы пригодные для расчетов, которые проводятся в практических и обучающих целях. В данной главе выявлены слабые стороны модели. Кроме того, в данной работе обнаружено, что функционал (3.3) в исследуемой модели при $\gamma \leq 0$ имеет особенность. Выявлено, что справедливо приведенное в параграфе 3.3 *утверждение 3.3.1.* Доказано, что свойства функции оптимальной стратегии, в данной модели, зависят от от вида решения уравнения КФП, на базе которого она вычислена. В данной работе предлагается два подхода к оценке момента времени принятия решения о смене стратегии и обновлении параметров модели. С одной стороны, следя моде-

ли Белецкого - Плиски, можно предложить *оптимистическую оценку* момента времени принятия решения. Почему мы так считаем обосновано ниже. Это момент времени когда функционал (3.3) принимает максимальное значение.

С другой стороны, выявлено свойство функций условной дисперсии. А именно, при увеличении дисперсии начального гауссовского распределения, в условной дисперсии появляется точка перегиба. После точки перегиба условная дисперсия неограниченно возрастает. Опираясь на значение времени в точке перегиба, можно провести вычисление пессимистического момента времени обновления параметров модели. Это значение, по желанию ЛПР, можно умножить на эмпирический коэффициент. Для выяснения значения эмпирического коэффициента исследуются разные функции оптимальной стратегии, построенной на базе разных решений уравнения КФП с разными начальными данными. При этом надо выбрать коэффициент так, чтобы лучше попасть в момент времени до момента времени, когда функционал принимает максимальное значение, чем по-

сле него. Это, возможно, позволяет улавливать тенденции рынка и более гибко реагировать на них. Чтобы лучше это понять надо анализировать Рис.3.4, 3.5.

Уравнение Колмогорова - Фоккера -Планка в этом случае для функции распределения совместной плотности вероятности величин F и X имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t, x, f)}{\partial t} + (A + \alpha x) \frac{\partial P(t, x, f)}{\partial f} + \beta P(t, x, f) + \\ + (B + \beta x) \frac{\partial P(t, x, f)}{\partial x} - \frac{1}{2} \Sigma_1 \frac{\partial^2 P(t, x, f)}{\partial f^2} - \\ - \Sigma_3 \frac{\partial^2 P(t, x, f)}{\partial f \partial x} - \frac{1}{2} \Sigma_2 \frac{\partial^2 P(t, x, f)}{\partial x^2} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Будем рассматривать гауссовское начальное распределение случайной величины X , которая имеет важный смысл в приложениях

$$P(0, x, f) = \delta(f - f_0) \exp[-(x - x_0)^2 / (2s^2)] / (s\sqrt{2\pi}). \quad (3.7)$$

В цитируемых работах введены обозначения

$$\begin{aligned} \Sigma_1 = \sigma \sigma^T, & \quad \Sigma_2 = \lambda \lambda^T = \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k^2, \\ \Sigma_3 = \sigma \lambda^T = \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k \sum_{j=1}^m h_j \sigma_{j,k}. & \end{aligned} \quad (3.8)$$

Поясним, что так обозначено произведение вектора - строки σ на транспонированный вектор - столбец σ^T .

Верхний индекс T означает транспонирование.

Считаем, что при всех возможных значениях факто-ра начальное значение капитала портфеля одно и тоже, то есть $f_0 = \text{const}$. Для получения явных формул плани-руется рассмотреть гауссовское начальное распределе-ние случайной величины X , где $x_0 \in \mathbb{R}$. В этой формуле через $\delta(f - f_0)$ обозначена дельта функция Дирака.

Применим к уравнению (3.6) преобразование Фурье функции $P(t, x, f)$ по переменной f .

Формула прямого преобразования Фурье имеет вид

$$\Phi(t, x, \mu) = C_0 \int_{-\infty}^{\infty} P(t, x, f) \exp(-i f \mu) df. \quad (3.9)$$

Здесь обозначим через $\Phi(t, x, \mu)$ - образ (изображение) функции $P(t, x, f)$ после преобразования Фурье. Фун-кция $P(t, x, f)$ называется оригиналом.

Здесь мы следуем работам Бетмена Г., Эрдейи А.[40], Бабича В.М., Капелевича М.Б., Михлина С.Б. [41], Брыч-кова Ю.А., Прудникова А.П. [41]. Константа C_0 выбира-ется в разных работах по разному, но в данном случае

это не важно, так как уравнение (3.6) является линейным и константа выносится как множитель.

Тогда получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi(t, x, \mu)}{\partial t} + (A + \alpha x) \mu i \Phi(t, x, \mu) + \beta \Phi(t, x, \mu) + \\ & + (B + \beta x) \frac{\partial \Phi(t, x, \mu)}{\partial x} + \frac{1}{2} \Sigma_1 \mu^2 \Phi(t, x, \mu) - \\ & - \Sigma_3 \mu i \frac{\partial \Phi(t, x, \mu)}{\partial x} - \frac{1}{2} \Sigma_2 \frac{\partial^2 \Phi(t, x, \mu)}{\partial x^2} = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

а начальное условие примет вид

$$\Phi(0, x, \mu) = \exp(-i \mu f_0(x)) \exp(-(x - x_0)^2/(2s^2))/(s\sqrt{2\pi}). \quad (3.11)$$

Решение предлагается искать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(t, x, \mu) = & \frac{1}{s \sqrt{2 \pi}} \exp[\gamma_1(t) + \gamma_2(t)\mu + \gamma_3(t)x + \\ & + \gamma_4(t)\mu^2 + \gamma_5(t)\mu x + \gamma_6(t)x^2] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь γ_j , $j = 1, \dots, 6$ неизвестные гладкие функции. Далее подставляем (3.12) в (3.10) приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях f и x . Отсюда следует система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\gamma'_1(t) = \Sigma_2 \gamma_6(t) + \Sigma_2 \gamma_3^2(t)/2 - \beta - B \gamma_3(t),$$

$$\begin{aligned}
\gamma'_2(t) &= +\Sigma_2 \gamma_3(t) \gamma_5(t) - B \gamma_5(t) - i A + i \Sigma_3 \gamma_3(t), \\
\gamma'_3(t) &= 2 \Sigma_2(t) \gamma_3(t) \gamma_6(t) - 2 B \gamma_6(t) - \beta \gamma_3(t), \\
\gamma'_4(t) &= -\Sigma_1/2 + i \Sigma_3 \gamma_5(t) + \Sigma_2 \gamma_5^2(t)/2, \\
\gamma'_5(t) &= 2 i \Sigma_3 \gamma_6(t) - i \alpha + 2 \Sigma_2 \gamma_5(t) \gamma_6(t) - \beta \gamma_5(t), \\
\gamma'_6(t) &= -2 \beta \gamma_6(t) + 2 \Sigma_2 \gamma_6^2(t). \tag{3.13}
\end{aligned}$$

Приравнивая начальные данные (3.11) и (3.12) при $t = 0$, получим начальные условия

$$\begin{aligned}
\gamma_1(0) &= -x_0^2/(2 s^2), \quad \gamma_2(0) = -i f_0, \quad \gamma_3(0) = x_0/s^2, \\
\gamma_4(0) &= 0, \quad \gamma_5(0) = 0, \quad \gamma_6(0) = -1/(2 s^2). \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Данная задача Коши для системы (3.13) с начальными данными (3.14) имеет единственное точное решение

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= -[B^2 + \beta \Sigma_2 [\ln(2 s^2 \beta) - \ln(Z)]]/(2 \beta Z) + \\
&+ \exp(2 t \beta)(\Sigma_2 + 2 s^2 \beta)[\ln(2 s^2 \beta) - \ln(Z)]/(2 Z) + \\
&+ [2B(B + x_0 \beta) \exp(t\beta) - (B + x_0 \beta)^2 \exp(2t\beta)]/(\beta Z). \\
&\tag{3.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2(t) &= -i f_0 - i [(2 B + B \alpha \beta t + \alpha \beta x_0 - A t \beta^2) \Sigma_2 - \\
&- 2 B \beta \Sigma_3]/(\beta^2 Z) + i \exp(t\beta)[(4 \alpha B + 2x_0\alpha\beta) \Sigma_2 - \\
&- 2\beta(2 B + x_0\beta)\Sigma_3 + 2 B s^2 \alpha \beta]/(\beta^2 Z) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +i \exp(2t\beta)[(-2B\alpha + B t \alpha \beta - x_0 \alpha \beta - A t \beta^2)\Sigma_2 + \\
& + 2\beta(B + x_0 \beta) \Sigma_3]/(\beta^2 Z) + \\
& + 2i \exp(2t\beta) s^2 [-B\alpha + B t \alpha \beta - A t \beta^2]/(\beta Z),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_3(t) &= 2[-B + B \exp(\beta t) + x_0 \beta \exp(\beta t)]/Z, \\
\gamma_4(t) &= -t \Sigma_1/2 + [2(\alpha \Sigma_2 - \beta \Sigma_3)^2 + \\
& + \alpha \beta \Sigma_2(s^2 \alpha + t \alpha \Sigma_2 - 2t \beta \Sigma_3)]/(2 \beta^3 Z) + \\
& + 2 \exp(t \beta)(s^2 \alpha \beta + \alpha \Sigma_2 - \beta \Sigma_3)(\beta \Sigma_3 - \alpha \Sigma_2)/(\beta^3 Z) + \\
& + \exp(2t\beta)[-s^2 t \beta^2 + (3s^2 - t \Sigma_2)\beta + \\
& + 2\Sigma_2] \Sigma_2 \alpha^2/(2 \beta^3 Z) + \exp(2t\beta)[(2s^2 t \beta^2 + (t \Sigma_2 - \\
& - 2s^2)\beta - 2\Sigma_2)\alpha \Sigma_3 + \beta \Sigma_3^2]/(\beta^2 Z), \tag{3.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_5(t) &= [-i \exp(2t\beta)(2s^2 \beta + \Sigma_2) + \\
& + 2i \exp(t \beta)(s^2 \alpha \beta + \alpha \Sigma_2 - \\
& - \beta \Sigma_3) + 2i \beta \Sigma_3 - i \alpha \Sigma_2]/(\beta Z), \quad \gamma_6(t) = -\beta/Z,
\end{aligned}$$

где $Z = 2 \exp(2t\beta) s^2 \beta - \Sigma_2 + \exp(2t\beta) \Sigma_2$.

Обязательно надо делать проверку.

3.2. Вычисление условного математического ожидания и условной дисперсии в задаче о портфеле из двух активов

После того, как получены правильные формулы (3.15), (3.16), можно представить прикладным экономистам простые проверяемые формулы для функции $\tilde{\Phi}(t, x, \mu)$ с точностью до умножения на константу

$$\begin{aligned}\Phi(t, x, \mu) &= b_1(t) \exp(b_2(t) \mu + \gamma_4(t) \mu^2), \\ b_1(t, x) &= \exp(\gamma_1(t) + x \gamma_3(t) + x^2 \gamma_6(t)), \\ b_2(t, x) &= \gamma_2(t) + x \gamma_5(t).\end{aligned}\tag{3.17}$$

Введем обозначение

$$p_1 = \exp(b_2 \mu + \gamma_4(t) \mu^2).\tag{3.18}$$

Ниже у вспомогательных функций b_1, b_2, p_1 аргументы, для краткой записи формул будем опускать. Здесь разделены два множителя, это подготовка для вычисления образа по Фурье функции. Дело в том, что функция распределения совместной плотности вероятности $P(t, x, f)$ используется далее для вычисления условного математического ожидания и условной дисперсии

по формулам (3.4),(3.5). Поэтому константы и функция $b_1(t)$ не играют роли, так как выносятся за знак интеграла и сокращаются.

Таким образом, на окончательный результат оказывают влияние только три функции: $\gamma_2(t)$, $\gamma_4(t)$, $\gamma_5(t)$.

В данной главе получены простые обозримые формулы и проведен анализ результатов. Построены графики основных величин и выявлена закономерность их зависимости от параметров. То есть реализованы известные преимущества подхода связанного с построением решений задачи с помощью точных решений, которые описаны в введении.

Сделаем обратное преобразование Фурье по формуле

$$\begin{aligned}
 P(t, x, f) &= (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t, x, \mu) \exp(i f \mu) d\mu = \\
 &= (b_1(t, x)/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} p_1 \exp(i f \mu) d\mu = \\
 &= b_1 \sqrt{\pi} / \sqrt{-\gamma_4(t)} \exp(-(b_2 + i f)^2 / (4 \gamma_4(t))). \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

Сделаем проверку. Подставим функцию (3.19) и её вычисленные производные в уравнение КФП (3.6) и ис-

ключим производные функций $\gamma_j(t)$ $j = 1, \dots, 6$ с помощью равенств (3.13). Тогда получим тождественный нуль. Таким образом, построено решение (3.19) задачи Коши (3.6), (3.7) с точностью до умножения на константу b_0 .

В формуле решения (3.19) уравнения Колмогорова-Фоккера-Планка (3.6) присутствует мнимая единица $i = \sqrt{-1}$, и может показаться, что это комплекснозначная функция. Но, если внимательно рассмотреть (3.19) то видно, что это вещественная функция, так как в функции

$$b_2(t, x) = \gamma_2(t) + x \gamma_5(t) \quad (3.20)$$

входит как множитель мнимая единица. Смотри формулы (3.15), (3.16). В формуле (3.19) мнимая единица мнимая единица входит в квадрате, но функция $\gamma_4(t) < 0$. Поэтому быстрое убывание по всем направлениям в формуле (3.19) обеспечено.

Выберем значения параметров и констант из примера который приводится в работе Белецкого Т.Б., Плиски С.Р. [32], [30].

График функции распределения совместной плотности вероятности

$P(t, x, f)/b_0$ рассчитан при значениях параметров
 $\alpha = 0.1, \beta = -1, B = 1, A = 0.1, \Sigma_1 = 1, \Sigma_2 = 1, \Sigma_3 = 1,$
 $s = 0.1, f_0 = 1, x_0 = 1$ и приведен на Рис. 3.1а,б
при $t = 0.01$ и $t = 0.1$ соответственно. По направлениям
увеличения $|x|, |f|$ функция убывает. Специфика по-
строения и качество рисунков в пакете «Математика»
обсуждается в *Замечании 3.2.2*.

На Рис. 3.1 д показаны линии уровня функции от
двух независимых переменных x, f . С помощью опций
имеющихся в распоряжении пользователя можно по-
строить только несколько линий уровня. Большое ко-
личество линий уровня только затемняют картину. Это
линии на плоскости независимых переменных, на кото-
рых функция принимает постоянные значения.

Замечание 3.2.1 В более широком исследовании мы
нашли, что существуют другие решения уравнения КФП,
и на их базе вычисляется другая функция оптимальной
стратегии. Уравнение (3.10) можно привести к линей-
ному параболическому уравнению, решения которого
приведены в [13], [29]. Различные функции оптималь-
ной стратегии дают разные функционалы, максимум

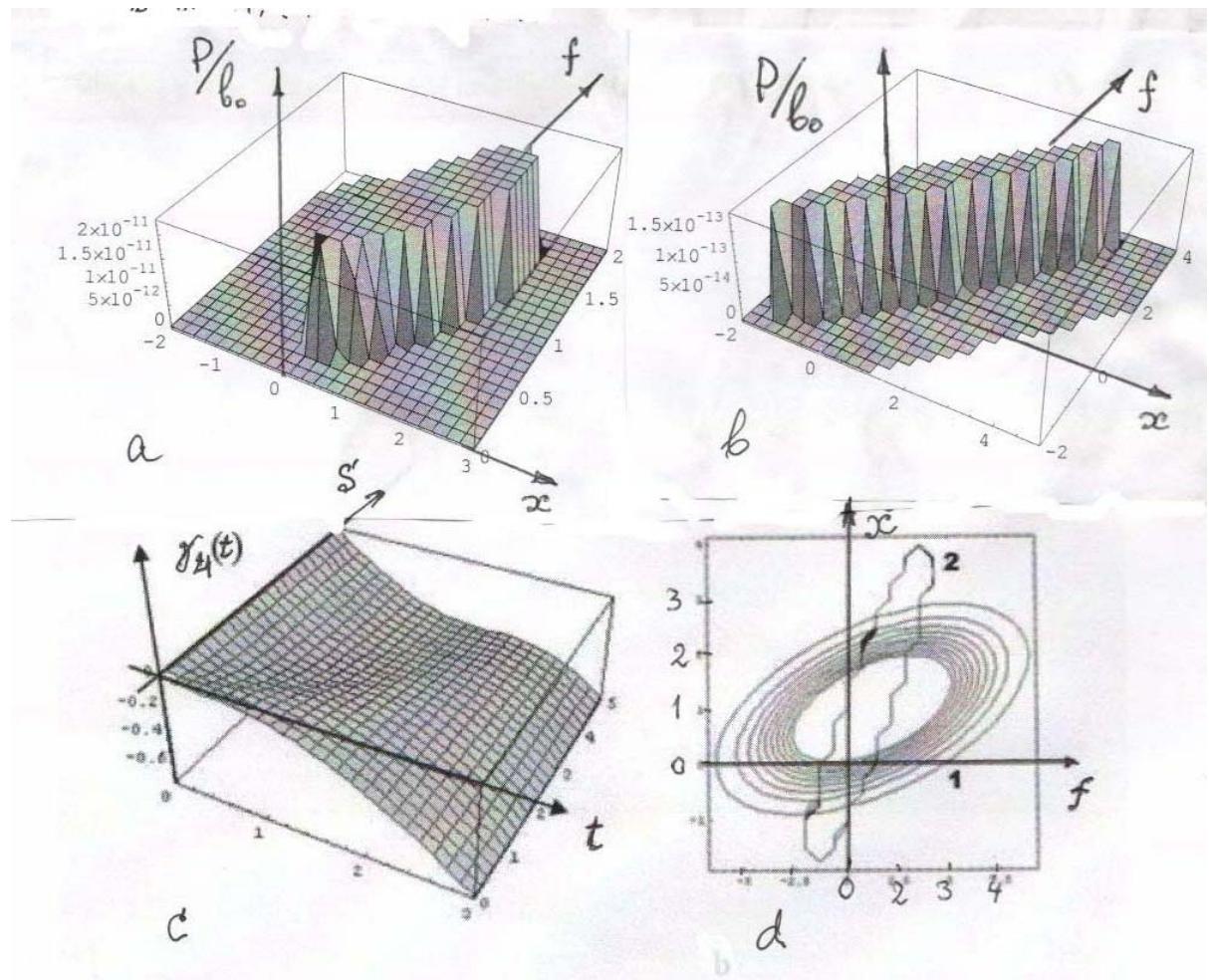


Рис. 3.1: График функции распределения совместной плотности вероятности $P(t, x, f)/b_0$ рассчитан при значениях параметров $\alpha = 0.1$, $\beta = -1$, $B = 1$, $A = 0.1$, $\Sigma_1 = 1$, $\Sigma_2 = 1$, $\Sigma_3 = 1$, $s = 0.1$, $f_0 = 1$, $x_0 = 1$. На левом графике показана функция при $t = 0.01$, а на правом графике показана функция при $t = 0.1$. В широком диапазоне изменения параметров выполнено неравенство $\gamma_4(t) \leq 0$. На Рис. 3.2d построено несколько линий уровня функции $P(t, x, f)$. Искаждения объясняются в Замечании 3.2.2.

которых зависит от большого количества констант. \square

Замечание 3.2.2 В данной работе использовалась версия «Математика 4.0.1», лицензия номер L2967-7796.

В [9], [4], [7] обсуждалось качество графиков, построенных с помощью пакета «Математика». Трехмерные изображения в этом пакете строятся в «ящиках». Предусмотрена запрограммированная настройка на конкретную заданную функцию, и имеется небольшой набор опций, который позволяет пользователю ограниченное вмешательство в процесс построения графика. Амплитуда графика функции превышает высоту «ящика». В таких случаях графический пакет «Математики» обрезает шапочку, не влезающую в «ящик». Поэтому наблюдаем искажение графиков на Рис 3.1, а именно : «плоскую, обрезанную вершину».

На одном рисунке 3.1d наложены два рисунка. Одна настройка параметров на первый рисунок, одновременно не позволяет добиться хорошего качества второго рисунка. При построении линии уровня используется встроенная функция *ContourPlot* с дополнительной опцией *ContourSmoothing* \rightarrow *True*. Это позволяет сгладить

линии уровня в первом случае с тем, чтобы придать рисунку достаточно эстетичный вид. Настройки и опции при совмещении двух «ящиков» для двух рисунков должны быть одинаковыми. Но для второго решения они не оптимальны, поэтому наблюдается искажение кривой 2 Рис 3.1d. \square

Введем обозначение

$$\begin{aligned} p_2 &= \exp[f^2/(4 \gamma_4(t)) - i f(\gamma_2(t) + x \gamma_5(t))/(2 \gamma_4(t))] = \\ &= \exp[f^2/(4 \gamma_4(t)) - i f b_2/(2 \gamma_4)]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

которое необходимо для вычисления интегралов в формулах условного математического ожидания и условной дисперсии (3.4), (3.5). Эта функция следует из выражения под экспонентой, после возведения его в квадрат. Полученные другие множители-функции, зависящие от переменных x, t , выносятся из интеграла как константы в числителе и знаменателе выражениях интегралов в (3.4), (3.5) и сокращаются.

Тогда, интегрируя по частям интеграл в числителе и получим выражение для условного математического

ожидания (3.4)

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(t, x) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f P(t, x, f) df \right) / \left(\int_{-\infty}^{\infty} P(t, x, f) df \right) = \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f p_2 df \right) / \left(\int_{-\infty}^{\infty} p_2 df \right) = \\
&= [2 \exp(b_2^2/(4 \gamma_4)) \sqrt{\pi} \gamma_4 \sqrt{b_2^2} / \\
&\quad / \sqrt{\gamma_4}] / [2 \exp(b_2^2/(4 \gamma_4)) \sqrt{\pi} \sqrt{-\gamma_4}] = \\
&= i [\gamma_2(t) + x \gamma_5(t)]. \tag{3.22}
\end{aligned}$$

При вычислении предполагается $\gamma_4(t) \leq 0$ и также выполняется неравенство $Im(b_2)/\gamma_4(t) \leq 0$.

На Рис. 3.1с показан график функции $\gamma_4(t)$ при выбранных выше значениях констант и параметров и демонстрирует правильность сделанных предположений. Изменяя значения констант и параметров, и можно убедиться, что существует область в которой выполняется неравенство $\gamma_4(t) \leq 0$.

Вычислим предел при $s \rightarrow \infty$ условного математического ожидания (3.22)

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(t, x) &= -\alpha \exp(-t \beta) (B + x \beta) / \beta^2 + \\
&\quad + t (A \beta - B \alpha) / \beta + \alpha (B + x \beta) / \beta^2 + f_0. \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Замечание 3.2.3.

Заметим, что здесь при вычислении $\sqrt{b_2^2}$ выбираем знак минус. Это же замечание распространяется на следующие ниже вычисления условной дисперсии.

□

Интегрируя два раза по частям интеграл в числителе, получим выражение для условной дисперсии (3.5)

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}(t, x) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2 P(t, x, f) df \right) / \left(\int_{-\infty}^{\infty} P(t, x, f) df \right) - \tilde{f}(t, x)^2 = \\
 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^2 p_2 df \right) / \left(\int_{-\infty}^{\infty} p_2 df \right) - \tilde{f}(t, x)^2 = \\
 &= [2 i \exp(b_2^2/(4 \gamma_4)) \sqrt{\pi} b_2 (2 \gamma_4 + b_2^2) / \sqrt{b_2^2/\gamma_4}] / \\
 &\quad / [2 \exp(b_2^2/(4 \gamma_4)) \sqrt{\pi} \sqrt{-\gamma_4}] - \tilde{f}(t, x)^2 = \\
 &= -2 \gamma_4(t) - (\gamma_2(t) + x \gamma_5(t))^2 - \tilde{f}(t, x)^2. \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

Окончательно получим выражение для условной дисперсии

$$\tilde{v}(t, x) = -2 \gamma_4(t). \tag{3.25}$$

При $t = 0$ получим $\tilde{v}(0, x) = 0$.

Приведем предел при $s \rightarrow \infty$ условной дисперсии

(3.25), который следует из нашего анализа.

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t, x)_{gauss} = & 2 \alpha (\alpha \Sigma_2 - \beta \Sigma_3) \exp(-t \beta) / \beta^3 - \\ & - \alpha^2 \Sigma_2 \exp(-2 t \beta) / (2 \beta^3) + t(\beta^2 \Sigma_1 + \alpha^2 \Sigma_2 - \\ & - 2 \alpha \beta \Sigma_3) / \beta^2 + (2 \alpha \beta \Sigma_3 - 3 \alpha^2 \Sigma_2 / 2) / \beta^3. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Очевидно, что в формуле (3.26) главное слагаемое $-\alpha^2 \Sigma_2 \exp(-2 t \beta) / (2 \beta^3)$ положительное и растет.

Графики рассчитаны при значениях параметров $\alpha = 0.1$, $\beta = -1$, $B = 1$, $A = 0.1$, $\Sigma_1 = 1$, $\Sigma_2 = 1$, $\Sigma_3 = 1$.

Далее из (3.22),(3.25),(3.3) получим явную формулу для $\bar{Q}_\gamma(t, x, h)$.

Вычислим предел условной дисперсии при $s = 0$, который следует формул (3.25), (3.24).

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t)_{gauss} = & [1 / (\beta^3 \Sigma_2 (1 + \exp(t \beta)))] [2 (\alpha \Sigma_2 - \beta \Sigma_3)^2 + \\ & + t (\beta \Sigma_2 (\beta^2 \Sigma_1 + \alpha^2 \Sigma_2 - 2 \alpha \beta \Sigma_3)) + \\ & + \exp(t \beta) [-2 (\alpha \Sigma_2 - \beta \Sigma_3)^2 + \\ & + t (\beta \Sigma_2 (\beta^2 \Sigma_1 + \alpha^2 \Sigma_2 - 2 \alpha \beta \Sigma_3))]]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Графики сравнения условной дисперсии $\tilde{v}(t)_{gauss}$ представлены на Рис 3.2 c,d. На графике 3.2c предельная зависимость $\tilde{v}(t)_{gauss}$ от t при тех же значениях параметров

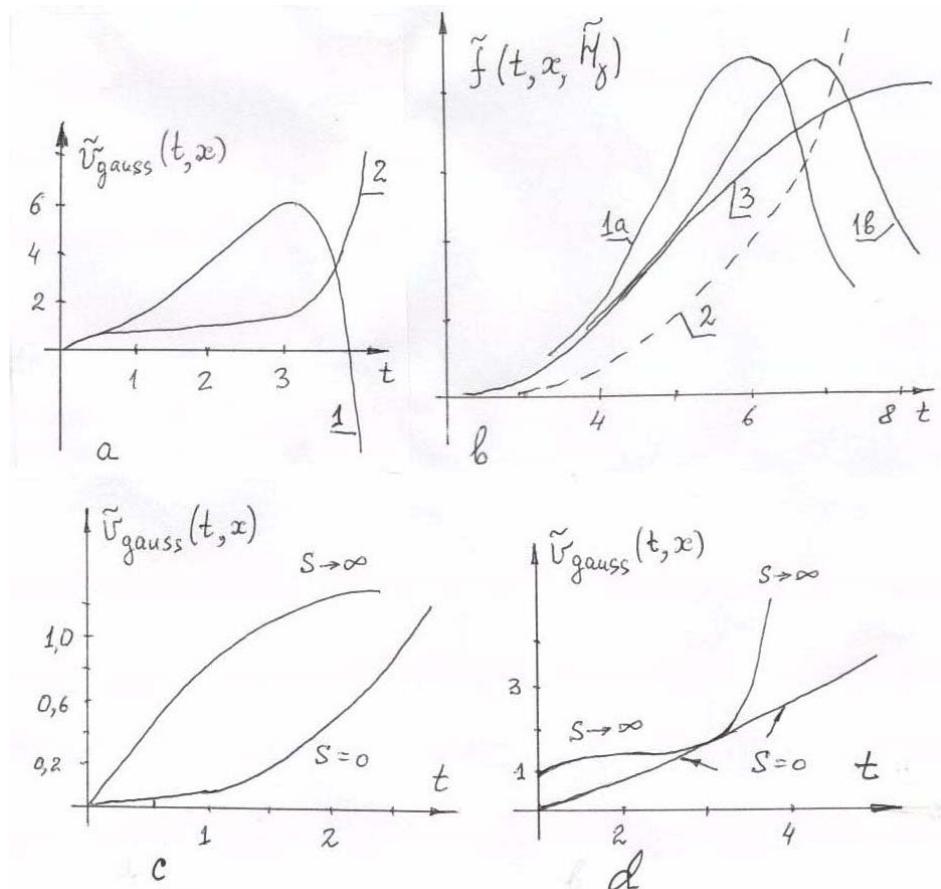


Рис. 3.2: На Рис. 3.2а проведен правильный график предельной $s \rightarrow \infty$ условной дисперсии при гауссовском распределении начальных данных, рассчитанной в данной работе по формуле (3.26)- кривая 2. Кривая 1 с локальным максимумом становится отрицательной при $t \approx 4$ - это ошибочная кривая предельной условной дисперсии $s \rightarrow \infty$ начального гауссовского распределения вызванная неверным решением системы дифференциальных уравнений в [30], с.61, Рис.3.1. Можно оценить величину ошибки, допущенную в [30], графики различаются в десятки раз. Детальное поведение предельной условной дисперсии при гауссовском распределении начальных данных, рассчитанной в данной работе по формуле (3.25), приведено на данном графике Рис 3.2 с,д. В окрестности малых значений t поведение кривой Рис 3.2 с. Поведение кривой в окрестности точки перегиба на Рис 3.2 д.

что и выше и $s = 0$, $s - > \infty$ при малых t . На графике 3.2d зависимость $\tilde{v}(t)_{gauss}$ от t при $s = 0$, $s - > \infty$ при больших t . Видно, что «эффект»- существование точки перегиба, больше выражен при больших значениях дисперсии распределения начальных данных s . Численные эксперименты показывают, что уже при значениях $s \sim 10$ формируется почка перегиба.

3.3. Задача с двумя активами при равномерном распределении начальных данных

Рассмотрим уравнение Колмогорова - Фоккера - Планка для функции распределения совместной плотности вероятности величин F и X (3.6).

Будем рассматривать равномерное начальное распределение случайной величины X , которое имеет важный смысл в приложениях

$$P(0, x, f) = \begin{cases} \delta(f - f_0)/(2L) \chi_{[-L,L]}(x), & x \in [-L, L], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [-L, L]. \end{cases} \quad (3.28)$$

При построении графиков условного математического ожидания и дисперсии, можно использовать известный

технический прием «разбиения единицы». Этот прием использован и просто описан в [23]. По направлению x начальное условие имеет компактный носитель на отрезке $[-L, L]$. С этой целью введем гладкие функции E_1, E_2 , с помощью которых осуществим «сшивание» решения с единицей.

В [23] введены обозначения

$$E_1(x) = \begin{cases} 0, & x < -L, \\ 1, & x > -L, \end{cases} \quad (3.29)$$

$$E_2(x) = \begin{cases} 1, & x < L, \\ 0, & x > L, \end{cases} \quad (3.30)$$

При построении графиков Рис.3.3 ниже были выбраны функции

$$E_1(x) = \exp(x \varepsilon) / (\exp(x \varepsilon) + \exp(x_0 \varepsilon)) \text{ и}$$

$$E_2(x) = \exp(x_0 \varepsilon) / (\exp(x \varepsilon) + \exp(x_0 \varepsilon)).$$

Изменим значения констант и параметров, и тогда можно убедиться, что область в которой выполняется неравенство $\gamma_4(t) \leq 0$ довольно широкая, но $\beta \neq 0$.

Рис.3.3с. Предполагается, что при всех возможных значениях фактора начальное значение капитала портфе-

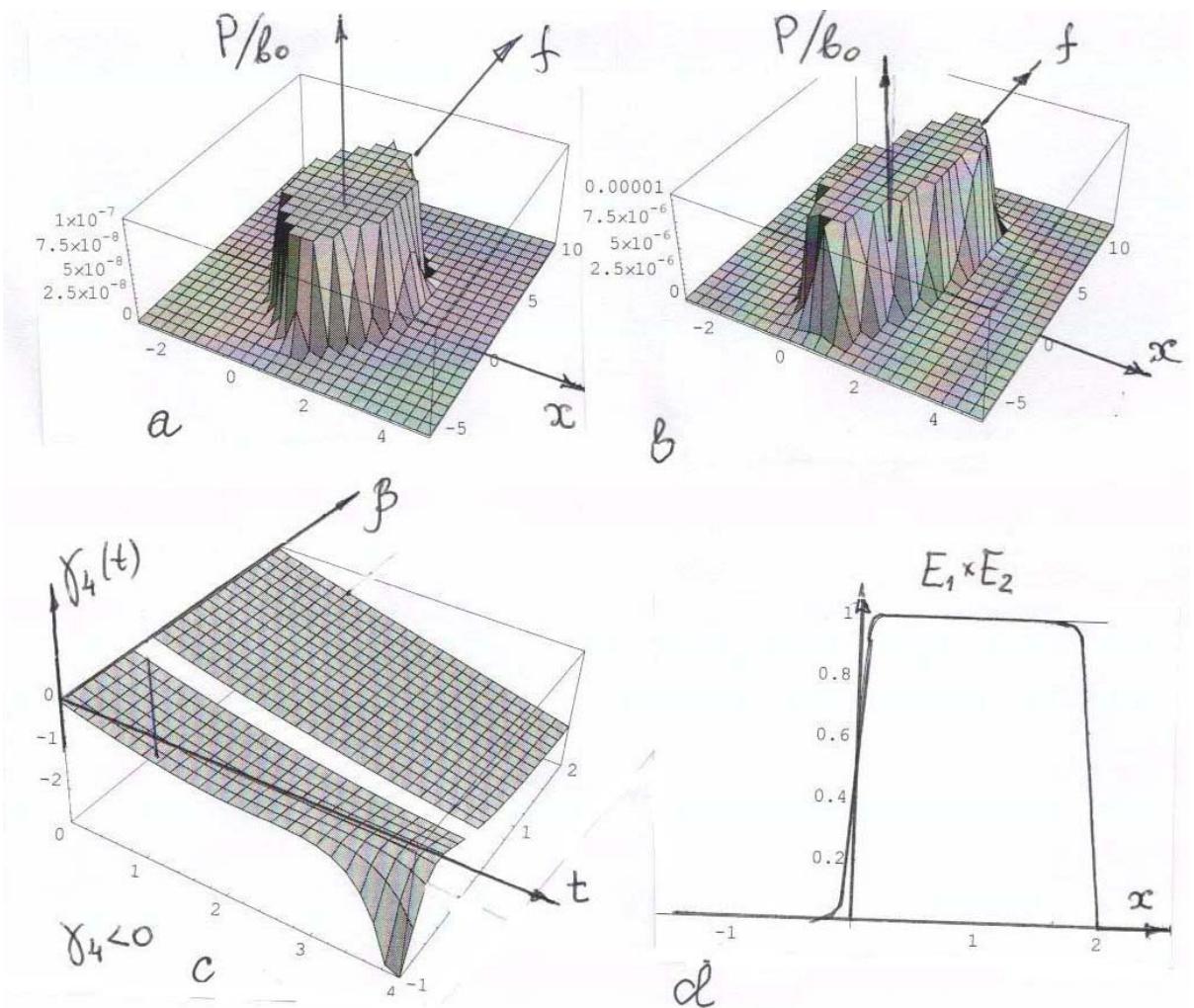


Рис. 3.3: На Рис. 3.3а,б показаны распределения совместной плотности вероятности $t = 1, 3.3$ при равномерном распределении начальных данных. На Рис. 3.3с показан график функции $\gamma_4(t)$ от переменных t, β при значениях констант $\alpha = 0.1, B = 1, A = 0.1, \Sigma_1 = 1, \Sigma_2 = 1, \Sigma_3 = 1$ и параметров и демонстрирует правильность сделанных в параграфе 3.2 предположений. На Рис. 3.3д показан график произведения вспомогательных функций $E_1(x) E_2(x)$ от переменной x при значениях констант $x_0 = 1, L = 2$.

ля одно и тоже, то есть $f_0 = \text{const}$. В формуле (3.28) через $\delta(f - f_0)$ обозначена дельта функция Дирака.

Применим к (3.28) преобразование Фурье функции $P(0, x, f)$ по переменной f и начальное условие примет вид

$$\Phi(0, x, \mu) = \begin{cases} \exp(-i \mu f_0(x))/(2 L \sqrt{2\pi}), & x \in [-L, L], \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [-L, L]. \end{cases} \quad (3.31)$$

Решение уравнения (3.10) предлагается искать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(t, x, \mu) = & \frac{1}{2 L \sqrt{2 \pi}} \exp[\gamma_1(t) + \gamma_2(t)\mu + \gamma_3(t)x + \\ & + \gamma_4(t)\mu^2 + \gamma_5(t)\mu x + \gamma_6(t)x^2] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Здесь γ_j , $j = 1, \dots, 6$ неизвестные гладкие функции. Далее подставляем (3.32) в (3.10), приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях f и x . Отсюда следует система обыкновенных дифференциальных уравнений (3.13).

Приравнивая начальные данные (3.32) и (3.31) при

$t = 0$, получим начальные условия

$$\begin{aligned}\gamma_1(0) &= 0, \quad \gamma_2(0) = -i f_0, \quad \gamma_3(0) = 0, \\ \gamma_4(0) &= 0, \quad \gamma_5(0) = 0, \quad \gamma_6(0) = 0.\end{aligned}\tag{3.33}$$

Данная задача Коши для системы (3.13) с начальными данными (3.33) имеет единственное точное решение

$$\begin{aligned}\gamma_1(t) &= -t \beta, \\ \gamma_2(t) &= i B t \alpha/\beta + i B \alpha \exp(-t \beta)/\beta^2 - i \alpha B/\beta^2 - \\ &\quad -i A t - i f_0, \\ \gamma_3(t) &= 0, \\ \gamma_4(t) &= \alpha (\beta \Sigma_3 - \alpha \Sigma_2) \exp(-t \beta)/\beta^3 - \\ &\quad -t (\beta^2 \Sigma_1 + \alpha^2 \Sigma_2 - 2 \alpha \beta \Sigma_3)/(2 \beta^2) + \\ &\quad + \alpha^2 \Sigma_2 \exp(-2 t \beta)/(4 \beta^3) + 3 \alpha^2 \Sigma_2/(4 \beta^3) - \alpha \Sigma_3/\beta^2, \\ \gamma_5(t) &= i \alpha(\exp(-t \beta) - 1)/\beta, \quad \gamma_6(t) = 0\end{aligned}\tag{3.34}$$

Решение уравнения (3.10) построено и имеет вид (3.32), а обратное преобразование Фурье решения имеет вид (3.19).

Функция совместного распределения плотности вероятности (3.19) в данном случае вещественная и локализованная её графики приведены на Рис.3.3 а,б.

Поэтому формулы условного математического ожидания и условной дисперсии имеют тот же вид (3.22), (3.25), но с функциями (3.34).

Таким образом на окончательный результат оказывают влияние только три функции: $\gamma_2(t)$, $\gamma_4(t)$, $\gamma_5(t)$. Получаются простые и понятные формулы.

На Рис. 3.3c показан график функции $\gamma_4(t)$ от переменных t , β при значениях констант

$\alpha = 0.1$, $B = 1$, $A = 0.1$, $\Sigma_1 = 1$, $\Sigma_2 = 1$, $\Sigma_3 = 1$ и параметров и демонстрирует правильность сделанных в параграфе 3.2 предположений. Изменяя значения констант и параметров и можно убедиться, что область в которой выполняется неравенство $\gamma_4(t) \leq 0$ довольно широкая, но $\beta \neq 0$.

На Рис. 3.3d показан график произведения вспомогательных функций $E_1(x)$ $E_2(x)$ от переменной x при значениях констант $L = 2$.

Эта функция $E_1(x)$ $E_2(x)$ используется при расчете графиков функции совместного распределения плотности вероятности $P(t, x, f)/b_0$ при фиксированном значении переменной t , которые показаны на Рис.3.3a,b.

На Рис. 3.3а выбрано значение параметров $t = 1, f_0 = 1, L = 2$, а на Рис. 3.3б выбрано значение параметров $t = 3.3, f_0 = 1, L = 2$.

Далее по формулам (3.22), (3.34) вычислим выражение условного математического ожидания

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t, x) = & -\alpha \exp(-t \beta) (B + x \beta)/\beta^2 + t (A \beta - B \alpha)/\beta + \\ & + \alpha (B + x \beta)/\beta^2 + f_0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Полученное выражение совпадает с выражением (3.23) полученным для гауссовского распределения начальных данных в параграфе 3.2.

Далее по формулам (3.25), (3.34) вычислим выражение условной дисперсии

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t, x) = & 2 \exp(-t \beta) \alpha (\alpha \Sigma_2 - \beta \Sigma_3)/\beta^3 - \\ & - \exp(-2 t \beta) \alpha^2 \Sigma_2/(2 \beta^3) + [2 t \beta^3 \Sigma_1 + 2 t \alpha^2 \beta \Sigma_2 - \\ & - 4 t \alpha \beta^2 \Sigma_3 - 3 \alpha^2 \Sigma_2 + 4 \alpha \beta \Sigma_3]/(2 \beta^3). \end{aligned} \quad (3.36)$$

На Рис. 3.2с,д приведены детали графика условной дисперсии при значениях параметров

$\alpha = 0.1, \beta = -1, B = 1, A = 0.1, \Sigma_1 = 1, \Sigma_2 = 1, \Sigma_3 = 1$ и выбрано значение параметров $x = 1, f_0 = 1, L = 2$.

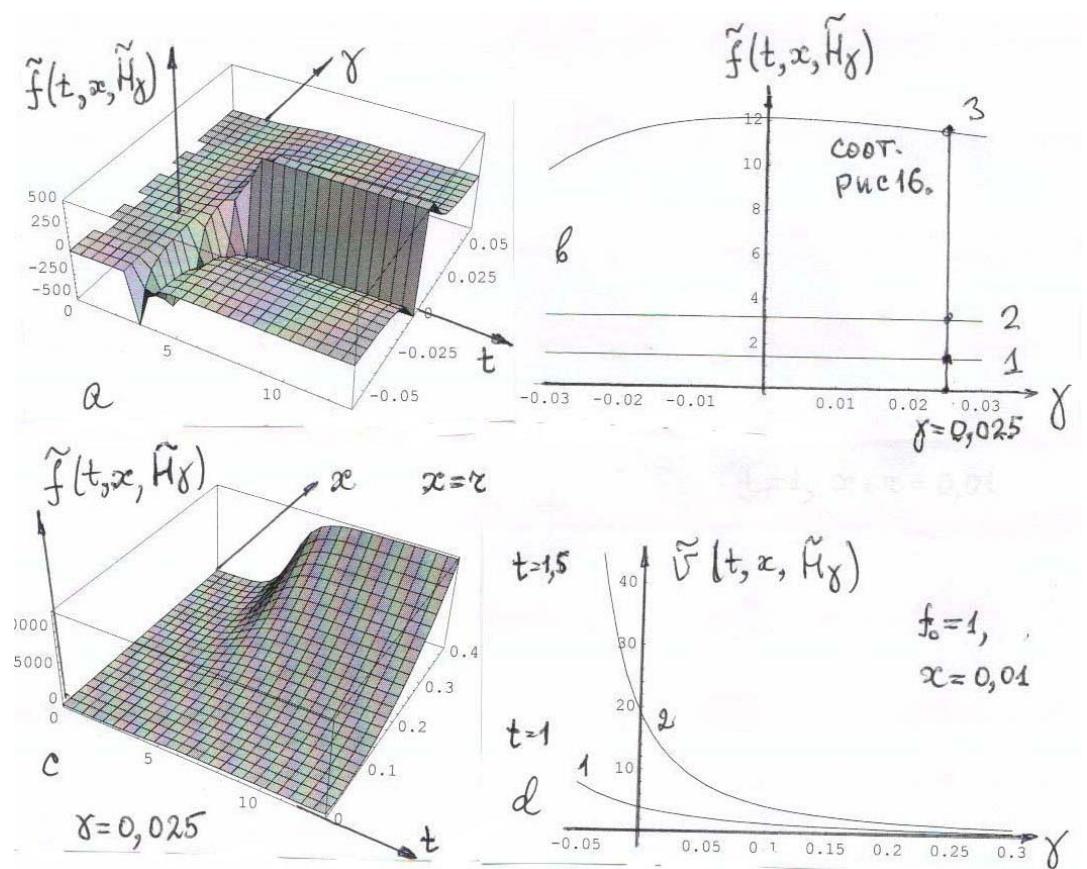


Рис. 3.4: Все функции вычислены на функции оптимальной стратегии. Условного математического ожидания (3.43) в зависимости от γ , t Рис.3.4а. Видна возникающая особенность. На Рис.3.4с та же функция от x и t . На Рис.3.4 д условная дисперсия.

Таким образом, сравнение формул (3.26) и (3.36) показывают, что они совпадают.

Таким образом, случай гауссовского распределения начальных данных в [30] в целом рассмотрен неправильно. В данной работе эта ошибка исправлена.

Случай равномерного распределения начальных данных в [30] в целом рассмотрен правильно.

В руках автора [30], было два графика правильный: (Рис. 3.2а, кривая 2) и неверный: (Рис. 3.2а, кривая 1) (Рис. 3.1 из [30] стр. 61). Для трактовки эффекта автором цитируемых работ был выбран неверный результат (кривая 1). Далее он несколько раз повторяется и комментируется в [30].

Фактически в данной работе доказано утверждение:

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3.1.

Пусть даны две задачи для уравнения (3.6), с двумя распределениями начальных данных: гауссовским (3.7) и равномерным распределением (3.28).

Тогда

a) предельное $s \rightarrow \infty$ условное математическое ожидание для гауссовского распределения началь-

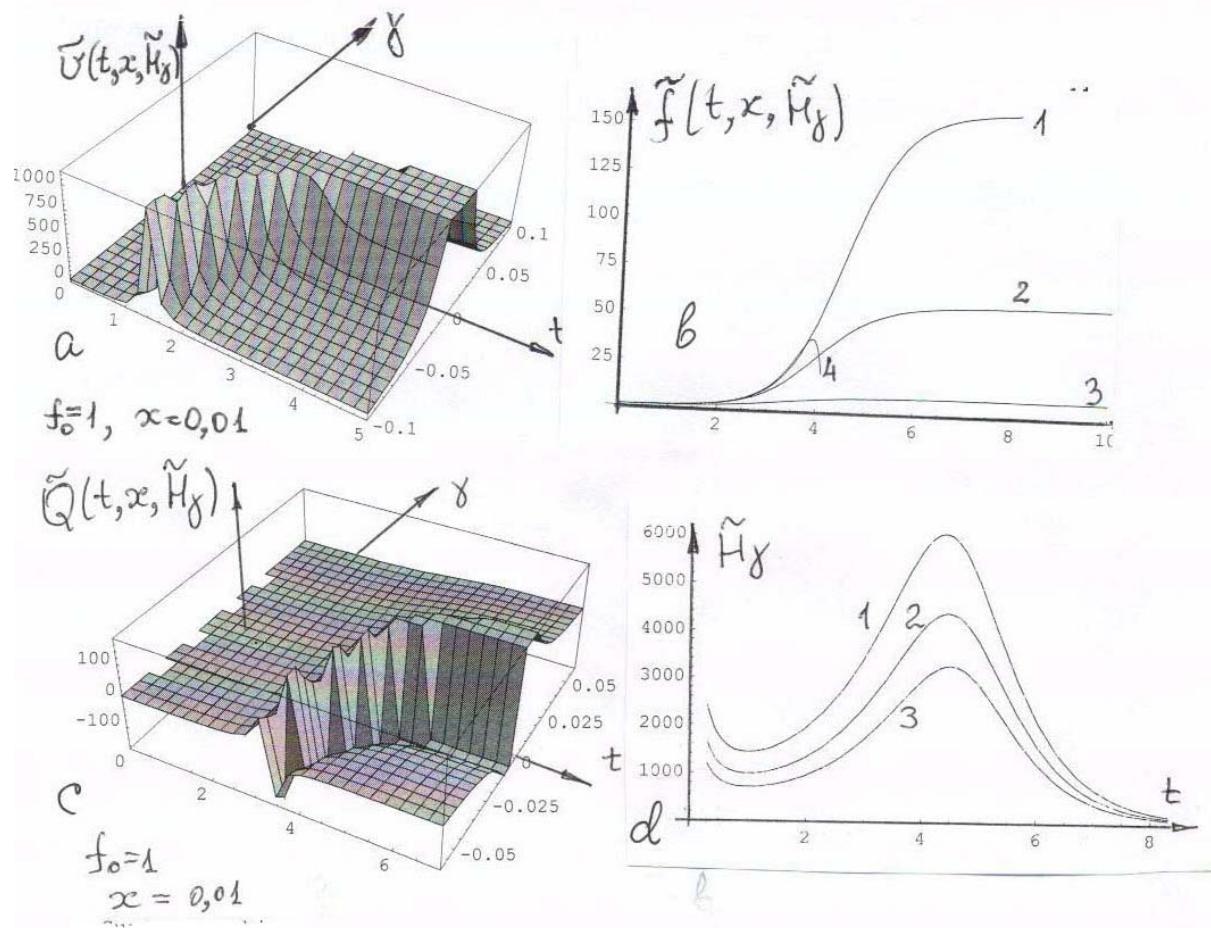


Рис. 3.5: На Рис. 3.5а приведена условная дисперсия. Условное математическое ожидание, вычисленные в разные моменты времени при $\gamma = 0.025$ Рис.3.5б. Особенность в функционале показана на Рис. 3.5с. Функция оптимальной стратегии, построенная по другому решению уравнения КФП, показана на Рис.3.5д.

ных данных совпадает с условным математическим ожиданием для равномерного распределения начальных данных и имеет вид (3.23),(3.35);

b) предельная $s \rightarrow \infty$ условная дисперсия, вычисленная для гауссовского распределения начальных данных, совпадает с условной дисперсией для равномерного распределения начальных данных и имеет вид (3.26),(3.36);

□

Замечание 2.3.1 Прокомментируем еще один рисунок из [30]. Зависимость условного математического ожидания от условной дисперсии, приведенная на графике 3.3 в [16] на стр.65, вызывает недоумение.

Можно провести следующую аналогию. Известно, что аналогом математического ожидания в механике является центр тяжести тела. Также известно, что аналогом дисперсии в механике является момент инерции тела. Конечно, понятно, что можно комбинируя формулы построить зависимость координат центра тяжести тела от его момента инерции, но какой в этом смысл?

□

Вычислим координату точки перегиба функции $\tilde{v}(t)$ (3.26). Здесь мы не приводим общую формулу , которая следует из (3.24), чтобы не загромождать текст. Из равенства нулю второй производной следует

$$t_p = (-1/\beta) \ln[1 - \beta\Sigma_3/(\alpha\Sigma_2)]. \quad (3.37)$$

В данной работе сформулировано предположение. *Пессимистическая оценка* момента времени в который можно принимать решение о смене и обновлении параметров модели $t_r = t_p \text{ koeff1}$. Здесь koeff1 коэффициент определяется эмпирически по анализу и обобщению ниже полученных результатов и выбирается менеджером. После точки перегиба начинает нарастать неопределенность.

3.4. Постановка задачи о портфеле с двумя активами

В [32] Т.Р.Белецкий и С.Р. Плиски исследовали стохастическую модель рынка. Рассмотрена задача оптимального управления портфелем ценных бумаг, который состоит из $m \geq 2$ активов и $n \geq 1$ факторов. В нашу задачу не входит полное описание этой модели,

его можно найти в цитируемых работах.

Рассмотрим портфель составленный из двух активов. Например, один рисковый актив, а вторым является банковский счет. Доходности активов описываются стохастическими дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} dS_1(t)/S_1(t) &= (A_1 + \alpha_1 R(t)) dt + \sigma_{11} dW_1(t), \quad S_1(0) = s_0, \\ dS_2(t) &= R(t) dt, \quad S_2(0) = 1. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Второе уравнение описывает состояние банковского счета. Здесь через $S_2(t)$ обозначен баланс банковского счета в момент времени t , при условии, что в начальный момент времени он не пустой. Линейная процентная ставка по модели Васичека [34] $R(t)$ также описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dR(t) = (B + \beta R(t)) dt + \lambda dW_2(t), \quad R(0) = r. \quad (3.39)$$

В цитируемых работах полагают, что $A_1, \alpha_1, B, \beta, \sigma_{11}, \lambda$ заданные константы, где $B > 0, \beta < 0$, а через $W_j, j = 1, 2$ два независимых броуновских движения.

Опускаем здесь много деталей, с которыми можно ознакомиться в цитируемых работах.

Рассмотрим портфель из двух активов. Уточним обо-

значения (3.2) в случае двух факторов $m = 2$. В этом случае капитал портфеля записывается в виде $V = h S_1 + (1 - h) S_2$. Для портфеля из двух активов в цитируемых работах, стратегию инвестирования предложено описывать следующим способом: $h_1 = h$ доля капитала, инвестированная в рисковый актив, а $h_2 = 1 - h$ доля капитала, размещенная на банковском счете.

Например, один рисковый актив может быть рыночный фактор, который обозначен через S_1 , а баланс банковского счета обозначен через S_2 . На основе вычислений главы 2 можно получить явную формулу (3.3) для функционала с учетом зависимости от стратегии инвестирования h и коэффициента γ : $\bar{Q}_\gamma(t, x, h)$.

Через i обозначена $i = \sqrt{-1}$ мнимая единица.

Распишем обозначения (3.2), (3.8) при $m = 2$

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^m \left(h_j A_j - h_j^2 / 2 \sum_{k=1}^{m+1} \sigma_{jk}^2 \right) |_{m=2} = \\ &= \sum_{j=1}^2 [h_j A_j - (h_j^2 / 2) (\sigma_{j1}^2 + \sigma_{j2}^2 + \sigma_{j3}^2)] =, \\ &= [h_1 A_1 - (h_1^2 / 2) (\sigma_{11}^2 + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2)] + \\ &\quad + [h_2 A_2 - (h_2^2 / 2) (\sigma_{21}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{23}^2)], \\ \alpha &= \sum_{j=1}^m h_j \alpha_j |_{m=2} = h_1 \alpha_1 + h_2 \alpha_2, \end{aligned}$$

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1})|_{m=2} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \left(\sum_{j=1}^m h_j \sigma_{j-1}, \dots, \sum_{j=1}^m h_j \sigma_{j-m+1} \right) |_{m=2} = \\ &= [(h_1 \sigma_{11} + h_2 \sigma_{21}), (h_1 \sigma_{12} + h_2 \sigma_{22}), (h_1 \sigma_{13} + h_2 \sigma_{23})], \\ \Sigma_1 &= \sigma \sigma^T |_{m=2} = (h_1 \sigma_{11} + h_2 \sigma_{21})^2 + \\ &\quad + (h_1 \sigma_{12} + h_2 \sigma_{22})^2 + (h_1 \sigma_{13} + h_2 \sigma_{23})^2, \\ \Sigma_2 &= \lambda \lambda^T = \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k^2 |_{m=2} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= \sigma \lambda^T = \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k \sum_{j=1}^m h_j \sigma_{j,k} |_{m=2} = \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \lambda_k (h_1 \sigma_{1k} + h_2 \sigma_{2k}) = \\ &= \lambda_1 (h_1 \sigma_{11} + h_2 \sigma_{21}) + \lambda_2 (h_1 \sigma_{12} + h_2 \sigma_{22}) + \\ &\quad + \lambda_3 (h_1 \sigma_{13} + h_2 \sigma_{23}). \end{aligned} \tag{3.41}$$

Замечание 3.4.1 Из-за того, что в [30] (стр. 48, (3.3.4)) имеются ошибки (не описки, которые есть у всех и на них мы не обращаем внимания), приведем правильные обозримые формулы. Например, в (3.40) исправлена формула для вычисления Σ_1 . В следующем параграфе перейдем к конкретным вычислениям оптимальных стратегий.

3.5. Вычисление стратегий инвестирования и сравнение их со стратегией Белецкого - Плиски.

Подставляем выражения (3.40), (3.41) в формулы для условного математического ожидания (3.35) и условной дисперсии (3.36) и в функционал (3.3). Учитываем соотношения стратегии инвестирования $(h_1, h_2) = (h, 1-h)$ и затем приводим подобные слагаемые при одинаковых степенях h . Тогда получим выражение

$$\bar{Q}_\gamma(t, x, h) = K_2 h^2 + K_1 h + K_0. \quad (3.42)$$

Замечание 3.5.1

1) Напомним, что формулы для условного математического ожидания (3.35) и условной дисперсии (3.36) выведены в случае постоянной величины A и следовательно $h = \text{const}$. Подстановка $h = h(t)$ должна быть сделана только после нахождения максимума. Вывод формул с переменной $A(t)$ проведен нами в другой работе и приводит к ОДУ Абеля.

2) Кроме того, в силу стохастического дифференциального уравнения Васичека (3.39) в формулах (3.35), (3.36) следует переменную x заменить на переменную

r. Эту замену в данной работе мы не делаем, чтобы не вводить в заблуждение студентов лишними заменами.

3) Параметр γ называется «рисковчувствительным» коэффициентом. Такое название, с нашей точки зрения, неудачное. На самом деле чем больше γ тем меньше время выхода на участок насыщения, как принято говорить в цитируемых работах, «на асимптотику», и величина условного математического ожидания меньше, то есть вложения в данный рисковый актив должно быть уменьшено. См. ниже Рис 3.4 б. А, следовательно, риск потери меньшей части капитала уменьшает общий риск. В других работах, на которые есть ссылки в [30], используется более удачное название «параметр неприятия риска». Исследование, проведенное в данной работе, показывает что отрицательные значения коэффициента риска в данной модели линейного рынка противопоказаны. При отрицательных значениях этого коэффициента в данной работе обнаружена особенность функционала, о чём в цитируемых работах ничего не сказано.

□

Выпишем подробно формулы для условного математического ожидания (3.35) и условной дисперсии (3.36) после подстановки выражений (3.40), (3.41)

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t, x, h) &= M_2 \ h^2 + M_1 \ h + M_0, \\ \tilde{v}(t, x, h) &= L_2 \ h^2 + L_1 \ h + L_0.\end{aligned}\quad (3.43)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}M_2 &= -t(\sigma^2_{11} + \sigma^2_{12} + \sigma^2_{13} + \sigma^2_{21} + \sigma^2_{22} + \sigma^2_{23})/2, \\ M_1 &= (1 - \exp(-t \ \beta)) (\alpha_1 - \alpha_2) (B + r \ \beta)/\beta^2 + \\ &+ t [B (\alpha_1 - \alpha_2) + \beta (A_1 - A_2 + \sigma^2_{21} + \sigma^2_{22} + \sigma^2_{23})]/\beta, \\ M_0 &= (B + r \ \beta)(1 - \exp(-t \ \beta)) \alpha_2/\beta^2 + \\ &+ t [-2 B \ \alpha_2 + \beta (2 A_2 - \sigma^2_{21} - \sigma^2_{22} - \sigma^2_{23})] + f_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_2 &= [4 \ \alpha_2 \ \beta (t \ \beta - 1) \ \Theta_1 + 2 \ t \ \beta^3 \ \Theta_3 - \\ &- \exp(-2 \ t \ \beta) (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \Sigma_2 + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) (2 \ t \ \beta - 3) \Sigma_2 + \\ &+ 4 \ \exp(-t \ \beta) (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_1 \ \Sigma_2 - \beta \ \Theta_1 - \alpha_2 \ \Sigma_2) + \\ &+ \alpha_1 [4 \ \beta (1 - t \ \beta) \ \Theta_1 + 2 \ \alpha_2 (3 - 2 \ t \ \beta) \ \Sigma_2]]/(2 \ \beta^3), \\ &\quad (3.44)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L_1 &= [2 \ \alpha_2 \ \beta (1 - t \ \beta) \ \Lambda_3 + 2 \ t \ \beta^3 \ \Theta_2 + \\ &+ \exp(-2 \ t \ \beta) (\alpha_1 - \alpha_2) \ \alpha_2 \ \Sigma_2 + \alpha_2^2 (3 - 2 \ t \ \beta) \ \Sigma_2 +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha_1 [2 \beta (1 - t \beta) \Lambda_1 + \alpha_2 (2 t \beta - 3) \Sigma_2] + \\
& + 2 \exp(-t \beta) [\alpha_1 (2 \alpha_2 \Sigma_2 - \beta \Lambda_1) - \alpha_2 (\beta \Lambda_3 + 2 \alpha_2 \Sigma_2)] / \beta^3, \\
L_0 = & [-4 \alpha_2 \beta (t \beta - 1) \Lambda_1 + 2 t \beta^3 \Theta_2 - \\
& - \exp(-2 t \beta) \alpha_2^2 \Sigma_2 + \alpha_2^2 (2 t \beta - 3) \Sigma_2 + \\
& + 4 \exp(-t \beta) \alpha_2 (\alpha_2 \Sigma_2 - \beta \Lambda_1)] / (2 \beta^3).
\end{aligned}$$

Здесь введены дополнительные обозначения, которые используются и ниже

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \lambda_1 \sigma_{21} + \lambda_2 \sigma_{22} + \lambda_3 \sigma_{23}, \\
\Lambda_2 &= \sigma^2_{21} + \sigma^2_{22} + \sigma^2_{23}, \\
\Lambda_3 &= \lambda_1 (\sigma_{11} - 2 \sigma_{21}) + \lambda_2 (\sigma_{12} - 2 \sigma_{22}) + \lambda_3 (\sigma_{13} - 2 \sigma_{23}), \\
\Theta_1 &= \lambda_1 (\sigma_{11} - \sigma_{21}) + \lambda_2 (\sigma_{12} - \sigma_{22}) + \lambda_3 (\sigma_{13} - \sigma_{23}), \\
\Theta_2 &= \sigma_{11} \sigma_{21} - \sigma^2_{21} + \sigma_{12} \sigma_{22} - \sigma^2_{22} + \sigma_{13} \sigma_{23} - \sigma^2_{23}, \\
\Theta_3 &= \sigma^2_{11} + \sigma^2_{12} + \sigma^2_{13} + \sigma^2_{22} + \sigma^2_{23} - 2 \sigma_{11} \sigma_{21} - \\
& - 2 \sigma_{12} \sigma_{22} - 2 \sigma_{13} \sigma_{23}. \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Из этих вычислений следует, что коэффициенты в (3.42) равны

$$\begin{aligned}
K_2 &= M_2 - \gamma L_2, \\
K_1 &= M_1 - \gamma L_1, \\
K_0 &= M_0 - \gamma L_0. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Далее, следуя цитируемым работам, находим необходимое условие экстремума квадратичной по переменной h функции (3.42). После дифференцирования получим $2 K_2 h + K_1 = 0$. Следовательно, локальный максимум имеет место если выполнены условия

$$K_2 < 0, \quad h = \tilde{H}_\gamma = -K_1/(2 K_2). \quad (3.47)$$

Замечание 3.5.2

Таким образом, предполагается, что если лицо принимающее решения- *наивный оптимист* и уверен, что знает значения всех коэффициентов модели с достаточной точностью, а также значение процентной ставки в данный момент времени, то теоретически может максимизировать доход от инвестиций, применяя оптимальную стратегию инвестирования. В цитируемых работах предлагается вложить долю капитала, равную \tilde{H}_γ в рискованный актив, и разместить остаток капитала $1 - \tilde{H}_\gamma$ на банковском счете. При этом надо принять решение о выборе значения коэффициента отсутствия риска γ . Лицо, принимающее решение, находится в условиях неопределенности, так как в модели только с двумя активами число коэффициентов, *которые*

надо задать, равно шестнадцати! Если такой менеджер найдется- то это неисправимый наивный оптимист. Реально, речь может идти только о том, что лицо принимающее решения, (менеджер), основываясь на знании результатов расчета по данной модели, зная расчетные значения предельной условной дисперсии и опираясь на результаты расчета по другим моделям может принять на себя имеющиеся риски и принять некоторое решение, опираясь еще и на свой опыт. Здесь большое значение имеет характер менеджера и его приверженность к более осторожной или более рискованной тактике, его мера отвращения к богатству. Поэтому такой подход мы предлагаем называть оптимистическим.

□

Подставим (3.44), (3.45) в выражение для оптимальной стратегии (3.47) и получим общее выражение, которое здесь не приводим из-за его громоздкости. Однако, можно вычислить его предел при $t \rightarrow \infty$, предполагая что выполнено неравенство $\beta < 0$. Предел имеет вид

$$\alpha = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{H}_\gamma = \alpha_2 / (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (3.48)$$

Замечание 3.5.3

Для упрощения ситуации положим равными единице и нулю следующие коэффициенты

$$\alpha_2 = 1, \quad A_2 = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{13} = 0, \quad \sigma_{21} = 0, \quad \sigma_{22} = 0,$$
$$\sigma_{23} = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 0.$$

На самом деле это уже учитывалось при записи стохастического дифференциального уравнения (3.38) в [30]. Это же сделано в [30] без всяких комментариев. Общие обозначения (3.2) введены для использования возможностей расчета оптимальных стратегий для любого числа активов.

□

После этого упрощения получим почти такие же коэффициенты, как приведенные в [30] на стр.64. Разница возникает там в коэффициентах L_2 , L_1 , где упущены (потеряны) вторые слагаемые. (Это произошло из-за ошибки, которая комментируется в Замечании 3.4.1.)

$$M_2 = -t \sigma_{11}^2 / 2,$$

$$M_1 = (1 - \exp(-t \beta)) (\alpha_1 - 1) (B + r \beta) / \beta^2 +$$
$$+ t [B (\alpha_1 - 1) + \beta A_1] / \beta,$$

$$M_0 = (B + r \beta)(1 - \exp(-t \beta)) / \beta^2 - B t / \beta + f_0,$$

$$L_2 = (\alpha_1 - 1)^2 \lambda_1^2 \phi(t)/(2 \beta^3) + \\ + 2 (1 - \alpha_1) (-1 + \exp(-t \beta) + t \beta) \lambda_1 \sigma_{11}/\beta^2 + t \sigma_{11}^2,$$

$$L_1 = (1 - \alpha_1) \lambda_1^2 \phi(t)/\beta^3 - 2 (-1 + \exp(-t \beta) + t \beta) \lambda_1 \sigma_{11}/\beta^2,$$

$$L_0 = -\lambda_1^2 \phi(t)/(2 \beta^3),$$

$$\phi(t) = \exp(-2 t \beta) - 4 \exp(-t \beta) - 2 t \beta + 3. \quad (3.49)$$

Для того, чтобы было выполнено достаточное условие экстремума функции (3.42), необходимо выполнение неравенства $K_2 = M_2 - \gamma L_2 < 0$.

На Рис.3.4а показана зависимость условного математического ожидания $\tilde{f}(t, x, \tilde{H}_\gamma)$ от коэффициента отсутствия риска γ и t . Видно, что при $\gamma = 0$ с некоторого момента времени возникает особенность Рис 3.4а. Видна сложная структура особенности. На Рис.3.4б показаны сечения поверхности приведенной на Рис. 3.4а. Кривые 1,2,3 соответствуют моментам времени $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$. Значения параметров здесь взяты те же, что и на Рис.3.3.

На Рис.3.4с показана зависимость условного матема-

тического ожидания $\tilde{f}(t, x, \tilde{H}_\gamma)$ от $x = r$ и t . Принято значение $\gamma = 0.025$.

На Рис.3.4д показаны зависимости условной дисперсии от коэффициента риска γ при указанных значениях времени.

На Рис.3.5а показана зависимость условной дисперсии $\tilde{v}(t, x, \tilde{H}_\gamma)$ от γ , t . При отрицательных значениях коэффициента γ эта функция имеет локальный максимум, о чем ничего не говорится в цитируемых работах. Функция условной дисперсии имеет локальный максимум в виде хребта. То есть реальный риск в данной модели инвестору не рекомендуется Рис. 3.5с. На Рис.3.5б показана зависимость условного математического ожидания $\tilde{f}(t, x, \tilde{H}_\gamma)$ от t .

Кривые 1,2,3 соответствуют значениям коэффициента отсутствия риска $\gamma = 0.025$, $\gamma = 0.07$, $\gamma = 0.5$. Выделяется своим поведением кривая 4, когда действительно инвестор реально рискует и тогда название рискочувствительного коэффициента оправдано. Здесь $\gamma = -0.01 < 0$. В этом случае имеется точка локального максимума, а затем функция условного математического

ожидания резко убывает. Надо заметить, что такая же зависимость следует и из результатов [30], но там они не комментируются.

На Рис.3.5с показана зависимость функционала ожидаемого темпа роста капитала портфеля $\bar{Q}_\gamma(t, x, \tilde{H}_\gamma)$ от переменных γ , t , при $f_0 = 1$, $x = 0.01$.

На Рис.3.5b кривая 2 условного математического ожидания в случае стратегии вычисленной по формуле (3.4) в главе 3 соответствует стратегии Белецкого - Плиски, взятой из цитируемых работ. Значения коэффициента отсутствия риска $\gamma = 0.025$, $x = r = 0.01$. Значения параметров здесь взяты те же, что и на Рис.3.3.

Кривая 3, вычисленная в данной работе, в данном параграфе соответствует зависимости условного математического ожидания от t при значениях параметров $\alpha_1 = -1$, $\beta = -1$, $B = 0.05$, $A_1 = 0.15$, $\Sigma_1 = 1$, $\Sigma_2 = \lambda^2_1$, $\lambda_1 = 0.02$, $\sigma_{11} = 0.2$, $f_0 = 1$.

На Рис.3.5d кривые функции оптимальной стратегии, имеющие локальный максимум, вычисленной в данном параграфе по тем же формулам, что кривая 3 при значении параметров $\alpha_1 = 0.1$, $\beta = -1$, $B = 1$, $A_1 =$

0.1 , $\Sigma_1 = 1$,

$\Sigma_2 = 1$, $\lambda_1 = 1$, $\sigma_{11} = 1$, $f_0 = 1$, $x = 1$. Однако, о таком виде функций оптимальной стратегии в цитируемых работах ничего не говорится.

Такие же кривые, с локальным максимумом, могут быть получены, используя другие решения уравнения КФП и уравнения (3.10). Они могут быть получены после преобразования уравнения (3.10) к линейному параболическому уравнению, решения которого есть в [13],[29].

Вывод 3.5.1

1) Обобщая весь материал, можно сделать вывод, что надо выбирать значения коэффициента отсутствия риска γ малыми, положительными, т.к. при отрицательном значении коэффициента отсутствует экономический смысл. Вкладываться выгодней в тот актив, условная дисперсия и соответственно (среднее квадратичное отклонение) волатильность не велики, то есть в момент времени, не очень далекий после точки перегиба на Рис. 3.2d. Оценку момента времени по точке перегибы будем называть пессимистической. В этот момент

времени надо принимать решение о пересчете и обновлении параметров модели, а также конкретные решения о перераспределении активов в портфеле.

2) При увеличении коэффициента отсутствия риска γ , время выхода на участок насыщения условного математического ожидания уменьшается, и уменьшается её величина Рис.3.2а. А следовательно, удаляясь от нуля при увеличении γ общий риск уменьшается. Приближаясь к нулю $\gamma \rightarrow 0$, но оставаясь положительным, Рис 3.2а величина условного математического ожидания увеличивается (сечение поверхности по вершине гребня), и вложение части капитала в данный рисковый актив увеличивается, и следовательно общий риск потери данной части капитала увеличивается.

Глава 4. А.К. Волосова., А.С. Братусь.

Модель нелинейной динамики открытого гиперцикла

4.1. Модель Эйгена и конкуренция циклов

Цепочки сложных химических соединений образуют замкнутые циклы сложных взаимных превращений. Математические модели этих реакций на базе обыкновенных дифференциальных уравнений были предложены М.Эйгеном, Р.Шустером [20],[24]. Таким образом, в этих работах сформулирована математическая модель гиперциклической репликации, которая описывает простейший вид взаимодействия систем макромолекул, при котором осуществляется и поддерживается их непрерывное воспроизведение и сосуществование. Теоретическая оценка коэффициента диффузии в распределенной открытой модели гиперцикла получена А. С. Братусем, В. П. Посвянским, А. С. Новожиловым в [28], [46]. В цикле работ этих авторов было доказано, что в распределенной модели гиперцикла при достаточно малых коэффициентах диффузии происходит бифур-

кация А.М. Тьюринга. А.М. Тьюринг опубликовал работу «Химические основы морфогенеза» [47], где он впервые математически описан процесс самоорганизации материи и с помощью численных методов показано, что при некоторых значениях параметров в системе возникают диссипативные структуры.

M.B. Crouhijrt, M. C. Boerlijst, P. Hogeweg исследовали эту модель с помощью метода «клеточных автоматов» [21], [22], [25]. Используя современные численные методы они обнаружили в математической модели эффект колективного «локального вращения» спиральных структур *вокруг ведущих центров* и множественность таких структур. Это свойство ранее было хорошо известно из экспериментальных данных. Конкуренция гиперциклов описана Hofbauer J. в [25]. Вопрос о том какие виды гиперциклов исчезнут, а какие «выживут» в рамках данной модели является важным в математической модели эволюции. В рамках этой теории также решены некоторые вопросы устойчивости циклов, (см. также цикл работ А.В.Романова [19]).

В работах А.Ю. Лоскутова, В.И. Кринского, А.

С. Михайлова, [18], [26] приведены подробные ссылки на другие работы по тематике спиральных волн, которые мы не можем здесь привести полностью. В этих работах приведен анализ и обзор работ по спиральным волнам, структурам и их свойства в активных средах.

Несмотря на седьмой десяток лет исследований по данной теме, не было метода с помощью которого можно было бы построить точное решение нелинейной задачи. В численном решении нелинейных задач зависимость от параметров и значений переменных перемешана и затушёвана, в отличии от явной их зависимости в точном построенном решении. Формулы точного решения можно изучить со всех позиций и изучить зависимость от всех параметров и переменных. Метод позволяющий строить точные решения типа спиральных волн в нелинейных системах был разработан в работах [4]-[7] и применен в [11],[12]. Из истории науки известно много примеров, когда одно точное решение приводило в развитию большую область исследований: так было с теорией солитонов, теорией обостряющихся решений и т.д.

4.2. Влияние коэффициента диффузии и эффект «локального вращения»

Рассмотрим распределенную систему гиперцикла в случае однородной диффузии и двух видов макромолекул. Запишем систему уравнений в полярной системе координат

$$\begin{aligned} Q'_t - d\Delta Q + (f - k_1 S(t, \varphi, r))Q(t, \varphi, r) &= 0, \\ S'_t - d\Delta S + (f - k_2 Q(t, \varphi, r))S(t, \varphi, r) &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь ω - угловая скорость и d коэффициент диффузии, а $S(\varphi, r, t)$, $Q(\varphi, r, t)$ - дважды непрерывно дифференцируемые функции независимых переменных, которые описывают концентрацию макромолекул первого и второго типа.

Здесь, например, $\Delta Q(\varphi, r, t) = Q''_{rr} + \frac{1}{r}Q'_r + \frac{1}{r^2}Q''_{\varphi\varphi}$ — оператор Лапласа в полярной системе координат примененный к функции $Q(\varphi, r, t)$,

$Q(x, y, t)$, $S(x, y, t)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции по всем аргументам. В работах [28] накладываются дополнительное условия обусловленные

физическим смыслом задачи

$$Q \geq 0, S \geq 0. \quad (4.2)$$

В работах [28],[7] используется условие нормировки

$$\int_{0-\varepsilon}^{\infty} \int_0^{2\pi} (Q(r, \varphi, t) + S(r, \varphi, t)) dr d\varphi = 1, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (4.3)$$

Система дополняется краевыми данными. Пусть заданы краевые условия второго рода на круге радиуса r_1

$$Q'_r|_{r=r_1} = 0, \quad S'_r|_{r=r_1} = 0. \quad (4.4)$$

Здесь r_1 - некоторая константа большая чем характерный размер ρ_o . Факт существования характерного размера следует из экспериментального материала.

Предположим, что система координат равномерно вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно начала координат. Запишем систему (4.1) в вращающейся с постоянной угловой скоростью ω полярной системе координат r, φ вокруг начала координат, где $\theta = \varphi - \omega t$.

$$\begin{aligned} -d \Delta W - \omega W'_\theta + (f - k_1 H)W &= 0, \\ -d \Delta H - \omega H'_\theta + (f - k_2 W)H &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

здесь Δ — оператор Лапласа записанный в полярной системе координат,

$W(\theta, r) = Q(\theta + \omega t, r, t)$, $H(\theta, r) = S(\theta + \omega t, r, t)$, $\theta = \varphi - \omega t$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Теорема 4.1.

Пусть безразмерные коэффициенты диффузии в системе (4.5) равны

Тогда для функций $W(\theta, r) = \tilde{W}(\theta, \chi)$,

$H(\theta, r) = \tilde{H}(\theta, \chi)$, $\chi = \ln(r)$,

существует точное решение в неявной, параметрической форме :

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &\stackrel{\text{def}}{=} 8 d \omega \xi^3 + 2 \xi^2 \omega (6 C_1 d - \omega \exp(2 \chi)) \tilde{W}(\theta, \chi) + \\ &+ (2 \xi \omega (4 C_1^2 d - (f + C_1 \omega) \exp(2 \chi))) \tilde{W}^2(\theta, \chi) + \\ &+ (2 C_1^3 d \omega + (2 f^2 + \omega (-2 C_1 f + 2 k_2 \xi - C_1^2 \omega)) \exp(2 \chi)) * \\ &* \tilde{W}^3(\theta, \chi) + 2 k_2 (-f + C_1 \omega) \exp(2 \chi) \tilde{W}^4(\theta, \chi) = 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $\xi = -C_1 \tilde{W}(\theta, \chi)/2 \mp$
 $\mp (1/2) \exp(-C_1 \chi/2) \sqrt{2 \exp(C_1 \theta) - C_1^2 \tilde{W}^2(\theta, \chi) \exp(C_1 \chi)}$,
а функция $\tilde{H}(\theta, \chi)$ определяется явно

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\theta, \chi) &= f/k_1 - C_1 \omega / (2 k_1) \pm \\ &\pm (\omega \exp(-C_1 \chi/2)) \left(\sqrt{2 \exp(C_1 \theta) - C_1^2 \tilde{W}^2(\theta, \chi) \exp(C_1 \chi)} \right) / \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$/ \left(2k_1 \tilde{W}(\theta, \chi) \right).$$

Здесь C_1 – константа в построенном семействе решений.

Доказательство.

Метод нефиксированной конструктивной замены переменных (МНЕФКЗП) предложен в цикле работ [4]-[6]. В этом методе все функции, производные (потоки), новые переменные в начальный момент анализа задачи: новые неизвестные функции. Затем из внутренней, свойственной данной задаче взаимосвязей, все функции последовательно определяются.

В системе (4.5) сделаны замены переменных

$$\begin{aligned} W(\theta, r) &= \tilde{W}(\theta, \ln(r)) = \tilde{W}(\theta, \chi)|_{\theta=\theta(\xi, \delta), \chi=\chi(\xi, \delta)} = \\ &= U(\xi, \delta), \quad H(\theta, r) = \tilde{H}(\theta, \ln(r)) = \\ &= \tilde{H}(\theta, \chi)|_{\theta=\theta(\xi, \delta), \chi=\chi(\xi, \delta)} = V(\xi, \delta). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Система (4.5) в выбранных переменных имеет вид

$$\begin{aligned} -d\Delta \tilde{W}(\theta, \chi) + F_1 &= 0, \quad -d\Delta \tilde{H}(\theta, \chi) + F_2 = 0, \\ F_1 &= -\omega \tilde{W}'_\theta \exp(2 \chi) + \tilde{W}(f - k_1 \tilde{H}) \exp(2 \chi), \\ F_2 &= -\omega \tilde{H}'_\theta \exp(2 \chi) + \tilde{H}(f - k_2 \tilde{W}) \exp(2 \chi). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Удобство выбранных переменных заключается в отсут-

ствии младших членов, например, оператор Лапласа имеет вид $\Delta W(\theta, r) = \exp(-2\chi) \left(\frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \tilde{W}(\theta, \chi)$.

При этом существуют формулы пересчёта производных старых переменных χ, θ по новым ξ, δ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta}{\partial \theta} &= \frac{\partial \chi}{\partial \xi} / \det J, \quad \frac{\partial \delta}{\partial \chi} = -\frac{\partial \theta}{\partial \xi} / \det J, \\ \frac{\partial \xi}{\partial \theta} &= -\frac{\partial \chi}{\partial \delta} / \det J, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \chi} = \frac{\partial \theta}{\partial \delta} / \det J. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Введены «дифференциальные связи» [4]-[6]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \chi} \Big|_{\chi(\xi, \delta), \theta(\xi, \delta)} &= Y(\xi, \delta), \\ \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \theta} \Big|_{\chi(\xi, \delta), \theta(\xi, \delta)} &= T(\xi, \delta), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \chi} \Big|_{\chi(\xi, \delta), \theta(\xi, \delta)} &= R(\xi, \delta), \\ \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta} \Big|_{\chi(\xi, \delta), \theta(\xi, \delta)} &= B(\xi, \delta). \end{aligned} \quad (4.12)$$

После преобразований проведенных с учетом (4.10) получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \delta} - \frac{\partial U}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) &= Y(\xi, \delta) [\chi'_\xi \theta'_\delta - \theta'_\xi \chi'_\delta], \\ \left(-\frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) &= T(\xi, \delta) [\chi'_\xi \theta'_\delta - \theta'_\xi \chi'_\delta], \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \delta} - \frac{\partial V}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) &= R(\xi, \delta) \det J, \\ \left(-\frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \delta} + \frac{\partial V}{\partial \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} \right) &= B(\xi, \delta) \det J. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Уравнения системы (4.9) принимают вид

$$\begin{aligned} \Gamma_1 + d \left(-\frac{\partial T}{\partial \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \delta} \right) / [\chi'_{\xi} \theta'_{\delta} - \theta'_{\xi} \chi'_{\delta}] + \\ + d \left(\frac{\partial Y}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial Y}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \delta} \right) / [\chi'_{\xi} \theta'_{\delta} - \theta'_{\xi} \chi'_{\delta}] &= 0, \\ \Gamma_1 = (fU(\xi, \delta) - \omega T - k_1 U V) \exp(2 \chi), \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2 + d \left(-\frac{\partial B}{\partial \delta} \frac{\partial \chi}{\partial \xi} + \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\partial \chi}{\partial \delta} \right) / [\chi'_{\xi} \theta'_{\delta} - \theta'_{\xi} \chi'_{\delta}] + \\ + d \left(\frac{\partial R}{\partial \delta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial R}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \delta} \right) / [\chi'_{\xi} \theta'_{\delta} - \theta'_{\xi} \chi'_{\delta}] &= 0, \\ \Gamma_2 = (fV(\xi, \delta) - \omega B - k_2 U V) \exp(2 \chi). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Здесь $\det J = [\chi'_{\xi} \theta'_{\delta} - \theta'_{\xi} \chi'_{\delta}]$ якобиан явно выписан, чтобы подчеркнуть, что до работ [4]-[6] данная система никем не рассматривалась, так как считалась сильно нелинейной. Одним из важных шагов работ [4]-[6] является, то что доказано, что система функциональных линейных алгебраических уравнений имеет единственное точное решение, которое явно точно записывается.

Далее система уравнений дополняются двумя условиями равенства смешанных производных в переменных ξ, δ , аналогично [4]-[6]. Их можно записать в виде

$$-\frac{\partial\chi}{\partial\delta}\frac{\partial Y}{\partial\xi} + \frac{\partial\chi}{\partial\xi}\frac{\partial Y}{\partial\delta} - \frac{\partial\theta}{\partial\delta}\frac{\partial T}{\partial\xi} + \frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial T}{\partial\delta} = 0, \quad (4.17)$$

$$-\frac{\partial\chi}{\partial\delta}\frac{\partial R}{\partial\xi} + \frac{\partial\chi}{\partial\xi}\frac{\partial R}{\partial\delta} - \frac{\partial\theta}{\partial\delta}\frac{\partial B}{\partial\xi} + \frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial B}{\partial\delta} = 0. \quad (4.18)$$

Здесь не будем повторять всю схему построения решения МНФКЗП подробно. Коротко укажем как строим СФЛАУ $A_1X = b_1$ где $X = (\frac{\partial\chi}{\partial\xi}, \frac{\partial\chi}{\partial\varpi}, \frac{\partial\theta}{\partial\xi}, \frac{\partial\theta}{\partial\delta})$. В СФЛАУ преобразуется система уравнений (4.13), (4.15), (4.17).

Теорема 4.2.

Пусть дана система уравнений с частными производными первого порядка (4.13), (4.15), (4.17).

Тогда эта система приводится к СФЛАУ, и имеет единственное решение

$$\frac{\partial\chi}{\partial\xi} = g_1(\xi, \delta), \quad \frac{\partial\chi}{\partial\delta} = g_2(\xi, \delta), \quad \frac{\partial\theta}{\partial\xi} = g_3(\xi, \delta), \quad \frac{\partial\theta}{\partial\delta} = g_4. \quad (4.19)$$

Это новая система, относительно функций $\chi(\xi, \delta)$,

$\theta(\xi, \delta)$ с вычисленной правой частью, где

$$\begin{aligned} g_1(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} (-d Y'_{\delta} U'_{\xi} (Y T'_{\xi} - T Y'_{\xi}) + T'_{\delta} U'_{\xi} (\Gamma_1 U'_{\xi} + \\ &+ d T T'_{\xi} + d Y Y'_{\xi}) - \\ &- U'_{\delta} [\Gamma_1 U'_{\xi} T'_{\xi} + d T ((T'_{\xi})^2 + (Y'_{\xi})^2)]) / Z_1(\xi, \delta), \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} g_2(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} (d T ((T'_{\delta})^2 + (Y'_{\delta})^2) U'_{\xi} - \Gamma_1 (U'_{\delta})^2 T'_{\xi} + \\ &+ U'_{\delta} (-d Y'_{\delta} (Y T'_{\xi} + T Y'_{\xi}) + \\ &+ T'_{\delta} (\Gamma_1 U'_{\xi} - d T T'_{\xi} + d Y Y'_{\xi}))) / Z_1, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} g_3(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} [(\Gamma_1 U'_{\delta} + d T T'_{\delta}) U'_{\xi} Y'_{\xi} - Y'_{\delta} U'_{\xi} (\Gamma_1 U'_{\xi} + \\ &+ d T T'_{\xi} + d Y Y'_{\xi}) + \\ &+ d Y (-T'_{\delta} U'_{\xi} T'_{\xi} + U'_{\delta} ((T'_{\xi})^2 + (Y'_{\xi})^2))] / Z_1(\xi, \delta), \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} g_4(\xi, \delta) &\stackrel{\text{def}}{=} [U'_{\delta} (-Y'_{\delta} (\Gamma_1 U'_{\xi} + d T T'_{\xi}) + \\ &+ (\Gamma_1 U'_{\delta} + d T T'_{\delta}) Y'_{\xi}) + d Y (-T'_{\delta})^2 U'_{\xi} + U'_{\delta} T'_{\delta} T'_{\xi} + \\ &+ Y'_{\delta} (-Y'_{\delta} U'_{\xi} + U'_{\delta} Y'_{\xi})) / Z_1(\xi, \delta). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Здесь знаменатель обозначен через

$$\begin{aligned} Z_1(\xi, \delta) &= [\Gamma_1 Y (U'_{\xi} T'_{\delta} - U'_{\delta} T'_{\xi}) + Y^2 (-d Y'_{\delta} T'_{\xi} + \\ &+ d T'_{\delta} Y'_{\xi}) + T (-Y'_{\delta} (\Gamma_1 U'_{\xi} + d T T'_{\xi}) + (\Gamma_1 U'_{\delta} + d T T'_{\delta}) Y'_{\xi})]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

□

Доказательство теоремы 4.2 проводится прямыми вычислениями. Далее надо найти способ удовлетворить равенство смешанных производных

$$\chi''_{\xi\delta} = \chi''_{\delta\xi} \quad \theta''_{\xi\delta} = \theta''_{\delta\xi}.$$

Для этого, учитывая опыт [4]-[6] положим

$$Y(\xi, \delta) = \xi, \quad T(\xi, \delta) = C_1 U(\xi, \delta) + \xi,$$

$$V(\xi, \delta) = [-\xi \omega + (f - C_1 \omega) U(\xi, \delta)]/(k_1 U). \quad (4.25)$$

Получим систему (4.19) в упрощенном виде

$$\begin{aligned} \theta'_{\xi} &= [2 \xi + C_1(2 \xi + C_1 U) U'_{\xi}] / (C_1 P_1), \\ \chi'_{\xi} &= [2 \xi + C_1 U (2 + C_1 U'_{\xi})] / (C_1 P_1), \quad \chi'_{\delta} = -C_1 U U'_{\delta} / P_1, \\ \theta'_{\delta} &= (2 \xi + C_1 U) U'_{\delta} / P_1, \\ P_1 &= 2 \xi^2 + 2 C_1 \xi U + (C_1 U)^2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Интегралы системы (4.26) имеют вид

$$\begin{aligned} \theta(\xi, \delta) &= C_{\theta} + C_1^{-1} \arctan[1 + C_1 U/\xi] + \\ &+ (2 C_1)^{-2} \ln[2 \xi^2 + 2 C_1 \xi U + (C_1 U)^2], \\ \chi(\xi, \delta) &= C_r + C_1^{-1} \arctan[1 + C_1 U/\xi] - \\ &- (2 C_1)^{-2} \ln[2 \xi^2 + 2 C_1 \xi U + (C_1 U)^2]. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Вычитая интегралы и полагая, для простоты, равными

нулю константы сдвига и возвращаясь в исходные переменные θ, χ можно получить выражение для ξ (4.6) приведенное в теореме 4.1. Из (4.25) после обратной замены (4.8) получим

$$H(\theta, \chi) = [-\xi \omega + (f - C_1 \omega) W(\theta, \chi)]/(k_1 W). \quad (4.28)$$

Из (4.14), после подстановки (4.26) получим

$$\begin{aligned} B(\xi, \delta) &= R(\xi, \delta) = \\ &= \omega [2 \xi^2 + C_1 U (2 \xi + C_1 U)]/(2 k_1 U^2). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Вычисляем первые производные и подставляем в уравнение (4.16) получим выражение (4.6). Таким образом, все введенные в (4.8), (4.11), (4.12) функции определены однозначно. Зададим значения констант $d_2 = 0.5$, $f = 1.3$, $k_2 = 0.2$, $k_1 = 0.1$, $C_1 = 1$, $t \omega = 0.5$. Построенные графики линий уровня на Рис. 4.1 при значении функции $\tilde{W}(\theta, \chi) = 0.1$. В большем масштабе в верхнем ряду на Рис 4.2 видна более детальная картина структуры.

На Рис. 4.2 в нижнем ряду показан график функции ингибитора $\tilde{H}(\theta, \chi)$ при значении $\tilde{W}(\theta, \chi) = 0.1$. Искажения в окрестности особой точки нуль объясняются в замечании 1.2.6.

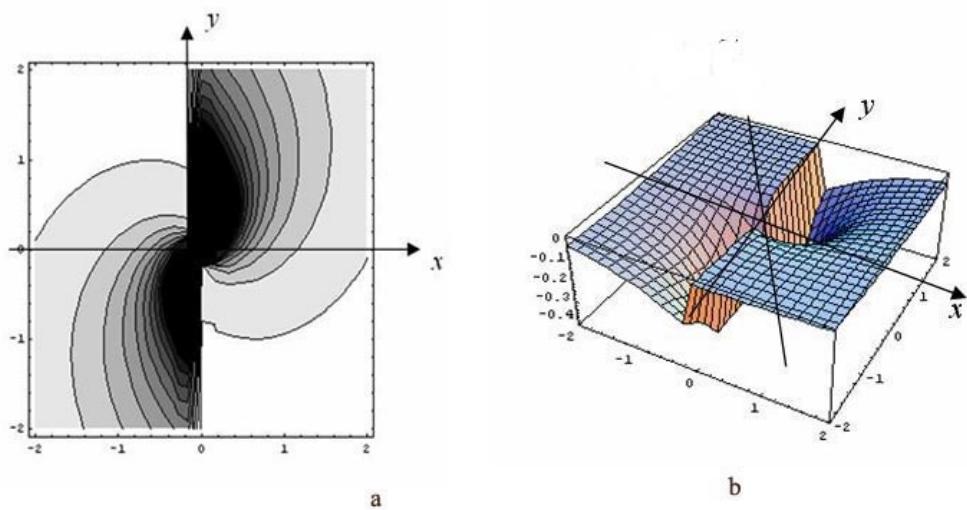


Рис. 4.1: Поверхность выражения (4.6).

Точное решение сосредоточено в некотором круге, диаметр которого является характерным размером ρ_0 . Сечения поверхности функции ингибитора аналогичны показанным на Рис 2.3. Аналогичные кривые получены в исследовании задачи для системы параболических уравнений с одной пространственной переменной

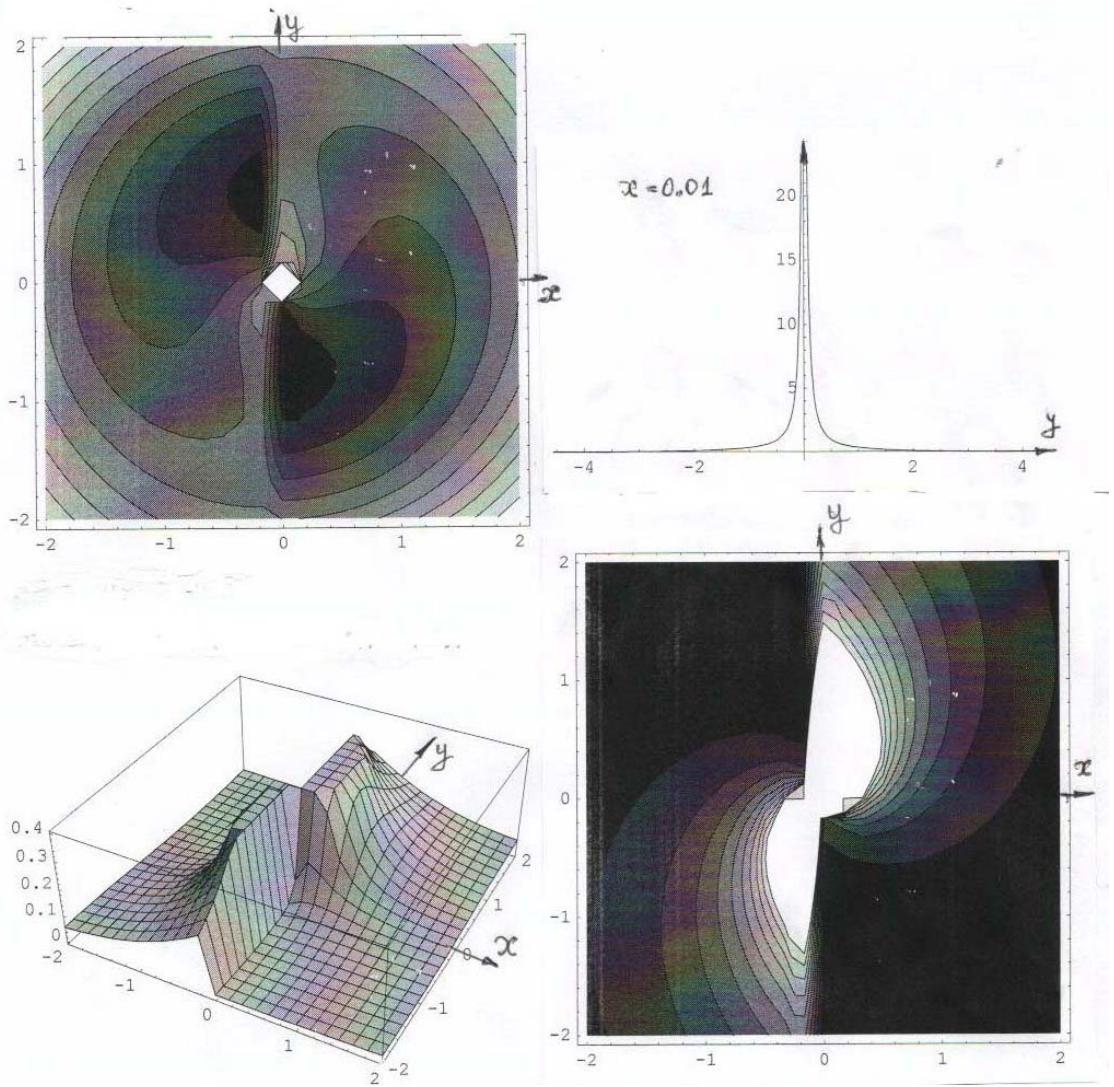


Рис. 4.2: Линии уровня (4.6) и сечение в большем масштабе. Ниже линии уровня и график функции ингибитора $\tilde{H}(\theta, \chi)$ при значении $\tilde{W}(\theta, \chi) = 0.1$.

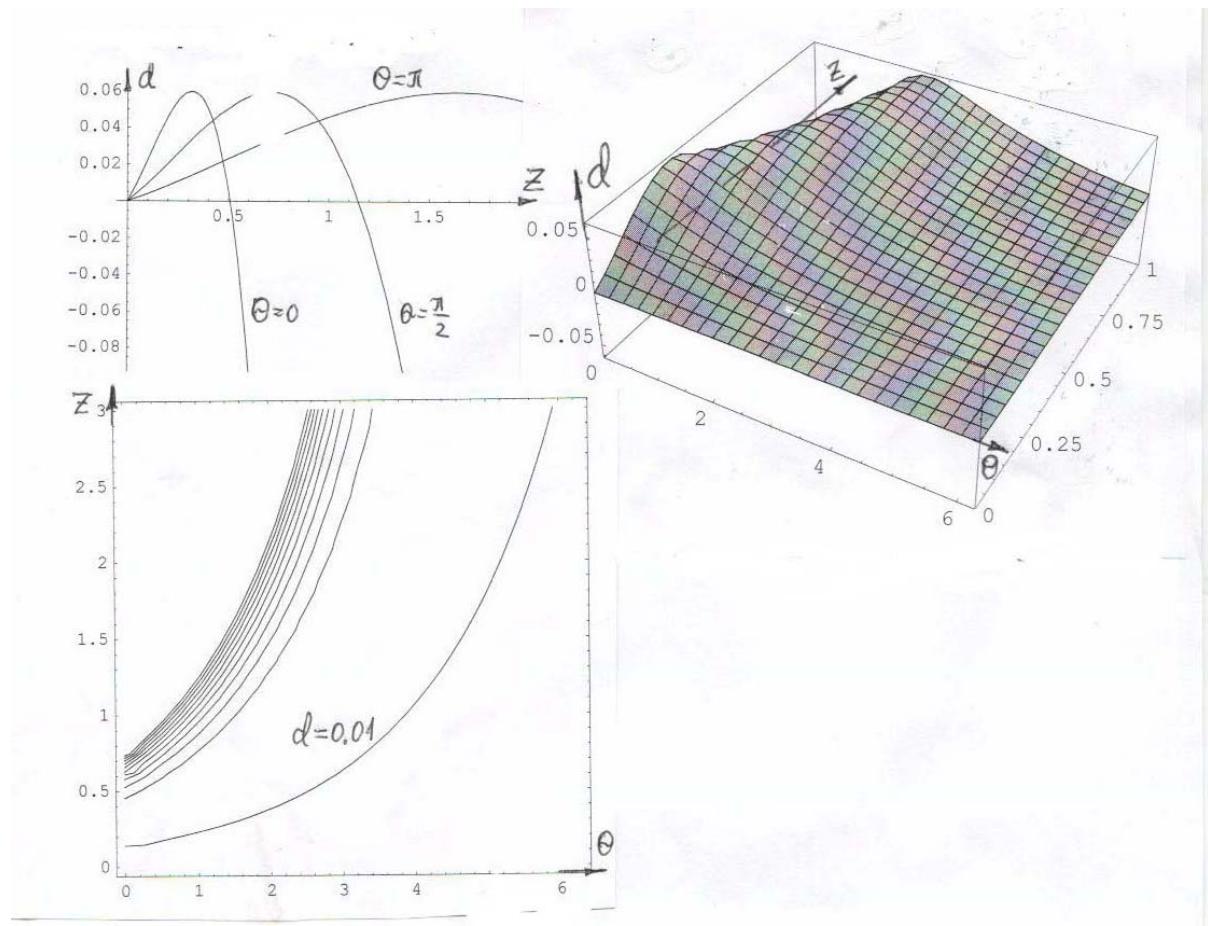


Рис. 4.3: Подтверждение оценки сверху на коэффициент диффузии (4.30).

и малыми параметрами при производных в цикле работ [27].

Замечено, что после подстановки ξ в (4.6) можно выразить коэффициент диффузии

$$\begin{aligned}
 d = & -[\tilde{W}(\theta, \chi) \exp(-C_1 \theta + (2 + C_1/2) \chi) * \\
 & * [\pm \tilde{W}(\theta, \chi) \exp(C_1 \chi/2) (\tilde{W}(\theta, \chi) k_2 - f) \omega * \\
 & * \sqrt{2 \exp(C_1 \theta) - C_1^2 \tilde{W}^2(\theta, \chi)} \exp(C_1 \chi) + \omega^2 \exp(C_1 \theta) + \\
 & + \exp(C_1 \chi) (\tilde{W}^2(\theta, \chi) (\tilde{W}(\theta, \chi) k_2 - f) (2 f - C_1 \omega))] / \\
 & / (\pm 2 \omega \sqrt{2 \exp(C_1 \theta) - C_1^2 \tilde{W}^2(\theta, \chi)} \exp(C_1 \chi)). \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

Графики сечений и поверхности коэффициента диффузии, при том же наборе остальных параметров приведенном выше, построены на Рис 4.3. На графиках для краткости введено обозначение $\tilde{W}(\theta, \chi) = z$. Таким образом, данный пример подтверждает оценку полученную в работах [28] А.С.Братусем с В.П. Посвянским. Вещественное решение описывающее структуры существует при небольших значениях коэффициента диффузии. На нижнем графике Рис 4.3 изображен импульс, который обычно изображают на фазовой плоскости при изучении системы ОДУ при нулевой диффузии

[20],[24],[26]. Переменная θ может иметь смысл угла или времени. С увеличением диффузии площадь и амплитуда импульса увеличивается, но видно, что существует ограничение сверху.

Аналитическое описание эффекта «локального вращения».

Если домножить уравнения нелинейной системы (4.1) на константы k_1 и k_2 и вычесть, то следует линейное уравнение с частными производными

$$Z'_t - d \Delta Z + fZ(r, \varphi, t) = 0, \quad Z = k_1 S - k_2 Q. \quad (4.31)$$

Как показано в [7] уравнение (4.31) имеет решения типа спиральных волн $K(\theta, \chi)$. Затем уравнение (4.31) и его решения можно записать в декартовой системе координат. Для линейного уравнения (4.31) справедлив принцип суперпозиции решений.

Теорема 4.3

Пусть $Z(t, \varphi, r)|_{\varphi=\theta+\omega t, r=\exp(\chi)} = K(\theta, \chi)$ решение вида спиральной волны уравнения (4.31) записанное в полярной системе координат.

Тогда линейное параболическое уравнение (4.31) в декартовой системе координат имеет точное

или приближенное асимптотическое решение при малых значениях времени $t \omega$, а главный член имеет вид суммы

$$\begin{aligned} Z(x, y, t) &= \\ &= \sum_{j=0}^k K_j(\theta, \chi, \omega) \Big|_{\theta=\arctan\left(\frac{y+y_j}{x+x_j}\right)-t\omega, \chi=\ln\left(\sqrt{(x+x_j)^2+(y+y_j)^2}\right)} + \\ &\quad + \mathbf{O}(\omega t), \end{aligned} \tag{4.32}$$

где константы сдвига x_j, y_j не равны нулю одновременно. Здесь ω формальный параметр— масштаб времени, все константы сдвига по модулю $|x_j|, |y_j|$ больше ρ_0 — характерного размера.

□

Доказательство.

В силу линейности уравнения (4.31) сумма приближенных решений сдвинутых на константу, разнесенных в пространстве на расстояние большее характерного размера в декартовой системе координат— тоже является приближенным решением. В этом случае структуры не взаимодействуют.

Численное моделирование проведенное на двух структурах.

На Рис 4.4. при небольших значениях произведения $t \omega$, обнаруживается тенденция возникновения **локального вращения** вокруг местного ведущего центра, в которой присутствует особенность функции . Здесь $x_0 = 4$, $y_0 = 0$, $x_1 = -4$, $y_1 = 0$. Вращение начинается не относительно начала координат, а относительно местного центра, то есть вокруг локальной особенности.

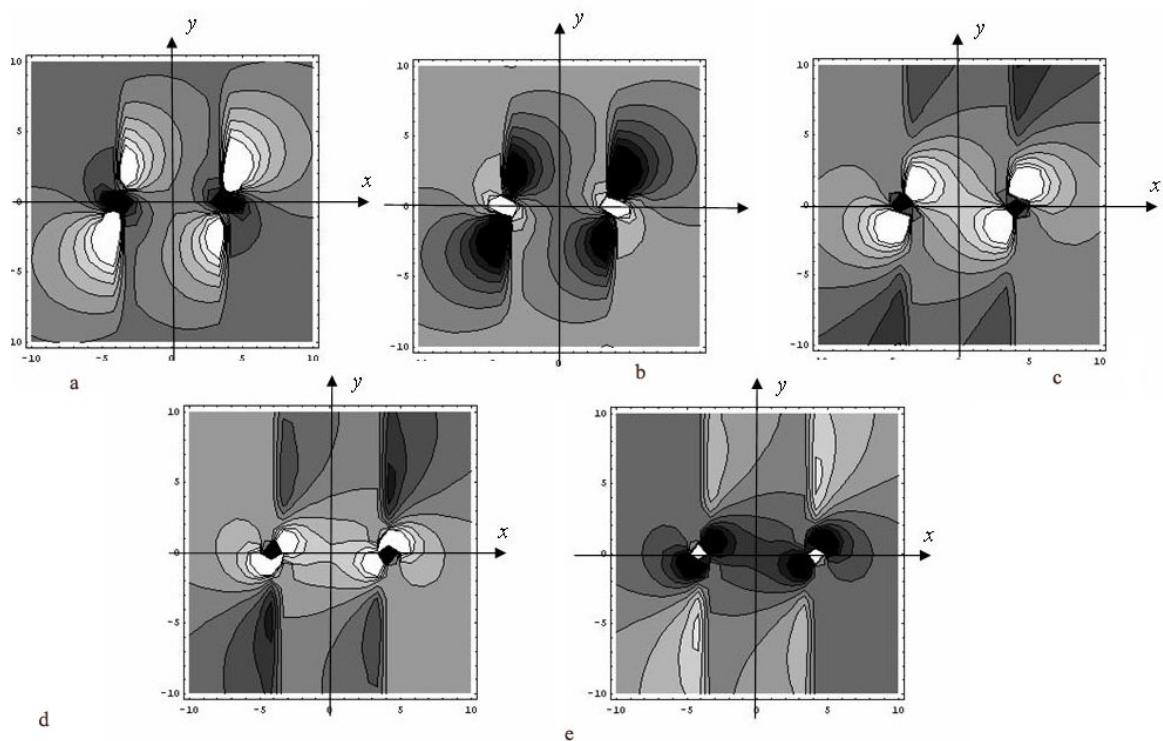


Рис. 4.4: Имеет место тенденция возникновения *локального вращения* вокруг местного ведущего центра, в которой присутствует особенность функции.

Литература

- [1] Атауллаханов Ф.И., Зарницина В.И., А.Ю. Кондратович, Лобанов Е.С., Сарбаш В.И. Особый класс автоволн- автоволны с остановкой- определяет пространственную динамику свертывания крови. Успехи физических наук. т.172, н. 6, 2002, с. 671- 690.
- [2] Zarnitsina V.I., Ataullakhanov F.I., Lobanov A.I., Morozova O.L. Dynamics of spatially nonuniform patterning in the model of blood coagulation, Chaos, V.11, N. 1, 2001, P. 57-70.
- [3] Лобанов А.И., Старожилова Т.К., Зарницина В.И., Атауллаханов Ф.И. Сравнение двух математических моделей для описания пространственной динамики процесса свертывания крови.// Математическое моделирование, 2003, Т. 15, №. 1,- С.14-28.
- [4] Волосов К.А. Диссертация на соискание уч.ст.

д.ф-м.н., // "Методика анализа эволюционных систем с распределенными параметрами 2007, МИ-ЭМ, <http://eqworld.ipmnet.ru>, www.aplsmath.ru,

- [5] Волосова А.К., Волосов К.А. Construction solutions of PDE in Parametric Form.// International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. //V.2009, Article ID, 319268,17 p. <http://www.hindawi.com/journals/ijmms/2009/319269.html>.doi:10.1155./2009/319269
- [6] Волосов К.А. Конструирование решений квазилинейных уравнений с частными производными. // Сибирский журнал индустриальной математики 2008, N. 11, №. 2(34),– C.29-39.English transl.in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2009, Vol. 3, No. 4, pp. 519-527.
- [7] Волосова А.К. Математическое моделирование нелинейной динамики системы открытого гиперцикла.// Дис. на соиск. уч. степени к.ф.-м.н. МИИТ. 2011. www.aplsmath.ru.
- [8] Cherniha R.,King J.R. Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems.

II./J.Phys.A:Math.and Gen. - 2003, -vol.36.-
P.405-425.

- [9] Воробьев Е.М. Введение в систему «Mathematica». М. Финансы и статистика. 1998.
- [10] Арнольд В.И. Что такое математика.- М.,Изд.МЦНМО,2008.-103 с.
- [11] Волосов К.А., Вдовина Е.К., Волосова А.К. Новые точные решения уравнений с частными производными параболического типа. М.: МИИТ, 2010. www.aplsmath.ru, <http://sites.google.com/site/inproblems/home>
- [12] А. К. Волосова К теории нелинейной диффузии и теплопроводности. Труды МФТИ.т.3,н.1(9) 2011.
- [13] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения.— М.:Международная программа образования,1996.—496.
- [14] Маслов В.П. Квантовая экономика. — М.: Наука, 2006. — 92 с.
- [15] Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные

уравнения математической физики. М.:Изд.МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1996.– 366 с.

- [16] Яненко Н.Н. О инвариантных дифференциальных связях для гиперболических систем квазилинейных уравнений, Изв. вузов. Математ., 1961, н. 3, 186-194.
- [17] Кринский В.И., Михайлов А.С. Автоволны. серия Физика.–М.:Изд.Знание, 1984.– № 10.– с.64.
- [18] Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Основы теории сложных систем. ISBN 5-93972-558-9, РХД, 2007.– 612 с.
- [19] Романов А.В. Конечномерная предельная динамика диссипативных параболических уравнений. Матем.сб., 2000, Т.191, В.3, 99 — 112.
- [20] Эйген М. Самоорганизация материи и эволюция биологических макромолекул. / Пер. с англ.-М.:Мир, 1973,-216 с.
- [21] Boerlijst M.C., Hogeweg P. Attraction and patterns in Hypercycles with Negative Interactions. J. theor. Biol. 1995, 176, p. 199 —210.
- [22] The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying

- Spatial Complexity, In U. Dieckmann, R. Law, and J.A.J. Matz editors. University Press, 2000.
- a. Crouhijrt M.B. The interplay between reaction and diffusion. p. 151-170.
 - b. Boerlijst M.C. Sperals and spts: novel evolutionary phenomena through spatial self - structuring. p.171-182.
- [23] Danilov V.G., Maslov V.P., Volosov K.A. Mathematical Models in Computer-component Technology: Asymptotic Methods of Solution. in Mathematical Aspects of Computer Engineering. Edited by V.P. Maslov, K.A. Volosov.M.:MIR,1988.— P.238–383.
- [24] Eigen M., Schuster P. The Hypercycle: A principle of natural selforganization.. - Berlin, Heidelberg - 1979 - 264 c.
- [25] Hofbauer J. Competitive Exclusion of Disjoint Hypercycles. Z.Phys. Chem. 2002, V. 216, p. 35 — 39.
- [26] Selforganig grtich: Autowaves and structures for form equilibrium. Ed. V. Krinsky. Sprinder–Verlag., 1984.-

82 р.

- [27] Arjen Doelman. Pulses in singularly perturbed reaction-diffusion equations. Международная конференция по дифференциальным уравнениям. Сузdal' 29 июня- 4 июля 2012. www.math.leidenuniv.nl
- [28] Братусь А.С., Посвянский В.П. Стационарные решения в замкнутой распределенной системе эволюции Эйген-Шустер. Диффер.урав.-2006.-Т.42-№.12.-С.13-17.
- [29] Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел.- М.: Наука, 1964. - 488 с.
- [30] Камбарбаева Г.С. Математическое моделирование оптимальных стратегий инвестирования в линейной модели рынка. Дис. на соис. ученої ст. к.ф.-м.н., М. МГУПС. 2011. РГД ОД 9 11-5.1741. www.lib.ua-ru.net/diss/cont/485579.html, www.dslib.net/mat-modelirovanie/kambarbaeva.html
- [31] Крылов И.А. Лафонтен. Басни. Санкт-Пб. 1901.
- [32] Bielecki T., Pliska S., Sherris. Risk sensitive asset

- allocation. J. Econ. Dynamics and Contr. N.24, P. 1145-1177., 2000.
- [33] Kudryashov N.A. 2010. A Note on New exact solutions for the Kawahara equation using Exp-function method. J. of Computational and Applied Mathematics. V. 234, N.12, p.3511-3512.
- [34] Vasicek O. An equilibrium characterisation of the term structure. J. of Financial Economics, V. 5, N.2, P. 177-188. 1977.
- [35] Вдовина Е.К. Моделирование эффекта остановки спиральной структуры с помощью точного решения. Междунар. конф. 29. 06.-4.07.2012 г.Сузdalь.
- [36] European researcher. Volosov K.A., Vdovina E.K. The Model the Effect of the «Stop» Spiral Waves in the Blood Coagulation. V/20, No. 5-1. 447-481.
- [37] Волосова Е.К. Тактическое управление портфелем в модели Белецкого - Плиски. Теория и практика современной науки. Материалы VI межд. конф. 3-4 июля 2012. Москва. <http://risk2012.sgu.ru>
- [38] Андрианов И.В., Баранцев Р.Г., Маневич Л.И.

Асимптотическая математика и синергетика-
М.,Изд.Едиториал УРСС,2004.-300 с.

- [39] Братусь А.С., Волосов К.А. Точные решения уравнения Гамильтона -Якоби -Беллмана для задач оптимальной коррекции. Прикл. Мат. Мех. 2004. Т. 68, № 5. С. 819-832.
- [40] Бетмен Г., Эрдейи А. при участии Магнуса В, Оберхеттингера Ф., Трикоми Ф. Таблицы интегральных преобразований. т.1. Пер. с анг. М.: Наука, 1969. 344 с.
- [41] Бабич В.М., Капелевич М.Б., Михлин С.Б. и др. Линейные уравнения математической физики. М.:Наука. 1964.
- [42] Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука. 1977
- [43] Боголюбов А.Н. Кравцов В.В. Задачи по математической физике. М.: МГУ,
- [44] Примененко Л. Оливер Хевисайд. Жизнь и творчество. Каменец - Подольский «Абетка», 2004.
- [45] Лобанов А.И. Модели клеточных автоматов. Ком-

пьютерные исследования и моделирование. 2010,
т.2, н. 3, с.273-293

- [46] Братусь А.С., Посвянский В.П., Новожилов А.С.
Replicator equation and explicit space: The case
of global regulation., Mathematical Biosciences and
Engineering, 2011. 8(3), P. 659- 676.
- [47] Turing A.M. The chemical basis of morphogenesis.
Philosophical Transaction of the Royal Society of
London. B237 (N 641), p.37-72, 1952.