Экспоненциальная неустойчивость в обратных задачах

М.И. Исаев

научный руководитель: Р.Г. Новиков

Московский Физико-Технический Институт (НИУ)
Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique

2 августа 2011 г.

Содержание

Обозначения и предположения

- (X, d) — метрическое пространство,
- H — сепарабельное Гильбертово пространство, H' — сопряженное к H.

Пусть $F : X \mapsto \mathcal{L}(H, H')$.

Зафиксируем $F_0 \in \mathcal{L}(H, H')$ и $x_0 \in X$.

- $X_\varepsilon = \{x \in X : d(x, x_0) \leq \varepsilon\}$,
- $\gamma : H \setminus \{0\} \mapsto [0; +\infty]$ такова, что $\gamma(\lambda v) = \gamma(v)$ для $v \in H \setminus \{0\}$ и $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Обозначения и предположения

Предположение 1.

Существуют такие положительные константы ε_0, C_1 и α_1 такие, что для любого ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, найдется ε-дискретное множество Z_ε, содержащееся в X_ε, с не менее чем $\exp(C_1\varepsilon^{-\alpha_1})$ элементами.

- Множество $Z \subset X$ называется ε-дискретным, если для любых различных $z_1, z_2 \in Z$ выполняется $d(z_1, z_2) \geq \varepsilon$.
- Множество $Y \subset X$ называется δ-сетью для $X_1 \subset X$, если для любого $x \in X_1$ существует $y \in Y$ такое, что $d(x, y) \leq \delta$.

Предположение 2.

Существуют такие положительные константы p, C_2 и α_2 и ортонормированный базис $\{v_k\}_{k=1}^{+\infty}$ в H такие, что выполняются следующие условия:

1. Для любого $x \in X$ и любой пары $(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$$| < (F(x) - F_0)v_k, v_l > | \leq C_2 \exp(-\alpha_2 \max\{\gamma(v_k), \gamma(v_l)\}).$$
2. Для любого $n \in \mathbb{N}$
$$\sharp\{k \in \mathbb{N} : \gamma(v_k) \leq n\} \leq C_2(1+n)^p$$

Экспоненциальная неустойчивость F

Теорема 1. (M. Cristo, L. Rondi [CR2003])

Пусть Предположение 1 и Предположение 2 выполнены. Тогда существует положительная константа ε_1, зависящая только от ε_0, C_1, C_2, α_1, α_2 и p такая, что для любого ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ найдутся элементы $x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющие условиям:

$$x_1, x_2 \in X_\varepsilon, \quad d(x_1, x_2) \geq \epsilon,$$

$$\|F(x_1) - F(x_2)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H}')} \leq 2\exp(-\varepsilon^{-\alpha_1/(2p+1)}).$$

Идея доказательства

1. Пусть $Z_\varepsilon \subset X_\varepsilon$ — ε-дискретное множество, а Y_δ — δ-сеть в $F(X) - F_0$, причем
$$|Z_\varepsilon| > |Y_\delta|.$$
2. Тогда найдутся элементы x_1, $x_2 \in X_\varepsilon$ такие, что их образы под действием F лежат в одном шаре радиуса δ с центром из $|Y_\delta| + F_0$. Имеем:
$$||F(x_1) - F(x_2)||_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H}')} \leq 2\delta.$$
3. Подходящие ε-дискретное множество и δ-сеть можно выбрать при выполненных Предположении 1 и Предположении 2.

* А.Н.Колмогоров, В.М. Тихомиров, [KT1959].

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$-\Delta\psi + v(x)\psi = E\psi \text{ для } x \in D,$$

где

- D — открытая связная область в $\mathbb{R}^d$,
- $d \geq 2$,
- $\partial D \in C^2$,
- $v \in L^\infty(D)$.

Постановка задачи

Определим оператор* $\Phi = \Phi(E)$ следующим образом:

$$\Phi(\psi|_{\partial D}) = \frac{\partial \psi}{\partial \nu}|_{\partial D}.$$

Здесь предполагаем, что

$$E \text{ не является собственным значением для } -\Delta + v \text{ в } D.$$

* Этот оператор называется Dirichlet to Neumann map.

Постановка задачи

Задача 1.

- Задан* оператор Φ.
- Требуется восстановить v.

* например, считаем известным его ядро.

Обозначения и предположения

Будем считать $D = B(0,1)$.

- f_{jp} - сферические гармоники степени j, где $j \geq 0$, $1 \leq p \leq p_j$.
- $p_j = C^{d-1}_{j+d-1} - C^{d-1}_{j+d-3}$.

$$||\sum_{j,p} c_{jp} f_{jp}||^2_{H^s} = \sum_{j,p} (1+j)^{2s} |c_{jp}|^2.$$

Обозначим.

$$W^{m,1}(\mathbb{R}^d) = \{v: \ \partial^J v \in L^1(\mathbb{R}^d), \ |J| \leq m\}, \ m \in \mathbb{N} \cup 0,$$

$$J \in (\mathbb{N} \cup 0)^d, \ |J| = \sum_{i=1}^{d} J_i, \ \partial^J v(x) = \frac{\partial^{|J|} v(x)}{\partial x_1^{J_1} \dots \partial x_d^{J_d}}.$$

Пусть

$$||v||_{m,1} = \max_{|J| \leq m} ||\partial^J v||_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Теорема 2. (вариация результата G. Alessandrini [A1988])

При выполненных условиях Задачи 1, а также при

- $d \geq 3$, $m > 0$, $M > 0$ и $supp\, v_i \subset D$,
- $||v_i||_{m,1} \leq M$, $i = 1, 2$,
- $\alpha = (m - d)/m$

существует такая константа $C = C(M, D, m)$, что

$$||v_1 - v_2||_{L^\infty(D)} \leq C\Big(\log(1 + ||\Phi_1 - \Phi_2||^{-1})\Big)^{-\alpha},$$

где Φ_1, Φ_2 обозначают DtN операторы для v_1 и v_2 соответственно,

$$||\Phi_1 - \Phi_2|| = ||\Phi_1 - \Phi_2||_{L^\infty(\partial D) \to L^\infty(\partial D)}.$$

R. Novikov and M. Santacesaria, случай размерности $d = 2$ [NS2011].

Оценки устойчивости

Недостаток оценки G. Alessandrini:

$\alpha < 1$ для любого $m > d$, даже если m очень большое.

Обратная задача Гельфанда-Кальдерона (случай $E = 0$):

- R. Novikov, [N2010].

  Оценка остается верной для $\alpha = m - d$.

- N. Mandache, [M2001].

  Оценка не верна при $\alpha > 2m - m/d$ для вещественных потенциалов и при $\alpha > m$ для комплексных потенциалов.

- В качестве X рассмотрим

$$X_{m,\beta} = \{v \in C^m(D) : supp\, v \subset B(0,1/2), ||v||_{C^m(D)} \le \beta\}.$$

- В качестве L возьмем пространство Соболева $H^{-s}(S^{d-1})$.
- В качестве $F(v)$ — DtN опрератор* Φ, соответствующий v.

* В данном случае $\Phi : H^{-s}(S^{d-1}) \mapsto H^{s}(S^{d-1})$.

Проверка Предположения 1

Лемма 1. (частный случай результатов А.Н. Колмогорова и В.М. Тихомирова [KT1959])

Пусть $d \geq 2$ и $m > 0$. Для $\varepsilon, \beta > 0$ рассмотрим метрическое пространство:

$$X_{m\varepsilon\beta} = \{v \in C_0^m(B(0,1/2)) : ||v||_\infty \leq \varepsilon, ||v||_{C^m(D)} \leq \beta\}$$

с метрикой, индуцированной из L^∞. Тогда существует μ такое, что для произвольного $\beta > 0$ и $\varepsilon \in (0, \mu\beta)$ существует ε-дискретное множество $Z \subset X_{m\varepsilon\beta}$ с по крайней мере $\exp\left(2^{-d-1}(\mu\beta/\varepsilon)^{d/m}\right)$ элементами.

* в данной задаче $\alpha_1 = d/m$.

Проверка Предположения 1

Доказательство:

1. Пусть $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ с носителем в $B(0, 1/2)$ и $||\chi||_\infty = 1$.
2. Положим $\mu = \frac{1}{d^{m/2}||\psi||_{C^m}}$ и обозначим $N = \left[\left(\frac{\mu\beta}{\epsilon}\right)^{1/m}\right]$.
3. Рассмотрим N^d кубов со стороной $\frac{1}{N\sqrt{d}}$, лежащих в $B(0, 1/2)$.
4. Пусть $y_1, \dots, y_{N^d}$ — их центры.
5. Функция $\chi_j = \chi\left(N\sqrt{d}(x - y_j)\right)$ имеет носитель в j-м кубе.
6. $Z = \left\{\varepsilon \sum_{j=1}^{N^d} \sigma_j \chi_j \mid \sigma_j \in \{0, 1\} \text{ для любого } j\right\}$.

Проверка Предположения 2

В качестве базиса в L возьмем $\{f_{jp}\}$. Определим $\gamma(f_{jp}) = j$.

$$\sharp\{(j,p) : \gamma(f_{jp}) \leq n\} = \sum_{j=0}^{n} p_j \leq 2(n+1)^{d-1}.$$

Пусть $F_0 = F(0)$, т.е. DtN оператор для нулевого потенциала.

В [I2011] доказано, что для некоторой константы $\rho = \rho(E,d)$ верно:

$$|\langle \Gamma_{v,E} f_{iq}, f_{jp}\rangle| \leq \rho\, 2^{-\max(i,j)} ||v||_{L^\infty(D)} ||(-\Delta + v - E)^{-1}||_{L^2(D)},$$

где

$$\Gamma_{v,E} = \Phi_v(E) - \Phi_0(E) = F(v) - F_0.$$

Проверка Предположения 2

Идея доказательства для $E = 0$:

1. ψ — решение с краевым условием f_{jp}

$$\psi_0(r, \omega) = r^j f_{jp}(\omega).$$

2. Так как $(-\Delta + q)(\psi - \psi_0) = -v\psi_0$ в Ω, получаем:

$$\psi - \psi_0 = -(-\Delta + v)^{-1} v\psi_0.$$

Неустойчивость в обратной задаче Гельфанда

Можно показать, что для достаточного большого s выполняется

$$||F(v_1) - F(v_2)||_{L^\infty(\partial D) \to L^\infty(\partial D)} \leq C||F(v_1) - F(v_2)||_{H^{-s} \to H^s}.$$

Поэтому Теорема 1 подразумевает, в частности, что оценка

$$||v_1 - v_2||_{L^\infty(D)} \leq c\left(\ln(1 + \delta^{-1})\right)^{-\alpha},$$

где $c = c(M, D, m, E)$ и $\delta = ||F(v_1) - F(v_2)||_{L^\infty(\partial D) \to L^\infty(\partial D)}$,

не выполняется при $\alpha > \frac{m}{d}(2d - 1)$ для вещественных потенциалов.

В [I2011] показано, что в случае Φ, заданого на конечном объединении интервалов* энергии $S = \bigcup\limits_{j=1}^{K} I_j$, оценка

$$||v_1 - v_2||_{L^\infty(D)} \le C \sup_{E \in S} \left(\ln(1 + \delta(E)^{-1})\right)^{-\alpha},$$

где $C = C(M, D, m, S)$, $\delta(E) = ||\Phi_1(E) - \Phi_2(E)||_{L^\infty(\partial D) \to L^\infty(\partial D)}$

не выполняется при $\alpha > 2m$ для вещественных потенциалов.

* предполагается, что интервалы заданы так, что не содержат собственных значений $-\Delta$ в D.

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение Шрёдингера

$$-\Delta\psi + v(x)\psi = E\psi, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

где

потенциал v является вещественненым, $\quad v \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$,

$$v(x) = O(|x|^{-3-\varepsilon}), \quad |x| \to \infty, \quad \text{для некоторого } \varepsilon > 0.$$

Постановка задачи

Тогда для любого $k \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ данное уравнение с $E = k^2$ имеет единственное непрерывное решение $\psi^+(x,k)$, имеющее асимптотику:

$$\psi^+(x,k) = e^{ikx} - 2\pi^2 \frac{e^{i|k||x|}}{|x|} f\left(\frac{k}{|k|}, \frac{x}{|x|}, |k|\right) + o\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

$$\text{при} \quad |x| \to \infty \left(\text{равномерно по } \frac{x}{|x|}\right),$$

где $f(\frac{k}{|k|}, \omega, |k|)$ с фиксированным k является непрерывной функцией от $\omega \in S^2$.

Функция $f(\theta, \omega, s)$ называется **амплитудой рассеяния**.

Постановка задачи

Задача 2.

- Задана* амплитуда рассеяния $f(\theta, \omega, s)$.
- Требуется восстановить $v(x)$.

* Для фиксированного $E = s^2$ или для интервала энергий.

Обозначения и предположения

- В дальнейшем мы предполагаем, что
$$\operatorname{supp} v(x) \subset D = B(0,1),$$
где $B(x,r)$ обозначает открытый шар радиуса r с центром x.

- Рассмотрим ортонормированный базис сферических гармоник:
$$\{Y_j^p : j \geq 0;\ -j \leq p \leq j\}.$$

- Используя обозначение $(a_{j_1 p_1 j_2 p_2})$, мы подразумеваем, что
$$j_1 \geq 0,\ -j_1 \leq p_1 \leq j_1,\ j_2 \geq 0,\ -j_2 \leq p_2 \leq j_2.$$

- Разложим функцию $f(\theta,\omega,s)$ в базисе $\{Y_{j_1}^{p_1} \times Y_{j_2}^{p_2}\}$:
$$f(\theta,\omega,s) = \sum_{j_1,p_1,j_2,p_2} a_{j_1 p_1 j_2 p_2}(s) Y_{j_1}^{p_1}(\theta) Y_{j_2}^{p_2}(\omega).$$

Норма Стефанова

Как и П. Стефанов в [S1990] мы используем норму

$$||f(\cdot,\cdot,s)||_{\sigma_1,\sigma_2} = \left(\sum_{j_1,p_1,j_2,p_2} \left(\frac{2j_1+1}{es}\right)^{2(j_1+\sigma_1)} \left(\frac{2j_2+1}{es}\right)^{2(j_2+\sigma_2)} |a_{j_1p_1j_2p_2}(s)|^2\right)^{1/2}.$$

Если функция $f(\theta,\omega,s)$ является амплитудой рассеяния для некоторого потенциала $v \in L^\infty(D)$ с носителем в $B(0,\rho)$, где $0<\rho<1$, то

$$|a_{j_1p_1j_2p_2}(s)| \le C(s,||v||_{L^\infty(D)}) \left(\frac{es\rho}{2j_1+1}\right)^{j_1+3/2} \left(\frac{es\rho}{2j_2+1}\right)^{j_2+3/2}$$

и, следовательно, $||f(\cdot,\cdot,s)||_{\sigma_1,\sigma_2} < \infty$.

Оценка устойчивости

Теорема 3. (P.Stefanov [S1990])

При выполненных условиях Задачи 2, а также при

- $m > 3/2$, $M > 0$, $\rho \in (0,1)$, $supp\, v_i \subset B(0,\rho)$,
- $v_i \in L^\infty(D) \cap H^m(\mathbb{R}^3)$, $||v_i||_{L^\infty(D)} \le M$, $i = 1, 2$,
- для некоторого $0 < \alpha < 1$

существует такая константа $C = C(M, \rho)$, что

$$||v_1 - v_2||_{L^\infty(D)} \le C\Big(\log(1 + ||f_1(\cdot,\cdot,s) - f_2(\cdot,\cdot,s)||^{-1}_{3/2,-1/2}\Big)^{-\alpha},$$

где f_1, f_2 обозначают амплитуды рассеяния при $E = s^2$ для потенциалов v_1 и v_2 соответственно.

Неустойчивость в обратной задаче рассеяния

Если потенциалы $v_1, v_2 \in C^m(D)$

$$||v_1 - v_2||_{L^\infty(D)} \leq c\left(\ln(1+\delta^{-1})\right)^{-\alpha},$$

где $c = c(M, D, m, s)$ и $\delta = ||f_1(\cdot,\cdot,s) - f_2(\cdot,\cdot,s)||_{\sigma_1,\sigma_2}$,

не выполняется при $\alpha > \frac{5}{3}m$ для вещественных потенциалов.

Неустойчивость в обратной задаче рассеяния

Для энергетического интервала I получается, что

$$||v_1 - v_2||_{L^\infty(D)} \leq c \sup_{s\in I} \left(\ln(1+\delta(s)^{-1})\right)^{-\alpha},$$

где $c = c(M, D, m, I)$ и $\delta(s) = ||f_1(\cdot,\cdot,s) - f_2(\cdot,\cdot,s)||_{\sigma_1,\sigma_2}$,

не выполняется при $\alpha > 2m$ для вещественных потенциалов.

Напоминание

Предположение 2.

Существуют такие положительные константы p, C_2 и α_2 и ортонормированный базис $\{v_k\}_{k=1}^{+\infty}$ в H такие, что выполняются следующие условия:

1. Для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется $\gamma(v_k) < \infty$, и для $n \in \mathbb{N}$

$$\sharp\{k \in \mathbb{N} : \gamma(v_k) \leq n\} \leq C_2(1+n)^p$$

2. Для любого $x \in X$ и любой пары $(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$| < (F(x) - F_0)v_k, v_l > | \leq C_2 \exp(-\alpha_2 \max\{\gamma(v_k), \gamma(v_l)\}).$$

Построение δ-сети

Лемма 2.(M. Cristo and L. Rondi [CR2003])

Пусть Предположение 2 выполнено. Тогда существует положительная константа $C_3 > 0$, зависящая только от p, C_2 и α_2 такая, что для любого $\delta \in (0, e^{-1})$ **найдется δ-сеть Y_δ для множества $F(X)$ с не более чем $\exp(C_3(-\log\delta)^{2p+1})$ элементами.**

Построение δ-сети

Отождествим с оператором $A : H \mapsto H'$ его матрицу коэфициентов:

$$a_{kl} =< Av_k, v_l > .$$

Пусть

$$||A||_Y = \sup_{(k,l)} |a_{kl}| \, (2 + \max\{\gamma(v_k), \gamma(v_l)\})^{p+1} .$$

Рассмотрим нормированное пространство

$$Y = \{A \in \mathcal{L}(H, H') : ||A||_Y < \infty\}.$$

Тогда:

- $||F(x) - F_0||_Y \le \sup_n C_2 e^{-\alpha_2(n-1)}(2+n)^{p+1} < \infty,$
- $||A||_{\mathcal{L}(H,H')} \le C_4 ||A||_Y .$

Построение δ-сети

1. Обозначим n_δ наименьшее натуральное число такое, что $C_2 e^{-\alpha_2(n-1)}(2+n)^{p+1} \le \delta/C_4$ для любого $n \ge n_\delta$.
$$n_\delta \le C \log \delta^{-1}.$$
2. Обозначим $\delta' = (2+n_\delta)^{-p-1}\delta/C_4$ и рассмотрим множество
$$\Psi_\delta = \delta'\mathbb{Z} \bigcap [-C_2, C_2].$$
3. Тогда в качестве δ-сети возьмем
$$Y_\delta = \Big\{ A \in \mathcal{L}(H, H') \mid a_{kl} \in \Psi_\delta \text{ для } k, l \le n_\delta, \text{ и } a_{kl} = 0 \text{ иначе} \Big\}.$$

Случай интервала энергий

Вместо $\boldsymbol{\Psi}_\delta$ можно взять подходящую $\boldsymbol{\delta}$-сеть из следующей леммы.

Лемма 3. (частный случай результатов А.Н. Колмогорова и В.М. Тихомирова [KT1959])

Для интервала $I = [a, b]$ и $\gamma > 0$ определим эллипс $W_{I,\gamma} \in \mathbb{C}$:

$$W_{I,\gamma} = \{\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\cos z \mid |Im\, z| \le \gamma\}.$$

Тогда существует константа $\nu = \nu(C, \gamma) > 0$ такая, что для любого $\delta \in (0, e^{-1})$ **существует** δ**-сеть с не более чем** $\exp(\nu(\ln \delta^{-1})^2)$ **элементами** для пространства функций на I с L^∞-нормой, имеющих голоморфное продолжение на $W_{I,\gamma}$, ограниченное в $W_{I,\gamma}$ по модулю константой C.

Пример для комплексного потенциала

Рассмотрим цилиндрические координаты (r_1, θ, x'):

- $x' = (x_3, \dots, x_d)$,
- $r_1 \cos\theta = x_1$,
- $r_1 \sin\theta = x_2$.

Возьмем $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ с носителем в $B(0, 1/2) \cap \{x_1 > 1/4\}$ и $||\phi||_\infty = 1$.

Пример для комплексного потенциала

Теорема 4.(N. Mandache [M2001])

Для $m > 0$ и $n > 0$ определим:

$$v_{mn}(x) = n^{-m} e^{in\theta} \phi(r_1, |x'|).$$

Тогда $||v_{mn}||_\infty = n^{-m}$ и для любых d и m существуют константы $c, c' > 0$ такие, что $||v_{mn}||_{C^m} \leq c$ и $||\Phi_{v_{mn}} - \Phi_0|| \leq c' 2^{-n/2}$.

Идея доказательства:

$$\psi - \psi_0 = \sum_{j=1}^{\infty} (-(-\Delta) v_{mn})^j \psi_0$$

Рассмотрим пространства $L^2_k(D) = \{f \in L^2(D) : e^{-ik\theta} f$ не зависит от $\theta\}$.

$$\psi_0 \in \oplus_{k=-n/2}^{n/2} L^2_k(D).$$

Тогда, можно показать

$$\langle (\Phi_{v_{mn}} - \Phi_0) f_{jp}, f_{kq} \rangle = 0 \text{ для } j, k < n/2.$$

Конец

Спасибо за внимание!

Литература

[A1988] G.Alessandrini, Stable determination of conductivity by boundary measurements, Appl.Anal.27 (1988) 153-172.

[CR2003] M. Di Cristo and L. Rondi, Examples of exponential instability for inverse inclusion and scattering problems, Inverse Problems. 19 (2003) 685–701.

[I2010] M.I. Isaev, Exponential instability in the inverse scattering problemon the energy interval, arXiv:1012.5526

[I2011] M.I. Isaev, Exponential instability in the Gel'fand inverse problem on the energy intervals, J. Inverse Ill-Posed Probl.(to appear); e-print arXiv: 1012.2193.

[KT1959] A.N. Kolmogorov,V.M. Tikhomirov ε-entropy and ϵ-capacity in functional spaces Usp. Mat.Nauk 14(1959) 3–86 (in Russian) (Engl. Transl. Am. Math. Soc. Transl. 17 (1961) 277–364)

[M2001] N. Mandache, Exponential instability in an inverse problem for the Schr?odinger equation, Inverse Problems. 17(2001) 1435–1444.

[N2010] R.G. Novikov, New global stability estimates for the Gel'fand-Calderon inverse problem, Inverse Problems 27 (2011) 015001(21pp); e-print arXiv:1002.0153.

[NS2011] R. Novikov and M. Santacesaria, A global stability estimate for the Gel'fand- Calderon inverse problem in two dimensions, J.Inverse Ill-Posed Probl.(to appear); e-print arXiv: 1008.4888.

[S1990] P. Stefanov, Stability of the inverse problem in potential scattering at fixed energy Annales de l'institut Fourier, tome 40, N4 (1990), p.867-884.