The conception of equilibrium of macrosystem and its application for the model of flow distribution

Gasnikov A.V. [1,2] **, Gasnikova E.V.** [1] **, Kolesnikov A.V.** [2] **, Nagapetyan T.A.** [1]

[1] Faculty of control and applied mathematics MIPT;
[2] Moscow Independent University
E-mail: gasnikov@ya.ru, egasnikova@ya.ru, sascha77@mail.ru, nagapetyan@gmail.com

Abstract

In this work we lead a general scheme (goes back to the works of M.A. Leontovich, 1938) describes a chemical kinetic stochastic approach to the macrosystems arise in economic, sociology and traffic flow theory. The main line is a definition of equilibrium of macrosystem as most probable macrostate of invariant measure of Markov dynamic (corresponds to the macrosystem). We demonstrate new results (under more general conditions, with new estimates of the rate of convergence to the equilibrium) for well known models: kinetic of social inequality, migration of people model and model of traffic flow distribution. It should be mentioned that in the model of traffic flow distribution the equilibrium can also be interpreted as Nash equilibrium in some repeated (evolutionary) game.

Keywords: macrosystem, equilibrium, ergodic theorem, invariant (stationary) measure, Markov chain Monte Carlo revolution, entropy, principle of detailed balance, evolutionary games dynamic, Nash-Vardrop principles, Braess paradox, Pareto optimality.

Предположим, что некоторая макросистема может находиться в различных состояниях, характеризуемых вектором $\vec{n}$ с неотрицательными целочисленными компонентами. Будем считать, что в системе происходят случайные превращения (химические реакции). Пусть $\vec{n} \to \vec{n} - \vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) \in J$ – все возможные типы реакций. Введем, следуя М.А. Леонтовичу (1935), *интенсивность реакции* (случай дискретного времени рассматривается аналогичным образом):

$$\lambda_{\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)}\left(\vec{n}\right) = \lambda_{\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)}\left(\vec{n} \to \vec{n} - \vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) = M^{1-\sum_i \alpha_i} K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}\left(\vec{n}\right) \prod_{i:\alpha_i>0} n_i \cdot \ldots \cdot \left(n_i - \alpha_i + 1\right),$$

где $K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \ge 0$ – *константы реакции* (в химической кинетике – постоянные, а в социодинамике (В. Вайдлих [1]) – необязательно); при этом часто считают $\sum_i n_i\left(t\right) \equiv M$. Т.е. $\lambda_{\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)}\left(\vec{n}\right)$ – вероятность осуществления в единицу времени перехода

$\vec{n} \to \vec{n} - \vec{\alpha} + \vec{\beta}$. На макроуровне это соответствует принципам химической кинетики (*закон действующих масс Гульдберга–Вааге*, 1865). Таким образом, динамика макросистемы задается линейной полугруппой (однородный дискретный марковский случайный процесс), инфинитезимальный оператор которой определяется интенсивностями реакций $\lambda_{(\vec{\alpha},\vec{\beta})}(\vec{n})$.

Следующее **утверждение** отображает известные результаты а) В.В. Веденяпина [2], б) С.А. Пирогова и др. [3] и в) обобщает результаты В. Вайдлиха и др. [1] на случай, когда рассматривается более общая схема, чем модель миграции населения:

а) $\langle \vec{\mu}, \vec{n}(t) \rangle \equiv \langle \vec{\mu}, \vec{n}(0) \rangle \;\Leftrightarrow\; \vec{\mu} \perp \mathrm{Lin}\{\vec{\alpha} - \vec{\beta}\}_{(\vec{\alpha},\vec{\beta}) \in J}$. (inv)

б) Пусть выполняется *условие Штюкельберга–Батищевой–Пирогова* [4, 5]

$$\exists\ \vec{\xi} > \vec{0}:\ \forall\ \vec{\alpha} \to \sum_{\vec{\beta}:(\vec{\alpha},\vec{\beta}) \in J} K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \prod_j \xi_j^{\alpha_j} = \sum_{\vec{\beta}:(\vec{\alpha},\vec{\beta}) \in J} K_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}} \prod_j \xi_j^{\beta_j} \quad \left(K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}(\vec{n}) \equiv K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}\right). \qquad \text{(ШБП)}$$

Тогда "пуассоновская" мера $\nu(\vec{n}) = \prod_i \lambda_i^{n_i} e^{-\lambda_i} / n_i!$ (точнее говоря, мера, индуцированная пуассоновской мерой на множестве (вообще говоря, конечном!), задаваемом условиями (inv)), где $\lambda_i = \xi_i^* M$, а $\vec{\xi}^*$ – произвольное решение (ШБП), будет инвариантной относительно предложенной стохастической марковской динамики. Эта мера экспоненциально быстро концентрируется, с ростом M, в окрестности *наиболее вероятного состояния* (также удовлетворяющего условию (ШБП)), которое и принимается за *положение равновесия макросистемы*. Задача поиска наиболее вероятного макросостояния асимптотически эквивалентна *задаче максимизации энтропийного функционала* (воспользовались $n! = \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n\,(1 + o(1))$ – *формулой Стирлинга*):

$$E \approx -\sum_i n_i \cdot \left(\ln(n_i/\lambda_i) - 1\right)$$

на множестве, задаваемом условием (inv).

в) Пусть $\forall\ (\vec{\alpha},\vec{\beta}) \in J \to \sum_i \alpha_i = \sum_i \beta_i;\ \alpha_i, \beta_i \in \{0,1\}$, $\mathrm{K}_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} = \mathrm{K}_{\vec{\alpha}}^{\vec{\beta}}$,

$$K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}(\vec{n}) = \mathrm{K}_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}} \exp\left(\sum\nolimits_{i:\,\beta_i=1} u_i(n_i+1) - \sum\nolimits_{i:\,\alpha_i=1} u_i(n_i)\right),\ u_i'(n_i) \le 0\,.$$

Тогда мера $\nu(\vec{n}) = \exp\left(\sum_i U_i(n_i)\right) \cdot \prod_i (n_i!)^{-1}$, где $U_i(n_i) = 2\sum_{\nu=1}^{n_i} u_i(\nu)$ будет инвариантной относительно предложенной стохастической марковской динамики. Эта мера экспоненциально быстро концентрируется, с ростом $M \equiv \sum_i n_i(t)$, в окрестности наиболее вероятного состояния, которое и принимается за положение равновесия макросистемы. Задача поиска наиболее вероятного макросостояния асимптотически эквивалентна задаче максимизации энтропийного типа функционала: $E \approx \sum_i \left\{ -n_i \ln(n_i) + U_i(n_i) \right\}$ на множестве, задаваемом условием (inv).

В пунктах б) и в) предполагалось, что марковский процесс неразложим (неприводим) в классе (inv): из любого состояния можно со временем прийти в любое другое (по-прежнему оставаясь на множестве (inv)). Отсюда следует единственность инвариантной меры. Это условие не выполняется, например, для хорошо известной модели "хищник – жертва" (кролики – трава) [4], в которой имеется поглощающее состояние: без хищников.

Контрпример (С.А. Пирогов). Условие (ШБП) является только достаточным условием инвариантности "пуассоновской" меры. Действительно, рассмотрим систему уравнений химических реакций (константы реакций K одинаковы и постоянны):

$$A + B^* \xrightarrow{K} A^* + B;\; B + C^* \xrightarrow{K} B^* + C;\; C + A^* \xrightarrow{K} C^* + A, \text{ причем}$$
$$n_A(t) + n_{A*}(t) \equiv n_B(t) + n_{B*}(t) \equiv n_C(t) + n_{C*}(t) \equiv N.$$

Заметим, что есть и еще один независимый закон сохранения:

$$n_A(t) + n_B(t) + n_C(t) \equiv \mathrm{const}.$$

Можно проверить, что "пуассоновская" мера ("$\sim$" – знак пропорциональности)

$$\nu(\vec{n}) \sim C_N^{n_A} \cdot C_N^{n_B} \cdot C_N^{n_C} \sim \left(1^{n_A} e^{-1} \big/ n_A!\right) \cdot \ldots \cdot \left(1^{n_{C^*}} e^{-1} \big/ n_{C^*}!\right)$$

будет инвариантной, хотя условие (ШБП), очевидным образом, не выполняется.

В связи с этим контрпримером заметим, что понятие равновесия макросистемы "не завязано" на условие (ШБП). Так в контрпримере С.А. Пирогова равновесие будет существовать: $n_A(\infty) \approx n_{A*}(\infty) \approx n_B(\infty) \approx n_{B*}(\infty) \approx n_C(\infty) \approx n_{C*}(\infty) \approx N/2$.

Пример (Вильфредо Парето, "Кинетика социального неравенства"). В городе живет $M \gg 1$ (например, 10 000) пронумерованных жителей. У каждого i-го жителя есть в начальный (нулевой) момент времени целое (неотрицательное) количество рублей $s_i(0)$ (монетками, достоинством в один рубль). Со временем пронумерованные жители (количество которых не изменяется, так же как и суммарное количество рублей) случайно разыгрывают свое имущество. Пусть в момент времени $t \ge 0$ r-й житель имеет k рублей, а l-й житель – m рублей. Тогда $p_{k;m}(t)\Delta t + o(\Delta t)$ есть вероятность того, что жители с номерами r и l ($1 \le r < l \le M$) встретятся и попробуют разыграть один рубль по следующему правилу: с вероятностью $1/2$ житель с большим номером отдаёт 1 рубль (если, конечно, он не банкрот) жителю с меньшим номером и с вероятностью $1/2$ наоборот. Будем считать, что $p_{k;m}(t) \equiv \kappa M^{-1}$ ($\kappa > 0$). Пусть $c_s(t)$ – доля жителей города, имеющих ровно s рублей в момент времени t (заметим, что $c_s(t)$ – случайная величина). Пусть $S = \sum_{i=1}^{M} s_i(0)$, $\bar{s} = S/M$. Тогда:

$$\forall\ q=0,\dots,S\ \exists\ \lambda_q>0,\ T_q=\mathrm{O}(M):\ \ \forall\, t\ge T_q \to P\left(\left|\frac{c_s(t)}{Ce^{-s/\bar{s}}}-1\right|\le\frac{\lambda_q}{\sqrt{M}},\ s=0,\dots,q\right)\ge 0.999\,,$$

где C определяется из условия нормировки: $\sum_{s=0}^{S}Ce^{-s/\bar{s}}=1$, т.е. $C\approx\bar{s}^{-1}$.

Скорость сходимости оценивается сверху, исходя из оценок в доказательстве эргодической теоремы для однородных марковских цепей с конечным числом состояний. Как показывают численные эксперименты, оценка $\mathrm{O}(M)$ точная. Так, если в городе 10 000 жителей и единица времени – день, то при начальном «социальном равенстве» с вероятностью, близкой к единице, через 20–30 лет (при $\kappa=1$) установится «социальное неравенство». Оказывается, что оценка скорости сходимости $\mathrm{O}(\mathrm{poly}(M))$ характерна для большинства макросистем в схеме М.А. Леонтовича (это устанавливается с помощью оценки Добрушина и подсчета кривизны Риччи (неравенств типа Пуанкаре–Чигера) [6]). Отмеченное выше обстоятельство хорошо известно специалистам по имитационному моделированию, как Markov chain Monte Carlo revolution [7].

Этот пример демонстрирует ситуацию, когда число состояний ($\dim\vec{n}$) и число реакций ($|J|$) растут вместе с ростом M. Это обстоятельство, равно как и зависимость $K_{\vec{\beta}}^{\vec{\alpha}}(\vec{n})$, не позволяют напрямую использовать аппарат, разработанный в [2–5], связанный с анализом СОДУ, возникающей при каноническом скейлинге ($M\to\infty$ так, что $\exists\ \lim_{M\to\infty}\vec{n}(0)/M=\vec{c}>\vec{0}$) стохастической марковской динамики.

Следующий пример макросистемы также “ложится” в приведенную схему, но время дискретно! Отметим, что стохастическая марковская динамика в этом примере имеет теоретико-игровую природу. Однако для исследования равновесия нами используется аппарат, отличный от приведенного выше.

Модель равновесного распределения потоков [8]. Ориентированный граф $\Gamma=(V,E)$ представляет собой транспортную сеть города (V – узлы сети (вершины), $E\subset V\times V$ – дуги сети (рёбра графа)). Пусть $W=\{w=(i,j):i,j\in V\}$ – множество пар источник – сток; $p=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ – путь из v_1 в v_m, если $(v_k,v_{k+1})\in E$, $k=1,\dots,m-1$ (как будет видно в дальнейшем (см. пример В.И. Швецова), для задания пути может быть не достаточно указания только набора вершин, в общем случае нужно также указывать, какое именно ребро, соединяющее заданные вершины, выбирается); P_w – множество путей, отвечающих корреспонденции $w\in W$; $P=\bigcup_{w\in W}P_w$ – совокупность всех путей в сети Γ; x_p – величина потока по пути p, $\vec{x}=\{x_p:\ p\in P\}$; $G_p(\vec{x})$ – удельные затраты на проезд по пути p, $\vec{G}(\vec{x})=\{G_p(\vec{x}):\ p\in P\}$; y_e – величина потока по дуге e: $\vec{y}=\Theta\vec{x}$, где $\Theta = \left\{\delta_{ep}\right\}_{e\in E,\, p\in P}$; $\tau_e\left(y_e\right)$ – удельные затраты на проезд по дуге e (как правило возрастающие, выпуклые, гладкие функции), естественно считать, что $\vec{G}\left(\vec{x}\right) = \Theta^T \vec{\tau}\left(\vec{y}\right)$. Пусть также известны потоки корреспонденций d_w, $w \in W$. Тогда вектор $\vec{x}$, характеризующий распределение потоков, должен лежать в допустимом множестве:

$$X = \left\{ \vec{x} \geq 0 : \sum_{p\in P_w} x_p = d_w,\, w \in W \right\}.$$

Рассмотрим игру, в которой каждому элементу $w \in W$ соответствует свой, достаточно большой ($d_w \gg 1$), набор однотипных “игроков” (“сидящих на корреспонденции w”). Множеством чистых стратегий каждого такого игрока является P_w, а выигрыш (потери со знаком минус) определяются формулой $-G_p\left(\vec{x}\right)$ (игрок “выбирает” путь следования $p \in P_w$, при этом он пренебрегает тем, что от его выбора также “немного” зависят $\left|P_w\right|$ компонент вектора $\vec{x}$ и, следовательно, сам выигрыш $-G_p\left(\vec{x}\right)$ – “гипотеза конкурентного рынка”). Можно показать, что отыскание равновесия Нэша(–Вардропа) $\vec{x}^* \in X$ (макро описание равновесия) равносильно решению задачи *дополнительности* (***принцип Дж.Г. Вардропа***, 1952), что равносильно решению *вариационного неравенства*:

$$\forall\ w \in W,\ p \in P_w \to x_p^* \cdot \left(G_p\left(\vec{x}^*\right) - \min_{q\in P_w} G_q\left(\vec{x}^*\right) \right) = 0 \ \Leftrightarrow\ \forall\ \vec{x} \in X \to \left\langle \vec{G}\left(\vec{x}^*\right), \vec{x} - \vec{x}^* \right\rangle \geq 0 .$$

Несложно показать, что если $\vec{G}\left(\vec{x}\right)$ – строго монотонное преобразование, т.е.

$$\forall\ \vec{x}, \vec{y} \in X\ \left(\vec{x} \neq \vec{y}\right) \to \left\langle \vec{G}\left(\vec{x}\right) - \vec{G}\left(\vec{y}\right), \vec{x} - \vec{y} \right\rangle > 0 ,$$

то *равновесие Нэша–Вардропа* единственно. Также несложно показать, что задача отыскания равновесия Нэша–Вардропа сводится к решению, следующей задачи выпуклого программирования:

$$\Psi\left(\vec{x}\right) = \sum_{e\in E} \int\limits_0^{\sum_{p\in P} x_p \delta_{pe}} \tau_e\left(z\right) dz \to \min_{\vec{x}\in X} .$$

Отсюда видно, что если $\forall\ e \in E \to \tau_e'\left(\cdot\right) > 0$, то $V\left(\vec{y}\right) = \sum\limits_{e\in E} \int\limits_0^{y_e} \tau_e\left(z\right) dz$ – строго выпуклый функционал, и равновесие $\vec{y}^*$ – единственно. Отметим, что это еще не означает единственность равновесия $\vec{x}^*$ – см. пример В.И. Швецова ниже.

Свой путь на (n+1)-м шаге игрок, сидящий на корреспонденции w, выбирает согласно смешанной стратегии (в независимости от всех остальных): с вероятностью

$$\mathrm{Prob}_p^w\left(n+1\right) = \gamma_n \cdot \max\left\{ x_p\left(n\right), n^{-1} \right\} \exp\left(-G_p\left(\vec{x}\left(n\right)\right) \big/ T \right) \Big/ Z_n^w ,\ \ w \in W,$$

выбрать путь $p \in P_w$ ($0 < \gamma_n \le 1$), а с вероятностью $1 - \gamma_n$ – действовать согласно стратегии, использованной на предыдущем n-м шаге. Здесь $x_p(n)$ – количество игроков, сидящих на корреспонденции w и выбравших на n-м шаге стратегию $p \in P_w$, а Z_n^w находится из условия нормировки. Множитель $\max\{x_p(n), n^{-1}\}$ характеризует желание имитировать, а также надежность использования этой стратегии. Именно этот множитель подмечает специфику рассматриваемой задачи (без него сходимость будет в общем случае не к равновесию Нэша–Вардропа) и отличает предложенную в задаче динамику от многих других. Параметр γ характеризует «консерватизм» («ленивость»), чем меньше γ, тем более консервативный игрок; «температура» T характеризует отношение к риску («горячность»), чем больше температура, тем более «горячий игрок», склонный к более рискованным действиям.

Утверждение 1. *Пусть* $T > 0$ *– достаточно мало,* $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_n)^2 < \infty$. *Тогда* $\Psi(\vec{x}(n)) \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} \Psi(\vec{x}^*)$, *и если равновесие единственно, то также* $\vec{x}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} \vec{x}^*$.

Отметим, что в экспериментах, проводимых в лаборатории Экспериментальной экономики МФТИ в которых участвовали студенты 5-го курса ФУПМ, также наблюдалась сходимость к равновесию и колебания около него. Колебания, по-видимому, связаны с тем, что в экспериментах количество игроков было небольшим и гипотеза конкурентного рынка не выполнялась, а также тем, что для студентов $\gamma_n \equiv \gamma = \text{const} > 0$.

Схема доказательства. При доказательстве использован *второй метод Ляпунова* [9]. Ключевыми для доказательства являются следующие вспомогательные утверждения, устанавливающие, что $\Psi(\vec{x})$ – функция Ляпунова (в мартингальном смысле).

Лемма 1. *Пусть* $f(w) = -T \ln w$, *где* $w \in (0,1)$ (*заметим, что* $w = \exp(-f/T)$); $\alpha_i > 0$ *– произвольные, но зафиксированные параметры;* $w_i \in (0,1)$,

$$F_0(\vec{w}) = \sum_i \alpha_i w_i f(w_i) \Big/ \sum_i \alpha_i w_i, \quad F_1(\vec{w}) = \sum_i \alpha_i f(w_i) \Big/ \sum_i \alpha_i .$$

Тогда $F_0(\vec{w}) \le F_1(\vec{w})$, *причем равенство достигается только на наборах*

$$w_1 = w_2 = \ldots = w^* .$$

Доказательство. Сначала нужно воспользоваться неравенство между средним гармоническим и средним геометрическим, а потом неравенством Коши.

Лемма 2. $\forall\ \vec{x}(n) \in X:\ \vec{x}(n) \ne \vec{x}^* \to \left\langle \operatorname{grad}\Psi(\vec{x}(n)), E\left[\vec{x}(n+1) - \vec{x}(n) \middle| \vec{x}(n)\right]\right\rangle =$

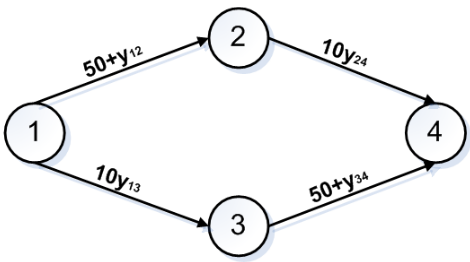
$$= \left\langle \vec{G}(\vec{x}(n)), E\left[\vec{x}(n+1) - \vec{x}(n) \middle| \vec{x}(n)\right]\right\rangle < 0 .$$

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $\forall\ p \in P \to x_p(n) \geq 1$. Тогда имеем $\left\langle \vec{G}(\vec{x}(n)), E\left[\vec{x}(n+1) - \vec{x}(n) \middle| \vec{x}(n)\right]\right\rangle =$

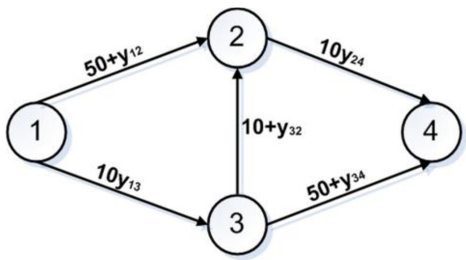
$$= \gamma_n \sum_{w \in W} d_w \cdot \left[\frac{\sum_{p \in P_w} x_p(n) G_p(\vec{x}(n)) \exp\left(-\vec{G}(\vec{x}(n))/T\right)}{\sum_{p \in P_w} x_p(n) \exp\left(-\vec{G}(\vec{x}(n))/T\right)} - \frac{\sum_{p \in P_w} G_p(\vec{x}(n)) x_p(n)}{\sum_{p \in P_w} x_p(n)} \right].$$

Из леммы 1 следует $\left\langle \vec{G}(\vec{x}(n)), E\left[\vec{x}(n+1) - \vec{x}(n) \middle| \vec{x}(n)\right]\right\rangle \leq 0$. Причем равенство может достигаться только на равновесном векторе распределения потоков $\vec{x}^*$, что по условию места не имеет. □

Рассмотрим пример, который демонстрирует, что в результате строительства новой дороги новое равновесие Нэша–Вардропа окажется *неэффективным по Парето* и будет строго “хуже”, чем то, которое было до строительства. Тем не менее, предложенная выше марковская динамика наилучших ответов (также как и эксперимент со студентами ФУПМ) приводит именно к такому, неэффективному по Парето, равновесию.



Случай 1



Случай 2

Рис. 1

Случай 1: $x_{124} = x_{134} = 3$.	**Случай 2:** $x_{124} = x_{1324} = x_{134} = 2$.
Полное время в пути $T = 83$ мин	Полное время в пути $T = 92$ мин

Парадокс Брайеса. Пусть корреспонденция $x_{14} = 6$ (тысяч автомобилей/ч). Вес ребра (удельные затраты на проезд по этому ребру) есть время движения по ребру (в минутах), если поток через ребро есть y_{ij} (тысяч автомобилей/ч). Например, в случае 2: $y_{24} = x_{124} + x_{1324}$ (см. рис. 1).

Оба равновесия Нэша–Вардропа (в случаях 1 и 2) являются «притягивающими» положениями равновесия описанной выше динамики.

Следующий пример демонстрирует, что при весьма естественных условиях вектор-функция удельных затрат пользователей на проезд $\vec{G}(\vec{x})$ может не быть строго монотонной:

$$\exists\ \vec{x}, \vec{y} \in X\ (\vec{x} \neq \vec{y}):\ \vec{G}(\vec{x}) = \vec{G}(\vec{y}) \Rightarrow \left\langle \vec{G}(\vec{x}) - \vec{G}(\vec{y}), \vec{x} - \vec{y} \right\rangle = 0.$$

Связанно это может быть, например, с тем, что

$$\vec{G}(\vec{x}) = \Theta^T \vec{\tau}(\vec{y}),\ \vec{y} = \Theta\vec{x},$$

где вектор $\vec{y} = \{y_e\}_{e\in E}$ описывает загрузку ребер (дуг) графа транспортной сети, $\vec{\tau}(\vec{y}) = \{\tau_e(y_e)\}_{e\in E}$ – вектор-функция затрат на проезд по ребрам графа транспортной сети, Θ – матрица инцидентности ребер и путей, и разные векторы распределения потоков $\vec{x}$ могут соответствовать одному и тому же вектору $\vec{y} = \Theta\vec{x}$.

Пример (неединственность равновесия; В.И. Швецов [10]). На рис. 2 показано равновесное распределение потоков для любого значения параметра $x \in [0, 0.5]$.

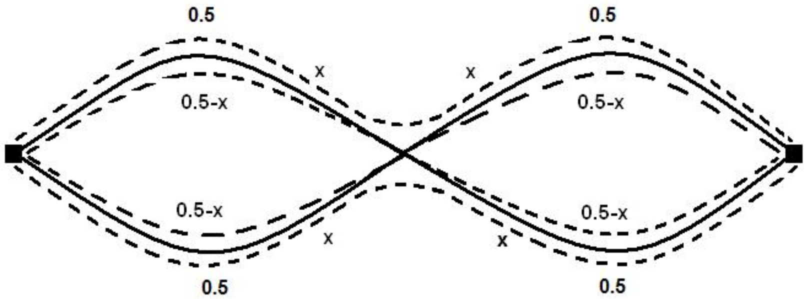


Рис. 2

Утверждение 2. *Пусть* $T > 0$ *– достаточно мало,* $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n = \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_n)^2 < \infty$. *Тогда*

$$\Psi(\vec{x}(n)) \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} \Psi(\vec{x}^*) \text{ и } \vec{x}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{п.н.} \vec{x}^*(\vec{x}(0)).$$

Причем большая часть компонент вектора $\vec{x}^*(\vec{x}(0))$ *может равняться нулю.*

Стоит заметить, что утверждение 2 является опровержением (во всяком случае, для рассмотренной динамики) гипотезы о том, что в случае не единственности равновесия Нэша–Вардропа с большой вероятностью реализуется то, которое доставляет решение следующей задачи энтропийно-линейного программирования:

$$-\sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}\left(x_p \ln\left(x_p/|P_w|\right) - x_p\right) \to \max_{\vec{x}\in X,\ \Theta\vec{x}=\vec{y}^*},$$

где $\vec{y}^*$ – единственное решение задачи $V(\vec{y}) = \sum_{e\in E}\int_0^{y_e}\tau_e(z)\,dz \to \min_{\vec{y}=\Theta\vec{x},\ \vec{x}\in X}$.

Авторы выражают благодарность С.А. Аввакумову, В.В. Веденяпину, И.В. Гнедкову, Ю.В. Дорну, В.А. Малышеву, И.С. Меньшикову, Е.А. Нурминскому, С.А. Пирогову, А.Н. Рыбко, А.А. Шананину, В.И. Швецову за ряд ценных замечаний.

Работа была проведена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (мероприятие 1.2.1, НК-15П, П949; мероприятие 1.3.1, НК-215П, П1490) и частично поддержана грантами РФФИ 10-01-00321-а, 10-01-00518а, 10-07-00620-а, 11-01-00494-а, 11-07-00162-а; ДААД A1008062 и проектом SFB701 университета г. Билефельд (Германия).

Литература

1. *Вайдлих В.* Социодинамика: системный подход к математическому моделированию в социальных науках. М.: УРСС, 2010.
2. *Веденяпин В.В.* Кинетическая уравнения Больцмана и Власова. М.: Физматлит, 2001.
3. *Malyshev V.A., Pirogov S.A., Rubco A.N.* Random walks and chemical networks // Mosc. Math. J. 2004. V. 4. № 2. P. 441–453.
4. *Батищева Я.Г., Веденяпин В.В.* II-й закон термодинамики для химической кинетики // Мат. мод. 2005. Т. 17. № 8. С. 106–110.
5. *Малышев В. А., Пирогов С. А.* Обратимость и необратимость в стохастической химической кинетике // УМН. 2008. Т. 63. № 1. С. 3–36.
6. *Ollivier Y.* A survey on Ricci curvature for metric spaces and Markov chains. 2010. http://www.yann-ollivier.org/rech/publs/surveycurvmarkov.pdf
7. *Diaconis P.* The Markov chain Monte Carlo revolution // Bulletin (New Series) of the AMS. 2009. V. 49. № 2. P. 179-205.
8. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: учеб. пособие / Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б; Приложения: Бланк М.Л., Гасникова Е.В., Замятин А.А. и Малышев В.А., Колесников А.В., Райгородский А.М; Под ред. А.В. Гасникова – М.: МФТИ, 2010. – 361 с. http://zoneos.com/traffic/, http://crec.mipt.ru/study/courses/optional/gasnikov/
9. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
10. *Швецов В.И.* Проблемы моделирования передвижений в транспортных сетях // Труды МФТИ (специальный выпуск, посвященный математическому моделированию транспортных потоков / под ред. акад. В. В. Козлова). 2010. Т. 2. № 4(8). С. 169–179.