MSC 34K10

Л.А. Бекларян

Квазибегущие волны как импульсные решения функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. *

Исследуется конечно-разностный аналог волнового уравнения с нелинейным потенциалом, моделирующий поведение бесконечного стержня под воздействием внешнего продольного силового поля. Для однородного стержня описание решений типа бегущей волны оказывается эквивалентным описанию всего пространства классических решений индуцированного однопараметрического семейства функционального-дифференциальных уравнений (ФДУ) точечного типа с параметром в виде характеристики бегущей волны. Для неоднородного стержня, в силу тривиальности пространства решений типа бегущей волны, определяется их "правильное"расширение в форме решений типа "квазибегущей"волны. В отличие от однородного стержня, описание решений типа квазибегущей волны оказывается эквивалентным описанию уже всего пространства импульсных решений индуцированного однопараметрического семейства ФДУ точечного типа, факторизованного по отношению определяющих свойств квазибегущей волны. Стационарные решения исследуются на устойчивость.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, шкала функциональных пространств, импульсные решения, волновое уравнение, бегущие волны.

Введение

Многие задачи приложения приводят к необходимости описания более широкого класса решений функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) точечного типа нежели классические решения из пространства абсолютно непрерывных функций. К таким решениям, в частности, относятся импульсные решения. Это решения из пространства кусочно абсолютно непрерывных функций, для которых в точках разрыва существуют пределы слева и справа, а величины скачков в точках разрыва конечны (разрывы первого рода). Такая задача возникает, в частности, в линейной теории функционально-дифференциальных

*Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант No.09-01-00324-а) и Грантом поддержки научных школ (НШ-3038.2008.1)

уравнений точечного типа см.([1]-[2]), где построение аналога альтернативы Нетера требует расширения классических решений сопряженного уравнения до класса импульсных решений.

Примером другой задачи, приводящей к рассмотрению импульсных решений ФДУ точечного типа, является описание решений типа бегущей волны в моделях математической физики, в частности, в модели из теории пластической деформации о распространении бегущих волн для бесконечного стержня см.([7]). Дискретный аналог такой системы моделируется поведением счетного числа шаров расположенных в целочисленных точках числовой прямой, соединенных между собой абсолютно упругой нитью. Такая система описывается конечно-разностным аналогом волнового уравнения с нелинейным потенциалом

$$m_i\ddot{y}_i = \phi(y_i) + y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}, \qquad y_i \in \mathbb{R}, \quad m_i > 0, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где потенциал $\phi(.)$ задается гладкой функцией.

Определение 1. *Вектор-функция* $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in \mathbb{R}$ *с абсолютно непрерывными координатами называется решением системы* (1) *типа бегущей волны, если существует* $\tau >0$ *, не зависящее от* t *и* i, *что при всех* $i \in \mathbb{Z}$ *и* $t \in \mathbb{R}$ *выполнено равенство*

$$y_i(t+\tau) = y_{i+1}(t). \tag{2}$$

Константа τ *называется характеристикой бегущей волны.*

Одним из методов исследования таких систем является конструктивное построение решений, использующее явный вид потенциала. На этом пути, для системы (1), в случае шаров с равными массами (однородный стержень) и гладкой периодической функцией $\phi(.)$, были построены специальные классы решений типа бегущей волны. Методами теории возмущений было показано существование решения типа бегущей волны и для близких потенциалов. Обзор по работам такого направления для бесконечномерных систем с потенциалами Френкеля – Конторовой и Ферми – Паста – Улама приведен в работе [4]. Вместе с тем, такой подход не позволяет описать пространство всех решений типа бегущей волны, а также их возможный рост.

Другой подход для конструирования решений основан на использовании различных физических соображений относительно такой системы. На этом пути удается изучить некоторые системы и со специальными типами особенностей для потенциала (доклад Д.Трещева на международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям. 2002, Москва).

В представленной работе предлагается подход, при котором решения типа бегущей волны для системы (1) могут быть реализованы как решения однопараметрического семейства ФДУ точечного типа см. ([1], [9]). При этом, систему (1) с потенциалом без особенностей удается исследовать при более общих предположениях на потенциал $\phi(\cdot)$ в виде условия Липщица. В рамках предложенного формализма удается описать решения типа бегущей волны, а также их возможный рост, связанный с характеристикой бегущей волны. Стационарные решения исследуются на устойчивость.

В случае шаров с равными массами (однородный стержень), описание бегущих волн эквивалентно описанию классических решений для индуцированного однопараметрического семейства ФДУ точечного типа, где параметром служит характеристика бегущей волны. Этот случай полностью исследован в работах [1], [9]. В случае шаров с неравными массами (неоднородный стержень), решения типа бегущих волн, кроме тривиальных, отсутствуют. Это приводит к необходимости "правильного"расширения решений типа бегущих волн до класса решений типа "квазибегущих" волн см.([9]). Описание решений типа квазибегущих волн оказывается эквивалентным описанию всего пространства импульсных решений для индуцированного однопараметрического семейства ФДУ точечного типа и дальнейшей факторизации этого пространства по отношению определяющих свойств решения типа "квазибегущей" волны.

Исходная система дифференциальных уравнений (1) может быть реализована как бесконечномерное дифференциальное уравнение в пространстве бесконечных в обе стороны последовательностей. Принципиальное отличие случаев однородного и неоднородного стержней в том, что в первом случае правая часть такого бесконечномерного уравнения коммутирует с оператором сдвига. Эти вопросы подробно рассмотрены в тексте статьи. Более того, приводится формализм для исследования бегущих (квазибегущих) волн и для более общих бесконечномерных систем.

Для реализации предлагаемого подхода по изучению приведенного конечно-разностного аналога волнового уравнения, в работе исследуются импульсные решения для ФДУ точечного типа общего вида. Изучается начально-краевая задача

$$\dot{x}(t) = g(t, x(t+n_1), \cdots, x(t+n_s)), \qquad t \in B_R, \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \ldots, s, \tag{3}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \qquad t \in \mathbb{R} \backslash B_R, \quad \varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \tag{4}$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

$$x(\bar{t}_i + 0) - x(\bar{t}_i - 0) = \rho_i, \quad \bar{t}_i \in \mathbb{R}, \quad \bar{t}_i < \bar{t}_{i+1}, \quad \rho_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

для ФДУ (3) точечного типа с заданными: областью определения B_R; отклонениями $n_j, \quad j = 1, \ldots, s$; краевым условием (4) с заданной краевой функцией $\varphi(.)$; начальным условием (5) с заданным начальным значением $\bar{x}$ и начальным моментом $\bar{t}$; условиями скачков (6) с заданными значениями скачков $\varrho_i, \quad i \in \mathbb{Z}$ и моментами скачков $\bar{t}_i, \quad i \in \mathbb{Z}$. Множество B_R: либо конечный интервал $[t_0, t_1], \qquad t_0, t_1 \in \mathbb{R}$; либо полупрямая $[t_0, +\infty)$, $t_0 \in \mathbb{R}$; либо прямая $\mathbb{R}$. Множество моментов скачков $\Gamma = \{\bar{t}_i : \ \bar{t}_i \in \mathbb{R}, \ i \in \mathbb{Z}\}$ состоит из объединения конечного числа орбит группы сдвигов $Q =< t + n_1, \ldots, t + n_s >$.

Известно, что ФДУ точечного типа не наследуют всех замечательных свойств обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) см.([1], [10]). Метод исследования ФДУ точечного типа, основанный на их групповых особенностях см.([1]), позволил получить неулучшаемые условия, которые определяют способы регулярного расширения класса ОДУ в классе ФДУ точечного типа в смысле сохранения таких свойств решений ОДУ, как существование и единственность в заданном классе функций, непрерывная зависимость решения от начальных условий, точечная полнота решений, n-параметричность пространства решений, “гладкость” решения, свойство “грубости” уравнения и т.д. В рамках такого подхода классические решения (абсолютно непрерывные решения) ФДУ точечного типа ищутся в однопараметрическом семействе банаховых пространств функций $x(\cdot)$ с весами

$$\mathcal{L}_{\mu}^{n}C^{(k)}(\mathbb{R})=\left\{x(\cdot):\, x(\cdot)\in C^{(k)}\left(\mathbb{R},\mathbb{R}^{n}\right),\, \max_{0\le r\le k}\sup_{t\in\mathbb{R}}\|x^{(r)}(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^{n}}<+\infty\right\},\quad \mu\in(0,+\infty) \tag{7}$$

и с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{\mu}^{(k)}=\max_{0\le r\le k}\sup_{t\in\mathbb{R}}\|x^{(r)}(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^{n}}.$$

Отмеченные неулучшаемые условия формулируются в терминах правой части ФДУ в виде константы Липщица и параметра μ см.([1]; глава 1, § 3).

Формализм, развитый в работе [1], используется для исследования начально-краевой задачи (3)-(6). Основная сложность изучения такой задачи в нелокальности начально-краевых условий (4)-(5). Полученные результаты применяются для описания решений типа бегущих волн и квазибегущих волн.

Заметим, что при изучении линейных ФДУ точечного типа, упомянутый формализм из [1] тесно связан со свойствами хорошо известных операторов взвешенного сдвига. Операторам взвешенного сдвига и порожденных ими алгебр посвящена обширная литература. Среди них наиболее близкими к изучаемой в статье задаче и наиболее полными являются работы [3], [8], в которых центральным является исследование связей спектральной теории операторов взвешенного сдвига и непрерывных полугрупп таких операторов с теорией бесконечномерных линейных расширений динамических систем.

§1. Формулировка основных результатов

Сформулируем систему ограничений на правую часть ФДУ (3):

(I) $g(.)\in C^{(0)}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n\times s},\mathbb{R}^{n})$ (в условии (I) функцию $g(.)$ по переменной t можно положить кусочно непрерывной с разрывами первого рода в точках дискретного множества);

(II) для любых $t,\;\; z_j,\;\; \bar{z}_j,\;\; j=1,\ldots,s$

$$\|g\left(t,z_1,\ldots,z_s\right)\|_{R^n}\le M_0(t)+M_1\sum_{j=1}^{s}\|z_j\|_{\mathbb{R}^n},\qquad M_0(.)\in C^{(0)}(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

$$\|g\left(t,z_1,\ldots,z_s\right)-g\left(t,\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_s\right)\|_{R^n}\le M_2\sum_{j=1}^{s}\|z_j-\bar{z}_j\|_{\mathbb{R}^n}$$

(в действительности, константы M_1 и M_2 можно взять равными);

(III) существует $\mu^* \in \mathbb{R}_+$ такое, что выражение

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} M_0(t+i)\,(\mu^*)^{|i|}$$

для любого $t \in \mathbb{R}$ имеет конечное значение и как функция аргумента t непрерывна.

(IV) существует $\mu^* \in \mathbb{R}_+$ такое, что семейство функций

$$\tilde{g}_{i,z_1,\ldots,z_s}(t) = g(t+i, z_1, \ldots, z_s)(\mu^*)^{|i|}, \qquad i \in \mathbb{Z}, \quad z_1, \ldots, z_s \in \mathbb{R}^n$$

на любом конечном интервале равностепенно непрерывно.

В случае *конечного интервала определения* $B_R = [t_0, t_1]$, будем полагать, что функция $g(.)$ удовлетворяет условиям (I)—(II). Если B_R является *полупрямой*, или *прямой*, будем полагать, что $g(.)$ удовлетворяет условиям (I)—(IV).

Опишем весьма широкий класс функций $g(.)$, удовлетворяющих ограничениям (I)–(IV).

Замечание 1. *Пусть функция g имеет представление*

$$g(t, z_1, \ldots, z_s) = g_1(z_1, \ldots, z_s) + f(t),$$

в котором непрерывная функция $f(.)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^n_{\mu^*}C^{(0)}(R)$, $\quad \mu^* \in R_+$, а функция g_1 удовлетворяет условию Липшица. Тогда функция g будет удовлетворять условиям (I)–(IV). В частности, если отображение g является линейным по z_1, ..., z_s, то есть

$$g(t, z_1, \ldots, z_s) = \sum_{j=1}^{s} A_j z_j + f(t)$$

где A_j — постоянные $(n \times n)$ матрицы, а $f(.)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^n_{\mu^*}C^{(0)}(R)$, $\mu^* \in R_+$, то $g(.)$ будет удовлетворять условиям (I)–(IV).■

Определим пространство функций

$$V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n) = \big\{ f(.) : f(.) \text{ удовлетворяет условиям (I)-(III) } \big\}.$$

Для всех функций из $V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$ параметр $\mu^* \in \mathbb{R}_+$ совпадает с соответствующей константой из условия (III). В пространстве $V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$ можно ввести норму

$$\|f(.)\|_{L_{ip}} = \sup_{t \in R} \|f(t, 0, \ldots, 0)(\mu^*)^{|t|}\|_{R^n} +$$

$$+ \sup_{(t,z_1,\ldots,z_s,\bar{z}_1,\ldots,\bar{z}_s) \in \mathbb{R}^{1+2ns}} \frac{\|f(t, z_1, \ldots, z_s) - f(t, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_s)\|_{R^n}}{\sum_{j=1}^{s} \|z_j - \bar{z}_j\|_{R^n}}.$$

Очевидно, что для функции $f(.) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$ наименьшее значение константы M_2 из условия Липшица (условие (II)), совпадает со значением второго слагаемого в определении нормы $f(.)$. В дальнейшем, говоря об условии Липшица, под константой M_2

будем понимать именно такое её наименьшее значение. Правую часть функционально-дифференциального уравнения точечного типа мы будем рассматривать как элемент банахового прстранства $V_{\mu^*}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{ns},\mathbb{R}^n)$.

Условия непрерывности, условия роста по фазовым переменным и переменной времени, а также условие Липшица (условия (I)–(II)) являются стандартными условиями в теории дифференциальных уравнений, в том числе и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В действительности, в (II) условие роста по фазовым переменным и переменной времени (первое неравенство) является следствием условия Липшица (второе неравенство). Вместе с тем мы отдельно выписали первое неравенство, чтобы для функции $M_0(.)$ сформулировать условие (III). Условие (III) для функции g связано с изучением решений на полупрямой и прямой, что требует определенных ограничений на рост правой части. Последнее условие (IV) необходимо в случае полупрямой или прямой, чтобы избежать дополнительные технические сложности.

Определение 2. *Кусочно абсолютно непрерывная функция $x(.)$, определенная на всей прямой $\mathbb{R}$ и имеющая разрывы первого рода в точках $\Gamma=\{\bar t_i:\ \bar t_i\in\mathbb{R},\ \ i\in\mathbb{Z}\}$, называется решением (импульсным решением) начально-краевой задачи* (3)-(6)*, если для почти всех $t\in B_{\mathbb{R}}$ удовлетворяет ФДУ точечного типа* (3)*, краевому условию* (4)*, а также начальному условию* (5) *и условиям разрыва* (6)*.*

Для формулировки результатов относительно импульсных решений, помимо однопараметрического семейства пространств (7), нам понадобится однопараметрическое семейство несколько более широких банаховых пространств: для любого $\mu\in R_+$ положим

$$\mathcal{L}^n_\mu L_\infty(\mathbb{R})=\left\{x(.):\ \ x(.)-\text{измеримая},\qquad \sup_{t\in\mathbb{R}}\mathrm{v}rai\|x(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n}<+\infty\right\},$$

$$\mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R};\,\Gamma)=\Bigg\{x(.):\ \ x(.)-\text{кусочно непрерывная с разрывами первого рода}$$

$$\text{в точках множества }\ \Gamma,\qquad \sup_{t\in\mathbb{R}}\mathrm{v}rai\|x(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n}<+\infty\Bigg\},$$

с нормами

$$\|x(.)\|_\mu=\sup_{t\in\mathbb{R}}\mathrm{v}rai\|x(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n},\quad \|x(.)\|^{(0)}_{\mu\Gamma}=\sup_{t\in\mathbb{R}}\mathrm{v}rai\|x(t)\mu^{|t|}\|_{\mathbb{R}^n}.$$

В работе [1] были получены теоремы существования и единственности, а также непрерывной зависимости от начальных и краевых условий решений начально-краевой задачи (3)-(5). Развивая результаты работы [1] по изучению классических решений начально-краевой задачи (3)-(5), сформулируем соответствующие утверждения об импульсных решениях для начально-краевой задачи (3)-(5) со скачками (6).

Теорема A. *Если для некоторого* $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ *выполняется неравенство*

$$M_2 \sum_{j=1}^{s} \mu^{-|n_j|} < \ln \mu^{-1},$$

то для любых фиксированных

$$\varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \rho_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z},$$

таких что

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty,$$

существует решение (кусочно абсолютно непрерывное)

$$x(.) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma)$$

основной начально-краевой задачи (3)-(6). *Такое решение является единственным и как элемент пространства* $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma)$ *непрерывно зависит от краевой функции* $\varphi(.)$, *начального состояния* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, *значения скачков* $\varrho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, *а также правой части ФДУ – функции* $g(.)$. ■

Непрерывная зависимость решения от правой части уравнения обычно называется свойством грубости системы. Здесь функция $g(.)$ понимается как элемент банахова пространства $V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$, а значения скачков $\varrho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}$ понимается как элемент пространства бесконечных последовательностей с нормой

$$\|\varrho\|_{\infty\mu\Gamma} = \sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|}. \tag{8}$$

В случае ФДУ точечного типа с чистым запаздыванием и при специальных начальных условиях (5) теорема A может быть уточнена.

Теорема A′. *Пусть ФДУ* (3) *определено на конечном интервале* $[t_0,\, t_1]$, *или полупрямой* $[t_0,\, +\infty)$ *и имеет запаздывающий тип* ($n_j \le 0, \quad j = 1, ..., s$), *а начальный момент* $\bar{t}$ *удовлетворяет условию* $\bar{t} \in (-\infty, t_0]$. *Тогда найдется* $\nu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ *такое, что для любых фиксированных*

$$\varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \rho_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad \mu \in (0, \nu),$$

таких что

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty,$$

существует решение (кусочно абсолютно непрерывное)

$$x(.) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma)$$

основной начально-краевой задачи (3)-(6). *Такое решение является единственным и как элемент пространства* $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R};\,\Gamma)$ *непрерывно зависит от краевой функции* $\varphi(.)$, *начального состояния* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, *значения скачков* $\varrho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, *а также правой части ФДУ – функции* $g(.)$. ■

На основе теоремы **A** для уравнения (1) удается описать пространство решений типа бегущей (квазибегущей) волны с заданной характеристикой τ, которое также описывается в терминах параметра μ. Для формулировки результатов определим векторное пространство

$$K^n = \overline{\prod_{i \in \mathbb{Z}}} R_i^n, \qquad R_i^n = \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

с элементами $\varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}$ и со стандартной топологией полного прямого произведения (метризуемое пространство). В частности, элементами пространства K^2 будут бесконечные последовательности $\varkappa = \{(u_i,\, v_i)'\}_{-\infty}^{+\infty}$ (штрих означает транспонирование). В пространстве K^n определим семейство гильбертовых подпространств $K_{2\mu}^n$, а также банаховых подпространств $K_{\infty\mu}^n$, $K_{\infty\mu\Gamma}^n$, $\quad \mu \in (0,1)$

$$\begin{gathered}
K_{2\mu}^n = \{\varkappa:\ \varkappa \in K^n,\ \ \varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}; \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|x_i\|_{R^n}^2 \mu^{2|i|} < +\infty\},\\
K_{\infty\mu}^n = \{\varkappa:\ \ \varkappa \in K^n,\ \ \varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}; \quad \sup_{i \in Z} \|x_i\|_{R^n} \mu^{|i|} < +\infty\},\\
K_{\infty\mu\Gamma}^n = \{\varrho:\ \ \varrho \in K^n,\ \ \varrho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}; \quad \sup_{i \in Z} \|\rho_i\|_{R^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty\}
\end{gathered}$$

с нормами

$$\|\varkappa\|_{2\mu} = [\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \|x_i\|_{R^n}^2 \mu^{2|i|}]^{\frac{1}{2}}, \qquad \|\varkappa\|_{\infty\mu} = \sup_{i \in Z} \|x_i\|_{R^n} \mu^{|i|}, \qquad \|\varrho\|_{\infty\mu\Gamma} = \sup_{i \in Z} \|\rho_i\|_{R^n} \mu^{|\bar{t}_i|}.$$

В случае массы шаров, удовлетворяющих условию

$$\{m_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1,$$

и потенциала $\phi(.)$ удовлетворяющего условию Липщица с константой L, рассмотрим уравнение относительно двух переменных $\tau \in (0,+\infty)$ и $\mu \in (0,1)$

$$M_2\,\tau\left[2\mu^{-1}+1\right] = \ln \mu^{-1}, \tag{9}$$

где

$$M_2 = \max_{i \in \mathbb{Z}} \max\{2m_i^{-1}\sqrt{L^2+1}; 1\}.$$

Множество решений уравнения (9) описывается функциями $\mu_1(\tau)$, $\quad \mu_2(\tau)$, заданными на рис.1.

Рис.1. Графики функций $\mu_1(\tau),\ \mu_2(\tau)$.

Имеет место равенство $\hat{\mu} = 2M_2\hat{\tau}$. Так как $0 < \hat{\mu} < 1,\quad M_2 \geq 1$, то для величины $\hat{\tau}$ имеется некоторая абсолютная оценка

$$\hat{\tau} < \frac{1}{2}.$$

В случае равных масс шаров в работах [1],[9] были описаны решения типа бегущей волны. Приведем этот результат в виде теоремы В.

Теорема В. *Пусть $m_i = m$ при всех $i \in \mathbb{Z}$, а потенциал $\phi(.)$ удовлетворяет условию Липщица с константой L. Тогда при любых начальных данных $\bar{i} \in \mathbb{Z},\quad a, b \in \mathbb{R},\quad \bar{t} \in \mathbb{R}$ и характеристиках $\tau > 0$, удовлетворяющих условию*

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

для исходной системы дифференциальных уравнений (1) существует единственное решение $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ типа бегущей волны с характеристикой τ такое, что:

1) *оно удовлетворяет начальным условиям $y_{\bar{i}}(\bar{t}) = a,\quad \dot{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b$;*

2) *для каждого параметра $\mu \in (\,\mu_1(\tau),\, \mu_2(\tau)\,)$ вектор-функция $\omega(.) = \{(y_i(.),\, \dot{y}_i(.))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ принадлежит пространству $C^{(0)}(\mathbb{R},\, K^2_{2\mu})$.*

Более того, для такого решения функция $\Upsilon_\mu(.) = \|\omega(.)\|_{2\mu}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_{2\sqrt[\tau]{\mu}}C^{(1)}(\mathbb{R})$ и $\omega(.)$ как элемент пространства $C^{(0)}(\mathbb{R},\, K^2_{2\mu})$ непрерывно зависит от начальных данных $a, b \in \mathbb{R}$ и массы m шаров. ■

Теорема **B** не только гарантирует существование решения типа бегущей волны, но и задает ограничение его возможного роста как по времени t, так и по координатам $i \in \mathbb{Z}$ (по пространству).

Утверждение 1. *Пусть массы шаров таковы, что*

$$\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1,$$

а потенциал $\phi(.)$ *равен нулю. При любых начальных данных* $\bar{i} \in \mathbb{Z}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}$ *и характеристиках* $\tau > 0$ *существует решение типа бегущей волны* $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{bt + bi\tau + \delta\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad \delta = a - b\bar{t} - b\bar{i}\tau$*, описывающее прямолинейное равномерное движение, либо стационарное состояние. Если характеристика* $\tau > 0$ *удовлетворяет условию*

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

то решение типа бегущей волны единственное.■

Следовательно, как в случае равных масс шаров, так и в случае неравных масс шаров, при нулевом потенциале решения типа бегущей волны одни и те же. Они описывают либо прямолинейные равномерные движения, либо стационарные состояния.

Утверждение 2. *Пусть массы шаров таковы, что*

$$\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$$

и среди шаров есть хотя бы два с неравными массами. Тогда всякое решение типа бегущей волны является стационарным решением $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{\alpha_i\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad \alpha_i = \alpha, \quad i = \mathbb{Z}$.■

Как видим, при ненулевом потенциале, в отличие от случая равных масс шаров, в случае неравных масс шаров всякое решение типа бегущей волны является стационарным решением, что свидетельствует об узости класса решений типа бегущей волны. Вместе с тем, возможны решения которые по своему профилю близки к бегущей волне, к определению которых мы и приступаем.

Определение 3. *Пусть* $(\bar{q}, \bar{p})' = \{(q_i, p_i)'\}_{-\infty}^{+\infty}$*. Будем говорить, что решение* $\{y_i(.)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in \mathbb{R}$ *системы уравнений* (1) *является решением типа* $(\bar{q}, \bar{p})'$*-псевдобегущей волны, если существует* $\tau > 0$*, не зависящее от* $i \in \mathbb{Z}$*, что для любого* $i \in \mathbb{Z}$ *выполняются условия*

$$y_i(\tau) - y_{i+1}(0) = q_i, \qquad \dot{y}_i(\tau) - \dot{y}_{i+1}(0) = p_i.$$

Константу τ *будем называть характеристикой решения типа* $(\bar{q}, \bar{p})'$*-псевдобегущей волны.* ■

Очевидно, что всякое решение типа бегущей волны является решением типа (0,0)-псевдобегущей волны. В общем случае обратное утверждение неверно. Оно становится верным в случае равных масс. Сформулируем теорему существования решения типа $(\bar{q}, \bar{p})$-псевдобегущей волны.

Теорема C. *Пусть массы шаров таковы, что*

$$\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K^1_{\infty 1},$$

а потенциал $\phi(.)$ *удовлетворяет условию Липщица с константой* L. *Для любых начальных данных* $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $\quad a, b \in \mathbb{R}$, *начального момента времени* $\bar{t} \in \mathbb{R}$, *параметре* $\bar{\mu} > \mu_1(\tau)$, *векторе* $(\bar{q}, \bar{p})' \in K^2_{2\bar{\mu}}$ *и характеристике* $\tau > 0$, *удовлетворяющего условию*

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

для системы уравнений (1) *существует единственное решение* $\{(y_i(.)\}_{-\infty}^{+\infty}$ *типа* $(\bar{q}, \bar{p})'$-*псевдобегущей волны с характеристикой* τ *такое, что:*

1) *оно удовлетворяет начальным условиям* $y_{\bar{i}}(\bar{t}) = a, \quad \dot{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b;$

2) *для всякого параметра* $\mu \in (\,\mu_1(\tau),\, \mu_2(\tau)\,) \,\cap\, (\,\mu_1(\tau),\, \bar{\mu}\,)$ *вектор-функция* $\omega(t) = \{(y_i(t),\, \dot{y}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ *принадлежит пространству* $C^{(0)}(\mathbb{R},\, K^2_{2\mu})$;

Более того, для такого решения функция $\Upsilon_\mu(.) = \|\omega(.)\|_{2\mu}$ *принадлежит пространству* $\mathcal{L}^1_{2\sqrt[\tau]{\mu}} C^{(1)}(\mathbb{R})$ *и* $\omega(.)$ *как элемент пространства* $C^{(0)}(\mathbb{R},\, K^2_{2\mu})$ *непрерывно зависит от начальных данных* $a, b \in \mathbb{R}$, *а также от вектора* $(\bar{q}, \bar{p})' \in K^2_{2\bar{\mu}}$ *и нормы* $\|\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}\|_{\infty 1}$ *вектора масс шаров* $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K^1_{\infty 1}$. ■

Из графиков функций $\mu_1(\tau),\, \mu_2(\tau)$ следует, что для каждого $0 < \tau < \hat{\tau}$ справедливо включение $\hat{\mu} \in (\,\mu_1(\tau),\, \mu_2(\tau)\,)$. В таком случае, из теоремы C следует, что при каждом $(\bar{q}, \bar{p})' \in K^2_{21}$ для $(\bar{q}, \bar{p})'$-псевдобегущей волны $\omega(t) = \{(y_i(t),\, \dot{y}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ с характеристикой $0 < \tau < \hat{\tau}$ справедливо условие

$$\sup_{t \in R} \|\omega(t)\|_{2\hat{\mu}} \hat{\mu}^{|\frac{t}{2\tau}|} < +\infty.$$

В силу этого, мы можем сформулировать оптимизационную задачу. Пусть массы шаров таковы, что $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K^1_{\infty 1}$, а потенциал $\phi(.)$ удовлетворяет условию Липщица с константой L.

Задача I. *Минимизировать функционал*

$$\lambda(\bar{i}, \bar{t}, a, b, \tau;\ \{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}) =$$

$$= \inf_{(\bar{q}, \bar{p}),\, \omega(.)} \{\sup_{t \in R} \|\omega(t+\tau) - \omega(t)\|_{2\hat{\mu}} \hat{\mu}^{|\frac{t}{2\tau}|}\},$$

при ограничениях :

$$m_i \ddot{y}_i = \phi(y_i) + y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}, \qquad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$y_{\bar{i}}(\bar{t}) = a, \qquad \dot{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b,$$
$$y_i(\tau) - y_{i+1}(0) = q_i, \qquad \dot{y}_i(\tau) - \dot{y}_{i+1}(0) = p_i, \quad i \in \mathbb{Z},$$
$$(\bar{q}, \bar{p})' = \{(q_i, p_i)'\}_{-\infty}^{+\infty} \in B^2_{21} - \text{ единичный шар пространства } K^2_{21},$$
$$\omega(.) = \{(y_i(.),\, \dot{y}_i(.))'\}_{-\infty}^{+\infty} \in C^{(0)}(\mathbb{R},\, K^2_{2\hat{\mu}}). \blacksquare$$

Здесь аргументы $\bar{i}, \bar{t}, a, b, \tau, \ \{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}$ являются параметрами.

Рассмотрим счетно-нормированное пространство $\hat{K}_{21}^2 = \bigcap_{\mu \in (0,1)} K_{2\mu}^2$.

Определение 4. *Решение $\{\hat{y}_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ типа $(\hat{q}, \hat{p})'$-псевдобегущей волны с характеристикой τ и условием $(\hat{q}, \hat{p})' \in \hat{K}_{21}^2$, удовлетворяющее начальным условиям $\hat{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = a, \quad \dot{\hat{y}}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b$, называется решением типа квазибегущей волны с характеристикой τ , если на нем достигается оптимальное значение функционала в задаче I.* ■

Теперь мы можем сформулировать теорему существования решения типа квазибегущей волны, которая для случая равных масс переходит в теорему **B** о существовании и единственности решения типа бегущей волны.

Теорема D. *Пусть массы шаров таковы, что*

$$\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1,$$

а потенциал $\phi(.)$ удовлетворяет условию Липщица с константой L. При любых начальных данных $\bar{i} \in \mathbb{Z}, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}$ и характеристиках $\tau > 0$, удовлетворяющих условию

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

существует решение $\{\hat{y}_i(.)\}_{-\infty}^{+\infty}$ типа квазибегущей волны с характеристикой τ такое, что:

1) *удовлетворяет начальному условию $\hat{y}_{\bar{i}}(\bar{t}) = a, \quad \dot{\hat{y}}_{\bar{i}}(\bar{t}) = b$;*

2) *для любого значения параметра $\mu \in (\, \mu_1(\tau), \, \mu_2(\tau)\,)$ вектор-функция $\hat{\omega}(t) = \{(\hat{y}_i(t), \, \dot{\hat{y}}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ принадлежит пространству $C^{(0)}(\mathbb{R}, \, K_{2\mu}^2)$.*

При этом, для решения типа квазибегущей волны функция $\Upsilon_\mu(.) = \|\hat{\omega}(.)\|_{2\mu}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_{2\sqrt[\tau]{\mu}} C^{(1)}(\mathbb{R})$, а оптимальное значение функционала $\lambda(\bar{i}, \bar{t}, a, b, \tau; \ \{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty})$, непрерывно зависит от начальных данных $a, b \in \mathbb{R}$ и нормы $\|\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}\|_{\infty 1}$ вектора масс шаров $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$.

Более того, при любых заданных параметрах $(a, b, \quad \{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty})$ с равными массами $m_i = m, \ i \in \mathbb{Z}$ решение типа квазибегущей волны в действительности является решением типа бегущей волны и единственно. ■

В отличие от теоремы B (случай равных масс шаров), в которой гарантируется существование и единственность решения типа бегущей волны с заданными начальными данными a, b и характеристикой τ, в теореме D (случай неравных масс шаров) отсутствует утверждение о единственности решения типа квазибегущей волны с заданными начальными данными a, b и характеристикой τ. Единственность решения типа квазибегущей волны гарантируется только в случае равных масс, когда решения типа квазибегущей волны становятся решениями типа бегущей волны.

Другим важным аспектом для системы (1) является вопрос об устойчивости стационарных решений.

Определение 5. *Стационарное решение* $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{a_i\}_{-\infty}^{+\infty}$ *для системы* (1) *называется* μ*-устойчивым по Ляпунову, если для любого* $\varepsilon > 0$ *и любого* t_0 *найдется такое* $\delta > 0$, *что для всякого другого решения* $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, *определенного в окрестности точки* t_0 *и удовлетворяющего условию* $\omega(t) = \{(y_i(t), \dot{y}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{2\mu}^2$ *для любого* t *из этой окрестности, из неравенства*

$$\|\omega(0) - \{(a_i, 0)'\}_{-\infty}^{+\infty}\|_{2\mu} < \varepsilon$$

следует, что $\varkappa(\cdot)$ *определено при всех* $t \geq t_0$ *и*

$$\|\omega(t) - \{(a_i, 0)'\}_{-\infty}^{+\infty}\|_{2\mu} < \varepsilon \blacksquare$$

Для изучения устойчивости потребуются дополнительные условия на потенциал $\phi(.)$.

Теорема E. *Пусть потенциал* $\phi(.)$ *дважды непрерывно дифференцируем с равномерно ограниченьми производными. Если массы шаров таковы, что*

$$\{m_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1, \qquad \{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1,$$

то для системы (1) *стационарное решение* $\{y_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{a_i\}_{-\infty}^{+\infty}$ *является* μ*-неустойчивым по Ляпунову для любого* $\mu < (2+\gamma)^{-1}$, где $\gamma = \sup_{i \in \mathbb{Z}} \dot{\phi}(a_i)$. $\blacksquare$

§2. Доказательство теорем существования и единственности импульсных решений

В начале мы установим сформулированные результаты для случая целочисленных концов области определения уравнения B_R, начального момента $\bar{t}$ и множества $\Gamma = \{\bar{t}_i : \bar{t}_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{Z}\}$– точек разрыва решений. Далее, с помощью замены времени типа квазирастяжения исходная начально-краевая задача сводится к начально-краевой задаче с целочисленными концами интервала B_R, начальным моментом $\bar{t}$ и множеством точек разрыва решений $\Gamma = \{\bar{t}_i : \bar{t}_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{Z}\}$. Это позволяет провести доказательство основываясь на целочисленный случай.

2.1 Случай целочисленных концов интервала B_R, начального момента $\bar{t}$ и множества Γ– точек разрыва решений.

Начально-краевой задаче (3)-(6) для ФДУ точечного типа поставим в соответствие индуцированную бесконечномерную начально-краевую задачу для индуцированного обыкновенного дифференциального уравнения. Для этого следует дать ряд определений.

Пусть $\mathcal{B}$ — σ–алгебра всех подмножеств множества целых чисел $\mathbb{Z}$. Через $\overline{B}$ будем обозначать дополнение к $B \in \mathcal{B}$ в $\mathbb{Z}$, т.е. $\overline{B} = \mathbb{Z} \backslash B$. Для всякого $B \in \mathcal{B}$ определим множество

$$B_R = \bigcup_{i \in B} [i, i+1].$$

Каждому множеству $B \in \mathcal{B}$ поставим в соответствие непрерывный проектор P_B, действующий в пространстве K^n по следующему правилу:

$$\forall \varkappa, i, \qquad \varkappa \in K^n, \quad i \in \mathbb{Z}; \qquad (P_B \varkappa)_i = \left\{ \begin{array}{lll} x_i, & \text{если} & i \in B, \\ 0, & \text{если} & i \notin B. \end{array} \right.$$

Кроме того, в пространстве K^n определим оператор сдвига T:

$$\forall \varkappa, i: \ \varkappa \in K^n, \, i \in \mathbb{Z} \quad \text{будет} \quad (T\varkappa)_i = x_{i+1}.$$

Ограничения операторов T и P_B на подпространство $K^n_{p\mu}$, $\qquad p \in \{2, +\infty\}$, $\qquad \mu \in (\,0, 1,)$ (действующих из $K^n_{2\mu}$ в себя) будем обозначать через $T_{2\mu}$ и $P_{B2\mu}$, соответственно. Там, где это не будет вызывать недоразумения, индексы 2μ будем опускать.

По отображению $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \longrightarrow R^n$, задающему правую часть ФДУ (3) точечного типа, определим оператор

$$G : \mathbb{R} \times K^n \longrightarrow K^n$$

по следующему правилу: для любых $i \in \mathbb{Z}$, $\qquad t \in R$, $\qquad \varkappa \in K^n$

$$(G(t, \varkappa))_i = \mathcal{G}_i(t, \varkappa) = g(t + i, x_{i+n_1}, \ldots, x_{i+n_s}). \tag{10}$$

Отображение G непрерывно и справедливо правило перестановочности

$$TG(t, \varkappa) = G(t + 1, \, T\varkappa). \tag{11}$$

Ограничения оператора $P_B G$ на подпространство $\mathbb{R} \times K^n_{p\mu}$, $\qquad p \in \{2, +\infty\}$, $\qquad \mu \in (\,0, \mu^*) \cap (\,0, 1)$ действует непрерывно в пространство $K^n_{p\mu}$, обозначается через $P_B G_{p\mu}$, а также удовлетворяет условию квазилинейного роста и условию Липщица см.([1]; глава 2, лемма 3.1)

$$\|P_B G_{p\mu}(t, \varkappa)\|_{p\mu} \leq M_{0p\mu}(t) + M_{1p\mu} \|\varkappa\|_{p\mu}, \tag{12}$$

$$\|P_B G_{p\mu}(t, \varkappa) - P_B G_{p\mu}(t, \overline{\varkappa})\|_{p\mu} \leq M_{2p\mu} \|\varkappa - \overline{\varkappa}\|_{p\mu}. \tag{13}$$

где

$$\eta_\mu(B) = \sum_{j=1}^{s} \max[\mu^{n_j} \gamma(B \cap] - \infty, -n_j], \ \mu^{-n_j} \gamma(B \cap [-n_j, +\infty\,[)], \tag{14}$$

$$\gamma(B) = \begin{cases} 1, & \text{если } B \neq \varnothing, \\ 0, & \text{если } B = \varnothing; \end{cases}$$

и для любых $t \in R$

$$M_{0\infty\mu}(t) = \sup_{i \in Z} M_0(t+i)\mu^{|i|}, \quad M_{1\infty\mu} = M_1\eta_\mu(B), \quad M_{2\infty\mu} = M_2\eta_\mu(B); \tag{15}$$

$$M_{02\mu}(t) = (s+1)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} M_0^2(t+i)\mu^{2|i|} \right]^{1/2}, \tag{16}$$

$$M_{12\mu} = (s+1)^{\frac{1}{2}} M_1\eta_\mu(B), \qquad M_{22\mu} = sM_2\eta_\mu(B).$$

При заданных $p \in \{2, +\infty\}$, $\mu \in (0,1)$, $r \in \mathbb{Z}$ определим линейные операторы

$$\hat{\mathbb{S}}_{rp\mu} : \mathbb{R}^n \longrightarrow K^n_{p\mu}, \qquad \tilde{\mathbb{S}}_{p\mu} : \mathbb{R}^n \longrightarrow K^n_{p\mu}, \qquad \mathbb{S}_{r\infty\mu} : K^n_{\infty\mu} \longrightarrow K^n_{\infty\mu}$$

действующие по правилу: для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеют место представления

$$\hat{\mathbb{S}}_{rp\mu}\, x = \varkappa, \quad \varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad x_r = x, \quad x_i = 0, \quad i \in \mathbb{Z}\backslash r;$$
$$\tilde{\mathbb{S}}_{p\mu}\, x = \varkappa, \quad \varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad x_i = x, \quad i \in \mathbb{Z};$$

$\mathbb{S}_{r\infty\mu}$ является линейным сечением к линейному непрерывному оператору $\mathcal{F} = (T_{\infty\mu} - E)$, то есть линейное отображение $\mathbb{S}_{r\infty\mu} : K^n_{\infty\mu} \longrightarrow K^n_{\infty\mu}$ со свойством $\mathcal{F} \circ \mathbb{S}_{r\infty\mu} = E$, и для любого $\varkappa \in K^n_{\infty\mu}$ выполняется равенство $(\mathbb{S}_{r\infty\mu}\varkappa)_r = 0$. Как и раньше, там где это не будет вызывать недоразумений, нижние индексы у операторов будут опускаться. Очевидно, что линейные операторы $\hat{\mathbb{S}}_{rp\mu}$ и $\tilde{\mathbb{S}}_{p\mu}$ являются непрерывными. Установлено см.([1]; глава 2, лемма 4.1) , что линейный оператор $\mathbb{S}_{r\infty\mu}$ также является непрерывным и для любого подмножества $B \subseteq \mathbb{Z}$ дана оценка нормы оператора $\mathbb{S}_{r\infty\mu}P_B$

$$|||\mathbb{S}_{r\infty\mu}P_B|||_{\infty\mu} \leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(r, B). \tag{17}$$

Там же показано, что для выражения $\mathcal{J}_{\infty\mu}(r, B)$ справедлива оценка

$$\mathcal{J}_{\infty\mu}(r, B) \leq [1-\mu]^{-1}. \tag{18}$$

В случае, когда множество B ограничено снизу и $r \leq \inf\{i : i \in B\}$, эта оценка может быть уточнена

$$\mathcal{J}_{\infty\mu}(r, B) \leq \mu[1-\mu]^{-1}. \tag{19}$$

При заданных

$$p \in \{2, +\infty\}, \quad \mu \in (0, \mu^*) \cap (0,1), \quad \bar{t} \in \mathbb{Z}, \quad \varrho_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z}$$

определим бесконечномерную начально-краевую задачу, индуцированную основной начально-краевой задачей (3)-(6),

$$\frac{d}{dt}\varkappa(t) = P_B G_{p\mu}(t, \varkappa) + P_{\bar{B}} v(t), \qquad t \in [0,1], \tag{20}$$

$$\varkappa(1) = T_{p\mu}\varkappa(0) - \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{t_i p\mu}\ \rho_i, \tag{21}$$

$$(\varkappa(0))_{\bar{t}} = \bar{x}. \tag{22}$$

Здесь множество B такого, что соответствующее ему множество B_R совпадает с одноименным множеством из основной начально-краевой задачи. Вектор-функция

$$v(t) = \{\varphi_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad \varphi_i(t) = \varphi(t+i), \quad t \in [0,1], \quad i \in \mathbb{Z}, \tag{23}$$

построенная по краевой функции $\varphi(.)$ из краевого условия (4), принадлежит пространству $L_\infty([0,1], K_{p\mu}^n)$ и интегрируема по Бохнеру см.([1]; глава 2, предложения 2.3, 2.4).

В бесконечномерной начально-краевой задаче рассматривается два случая значения $p \in \{2, +\infty\}$. Это связано с тем, что при доказательстве теорем существования решений, использующее теоремы о неподвижной точке, более удобным пространством является случай $p = +\infty$. При исследовании бегущих волн и их устойчивости, более удобным является случай $p = 2$, при котором пространство $K_{2\mu}^n$ является гильбертовым.

Определение 6. *Отображение $\varkappa : \mathbb{R} \longmapsto K_{p\mu}^n$, $p \in \{2, \infty\}$, $\mu \in (0,1)$ называется сильно абсолютно непрерывной вектор-функцией, если оно почти всюду дифференцируемо по Фреше, на каждом конечном интервале производная $\dot{\varkappa}(\cdot)$ интегрируема по Бохнеру и вектор-функция $\varkappa(\cdot)$ восстанавливается по производной $\dot{\varkappa}(\cdot)$ см.([1]).*

Определение 7. *Пусть $v(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, K_{p\mu}^n)$, $p \in \{2, \infty\}$, $\mu \in (0,1)$ и интегрируема по Бохнеру. Сильно абсолютно непрерывная вектор-функция $\varkappa(t)$, $t \in \mathbb{R}$ со значениями в пространстве $K_{p\mu}^n$ называется решением обыкновенного дифференциального уравнения* (20)*, если для почти всех $t \in \mathbb{R}$ она удовлетворяет этому уравнению.*

Установим связь между решениями основной начально-краевой задачи (3)-(6) и бесконечномерной начально-краевой задачи (20)-(22).

Предложение 1. *Пусть заданы*

$$\varphi(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad p \in \{2, \infty\}, \quad \bar{t} \in \mathbb{Z}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \rho_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z}$$

Если функция $x(.)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_{\tilde{\mu}}^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma)$ при $\tilde{\mu} \in (0, \mu^*) \cap (0,1)$ и является кусочно абсолютно непрерывным решением основной начально-краевой задачи (3)-(6)*, то справедливо условие*

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \tilde{\mu}^{|\bar{t}_i|} < +\infty$$

и для любого $\mu \in (0, \tilde{\mu})$ вектор-функция $\varkappa(t) = \{x_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0,1]$, где

$$x_i(t) = x(t+i), \quad t \in (0,1), \quad x_i(0) = x(i+0), \quad x_i(1) = x(1+i-0), \quad i \in \mathbb{Z},$$

является решением бесконечномерной начально-краевой задачи (20)-(22).

Если вектор-функция $\varkappa(t) = \{x_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0,1]$ является решением бесконечномерной начально-краевой задачи (20)-(22)*, в которой*

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty, \qquad \mu \in (0, \mu^*) \cap (0,1),$$

то функция $x(t) = x_{[t]}(t - [t])$, $t \in \mathbb{R}$ ($[\cdot]$ — целая часть числа) принадлежит пространству $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma)$ и является кусочно абсолютно непрерывным решением основной начально-краевой задачи (3)-(6).

Доказательство. Оно может быть получено непосредственной проверкой. $\square$

В силу предложения 1, нам достаточно установить теорему существования для бесконечномерной начально-краевой задачи (20)-(22). Для этого построим бесконечномерное интегральное уравнение, эквивалентное бесконечномерной начально-краевой задаче (20)-(22). При фиксированных

$$\varphi(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad \bar{t} \in \mathbb{Z}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \rho_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad \mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1),$$

вектор-функция $v(.)$ из (23) будет интегрируемой по Бохнеру и мы можем определить бесконечномерное интегральное уравнение

$$\varkappa(t) = \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}\left\{ \int_0^1 [P_B G(\tau, \varkappa(\tau)) + P_{\bar{B}} v(\tau)]\, d\tau + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i p\mu}\ \rho_i \right\} + \tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}\bar{x} + \tag{24}$$
$$+ \int_0^t [P_B G(\tau, \varkappa(\tau)) + P_{\bar{B}} v(\tau)]\, d\tau, \qquad t \in [0, 1].$$

Определение 8. *Решением интегрального уравнения* (24) *будем называть всякую функцию* $\varkappa(.) \in C^{(0)}([0,1], K^n_{\infty\mu})$, *удовлетворяющую данному уравнению.*

Установим соответствие между решениями бесконечномерной начально-краевой задачи (20)-(22) и интегрального уравнения (24).

Предложение 2. *Пусть* $(v(.), \bar{x}, \bar{t}) \in L_\infty([0,1], K^n_{\infty\mu}) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}$, $\rho_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{Z}$, $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$, *где вектор-функция* $v(.)$ *интегрируема по Бохнеру и выполняется условие*

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty.$$

Если вектор-функция $\varkappa(.) \in C^{(0)}([0,1], K^n_{\infty\mu})$ *является решением бесконечномерной начально-краевой задачи* (20)-(22), *в которой* $p = \infty$, *то она будет решением интегрального уравнения* (24).

Если вектор-функция $\varkappa(.) \in C^{(0)}([0,1], K^n_{\infty\mu})$ *является решением интегрального уравнения* (24), *то она будет решением бесконечномерной начально-краевой задачи* (20)-(22), *в которой* $p = \infty$.

Доказательство. Введем обозначение

$$\overline{\varkappa} = \int_0^1 [P_B G_{\infty\mu}(\tau, \varkappa(\tau)) + P_{\bar{B}} v(\tau)]\, d\tau. \tag{25}$$

Пусть $\varkappa(.) \in C^{(0)}([0,1], K^n_{\infty\mu})$ является решением бесконечномерной начально-краевой задачи (20)-(22). Используя обозначение (25), из интегрального уравнения

$$\varkappa(t) = \varkappa(0) + \int_0^t [P_B G_{\infty\mu}(\tau, \varkappa(\tau)) + P_{\bar{B}} v(\tau)]\, d\tau, \quad t \in [0, 1], \tag{26}$$

эквивалентного бесконечномерному дифференциальному уравнению (20) получим, что $\varkappa(1) = \varkappa(0) + \overline{\varkappa}$. Подставив в краевое условие (21), получим равенство

$$(T_{\infty\mu} - E)\varkappa(0) = \overline{\varkappa} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu}\ \rho_i. \tag{27}$$

Используя определения сечения $\mathbb{S}_{i\infty\mu}$, оператора $\tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}$ и начальное условие (22), из равенства (27) непосредственно получим, что

$$\varkappa(0) = \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}\left[\overline{\varkappa} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu}\ \rho_i\right] + \tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}\bar{x}. \tag{28}$$

Подставив значение $\varkappa(0)$ из (28) в уравнение (26), мы и получим бесконечномерное интегральное уравнение (24).

Обратно. Пусть $\varkappa(.) \in C^{(0)}([0,1], K^n_{\infty\mu})$ удовлетворяет бесконечномерному интегральному уравнению (24). В таком случае, $\varkappa(.)$ является сильно абсолютно непрерывной вектор-функцией и удовлетворяет бесконечномерному дифференциальному уравнению (20).

С другой стороны, из того же бесконечномерного интегрального уравнения (24) следуют равенства

$$\varkappa(1) = \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}\left[\overline{\varkappa} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu}\ \rho_i\right] + \tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}\bar{x} + \overline{\varkappa}, \tag{29}$$

$$\varkappa(0) = \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}\left[\overline{\varkappa} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu}\ \rho_i\right] + \tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}\bar{x}. \tag{30}$$

Используя операторные равенства $(T_{\infty\mu} - E) \circ \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} = E, \qquad T_{\infty\mu}\tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu} = \tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}$, перепишем равенство (29) в эквивалентном виде

$$\varkappa(1) = \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}\left[\overline{\varkappa} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu}\ \rho_i\right] + T_{\infty\mu} \circ \tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}\bar{x} + (T_{\infty\mu} - E) \circ \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}\left[\overline{\varkappa} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu}\ \rho_i\right]. \tag{31}$$

Взаимоуничтожив одинаковые члены с разными знаками, получим равенство

$$\varkappa(1) = T_{\infty\mu} \circ \left\{\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}\left[\overline{\varkappa} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu}\ \rho_i\right] + \tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}x\right\}. \tag{32}$$

Используя представление (30) для $\varkappa(0)$ и равенство (32), получим краевое условие (21). Далее, пользуясь представлением (30) для $\varkappa(0)$ и определением сечения $\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}$, получим начальное условие $(\varkappa(0))_{\bar{t}} = \bar{x}$. Следовательно, вектор-функция $\varkappa(.)$ является решением краевой задачи (20)-(22). $\square$

Установив цепочку утверждений в виде предложений 1 и 2, нам остается сформулировать теорему существования и единственности для бесконечномерного интегрального уравнения (24). Доказательство такой теоремы основано на методе сжимающих отображений.

Теорема 1. *Пусть для заданных* $B \in \mathcal{B}, \quad \bar{t} \in \mathbb{Z}, \quad \mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ *справедливо неравенство*

$$M_2 \eta_\mu(B)[\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) + 1] < 1. \tag{33}$$

Тогда при любых фиксированных вектор-функции $v(.) \in L_\infty([0,1], K^n_{\infty\mu})$*, интегрируемой по Бохнеру, векторе* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ *и* $\rho_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z}$*, таких что*

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty,$$

существует решение $\varkappa(.) \in C^{(0)}([0,1], K^n_{\infty\mu})$ *бесконечномерного интегрального уравнения* (24)*. Такое решение является единственным.*

Доказательство. При фиксированных $v(.), \quad \bar{x}$ определим операторы

$$A : \varkappa(.) \longrightarrow \int_0^t [P_B G_{\infty\mu}(\tau, \varkappa(\tau)) + P_{\bar{B}} v(\tau)] \, dr, \tag{34}$$

$$\hat{A} : \varkappa(.) \longrightarrow \mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}[(A[\varkappa(.)])(1) + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i \infty\mu} \, \rho_i] + \tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu} \bar{x} + (A[\varkappa(.)])(t), \tag{35}$$

действующие из $C^{(0)}([0,1], K^n_{\infty\mu})$ в $C^{(0)}([0,1], K^n_{\infty\mu})$. Интегральное уравнение (24) можно записать в виде

$$\varkappa(t) \equiv (\hat{A}[\varkappa(.)])(t), \qquad\qquad t \in [0,1]. \tag{36}$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что оператор $\hat{A}$ сжимающий в пространстве $C^{(0)}([0,1], K^n_{\infty\mu})$, норму в котором мы обозначали через $\|.\|_{\infty\mu C^{(0)}}$. Пользуясь представлениями (34), (35), а также фиксированностью вектор-функции $v(.)$ и вектора $\bar{x}$, для любого $t \in [0,1]$ получим оценку

$$\begin{gathered} \|(\hat{A}[\varkappa(.)](t) - (\hat{A}[\tilde{\varkappa}(.)])(t)\|_{\infty\mu} \le \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}\{(A[\varkappa(.)])(1) - (A[\tilde{\varkappa}(.)])(1)\}\|_{\infty\mu} + \\ + \|(A[\varkappa(.)])(t) - (A[\tilde{\varkappa}(.)])(t)\|_{\infty\mu} = \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_B\{(A[\varkappa(.)])(1) - \\ -(A[\tilde{\varkappa}(.)])(1)\}\|_{\infty\mu} + \|(A[\varkappa(.)])(t) - (A[\tilde{\varkappa}(.)])(t)\|_{\infty\mu}. \end{gathered} \tag{37}$$

В силу оценки (17) для оператора $\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_B$ и условия Липшица (13) для отображения $P_B G_{\infty\mu}$, первое слагаемое оценивается следующим образом

$$\begin{gathered} \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_B\{(A[\varkappa(.)])(1) - (A[\tilde{\varkappa}(.)])(1)\}\|_{\infty\mu} \le \\ \le |\|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_B\||_{\infty\mu} \|(A[\varkappa(.)])(1) - (A[\tilde{\varkappa}(.)])(1)\|_{\infty\mu} \le \\ \le \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) \int_0^1 \|P_B G_{\infty\mu}(\tau, \varkappa(\tau)) - P_B G_{\infty\mu}(\tau, \tilde{\varkappa}(\tau))\|_{\infty\mu} d\tau \le \\ \le \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) M_2 \eta_\mu(B) \int_0^1 \|\varkappa(\tau) - \tilde{\varkappa}(\tau)\|_{\infty\mu} d\tau \le \\ \le M_2 \eta_\mu(B) \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) \|\varkappa(.) - \tilde{\varkappa}(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}}. \end{gathered} \tag{38}$$

По аналогии с этой же оценкой получим оценку и для второго слагаемого

$$\begin{aligned} \|(A[\varkappa(.)])(t) - (A[\tilde{\varkappa}(.)])(t)\|_{\infty\mu} &\le \int_0^t \|P_B G_{\infty\mu}(\tau, \varkappa(\tau)) - P_B G_{\infty\mu}(\tau, \tilde{\varkappa}(\tau))\|_{\infty\mu}\, d\tau \le \\ \le M_2 \eta_\mu(B) \int_0^t \|\varkappa(\tau) - \tilde{\varkappa}(\tau)\|_{\infty\mu} d\tau &\le M_2 \eta_\mu(B) \|\varkappa(.) - \tilde{\varkappa}(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}}\ t \le \\ &\le M_2 \eta_\mu(B) \|\varkappa(.) - \tilde{\varkappa}(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}}. \end{aligned} \tag{39}$$

Окончательно, для оператора $\hat{A}$ при любом $t \in [0,1]$ получим оценку

$$\|(\hat{A}[\varkappa(.)])(t) - (\hat{A}[\tilde{\varkappa}(.)])(t)\|_{\infty\mu} \le M_2 \eta_\mu(B) \left[\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) + 1\right] \|\varkappa(.) - \tilde{\varkappa}(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}}, \tag{40}$$

откуда и следует, что

$$\|\hat{A}[\varkappa(.)] - \hat{A}[\tilde{\varkappa}(.)]\|_{\infty\mu C^{(0)}} \le M_2 \eta_\mu(B) \left[\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) + 1\right] \|\varkappa(.) - \tilde{\varkappa}(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}}. \tag{41}$$

В силу неравенства (33) оператор $\hat{A}$ является сжимающим. Следовательно, решение бесконечномерного интегрального уравнения (24) существует и оно единственное.

□

Установим непрерывную зависимость решения от начальных данных, краевых условий и скачков, а также грубость системы.

Теорема 2. *Пусть для заданных* $B \in \mathcal{B}$, $\bar{t} \in \mathbb{Z}$, $\mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1)$ *справедливо неравенство*

$$M_2 \eta_\mu(B)[\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, B) + 1] < 1. \tag{42}$$

Тогда решение $\varkappa(.) \in C^{(0)}([0,1], K^n_{\infty\mu})$ *бесконечномерного интегрального уравнения* (24) *непрерывно зависит от* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $v(.) \in L_\infty([0,1], K^n_{\infty\mu})$, *интегрируемой по Бохнеру,* $\varrho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}$ *со свойством*

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty,$$

а также функции $g(.) \in V_{\mu^*}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns}, \mathbb{R}^n)$, *индуцирующей оператор* $G_{\infty\mu}$.

Доказательство. В начале покажем непрерывную зависимость решения от $\bar{x}$, $v(.)$, $\varrho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}$. Пусть заданы $v(.)$, $v_1(.) \in L_\infty([0,1], K^n_{\infty\mu})$, интегрируемые по Бохнеру, $\bar{x}$, $\bar{x}_1 \in R^n$ и $\varrho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\varrho_1 = \{\rho_{1i}\}_{-\infty}^{+\infty}$, удовлетворяющие условиям

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty, \quad \sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_{1i}\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty.$$

По теореме 1 существуют вектор-функции $\varkappa(.)$, $\varkappa_1(.) \in C^{(0)}([0,1], K^n_{\infty\mu})$, удовлетворяющие тождествам

$$\varkappa(t) \equiv (\hat{A}[\varkappa(.); v(.), \bar{x}, \varrho])(t), \qquad \varkappa_1(t) \equiv (\hat{A}[\varkappa_1(.); v_1(.), \bar{x}_1, \varrho_1])(t), \qquad t \in [0,1]. \tag{43}$$

Пользуясь тождествами (43) и представлениями (34), (35) получим, что для любого $t \in [0,1]$ справедлива цепочка неравенств

$$\begin{gathered}
\|\varkappa(t)-\varkappa_1(t)\|_{\infty\mu} = \|(\hat{A}[\varkappa(.);v(.),\bar{x},\varrho])(t)-(\hat{A}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(t)\|_{\infty\mu} \le \\
\le \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}\{(A[\varkappa(.);v(.),\bar{x},\varrho])(1)-(A[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu}+ \\
+\|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\hat{\mathbb{S}}_{t_i\infty\mu}\ \rho_i-\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\hat{\mathbb{S}}_{t_i\infty\mu}\ \rho_{1i}\}\|_{\infty\mu}+ \\
+\|\tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}(\bar{x}-\bar{x}_1)\|_{\infty\mu}+\|(A[\varkappa(.);v(.),\bar{x},\varrho])(t)-(A[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(t)\|_{\infty\mu} \le \\
\le \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}P_B\{(A[\varkappa(.);v(.),\bar{x},\varrho])(1)-(A[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu}+ \\
+\|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}P_{\bar{B}}\{(A[\varkappa(.);v(.),\bar{x},\varrho])(1)-(A[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu}+ \\
+\|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\hat{\mathbb{S}}_{t_i\infty\mu}\ \rho_i-\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\hat{\mathbb{S}}_{t_i\infty\mu}\ \rho_{1i}\}\|_{\infty\mu}+ \\
+\|\tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}(\bar{x}-\bar{x}_1)\|_{\infty\mu}+\|(A[\varkappa(.);v(.),\bar{x},\varrho])(t)-(A[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(t)\|_{\infty\mu}. \qquad (44)
\end{gathered}$$

Используя представление (34), оценку (17) для оператора $S_{i\infty\mu}P_B$, условие Липшица (13) для отображения $P_BG_{\infty\mu}$ и свойства $P_B^2=P_B, \qquad P_{\bar{B}}^2=P_{\bar{B}}$ для операторов проектирования, первое, второе и третье слагаемые в правой части неравенства (44) можно оценить следующим образом

$$\begin{gathered}
\|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}P_B\{(A[\varkappa(.);v(.),\bar{x},\varrho])(1)-(A[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \le \\
\le |||\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}P_B|||_{\infty\mu}\|P_B\{(A[\varkappa(.);v(.),\bar{x},\varrho])(1)-(A[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \le \\
\le \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t},B)\int_0^1\|P_BG_{\infty\mu}(\tau,\varkappa(\tau))-P_BG_{\infty\mu}(\tau,\varkappa_1(\tau))\|_{\infty\mu}d\tau \le \\
\le \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t},B)M_2\eta_\mu(B)\int_0^1\|\varkappa(\tau)-\varkappa_1(\tau)\|_{\infty\mu}d\tau \le \\
\le M_2\eta_\mu(B)\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t},B)\|\varkappa(.)-\varkappa_1(.)\|_{\infty\mu C(0)}, \qquad (45)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}P_{\bar{B}}\{(A[\varkappa(.);v(.),\bar{x},\varrho])(1)-(A[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \le \\
\le |||\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}P_{\bar{B}}|||_{\infty\mu}\|P_{\bar{B}}\{(A[\varkappa(.);v(.),\bar{x},\varrho])(1)-(A[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \le \\
\le \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t},\bar{B})\int_0^1\|P_{\bar{B}}v(\tau)-P_{\bar{B}}v_1(\tau)\|_{\infty\mu}d\tau \le \\
\le \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t},\bar{B})\sup_{t\in[0,1]}\mathrm{v}rai\|v(t)-v_1(t)\|_{\infty\mu} \le \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t},\bar{B})\|v(.)-v_1(.)\|_{\infty\mu L_\infty}, \qquad (46)
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu}\ \rho_i-\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\hat{\mathbb{S}}_{\bar{t}_i\infty\mu}\ \rho_{1i}\}\|_{\infty\mu} \le |||\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}|||_{\infty\mu}\|\varrho-\varrho_1\|_{\infty\mu\Gamma} \le \\
\le \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t},\mathbb{Z})\|\varrho-\varrho_1\|_{\infty\mu\Gamma} \qquad (47)
\end{gathered}$$

Так как $\|\|\|\tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}\|\|\|_{\infty\mu} = 1$, то четвертое слагаемое в правой части неравенства (44) можно оценить следующим образом

$$\|\tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}(\bar{x}-\bar{x}_1)\|_{\infty\mu} \leq \|\|\|\tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}\|\|\|_{\infty\mu}\|\bar{x}-\bar{x}_1\|_{R^n} = \|\bar{x}-\bar{x}_1\|_{R^n}. \tag{48}$$

По аналогии с предыдущими оценками, для любого $t \in [0,1]$ получим

$$\begin{gathered}\|(A[\varkappa(.);v(.),\bar{x},\varrho])(t)-(A[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(t)\|_{\infty\mu} \leq \\ \leq \int_0^t \|P_B G_{\infty\mu}(\tau,\varkappa(\tau)) - P_B G_{\infty\mu}(\tau,\varkappa_1(\tau)\|_{\infty\mu} d\tau + \int_0^t \|P_{\bar{B}} v(\tau) - P_{\bar{B}} v_1(\tau)\|_{\infty\mu} d\tau \leq \\ \leq M_2\eta_\mu(B)\int_0^t \|\varkappa(\tau)-\varkappa_1(\tau)\|_{\infty\mu} d\tau + \sup_{\tau\in[0,1]} \mathrm{v}rai\|v(\tau)-v_1(\tau)\|_{\infty\mu}\ t \leq \\ \leq M_2\eta_\mu(B)\|\varkappa(.)-\varkappa_1(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}}\ t + \sup_{\tau\in[0,1]} \mathrm{v}rai\|v(\tau)-v_1(\tau)\|_{\infty\mu} \leq \\ \leq M_2\eta_\mu(B)\|\varkappa(.)-\varkappa_1(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}} + \|v(.)-v_1(.)\|_{\infty\mu L_\infty}. \end{gathered} \tag{49}$$

Используя оценки (45)–(49), из неравенства (44) получим, что для любого $t \in [0,1]$

$$\begin{gathered}\|\varkappa(t)-\varkappa_1(t)\|_{\infty\mu} \leq M_2\eta_\mu(B)[\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t},B)+1]\ \|\varkappa(.)-\varkappa_1(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}} + \\ +[\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t},\bar{B})+1]\ \|v(.)-v_1(.)\|_{\infty\mu L_\infty} + \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t},\mathbb{Z})\|\varrho-\varrho_1\|_{\infty\mu\Gamma} + \|\bar{x}-\bar{x}_1\|_{R^n}.\end{gathered} \tag{50}$$

В неравенстве (50), взяв максимум левой части по $t \in [0,1]$ и сгруппировав однородные члены, получим окончательную оценку

$$\begin{gathered}\{1-M_2\eta_\mu(B)[\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t},B)+1]\}\ \|\varkappa(.)-\varkappa_1(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}} \leq \\ \leq [\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t},\bar{B})+1]\ \|v(.)-v_1(.)\|_{\infty\mu L_\infty} + \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t},\mathbb{Z})\|\varrho-\varrho_1\|_{\infty\mu\Gamma} + \|\bar{x}-\bar{x}_1\|_{R^n}.\end{gathered} \tag{51}$$

В силу неравенства (42), коэффициент $\{1-M_2\eta_\mu(B)[\mathcal{J}_{\infty\mu}(i,B)+1]\}$ является положительным числом. Поэтому утверждение теоремы и будет следовать из неравенства (51).

Перейдем к доказательству непрерывной зависимости решения от $\bar{x}$, $v(.)$, $\varrho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}$ и $g(.)$. Операторы A и $\hat{A}$ по формулам (34), (35) определялись через отображения $P_B G_{\infty\mu}$, которые в свою очередь определялись функцией $g(.)$. Чтобы указать зависимость операторов A, $\hat{A}$ от функции $g(.)$ будем писать их с индексами A_g, $\hat{A}_g$. Пусть заданы $v(.), v_1(.) \in L_\infty([0,1],K^n_{\infty\mu})$, интегрируемые по Бохнеру, вектора $\bar{x},\bar{x}_1 \in R^n$, $\varrho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\varrho_1 = \{\rho_{1i}\}_{-\infty}^{+\infty}$, удовлетворяющие условиям

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n}\mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty, \quad \sup_{i\in\mathbb{Z}} \|\rho_{1i}\|_{\mathbb{R}^n}\mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty,$$

и функции $g(.), \tilde{g}(.) \in V_{\mu^*}(R\times R^{ns}, R^n)$. По теореме 1 существуют вектор-функции $\varkappa(.), \varkappa_1(.) \in C^{(0)}([0,1],K^n_{\infty\mu})$, удовлетворяющие тождествам

$$\varkappa(t) \equiv (\hat{A}_g[\varkappa(.);v(.),\bar{x},\varrho])(t), \qquad \varkappa_1(t) \equiv (\hat{A}_{\tilde{g}}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(t), \qquad t\in[0,1]. \tag{52}$$

Для любого $t \in [0,1]$ из тождеств (52) следует очевидное неравенство

$$\begin{aligned} \|\varkappa(t)-\varkappa_1(t)\|_{\infty\mu} = \|(\hat{A}_g[\varkappa(.);v(.),\bar{x},\rho])(t)-(\hat{A}_{\tilde{g}}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\rho_1])(t)\|_{\infty\mu} \leq \\ \leq \|(\hat{A}_g[\varkappa(.);v(.),\bar{x},\rho])(t)-(\hat{A}_g[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\rho_1])(t)\|_{\infty\mu}+ \\ +\|(\hat{A}_g[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\rho_1])(t)-(\hat{A}_{\tilde{g}}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\rho_1])(t)\|_{\infty\mu}. \end{aligned} \tag{53}$$

В силу неравенств (44)–(50), первое слагаемое в правой части неравенства (53) оценивается правой частью неравенства (50).

Используя представления (34)–(35), оценим второе слагаемое в правой части неравенства (53)

$$\begin{aligned} \|(\hat{A}_g[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(t)-(\hat{A}_{\tilde{g}}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(t)\|_{\infty\mu} \leq \\ \leq \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}\{(A_g[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(1)-(A_{\tilde{g}}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu}+ \\ +\|(A_g[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(t)-(A_{\tilde{g}}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(t)\|_{\infty\mu} \leq \\ \leq \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}P_B\{(A_g[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(1)-(A_{\tilde{g}}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu}+ \\ +\|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}P_{\bar{B}}\{(A_g[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(1)-(A_{\tilde{g}}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu}+ \\ +\|(A_g[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(t)-(A_{\tilde{g}}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(t)\|_{\infty\mu}. \end{aligned} \tag{54}$$

Второе слагаемое в правой части неравенства (54) равно нулю. Пользуясь представлением (34), оценкой (17) для оператора $S_{i\infty\mu}P_B$, оценкой (13) для отображения $P_BG_{\infty\mu}$ и свойствами $P_B^2 = P_B \qquad P_{\bar{B}}^2 = P_{\bar{B}}$ для операторов проектирования, первое и третье слагаемые в правой части неравенства (54) можно оценить следующим образом

$$\begin{aligned} \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}P_B\{(A_g[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(1)-(A_{\tilde{g}}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \leq \\ \leq |||\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}P_B|||_{\infty\mu}\|P_B\{(A_g[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(1)-(A_{\tilde{g}}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \leq \\ \leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t},B)\int_0^1 \|P_BG_{\infty\mu}(\tau,\varkappa_1(\tau))-P_B\tilde{G}_{\infty\mu}(\tau,\varkappa_1(\tau))\|_{\infty\mu}d\tau \leq \\ \leq \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t},B)\|g(.)-\tilde{g}(.)\|_{L_{ip}}\left\{\max[(\mu^*)^{-|t|},\,(\mu^*)^{|t|}]+\eta_\mu(B)\ \|\varkappa_1(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}}\right\}, \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} \|(A_g[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(t)-(A_{\tilde{g}}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(t)\|_{\infty\mu} = \\ = \|P_B\{(A_g[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(t)-(A_{\tilde{g}}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar{x}_1,\varrho_1])(t)\}\|_{\infty\mu} \leq \\ \leq \int_0^t \|P_BG_{\infty\mu}(\tau,\varkappa_1(\tau))-P_B\tilde{G}_{\infty\mu}(\tau,\varkappa_1(\tau))\|_{\infty\mu}d\tau \leq \\ \leq \|g(.)-\tilde{g}(.)\|_{L_{ip}}\left\{\max[(\mu^*)^{-|t|},\,(\mu^*)^{|t|}]+\eta_\mu(B)\ \|\varkappa_1(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}}\right\}. \end{aligned} \tag{56}$$

В силу приведенных оценок, окончательно получим, что для любого $t \in [0,1]$

$$\|\varkappa(t)-\varkappa_1(t)\|_{\infty\mu} \le M_2\eta_\mu(B)[\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar t,B)+1]\ \|\varkappa(.)-\varkappa_1(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}}+$$
$$+[\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar t,\bar B)+1]\ \|v(.)-v_1(.)\|_{\infty\mu L_\infty}+\|\bar x-\bar x_1\|_{R^n}+$$
$$+[\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar t,B)+1]\left\{\max[(\mu^*)^{-|t|},\ (\mu^*)^{|t|}]+\eta_\mu(B)\|\varkappa_1(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}}\right\}\|g(.)-\tilde g(.)\|_{L_{ip}}. \qquad (57)$$

В неравенстве (57), взяв максимум левой части по $t \in [0,1]$ и сгруппировав однородные члены, получим

$$\{1-M_2\eta_\mu(B)[\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar t,B)+1]\}\ \|\varkappa(.)-\varkappa_1(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}} \le$$
$$\le [\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar t,\bar B)+1]\ \|v(.)-v_1(.)\|_{\infty\mu L_\infty}+\|\bar x-\bar x_1\|_{R^n}+ \qquad (58)$$
$$+[\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar t,B)+1]\left\{\max[(\mu^*)^{-|t|},\ (\mu^*)^{|t|}]+\eta_\mu(B)\ \|\varkappa_1(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}}\right\}\|g(.)-\tilde g(.)\|_{L_{ip}}.$$

В силу неравенства (42), коэффициент $\{1-M_2\eta_\mu(B)[\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar t,B)+1]\}$ является положительным числом. Поэтому утверждение теоремы и будет следовать из неравенства (58), если мы покажем, что для $(v_1(.),\bar x_1,\varrho_1,\tilde g(.))$, принадлежащих достаточно малой окрестности точки $(v(.),\bar x,\varrho,\tilde g(.))$, соответствующие решения $\varkappa_1(.)$ в норме $\|.\|_{\infty\mu C^{(0)}}$ будут равномерно ограничены.

Из второго тождества (52) следует, что для любого $t \in [0,1]$

$$\|\varkappa_1(t)\|_{\infty\mu}=\|(\hat A_{\tilde g}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar x_1,\varrho_1])(t)\|_{\infty\mu} \le \|\mathbb{S}_{\bar t\infty\mu}P_B\{(A_{\tilde g}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar x_1,\varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu}+$$
$$+\|\mathbb{S}_{\bar t\infty\mu}P_{\bar B}\{(A_{\tilde g}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar x_1,\varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu}+\|\mathbb{S}_{\bar t\infty\mu}\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\hat{\mathbb{S}}_{\bar t_i\infty\mu}\ \rho_{1i}\}\|_{\infty\mu}+$$
$$+\|\tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}\bar x_1\|_{\infty\mu}+\|(A_{\tilde g}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar x_1,\varrho_1])(t)\|_{\infty\mu}.$$

Пользуясь представлением (34), оценкой (17) для нормы оператора $S_{i\infty\mu}P_B$, оценками (12), (13) для отображения $P_BG_{\infty\mu}$ и свойствами $P_B^2=P_B \qquad P_{\bar B}^2=P_{\bar B}$ для операторов проектирования, первое и пятое слагаемые в правой части неравенства можно оценить следующим образом

$$\|\mathbb{S}_{\bar t\infty\mu}P_B\{(A_{\tilde g}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar x_1,\varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \le \|\mathbb{S}_{\bar t\infty\mu}P_B\|\|P_B\{(A_{\tilde g}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar x_1,\varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \le$$
$$\le \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar t,B)\int_0^1\|P_B\tilde G_{\infty\mu}(\tau,\varkappa_1(\tau))\|_{\infty\mu}d\tau \le \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar t,B)[\int_0^1\|P_B\tilde G_{\infty\mu}(\tau,\varkappa_1(\tau))-P_B\tilde G_{\infty\mu}(\tau,0)\|_{\infty\mu}d\tau+$$
$$+\int_0^1\|P_B\tilde G_{\infty\mu}(\tau,0)\|_{\infty\mu}d\tau] \le \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar t,B)[\tilde M_2\eta_\mu(B)\ \|\varkappa_1(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}}+\sup_{0\le\tau\le1}\ \tilde M_{0\infty\mu}(\tau)],$$

$$\|(A_{\tilde g}[\varkappa_1(.);v_1(.),\bar x_1,\varrho_1])(t)\|_{\infty\mu} \le \int_0^t\|P_B\tilde G_{\infty\mu}(\tau,\varkappa_1(\tau))\|_{\infty\mu}d\tau+\int_0^t\|P_{\bar B}v_1(\tau)\|_{\infty\mu}d\tau \le$$
$$\le [\tilde M_2\eta_\mu(B)\ \|\varkappa_1(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}}+\sup_{0\le\tau\le1}\ \tilde M_{0\infty\mu}(\tau)]+\|v_1(.)\|_{\infty\mu L_\infty}.$$

Второе, третье и четвертое слагаемые оцениваются следующим образом

$$\|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_{\bar{B}}\{(A_{\tilde{g}}[\varkappa_1(.); v_1(.), \bar{x}_1, \varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \le \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu} P_{\bar{B}}\| \|P_{\bar{B}}\{(A_{\tilde{g}}[\varkappa_1(.); v_1(.), \bar{x}_1, \varrho_1])(1)\}\|_{\infty\mu} \le$$

$$\le \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \bar{B}) \int_0^1 \|P_{\bar{B}} v_1(\tau)\|_{\infty\mu} d\tau \le \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \bar{B}) \|v_1(.)\|_{\infty\mu L_\infty},$$

$$\|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbb{S}}_{t_i\infty\mu}\ \rho_{1i}\}\}\|_{\infty\mu} \le \|\mathbb{S}_{\bar{t}\infty\mu}\| \|\varrho_1\|_{\infty\mu\Gamma} \le \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \mathbb{Z}) \|\varrho_1\|_{\infty\mu\Gamma},$$

$$\|\tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu} \bar{x}_1\|_{\infty\mu} \le \|\tilde{\mathbb{S}}_{\infty\mu}\| \|\bar{x}_1\|_{\mathbb{R}^n} \le \|\bar{x}_1\|_{\mathbb{R}^n}.$$

Используя полученные оценки, мы можем выписать оценку для вектор-функции $\varkappa_1(.)$

$$\|\varkappa_1(t)\|_{\infty\mu} \le [\mathcal{J}_{\infty\mu}(i, B) + 1] \tilde{M}_2 \eta_\mu(B)\ \|\varkappa_1(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}} + [\mathcal{J}_{\infty\mu}(i, B) + 1] \sup_{0 \le \tau \le 1} \tilde{M}_{0\infty\mu}(\tau) +$$

$$+ [\mathcal{J}_{\infty\mu}(i, \bar{B}) + 1] \|v_1(.)\|_{\infty\mu L_\infty} + \|\bar{x}_1\|_{\mathbb{R}^n} + \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \mathbb{Z}) \|\varrho_1\|_{\infty\mu\Gamma}.$$

Взяв максимум левой части по $t \in [0, 1]$ и сгруппировав однородные члены, получим

$$\{1 - \tilde{M}_2 \eta_\mu(B) [\mathcal{J}_{\infty\mu}(i, B) + 1]\} \|\varkappa_1(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}} \le [\mathcal{J}_{\infty\mu}(i, B) + 1] \sup_{0 \le \tau \le 1} \tilde{M}_{0\infty\mu}(\tau) +$$

$$+ [\mathcal{J}_{\infty\mu}(i, \bar{B}) + 1] \|v_1(.)\|_{\infty\mu L_\infty} + \|\bar{x}_1\|_{\mathbb{R}^n} + \mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{t}, \mathbb{Z}) \|\varrho_1\|_{\infty\mu\Gamma}.$$

Так как $(v_1(.), \bar{x}_1, \varrho_1, \tilde{g}(.))$ из малой окрестности точки $(v(.), \bar{x}, \varrho, g(.))$, то коэффициент

$$\{1 - \tilde{M}_2 \eta_\mu(B) [\mathcal{J}_{\infty\mu}(i, B) + 1]\} \|\varkappa_1(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}}$$

будет положительным и равномерно ограниченным снизу некоторой положительной величиной, а положительные величины

$$\sup_{0 \le \tau \le 1} \tilde{M}_{0\infty\mu}(\tau), \qquad \|v_1(.)\|_{\infty\mu L_\infty}, \qquad \|\bar{x}_1\|_{\mathbb{R}^n}, \qquad \|\varrho_1\|_{\infty\mu\Gamma}$$

также равномерно ограниченными сверху. В таком случае, положительные величины $\|\varkappa_1(.)\|_{\infty\mu C^{(0)}}$ также будут равномерно ограниченными сверху. □

2.1 Случай произвольных концов интервала B_R, начального момента $\bar{t}$ и множества Γ– точек разрыва решений.

Как отмечалось в начале раздела, мы должны с помощью замены времени свести к случаю с целочисленными концами интервала B_R. Для этого установим ряд утверждений.

Определение 9. *Гомеоморфизмы прямой $q_j(.)$, $\quad j = 1, \ldots, s$, $\quad k$–сопряжены ($k = 0, 1, \ldots$) гомеоморфизмам ${}_*q_j(.)$, $\quad j = 1, \ldots, s$, если найдется диффеоморфизм $\sigma_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ класса $C^{(k)}$ такой, что для всякого $j = 1, \ldots, s$ диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{{}_*q_j} & \mathbb{R} \\ \uparrow{\scriptstyle \sigma_k} & & \uparrow{\scriptstyle \sigma_k} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{q_j} & \mathbb{R} \end{array}$$

коммутативна, т.е. $\sigma_k \circ q_j = {}_*q_j \circ \sigma_k$, $\quad j = 1, \ldots, s$. ■

Приведем лемму о замене времени типа "квазирастяжение" , которая была доказана в работе [1] см.(глава 3, лемма 2.1).

Лемма 1. *Пусть заданы: семейство сдвигов* $q_j(t) = t + n_j$, $q_{jk}(t) = t + kn_j$, $n_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, s$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $t_0,\ t_1,\ \bar{t} \in \mathbb{R}$; *множество* $\Gamma = \{\bar{t}_i :\ \bar{t}_i \in \mathbb{R},\ i \in \mathbb{Z}\}$, *состоящее из объединения конечного числа орбит группы сдвигов* $Q =< t + n_1, \ldots, t + n_s >$. *Для каждого* k, *начиная с некоторого достаточно большого натурального числа, найдется сохраняющий ориентацию диффеоморфизм* $\sigma_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *класса* $C^{(1)}$ *такой, что сдвиги* $q_{jk}(.)$, $j = 1, \ldots s$ *будут 1–сопряжены сдвигам* $q_j(.)$, $j = 1, \ldots, s$, *значения* $\sigma_k^{-1}(t_0)$, $\sigma_k^{-1}(t_1)$, $\sigma_k^{-1}(\bar{t})$, $\sigma_k^{-1}(\bar{t}_i)$, $\bar{t}_i \in \Gamma$, $i \in \mathbb{Z}$ *целые, а последовательность* $k\bar{\nu}_k$, $k\underline{\nu}_k$, *где* $\bar{\nu}_k = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \dot{\sigma}_k(t)$, $\underline{\nu}_k = \inf\limits_{t \in \mathbb{R}} \dot{\sigma}_k(t)$, *при* $k \to \infty$ *стремится к 1. При этом, диффеоморфизм* $\sigma_k(.)$ *перестановочен со сдвигом* $\bar{q}_k(t) = t + k\bar{n}$, $\bar{n} =$ *НОД* $\{n_1, \ldots, n_s\}$, *т.е.* $\sigma_k \circ \bar{q}_k = \bar{q}_k \circ \sigma_k$.

Доказательство. Так как множество Γ состоит из объединения конечного числа орбит, то требование о целочисленности точек $\sigma_k^{-1}(\bar{t}_i)$, $\bar{t}_i \in \Gamma$, $i \in \mathbb{Z}$ достаточно потребовать лишь для конечного числа точек, по одному из каждой орбиты. Тогда все утверждения кроме последнего совпадают с утверждениями, полученными в работе [1] см.(глава 3, лемма 2.1). Последнее утверждение о перестановочности следует из построения диффеоморфизма σ_k, приведенного там же. □

Наряду с основной начально-краевой задачей (3)-(6), при каждом $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим вспомогательную начально-краевую задачу, полученную с помощью замены времени типа "квазирастяжения"из предыдущей леммы

$$\dot{x}_k(\tau) = \dot{\sigma}_k(\tau) g_k(\tau, x(\tau + kn_1), \cdots, x(\tau + kn_s)), \qquad \tau \in B_{kR}, \quad n_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \ldots, s \tag{59}$$

$$\dot{x}_k(\tau) = \dot{\sigma}_k(\tau) \varphi_k(\tau), \qquad \tau \in \mathbb{R} \backslash B_{kR}, \quad \varphi_k(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \tag{60}$$

$$x_k(\bar{\tau}_k) = \bar{x}, \quad \bar{\tau}_k \in \mathbb{Z}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{61}$$

$$x_k(\tau_{ki} + 0) - x_k(\tau_{ki} - 0) = \varrho_i, \quad \tau_{ki} \in \mathbb{Z}, \quad \tau_{ki} < \tau_{k(i+1)}, \quad \varrho_i \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \mathbb{Z} \tag{62}$$

ри каждом $k = 1, 2, ...$ будем пользоваться обозначением $\Gamma_k = \{\tau_{ki} :\ \tau_{ki} \in \mathbb{Z}, \quad i \in \mathbb{Z}\}$.

При каждом достаточно большом $k \in \mathbb{Z}$ установим связь между решениями основной начально-краевой задачи (3)-(6) и вспомогательной начально-краевой задачи (59)-(62).

Предложение 3. *Пусть заданы*

$$\varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \mu \in (0, \mu^*) \cap (0, 1),$$
$$\rho_i \in \mathbb{R}^n, \quad \sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty$$

и $k \in \mathbb{Z}$ *достаточно большое. Если* $x(.) \in \mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma)$ *решение основной начально-краевой задачи* (3)-(6), *то функция* $x_k(\tau) = x(\sigma_k(\tau))$, $\tau \in \mathbb{R}$ *принадлежит пространству* $\mathcal{L}^n_{\mu_k} C^{(0)}(\mathbb{R}; \Gamma_k)$, $\Gamma_k = \sigma_k^{-1}(\Gamma)$, $\mu_k = \sqrt[k]{\mu}$ *и является решением вспомогательной* *начально-краевой задачи* (59)-(62), *в которой*

$$\varphi_k(\tau)=\varphi(\sigma_k(\tau)),\quad \tau\in\mathbb{R},\qquad \varphi_k(.)\in L_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n),\quad B_{kR}=\sigma_k^{-1}(B_R),$$
$$\bar\tau_k=\sigma_k^{-1}(\bar t),\quad \tau_k\in\mathbb{Z},\quad \tau_{ki}=\sigma_k^{-1}(\bar t_i),\quad \tau_{ki}\in\mathbb{Z},\quad i\in\mathbb{Z},\quad \sup_{i\in\mathbb{Z}}\|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n}\mu_k^{|\tau_{ki}|}<+\infty$$

и граница B_{kR} *целочисленная.*

Пусть при достаточно большом $k\in\mathbb{Z}$ *заданы*

$$\varphi_k(.)\in L_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n),\quad \bar x\in\mathbb{R}^n,\quad \bar\tau_k\in\mathbb{Z},\quad \bar\tau_k=\sigma_k^{-1}(\bar t),\quad B_{kR}=\sigma_k^{-1}(B_R),\quad \mu_k\in(0,\sqrt[k]{\mu^*})\cap(0,1),$$
$$k\in\mathbb{Z}_+,\quad \tau_{ki}=\sigma_k^{-1}(\bar t_i),\quad \rho_i\in\mathbb{R}^n,\quad \bar t_i\in\Gamma,\quad i\in\mathbb{Z},\quad \sup_{i\in\mathbb{Z}}\|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n}\mu_k^{|\tau_{ki}|}<+\infty$$

и граница B_{kR} *целочисленная. Если* $x_k(.)\in\mathcal{L}^n_{\mu_k}C^{(0)}(\mathbb{R};\Gamma_k)$, $\Gamma_k=\sigma_k^{-1}(\Gamma)$ *решение вспомогательной начально-краевой задачи* (59)-(62), *то функция* $x(t)=x_k(\sigma_k^{-1}(t))$, $t\in\mathbb{R}$ *принадлежит пространству* $\mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R};\Gamma)$, $\mu=(\mu_k)^k$ *и является решением основной начально-краевой задачи* (3)-(6), *в которой*

$$\varphi(t)=\varphi_k(\sigma_k^{-1}(t)),\quad t\in\mathbb{R},\quad \varphi(.)\in L_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n),\quad \sup_{i\in\mathbb{Z}}\|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n}\mu^{|\bar t_i|}<+\infty.$$

Доказательство. Для этого достаточно в основной начально-краевой задаче (3)-(6) произвести замену времени $t=\sigma_k(\tau)$. □

Доказательство теоремы А. В силу предложения 3, для существования решения $x(.)\in\mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R};\Gamma)$, $\mu\in(0,\mu^*)\cap(0,1)$ основной начально-краевой задачи (3)-(6), достаточно показать существование решения $x_k(.)\in\mathcal{L}^n_{\mu_k}C^{(0)}(\mathbb{R};\Gamma_k)$, $\mu_k=\sqrt[k]{\mu}$ вспомогательной начально-краевой задачи (59)-(62) при каком-либо достаточно большом $k\in\mathbb{Z}$.

По теоремам 1 и 2, для этого достаточно, чтобы при заданном достаточно большом $k\in\mathbb{Z}$ для вспомогательной начально-краевой задачи (59)-(62) выполнялось неравенство

$$M_{k2}\eta_{k\mu_k}(B_k)[\mathcal{J}_{\infty\mu_k}(\bar\tau_k,B_k)+1]<1. \tag{63}$$

Несложно заметить, что для такой вспомогательной начально-краевой задачи $M_{k2}=\overline{\nu}_kM_2$, множество B_k определяется множеством B_{kR} по процедуре, описанном в начале данного параграфа. В силу формулы (14), выражение для $\eta_{k\mu_k}(B_k)$ имеет следующий вид

$$\eta_{k\mu_k}(B_k)=\sum_{j=1}^{s}\max[\mu_k^{kn_j}\gamma(B_k\cap(-\infty,-kn_j),\ \mu_k^{-kn_j}\gamma(B_k\cap[-kn_j,+\infty\,))]. \tag{64}$$

По формуле (18) имеет место оценка

$$\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar\tau_k,B_k)\le[1-\mu]^{-1}.$$

Тогда для справедливости неравенства (63) достаточно выполнение следующего неравенства

$$\overline{\nu}_kM_2\left\{\sum_{j=1}^{s}\mu_k^{k|n_j|}\right\}\left\{[1-\mu_k]^{-1}+1\right\}<1.$$

Подставив значение $\mu_k = (\mu)^{1/k}$ в последнее неравенство получим

$$\overline{\nu}_k M_2 \left\{ \sum_{j=1}^{s} \mu^{|n_j|} \right\} \left\{ [1 - (\mu)^{1/k}]^{-1} + 1 \right\} < 1. \tag{65}$$

Так как $\lim_{k\to\infty} \overline{\nu}_k k^{-1} = 1$, а по правилу Лопиталя

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1} \left\{ [1 - (\mu)^{1/k}]^{-1} + 1 \right\} = [\ln \mu^{-1}]^{-1},$$

то неравенство

$$M_2 \left\{ \sum_{j=1}^{s} \mu^{|n_j|} \right\} < \ln \mu^{-1}$$

гарантирует справедливость неравенства (63) начиная с некоторого достаточно большом k. ■

Доказательство замечания 2. Пусть правая часть ФДУ имеет разрывы первого рода в дискретном множестве точек. Очевидно, что дискретное множество содержится в объединении орбит группы $Q =< t + n_1, \dots, t + n_s >$ для конечного числа точек. Тогда по лемме 1 можно найти такую замену времени, что точки разрыва правой части будут целочисленными. Для такого уравнения, весь формализм, который мы используем остается справедливым см([1]; глава 2, замечание 3.3).

Доказательство теоремы A′. Не нарушая общности, мы можем считать, что $B_k \cap (-\infty, -kn_j) = \emptyset$ (достаточно провести замену времени типа сдвиг). Тогда из (64) следует, что

$$\eta_{k\mu_k}(B_k) = \sum_{j=1}^{s} \mu_k^{-kn_j}.$$

По неравенству (19)

$$\mathcal{J}_{\infty\mu}(\bar{\tau}_k, B_k) \le \mu_k [1 - \mu_k]^{-1}.$$

Подставив в неравенство (63) и использовав подстановку $\mu_k = (\mu)^{1/k}$, получим

$$\overline{\nu}_k M_2 \left\{ \sum_{j=1}^{s} \mu^{-n_j} \right\} [1 - (\mu)^{1/k}]^{-1} < 1.$$

Так как $\lim_{k\to\infty} \overline{\nu}_k k^{-1} = 1$, а по правилу Лопиталя

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1} [1 - (\mu)^{1/k}]^{-1} = [\ln \mu^{-1}]^{-1},$$

то неравенство

$$M_2 \left\{ \sum_{j=1}^{s} \mu^{-n_j} \right\} < \ln \mu^{-1},$$

гарантирует справедливость неравенства (63) начиная с некоторого достаточно большом k, что и доказывает теорему.■

§3. О соответствиях между решениями типа бегущей волны бесконечномерных динамических систем и классическими решениями функционально-дифференциальных уравнений точечного типа

Мы будем изучать бесконечномерную динамическую систему

$$\dot{\varkappa} = \mathbb{G}(t, \varkappa), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{66}$$

Здесь оператор $\mathbb{G} : \mathbb{R} \times K^n \longrightarrow K^n$ непрерывен по совокупности аргументом, хотя допускается кусочная непрерывность по переменной t на дискретном множестве точек. Дифференциальное уравнение понимается в слабом смысле и в уравнении производная понимается как покоординатное дифференцирование. Очевидно, что бесконечномерная система дифференциальных уравнений (1) может быть записана в виде бесконечномерного уравнения (66). Для этого следует рассмотреть пространство K^2 с элементами $\varkappa = \{(u_i,\, v_i)'\}_{-\infty}^{+\infty}$ (где $'$ означает транспонирование), провести переобозначение $y_i = u_i,\ v_i = \dot{y}_i,\ i \in \mathbb{Z}$ и определить оператор $\mathbb{G}$ по следующему правилу: для любого вектора $\varkappa \in K^n$ и любой координаты $i \in \mathbb{Z}$ координата $(\mathbb{G}(\varkappa))_i$ образа оператора $\mathbb{G}$ имеет представление

$$(\mathbb{G}(\varkappa))_i = (v_i,\ m_i^{-1}[\phi(u_i) + u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}])'. \tag{67}$$

В пространстве K^n определим оператор сдвига T, действующий по правилу: для любого вектора $\varkappa \in K^n$, $\varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}$ и любого $i \in \mathbb{Z}$ имеет место представление $(T\varkappa)_i = x_{i+1}$.

Мы видим, что изучение решений бесконечномерной системы (1) эквивалентно изучению задачи Коши для уравнения (66), а решения $\varkappa(\cdot)$ бесконечномерной системы (1) типа бегущей волны с характеристикой τ это те решения, которые удовлетворяют линейному нелокальному ограничению

$$\varkappa(t+\tau) = T\varkappa(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{68}$$

В дальнейшем, изучение решений типа бегущей волны с характеристикой τ для бесконечномерного дифференциального уравнения (66) с помощью замены времени сведем к изучению решений типа бегущей волны с характеристикой 1 для однопараметрического семейства бесконечномерных дифференциальных уравнений

$$\dot{\varkappa}_\tau = \tau\mathbb{G}_\tau(t, \varkappa_\tau), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{69}$$

удовлетворяющие линейному нелокальному ограничению

$$\varkappa_\tau(t+1) = T\varkappa_\tau(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{70}$$

Правые части уравнений (66) и (69), а также их решения, связаны соотношениями

$$\mathbb{G}_\tau(t, \varkappa) = \mathbb{G}(\tau t, \varkappa), \qquad \varkappa \in K^n, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{71}$$

$$\varkappa_\tau(t) = \varkappa(\tau t), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{72}$$

Так как исходное пространство $\varkappa \in K^n$ всего лишь метризуемо, то возможности изучения бесконечномерного уравнения (69) ограничены. Следует отказаться от изучения всего пространства решений уравнения (69) и перейти к изучению более узкого и очень важного класса решений, которые в каждый момент t принадлежат фазовому пространству $K^n_{2\mu}, \quad \mu \in (0,1),$ являющемуся однопараметрическим семейством гильбертовых подпространств.

В дальнейшем, ограничение оператора $\mathbb{G}$ $(\mathbb{G}_\tau)$ на подпространство $\mathbb{R} \times K^n_{2\mu}$ и оператора T на подпространство $K^n_{2\mu}$ будем обозначать с индексами 2μ.

Мы будем в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R} \times K^n_{2\mu}$ изучать решения системы

$$\dot{\varkappa}_\tau = \tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \varkappa_\tau), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{73}$$

$$\varkappa_\tau(t+1) = T_{2\mu} \varkappa_\tau(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{74}$$

то есть решения бесконечномерного дифференциального уравнения (73) типа бегущей волны с характеристикой 1. В дифференциальном уравнении (73) в левой части под производной понимается производная по Фреше. Будем полагать, что оператор $\tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}$ непрерывен по совокупности переменных $(t, \varkappa)$ и удовлетворяет условию квазилинейного роста и условию Липщица по второй переменной: для любых $\varkappa, \overline{\varkappa} \in K^n, \qquad t \in \mathbb{R}$

$$\|\tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \varkappa)\|_{p\mu} \le M_{0\tau 2\mu}(t) + M_{1\tau 2\mu} \|\varkappa\|_{2\mu}, \tag{75}$$

$$\|\tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \varkappa) - \tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \overline{\varkappa})\|_{p\mu} \le M_{2\tau 2\mu} \|\varkappa - \overline{\varkappa}\|_{2\mu}, \tag{76}$$

где $M_{0\tau 2\mu}(t)$ непрерывная функция, а $M_{1\tau 2\mu},\ M_{2\tau 2\mu}$ константы. В действительности, отображение $\tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}$ по переменной t может быть и кусочно непрерывной, с разрывами первого рода в дискретном множестве точек. Решением уравнения (73) является сильно абсолютно непрерывная функция см.(определения 6, 7).

Наряду с бесконечномерным дифференциальным уравнением (73) и линейным нелокальным ограничением (74) рассмотрим их ограничение на интервал $[0,1]$ в виде следующей краевой задачи

$$\dot{\varkappa}_\tau = \tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \varkappa_\tau), \qquad t \in [0,1], \tag{77}$$

$$\varkappa_\tau(1) = T_{2\mu} \varkappa_\tau(0). \tag{78}$$

Установим связь между решениями системы (73)-(74) и краевой задачи (77)-(78).

Лемма 2. *Кривая $\varkappa_\tau(t), \quad t \in \mathbb{R}$ является решением типа бегущей волны с характеристикой 1 (решением системы* (73)-(74)*) тогда и только тогда, когда:*

(1) является решением краевой задачи (77)-(78)*;*

(2) для любого $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет нелокальному ограничению

$$\varkappa_\tau(t+1) = T_{2\mu} \varkappa_\tau(t); \tag{79}$$

(3) для любого $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет перестановочному соотношению

$$\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t+1, T_{2\mu}\varkappa_\tau(t)) = T_{2\mu}\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \varkappa_\tau(t)). \tag{80}$$

Доказательство. Пусть кривая $\varkappa_\tau(t)$, $t \in \mathbb{R}$ является решением системы (73)-(74). Очевидно, что такая кривая является решением краевой задачи (77)-(78) и удовлетворяет ограничению (79). Если продифференцировать левую и правую части тождества (79), использовать дифференциальное уравнение (73), которому удовлетворяет кривая $\varkappa_\tau(t)$, $t \in \mathbb{R}$, а также тождество (79), то мы и получим перестановочное соотношение (80).

Обратно. Пусть кривая $\varkappa_\tau(t)$, $t \in \mathbb{R}$ является решением краевой задачи (77)-(78), удовлетворяет тождеству (79) и перестановочному соотношению (80). Очевидно, что тождества (79) и (74) совпадают. Для $t \in [0,1]$ продифференцировав левую и правую части тождества (79) и используя уравнение (77) и тождество (79) получим цепочку соотношений

$$\dot{\varkappa}_\tau(t+1) = T_{2\mu}\dot{\varkappa}_\tau(t) = \tau T_{2\mu}\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \varkappa_\tau(t)) = \tau\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t+1, T_{2\mu}\varkappa_\tau(t)) = \tau\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t+1, \varkappa_\tau(t+1))$$

откуда и следует, что кривая $\varkappa_\tau(t)$ на интервале $[1,2]$ также удовлетворяет дифференциальному уравнению (73). Далее по индукции доказывается, что такая кривая удовлетворяет дифференциальному уравнению (73) при всех $t \in \mathbb{R}$. □

Очевидно, что ограничение на интервал $[0,1]$ всякого решения уравнения (73) типа бегущей волны с характеристикой 1 (решения системы (73)-(74))является решением краевой задачи (77)-(78). С другой стороны, из леммы 2 следует, что не всякое решение краевой задачи (77)-(78) является ограничением на интервал $[0,1]$ решения уравнения (73) типа бегущей волны с характеристикой 1 (решения системы (73)-(74)). Для этого нужно, чтобы решение краевой задачи (77)-(78), продолженное на все $\mathbb{R}$ в силу тождества (79), удовлетворяло перестановочному соотношению (80). Сформулируем одно простое предложение, в силу которого гарантируется взаимнооднозначное соответствие между решениями уравнения (73) типа бегущей волны с характеристикой 1 и решениями краевой задачи (77)-(78).

Предложение 4. *Пусть оператор $\mathbb{G}_{\tau 2\mu}$ удовлетворяет перестановочному соотношению*

$$\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t+1, T_{2\mu}\varkappa_\tau) = T_{2\mu}\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \varkappa_\tau) \qquad \varkappa_\tau \in K^n_{2\mu}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{81}$$

Тогда между решениями бесконечномерного дифференциального уравнения (73) *типа бегущей волны с характеристикой 1 (решениями системы* (73)-(74)*) и решениями краевой задачи* (77)-(78) *существует взаимнооднозначное соответствие, то есть каждое решение краевой задачи* (77)-(78) *может быть достроено до решения типа бегущей волны в силу соотношения* (79).

Доказательство. Оно непосредственно следует из леммы 2. □

Далее, мы установим соответствие между решениями бесконечномерного дифференциального уравнения (77) и индуцированного им функционально-дифференциального уравнения. Для этого потребуем выполнения дополнительных условий для оператора $\mathbb{G}$:

(1) существуют целые числа $n_1, ..., n_s \in \mathbb{Z}$ такие, что для любых $\varkappa \in K^n$, $\varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in \mathbb{R}$ и любой координаты $i \in \mathbb{Z}$ координата $(\mathbb{G}(t,\varkappa))_i$ имеет представление

$$(\mathbb{G}(t,\varkappa))_i = \eth_i(t,\varkappa) = g_i(t, x_{i+n_1}, ..., x_{i+n_s});$$

(2) функции $g_i(.)$, $i \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условиям (I)-(IV) из параграфа 1 с одними и теми же константами μ^*, M_1, M_2, а при каждом $i \in \mathbb{Z}$ функция $M_0(t)$ заменена функцией $M_0(t+i)$.

Для любого $\tau > 0$, в силу равенства (71), по оператору $\mathbb{G}$ определяется оператор $\mathbb{G}_\tau$. Для оператора $\tau\mathbb{G}_\tau$ также выполнены условия (1)-(2), в которых константы μ^*, M_1, M_2 следует заменить на константы $(\mu^*)^\tau$, τM_1, τM_2, а функцию $M_0(t)$ на функцию $M_{0\tau}(t) = M_0(\tau t)$. При таких условиях ограничение оператора $\tau\mathbb{G}_\tau$ на подпространство $\mathbb{R} \times K^n_{2\mu}$, $\mu \in (0, (\mu^*)^\tau) \cap (0, 1)$ действует непрерывно в пространство $K^n_{2\mu}$, обозначается через $\tau\mathbb{G}_{\tau 2\mu}$. Более того, такой оператор удовлетворяет условию квазилинейного роста (12) и условию Липщица (13) из параграфа 2 данной работы. Для такого оператора функцию $M_{02\mu}(t)$ и константы $M_{12\mu}$, $M_{22\mu}$ также определяются по формулам (16) и обозначаются с дополнительным индексом τ, т.е.

$$M_{0\tau 2\mu}(t),\ \ M_{1\tau 2\mu},\ \ M_{2\tau 2\mu}. \tag{82}$$

Условие квазилинейного роста (12), а также условие Липщица (13) остаются справедливыми и в случае кусочной непрерывности функций $g_i(.)$, $i \in \mathbb{Z}$ по переменной t в точках дискретного множества с разрывами первого рода. При этом оператор $\tau\mathbb{G}_{\tau p\mu}$ будет кусочно непрерывным по переменной t в точках дискретного множества с разрывами первого рода.

Для любого $\tau > 0$ по оператору $\mathbb{G}$ определим индуцированную функцию $g_\tau : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ по следующему правилу: для любых $i \in \mathbb{Z}$, $t \in [i, (i+1))$

$$g_\tau(t, z_1, ..., z_s) = g_i(\tau(t-i), z_1, ..., z_s). \tag{83}$$

Очевидно, что функция τg_τ также будет кусочно непрерывной по переменной t в точках дискретного множества с разрывами первого рода и будет удовлетворять условиям (I)-(IV) из параграфа 1 с константами $(\mu^*)^\tau$, τM_1, τM_2 вместо констант μ^*, M_1, M_2 и функцией $M_0(\tau t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Определим пространства

$$\mathcal{D}(\mathbb{R} \times K^n, K^n) = \{\mathbb{G} :\ \text{оператор } \mathbb{G} \text{ удовлетворяет условиям (1)-(2)}\},$$
$$\mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) = \{g :\ \text{функция } g \text{ удовлетворяет условиям (I)-(IV)}\}.$$

При заданном $\tau > 0$ определим отображения

$$\Omega_\tau : \mathcal{D}(\mathbb{R} \times K^n, K^n) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

где $\Omega_\tau(\mathbb{G}) = g_\tau$ и оператору $\mathbb{G}$ ставится в соответствие индуцированная функция g_τ, построенная по формуле (83).

Теперь определим отображение в обратном направлении

$$\Psi : \mathcal{C}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}\times K^n, K^n),$$

где $\Psi(g) = G$ и по функции g, как и выше, каноническим образом определяется оператор G по формуле (10). Там же было показано (формула (11)), что таким образом построенный оператор G удовлетворяет перестановочному соотношению

$$TG(t,\varkappa) = G(t+1,\,T\varkappa). \tag{84}$$

Для каждого $\tau > 0$ введем отображение

$$\Pi_\tau : \mathcal{D}(\mathbb{R}\times K^n, K^n) \longrightarrow \mathcal{D}(\mathbb{R}\times K^n, K^n),$$

где $\Pi_\tau(\mathbb{G}) = \mathbb{G}_\tau$ и определяется по формуле (71).

Всякому оператору $\mathbb{G}$ из пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}\times K^n, K^n)$ при каждом $\tau > 0$ соответствует оператор

$$G_\tau = \Psi\circ\Omega_\tau(\mathbb{G}) \tag{85}$$

этого же пространства, при этом

$$\Omega_\tau(\mathbb{G}) = \Omega_1(G_\tau) = g_\tau, \tag{86}$$

и в силу (84) выполняется перестановочное соотношение

$$TG_\tau(t,\varkappa) = G_\tau(t+1,\,T\varkappa), \qquad t\in\mathbb{R}, \quad \varkappa\in K^n. \tag{87}$$

Для отображений Ω_τ, Ψ, Π имеют место ряд утверждений.

Лемма 3. *Для любой функции $g\in\mathcal{C}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ справедливо равенство $\Omega_1\circ\Psi(g) = g$. Для любого оператора $\mathbb{G}\in\mathcal{D}(\mathbb{R}\times K^n, K^n)$ при каждом $\tau>0$ имеет место тождество*

$$\mathbb{G}_\tau(t,\varkappa) = G_\tau(t,\varkappa), \qquad (\text{ т.е. } \Pi_\tau(\mathbb{G})(t,\varkappa) = \Psi\circ\Omega_\tau(\mathbb{G})(t,\varkappa)\ ), \qquad t\in[0,1], \quad \varkappa\in K^n.$$

Более сильное равенство $\mathbb{G}_\tau = G_\tau$, $\quad$ (*т.е.* $\Pi_\tau(\mathbb{G}) = \Psi\circ\Omega_\tau(\mathbb{G})$), *то есть тождество*

$$\mathbb{G}_\tau(t,\varkappa) = G_\tau(t,\varkappa), \qquad (\text{ т.е. } \Pi_\tau(\mathbb{G})(t,\varkappa) = \Psi\circ\Omega_\tau(\mathbb{G})(t,\varkappa)\ ), \qquad t\in\mathbb{R}, \quad \varkappa\in K^n,$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполняется перестановочное соотношение

$$T\mathbb{G}_\tau(t,\varkappa) = \mathbb{G}_\tau(t+1,\,T\varkappa), \quad (\text{ т.е. } T\Pi_\tau(\mathbb{G})(t,\varkappa) = \Pi_\tau(\mathbb{G})(t+1,\,T\varkappa)\ ), \quad t\in\mathbb{R}, \quad \varkappa\in K^n. \tag{88}$$

Доказательство. Оно непосредственно следует из определения соответствующих отображений и может быть получено прямой проверкой. □

Из леммы 3 следует, что для оператора $\mathbb{G}_\tau$ перестановочное соотношение (88) выполняется тогда и только тогда, когда он принадлежит образу отображения Ψ, т.е. индуцируется некоторой функцией $g(.)$ по правилу (10).

Для операторе $\mathbb{G}$ при каждом $\tau > 0$ бесконечномерное дифференциальное уравнение (77), определенное на интервале [0,1], индуцирует функционально-дифференциальное уравнение

$$\dot{x}_\tau(t) = \tau g_\tau(t, x_\tau(t+n_1), ..., x_\tau(t+n_s)), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{89}$$

где функция g_τ определяется по правилу (83). Решением функционально-дифференциального уравнения (89) называется всякая абсолютно непрерывная функция, почти всюду удовлетворяющая данному уравнению.

Установим связь между решениями краевой задачи (77)-(78) и функционально-дифференциального уравнения (89). Далее будем полагать, что оператор $\mathbb{G}$ удовлетворяет условиям (1)-(2), приведенные выше.

Предложение 5. *Пусть $\tau > 0$. Если вектор-функция $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0,1]$, $\varkappa_\tau(.) \in C^{(0)}([0,1], K_{2\mu}^n)$, $\mu \in (0, (\mu^*)^\tau) \cap (0,1)$ является решением бесконечномерной краевой задачи* (77)-(78)*, то функция $x_\tau(t) = x_{\tau[t]}(t-[t])$, $t \in \mathbb{R}$ будет решением функционально-дифференциального уравнения* (89)*, при этом $x_\tau(.) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$. Описанное отображение из пространства $C^{(0)}([0,1], K_{2\mu}^n)$ в пространство $\mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ является непрерывным.*

Если $x_\tau(.) \in \mathcal{L}_{\mu'}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu' \in (0, (\mu^*)^\tau) \cap (0,1)$ решение функционально-дифференциального уравнения (89)*, то вектор-функция $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0,1]$, $x_{\tau i}(t) = x_\tau(t+i)$, $i \in \mathbb{Z}$ будет решением краевой задачи* (77)-(78) *для любого заданного $\mu < \mu'$ и, соответственно, $\varkappa_\tau(.) \in C^{(0)}([0,1], K_{2\mu}^n)$. Описанное отображение из пространства $\mathcal{L}_{\mu'}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ в пространство $C^{(0)}([0,1], K_{2\mu}^n)$ является непрерывным.*

Доказательство. Из определения функции $x_\tau(\cdot)$ и утверждения, полученного в работе [1] см.(глава 2 лемма 2.4) следует, что эта функция является абсолютно непрерывной на $\mathbb{R}$. В силу уравнения (77) такая функция будет удовлетворять функционально-дифференциальному уравнению (89). Из утверждений, полученных в работе [1] см.(глава 2 лемма 2.4, предложение 2.3), следует справедливость включения $x_\tau(.) \in \mathcal{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$. Последнее утверждение очевидно.

Обратное. Так как $x_\tau(\cdot) \in \mathcal{L}_{\mu'}^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ и является решением функционально-дифференциального уравнения (89), то семейство функций $(\mu')^{|i|} x_r(t+i)$, $t \in [0,1]$, $i \in \mathbb{Z}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно и для почти всех $t \in [0,1]$ семейство функций $(\mu')^{|i|} \dot{x}_r(t+i)$, $t \in [0,1]$, $i \in \mathbb{Z}$ равномерно ограниченно. Тогда (см.[1], глава 2 лемма 2.4), вектор-функция $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $x_{\tau i}(t) = x_\tau(t+i)$, $i \in \mathbb{Z}$, $t \in [0,1]$ сильно абсолютно непрерывна со значениями в пространстве $K_{2\mu}^n$ и для производной $\varkappa(\cdot)$ имеет место представление

$$\dot{\varkappa}(t) = \{\dot{x}_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}.$$

В таком случае, их функционально-дифференциальному уравнению (89) следует, что вектор-функция $\varkappa_\tau(\cdot)$ будет удовлетворять бесконечномерному уравнению (77), а из определения самой $\varkappa_\tau(\cdot)$ следует краевое условие (78). Последнее утверждение очевидно.

$\square$

Перейдем к изучению бесконечномерной динамической системы (1), которая может быть переписана в виде уравнения (66), где оператор $\mathbb{G}$ определен в (67) и удовлетворяет условиям (1)-(2), в которых константу μ^* можно положить равной 1. При этом, для любого $i \in \mathbb{Z}$ функция $g_i(.)$ действует из пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$ в пространство $\mathbb{R}^2$ и определяется по правилу

$$g_i(z_1, z_2, z_3) = (z_2^{(2)},\, m_i^{-1}\{\phi(z_2^{(1)})[z_1^{(1)} - 2z_2^{(1)} + z_3^{(1)}]\})'$$

Для такой функции константа Липщица имеет вид (см.[1] приложение A лемма 1.2)

$$M_{2i} = \max\{2m_i^{-1}\sqrt{L^2+1}; 1\}, \qquad i \in \mathbb{Z}.$$

В силу предположения $\{m_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$, величина

$$M_2 = \max_{i\in\mathbb{Z}} M_{2i}$$

конечна.

Очевидно, что такой оператор от времени не зависит, поэтому соответствующий ему оператор $\mathbb{G}_\tau = \Pi_\tau(\mathbb{G})$ совпадает с исходным оператором $\mathbb{G}$, т.е. $\mathbb{G}_\tau = \mathbb{G}$. Для оператора $\tau\mathbb{G}_{\tau 2\mu}$, $\mu \in (0,1)$, действующего из пространства $K_{2\mu}^2$ в себя, условие квазилинейного роста (12) и условие Липщица (13) будут иметь следующий вид (см.(16), (82)) : для любых $\varkappa, \overline{\varkappa} \in K_{2\mu}^n$

$$\|\tau\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(\varkappa)\|_{2\mu} \le \sup_{i\in\mathbb{Z}} m_i^{-1}\,\tau\phi(0)\sqrt{\frac{3(1+\mu^2)}{1-\mu^2}} \;+\; 2\tau M_2(2\mu^{-1}+1)\|\varkappa\|_{2\mu}, \tag{90}$$

$$\|\tau\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(\varkappa) - \tau\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(\overline{\varkappa})\|_{2\mu} \le 3\tau M_2(2\mu^{-1}+1)\|\varkappa - \overline{\varkappa}\|_{2\mu}. \tag{91}$$

Для рассматриваемого оператора $\mathbb{G}$ функция $g_\tau(.)$ из индуцированного уравнения (89) действует из пространства $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2\times 3}$ в пространство $\mathbb{R}^2$ и определено по правилу

$$g_\tau(t, z_1, z_2, z_3) = (z_2^{(2)},\, l(t)\{\phi(z_2^{(1)})[z_1^{(1)} - 2z_2^{(1)} + z_3^{(1)}]\})',$$

где для любых $t \in [i, i+1)$, $i \in \mathbb{Z}$, $l(t) = m_i^{-1}$. Очевидно, что для такой функции константой Липщица служит M_2.

Теперь мы можем приступить к доказательству существования решения типа бегущей волны.

Доказательство теоремы B. Если вектор-функция $\{(y_i(.))\}_{-\infty}^{+\infty}$ является решением исходной системы дифференциальных уравнений (1) и $\omega(.) \in C^{(0)}(\mathbb{R},\, K_{2\mu}^2)$,

$\omega(.) = \{(y_i(.),\, \dot y_i(.))'\}_{-\infty}^{+\infty}$, то вектор-функция $\omega(\tau t)$, $\quad t \in \mathbb{R}$ является сильно абсолютно непрерывной и удовлетворяет уравнению (73). Обратное очевидно. Поэтому нам следует изучать те решения $\{y_i(.)\}_{-\infty}^{+\infty}$ исходной системы дифференциальных уравнений (1), для которых вектор-функция $\omega(\tau t)$, $\quad t \in \mathbb{R}$ является решением дифференциального уравнения (73).

Не нарушая общности, можем положить $\bar t = 0$. Заметим, что в случае шаров с равными массами, т.е. $m_i = m,\ i \in \mathbb{Z}$, для соответствующего оператора $\mathbb{G}_{2\mu}$, $\quad \mu \in (0,1)$ (см. (67)) справедливо перестановочное соотношение (81) (для рассматриваемого оператора константа μ^* равна 1). Тогда по предложению 4 каждое решение краевой задачи (77)-(78) может быть достроено до решения типа бегущей волны с помощью соотношения (79). Поэтому вопрос о существовании решения типа бегущей волны эквивалентен вопросу существования решения краевой задачи (77)-(78). По предложению 5 для существования решения $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty},\ t \in [0,1]$, $\quad \varkappa_\tau(.) \in C^{(0)}([0,1], K^2_{2\mu})$, $\quad \mu \in (0,1)$ краевой задачи (77)-(78) достаточно, чтобы функция $\ x_\tau(t) = x_{\tau[t]}(t-[t]),\ t \in \mathbb{R}$ являлась решением функционально-дифференциального уравнения (89) и принадлежала пространству $\quad \mathcal{L}^2_{\mu'} C^{(0)}(\mathbb{R}),\ \mu' \in (0,1),\ \mu < \mu'$. При этом, если решение $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{(u_{\tau i}(t), v_{\tau i}(t))'\}_{-\infty}^{+\infty},\ t \in [0,1]$ краевой задачи (77)-(78) удовлетворяет начальному условию $(\varkappa_\tau(0))_{\bar i} = (a,b)'$, то соответствующее ей решение $\ x_\tau(t) = x_{\tau[t]}(t-[t]),\ t \in \mathbb{R}$ функционально-дифференциального уравнения (89) будет удовлетворять начальному условию $x_\tau(\bar i) = (a,b)'$. По теореме A при любых $\tau > 0,\ \mu \in (0,1)$, удовлетворяющих условию

$$\tau M_2(2\mu^{-1}+1) < \ln \mu^{-1}, \tag{92}$$

начальных условиях $i \in \mathbb{Z},\ (a,b)'$ для уравнения (89) существует решение $x_\tau(.)$, принадлежащее пространству $\quad \mathcal{L}^2_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$ и удовлетворяющее начальному условию $\ x_\tau(\bar i) = (a,b)'$. Такое решение единственное. Заметим, что неравенство (92) эквивалентно системе условий $0 < \tau < \hat\tau$, $\quad \mu \in (\,\mu_1(\tau), \quad \mu_2(\tau)\,)$. Следовательно, при фиксированном $0 < \tau < \hat\tau$ решение $x_\tau(.)$ функционально-дифференциального уравнения (89) с начальным условием $\ x_\tau(\bar i) = (a,b)'$ существует, единственно и принадлежит каждому из пространств $\mathcal{L}^2_\mu C^{(0)}(\mathbb{R}),\ \mu \in (\,\mu_1(\tau), \quad \mu_2(\tau))$, а по предложению 5 соответствующая ей вектор-функция $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty},\ t \in [0,1],\ x_{\tau i}(t) = x_\tau(t+i)$, $\quad i \in \mathbb{Z}$ является решением краевой задачи (77)-(78) с начальным условием $(\varkappa_\tau(0))_{\bar i} = (a,b)'$, единственно и принадлежит каждому из пространств $C^{(0)}([0,1], K^2_{2\mu})$, $\quad \mu \in (\,\mu_1(\tau), \quad \mu_2(\tau))$. Более того, по тому же предложению 5 такое соответствие является непрерывным. Мы уже отмечали, что по предложению 4 каждое решение краевой задачи (77)-(78), продолженное в силу уравнения (73), является решением типа бегущей волны. Оценим рост такого решения. Правая часть уравнения (73) удовлетворяет условиям роста (90). Учитывая неравенство (92), мы и получим включение $\|\varkappa_\tau(.)\|_{2\mu} \in \mathcal{L}^1_{\sqrt{\mu}} C^{(0)}(\mathbb{R})$ при каждом $\mu \in (\,\mu_1(\tau), \quad \mu_2(\tau))$, откуда, в частности, следует непрерывность отображения, порожденное процедурой продолжения решения краевой задачи (77)-(78). Остается с помощью обратной замены времени перейти к исходной переменной $\varkappa = \{(u_i,\, v_i)'\}_{-\infty}^{+\infty}$ где $\quad y_i = u_i,\ v_i = \dot y_i,\ i \in \mathbb{Z}$, для которых получим начальное условие $(\varkappa(0))_{\bar i} = (y_{\bar i}(0),\, \dot y_{\bar i}(0))' = (a,b)'$, а также включения: для каждого параметра $\mu \in (\,\mu_1(\tau),\,\mu_2(\tau)\,)$ вектор $\omega(t) = \{(y_i(t),\,\dot{y}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ принадлежит пространству $K_{2\mu}^2$ при любом $t \in \mathbb{R}$; функция $\Upsilon_\mu(.) = \|\omega(.)\|_{2\mu}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_{2\sqrt[\tau]{\mu}}C^{(0)}(\mathbb{R})$. Утверждение о непрерывной зависимости решения следует из соответствующего утверждения теоремы A и непрерывности всех процедур, приведенных при доказательстве теоремы A. ■

Доказательство утверждения 1. В случае нулевого потенциала прямая проверка показывает, что любая вектор-функция $\{(y_i(t))\}_{-\infty}^{+\infty} = \{bt + bi\tau + \alpha\}_{-\infty}^{+\infty}$, $\quad t \in \mathbb{R}$, задающая прямолинейное равномерное движение, является решением типа бегущей волны. В случае фиксированной координаты $\bar{i}$, начального момента $\bar{t}$ и начальных значений a, b следует положить $\alpha = a - b\bar{t} - b\bar{i}\tau$. Если $0 < \tau < \hat{\tau}$, то по теореме B других решений типа бегущей волны не существует. ■

Доказательство утверждения 2. Пусть потенциал не равен нулю. Если вектор-функция $\varkappa_\tau(.) = \{(u_i(.),\,v_i(.))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ является решением типа бегущей волны, то для нее будет выполняться перестановочное соотношение (80), которое для рассматриваемого оператора имеет вид $\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(T_{2\mu}\varkappa_\tau(t)) = T_{2\mu}\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(\varkappa_\tau(t))$. Из полученного перестановочного соотношения и того, что хотя бы два шара имеют разные массы, следует система условий

$$\phi(u_{\tau i}(t)) + u_{\tau(i+1)}(t) - 2u_{\tau i}(t) + u_{\tau(i-1)}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

В таком случае, из уравнения (73) следует, что функции $v_{\tau i}(.)$, $\quad i \in \mathbb{Z}$ являются константами, а функции $u_{\tau i}(.)$, $\quad i \in \mathbb{Z}$ являются линейными. Так как такое решение является решением типа бегущей волны, то имеют место условия

$$u_{\tau(i+1)}(t) - 2u_{\tau i}(t) + u_{\tau(i-1)}(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

откуда, в силу предыдущего равенства, следуют условия

$$\phi(u_{\tau i}(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Так как потенциал не нулевой, то это возможно лишь в случае, если линейные функции $u_{\tau i}(.)$, $\quad i \in \mathbb{Z}$ также являются константами. Следовательно, решение типа бегущей волны является стационарным решением.■

§4. О соответствиях между решениями типа псевдобегущей волны бесконечномерных динамических систем и импульсными решениями функционально-дифференциальных уравнений точечного типа

Мы уже отмечали, что в случае существования хотя бы двух шаров с различными массами всякое решение типа бегущей волны является стационарным, т.е. класс решений типа бегущей волны чрезвычайно узок. Вместе с тем, могут быть решения по своей структуре близкие к решениям типа бегущей волны и переходящие в них в случае шаров с равными массами. К определению таких решений, которые будут называться решениями типа квазибегущих волн, мы и приступим. При заданных $\tau > 0$, $\mu \in (0,1)$ в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R} \times K^n_{2\mu}$ вместо краевой задачи (77)-(78) рассмотрим краевую задачу

$$\dot{\varkappa}_\tau = \tau \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(t, \varkappa_\tau), \qquad t \in [0,1], \tag{93}$$

$$\varkappa_\tau(1) - T_{2\mu}\varkappa_\tau(0) = \varrho, \quad \varrho = \{\varrho_i\}^{+\infty}_{-\infty} \in K^n_{2\mu}. \tag{94}$$

Очевидно, что ограничение решения $\varkappa_\tau(.)$ бесконечномерного уравнения (73) является решением краевой задачи (93)-(94) с $\varrho = \varkappa_\tau(1) - T_{2\mu}\varkappa_\tau(0)$. Верно и обратное. Всякое решение краевой задачи (93)-(94) может быть продолжено до решения уравнения (73). Поэтому решения краевой задачи (93)-(94) определяют все пространство решений типа ϱ-псевдобегущей волны с $\varrho \in K^n_{2\mu}$. Справедлив следующий аналог предложения 5.

Предложение 6. *Пусть $\tau > 0$. Если вектор-функция*

$$\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}^{+\infty}_{-\infty},\ t \in [0,1], \quad \varkappa_\tau(.) \in C^{(0)}([0,1], K^n_{2\mu}), \quad \mu \in (0, (\mu^*)^\tau) \cap (0,1)$$

является решением бесконечномерной краевой задачи (93)-(94), *то функция* $x_\tau(t) = x_{\tau[t]}(t-[t])$, $t \in \mathbb{R}$ *будет импульсным решением функционально-дифференциального уравнения* (89) *со скачками*

$$x_r(\bar{t}_i + 0) - x_r(\bar{t}_i - 0) = \rho_i, \quad \bar{t}_i = i+1,\ i \in \mathbb{Z}, \quad \varrho = \{\rho_i\}^{+\infty}_{-\infty} \in K^n_{2\mu}, \tag{95}$$

выполняется условие $\sup_{i\in\mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^n}\mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty$, *и при этом* $x_\tau(.) \in \mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R};\Gamma)$, $\Gamma = \{\bar{t}_i : i \in \mathbb{Z}\}$. *Описанное отображение из пространства* $C^{(0)}([0,1], K^n_{2\mu})$ *в пространство* $\mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R};\mathbb{Z})$ *является непрерывным.*

Если $x_\tau(.) \in \mathcal{L}^n_{\mu'} C^{(0)}(\mathbb{R},\Gamma)$, $\Gamma = \{\bar{t}_i : \bar{t}_i = i+1,\ i \in \mathbb{Z}\}$, $\mu' \in (0,(\mu^*)^\tau) \cap (0,1)$ *импульсное решение функционально-дифференциального уравнения* (89) *со скачками*

$$x_r(i+1+0) - x_r(i+1-0) = \varrho_i, \quad \sup_{i\in\mathbb{Z}} \|\varrho_i\|_{\mathbb{R}^n}(\mu^{'})^{|\bar{t}_i|} < +\infty,$$

то вектор-функция

$$\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}^{+\infty}_{-\infty},\ t \in [0,1],\ x_{\tau i}(t) = x_\tau(t+i), \quad i \in \mathbb{Z}$$

будет решением краевой задачи (93)-(94) *для любого заданного* $\mu < \mu^{'}$ *и, соответственно,* $\varkappa_\tau(.) \in C^{(0)}([0,1], K^n_{2\mu})$. *Описанное отображение из пространства* $\mathcal{L}^n_{\mu'} C^{(0)}(\mathbb{R},\mathbb{Z})$ *в пространство* $C^{(0)}([0,1], K^n_{2\mu})$ *является непрерывным.*

Доказательство. Из определения функции $x_\tau(\cdot)$ и утверждения, полученного в работе [1] см.(глава 2 лемма 2.4) следует, что эта функция является кусочно абсолютно непрерывной на $\mathbb{R}$. В силу уравнения (93) такая функция будет удовлетворять функционально-дифференциальному уравнению (89) и условиям скачков (95). Из утверждений, полученных в работе [1] см.(глава 2 лемма 2.4, предложение 2.3), следует справедливость включения $x_\tau(.) \in \mathcal{L}^n_\mu C^{(0)}(\mathbb{R};\,\Gamma)$. Последнее утверждение очевидно.

Обратное. Так как функция $x_\tau(\cdot)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^n_{\mu'} C^{(0)}(\mathbb{R};\,\Gamma)$ и является импульсным решением функционально-дифференциального уравнения (89), то семейство функций $(\mu^{'})^{|i|}x_r(t+i), \quad t \in [0,1], \quad i \in \mathbb{Z}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно и для почти всех $t \in [0,1]$ семейство функций $(\mu^{'})^{|i|}\dot{x}_r(t+i), \quad t \in [0,1], \quad i \in \mathbb{Z}$ равномерно ограниченно. Тогда (см.[1], глава 2 лемма 2.4), вектор-функция $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty},\ x_{\tau i}(t) = x_\tau(t+i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0,1]$ сильно абсолютно непрерывна со значениями в пространстве $K^n_{2\mu}$ и для производной $\varkappa(\cdot)$ имеет место представление

$$\dot{\varkappa}(t) = \{\dot{x}_i(t)\}_{-\infty}^{+\infty}.$$

В таком случае, их функционально-дифференциальному уравнению (89) следует, что вектор-функция $\varkappa_\tau(\cdot)$ будет удовлетворять бесконечномерному уравнению (93), а из определения самой $\varkappa_\tau(\cdot)$ и условия скачков (95) следует краевое условие (94). Последнее утверждение очевидно.

□

Теперь мы можем приступить к доказательству существования решения типа $(\bar{q},\bar{p})^{'}$-псевдобегущей волны.

Доказательство теоремы C. Если вектор-функция $\{(y_i(.))\}_{-\infty}^{+\infty}$ является решением исходной системы дифференциальных уравнений (1) и $\omega(.) \in C^{(0)}(\mathbb{R},\,K^2_{2\mu})$, $\omega(.) = \{(y_i(.),\,\dot{y}_i(.))^{'}\}_{-\infty}^{+\infty}$, то вектор-функция $\omega(\tau t), \quad t \in \mathbb{R}$ является сильно абсолютно непрерывной и удовлетворяет уравнению (73). Обратное очевидно. Поэтому нам следует изучать те решения $\{y_i(.)\}_{-\infty}^{+\infty}$ исходной системы дифференциальных уравнений (1), для которых вектор-функция $\omega(\tau t), \quad t \in \mathbb{R}$ является решением дифференциального уравнения (73).

Не нарушая общности, можем положить $\bar{t} = 0$. Заметим, что для рассматриваемого оператора $\mathbb{G}_{2\mu}, \quad \mu \in (0,1)$ константа μ^* равна 1. Каждое решение краевой задачи (93)-(94), в которой $n = 2$, может быть достроено до решения типа $\varrho = (\bar{q},\bar{p})^{'} = \{(q_i,\,p_i)^{'}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K^2_{2\mu}$-псевдобегущей волны в силу уравнения (73). Поэтому вопрос о существовании решения типа бегущей волны эквивалентен вопросу существования решения краевой задачи (93)-(94). По предложению 6 для существования решения $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty},\ t \in [0,1], \quad \varkappa_\tau(.) \in C^{(0)}([0,1], K^2_{2\mu}), \quad \mu \in (0,1)$ краевой задачи (93)-(94) достаточно, чтобы функция $x_\tau(t) = x_{\tau[t]}(t-[t]),\ t \in \mathbb{R}$ являлась импульсным решением функционально-дифференциального уравнения (89) со скачками (95) и принадлежала пространству $\mathcal{L}^2_{\mu'} C^{(0)}(\mathbb{R};\mathbb{Z}),\ \mu' \in (0,1),\ \mu < \mu'$. При этом, если решение $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty} = \{(u_{\tau i}(t), v_{\tau i}(t))^{'}\}_{-\infty}^{+\infty},\ t \in [0,1]$ краевой задачи (93)-(94) удовлетворяет начальному условию $(\varkappa_\tau(0))_{\bar{i}} = (a,b)^{'}$, то соответствующее ей решение $x_\tau(t) = x_{\tau[t]}(t-[t]),\ t \in \mathbb{R}$ функционально-дифференциального уравнения (89) будет удовлетворять начальному условию $x_\tau(\bar{i}) = (a,b)^{'}$. По теореме A при любых $\tau > 0$, $\mu \in (0, 1)$, удовлетворяющих условию

$$\tau M_2(2\mu^{-1} + 1) < \ln \mu^{-1}, \qquad (96)$$

начальных условиях $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}^1$, величинах скачков

$$\varrho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad \sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^2} \mu^{|\bar{t}_i|} < +\infty, \quad \Gamma = \{\bar{t}_i : \ \bar{t}_i = i + 1, \ i \in \mathbb{Z}\} \qquad (97)$$

для уравнения (89) существует решение $x_\tau(.)$, принадлежащее пространству $\mathcal{L}^2_\mu C^{(0)}(\mathbb{R}, \Gamma)$, удовлетворяющее начальному условию $x_\tau(\bar{i}) = (a, b)'$, а также условиям скачков (95). Такое решение единственное. Заметим, что неравенство (92) эквивалентно системе условий $0 < \tau < \hat{\tau}$, $\mu \in (\ \mu_1(\tau), \quad \mu_2(\tau)\ )$. Следовательно, при фиксированном $0 < \tau < \hat{\tau}$ решение $x_\tau(.)$ функционально-дифференциального уравнения (89) с начальным условием $x_\tau(\bar{i}) = (a, b)'$ и величиной скачков

$$\varrho = \{\rho_i\}_{-\infty}^{+\infty}, \qquad \sup_{i \in \mathbb{Z}} \|\rho_i\|_{\mathbb{R}^2} (\bar{\mu})^{|\bar{t}_i|} < +\infty, \qquad \bar{\mu} > \mu_1(\tau)$$

существует, единственно и принадлежит каждому из пространств $\mathcal{L}^2_\mu C^{(0)}(\mathbb{R}, \Gamma)$, $\mu \in (\ \mu_1(\tau), \mu_2(\tau)) \cap (\mu_1(\tau), \bar{\mu}]$, а по предложению 6 соответствующая ей вектор-функция $\varkappa_\tau(t) = \{x_{\tau i}(t)\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in [0, 1]$, $x_{\tau i}(t) = x_\tau(t + i)$, $i \in \mathbb{Z}$ является решением краевой задачи (93)-(94) с начальным условием $(\varkappa_\tau(0))_{\bar{i}} = (a, b)'$, единственно и принадлежит каждому из пространств $C^{(0)}([0, 1], K^2_{2\mu})$, $\mu \in (\ \mu_1(\tau), \mu_2(\tau)) \cap (\mu_1(\tau), \bar{\mu})$. Более того, по тому же предложению 6 такое соответствие является непрерывным. Мы уже отмечали, что каждое решение краевой задачи (93)-(94) может быть продолжено в силу уравнения (73). Оценим рост такого решения. Правая часть уравнения (73) удовлетворяет условиям роста (90). Учитывая неравенство (96), мы и получим включение $\|\varkappa_\tau(.)\|_{2\mu} \in \mathcal{L}^1_{\sqrt{\mu}} C^{(0)}(\mathbb{R})$ при каждом $\mu \in (\ \mu_1(\tau), \mu_2(\tau)) \cap (\mu_1(\tau), \bar{\mu})$, откуда, в частности, следует непрерывность отображения, порожденное процедурой продолжения решения краевой задачи (93)-(94). Остается с помощью обратной замены времени перейти к исходной переменной $\varkappa = \{(u_i, v_i)'\}_{-\infty}^{+\infty}$ где $y_i = u_i$, $v_i = \dot{y}_i$, $i \in \mathbb{Z}$, для которых получим начальное условие $(\varkappa(0))_{\bar{i}} = (y_{\bar{i}}(0), \dot{y}_{\bar{i}}(0))' = (a, b)'$, а также включения: для каждого параметра $\mu \in (\ \mu_1(\tau), \ \mu_2(\tau)\ ) \cap (\mu_1(\tau), \bar{\mu})$ вектор $\omega(.) = \{(y_i(.), \dot{y}_i(.))'\}_{-\infty}^{+\infty}$ принадлежит пространству $C^{(0)}(\mathbb{R}, K^2_{2\mu})$; функция $\Upsilon_\mu(.) = \|\omega(.)\|_{2\mu}$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_{2\sqrt[\tau]{\mu}} C^{(0)}(\mathbb{R})$. Утверждение о непрерывной зависимости решения следует из соответствующего утверждения теоремы А, непрерывной зависимости правой части функционально-дифференциального уравнения (89) от нормы $\|\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty}\|_{21}$ вектора массы шаров $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K^1_{\infty 1}$ и непрерывности всех процедур, приведенных при доказательстве теоремы С. ■

§5. Доказательство существования решений типа квазибегущей волны

Имея теорему существования решения типа $(\bar{q},\bar{p})'$-псевдобегущей волны, мы можем приступить к доказательству существования решения типа квазибегущей волны.

Доказательство теоремы D. Пусть фиксированы начальные данные $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, $\quad \bar{t} \in \mathbb{R}$, $\quad a,b \in \mathbb{R}^1$, а $(\bar{q}_k,\bar{p}_k)' \in K^2_{21}$, $\quad \omega_k(.) \in C^{(0)}(\mathbb{R},K^2_{2\bar{\mu}})$, $\quad k=1,2,...$ минимизирующая последовательность в оптимизационной задаче I. Так как для любого $\bar{\mu} \in (0,1)$ вложение $K^2_{21} \subseteq K^2_{2\bar{\mu}}$ является вполне непрерывным, то найдется точка $(\hat{q},\hat{p})'$, являющаяся предельной точкой для множества точек $(\bar{q}_k,\bar{p}_k)'$, $\quad k=1,2,...$ в пространстве $K^2_{2\bar{\mu}}$ при каждом $\bar{\mu} \in (0,1)$, то есть точка $(\hat{q},\hat{p})'$ будет принадлежать счетно-нормированному пространству $\hat{K}^2_{21} = \bigcap_{\bar{\mu}\in(0,1)} K^2_{2\bar{\mu}}$. Для заданного $0<\tau<\hat{\tau}$ выберем $\bar{\mu} \in (0,\mu_1(\tau))$. Очевидно, что $(\hat{q},\hat{p})' \in K^2_{2\bar{\mu}}$. Тогда по теореме C существует единственное решение $\hat{\omega}(.) = \{(\hat{y}_i(.),\ \dot{\hat{y}}_i(.))'\}^{+\infty}_{-\infty}$ типа $(\hat{q},\hat{p})'$-псевдобегущей волны такое, что для всякого $\mu \in (\mu_1(\tau),\mu_2(\tau))$ вектор-функция $\hat{\omega}(.)$ принадлежит пространству $C^{(0)}(\mathbb{R},K^2_{2\mu})$ и, в частности, пространству $C^{(0)}(\mathbb{R},K^2_{2\hat{\mu}})$. По той же теореме C такое решение $\hat{\omega}(.)$, как элемент пространства $C^{(0)}(\mathbb{R},K^2_{2\hat{\mu}})$, непрерывно зависит от точки $(\hat{q},\hat{p})' \in K^2_{2\bar{\mu}}$, а сама точка $(\hat{q},\hat{p})'$ является предельной точкой последовательности точек $(\bar{q}_k,\bar{p}_k)'$, $\quad k=1,2,...$ в пространстве $K^2_{2\bar{\mu}}$. Поэтому из вида функционала в оптимизационной задаче I следует, что $\hat{\omega}(.)$ как решение типа $(\hat{q},\hat{p})'$-псевдобегущей волны и будет квазирешением.

Утверждение о росте функции $\Upsilon_\mu(.) = \|\omega(.)\|_{2\mu}$ следует из соответствующего утверждения для решений типа $(\bar{q},\bar{p})'$-псевдобегущей волны в теоремы C.

Заметим, что единичный шар B^2_{21} пространства K^2_{21} предкомпактен в пространстве $K^2_{2\bar{\mu}}$, $\quad \bar{\mu} \in (0,1)$. Тогда из непрерывной зависимости решения типа $(\bar{q},\bar{p})'$-псевдобегущей волны (теорема C) от начальных данных $a,b \in \mathbb{R}^1$, вектора $(\bar{q},\bar{p})' \in K^2_{2\bar{\mu}}$, $\quad \bar{\mu} \in (0,\mu_1(\tau))$ и нормы $\|\{m_i^{-1}\}^{+\infty}_{-\infty}\|_{21}$ вектора массы шаров $\{m_i^{-1}\}^{+\infty}_{-\infty} \in K^1_{\infty 1}$ и следует утверждения теоремы D о непрерывной зависимости значения функционала задачи I на квазирешениях. Последнее утверждение следует из теоремы B. ■

§6. О μ-неустойчивости стационарных решений.

Очевидно, что для системы (1) стационарные состояния имеют вид $\{(a_i,0)'\}^{+\infty}_{-\infty}$ и для любого заданного $\mu \in (0,1)$ совпадают с точками поверхности в пространстве $K^2_{2\mu}$, описываемой уравнением

$$\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(\overline{\varkappa}) = 0. \tag{98}$$

Для исследования на устойчивость следует в уравнении (73) правую часть линеаризовать в окрестности стационарной точки. Для линеаризации потребуется наложить дополнительное ограничение на потенциал $\phi(\cdot)$ в виде условия непрерывной дифференцируемости с равномерно ограниченной производной. Так как мы будем проверять стационарную точку на неустойчивость, то потребуется дополнительное условие на потенциал $\phi(\cdot)$ в виде наличия второй производной, непрерывной и равномерно ограниченной.

Лемма 4. *Пусть функция $\phi(\cdot)$ является дважды непрерывно-диференцируемой с равномерно ограниченными первой и второй производными, а массы шаров таковы, что $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$. Тогда для любого $\mu \in (0,1)$ оператор $\mathbb{G}_{\tau 2\mu}$ дважды непрерывно дифференцируем по Фреше.*

Доказательство. Можно получить непосредственной проверкой. □

Если $\mathbb{G}'_{\tau 2\mu}(\overline{\varkappa}), \quad \mu \in (0,1)$ производная по Фреше оператора $\mathbb{G}_{\tau 2\mu}$ в стационарной точке $\overline{\varkappa} = \{(a_i, 0)'\}_{-\infty}^{+\infty}$, которую будем обозначать через $\mathcal{A}_{2\mu}$ (индекс τ мы опускает, так как оператор $\mathbb{G}_{\tau 2\mu}$ и, соответственно, оператор$\mathcal{A}_{2\mu}$ от него не зависит), то линеаризованное уравнение для уравнения (73) имеет вид

$$\dot{\varkappa} = \tau \mathcal{A}_{2\mu} \varkappa \tag{99}$$

где для любых $\varkappa = \{(u_i, v_i)'\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{2\mu}^2$ и $i \in \mathbb{Z}$

$$(\mathcal{A}_{2\mu}\varkappa)_i = (v_i,\ m_i^{-1}[u_{i+1} - (2+\gamma_i)u_i + u_{i-1}])',$$

где $\gamma_i = \dot{\phi}(a_i)$.

Пространство $K_{2\mu}^2, \quad \mu \in (0,1)$ представим в виде прямого произведения $K_{2\mu}^2 = K_{2\mu}^1 \times K_{2\mu}^1$, с элементами $\varkappa = (\chi_1, \chi_2)$. В пространстве $K_{2\mu}^1$ определим тождественный оператор E и линейный непрерывный оператор $C_{2\mu}$ по следующему правилу: для любых $\chi = \{u_i\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{2\mu}^1$ и $i \in \mathbb{Z}$

$$(C_{2\mu}\chi)_i = m_i^{-1}[u_{i+1} - (2+\gamma_i)u_i + u_{i-1}].$$

Используя вид операторов $\mathcal{A}_{2\mu}$ и $C_{2\mu}$, можно установить связь между их спектрами. Изучение спектральных свойств и собственных подпространств следует производить в пространстве

$$\mathbb{K}_{2\mu}^n = K_{2\mu}^n + iK_{2\mu}^n, \quad \mu \in (0,1),$$

полученном как комплексификация действительного пространства $K_{2\mu}^n$.

Лемма 5. *Если массы шаров таковы, что $\{m_i^{-1}\}_{-\infty}^{+\infty} \in K_{\infty 1}^1$, то для любого $\mu \in (0,1)$ спектры операторов $\mathcal{A}_{2\mu}$ и $C_{2\mu}$ связаны соотношением*

$$\sigma(\mathcal{A}_{2\mu}) = [\sigma(C_{2\mu})]^{1/2}. \tag{100}$$

Более того, такое же соответствие имеется и между точечными спектрами

$$\sigma_p(\mathcal{A}_{2\mu}) = [\sigma_p(C_{2\mu})]^{1/2}. \tag{101}$$

Доказательство. Для любого $\varkappa = (\chi_1, \chi_2) \in K^1_{2\mu} \times K^1_{2\mu}$ действие оператора $\mathcal{A}_{2\mu}$ можно представить в следующем виде

$$\mathcal{A}_{2\mu}\varkappa = (E\chi_2, C_{2\mu}\chi_1). \tag{102}$$

Рассмотрим уравнение

$$(\mathcal{A}_{2\mu} - \lambda E)\varkappa = \tilde{\varkappa}, \tag{103}$$

которое можно записать в виде системы

$$\begin{cases} \chi_2 - \lambda\chi_1 = \tilde{\chi}_1 \\ C_{2\mu}\chi_1 - \lambda\chi_2 = \tilde{\chi}_2. \end{cases} \tag{104}$$

Подставив значение χ_2 из первого уравнения система (104) во второе уравнение, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} \chi_2 = \tilde{\chi}_1 + \lambda\chi_1 \\ (C_{2\mu} - \lambda^2 E)\chi_1 = \lambda\tilde{\chi}_1 + \tilde{\chi}_2. \end{cases} \tag{105}$$

Если оператор $(C_{2\mu} - \lambda^2 E)$ обратим, т.е. $\lambda^2 \notin \sigma(C_{2\mu})$, то из эквивалентности уравнения (103) и системы (105) следует обратимость оператора $(\mathcal{A}_{2\mu} - \lambda E)$, т.е. $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_{2\mu})$.

Обратное. Если оператор $(\mathcal{A}_{2\mu} - \lambda E)$ обратим, т.е. $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_{2\mu})$, то оператор $(C_{2\mu} - \lambda^2 E)$ сюръективный. Покажем, что он также и инъективный.

Для этого нам следует изучить точечный спектр оператора $(C_{2\mu} - \lambda^2 E)$. Для этого рассмотрим уравнение

$$\mathcal{A}_{2\mu}\varkappa = \lambda_1\varkappa, \qquad \varkappa \neq 0, \tag{106}$$

которое можно записать в виде системы

$$\begin{cases} \chi_2 = \lambda_1\chi_1, \qquad \chi_1 \neq 0 \\ C_{2\mu}\chi_1 = \lambda_1\chi_2 \end{cases} \tag{107}$$

Система (107) эквивалентна следующей системе

$$\begin{cases} \chi_2 = \lambda_1\chi_1, \qquad \chi_1 \neq 0 \\ C_{2\mu}\chi_1 = \lambda_1^2\chi_1 \end{cases} \tag{108}$$

Из системы (108) следует, что $\lambda_1 \in \sigma_p(A_{2\mu})$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1^2 \in \sigma_p(C_{2\mu})$, что и доказывает равенство (101). Так как оператор $(\mathcal{A}_{2\mu} - \lambda E)$ обратим, то оператор $(C_{2\mu} - \lambda^2 E)$ будет инъективным и поэтому обратимым.

Мы показали, что $\lambda \notin \sigma(\mathcal{A}_{2\mu})$ тогда и только тогда, когда $\lambda^2 \notin \sigma(C_{2\mu})$. Но это эквивалентно тому, что $\lambda \in \sigma(\mathcal{A}_{2\mu})$ тогда и только тогда, когда $\lambda^2 \in \sigma(C_{2\mu})$, откуда и следует равенство (100).

□

Теперь мы в состоянии доказать теорему E о μ-неустойчивости стационарного состояния. Так как для функции $\phi(\cdot)$ производная равномерно ограничена, то модули $\gamma_i = |\dot{\phi}(\overline{u}_i)|$, $i \in \mathbb{Z}$ равномерно ограничены. Верхнюю грань таких чисел обозначим через γ.

Доказательство теоремы E. В стационарной точке $\bar{\varkappa}$ линеаризованное уравнение для уравнения (73) задается уравнением (99). Так как оператор $\mathbb{G}_{\tau 2\mu}$ дважды непрерывно дифференцируем по Фреше, то имеет место оценка

$$\|\mathbb{G}_{\tau 2\mu}(\varkappa) - \mathbb{G}_{\tau 2\mu}(\bar{\varkappa}) - \mathbb{G}'_{\tau 2\mu}(\bar{\varkappa})(\varkappa - \bar{\varkappa})\|_{2\mu} \leq N\|\varkappa - \bar{\varkappa}\|^2_{2\mu}.$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно, чтобы спектру оператора $\mathcal{A}_{2\mu} = \mathbb{G}'_{\tau 2\mu}(\bar{\varkappa})$ принадлежала точка с положительной действительной частью. Так как выполняется неравенство $\mu < (2+\gamma)^{-1}$, то найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$, для которого будет выполняться неравенство $\mu < (2+\gamma+\varepsilon)^{-1}$.

Используя вид оператора $C_{2\mu}$, можно непосредственной проверкой установить, что открытый интервал $(0,\varepsilon)$ на действительной прямой принадлежит точечному спектру оператора $C_{2\mu}$. Тогда, в силу представления (100), спектру оператора $\mathcal{A}_{2\mu}$ будет принадлежать положительное действительное число.■

Автор признателен всем участникам семинара "Динамические системы и эргодическая теория"и его руководителям Д.В.Аносову и А.М.Степину за полезные советы и внимание к работе.

Список литературы

[1] Бекларян Л.А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. – М.: Факториал Пресс, (2007), 288.

[2] Бекларян Л.А., Крученов М.Б. О разрешимости линейных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа// Ж. Дифферен. Уравнения, (2008), 44:4, 435-445.

[3] Латушкин Ю.Д., Степин А.М. Операторы взвешенного сдвига и линейные расширения динамических систем// Ж.Успехи Матем. Наук, (1991), 46:2, 85-137.

[4] Пустыльников Л.Д. Бесконечномерные нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и теория КАМ // УМН, (1997) 52:3,(315), 106-158.

[5] Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, (1975).

[6] Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, (1980).

[7] Френкель Я.И., Конторова Т.А. О теории пластической деформации// ЖЭТФ, (1938), 8, 89-97.

[8] Antonevich A., Lebedev A. Functional-Differential Equations. I. C^*-theory. Harlow: Longman, (1994).

[9] Beklaryan L.A. Equations of Advanced-Retarded Type and Solutions of Traveling-Wave Type for Infinite-Dimensional Dynamic Systems//J. of Mathem. Sciences, (2004), 124:4, 5098-5109.

[10] Hale J.,Verduyn Lunel M. Introduction to Functional Differential Equations// Applied Mathematical Sciences, (1993), 99, Springer-Verlag.

Центральный Экономико-Математический Институт РАН
beklar@cemi.rssi.ru