МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 39, № 6 (1986)

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИИ ПО ИЗВЕСТНЫМ ИНТЕГРАЛАМ ОТ НЕЕ, ВЗЯТЫМ ВДОЛЬ ЛИНЕЙНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

А. С. Благовещенский

Пусть функция $\omega(x, s)$ $(x, s \in R^{n+1})$ имеет носитель, заключенный в цилиндре $K \times R^1$, где $K \subset R^n$ — n-мерный единичный шар $|x| < 1 \left(|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},\ n \geqslant 2\right)$. Предположим, что у $\omega(x, s)$ нет слишком сильных особенностей, так что при почти всех $x, p \in R^n \times R^n$ имеет смысл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x + ps, s)\, ds \overset{\text{def}}{=} u(x, p) \tag{1}$$

(точные условия на ω наложим несколько ниже). Ставится следующая задача интегральной геометрии (задача I). По заданным значениям

$$\varphi(x, p) = u(x, p)\,|_{x \in \partial K,\, p \in R^n} \tag{2}$$

восстановить функцию ω.

Нами 1) доказана теорема единственности решения задачи, 2) найдена формула обращения, 3) исходная задача редуцируется (см. п. 1^0) к некоторой другой, двумерной задаче интегральной геометрии, для этой, последней задачи найдено необходимое и достаточное условие существования решения, для исходной задачи найдено необходимое условие разрешимости.

Сходная постановка задачи предложена Ю. Е. Аниконовым в [1] в связи с задачами геофизики. Главное отличие задачи Ю. Е. Аниконова от нашей задачи заключается в том, что он искал функцию ω в существенно более узком классе, предполагая, что supp ω заключен в шаре $|x|^2 + s^2 \leqslant 1$. Ю. Е. Аниконову удалось энергетическими методами доказать теорему единственности для рассмотренной им задачи при $n = 2$. Отметим, что все наши результаты, за исключением теоремы существования, применимы к задаче Ю. Е. Аниконова. Близкая задача рассматривалась А. А. Кирилловым [2]. Из результатов А. А. Кириллова, в частности, следует, что если в нашей задаче отказаться от ограничения на supp ω, то единственность утрачивается.

В п. 4^0 настоящей работы изучается еще одна задача интегральной геометрии (задача II), также поставленная Ю. Е. Аниконовым [3] и решенная им в том случае, когда заданная функция f есть полином. К задаче II сводится также задача, рассмотренная в работе [4]. Предлагаемый нами способ представляется более естественным, а окончательные формулы менее громоздкими. Задача II имеет приложения к теории обратных задач распространения волн.

1°. Редукция задачи I к двумерной задаче. Пусть $\tilde{u}(x, k)$ — преобразование Фурье от $u(x, p)$ по переменной p. Тогда

$$\tilde{u}(x, k) = \int e^{i(k, p)} u(x, p)\, dp = \iint e^{i(k, p)} \omega(x + ps, s)\, dp\, ds.$$

Вводя вместо p переменную $x' = x + ps$, получаем

$$\tilde{u}(x, k) = \iint \exp \frac{i}{s} [(k, x') - (k, x)]\, \omega(x', s)\, |s|^{-n}\, dx'\, ds. \qquad (3)$$

Из формулы (3) видно, что $\tilde{u}(x, k)$ является в действительности функцией от переменных $k \in R^n$ и $q = (k, x)$. Отсюда 1) необходимое условие разрешимости задачи I: преобразование Фурье от $\varphi(x, p)$ по p является функцией от k и $q = (k, x)$: $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1(k, (k, x))$, функция $\tilde{\varphi}_1(k, q)$ определена при $q^2 < |k|^2$; 2) функция $\tilde{u}(x, k)$, а следовательно и $u(x, p)$, однозначно находится по $\varphi(x, p)$ при всех $x, p \in K \times R^n$, так как $\tilde{u}(x, k)$ при фиксированном k постоянна на плоскостях $(k, x) = \text{const}$. 3) Нетрудно найти явные выражения для $u(x, p)$ через $\varphi(x, p)$. Приведём два таких выражения

$$u(x, p) = \iint_{\partial K \times R^n} T(x, p, y, p') \varphi(y, p')\, d\Omega_y\, dp',$$

где ядро T

$$T(x, p, y, p') = \frac{2(n-1)!}{(2\pi)^n} \cos\frac{\pi\lambda}{2} \cdot$$
$$\cdot |(x, x-y)(y, p-p') + (y, y-x)(x, p-p')|^{\lambda}|_{\lambda=-n} \cdot$$
$$\cdot (|x|^2|y|^2 - (x, y)^2)(y, y-x)(x-y, x)_{\pm}^{n-2}.$$

Здесь интеграл понимается в смысле аналитического продолжения по параметру λ,

$$a_{\pm}^{n-2} = |a|^{n-2} \quad \text{при} \quad \pm a > 0,$$
$$a_{\pm}^{n-2} = 0 \qquad\quad \text{при} \quad \pm a \leqslant 0,$$

$d\Omega$ — евклидова мера на единичной сфере.

Замечание 1. Из формулы (3) легко вывести, что задача I эквивалентна следующей: восстановить функцию $\omega_1(\xi, \sigma)$ с носителем, сосредоточенным в конусе $\sigma^2 \geqslant |\xi|^2$, если ее преобразование Фурье $f(k, q)$ по переменным ξ, σ известно на множестве $\{k, q\colon k \in R^n,\ q \in R^1,\ |k|^2 \geqslant q^2\}$. Здесь $\omega_1(\xi, \sigma) = \sigma^{-2}\omega(-\xi/\sigma, 1/\sigma)$, $f(k, q) = \tilde{u}(k, x)$, $q = (k, x)$.

Замечание 2. Пусть $n = 2$, ω достаточно гладкая. Тогда $u(x, p)$ есть решение ультрагиперболического уравнения $u_{x_1p_2} = u_{x_2p_1}$. При $n > 2$ u удовлетворяет системе таких уравнений.

Выберем какое-либо сечение цилиндра $K \times R^1$, проходящее через его ось (не ограничивая общности, считаем, что на этом сечении $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$). Как показано выше, функция $\breve{u}(x_1, p_1) = u(x_1, 0, \ldots, 0;\ p_1, 0, \ldots, 0)$ известна при $x_1, p_1 \in [-1, 1] \in R^1$. В итоге мы приходим к следующей задаче интегральной геометрии: восстановить функцию $\psi(\eta)$ $(\eta = (\eta_1, \eta_2) \times R^2)$ по заданным интегралам $\breve{u}(x_1, p_1) = \int \psi(x_1 + p_1 s, s)\, ds$ от $\psi(\eta)$ вдоль произвольных прямых, пересекающих отрезок $[-1, 1]$ на оси $\eta_2 = 0$, если $\operatorname{supp}\psi(\eta) \subseteq \{\eta\colon (\eta_1, \eta_2) \in [-1, 1] \times R^1\}$ (задача А). Здесь

$$\psi(\eta) = \psi(\eta_1, \eta_2) = \omega(x, s)|_{x_1=\eta_1, x_2=\ldots=x_n=0,\ s=\eta_2}.$$

2°. Варианты постановки задачи А. Нам удобно видоизменить постановку задачи следующим образом. Пусть

$\psi_0(\xi)$ ($\xi \in R^3$, $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$) — четная однородная функция степени, причем $\mathrm{supp}\,\psi_0(\xi) \subseteq \{\xi: \xi_0^2 > \xi_1^2\}$. В силу этих свойств ψ_0 она однозначно определяется своими значениями на поверхности S, обладающей тем свойством, что любая прямая, проходящая через начало координат и принадлежащая $\mathrm{supp}\,\psi_0$, пересекает S в одной и только одной точке. Пусть x и p — два линейно независимых вектора из R^3. Каждая пара таких векторов задает прямую в R^3 с помощью уравнения $\xi = x + ps$.

Рассмотрим функцию

$$v(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(x + ps)\, ds. \tag{4}$$

Легко установить, что

$$v(\alpha x + \beta p,\ \gamma x + \delta p) = |\alpha\delta - \gamma\beta|^{-1} v(x, p), \tag{5}$$

откуда следует, что $v(x, p)$ на самом деле зависит только от $p_{ik} = x_i p_k - x_k p_i$ ($i \neq k$; $i, k = 0, 1, 2$), причем является четной однородной функцией степени -1 от $\{p_{ik}\}$. Пусть ψ_0 такова, что $\psi_0(1, \xi_1, \xi_2) = \psi(\xi_1, \xi_2)$. Поставим следующую задачу.

Задача В: найти $\psi_0(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$, если задана $v(x, p)$ для тех прямых, которые пересекают плоскость $\xi_2 = 0$ в точках $\{\xi_0, \xi_1, 0: \xi_0^2 > \xi_1^2\}$.

Если в качестве S выбирать различные конкретные поверхности, то будем получать различные двумерные задачи интегральной геометрии, эквивалентные задаче В:

1) Пусть S есть плоскость $\xi_0 = 1$, $x = (1, x_1, 0)$, $p = (0, p_1, 1)$; тогда

$$v(1, x_1, 0; 0, p_1, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_0(1, x_1 + p_1 s, s)\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x_1 + p_1 s, s)\, ds = \check{u}(x_1, p_1).$$

Мы видим, что задача А эквивалентна задаче В.

2) Пусть S есть плоскость $\xi_2 = 1$. Положим

$$\psi_c(\xi_0, \xi_1) = \psi_0(\xi_0, \xi_1, 1) = \frac{1}{\xi_0^2}\psi_0\left(1; \frac{\xi_1}{\xi_0}, \frac{1}{\xi_0}\right) = \frac{1}{\xi_0^2}\psi\left(\frac{\xi_1}{\xi_0}, \frac{1}{\xi_0}\right), \tag{6}$$

$$u_C(x_1, p_1) = v(0, x_1, 1; 1, p_1, 0). \tag{7}$$

Из (5) находим

$u_C(x_1, p_1) =$

$= v(0, x_1, 1; 1, p_1, 0) = v(1, p_1, 0; 0, x_1, 1) = \check{u}(p_1, x_1).$

Итак, задача A эквивалентна следующей задаче C: по заданной $u_C(x_1, p_1)$ $(x_1 \in R^1, p_1 \in [-1, 1])$ найти $\psi_C(\xi_0, \xi_1)$ ($\psi_C = 0$ при $|\xi_1/\xi_0| > 1$) из уравнения

$$u_C(x_1, p_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_C(t, x_1 + p_1 t)\, dt.$$

3) Не приводя вычислений, укажем еще несколько постановок эквивалентных двумерных задач, получающихся из задачи B выбором поверхности S.

Задача D (S — плоскость $\xi_1 = 1$): $\psi_D(\xi_0, \xi_2) = \psi_0(\xi_0, 1, \xi_2)$, $\psi_D \equiv 0$ при $|\xi_0| < 1$. Задан $\int \psi_D(x_0 + p_0 t, t)\, dt$ при $|x_0| \geqslant 1$, $p_0 \in R^1$.

Задача E (S — плоскость $\xi_0 = \xi_1 + 2$): $\psi_E(\xi_1, \xi_2) = \psi_0(2 + \xi_1, \xi_1, \xi_2)$, $\psi_E \equiv 0$ при $\xi_1 < -1$. Задан $\int \psi_E(x_1 + p_1 t, t)\, dt$ при $x_1 \geqslant -1$, $p_1 \in R^1$.

Задача F (S — плоскость $\xi_0 + \xi_2 = 1$): $\psi_F(\xi_1, \xi_2) = \psi_0(1 - \xi_2, \xi_1, \xi_2)$, $\psi_F \equiv 0$ при $|\xi_1| > |1 - \xi_2|$; задан $\int \psi_F(x_1 + p_1 t, t)\, dt$ при $x_1 \in [-1, 1]$, $p_1 \in R^1$.

Задача G (S — гиперболический цилиндр $\xi_0 = \sqrt{\xi_1^2 + 1}$): $\psi_G(\xi_1, \xi_2) = \psi_0(\sqrt{1 + \xi_1^2}, \xi_1, \xi_2)$: ограничений на supp ψ_G нет. Задан $\int d\alpha\, \psi_G(\operatorname{sh}\alpha, x_2 \operatorname{ch}\alpha + p_2 \operatorname{sh}\alpha)$ при $|x_2| \leqslant |p_2|$.

В дальнейшем мы подробно исследуем задачу C. Будем искать ψ_C в пространстве $L_{2,\rho}$ функций, квадратично суммируемых с весом $(\xi_0^2 - \xi_1^2)^\rho$ ($\rho \in (0, 1)$) (это значит, что $\psi(\eta_1, \eta_2)$ квадратично суммируема с весом $|\eta_2|^{1-2\rho}(1 - \eta_1^2)^\rho$).

3°. Решение задачи C. Итак, нам надо найти решение уравнения

$$u_C(x_1, p_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_C(s, x_1 + p_1 s)\, ds. \qquad (8)$$

Введем обозначения $\zeta = (\zeta_0, \zeta_1) \in R^2$, $z = (z_0, z_1) \in R^2$, $[\zeta, z] = \zeta_0 z_0 - \zeta_1 z_1$, $f(z) = \frac{1}{|z_1|} u_C\left(-\frac{[z, z]}{z_1}, \frac{z_0}{z_1}\right)$.

Тогда уравнение (8) может быть записано в виде

$$f(z) = \int \psi_C(\zeta)\, \delta([z, \zeta] - [z, z])\, d\zeta, \quad [z, z] < 0. \qquad (9)$$

Из уравнения (9) видно, что постановка задачи инвариантна относительно гиперболических вращений, что и определяет успех дальнейших рассмотрений. Ниже будет построено в явном виде спектральное разложение входящего в задачу оператора и тем самым найдено решение задачи. Введем в областях $[\zeta, \zeta] > 0$, $[z, z] < 0$ новые координаты $\zeta_0 = \frac{\gamma}{2}(\tau + 1/\tau)$, $\zeta_1 = \frac{\gamma}{2}(\tau - 1/\tau)$, $z_0 = \frac{\Gamma}{2}(t - 1/t)$, $z_1 = \frac{\Gamma}{2}(t + 1/t)$ $(\tau > 0,\ t > 0,\ \gamma \in R^1,\ \Gamma \in R^1)$. Удобно также ввести новые функции $\vartheta_\rho^\pm(\gamma, \tau) = \gamma^{\rho+1}[\psi_C(\zeta(\gamma, \tau)) \pm \pm \psi_C(\zeta(-\gamma, \tau))]$, $g_\rho^\pm(\Gamma, t) = \Gamma^{\rho+1}[f(z(\Gamma, t)) \pm f(z(-\Gamma, t))]$. Легко проверить, что уравнение (9) тогда преобразуется в распадающуюся систему уравнений

$$g_\rho^\pm(\Gamma, t) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\gamma\, d\tau}{\gamma\tau} K_\rho^\pm(\gamma/\Gamma, \tau/t)\vartheta_\rho^\pm(\gamma, \tau), \tag{10}$$

где $K^\pm(\gamma, \tau) = \gamma^{1-\rho}\left[\delta\left(1 - \frac{\gamma}{2}(\tau - 1/\tau)\right) \pm \delta\left(1 + \frac{\gamma}{2} \cdot \cdot (\tau - 1/\tau)\right)\right]$.

Введем преобразование Меллина функций $g_\rho^\pm$, $\vartheta_\rho^\pm$:

$$g_\rho^\pm(\Gamma, t) = \iint d\mu\, d\nu\, \Gamma^{i\mu} t^{i\nu} \tilde{g}_\rho^\pm(\mu, \nu);$$

$$\vartheta_\rho^\pm(\gamma, \tau) = \iint d\mu\, d\nu\, \gamma^{i\mu} \tau^{i\nu} \tilde{\vartheta}_\rho^\pm(\mu, \nu).$$

Тогда для $\tilde{\vartheta}_\rho^\pm$ имеем

$$\tilde{g}_\rho^\pm = \lambda_\rho^\pm \tilde{\vartheta}_\rho^\pm, \tag{11}$$

где $\lambda_\rho^\pm(\mu, \nu) = \int_0^\infty \int_0^\infty d\gamma\, d\tau K_\rho^\pm(\gamma, \tau)\, \gamma^{i\mu - 1}\tau^{i\nu - 1}$. Последний интеграл легко вычисляется явно. Оказывается

$$\lambda_\rho^\pm(\mu, \nu) = 2^{-\rho + i\mu}\left[B\left(\rho - i\mu, \frac{1 - \rho + i\mu - i\nu}{2}\right) \pm \pm B\left(\rho - i\mu, \frac{1 - \rho + i\mu + i\nu}{2}\right)\right], \tag{12}$$

где B — эйлеров интеграл 1-го рода. Из (12) нетрудно вывести также следующее представление для $\lambda_\rho^\pm$:

$$\lambda_\rho^\pm = 2^{-\rho + i\mu} B\left(\frac{1 - \rho + i\mu - i\nu}{2}, \frac{1 - \rho + i\mu + i\nu}{2}\right) \varkappa_\rho^\pm, \tag{13}$$

где $\varkappa_\rho^+ = \frac{\operatorname{ch} \pi\nu/2}{\sin \pi(\rho - i\mu)/2}$, $\varkappa_\rho^- = \frac{i \operatorname{sh} \pi\nu/2}{\cos \pi(\rho - i\mu)/2}$.

Легко проверить, что требование $\psi_C \in L_{2,\rho}$ эквивалентно тому, что $\tilde{\vartheta}_\rho^\pm$ квадратично суммируемы. Поэтому из (13) сразу же следует теорема единственности [1]) в классе $L_{2,\rho}$ (функции $\lambda_\rho^\pm$ обращаются в нуль на множестве нулевой меры). Для функций $\lambda_\rho^\pm$ справедливы следующие оценки. Пусть

$$\lambda_0 = \exp\frac{\pi}{2}(|\nu| - |\mu-\nu|/2 - |\mu+\nu|/2)\cdot$$
$$\cdot[1+|\mu^2-\nu^2|]^{-\rho/2}(1+|\mu|)^{\rho-1/2},$$

при некоторых постоянных $C_i > 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$

$$\begin{gathered} C_1\lambda_0 \leqslant |\lambda_\rho^+| \leqslant C_2\lambda_0, \\ C_3\lambda_0\frac{|\nu|}{1+|\nu|} \leqslant |\lambda_\rho^-| \leqslant C_4\lambda_0\frac{|\nu|}{1+|\nu|}. \end{gathered} \tag{14}$$

Оценки (14) легко получаются, если исследовать асимптотическое поведение функций $\lambda_\rho^\pm$, используя формулу Стирлинга. Из формул (11) и (14) тривиально следует критерий разрешимости задачи, формулируемый в терминах функций $\tilde{g}_\rho^\pm$: функции $\frac{1}{\lambda_0}\tilde{g}_\rho^\pm$ и $\frac{1+|\nu|}{\lambda_0|\nu|}\tilde{g}_\rho^-$ квадратично суммируемы.

4°. **Обращение преобразования Радона для функций с полуограниченным носителем.** Пусть известно, что функция $\psi(\xi)$ $(\xi \in R^n,\ \xi = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ имеет носитель, сосредоточенный на множестве $\overline{R_+^n}$, где $R_+^n = \{\xi \in R^n: \xi_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots, n\}$, черта обозначает замыкание. Пусть задано преобразование Радона от $\psi(\xi)$, но не для всевозможных плоскостей, а лишь для тех, которые имеют компактное пересечение с $\overline{R_+^n}$. Точнее, исследуем следующее интегральное уравнение первого рода (задача II):

$$f(x) = x^{-\beta}\int_{R_+^n} d\xi\, \xi^{\beta-1}\delta\Big(\sum_1^n \frac{\xi_k}{x_k} - 1\Big)\vartheta(\xi). \tag{15}$$

---

[1]) Отметим, что если не накладывать каких-либо условий на ψ_C типа убывания на бесконечности, то единственность теряется: легко проверить, что любая функция вида $\psi_C = \chi(\gamma)$, где $\chi(\gamma)$ — произвольная нечетная функция от γ, является решением однородного уравнения (8); причина появления этой неединственности — обращение в нуль функции λ_ρ^-.

Здесь $\beta \in R_+^n$ фиксировано, $x^{-\beta} \overset{\text{def}}{=} x_1^{-\beta_1} x_2^{-\beta_2} \ldots x_n^{-\beta_n}$, $\xi^{\beta-1} = \xi_1^{\beta_1-1}\xi_2^{\beta_2-1} \ldots \xi_n^{\beta_n-1}$, $\psi(\xi) = \xi^{\beta-1}\vartheta(\xi)$. Перейдем к преобразованию Меллина

$$\vartheta(\xi) = \int_{R^n} \xi^{is}\tilde{\vartheta}(s)\,ds, \quad f(x) = \int_{R^n} x^{is}\tilde{f}(s)\,ds.$$

Тогда уравнение, двойственное уравнению (15), имеет вид

$$\tilde{f}(s) = \lambda(s;\ \beta)\,\tilde{\vartheta}(s), \tag{16}$$

где

$$\lambda(s;\beta) = \int_{R_+^n} \xi^{\beta+is-1}\delta\left(\sum_{k=1}^n \xi_k - 1\right)d\xi.$$

Величина $\lambda(s;\ \beta)$ легко вычисляется: оказывается

$$\lambda(s;\beta) = \frac{\Gamma(\beta_1 + is_1)\,\Gamma(\beta_2 + is_2)\ldots\Gamma(\beta_n + is_n)}{\Gamma\left(\sum_1^n \beta_k + i\sum_1^n s_k\right)}.$$

Для $\lambda(s;\ \beta)$ нетрудно вывести оценки

$$C_1\lambda_0(s) \leqslant |\lambda(s;\ \beta)| \leqslant c_2\lambda_0(s),$$

где

$$\lambda_0(s) = \left(1 + \left|\sum_1^n s_k\right|\right)^{\frac{1}{2} - \sum_{k=1}^n \beta_k} \prod_{k=1}^n (1 + |s_k|)^{\beta_k - 1/2} \cdot$$

$$\cdot \exp -\frac{\pi}{2}\left(\sum_{k=1}^n |s_k| - \left|\sum_{k=1}^n s_k\right|\right).$$

Из сказанного легко вытекает: решение $\theta(x)$ задачи II существует и единственно в классе функций, квадратично суммируемых с весом $(x_1 x_2 \ldots x_n)^{-1}$, если квадратично суммируема функция $\frac{1}{\lambda_0(s)}\tilde{f}(s)$; для нахождения $\theta(x)$ достаточно применить формулу обращения преобразования Меллина к $\lambda^{-1}(s;\ \beta)\tilde{f}(s)$.

Выражаю благодарность Ю. Е. Аниконову.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Поступило 07.12.81

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Аниконов Ю. Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1978.

[2] Кириллов А. А. Об одной задаче И. М. Гельфанда // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 2. С. 276—277.

[3] Аниконов Ю. Е. Формулы обращения для задач кинематической сейсмики и интегральной геометрии // Математические проблемы геофизики. Новосибирск, 1971. Вып. 1. С. 41—47.

[4] Успенский С. В., Садыкова С. Б. О некоторых задачах интегральной геометрии // Сиб. мат. ж. 1976. Т. 17. № 2. С. 414—425.