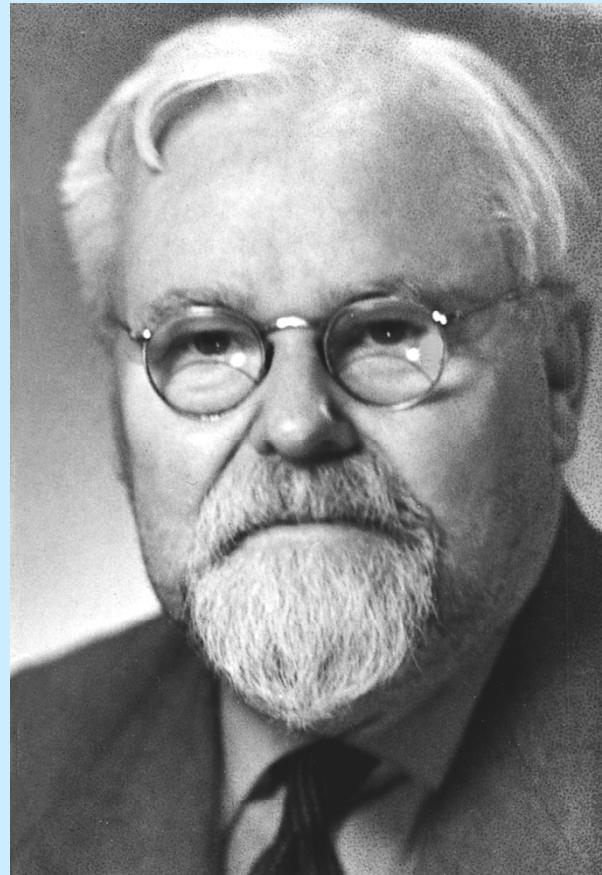


ОЦЕНИВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕШЕНИЙ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ПРИ НАЛИЧИИ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Анатолий Григорьевич Ягола

Профессор кафедры математики физического
факультета МГУ

Электронная почта: yagola@physics.msu.ru



Монографии

1. А.Н.Тихонов, А.В.Гончарский, В.В.Степанов, А.Г.Ягола. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. - М.: Наука, 1983, с. 1-200.
2. А.Н.Тихонов, А.В.Гончарский, В.В.Степанов, А.Г.Ягола. Численные методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1990, с. 1-232.
3. А.Н.Тихонов, А.С.Леонов, А.Г.Ягола. Нелинейные некорректные задачи. - М.: Наука, 1995, с. 1-312.

Монографии

- 4. А.В.Гончарский, А.М.Черепащук, А.Г.Ягола. Численные методы решения обратных задач астрофизики. - М.: Наука, 1978, с. 1-336.
- 5. А.В.Гончарский, А.М.Черепащук, А.Г.Ягола. Некорректные задачи астрофизики. - М.: Наука, 1985, с. 1-352.

Монографии

- 6. И.В.Кочиков, Г.М.Курамшина.
Ю.А.Пентин, А.Г.Ягола. Обратные
задачи колебательной спектроскопии. -
М.: Изд-во МГУ, 1993, с. 1-240.
- 7. В.Д.Русов, Ю.Ф.Бабикова, А.Г.Ягола.
Восстановление изображений в
электронно-микроскопической
авторадиографии поверхности. М.:
Энергоатомиздат, 1991, с. 1-216.

Статьи

1. Yagola A.G., Dorofeev K.Yu. Sourcewise representation and a posteriori error estimates for ill-posed problems. - In “A. G. Ramm, P. N. Shivakumar, A. V. Strauss (Eds.), Fields Institute Communications: Operator Theory and Its Applications”, Providence, RI: American Mathematical Society, 2000, v. 25, pp. 543-550.
2. Н.Н.Николаева, В.Н.Титаренко, А.Г.Ягола. Оценка погрешности решения уравнения Абеля на множествах монотонных и выпуклых функций. – Сибирский журнал вычислительной математики, 2003, т. 6, № 2, с. 171-180.
3. Dorofeev K.Yu., Yagola A.G. The method of extending compacts and a posteriori error estimates for nonlinear ill-posed problems. – Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2004, v. 12, No 6, pp. 627-636.

4. Н.Н.Николаева, М.Н.Рычагов, В.Н.Титаренко, А.Г.Ягола. Оценка погрешности реконструкции симметричных профилей скорости в многоплоскостных измерительных модулях. - Журнал вычислительной математики и математической физики, 2004, т. 44, №1, с. 23-34.
5. Yagola A., Titarenko V. Using a priori information about a solution of an ill-posed problem for constructing regularizing algorithms and their applications. - Inverse Problems in Science and Engineering, 2007, v. 15, No 1, pp. 3 – 17.
6. Е.А.Коптелова, Е.В.Шимановская, Б.П.Артамонов, М.В.Сажин, А.Г.Ягола. Двухступенчатый алгоритм восстановления изображения гравитационной линзы QSO 2237+0305. Астрономический журнал, 2004, т. 81 , N 10, с. 909-917.
7. Titarenko V., Yagola A. Error estimation for ill-posed problems on piecewise convex functions and sourcewise represented sets. - Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 2008, Vol. 16, No. 6, pp. 625–638.
8. Titarenko V., Yagola A. Solution of ill-posed problems on sets of functions convex along all lines parallel to coordinate axes. - Journal of Inverse and Ill-posed Problems, 2008, Vol. 16, No. 8, pp. 805–824.

Введение

$$A\bar{z} = \bar{u} \quad \bar{z} \in Z, \bar{u} \in U \quad (1)$$

$A : Z \rightarrow U$ - линейный оператор,
 Z, U - гильбертовы пространства.

Задача (1) называется корректно поставленной на множестве «допустимых» данных, если для каждой пары $\{A, \bar{u}\}$ из множества «допустимых» данных решение (1):

- 1) существует,
- 2) единственно,
- 3) непрерывно зависит от ошибок в A и \bar{u} (устойчиво).

Устойчивость означает, что, если вместо $\{A, \bar{u}\}$ нам даны «допустимые» $\{A_h, u_\delta\}$ такие, что $\|A_h - A\| \leq h$, $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$, приближенное решение сходится к точному при $h, \delta \rightarrow 0$. Числа δ и h являются оценками погрешности приближенных данных $\{A_h, u_\delta\}$ уравнения (1) с точными данными $\{A, \bar{u}\}$. Обозначим $\eta \equiv (\delta, h)$.

Если по крайней мере одно из указанных выше требований не выполнено, то задача (1) называется некорректно поставленной.

Пример М.М.Лаврентьева

- Корректность или некорректность постановки математической задачи зависит не только от оператора A , но и от выбора пространств Z и U . Так, если $h=0$, $u \in R(A)$, и A – инъективный оператор, то задача корректна, если ввести норму
 - $\|z\|_A = \|Az\|$

Приложения

Большое число обратных задач астрофизики, геофизики, неразрушающего контроля, компьютерной томографии и т.д. относятся к числу некорректно поставленных.

Простейшие математические примеры: интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода, СЛАУ с возмущенными матрицами, численное дифференцирование и многие другие.

В качестве обобщенного решения уравнения (1) обычно выбирается нормальное псевдорешение \tilde{z} , которое существует и единствено, если точные данные $A \in L(Z, U)$, $\bar{u} \in R(A) \oplus R^\perp(A)$:

$$\tilde{z} = A^+ \bar{u}$$

Ниже в качестве точного решения мы часто будем рассматривать точное нормальное псевдорешение $\bar{z} = \tilde{z}$.

Как решить некорректную задачу?

Ответ А.Н.Тихонова: необходимо построить отображение (оператор) (регуляризирующий алгоритм – РА) $R(A_h, u_\delta, \eta)$, обладающее следующими свойствами:

- 1) любому набору данных $\{A_h, u_\delta, \eta\}$, $A_h \in L(Z, U)$, $u_\delta \in U$, сопоставляется элемент $z_\eta = R(A_h, u_\delta, \eta)$;
- 2) если $\bar{u} \in R(A) \oplus R^\perp(A)$, то имеет место сходимость $z_\eta \rightarrow \bar{z} = A^+ \bar{u}$ при $\eta \rightarrow 0$.

Математическая задача называется регуляризируемой, если существует хотя бы один РА. Корректно поставленные задачи, очевидно, являются регуляризируемыми, поскольку можно положить $R = A^\perp$.

Из определения РА легко следует, что, если существует хотя бы один РА, то существуют бесконечно много РА.

Классификация математических задач

- 1) корректно поставленные задачи;
- 2) некорректно поставленные регуляризируемые задачи;
- 3) некорректно поставленные нерегуляризируемые задачи;

Пример Л.Д.Менихеса

- Существование РА зависит от выбора пространств Z, U .

$$Az \equiv \int_0^1 K(x, s)z(s)ds = u(x), \quad x \in [0, 1]$$

$$A: C[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$$

Ядро $K(x, s)$ непрерывно и замкнуто. Задача нерегуляризируема. Если Z – гильбертово или рефлексивное банахово, A - ограниченный оператор, то РА существует.

А.Н.Тихонов в 1963 г. не только дал определение РА, но и предложил конкретный РА $R(\delta, h, A_h, u_\delta)$ для решения (1), основанный на минимизации функционала

А.Н.Тихонова $M^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|^2 + \alpha \|z\|^2$ в Z и выборе параметра регуляризации $\alpha > 0$ ($\alpha = \alpha(\delta, h, A_h, u_\delta)$) так, чтобы для элементов $z^\alpha = z^\alpha(A_h, u_\delta) \in Z$, минимизирующих функционал А.Н.Тихонова, имела место сходимость к точному решению (1) при $\delta, h \rightarrow 0$.

Можно ли построить РА, не зависящий явно от h, δ ?

Теорема (А.С.Леонов, А.Г.Ягола).

Пусть отображение $R(A_h, u_\delta)$ из $L(Z, U) \otimes U$ в Z является регуляризирующим алгоритмом решения уравнения (1), не зависящим явно от η . Тогда отображение $P(A, \bar{u}) = A^+ \bar{u}$ непрерывно на его области определения $L(Z, U) \otimes (R(A) \oplus R^\perp(A))$.

Эта теорема обобщает известные результаты А.Б.Бакушинского (относительно вычисления значений неограниченного оператора) и А.Н.Тихонова (для решения некорректно поставленных СЛАУ).

Отсюда следует, что РА решения уравнения (1), не использующий явно h и δ , возможен только для корректно поставленных задач.

В силу тривиального факта ограниченности любого линейного оператора, действующего в конечномерных евклидовых пространствах, при решении СЛАУ знание δ полезно, но не является необходимым для построения РА.

Построение устойчивых численных методов решения некорректно поставленных СЛАУ невозможно без знания h .

Простейший пример:

Пусть $Z = U = \mathbb{R}^2$. Рассмотрим СЛАУ:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Нормальное решение СЛАУ $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Пусть вместо А нам дана приближенная матрица

$$A_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \varepsilon \neq 0.$$

Для любого $\varepsilon \neq 0$ приближенная СЛАУ имеет единственное решение $(x_{\varepsilon}, y_{\varepsilon}) = (0, 1)$, которое не сходится к $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим второй пример:

$$\begin{pmatrix} x + y = 3/2 \\ x + y = 1/2 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Эта СЛАУ не имеет решений, ее нормальное псевдорешение :

$$(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Легко понять, что произойдет, если матрица А задана с погрешностью. Эти два примера демонстрируют неустойчивость метода псевдообращения.

Интересно отметить, что наиболее популярные не зависящие от погрешностей «РА», не решают и корректно поставленные задачи. Например, очень популярный «метод L-кривой» (P.C. Hansen). В этом методе параметр регуляризации в функционале Тихонова α выбирается как точка максимальной кривизны так называемой L-кривой $\{(\ln\|A_h z^\alpha - u_\delta\|, \ln\|z^\alpha\|) : \alpha > 0\}$.

Этот метод не может быть применен для решения некорректных задач, поскольку L-кривая не зависит явно от δ и h (см. теорему). Легко проверить, что этот «метод» не применим и для решения простейших корректных задач в конечномерных пространствах (например, $z=1$).

Другой очень популярный “error free” метод GCV – the generalized cross-validation method (G. Wahba) (обобщенный метод перекрестной проверки), в котором $\alpha(A_h, u_\delta)$ находится как точка глобального минимума функции

$$G(\alpha) = \|(A_h A_h^* + \alpha I)^{-1} u_\delta\| [\text{tr}(A_h A_h^* + \alpha I)^{-1}]^{-1}, \alpha \geq 0.$$

В силу теоремы метод не применим для решения некорректных задач. Можно построить примеры корректных СЛАУ, для которых метод дает неверные результаты. См.: В.Н.Титаренко, А.Г.Ягола. Применение метода GCV для корректных и некорректных задач. – Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. N 4, 2000, с. 15-18.

Эквивалентное определение РА

Пусть задан оператор (отображение) $R_\delta(u_\delta)$,
определенный для любых $\delta > 0$, $u_\delta \in U$, и отображающий
 $(0, +\infty) \times U$ в Z . Погрешность решения операторного
уравнения в точке $z \in Z$ с помощью оператора $R_\delta(u_\delta)$
при условии, что правая часть u задана с погрешностью
 $\delta > 0$, определяется как

$$\Delta(R_\delta, \delta, z) = \sup_{u_\delta \in U : \|u_\delta - u\| \leq \delta, Az = u} \|R_\delta u_\delta - z\|$$

Оператор $R_\delta(u_\delta)$ называется регуляризирующим
оператором (алгоритмом), если для любого $z \in Z$

$$\Delta(R_\delta, \delta, z) \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} 0.$$

Можно ли оценить ошибку приближенного решения некорректной задачи?

Ответ отрицательный. Важнейший результат был получен А.Б.Бакушинским.

Пусть $A_h = A$, $R(u_\delta, \delta)$ - РА. Обозначим

$$\Delta(R, \delta, \bar{z}) = \sup \left\{ \|R(u_\delta, \delta) - \bar{z}\| : \forall u_\delta \in U, \|A\bar{z} - u_\delta\| \leq \delta \right\}$$

погрешность решения (1) в точке \bar{z} с помощью алгоритма R . Если (1) регуляризируемо с помощью алгоритма R , и имеется равномерная на множестве D оценка погрешности

$$\sup \{\Delta(R, \delta, \bar{z}) : \bar{z} \in D\} \leq \varepsilon(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0,$$

то сужение A^{-1} на $AD \subset U$ непрерывно на AD .

Теорема В.А.Винокурова о скорости сходимости

Пусть A - линейный ограниченный инъективный оператор, действующий из банахова пространства Z , и обратный оператор A^{-1} неограничен на $D(A^{-1})$. Предположим, что $\varphi(\delta)$ - произвольная положительная функция такая, что $\varphi(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, и R - произвольный алгоритм (оператор). Тогда $\forall \bar{z} \in Z$ (быть может, за исключением множества первой категории в Z) справедливо следующее неравенство:

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta(R, \delta, \bar{z})}{\varphi(\delta)} \right\} = \infty$$

Выводы

Для некорректных задач мы не можем оценить погрешность приближенного решения. Мы не можем выбрать «наилучший» РА, сравнивая скорости сходимости. Поэтому мы рекомендуем перед решением задачи сформулировать ограничения на решения – использовать априорную информацию.

Компакт – типичный пример множества первой категории в бесконечномерном банаховом пространстве Z . Для этого множества может быть построена равномерная оценка погрешности.

Апостериорная оценка погрешности

Для некоторых некорректных задач можно построить так называемую апостериорную оценку погрешности. Пусть A - точный инъективный ограниченный оператор, и Z - σ -компактное пространство. Введем функцию $\kappa(u_\delta, \delta)$ такую, что $\forall \bar{z} \in Z \exists \delta(\bar{z}) > 0 \quad \forall \delta \in (0, \delta(\bar{z})]$
 $\forall u_\delta \in U \quad \|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta : \|\bar{z} - R(u_\delta, \delta)\| \leq \kappa(u_\delta, \delta)$.

Функция $\kappa(u_\delta, \delta)$ называется апостериорной оценкой погрешности решения операторного уравнения, если $\kappa(u_\delta, \delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Вариационный метод Тихонова

Пусть Z, U - гильбертовы пространства, $D \subset Z$ - замкнутое выпуклое множество априорных ограничений такое, что $0 \in D$; A, A_h - линейные ограниченные операторы; $u_\delta \in U$. Для заданных $\{A_h, u_\delta, \eta\}$ определим функционал Тихонова:

$$M^\alpha[z] = \|A_h z - u_\delta\|^2 + \alpha \|z\|^2$$

и экстремальную задачу: найти

$$\min \{M^\alpha[z]: z \in D\} \quad (2)$$

Для любых $\alpha > 0$, $A_h \in L(Z, U)$, $u_\delta \in U$, задача (2) имеет и при том единственное решение $z_\eta^\alpha \in D$.

Априорный способ выбора α

РА на основе экстремальной задачи (2) для функционала Тихонова $M^\alpha[z]$: выбрать $\alpha = \alpha(\eta)$ так, чтобы $z_\eta^{\alpha(\eta)} \rightarrow \bar{z}$ при $\eta \rightarrow 0$.

Если A - ограниченный инъективный оператор, точное решение $\bar{z} \in D$, $\alpha(\eta) \rightarrow 0$,

$$\frac{(h+\delta)^2}{\alpha(\eta)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow 0 \quad , \text{то} \quad z_\eta^{\alpha(\eta)} \rightarrow \bar{z} \quad .$$

α

Апостериорный способ выбора α

Определим меру несовместности (1) on D :

$$\mu_\eta(u_\delta, A_h) = \inf \{ \|A_h z - u_\delta\| : z \in D \} ,$$

и пусть ее можно вычислить с ошибкой $\kappa > 0$:

вместо $\mu_\eta(u_\delta, A_h)$ задана $\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h)$ такая, что

$$\mu_\eta(u_\delta, A_h) \leq \mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h) \leq \mu_\eta(u_\delta, A_h) + \kappa$$

($\kappa = \kappa(\eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow 0$).

Введем обобщенную невязку:

$$\rho_\eta^\kappa(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - u_\delta\|^2 - (\delta + h \|z_\eta^\alpha\|)^2 - (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2$$

Обобщенная невязка $\rho_\eta^\kappa(\alpha)$ непрерывна и монотонно не убывает при $\alpha > 0$.

Обобщенный принцип невязки выбора параметра регуляризации (Гончарский, Леонов, Ягола):

- 1) Если не выполнено $\|u_\delta\|^2 > \delta^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2$,
то $z_\eta = 0$ - приближенное решение (1);
- 2) Если $\|u_\delta\|^2 > \delta^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2$, то обобщенная невязка имеет положительный корень α^*
и $z_\eta = z_\eta^{\alpha^*}$.

Если A - инъективный оператор, то $\lim_{\eta \rightarrow 0} z_\eta = \bar{z}$.

В противном случае $\lim_{\eta \rightarrow 0} z_\eta = z^*$, где z^* -
нормальное решение (1) на D , т.е.:

$$\|z^*\| = \min \left\{ \|z\| : z \in D, Az = \bar{u} \right\}$$

Если A, A_h - ограниченные линейные операторы, D - замкнутое выпуклое множество, $0 \in D$, $\bar{z} \in D$, обобщенный принцип невязки эквивалентен обобщенному методу невязки:

найти:

$$\min \left\{ \|z\| : z \in D, \|A_h z - u_\delta\|^2 \leq (\delta + h\|z\|)^2 + (\mu_\eta^\kappa(u_\delta, A_h))^2 \right\}$$

Обратная задача для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} & x \times t \in (0, l) \times (0, T) \\ w(0, t) = 0 \\ w(l, t) = 0 \end{cases}$$

Дана: $u_\delta(\xi) \equiv w(\xi, T) \in L^2[0, l]$.

Требуется найти: $z(x) \equiv w(x, 0) \in W_2^1[0, l]$

Задача может быть записана в виде

интегрального уравнения

$$u(\xi) = \int_0^l G(\xi, x, T) z(x) dx ,$$

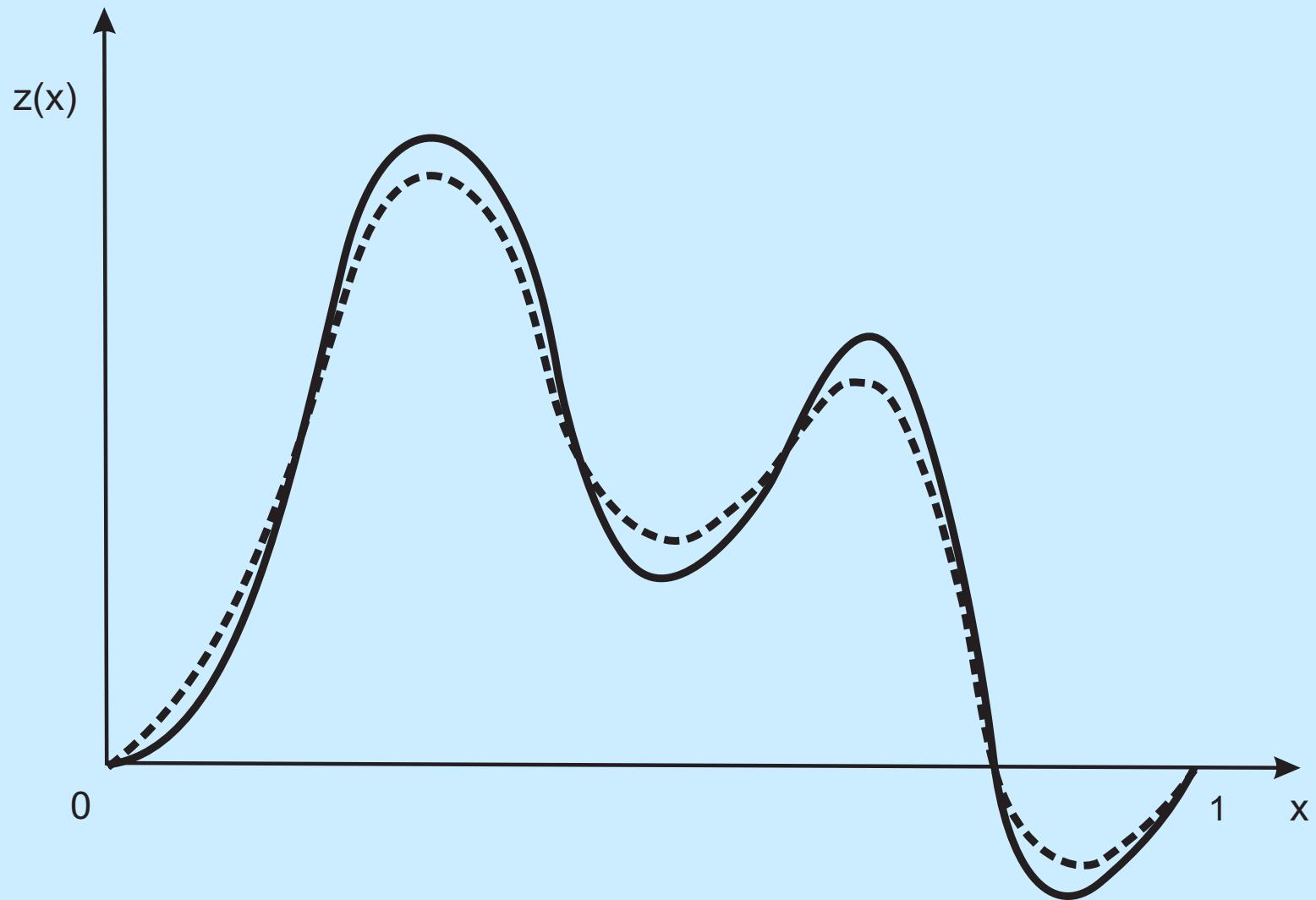
где $G(\xi, x, t)$ - функция Грина-Коши:

$$G(\xi, x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \exp\left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t\right)$$

Задача решалась для следующего набора

параметров $a = 1.0, T = 0.1, l = 1.0, \delta = 0.05 \cdot \|\bar{u}(\xi)\|$

.



Точное решение $\bar{z}(x)$ (—) и приближенное
решение $z_\eta(x)$ (- - -).

Уравнение Эйлера

Функционал Тихонова $M^\alpha[z]$ - сильно выпуклый функционал в гильбертовом пространстве.

Необходимое и достаточное условие того, что z_η^α - точка минимума $M^\alpha[z]$ на D :

$$\left(\left(M^\alpha[z_\eta^\alpha] \right)', z - z_\eta^\alpha \right) \geq 0 \quad \forall z \in D.$$

Если z_η^α - внутренняя точка D , тогда $\left(M^\alpha[z_\eta^\alpha] \right)' = 0$,
или

$$A_h^* A_h z_\eta^\alpha + \alpha z_\eta^\alpha = A_h^* u_\delta$$

Мы получаем уравнение Эйлера.

Истокообразная представимость

$$A\bar{z} = \bar{u} \quad (1)$$

$A : Z \rightarrow U$ - инъективный ограниченный оператор.

Пусть задана априорная информация: \bar{z} - истокообразно представимо с помощью вполне непрерывного инъективного оператора $B : V \rightarrow Z$

$$\bar{z} = B\bar{v} \quad (3)$$

Здесь V - рефлексивное банахово пространство.

Пусть оператор A задан точно, $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$.

Положим $n = 1$ и определим компакт

$$Z_n = \{z \in Z : z = Bv, v \in V, \|v\| \leq n\}$$

Минимизируем невязку $F(z) = \|Az - u_\delta\|$ на Z_n .

Если $\min\{\|Az - u_\delta\| : z \in Z_n\} \leq \delta$, решение найдено.

Обозначим $n(\delta) = n$. В противном случае

заменим n на $n + 1$ и повторим процесс.

Если $n(\delta)$ найдено, определим приближенное
решение (1) $z_{n(\delta)}$ как любое решение
неравенства

$$\|Az - u_\delta\| \leq \delta, \quad z \in Z_{n(\delta)}.$$

Теорема (Ягола, Дорофеев). Итерационный процесс, описанный выше, сходится за конечное число шагов: $n(\delta) < \infty$. Существует (зависящее, вообще говоря, от \bar{z}) $\delta_0 > 0$ такое, что $n(\delta) = n(\delta_0)$ $\forall \delta \in (0, \delta_0]$. Приближенные решения $z_{n(\delta)}$ сходятся к \bar{z} при $\delta \rightarrow 0$, причем скорость сходимости является оптимальной по порядку.

Замечание. Данный метод является вариантом метода расширяющихся компактов, идея которого предложена В.К.Ивановым и И.Н.Домбровской.

Теорема (Ягола, Дорофеев). Для метода, описанного выше, существует апостериорная оценка точности решения – функционал $\kappa(u_\delta, \delta)$ такой, что $\kappa(u_\delta, \delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и $\|z_{n(\delta)} - \bar{z}\| \leq \kappa(u_\delta, \delta)$ по крайней мере при достаточно малых положительных δ .

Замечание. Существование апостериорной оценки точности следует из того, что множество точных решений (1) $\bar{Z} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n \subseteq Z$ является σ -компактным пространством.

Апостериорная оценка точности не является оценкой точности решения в обычно смысле. Как было показано выше, такие оценки невозможны для некорректных задач. Однако апостериорная становится оценкой точности при достаточно малых $\delta \leq \delta_0$, δ_0 зависит от точного решения \bar{z} .

Пусть операторы A и B заданы с ошибками.

Заданы линейные операторы A_{h_A}, B_{h_B} такие, что
 $\|A_{h_A} - A\| \leq h_A$, $\|B_{h_B} - B\| \leq h_B$. Пусть $\eta \equiv (\delta, h_A, h_B)$.

Для любого натурального n определим компакт

$$Z_{n,h_B} \equiv \left\{ z \in Z : z = B_{h_B} v, v \in V, \|v\| \leq n \right\}.$$

Найдем наименьшее натуральное число $n = n(\eta)$

такое, что неравенство выше имеет непустое

множество решений на компакте Z_{n,h_B} :

$$\|A_{h_A} z - u_\delta\| \leq \delta + (h_A \|B_{h_B}\| + h_B \|A_{h_A}\| + h_A h_B) \cdot n(\eta)$$

Апостериорная оценка погрешности имеет вид:

$$\kappa(u_\delta, A_{h_A}, B_{h_B}, \eta) \equiv h_B n(\eta) + \max \{ \|z - z_{n(\eta)}\| : z \in Z_{n(\eta), h_B} \},$$

$$\|A_{h_A} z - u_\delta\| \leq \delta + (h_A \|B_{h_B}\| + h_B \|A_{h_A}\| + h_A h_B) \cdot n(\eta)$$

Пример истокообразной представимости

- Пусть A – линейный инъективный вполне непрерывный оператор, и пусть $\bar{z} = (A^* A)^{p/2} \bar{v}$, $p > 0$, Z и U – гильбертовы пространства. Поскольку оператор $(A^* A)^{p/2}$ – вполне непрерывный, применим метод расширяющихся компактов, который является оптимальным по порядку точности.

Обратная задача для уравнения теплопроводности

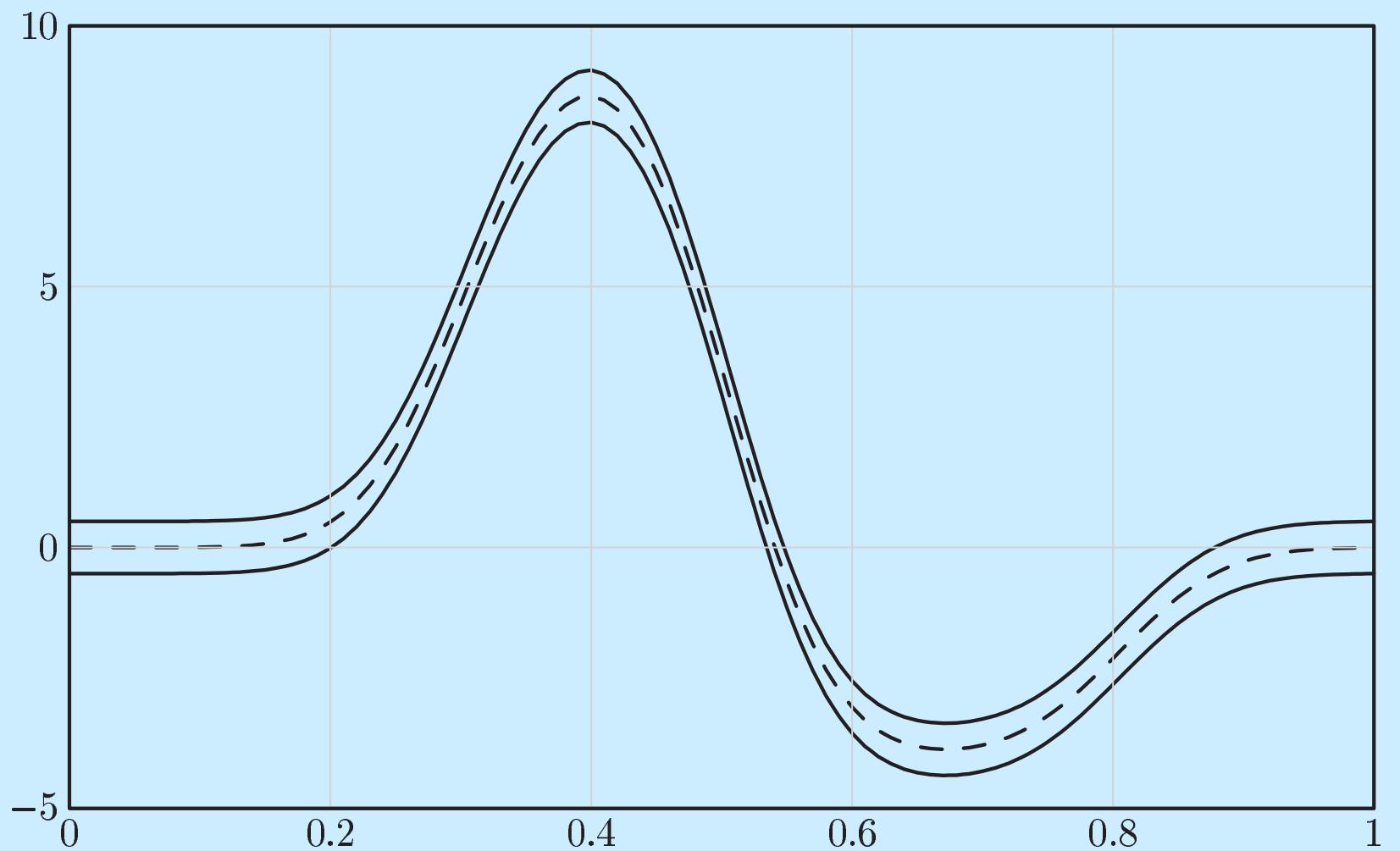
Для любого момента времени $t_\varepsilon > 0$ температура

$$z(\xi) = Bv(x) = \int_0^l G(\xi, x, t_\varepsilon) v(x) dx$$

где $v(x) = w(x, 0)$. Пусть $V = Z = U = L^2[0, l]$.

Будем решать задачу методом расширяющихся компактов: $a = 1.0$, $l = 1.0$, $t_\varepsilon = 0.02$, $T = 0.1$,

$$\delta = 0.03 \cdot \|\bar{u}\|, \quad \bar{v}(x) = \begin{cases} 10 & 0.3 < x < 0.5 \\ -4 & 0.5 < x < 0.8 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}.$$



Приближенное решение $z_\eta(x)$ и его апостериорная оценка точности. Получено $n(\delta) = 5$.

Компактные множества

Пусть дана априорная информация о принадлежности точного решения (1) \bar{z} компакту M , и пусть A - линейный ограниченный инъективный оператор.

В качестве множества приближенных решений (1) можно принять

$$Z_M^\eta \equiv \left\{ z \in M : \|A_h z - u_\delta\| \leq h \|z\| + \delta \right\}.$$

Тогда $z_\eta \rightarrow \bar{z}$ при $\eta \rightarrow 0$ для любого $z_\eta \in Z_M^\eta$ (η -квазирешение).

Важные для приложений компакты – множества ограниченных монотонных, выпуклых, кусочно-выпуклых и др. функций

После конечно-разностной аппроксимации получим $\hat{Z}_M^\eta \equiv \hat{M} \cap \hat{Z}^\eta$, где \hat{M} - выпуклый многогранник в случае компакта, состоящего из монотонных, выпуклых и др. функций, и

$$\hat{Z}^\eta = \left\{ \hat{z} \in \hat{Z} : \left\| \hat{A}\hat{z} - \hat{u}_\delta \right\| \leq \Delta(\eta) \right\}$$

\hat{A} - матрица, \hat{z} и \hat{u}_δ - векторы.

Для того, чтобы найти \hat{z}_η можно применить метод условного градиента или метод проекции сопряженных градиентов.

Оценивание погрешности

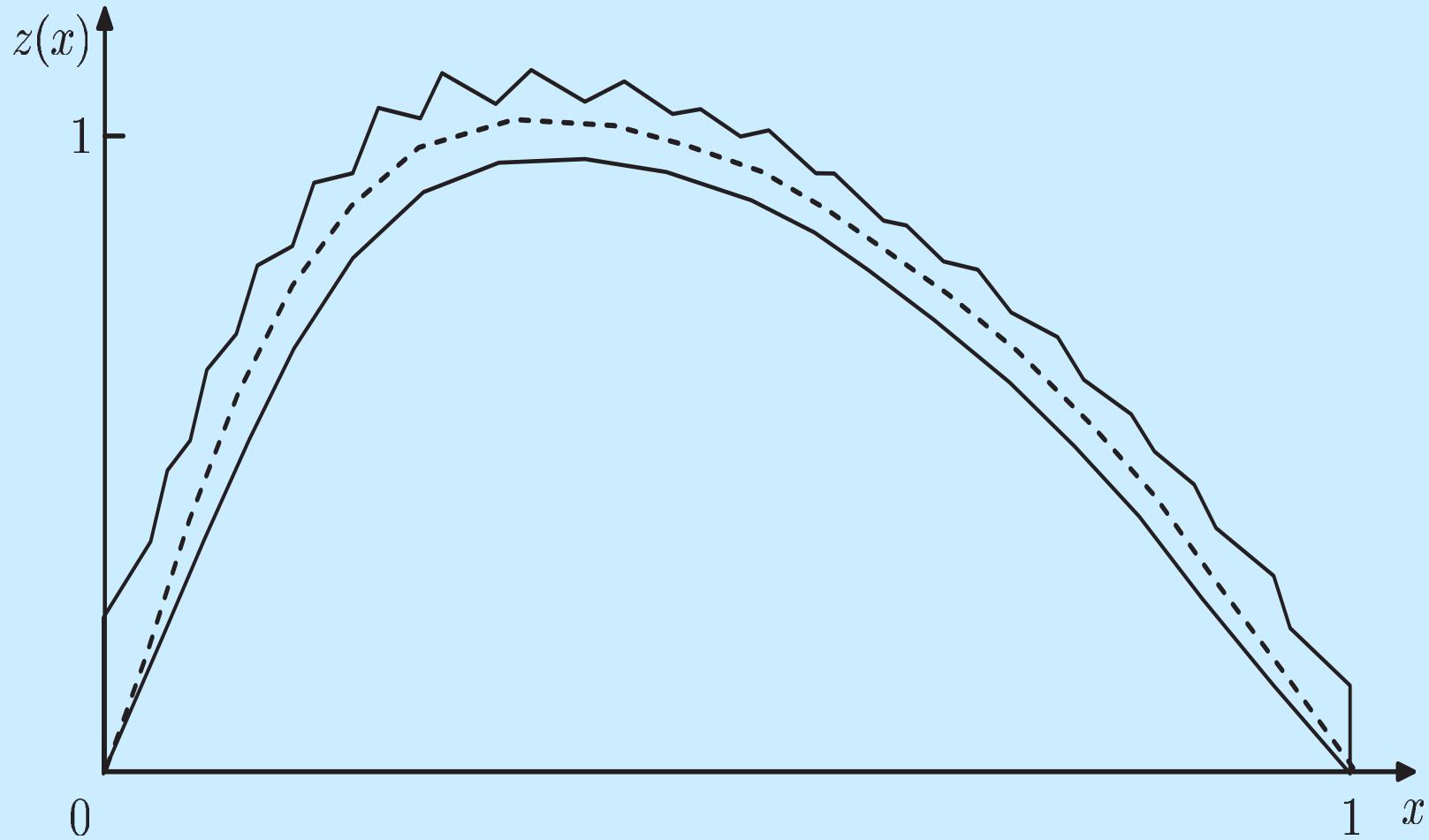
- 1) Найти минимальные значения для каждой координаты \hat{Z}_M^η . Обозначим их z_i^l, z_i^u ,
 $i = 1, n$.
- 2) Используя найденные \hat{z}^l, \hat{z}^u построим функции $z^l(x)$ и $z^u(x)$ близкие к Z_M^η , и
 $\forall z \in Z_M^\eta : z^l(x) \leq z(x) \leq z^u(x)$ для любого $x \in [a, b]$.

Для этой цели мы должны минимизировать и максимизировать линейные функционалы на выпуклых многогранниках, используя методы линейного программирования. convex set.

Обратная задача для уравнения теплопроводности

Пусть M - множество выпуклых вверх
(вогнутых) функций $z(x)$ таких, что
 $0 \leq z(x) \leq C$.

Зададим $T = 1.0$, $C = 1.2$, $a = 1.0$, $l = 1.0$, число
точек сетки 20.



Точное решение $\bar{z}(x)$ (---), функции $z^l(x)$, $z^u(x)$.

Приложения

Обратная задача количественного микроанализа с помощью электронного микроскопа

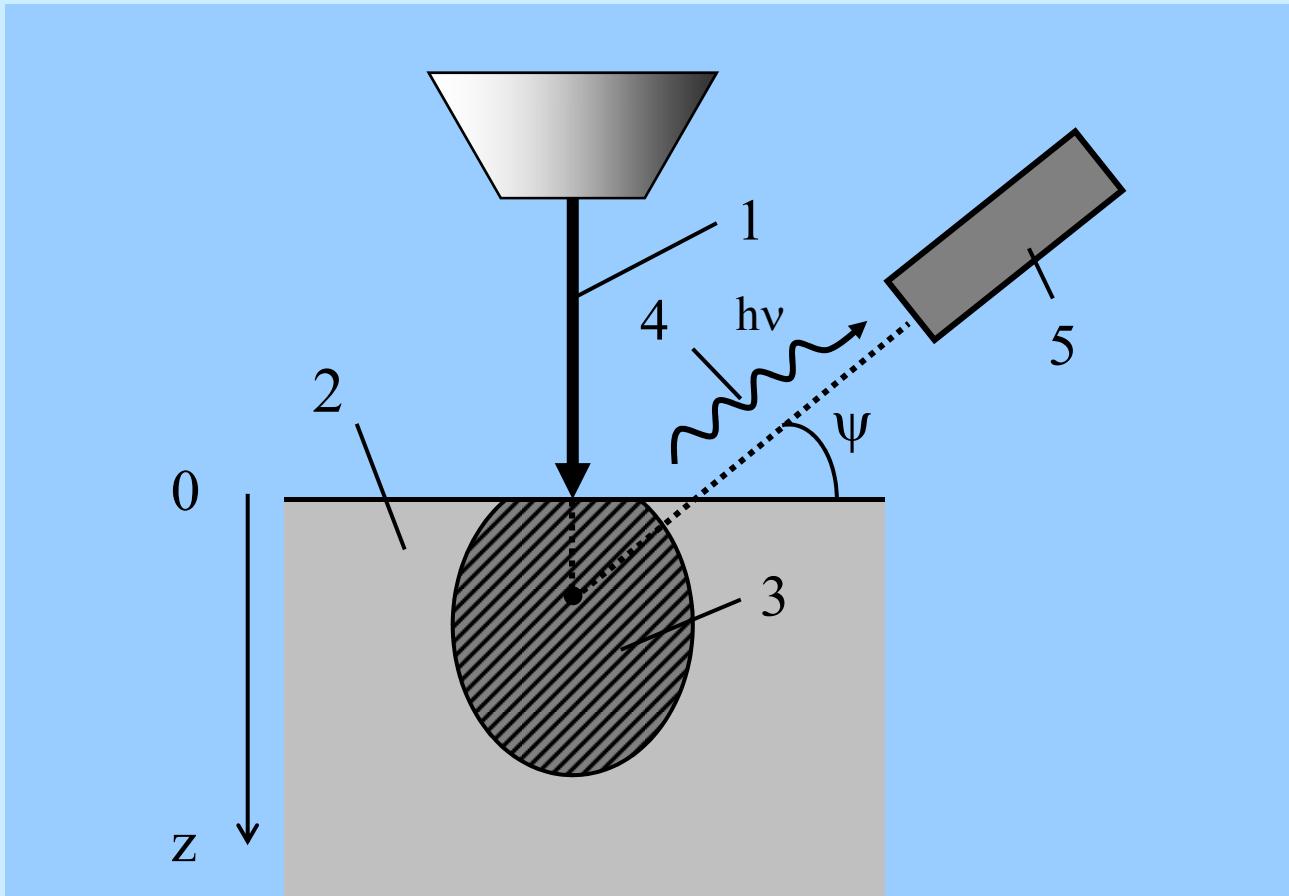


Рис.1

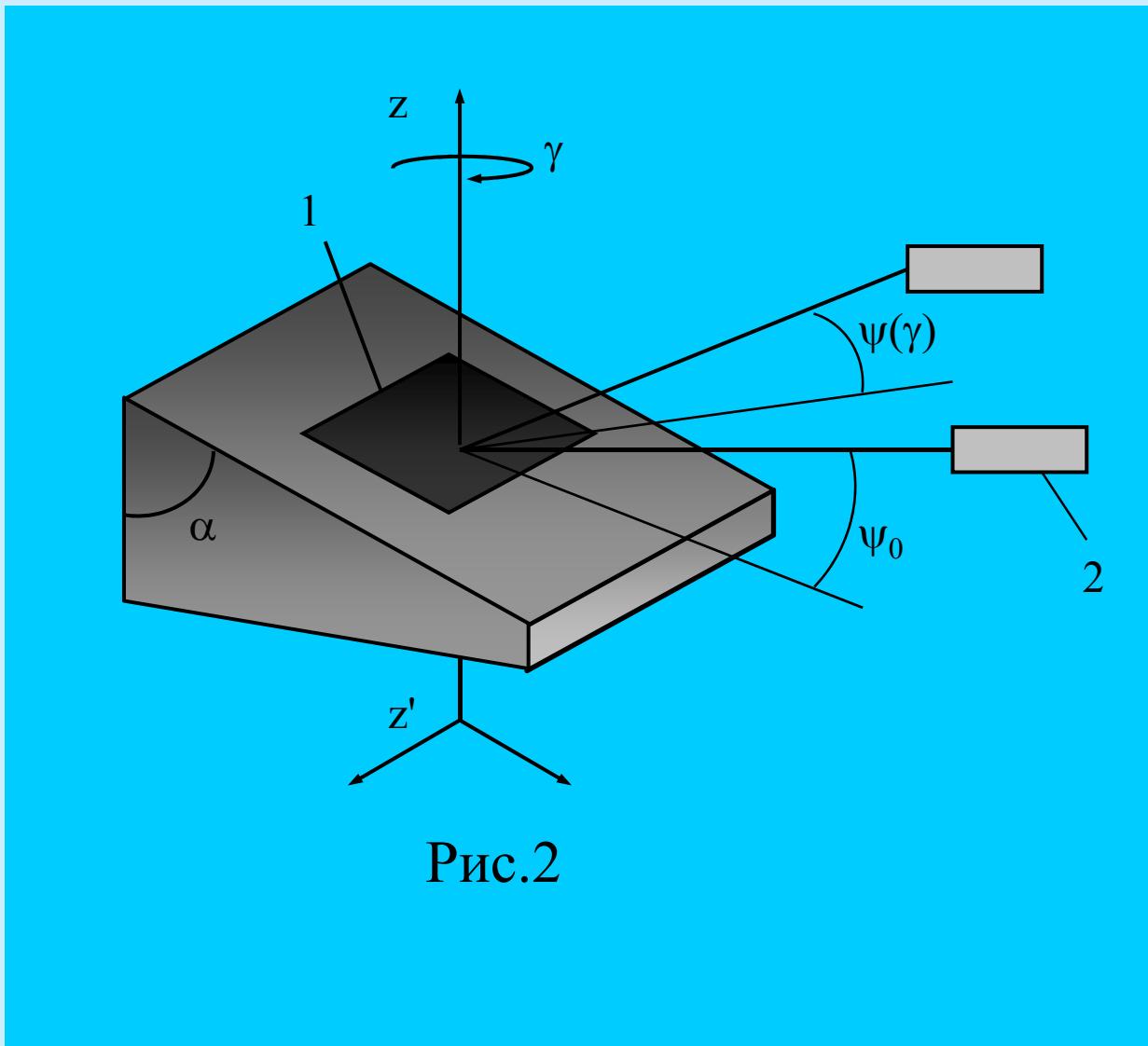


Рис.2

Интегральное уравнение

$$A\varphi = I_{\delta}^{om}, \quad (1)$$

где

$$A\varphi = \int_0^{\rho r} K(\rho z, \gamma) \varphi(\rho z) d\rho z,$$

$\delta > 0$ – погрешность задания правой части (1), т.е.
 $\|I_{\delta}^{rel} - \bar{I}^{rel}\| \leq \delta$, $A\bar{\varphi} = \bar{I}^{rel}$, $I^{rel} = \frac{I}{I(0)}$ – относительная
интенсивность.

Невязка

$$F[\varphi] = \|\mathbf{A}\varphi - \mathbf{I}_\delta\|_{L_2}^2, \quad (2)$$

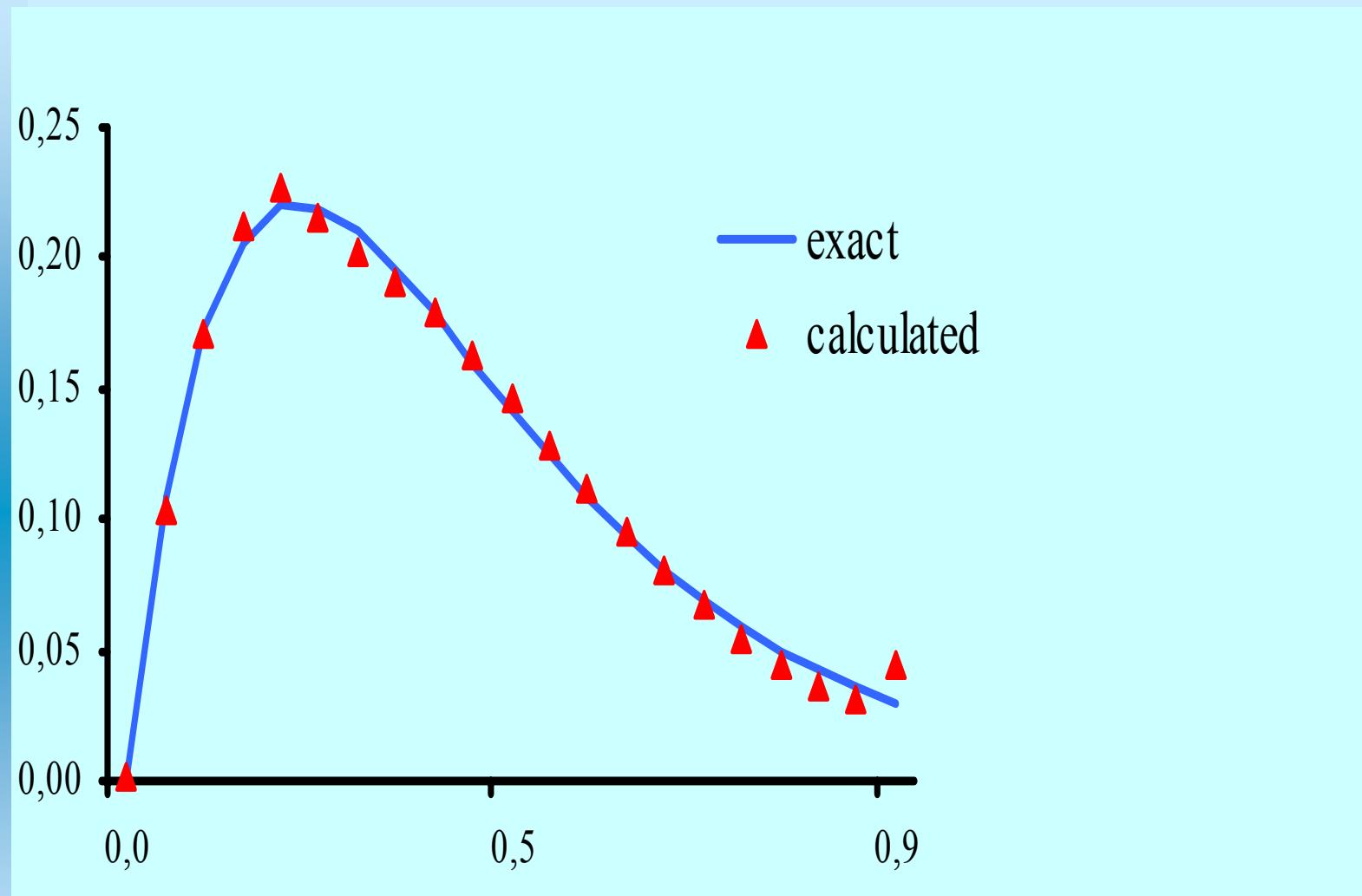
Достаточно найти элемент φ_δ , такой что $F[\varphi_\delta] \leq \delta^2$.

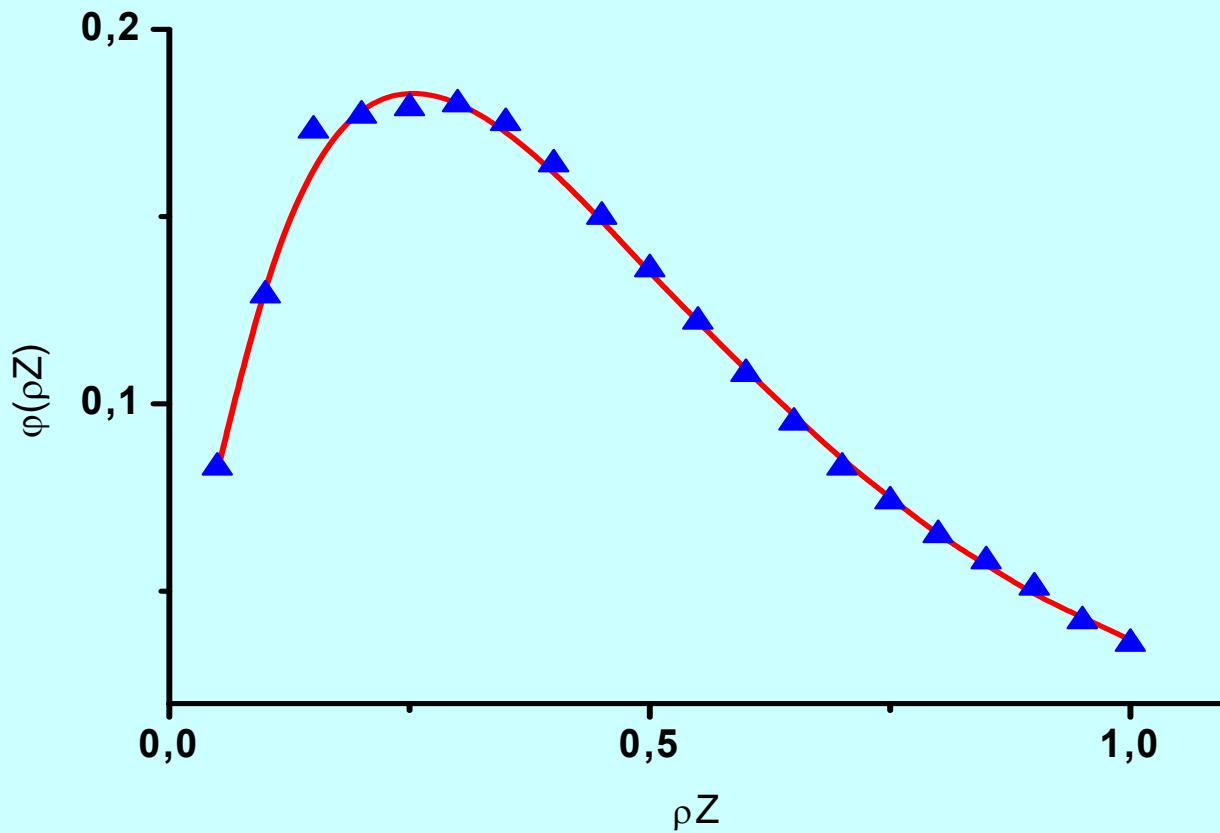
После конечно-разностной аппроксимации невязка имеет вид:

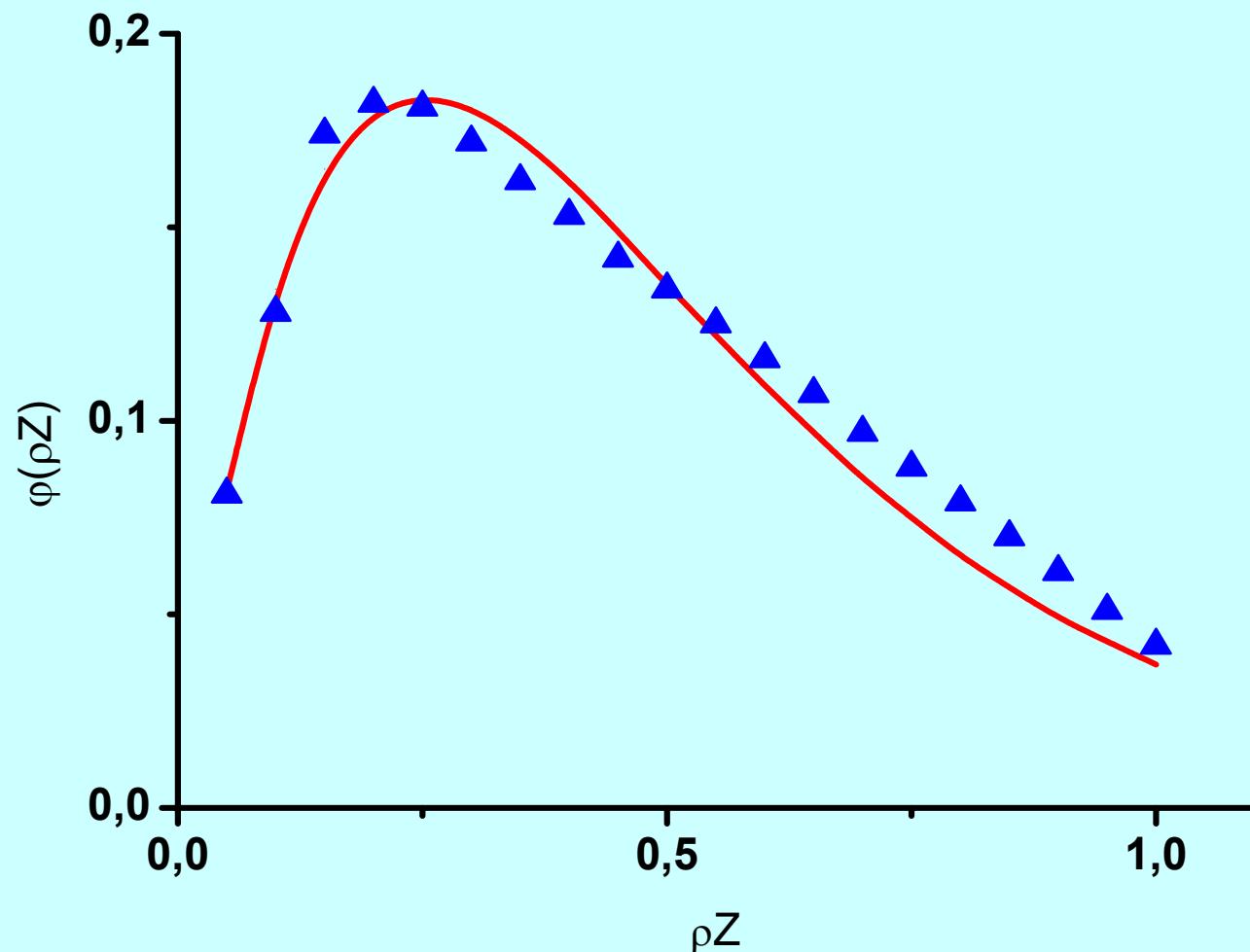
$$f(\varphi) = \sum_{j=1}^{N_\gamma} \left(\sum_{i=1}^{N_{\rho z}} K_{ij} \varphi_i h_{\rho z} - I_j^{om} \right)^2 h_\gamma, \quad (3)$$

а множество ограничений:

$$\hat{Z} = \left\{ \varphi : \begin{array}{l} \varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1} \leq 0, \quad i = 2, \dots, N_{\rho z} - 1 \\ \varphi_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_{\rho z} \end{array} \right\}, \quad (4)$$

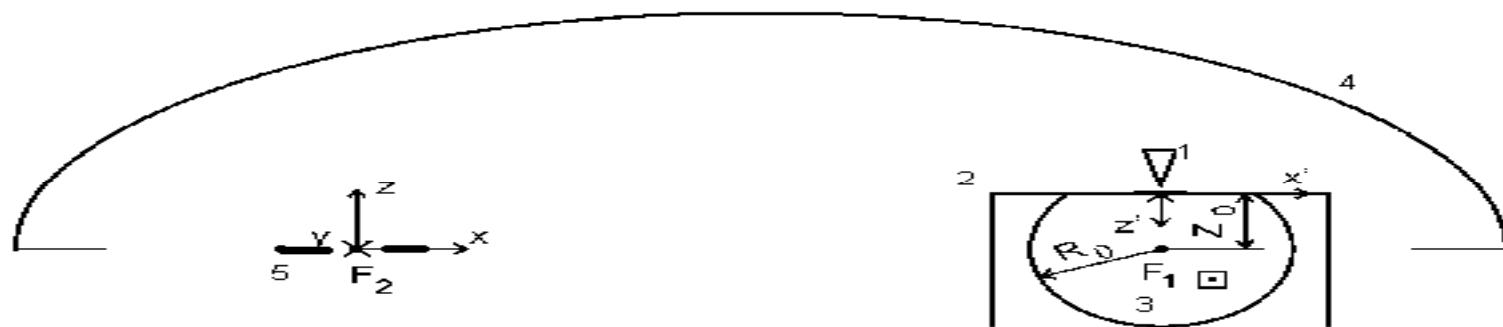






Обратная задача катодолюминисцентной микротомографии

Схема установки



1. Электронный зонд.
2. Исследуемый объект.
3. Область генерации неравновесных носителей.
4. Эллипсоидное зеркало.
5. Диафрагма с детектором.

Задача

Требуется исследовать оптоэлектронные локальные свойства катодолюминисцентных объектов, используя измерения интенсивности излучения сфокусированного на детекторе с помощью бифокального зеркала (Phang J.C.H, Chan D.C.H.).

Нужно решить следующую обратную задачу:

найти внутренний квантовый выход

$$\eta(s), \quad s \in [0, R_0]$$

из уравнения Фредгольма 1-го рода:

$$I(x) = \int_0^{R_0} K_1(x, s) \eta(s) ds ,$$

где $I(x)$ - интенсивность, измеренная в эксперименте, как функция смещения объекта в вертикальном направлении,

s - расстояние от поверхности объекта,

R_0 - максимальная глубина проникновения электронов,

$K_1(x, s)$ - непрерывная функция, которая рассчитывается численными методами (физический смысл: $K_1(x, s) ds$ - вклад в общую интенсивность слоя с центром на глубине s толщиной ds).

Априорная информация

Пусть известно, что решение истокообразно представимо с помощью интегрального оператора:

$$\eta(s) = \int_0^{R_0} K_2(s, \xi) \eta_0(\xi) d\xi, \quad s \in [0, R_0]$$

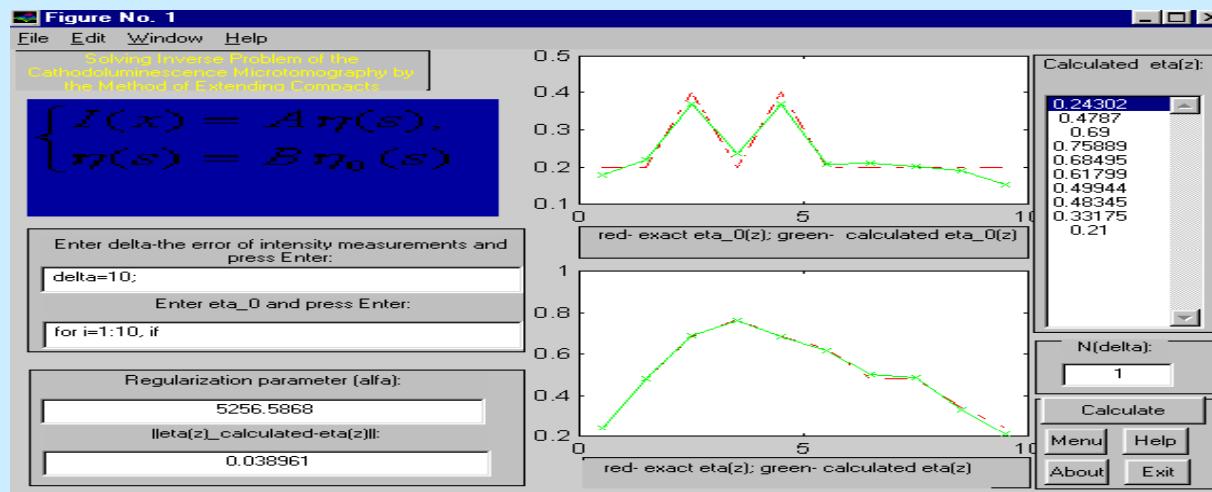
где

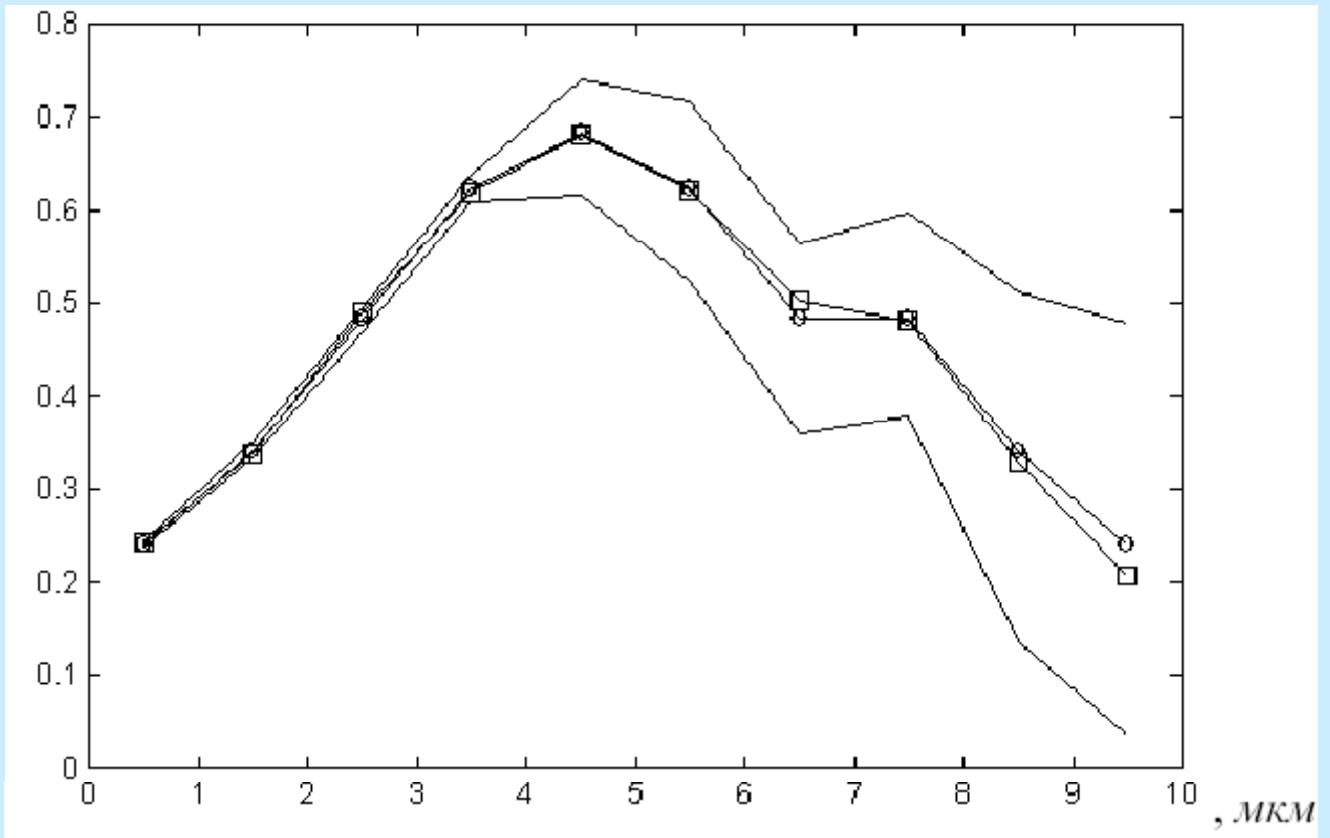
$$K_2(s, \xi) = \begin{cases} \cos(0.5 * (s - \xi) * \pi / 2), & |s - \xi| \leq 2, \\ 0, & в \text{ противном случае} \end{cases}$$

Будем предполагать, что $\eta_0(s) \in L_2[0, R_0]$

Применим метод расширяющихся компактов с апостериорной оценкой погрешности.

Модельные расчеты





Обратная задача ядерной физики

■ Эксперимент:

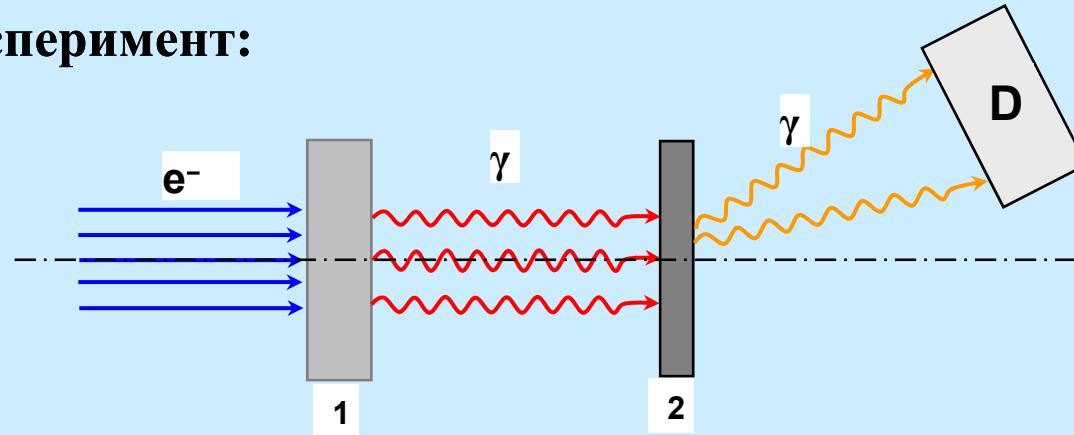


Рис.1: 1 - мишень, 2 – исследуемый образец, D – детектор.

Проходя через мишень, ускоренные электроны порождают тормозное излучение (γ -лучи). Спектр тормозного излучения непрерывный. Образец 2 бомбардируется γ -лучами. Рассеянные γ -лучи детектируются.

Обработка экспериментальных данных

- Ядерная реакция: $\gamma + {}_{29}^{63}\text{Cu} \rightarrow {}_{29}^{62}\text{Cu} + n$
- Ограничения:
 - ◆ *Априорные*: $0 \leq \sigma(E_\gamma) \leq 90$, $E_\gamma \in [10, 24.1]$
 - ◆ *Апостериорные*:
 - ◆ $\sigma(E_\gamma)$, $E_\gamma \in [10, 16]$ - монотонная неубывающая функция
 - ◆ $\sigma(E_\gamma)$, $E_\gamma \in [16, 18]$ - выпуклая вверх функция
 - ◆ $\sigma(E_\gamma)$, $E_\gamma \in [18, 24.1]$ - монотонная невозрастающая функция

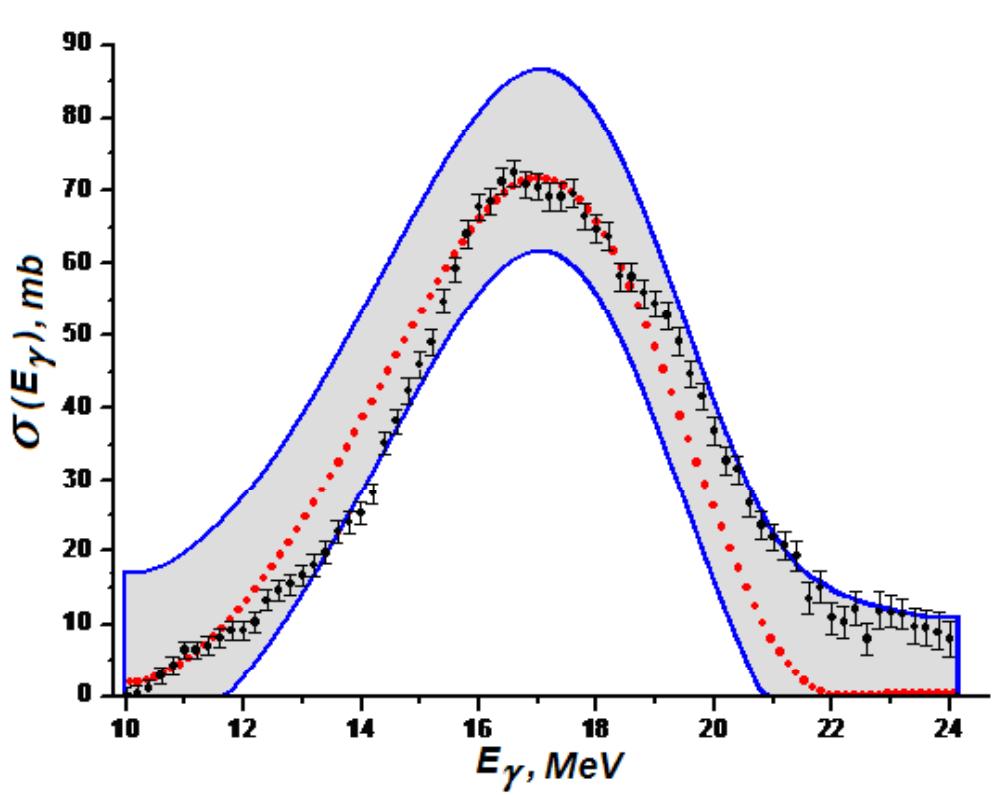


Рис.2: (• • •) – приближенное сечение
рассеяния из Центра данных
фотоядерных экспериментов;
(• • •) – приближенное решение, найденное
методом регуляризации Тихонова;
(—) – функции $\sigma^{low}(E_\gamma)$, $\sigma^{upper}(E_\gamma)$,
ограничивающие множество
приближенных решений снизу и сверху.

Обработка экспериментальных данных

- Ядерная реакция: $\gamma + {}_{16}^{34}S \rightarrow {}_{15}^{33}P + p$
- Ограничения:
 - ◆ *Априорные:* $0 \leq \sigma(E_\gamma) \leq 45$, $E_\gamma \in [12.3, 25.3]$
 - ◆ *апостериорные:*
 - ◆ $\sigma(E_\gamma)$, $E_\gamma \in [12.3, 16]$ - монотонная неубывающая функция
 - ◆ $\sigma(E_\gamma)$, $E_\gamma \in [16, 17]$ - выпуклая вверх функция
 - ◆ $\sigma(E_\gamma)$, $E_\gamma \in [17, 18.5]$ - монотонная невозрастающая функция
 - ◆ $\sigma(E_\gamma)$, $E_\gamma \in [18.5, 20]$ - выпуклая вниз функция
 - ◆ $\sigma(E_\gamma)$, $E_\gamma \in [20, 22]$ - монотонная неубывающая функция
 - ◆ $\sigma(E_\gamma)$, $E_\gamma \in [22, 23]$ - выпуклая вверх функция
 - ◆ $\sigma(E_\gamma)$, $E_\gamma \in [23, 25.3]$ - монотонная невозрастающая функция

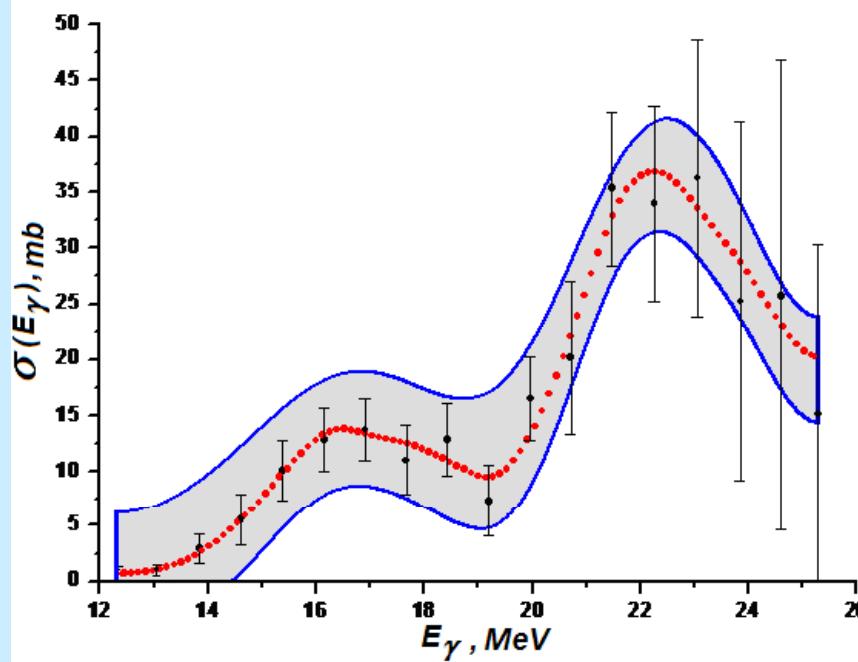


Рис.3: (• • •) – приближенное сечение
рассеяния из Центра данных
фотоядерных экспериментов;

(• • •) – приближенное решение, найденное
методом регуляризации Тихонова;

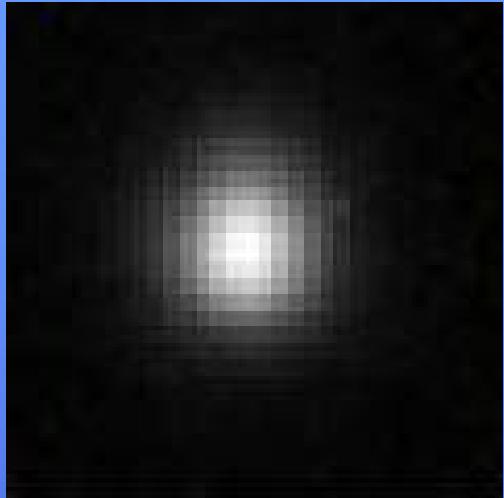
(—) – функции $\sigma^{low}(E_\gamma)$, $\sigma^{upper}(E_\gamma)$,

ограничивающие множество
приближенных решений снизу и сверху.

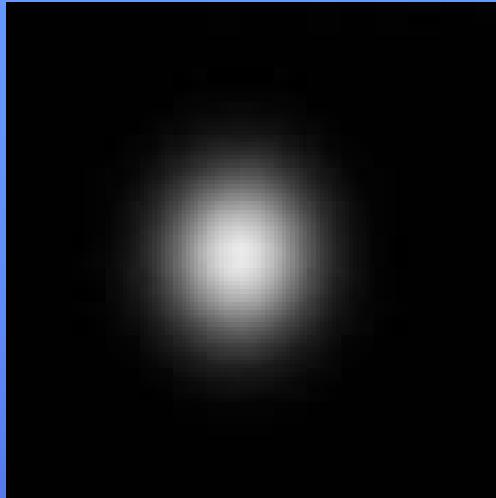
Восстановление изображений гравитационных линз

Система QSO 2237+0305, известная как “Крест Эйнштейна”: 4 изображения квазара на фоне линзирующей галактики. Несколько наблюдений были выполнены с помощью Hubble Space Telescope и Nordic Optical Telescope.

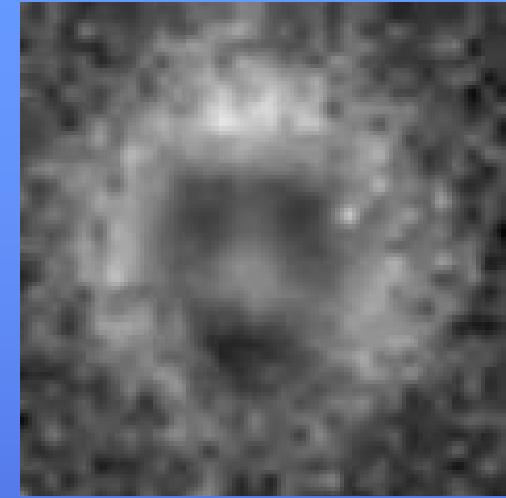
Модель ядра



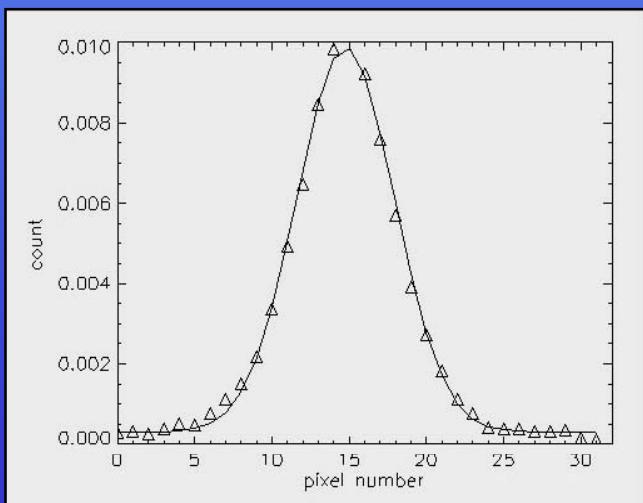
Звезда



Ядро



Разности



PSF (диаграмма
направленности телескопа)

Аппроксимация изображения
звезды 2-мерной функцией
Гаусса

Регуляризация Тихонова

- Некорректная задача
- Функционал Тихонова:

$$M^\alpha[z] = \|k * z - u_\delta\|_U^2 + \alpha \cdot \Omega(z)$$

- Решение z^α :

$$M^\alpha[z^\alpha] = \inf\{M^\alpha[z] : z \in Z\}$$

- Параметр регуляризации α по принципу невязки:

$$\|k * z^\alpha - u_\delta\|_U \cong \delta, \alpha > 0$$

Априорная информация

Истинное изображение = галактика +
изображения квазара

$$z(x, y) = g(x, y) + \sum_{k=1}^K I_k \delta(x - a_k, y - b_k)$$

$K=4$, количество изображений квазара

$K=5$, количество изображений квазара + ядро
галактики

Априорная информация

- Неотрицательность решения: $z_{ij} \geq 0$
- Галактика: гладкость изображения

$$\Omega(g) = \|g\|_G^2 \quad ; \quad G \equiv \{L_2, W_{21}, BV\}$$

- Модель галактики

$$\Omega(g) = \|g - g_{\text{model}}\|_G^2$$

Обобщенный профиль de Vaucouleurs (Sersic's model)

$$g_{\text{model}}(r) = I(0) \exp\left\{-b_n\left(r/r_e\right)^{1/n}\right\}$$

$$b_n = 2n - 0.324 \text{ for } 1 \leq n \leq 4$$

Априорная информация

Истокообразная представимость:

$$z = R[z'] \equiv r * z'$$

*Total PSF = Source PSF * Final PSF*

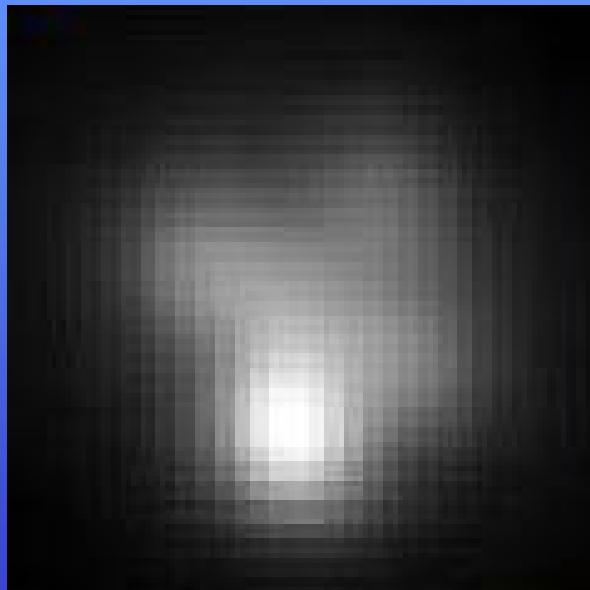


$$k = s * r$$

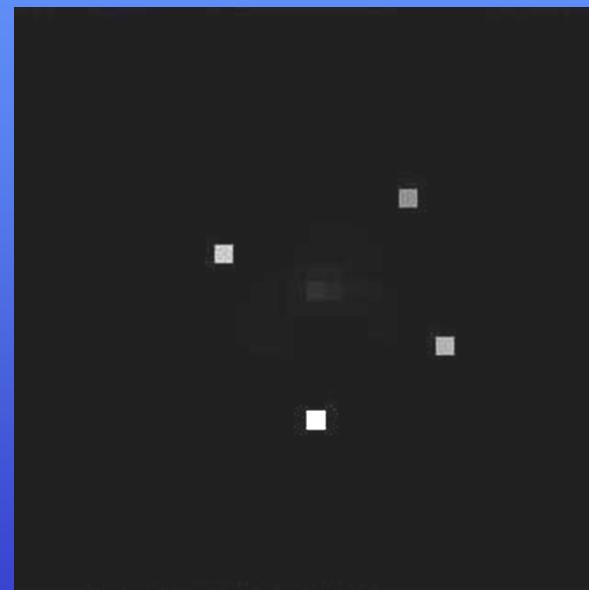
$$z(x, y) = \sum_{k=1}^K a_k r(x - b_k, y - c_k) + g(x, y)$$

Результаты: L₂

$$\Omega(g) = \|g - g_{sersic}\|_{L_2}^2$$



Наблюдения

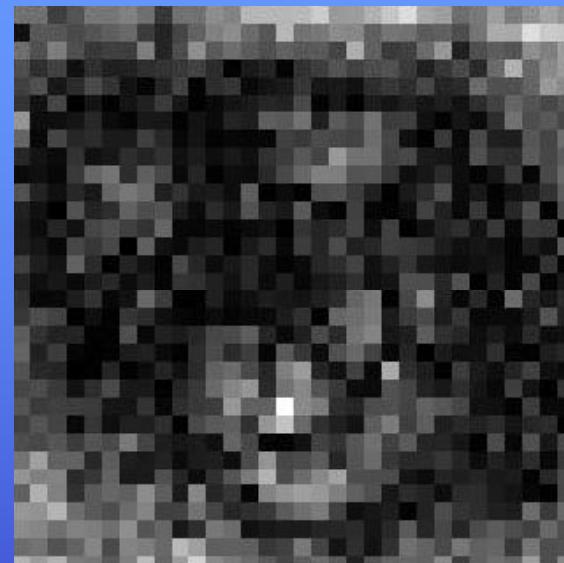


Восстановленное
изображение

Результаты: L₂



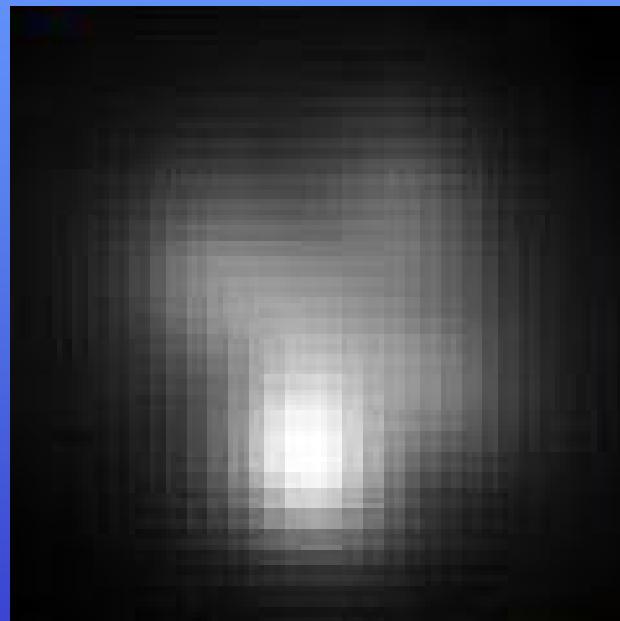
Галактика



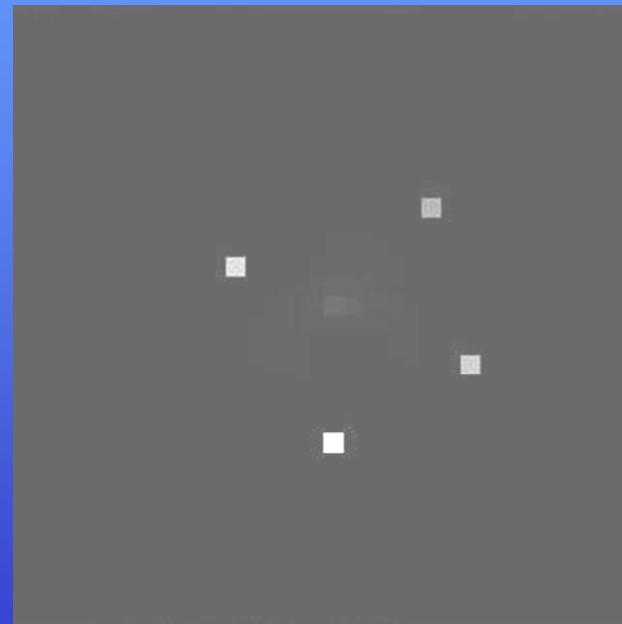
Распределение
ошибок

Результаты: W₂₁

$$\Omega(g) = \|g - g_{sersic}\|_{W_{21}}^2$$

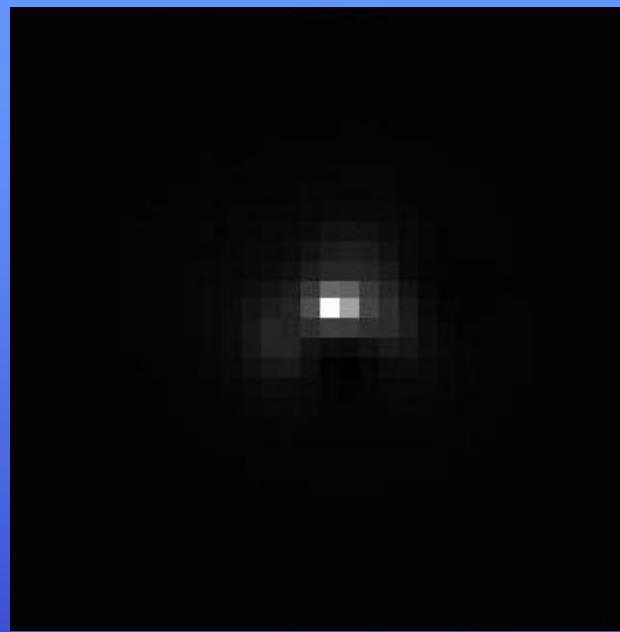


Наблюдения

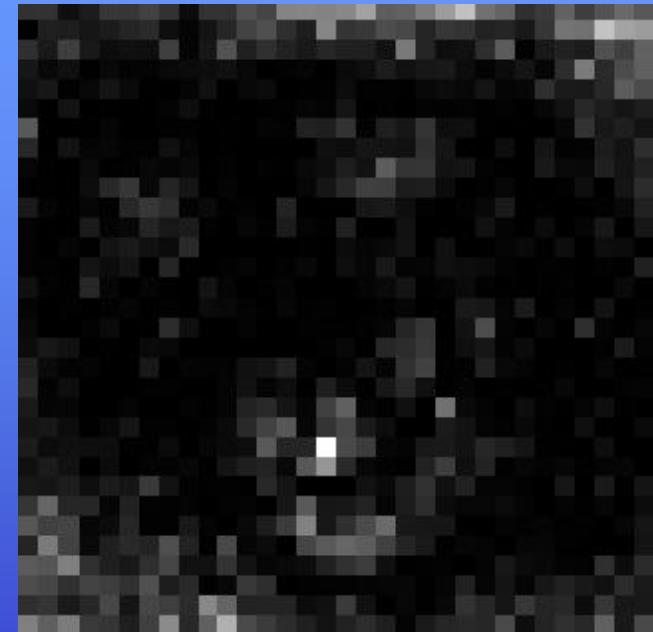


Восстановленное
изображение

Результаты: W_{21}



Галактика



Распределение
ошибок

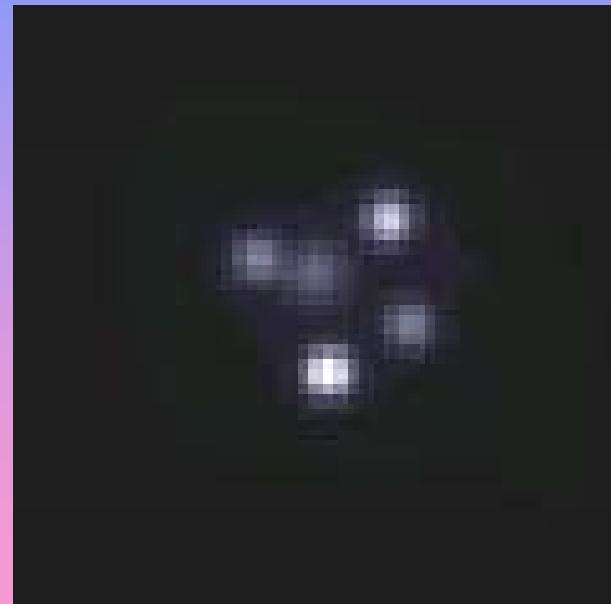
Результаты: MCS

$$\text{kernel} = s * r$$

$$\Omega(g) = \|g - r * g\|_{L_2}^2$$

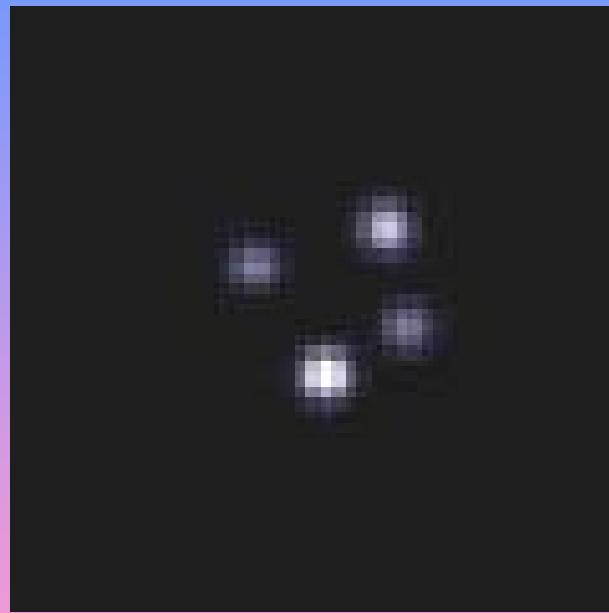


Наблюдения



Восстановленное
изображение

Результаты: MCS

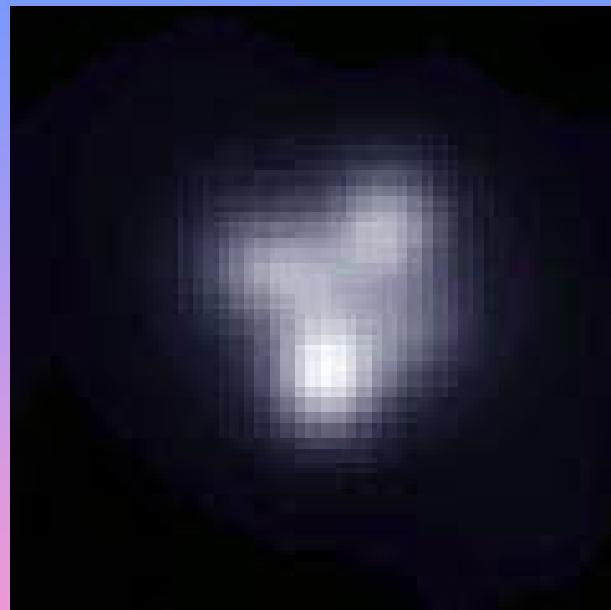


Изображения
квазара

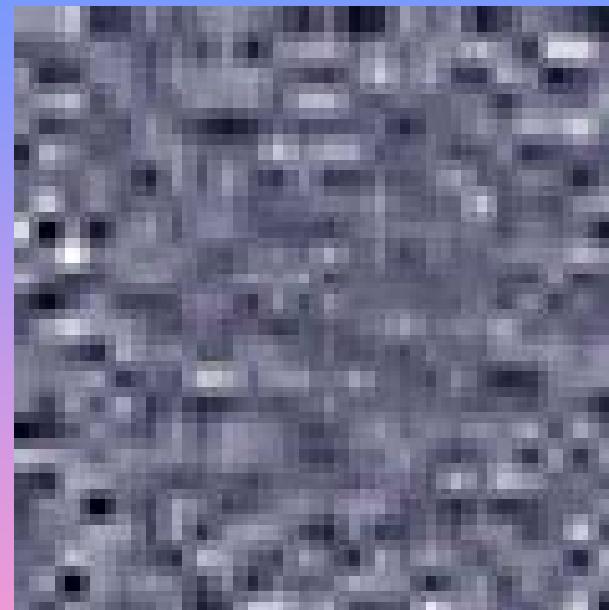


Галактика

Результаты: MCS



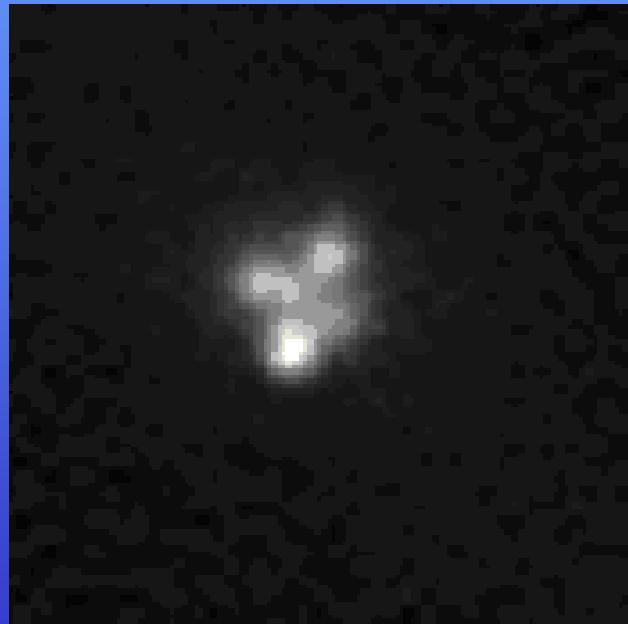
Изображения квазара



Распределение ошибок

Результаты: TV

$$\Omega(g) = \sum_{m=1}^{N_1-1} \sum_{n=1}^{N_2-1} |g_{m+1,n+1} - g_{m+1,n} - g_{m,n+1} + g_{m,n}|$$



Наблюдения

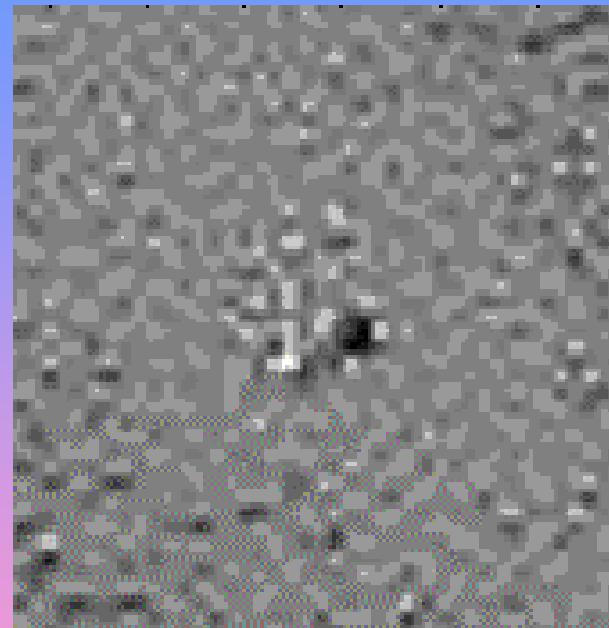


Восстановленное изображение

Результаты: TV



Изображения квазара



Галактика

Функции, выпукло-вогнутые вдоль координатных осей

Рассмотрим n -мерное евклидово
пространство \mathbf{R}^n , $n < \infty$.

Множество $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ назовем выпуклым
вдоль координатных осей, если $\forall i \in [1, n]$

$\forall x_1, x_2 \in \Omega$ таких, что

$$x_1 = (a^1, \dots, a^{i-1}, x_1^i, a^{i+1}, \dots, a^n),$$

$$x_2 = (a^1, \dots, a^{i-1}, x_2^i, a^{i+1}, \dots, a^n),$$

и $\forall \lambda \in [0, 1]: x_3 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in \Omega$.



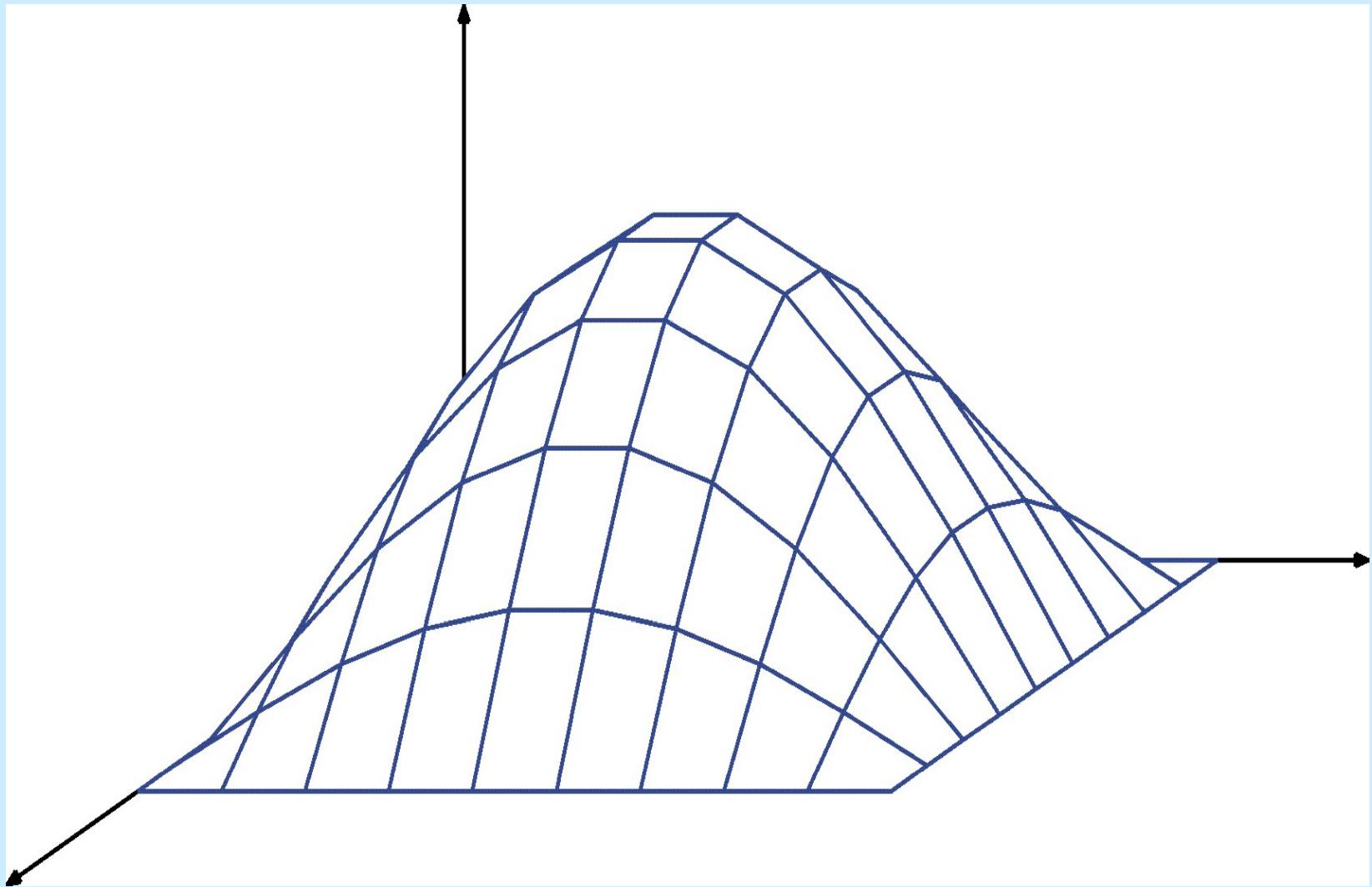
Крест – пример множества, выпуклого вдоль
координатных осей

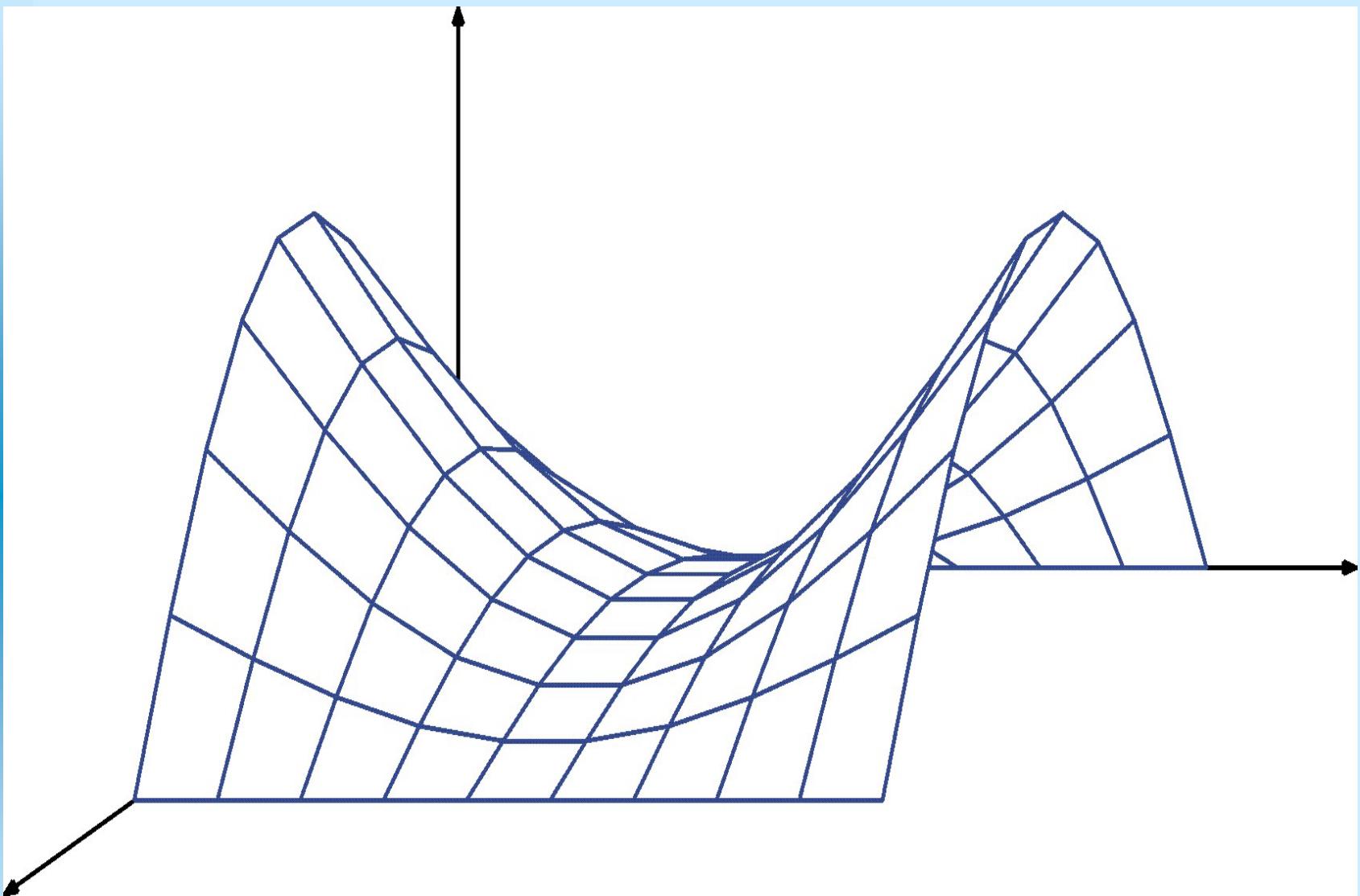
Функция $z(x)$ на Ω выпукла (вниз) вдоль всех прямых, параллельных i -ой координатной оси, если $\forall x_1, x_2 \in \Omega$ таких, что $x_1 = (a^1, \dots, a^{i-1}, x_1^i, a^{i+1}, \dots, a^n)$, $x_2 = (a^1, \dots, a^{i-1}, x_2^i, a^{i+1}, \dots, a^n)$, и $\forall \lambda \in [0,1]$:

$$z(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda z(x_1) + (1-\lambda) z(x_2)$$

Пусть $n^* \in [0, n]$. Рассмотрим функции $z(x)$, заданные на Ω . Обозначим $M_{n^*}(\Omega)$ множество функций $z(x)$, выпуклых (вниз) вдоль всех прямых, параллельных n^* первых координатных осей, и вогнутых (выпуклых вверх), вдоль всех прямых, параллельных $(n-n^*)$ последних координатных осей.

Предположим, что заданы числа C^L и C^U такие, что $\forall x \in \Omega$ и $\forall z(x) \in M_{n^*}(\Omega)$: $C^L \leq z(x) \leq C^U$.





Теорема 1.: Пусть последовательность $\{z_m\}$ и элемент z такие, что $\forall m \in 1, \dots, +\infty: z_m \in M_{n^*}(\Omega)$, $z \in L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, $\|z_m - z\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$, где Ω -открытое ограниченное множество. Тогда из последовательности $\{z_m\}$ можно выделить подпоследовательность $\{z_m^{(k)}\}$, которая сходится к функции $\check{z} \in M_{n^*}(\Omega)$ в каждой точке Ω , и $\check{z}=z$ в $L^p(\Omega)$.

Следствие 1.: $M_{n^*}(\Omega)$ - компакт в $L^p(\Omega)$.

Следствие 2.: Последовательность $\{z_m(x)\}$

Теоремы 1 сходится к $\check{z}(x)$ в каждой точке Ω .

Теорема 2.: Пусть $\|z_m - z\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, где $z_m, z \in M_{n^*}^n(\Omega)$, $p \geq 1$, и Ω - открытое ограниченное множество. Тогда последовательность $\{z_m\}$ сходится к z равномерно на каждом замкнутом множестве $V \subset \Omega$.

Пусть $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$. На каждом сегменте $[a_i, b_i]$, определим сетку $X_i = \{x_i^j\}_{j=1}^{n_i}$ такую, что $a_i = x_i^1 < x_i^2 < \dots < x_i^{n_i} = b_i$. Пусть $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$. Введем вектор индексов $J = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ для точки сетки $(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}, \dots, x_n^{j_n})$. Тогда точку сетки можно обозначить как \mathbf{x}_J . Для любой точки $\mathbf{x} \in D$ существует множество $B_J = [x_1^{j_1}, x_1^{j_1+1}] \times \dots \times [x_n^{j_n}, x_n^{j_n+1}]$: $\mathbf{x} \in B_J$. В качестве аппроксимации $z(\mathbf{x})$ построим линейную функцию $z_N(\mathbf{x})$, совпадающую с $z(\mathbf{x})$ в точках сетки (вершинах B_J).

После конечно-разностной аппроксимации получим многогранник \check{Z}_M .

Если x_1, x_2, x_3 – последовательные точки равномерной сетки, лежащие на прямой, параллельной i -ой координатной оси,

тогда: $-z_1 + 2z_2 - z_3 \leq 0$ ($i \leq n^*$) или

$z_1 - 2z_2 + z_3 \leq 0$ (в противном случае),

где $(z_k = z(x_k))$.

Оценивание погрешности

- 1) Найдем минимальное и максимальное значения для каждой координаты \check{Z}_M^n : z_i^l и z_i^u , $1 \leq i \leq n$. Составим векторы \check{z}^l , \check{z}^u .
- 2) Используя \check{z}^l , \check{z}^u , построим функции $z^l(x)$ и $z^u(x)$, близкие к Z_M^n и такие, что $\forall z \in Z_M^n$: $z^l(x) \leq z(x) \leq z^u(x)$.

Необходимо минимизировать и максимизировать линейный функционал на выпуклом множестве.

Можно аппроксимировать это множество выпуклым многогранником и решать задачу линейного программирования, используя симплекс-метод или метод отсечения выпуклых многогранников.

Пусть $D=[0,d_1] \times [0,d_2]$, $d_1, d_2 < +\infty$; $w(x,y,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности с нулевыми граничными условиями:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

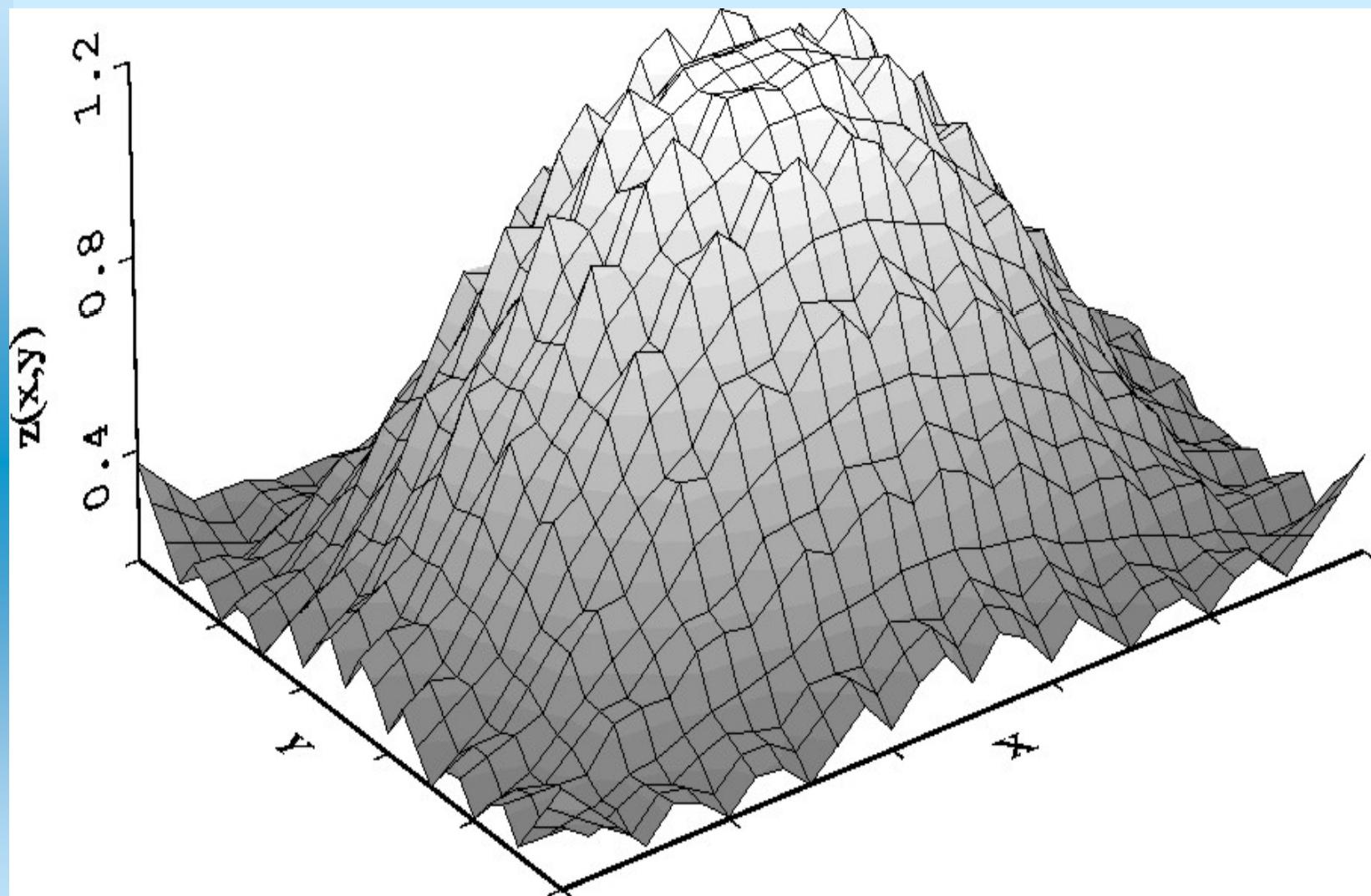
$$w(0, y, t) = 0 \quad w(d_1, y, t) = 0$$

$$w(x, 0, t) = 0 \quad w(x, d_2, t) = 0$$

Обозначим $z(x,y)=w(x,y,0)$, $u(x,y)=w(x,y,T)$, $0 < T < +\infty$. Тогда

$$u(x,y) = \iint G(x, y, \xi, \eta, T) z(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Пусть $n_1 = n_2 = 11$, $d_1 = d_2 = 1.0$, сетки равномерные, $a = 1.0$, $T=0.001$. Задаем точное решение $z(x,y) = \sin(\pi x) \cdot \sin(\pi y)$; $z \in M^2_0(D)$. Приближенная правая часть $u_\delta = \bar{u}$. Ошибка конечно-разностной аппроксимации $\Delta = 0.01 \cdot \|\bar{u}\| \approx 0.005$. На рисунке верхняя функция $z^U(x,y)$, которая ограничивает сверху все приближенные решения.



Алгоритмы решения уравнений типа Абеля на компактных множествах и их реализация

- Введение
- Приближенное решение уравнения типа Абеля
- Оценивание погрешности входных данных
- Оценивание погрешности решения
- Оценивание скорости потока
- Примеры
- Выводы
- Ссылки

1 Введение

- Проблема восстановления симметричного профиля скорости жидкости в цилиндрическом канале сводится к решению уравнения типа Абеля. Для отыскания апостериорной оценки погрешности используется априорная информация о принадлежности точного решения компактному множеству ограниченных монотонных или монотонных вогнутых функций.

Введение

- Техника ультразвуковых измерений является одним из наиболее эффективных подходов определения характеристик потока.
- Методика измерения заключается в регистрации разницы времен распространения ультразвуковых сигналов, генерируемых парой излучателей, закрепленных на некотором расстоянии друг от друга на стенках измерительного канала.

3

|[Tab.](#)|[Ref.1-5](#)|[Ref.6-10](#)|

Введение

- Пусть поток в канале безвихревой и направлен вдоль оси z, т.е., $\vec{v} = \{0, 0, v_z(x, y)\}$ и $v_z(x, y) = v_z(r)$.
- Результатом ультразвуковых измерений являются средние значения скорости, вычисленные через разности времен $\Delta t(\xi_j)$ прохождения ультразвуковых сигналов

$$\bar{v}_z(r) \approx \frac{c_0}{2L} \Delta t(\xi_j)$$

где c_0 - скорость звука в невозмущенной среде, L - расстояние между излучателями, ξ_j - расстояние от j -ой измерительной плоскости до начала координат.

Введение

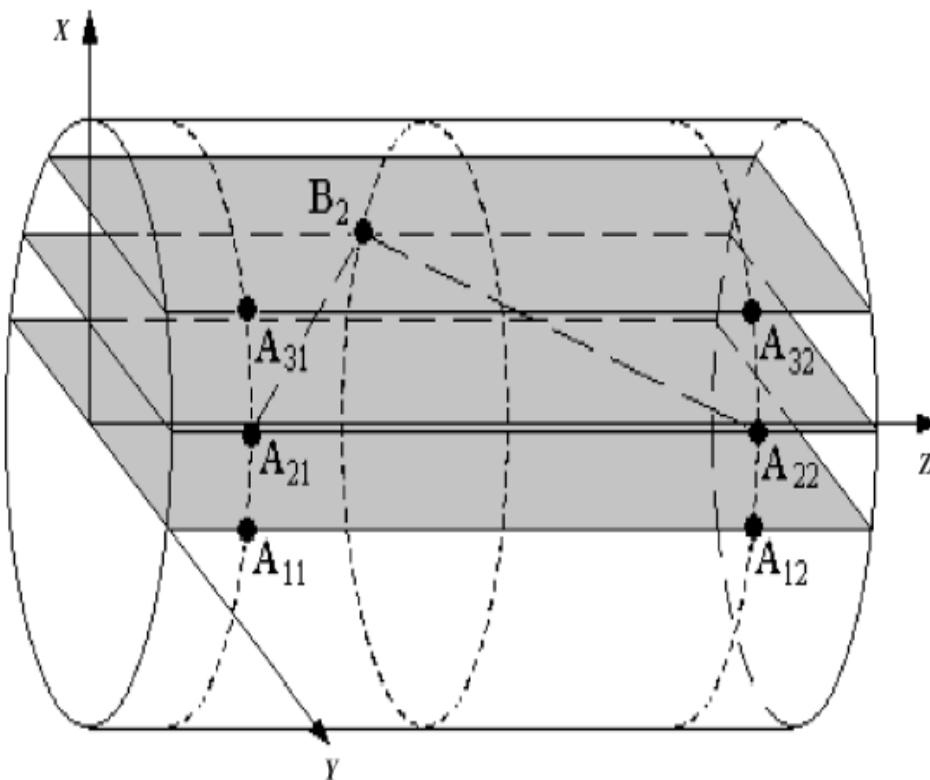


Figure 1. Schematic view of the multipath ultrasonic flowmeter.

Введение

Средняя измеренная скорость $\bar{v}_z(\xi)$ связана с неизвестной скоростью $v_z(r)$ уравнением Абеля первого типа

$$\bar{v}_z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{R^2 - \xi^2}} \int_{\xi}^R \frac{r v_z(r) dr}{\sqrt{r^2 - \xi^2}}, \quad \xi \in [0, R)$$

На границе $\bar{v}_z(R) = 0$, R - внутренний радиус канала.
Формула обращения

$$v_z(r) = -\frac{2}{\pi r} \frac{d}{dr} \int_r^R \xi \bar{v}_z(\xi) \sqrt{\frac{R^2 - \xi^2}{\xi^2 - r^2}} d\xi$$

2 Приближенное решение уравнения типа Абеля

Пусть $u(\xi) = \bar{v}_z(\xi)\sqrt{R^2 - \xi^2}, 0 \leq \xi < R, u(R) = 0,$
 $z(r) = v_z(r), 0 \leq r \leq R$

Тогда $u(\xi) = Az(r) = \int_{\xi}^R \frac{rz(r)dr}{\sqrt{r^2 - \xi^2}}, 0 \leq \xi \leq r \leq R$

или операторное уравнение

$$Az = u, z \in Z, u \in U$$

где $Z = U = L^2[0, R]$ и $A : L^2 \rightarrow L^2$ - линейный ограниченный инъективный оператор.

Приближенное решение

- Вместо точной \bar{u} задано ее приближение u_δ такое, что $\|u_\delta - \bar{u}\|_{L^2} \leq \delta$.

Априорная информация: $\bar{z}(r) \in M \subset L^2[0, R]$, M - компактное множество *априорных* ограничений.

- Тогда множество приближенных решений

$$Z_M^\delta \equiv \left\{ z \in M : \|Az - u_\delta\|_{L^2} \leq \delta \right\}$$

- причем $z_\delta \rightarrow \bar{z}$ при $\delta \rightarrow 0$ для любого $z_\delta \in Z_M^\delta$.

Конечно-разностная аппроксимация

- Сетки $\{r_i\}_1^n, \{\xi_j\}_1^m : 0 = r_1 \leq \dots \leq r_n = R, 0 = \xi_1 \leq \dots \leq \xi_m = R$
- Обозначим $z_i = z(r_i)$, $u_j^\delta = u_\delta(\xi_j)$.
Векторы сеточных значений \hat{z} и \hat{u}_δ принадлежат евклидовым пространствам \hat{Z} и \hat{U} .
- $z(r) \in Z$ аппроксимируется кусочно-линейной функцией

$$z_n(r) = \frac{z_{i+1} - z_i}{r_{i+1} - r_i} r + \frac{z_i r_{i+1} - z_{i+1} r_i}{r_{i+1} - r_i}, \quad r \in [r_i, r_{i+1}], i = \overline{1, n-1}$$

Конечно-разностная аппроксимация

- Пусть $u_n(\xi) = Az_n(\xi)$. Функция $u_n(\xi)$ аппроксимируется кусочно-постоянной функцией $u_{mn}(\xi)$ со значениями $u_n(\xi_j)$. Легко показать, что
 - $\|u_{mn}(\xi) - u_n(\xi)\| \rightarrow 0$ при $\max(\xi_{j+1} - \xi_j : j = \overline{1, m-1}) \rightarrow 0$ (для упрощения будем писать при $m \rightarrow \infty$).
- Введем приближенный оператор A_{mn} такой, что $\forall z(r) \in Z : A_{mn}z(r) = u_{mn}(\xi)$. Для указанных компактов $\|z_n - z\| \rightarrow 0$ при $\max(r_{i+1} - r_i : i = \overline{1, n-1}) \rightarrow 0$ (будем писать $n \rightarrow \infty$). Т.к. $\|A\|$ ограничена, тогда $\|Az - A_{mn}z\| \leq \|A(z - z_n)\| + \|u_n - u_{mn}\| \rightarrow 0$ при $n, m \rightarrow \infty$.

Конечно-разностная аппроксимация

- Определим следующее множество приближенных решений:

$$Z_M^\Delta \equiv \left\{ z \in M : \|A_{mn}z - u_\delta\|_{L^2} \leq H(m,n) + \delta = \Delta(\delta, m, n) \right\}$$

где $H(m,n) \equiv \sup \left\{ \|A_{mn}z - Az\| : z \in M \right\}$

Тогда $\forall z_\Delta \in Z_M^\Delta : z_\Delta \rightarrow \bar{z}$ при $\delta \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty$.

Аппроксимируем

$$\|u_\delta(\xi)\|_{L^2[0,R]}^2 \equiv \int_0^R |u_\delta(\xi)|^2 d\xi \approx \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{m-1} (u_j^\delta + u_{j+1}^\delta)^2 (\xi_{j+1} - \xi_j)$$

Чтобы найти $z_\Delta(r)$, нужно найти $\hat{z}_\Delta \in \hat{Z}_M^\Delta$:

$$\hat{Z}_M^\Delta \equiv \left\{ \hat{z} \in \hat{M} : \|\hat{A}\hat{z} - \hat{u}_\delta\|_{\hat{U}} \leq \hat{\Delta}(\delta, m, n) \right\}$$

Для минимизации $\|\hat{A}\hat{z} - \hat{u}_\delta\|$ применимы известные алгоритмы.

3 Оценивание погрешностей входных данных

- Погрешность правой части
- Погрешность конечно-разностной аппроксимации

3.1 Погрешность правой части

- Вместо точных сеточных значений \bar{u}_j функции $\bar{u}(\xi)$ заданы u_j^δ и погрешности $\{\delta_j\}_1^m$ такие, что
- $|\bar{u}_j - u_j^\delta| \leq \gamma_j \sqrt{R^2 - \xi_j^2} = \delta_j$, где $\{\gamma_j\}_1^m$ - ошибки измерений.
- Предположим, что $\forall \xi \in [0, R] : u_\delta^l(\xi) \leq \bar{u}(\xi) \leq u_\delta^u(\xi)$, где
- $u_\delta^l(\xi), u_\delta^u(\xi)$ - кусочно-линейные функции с сеточными значениями $u_j^\delta - \delta_j$ и $u_j^\delta + \delta_j$ соответственно.
- Т.к. $\|\bar{u} - u_\delta\|_{L^2}^2 \approx \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{m-1} ((\bar{u}_j - u_j^\delta) + (\bar{u}_{j+1} - u_{j+1}^\delta))^2 (\xi_{j+1} - \xi_j)$

тогда погрешность δ можно выразить как:

$$\delta^2 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{m-1} (\delta_j + \delta_{j+1})^2 (\xi_{j+1} - \xi_j)$$

3.2 Погрешность конечно-разностной аппроксимации

- Для фиксированного вектора \hat{z} сеточных значений функции $z(r) \in M$ можно построить

$$z_n^l(r) = \inf \{ z(r) \in M : z(r_i) = z_i \}, \quad z_n^u(r) = \sup \{ z(r) \in M : z(r_i) = z_i \}$$

Введем векторы $\hat{H}^- = (H_1^-, \dots, H_m^-), \hat{H}^+ = (H_1^+, \dots, H_m^+)$:

$$H_j^- = \inf \left\{ A(z_n(r) - z(r))(\xi_j) : z(r) \in M, z_n^l(r) \leq z(r) \leq z_n^u(r) \right\},$$

$$H_j^+ = \sup \left\{ A(z(r) - z_n(r))(\xi_j) : z(r) \in M, z_n^l(r) \leq z(r) \leq z_n^u(r) \right\}$$

- Т.к. A - положительный оператор, то
 $H_j^- = (A(z_n - z_n^l))(\xi_j), \quad H_j^+ = (A(z_n^u - z_n))(\xi_j), \quad j = 1, m$
- Для монотонных функций $z_n(r), z_n^l(r), z_n^u(r)$ зависят от \hat{z} линейно. Для монотонных выпуклых функций зависимость $z_n^u(r)$ нелинейна. Она аппроксимируется $z_n^{u*}(r)$, линейной по \hat{z} .

Погрешность $H(m, n)$

- Пусть функции $z_n^l(r)$ и $z_n^u(r)$ линейно зависят от \hat{z} . Тогда $H_j^- = \sum_{i=1}^n \kappa_{ji}^- z_i$, $H_j^+ = \sum_{i=1}^n \kappa_{ji}^+ z_i$, $j = \overline{1, m}$, где κ^- , κ^+ - $m \times n$ матрицы.

- Обозначим $H_1^2 = \frac{1}{4} \max \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} (H_j^- + H_{j+1}^-)^2 (\xi_{j+1} - \xi_j) : \hat{z} \in \hat{M} \right\}$,

$$H_2^2 = \frac{1}{4} \max \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} (H_j^+ + H_{j+1}^+)^2 (\xi_{j+1} - \xi_j) : \hat{z} \in \hat{M} \right\}$$

- Тогда

$$H = \max \{H_1, H_2\}$$

Для отыскания H_1^2 и H_2^2 нужно перебрать все вершины выпуклого многогранника \hat{M} .

4 Оценка погрешности решения

- В качестве погрешности приближенного решения z_Δ вычисляется $\varepsilon(\Delta) = \sup \{ \|z_\Delta - z\| : z \in Z_M^\Delta \}$.
- Ясно, что $\|z_\Delta - \bar{z}\| \leq \varepsilon(\Delta)$. Т.к. M - компакт, имеет место $\varepsilon(\Delta) \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$.
- Для оценки $\varepsilon(\Delta)$ построим функции $z^l(r), z^u(r)$ такие, что $\forall z \in Z_M^\Delta : z^l(r) \leq z(r) \leq z^u(r)$ на $[0, R]$. Можно построить следующим образом:
$$z^l(r) = \inf \{ z(r) : z \in Z_M^\Delta \}, \quad z^u(r) = \sup \{ z(r) : z \in Z_M^\Delta \}$$
- Тогда $\forall z(r) \in Z_M^\Delta : \varepsilon(\Delta) \leq \|z^u(r) - z^l(r)\|$

Предлагаются два подхода для построения

16 $z^l(r), z^u(r)$

|Tab.|Ref.1-5|Ref.6-10|

Первый подход

- Задана $u_\delta(\xi)$ в точках сетки. Функция аппроксимируется кусочно-линейной.
- Приближенное решение решение $\hat{z}_\Delta \in \hat{\mathbf{Z}}_M^\Delta$ находится с помощью минимизации квадрата невязки $\|\hat{A}\hat{z} - \hat{u}_\delta\|$ на выпуклом многограннике \hat{M} .
- Минимальные и максимальные значения для каждой координаты вектора \hat{z}_Δ отыскиваются с помощью минимизации линейной функции $f(\hat{z}_\Delta) = \sum_{i=1}^n c_i z_i^\Delta$ на $\hat{\mathbf{Z}}_M^\Delta$, где $c_i = 0$, $i \neq k$; $c_i = \pm 1$, $i = k$ ($k \in \{1, n\}$).
- Использовался метод отсекающих многогранников. Полученные векторы \hat{z}^l и \hat{z}^u дают возможность построить функции $z^l(r), z^u(r)$.

Второй подход

\hat{z}^l, \hat{z}^u

- Задан вектор $\hat{\mathbf{u}}_\delta$ экспериментальных данных в точках сетки.
- Определим неравенства

$$-\mathbf{H}_j^- - \delta_j \leq A^j \hat{z} - u_j^\delta \leq \mathbf{H}_j^+ + \delta_j$$

где $j = \overline{1, m}$ и $A^j \hat{z} = (A_{mn} z)(\xi_j)$.

- Множество точек $\hat{z} \in \hat{\mathbf{Z}}$, удовлетворяющих системе неравенств, обозначим $\hat{\mathbf{Z}}_M^\Delta$.
- Для отыскания векторов \hat{z}^l, \hat{z}^u решаются задачи линейного программирования.
- Построение функций $z^l(r), z^u(r)$ для множества $\hat{\mathbf{Z}}_M^\Delta$ производится также, как и для множества $\hat{\mathbf{Z}}_M^\Delta$.

5 Оценка величины расхода

- Расход жидкости или газа Q , транспортируемого по трубопроводу, определяется как количество жидкости или газа, проходящего через сечение трубы в единицу времени. Для рассматриваемой модели

$$\bar{Q} = 2\pi \int_0^R r \bar{z}(r) dr$$

- На практике оценивается $Q_\Delta = 2\pi \int_0^R r z_\Delta(r) dr$. Для отыскания погрешности расхода $\sigma(\Delta)$ с помощью функций $z'(r), z''(r)$ нужно вычислить $Q' = 2\pi \int_0^R r z'(r) dr, Q'' = 2\pi \int_0^R r z''(r) dr$.

- Т.к. $z'(r) \leq \bar{z}(r) \leq z''(r)$, тогда $Q' \leq \bar{Q} \leq Q''$. Следовательно, $\sigma(\Delta) \leq (Q'' - Q')$

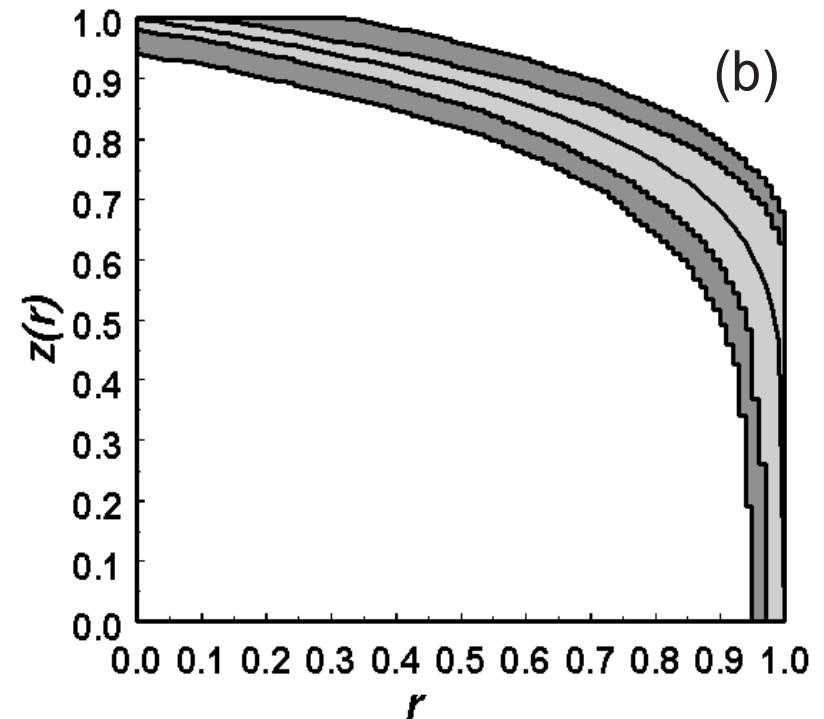
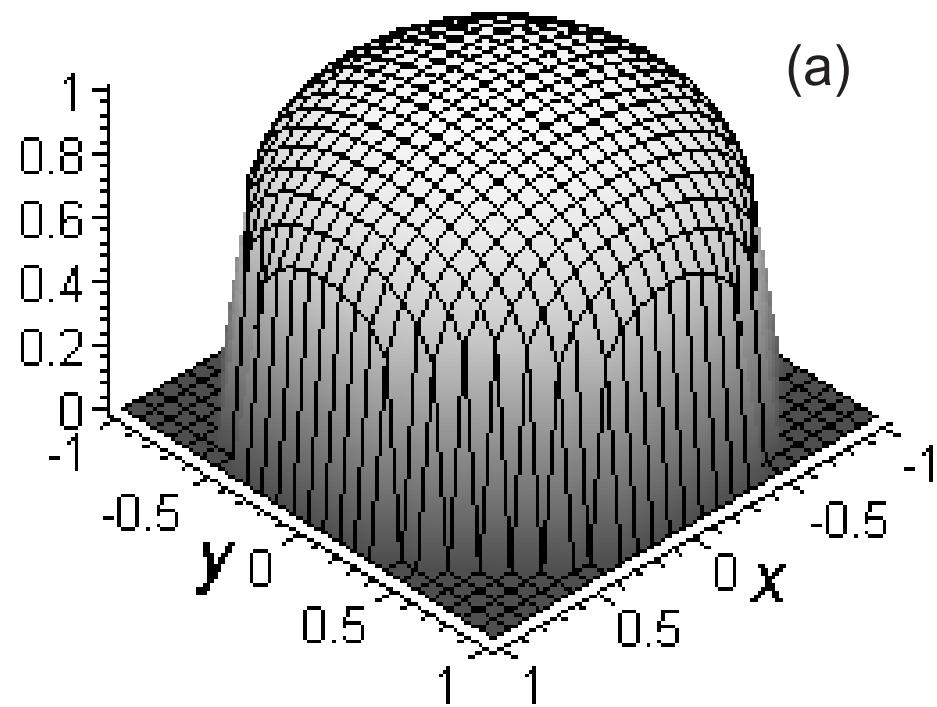
6 Примеры

- Монотонные функции
- Монотонные вогнутые функции

6.1 Монотонные функции

- Пусть $\bar{z}(r) = (1 - r)^{1/6}$, M - множество ограниченных невозрастающих на $[0, R]$: $\forall z(r) \in M : 0 \leq z(r) \leq C$. Пусть $C = 1.0, R = 1.0, |\bar{u}_j - u_j^\delta| \leq 0.005, j = 1, m$ и $m = 20, n = 100$.
- Тогда $\delta = 0.005, H = 0.013, \Delta = 0.018$.
- Получим $\|\bar{z}\| \approx 0.866, \bar{Q} \approx 2.4857$;
 $\forall z_\Delta \in Z_M^\Delta : \varepsilon(\Delta) \leq \|z^u(r) - z^l(r)\| \approx 0.224, \forall Q_\Delta \in [2.0, 2.77] : \sigma(\Delta) \leq 0.77$;
 $\forall z_\Delta \in Z_M^\Delta : \varepsilon(\Delta) \leq \|z^u(r) - z^l(r)\| \approx 0.138, \forall Q_\Delta \in [2.2, 2.65] : \sigma(\Delta) \leq 0.45$
- Погрешность для множества Z_M^Δ в 1.62 раз меньше, чем для Z_M^Δ . Поэтому второй подход предпочтительнее. Результаты на Рис. 1.
- 21

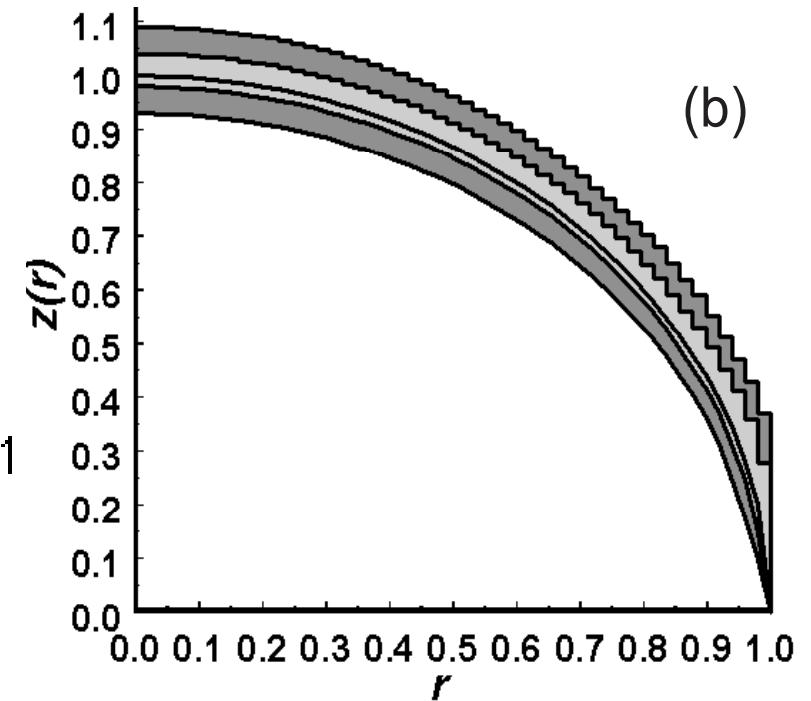
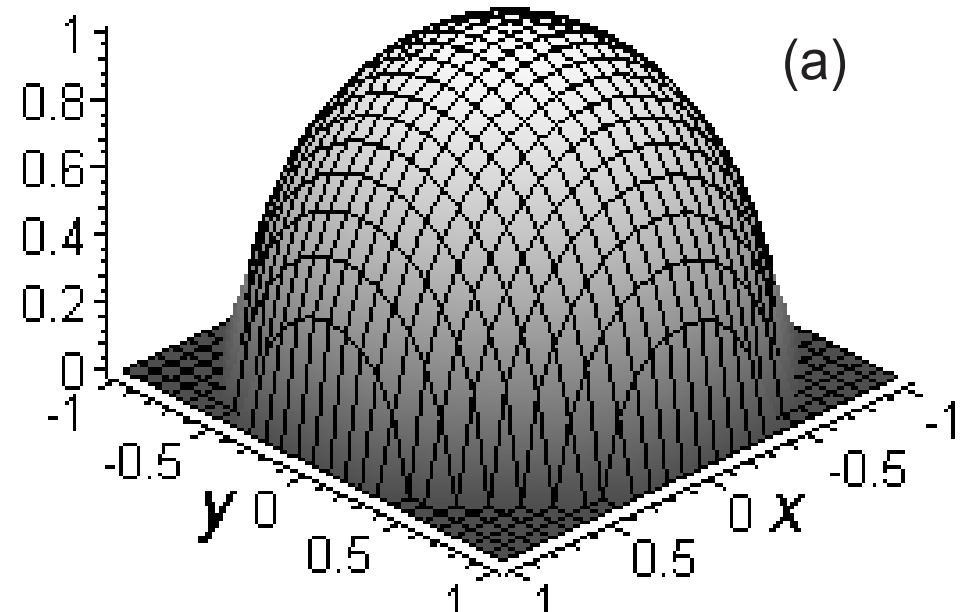
Рис. 1: (а) начальный симметричный профиль $z(x,y)$; (б) точное решение $\bar{z}(r)$ (-) для монотонных функций и области, ограниченные функциями $z'(r), z''(r)$, содержащие все приближенные решения. Широкая область для Z_M^Δ и узкая область для Z_M^Δ .



6.2 Монотонные вогнутые функции

- Пусть $\bar{z}(r) = \sqrt{1 - r^2}$, M - множество монотонно убывающих вогнутых на $[0, R]$ функций:
- $\forall z(r) \in M : 0 \leq z(r) \leq C$. Пусть
- $C = 1.1, R = 1.0, |\bar{u}_j - u_j^\delta| \leq 0.007, j = \overline{1, m}$ и $m = 20, n = 50$.
- Тогда $\delta = 0.007, H = 0.02, \Delta = 0.027$.
- Получим $\|\bar{z}\| \approx 0.816, \bar{Q} \approx 2.094$;
 $\forall z_\Delta \in Z_M^\Delta : \varepsilon(\Delta) \leq \|z''(r) - z'(r)\| \approx 0.152, \forall Q_\Delta \in [1.87, 2.4] : \sigma(\Delta) \leq 0.53$;
 $\forall z_\Delta \in Z_M^\Delta : \varepsilon(\Delta) \leq \|z''(r) - z'(r)\| \approx 0.055, \forall Q_\Delta \in [2.04, 2.25] : \sigma(\Delta) \leq 0.21$
- Второй подход более предпочтителен. Результаты на Рис. 2.

Рис. 2: (а) начальный симметричный профиль $z(x, y)$; (б) точное решение $\bar{z}(r)$ (-) для монотонных вогнутых функций и области, ограниченные функциями $z^l(r), z^u(r)$, содержащие все приближенные решения. Широкая область для Z_M^Δ и узкая область для Z_M^Δ .



7 Выводы

Показано, как получить *апостериорную* оценку погрешности симметричного профиля скорости, удовлетворяющего уравнению типа Абеля и *априорным* требованиям о принадлежности точного решения компактному множеству монотонных или монотонных вогнутых функций.

Ссылки :

- [1] Rychagov, M.N. (1998). *Ultrasonic flow measurements by multipath measuring flowcells*. Sov. Phys. Acoust. 44, 792.
- [2] Rychagov, M. and Tereshchenko S. (2000). *Multipath flowrate measurements of symmetric and asymmetric flows*. Inverse Problems. 16, 495.
- [3] Lynnworth, L.C. (1989). *Ultrasonic measurements for process control*. Academic Press, New York.
- [4] Gorenflo, R. and Vessella, S. (1991). *Abel Integral Equations. Analysis and Applications*. Springer, Berlin.
- [5] Tikhonov, A.N., Goncharsky, A.V., Stepanov, V.V. and Yagola, A.G. (1995). *Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems*. Kluwer, Dordrecht, The Netherlands.

Ссылки :

- [6] Tikhonov, A.N., Leonov, A.S. and Yagola, A.G. (1998). *Nonlinear Ill-Posed Problems*. Chapman and Hall, London.
- [7] Titarenko, V.N. and Yagola, A.G (2000). *A method to cut convex polyhedrons and its applications to ill-posed problems*. Numerical Methods and Programming. 1, 8.
- [8] Yagola, A.G, Leonov, A.S. and Titarenko, V.N. (2002). *Data errors and an error estimation for ill-posed problems*. Inverse problems in engineering. 10, 117.
- [9] Titarenko, V.N. and Yagola, A.G. (2002). *Cauchy problem for Laplace equation on compact sets*. Inverse problems in engineering. 10, 235.
- [10] Dorofeev, K.Yu, Titarenko, V.N. and Yagola, A.G. (2003). *Comput. Maths. Math. Phys.* 43, 12.

Ссылки :

- [11] Nikolaeva, N.N., Rychagov, M.N., Titarenko, V.N., and Yagola, A.G. (2004). *Error estimation for symmetric velocity profiles reconstructed from multipath flow measurements* . Comput. Math. Math. Phys. 44 (1). 16.
- [12] Nikolaeva, N.N., Titarenko, V.N. and Yagola, A.G (2004). *An error estimation of a solution of Abel equation* . Numerical Functional Analysis and Optimization. 25(3-4), 259.
- [13] Nikolaeva, N.N., Ruchkin, S.V., Rychagov, M.N., and Yagola, A.G. (2005). *Numerical simulation of the problem on the two-dimensional reconstruction of axisymmetric flow velocity profiles* . Numerical Methods and Programming. 6, 9.

Ссылки :

- [14] Nikolaeva, N.N., Rychagov, M.N., and Yagola, A.G. (2005). *Error estimation in applied inverse problems*. “5th International Conference on Inverse Problems in Engineering: Theory and Practice”/ Ed. D. Lesnic, Vol. III, Chapter N 5, Leeds University Press, Leeds, UK, 1.
- [15] Nikolaeva, N.N., Ruchkin, S.V., Rychagov, M.N., and Yagola, A.G. (2006). *Symmetric velocity profiles reconstruction in channels with a circular cross-sections by ultrasonic flow measurements*. Inverse Problems in Science and Engineering (to be published).

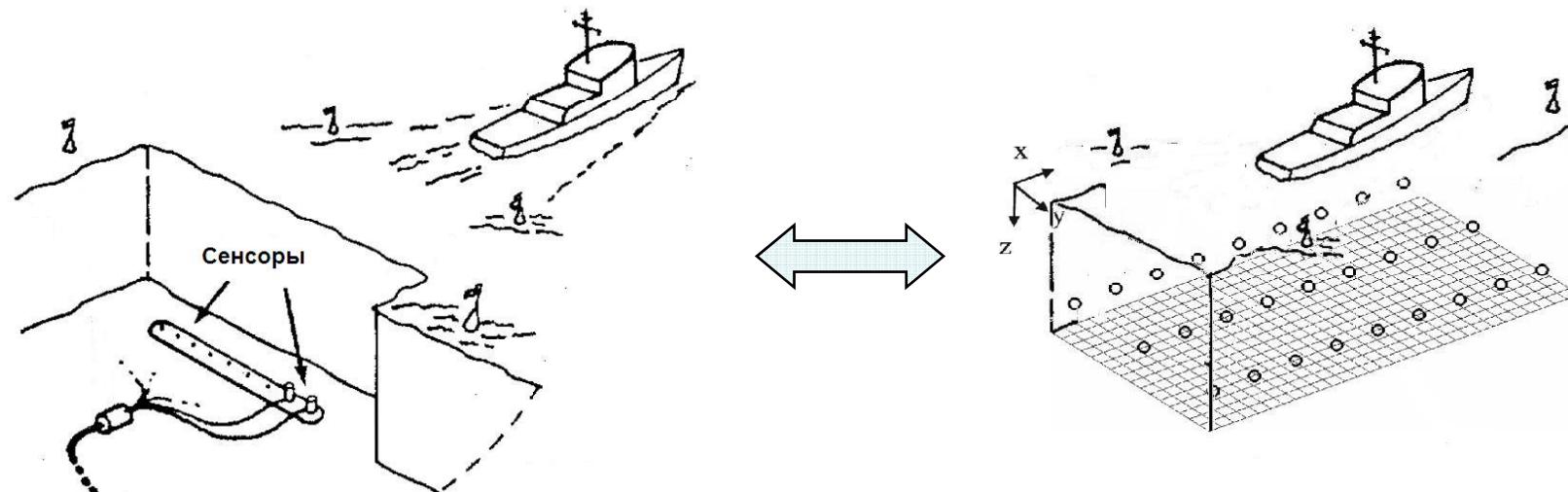
***Регуляризующие алгоритмы и
комплекс программ решения обратной
задачи обращения магнитного поля***

Цели работы

1. Создание эффективной модели обращения магнитного поля.
2. Создание вычислительно эффективных алгоритмов решения поставленной задачи.
3. Обобщение полученных результатов с целью последующего применения для решения других прикладных задач.

Обращение магнитного поля

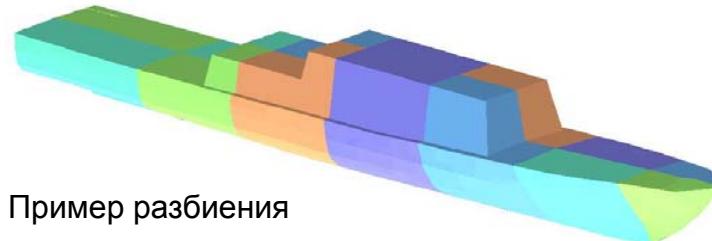
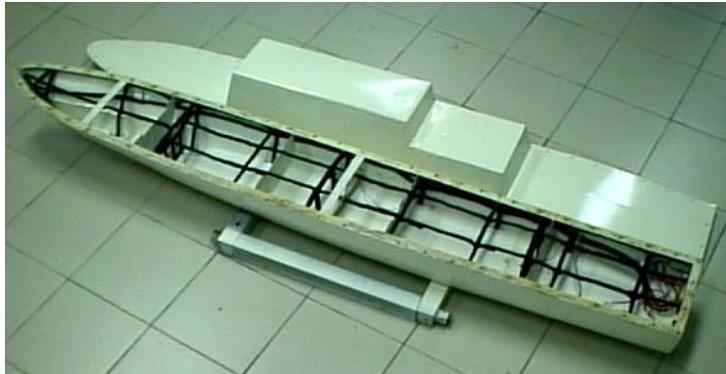
Цель: восстановление намагниченности корабля по измеренным значениям магнитного поля вне корабля.



Восстановление вектора намагниченности – восстановление направления и величины суммарного магнитного момента внутри домена

Первая постановка задачи

Корабль намагнчен по объему



Пример разбиения
корабля на 14 частей

$$\vec{M} = (m_1, m_2, m_3) \leftrightarrow \vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$$

Вектор намагнченности *Вектор магнитного поля*

$$\vec{M} = \vec{M}(s) = (m_1(s), m_2(s), m_3(s)) \quad s = (s_1, s_2, s_3) \\ \vec{B} = \vec{B}(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t)) \quad t = (t_1, t_2, t_3) \quad \Rightarrow \quad \vec{B}(t) = K(t, s) \cdot \vec{M}(s)$$

где матрица $K(t, s)$ определяется из физических законов следующим образом:

$$K_{pp} = (\mu_0 / (4\pi r_{ts}^5)) (3(t_p - s_p)^2 - r_{ts}^2), \quad p = 1, 2, 3; \\ K(t, s) : \quad K_{pq} = (\mu_0 / (4\pi r_{ts}^5)) 3(t_p - s_p)(t_q - s_q), \quad p, q = 1, 2, 3; \quad p \neq q. \\ r_{ts} = \sqrt{(t_1 - s_1)^2 + (t_2 - s_2)^2 + (t_3 - s_3)^2}$$

Корабль намагнчен по объему (продолжение)

Рассмотрим случай, когда известно число источников J и их координаты $s^{(j)}, j = 1, 2, \dots, J$. Определим $M^{(j)} = M(s^{(j)})$. Эти $3 \times J$ неизвестных должны быть найдены, используя измерения в фиксированных точках I с координатами $t^{(i)}, i = 1, 2, \dots, I$. Также определим $B^{(i)} = B(t^{(i)})$ и $K^{(ij)} = K(t^{(i)}, s^{(j)})$. Ясно, что

$$\left. \begin{array}{l} B^{(i)} = \sum_{j=1}^J K^{(ij)} M^{(j)}, \quad i = 1, \dots, I; \quad j = 1, \dots, J \\ \text{Введем } 3 \times I \text{ вектор } U = (B^{(1)}, \dots, B^{(I)})^* \\ \text{и } 3 \times J \text{ вектор } Z = (M^{(1)}, \dots, M^{(J)})^* \end{array} \right\} \Rightarrow AZ = U$$

$$U \Rightarrow U_\delta : \|U_\delta - U\| \leq \delta$$

Корабль намагнчен по объему (продолжение)

Для нахождения приближенного решения полученной системы линейных уравнений $AZ = U$ можно использовать метод регуляризации, основанный на минимизации функционала Тихонова

$$M^\alpha[Z] = \|A_h Z - U_\delta\|^2 + \alpha \|Z\|^2 \quad \inf_{Z \in D} M^\alpha[Z]$$

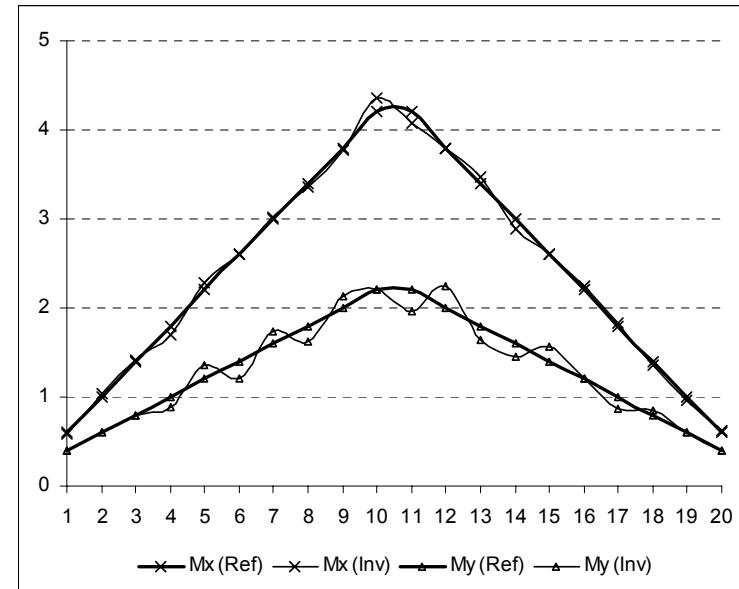
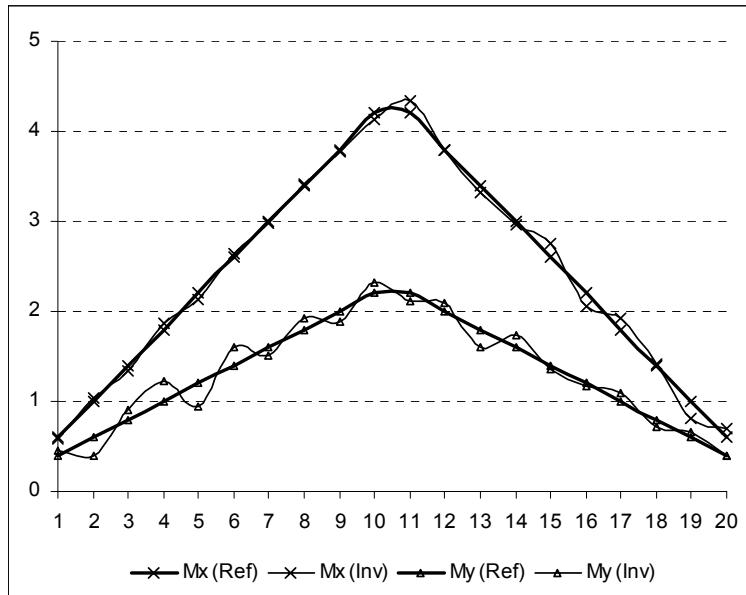
$\alpha > 0$ - параметр регуляризации

Задача в данной постановке была решена:

1. Методом условного градиента (с ограничениями).
2. Методом проекции сопряженных градиентов (с ограничениями).
3. Методом сингулярного разложения матрицы (с ограничениями).

Выбор параметра регуляризации осуществлялся в соответствии с обобщенным принципом невязки.

Результаты вычислений в данной постановке задачи



Результаты восстановления 60 параметров намагниченности (для 20 элементов разбиения) методом условного градиента (1260 тыс. итераций) и методом проекции сопряженных градиентов (1.5 тыс. итераций) при одинаковых входных данных.

Плюсы данной постановки:

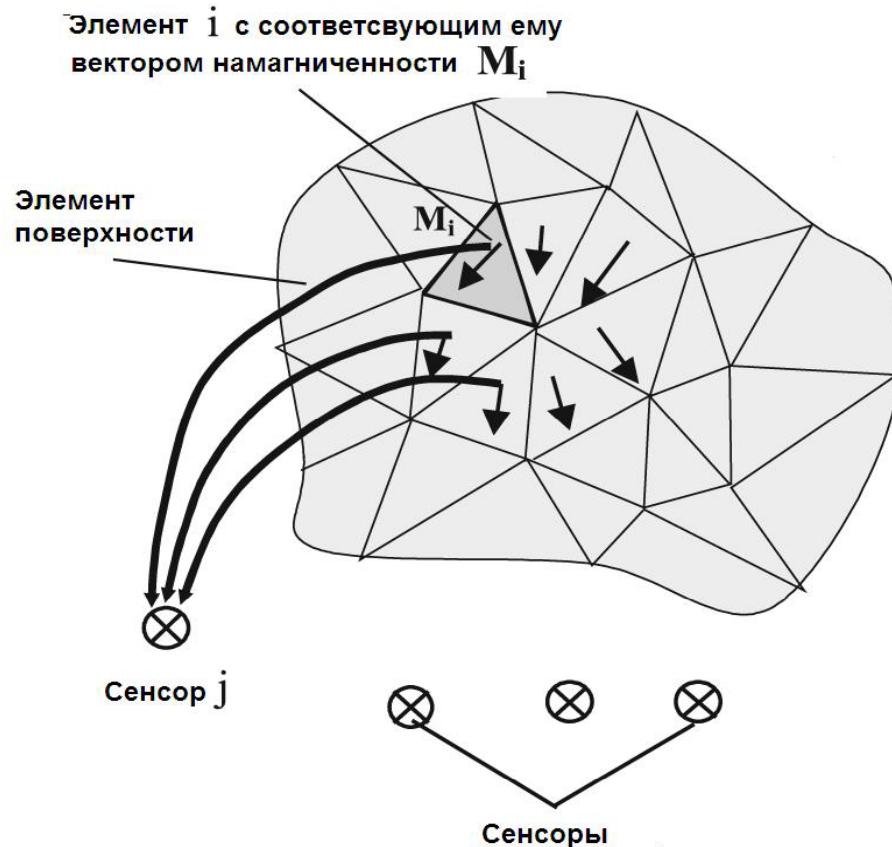
- Быстрота и «доступность» вычислений

Минусы данной постановки:

- Возможность применения только для малого числа разбиений корабля
- Только общая картина о намагниченности корабля

Вторая постановка задачи

Корабль намагнчен по поверхности

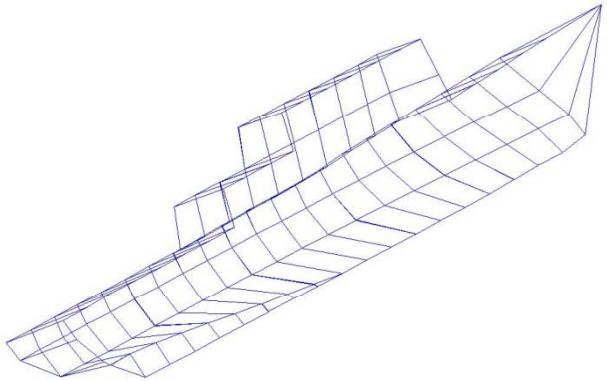


В данной постановке задачи рассматривается непрерывное распределение параметров намагнченности (вектора намагнченности) по поверхности корабля.

$$\vec{B}_j = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{M}_i \cdot \vec{r}_{ij}) r_{ij}}{r_{ij}^5} - \frac{\vec{M}_i}{r_{ij}^3} \right]$$

(магнитное поле, индуцируемое единичным источником)

Корабль намагнчен по поверхности (продолжение)



Возникает необходимость решать интегральное уравнение следующего вида:

$$\vec{B}(x_s, y_s) = \int_{\Omega} K(x - x_s, y - y_s, z - z_s) \vec{M}(x, y, z) d\sigma$$

$$K(x - x_s, y - y_s, z - z_s) = \frac{\mu_0}{4\pi r_{ts}^5} \begin{bmatrix} 3(x - x_s)^2 - r_{ts}^2 & 3(x - x_s)(y - y_s) & 3(x - x_s)(z - z_s) \\ 3(y - y_s)(x - x_s) & 3(y - y_s)^2 - r_{ts}^2 & 3(y - y_s)(z - z_s) \\ 3(z - z_s)(x - x_s) & 3(z - z_s)(y - y_s) & 3(z - z_s)^2 - r_{ts}^2 \end{bmatrix}$$

Данный поверхностный интеграл можно свести к повторному:

$$\vec{B}(x_s, y_s) = \iint_G K(x - x_s, y - y_s, z(x, y)) \vec{M}(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$$

Функционал Тихонова для этого уравнения примет следующий вид:

$$F^\alpha [\vec{M}] = \iint_G \| \vec{B}(x_s, y_s) - \int_G K(x - x_s, y - y_s, z - z_s) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \vec{M}(x, y, z) dx dy \|^2 dx_s dy_s + \alpha \iint_G \| \vec{M}(x, y, z) \|^2 dx dy$$

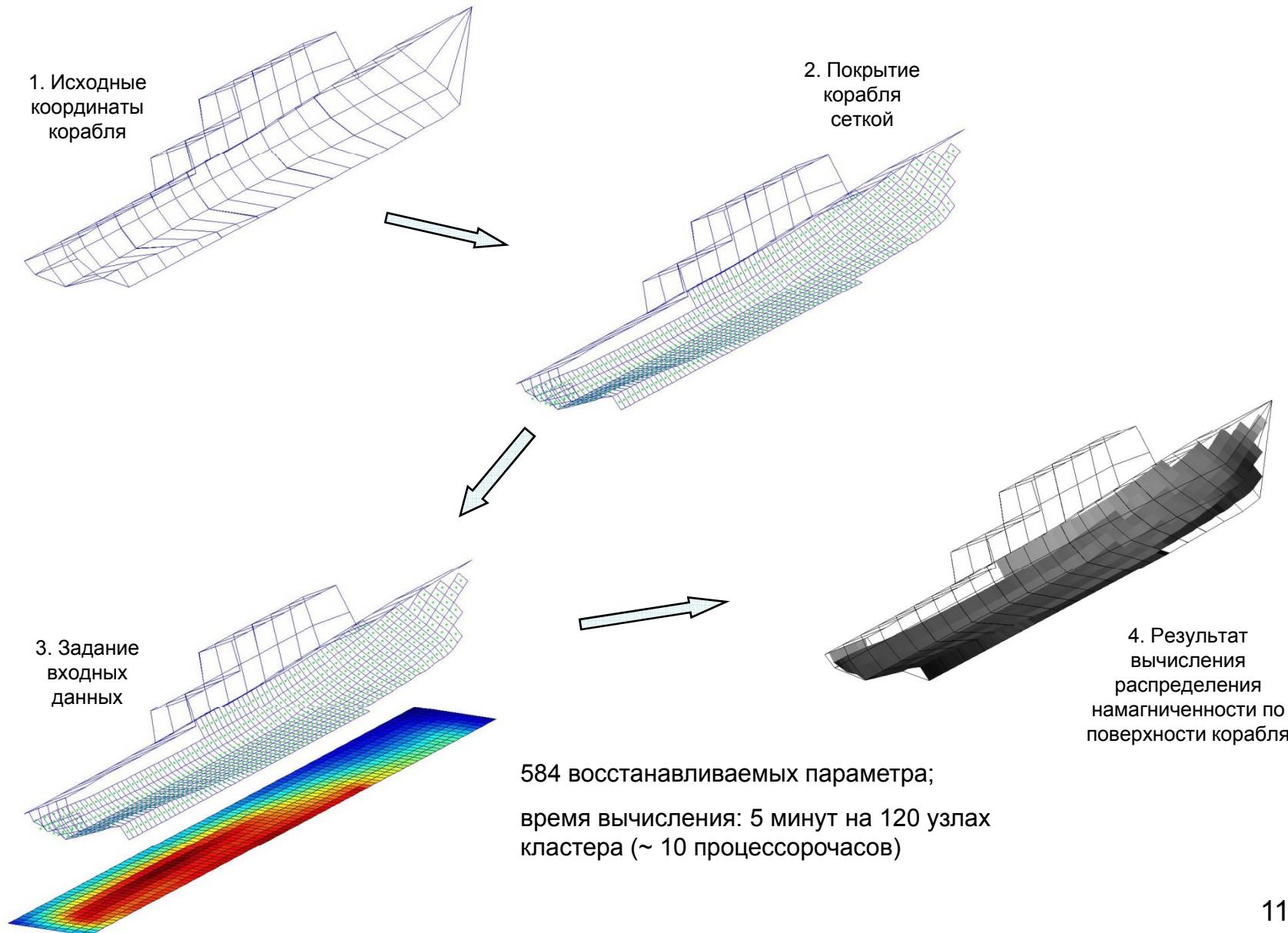
Корабль намагнчен по поверхности (продолжение)

Конечно-разностная аппроксимация функционала Тихонова выглядит следующим образом:

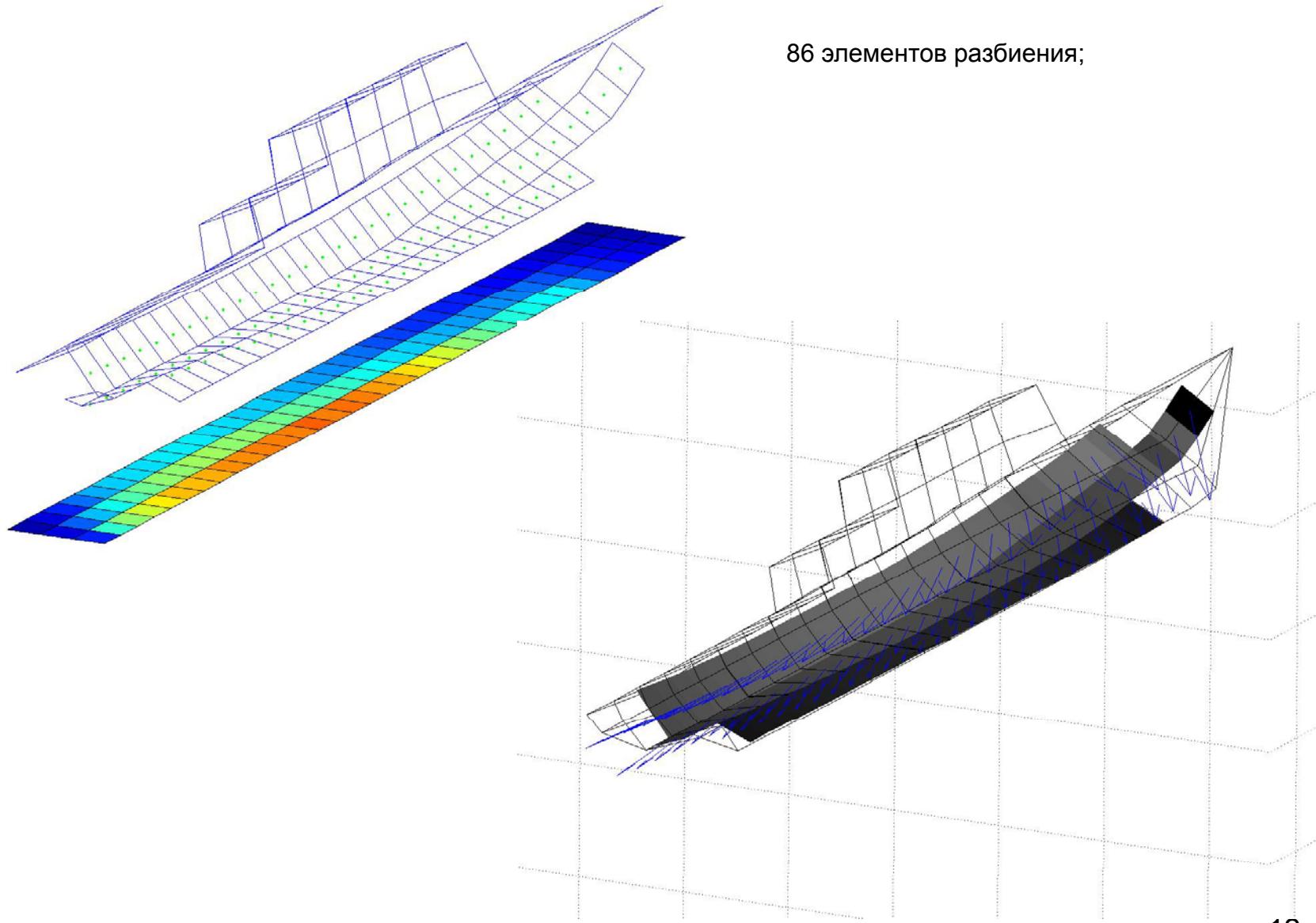
$$F^\alpha[M] = \sum_{k=1}^{Ns} \sum_{l=1}^{Nt} \sum_{i=1}^3 \left[\sum_{p=1}^{Nx} \sum_{j=1}^{Ny} \sum_{m=1}^3 K_{k-p, l-j}^{im} M_{pj}^m \Delta x \Delta y - u_{kl}^i \right]^2 \Delta s \Delta t + \\ + \alpha \sum_{k=1}^{Nx} \sum_{l=1}^{Ny} \sum_{i=1}^3 \left\{ M_{kl}^{i,2} + \left[\frac{\partial^2 M^i(s_k, t_l)}{\partial s^2} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 M^i(s_k, t_l)}{\partial s \partial t} \right]^2 + \left[\frac{\partial^2 M^i(s_k, t_l)}{\partial t^2} \right]^2 \right\} \Delta x \Delta y$$

Структура функционала такова, что он состоит из несвязанных между собою групп слагаемых, что дает возможность составить эффективный алгоритм для многопроцессорных вычислений.

Результаты вычислений в данной постановке задачи

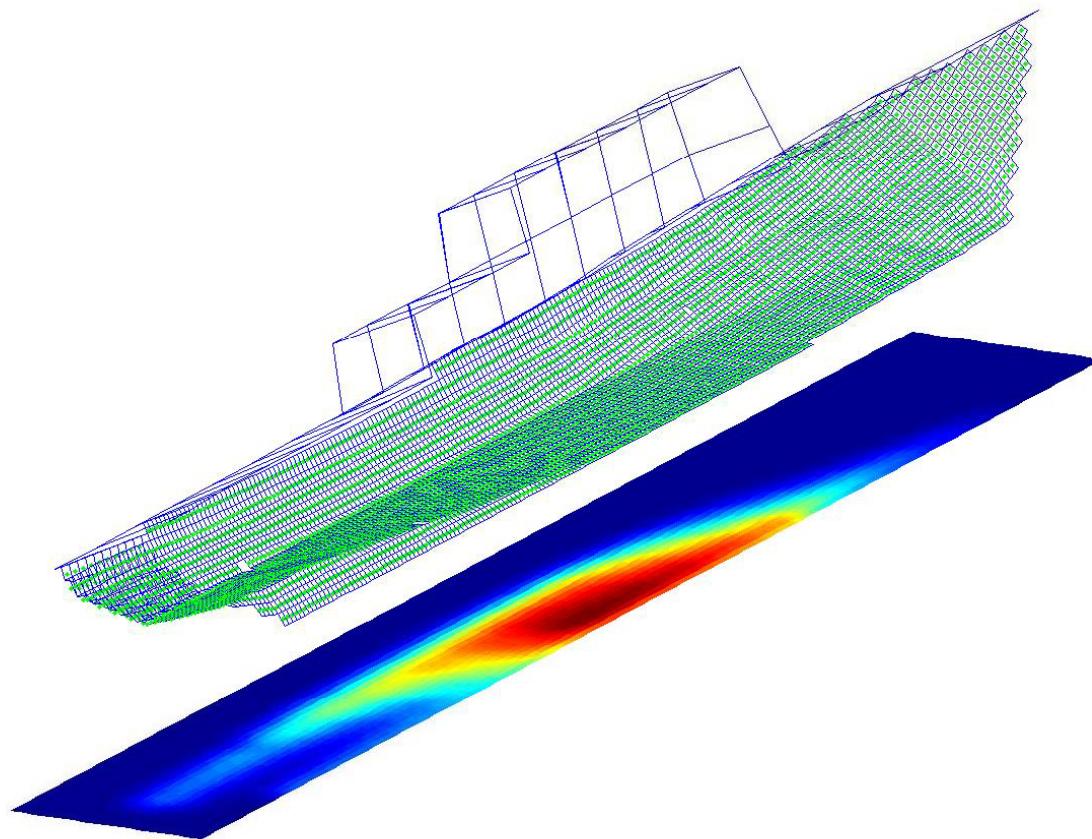


Результаты вычислений в данной постановке задачи

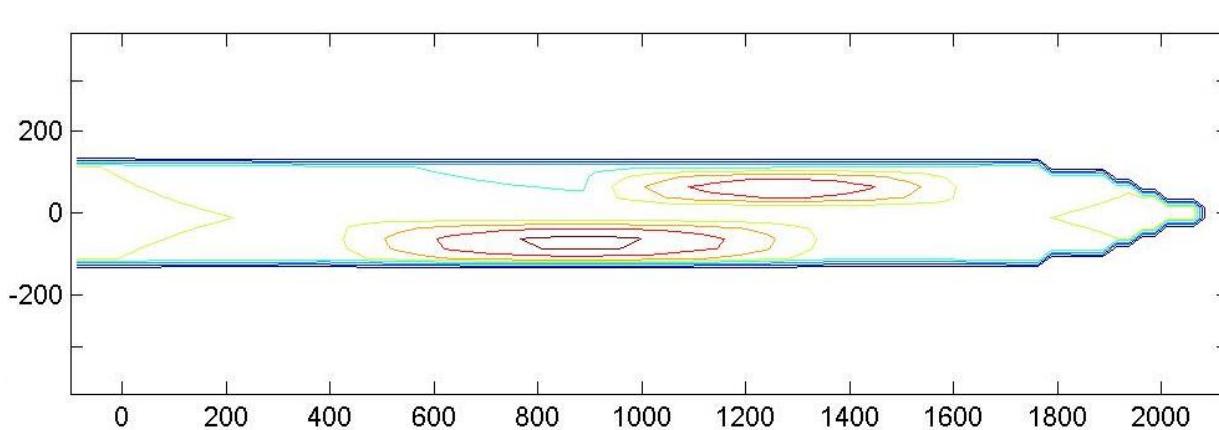


Результаты вычислений в данной постановке задачи

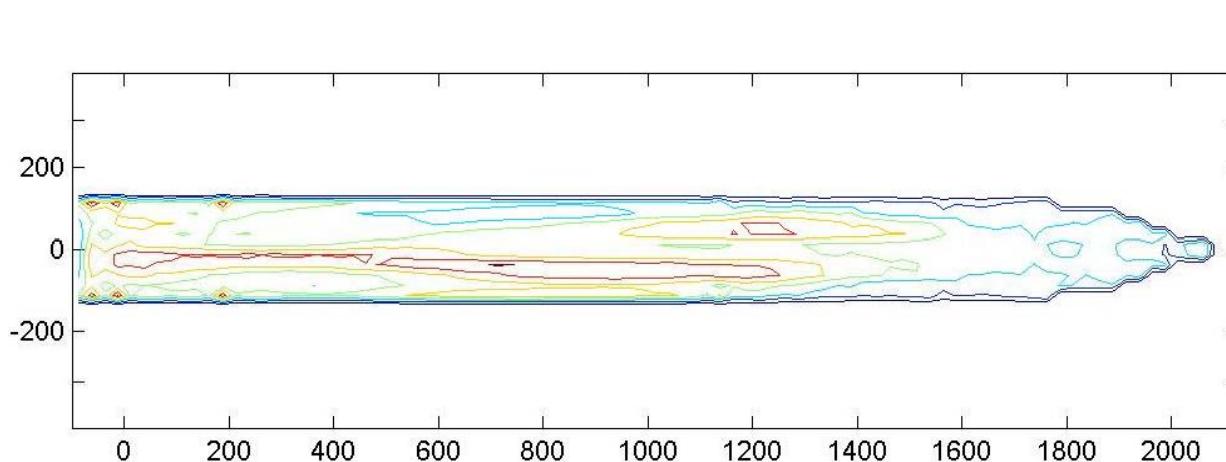
Пример сетки, покрывающей корабль достаточно точно



Результаты вычислений в данной постановке задачи



Точное значение
распределения
намагниченности
(модуль вектора
намагниченности)



Востановленное
распределение значений
намагниченности (модуль
вектора намагниченности).
Уровень погрешности
входных данных: 12%.

Число восстанавливаемых параметров: 5340.

Время счета: 50 минут на 256 процессорах (\sim 200 процессорочасов)

Учет погрешностей

$$A\vec{z} = \vec{u}$$

$$\left\| \vec{u}_\delta - \vec{\bar{u}} \right\|_{L_2} \leq \delta, \quad \left\| A - A_h \right\|_{W_2^2 \rightarrow L_2} \leq h$$

Погрешности задания правой части и ядра уравнения

$$M^\alpha [\vec{z}] = \left\| A_h \vec{z} - \vec{u}_\delta \right\|_{L_2}^2 + \alpha \left\| \vec{z} \right\|_{W_2^2}^2$$

Функционал Тихонова

$$\rho(\alpha) = \left\| A_h \vec{z}_\eta^\alpha - \vec{u}_\delta \right\|_{L_2}^2 - \left(\delta + h \left\| \vec{z}_\eta^\alpha \right\|_{W_2^1} \right)^2 = 0$$

Обобщенный принцип невязки

δ - погрешность задания правой части (приборная погрешность, «белый шум», неточность позиционирования корабля сенсоров).;

h - погрешность задания ядра уравнения (неточность позиционирования корабля относительно сенсоров).

Корабль намагнчен по поверхности (продолжение)

Плюсы данной постановки:

- Универсальность программы

Минусы данной постановки:

- Необходим доступ к многопроцессорным системам

Корабль намагнчен по поверхности (продолжение)

Если аппроксимировать корпус корабля плоскостью, то задача сводится к решению двумерного интегрального уравнения типа свертки для векторной функции:

$$A \vec{z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-s, y-t) \vec{z}(s, t) \, ds \, dt = \vec{u}(x, y)$$

$$\begin{aligned} K_{pp} &= (\mu_0 / (4\pi r_{ts}^5)) (3(t_p - s_p)^2 - r_{ts}^2), \quad p = 1, 2, 3; \\ K(t, s) : \quad K_{pq} &= (\mu_0 / (4\pi r_{ts}^5)) 3(t_p - s_p)(t_q - s_q), \quad p, q = 1, 2, 3; \quad p \neq q. \\ r_{ts} &= \{(t_1 - s_1)^2 + (t_2 - s_2)^2 + (t_3 - s_3)^2\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$x_k = s_k = k \Delta x, \quad y_l = t_l = l \Delta y; \quad \Delta x = 2r/n_1, \quad \Delta y = 2R/n_2;$$

$$\sum_{m=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \sum_{p=1}^3 K_{k-m, l-j}^{ip} z_{mj}^p \Delta x \Delta y = u_{kl}^i$$

Корабль намагнчен по поверхности (продолжение)

$$\begin{aligned}\hat{M}^\alpha[z] = & \sum_{k=0}^{n_1-1} \sum_{l=0}^{n_2-1} \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{p=0}^{n_1-1} \sum_{j=0}^{n_2-1} \sum_{m=1}^3 K_{k-p, l-j}^{im} z_{pj}^m \Delta x \Delta y - u_{kl}^i \right)^2 \Delta x \Delta y + \\ & + \alpha \sum_{k=0}^{n_1-1} \sum_{l=0}^{n_2-1} \sum_{i=1}^3 \left\{ z_{kl}^{i,2} + \left[\frac{\partial^2 z^i(s_k, t_l)}{\partial s^2} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 z^i(s_k, t_l)}{\partial s \partial t} \right]^2 + \left[\frac{\partial^2 z^i(s_k, t_l)}{\partial t^2} \right]^2 \right\} \Delta x \Delta y\end{aligned}$$

Воспользовавшись быстрым дискретным преобразованием Фурье (БДПФ), теоремой о свертке и равенством Планшереля мы можем представить исходный функционал в более удобном для вычислений виде:

$$\hat{M}^\alpha[z] = \frac{\Delta x \Delta y}{n_1 n_2} \sum_{m=0}^{n_1-1} \sum_{n=0}^{n_2-1} \sum_{i=1}^3 \left\{ \left| \sum_{p=1}^3 \tilde{K}_{mn}^{ip} \tilde{z}_{mn}^p \Delta x \Delta y - \tilde{u}_{mn}^i \right|^2 + \alpha \left[1 + (\omega_m^2 + \Omega_n^2)^2 \right] |\tilde{z}_{mn}^i|^2 \right\}$$

Использование свойств матриц специального вида

Ядро типа свертки - - - быстрое преобразование Фурье

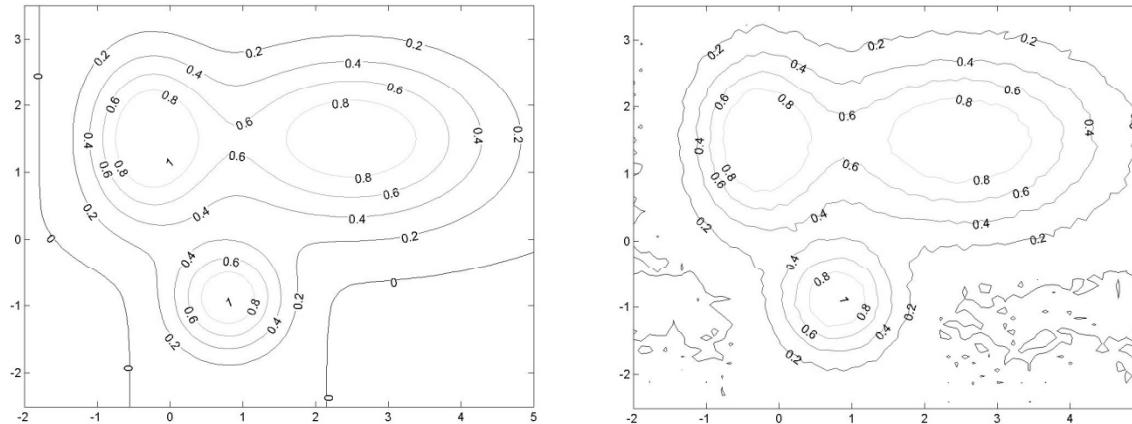
Для успешного применения быстрого преобразования Фурье необходимо преобразуемую функцию доопределить нулем вне ее локального носителя. Однако можно использовать особенности теплицовых и циркулянтных матриц:

$$A = \sum_{k=1}^n U_k \otimes V_k$$

блочная матрица $[u_{ij} V]$, где $U = [u_{ij}]$

Разработаны алгоритмы, которые позволяют эффективно обращать данный вид матриц, которые являются блочными теплицовыми матрицами. Физическая постановка задачи позволяет аппроксимировать оператор, соответствующий исходному ядру интегрального уравнения, такого рода конструкцией.

Корабль намагнчен по поверхности (продолжение)



Точное (слева) и восстановленное (справа) решения

Плюсы данной постановки:

- Высокая скорость счета (+ возможно распараллеливание алгоритма)

Минусы данной постановки:

- Применимо только для задач с ядрами специального вида
- Апроксимация плоскостью (не всякую поверхность целесообразно аппроксимировать плоскостью)

Возможности для распараллеливания функционалов

Проблемы параллельных алгоритмов и их решение

$$F^\alpha[M] = \sum_{k=1}^{Ns} \sum_{l=1}^{Nt} \sum_{i=1}^3 \left[\sum_{p=1}^{Nx} \sum_{j=1}^{Ny} \sum_{m=1}^3 K_{k-p, l-j}^{im} M_{pj}^m \Delta x \Delta y - u_{kl}^i \right]^2 \Delta s \Delta t + \\ + \alpha \sum_{k=1}^{Nx} \sum_{l=1}^{Ny} \sum_{i=1}^3 \left\{ M_{kl}^{i2} + \left[\frac{\partial^2 M^i(s_k, t_l)}{\partial s^2} \right]^2 + 2 \left[\frac{\partial^2 M^i(s_k, t_l)}{\partial s \partial t} \right]^2 + \left[\frac{\partial^2 M^i(s_k, t_l)}{\partial t^2} \right]^2 \right\} \Delta x \Delta y$$

$$\hat{M}^\alpha[z] = \frac{\Delta x \Delta y}{n_1 n_2} \sum_{m=0}^{n_1-1} \sum_{n=0}^{n_2-1} \sum_{i=1}^3 \left\{ \left| \sum_{p=1}^3 \tilde{K}_{mn}^{ip} \tilde{z}_{mn}^p \Delta x \Delta y - \tilde{u}_{mn}^i \right|^2 + \alpha \left[1 + (\omega_m^2 + \Omega_n^2)^2 \right] \left| \tilde{z}_{mn}^i \right|^2 \right\}$$

Эмпирический закон
Амдала, накладывающий
ограничения на ускорение
параллельных программ

$$S_p = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\alpha}{p}}$$

Возможности программного комплекса

Решение задач методами:

1. Метод условного градиента.
2. Метод проекции сопряженных градиентов.
3. Метод сингулярного разложения матрицы.
4. Уравнение типа свертки с использованием БПФ.

+ использование априорной информации (ограничения)

Использование многопроцессорных систем для ресурсоемких задач

Возможность использования при решении следующих задач:

- задачи по обработке изображений
- обратные задачи геофизики
- обратные задачи радиофизики
- задачи исследования материалов и дефектов в них
- обратные задачи оптики
- обратные задачи акустики
- задачи спектроскопии
- обратные задачи геофизики
- задачи томографии
- и т.д.

+ решение многомерных задач

Основной результат

- Разработаны эффективные методы решения обратной задачи обращения магнитного поля по поверхности корабля.
- Разработан комплекс программ, позволяющий эффективно решать ресурсоемкие обратные задачи, сводящиеся к интегральным уравнениям Фредгольма I рода (в том числе с ограничениями различного типа).

Список публикаций и конференций

1. Евдокимова Н.А., Лукьяненко Д.В., Ягола А.Г *Применение многопроцессорных систем для решения двумерных интегральных уравнений Фредгольма I рода типа свертки для векторных функций.* - Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии том 10 апрель-июнь 2009
2. D.V. Lukyanenko, Y. H. Pei, A. G. Yagola, N.A. Evdokimova *Application of inversion methods in solving constraint ill-posed problems for magnetic parameter identification of steel hull vessel.* - Inverse Problems in Science and Engineering (подготовлена к публикации).
3. D. V. Lukyanenko, Y. H. Pei, A. G. Yagola, Liu Gui-Rong, N. A. Evdokimova. *Numerical methods for solving ill-posed problems with constraints and applications to inversion of the magnetic field.* - В "Международная конференция "Обратные и некорректные задачи математической физики", посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия. Тезисы докладов секции № 3.", 2007, с. 1-2, <http://www.math.nsc.ru/conference/ipmp07/section3.htm>
4. Евдокимова Н.А., Лукьяненко Д.В., Ягола А.Г. *Применение многопроцессорных систем для решения обратных задач естествознания.* – В «Международная конференция «Алгоритмический анализ неустойчивых задач» , посвященная 100-летию со дня рождения В.К. Иванова, 1-6 сентября 2008 года, Екатеринбург, Россия. Тезисы докладов секции №2, 2008, с. 12-125.

Список использованной литературы

1. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
2. Воеводин В.В., Воеводин Вл.В. Параллельные вычисления. С.-П.: БХВ-Петербург, 2002.
3. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975.
4. Ягола А.Г., Васильев М.П. Применение многопроцессорных систем для решения двумерных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода // Вычислительные методы и программирование. 2002. 4, №1.
5. Вычислительный кластер НИВЦ МГУ (<http://parallel.ru/cluster>).
6. A C Totterdell, *Magnetic signature control from conceptual design to ship operation*, UDT 96, London, 1996.
7. Xavier Brunotte, Gerard Meunier and Jean-Paul Bongiraud, *Ship Magnetization Modelling by Finite Element Method*, IEEE Trans. on MAG, Vol. 29, No.2, Mar. 1993.
8. Y.H. Pei and H.G. Yeo, "Sequential inversion of ship magnetization from measurements", 3rd Marine Electromagnetics, Stockholm, Sweden, July. 2001.
9. H.W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.
10. A. Bjorck, *Numerical Methods for Least Squares Problems*, SIAM, Philadelphia, 1996.
11. Y.H. Pei, "Magnetic Signature Design Using Global Optimization Approach", 3rd Marine Electromagnetics, Stockholm, Sweden, July. 2001.
12. Alexander V. Kildishev and John A. Nyenhuis, *Multipole Imaging of an Elongated Magnetic Source*, IEEE Trans. On MAG, Vol. 36, No. 5, Sept. 2000
13. F.M. Duthoit, L. Krahenbuhl and A. Nicolas, *The boundary integral equation method for the extrapolation of field measurement*, IEEE Trans. on MAG, Vol. 21, No.6, Nov. 1985.
14. W.H. Press, S.A. Tuckolsky, W.T. Vetterling and E.P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge University Press, 1992.
15. MPI: A message-Passing Interface standard // The Message Passing Interface Forum, Version 1.1, June 12, 1995 (<http://www mpi-forum.org>).
16. K. Preis, C. Magele and O. Biro, *FEM and evolution strategy in the Optimum Design of Electromagnetic Devices*, IEEE Trans. on MAG, Vol. 26, No. 5, Sept. 1990.
17. Pier Giorgio Alotto, et al., *Stochastic Algorithm in Electromagnetic Optimization*, IEEE Trans. on MAG, Vol. 34, No. 5, Sept. 1998.
18. J. Simkin and C. W. Trowbridge, *Optimizing Electromagnetic Devices Combining Direct Search Method with Simulated Annealing*, IEEE Trans on MAG, Vol.28, No.2, Mar. 1992.
19. J. D. Jackson, *Classical Electromagnetism*, New York, Wiley, 1975.
20. David Jiles, *Introduction to Magnetism and Magnetic Materials*, Chapman & Hall, London, 1996.
21. R. L. Parker. *Geophysical Inverse Theory*. Princeton University Press, Princeton NJ, 1994.