В.Н. Разжевайкин

Использование принципов эволюционной оптимальности в задачах моделирования структурированных биологических систем

Принцип эволюционной оптимальности

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i f_i(x),\ \ i = 1, \ldots, n,$$
$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, 0, \ldots, 0); \bar{x}_i > 0,$$
$$i = 1, \ldots, m$$

Экстремальный принцип:

$$f_i(\bar{x}) = \max(f_j(\bar{x})),\ \ 1 \le i \le m,$$
$$1 \le j \le n.$$

$$\left.\left(\frac{\partial(x_i f_i(x))}{\partial x_j}\right)\right|_{x=\bar{x}} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

$$D = \|\delta_{jk} f_j(\bar{x})\|,\ m+1 \le j,k \le n,$$
$$f_i(\bar{x}) = 0,\ i = 1, \ldots, m$$

Некоторые общие результаты

$$\begin{cases} d_t x = (h_x + a(x,y))x \\ d_t y = h_y y + b(x,y) \end{cases}$$

$$t \in J = [0,T],\ T > 0,\ d_t = \frac{d}{dt},$$
$$x \in X,\ y \in Y,\ b \in C^1(X \oplus Y, Y),$$
$$a \in C^1(X \oplus Y, B(X)),$$
$$d_t w = hw + K(w),$$
$$w = (x,y) \in W = X \oplus Y,$$
$$h = \begin{pmatrix} h_x & 0 \\ 0 & h_y \end{pmatrix}.$$

Проектор P в W *допустим* по отношению к $h \Leftrightarrow$ $PD(h) \subset D(h)$ и $hP = PhP$. P является w-допустимым $\Leftrightarrow$ $Pw = w$, P допустим по

отношению к h, $PI_Y = I_Y P$,
$v \in PW \cap O(w) \Rightarrow K(v) \in PW$

Якобиан $l(\bar{w}) = l_0(\bar{w}) + l_1(\bar{w})$,
$$l_0(\bar{w}) = \begin{pmatrix} h_x + a(\bar{w}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Теорема. Пусть $\bar{w} = (\bar{x}, \bar{y})$ – устойчивое стационарное положение равновесия. Тогда для всех $\bar{w}$-допустимых проекторов P_1, P_2 в W: $P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_2 \& P_2 I_Y = P_1 I_Y$, $\exists \delta > 0$: $\Re\sigma((Q l_0(\bar{w}))_{QW}) < -\delta$. Здесь $Q = P_1 - P_2$

$0 \neq \bar{x} \in \mathrm{Ker}(h_x + a(\bar{w}))$

Модели с непрерывной возрастной структурой

$$\begin{cases} \partial x_\lambda = -m_\lambda x_\lambda,\ \lambda \in \Lambda \\ x_\lambda(0,t) = \int\limits_0^\infty b_\lambda(a) x_\lambda(a,t)da,\ \lambda \in \Lambda \end{cases}$$

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t},\ \partial = \partial_t + \partial_a,$$

$$x_\lambda = x_\lambda(a,t).$$

$$x = \{x_\lambda(\cdot,t)\},\ \lambda \in \Lambda,$$
$$m_\lambda = m_\lambda(a,x).$$

Основной результат: Если система имеет устойчивое стационарное положение равновесия $\bar{x}$, то для всех $\bar{\lambda} \in \mathrm{supp}(\bar{x})$

$$\varphi\left(\bar{\lambda}\right) = \max_{\lambda \in \Lambda}\left(\varphi\left(\lambda\right)\right)$$

$$\varphi\left(\lambda\right) = \int_{0}^{\infty} b_{\lambda}(a)\,\mathrm{exp}\left(-\int_{0}^{a} m_{\lambda}(s,\bar{x})\,ds\right)da$$

Модели с непрерывной пространственной структурой

$$\partial_t x_\lambda = h_\lambda x_\lambda + \widehat{a}_\lambda(x) x_\lambda, \qquad \lambda \in \Lambda$$

$x_\lambda = x_\lambda(\xi, t)$, $\xi \in \Omega \subset \mathbf{R^n}$ $h_\lambda x_\lambda =$
div $(A_\lambda(\xi)\,(\mathrm{grad}\, x_\lambda + x_\lambda \mathrm{grad}\, q_\lambda(\xi)))$
$A_\lambda(\xi) = \|a_\lambda^{\iota\kappa}(\xi)\|$, $\iota, \kappa = 1, \ldots, n$,
$(A_\lambda\,(\xi)\,\zeta, \zeta) \geq k_\lambda\,(\zeta, \zeta) > 0$ для
$\zeta \in \mathbf{R^n} \setminus \{0\}$. $(u, v) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i v_i$.

$$(\mathrm{grad}\, x_\lambda + x_\lambda\, \mathrm{grad}\, q_\lambda(\xi), A_\lambda(\xi)\nu(\xi)) = 0$$

для $\nu(\xi) \perp \partial\Omega$ в $\xi \in \partial\Omega$.
$\widehat{a}_\lambda(x) x_\lambda(\xi, t) = a_\lambda(x, \xi) x_\lambda(\xi, t)$
поточечно $\xi \in \Omega$,
$x = x(\cdot, t) = \{x_\lambda(\cdot, t)\}$, $\lambda \in \Lambda$.

Основной результат: Если краевая задача имеет устойчивое стационарное положение равновесия $\bar{\lambda} \in \mathrm{supp}\,(\bar{x})$ и

$$\Phi\,(\lambda, x, v) = \frac{\int\limits_{\Omega} e^{q_\lambda(\xi)} \left[(w_\lambda(\xi), A_\lambda(\xi) w_\lambda(\xi)) - a_\lambda(x,\xi) v^2(\xi) \right] d\xi}{\int\limits_{\Omega} e^{q_\lambda(\xi)} v^2(\xi)\, d\xi}$$

где

$$w_\lambda(\xi) = \mathrm{grad}\, v(\xi) + v(\xi)\, \mathrm{grad}\, q_\lambda(\xi)$$

для $\varphi\,(\lambda) = \inf_{v \neq 0} \Phi\,(\lambda, \bar{x}, v)$

$$\varphi\left(\bar{\lambda}\right) = \min_{\lambda \in \Lambda} \varphi\,(\lambda)$$

При этом $\varphi\left(\bar{\lambda}\right) = \Phi\left(\bar{\lambda}, \bar{x}, \bar{x}_{\bar{\lambda}}\right)$

Модели с непрерывной пространственно-возрастной структурой

Пусть $x_\lambda = x_\lambda(a, \xi, t)$ $\lambda \in \Lambda$,
$h_\lambda x_\lambda = \mathrm{div}\ (D_\lambda(\xi)\,\mathrm{grad}\, x_\lambda)$, где
$D_\lambda(\xi) > D_\lambda > 0$ –
$x = \{x_\lambda\}\,,\ \lambda \in \Lambda$,
$m_\lambda = m_\lambda^\xi\,(\xi, x) + m_\lambda^a\,(a, x)$

$$\begin{cases} \partial x_\lambda = (h_\lambda - m_\lambda)\, x_\lambda,\ \lambda \in \Lambda \\ x_\lambda\,(0, \xi, t) = \int\limits_0^\infty b_\lambda(a) x_\lambda\,(a, \xi, t)\, da \\ x_\lambda\,(a, \xi, t)\,|_{\xi \in \partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Основной результат: Если система имеет устойчивое стационарное положение равновесия $\bar{x}$, то все

$\bar{\lambda} \in \mathrm{supp}\,(\bar{x})$ являются решениями задачи

$$\max_{\lambda \in \Lambda} \max_{w \in H_0^1(\Omega)} \varphi\,(\lambda, \bar{x}, w)\,,$$

при $\varphi\,(\lambda, \bar{x}, w) =$

$$\int\limits_0^\infty b_\lambda(a) \exp\left(-\kappa a - M_\lambda(\bar{x}, w) - \int\limits_0^a m_\lambda^a(s, \bar{x})\, ds\right) da,$$

и $M_\lambda(\bar{x}, w) =$

$$\frac{\int\limits_\Omega \left[(D_\lambda(\xi)\,\mathrm{grad}\, w_\lambda(\xi), \mathrm{grad}\, w_\lambda(\xi)) - m_\lambda^\xi(\xi, \bar{x}) w_\lambda^2(\xi)\right] d\xi}{\int\limits_\Omega w_\lambda^2(\xi) d\xi}.$$

Более того
$\bar{x}_{\bar{\lambda}}(a,\xi) = \bar{v}_{\bar{\lambda}}(a)\bar{w}_{\bar{\lambda}}(\xi)$ при
$\bar{w}_{\bar{\lambda}}(\xi)$, доставляющем
минимум $M_{\bar{\lambda}}(\bar{x}, w)$ на $H_0^1(\Omega)$,
равный $-\kappa_{\bar{\lambda}}$, и $\bar{v}_{\bar{\lambda}}(a)$, –
решение краевой задачи

$$\begin{cases} \partial_a v_{\bar{\lambda}}(a) = \Big(\kappa_{\bar{\lambda}} - m^a_{\bar{\lambda}}(a,\bar{x})\Big)\, v_{\bar{\lambda}}(a), \\ v_{\bar{\lambda}}(0) = \int\limits_0^\infty b_{\bar{\lambda}}(a) v_{\bar{\lambda}}(a)\,da. \end{cases}$$

Приложение. Задача корреляционной адаптометрии

$$u = u(x,t),\ x \in \Omega \subset \mathbf{R^n},$$

$$\partial_t u = a\Delta u - (\mathbf{b}, \operatorname{grad} u)$$

$$(\mathbf{b}u - a\nabla u, \nu)|_{\partial\Omega} = 0$$

$$s(\mathbf{b}) :\ \nu(\mathbf{s}(\mathbf{b})) \parallel \mathbf{b},$$
$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \text{ в } \mathbf{R^n}\ s(\mathbf{b}) = 0,$$
$$\mathbf{b} = -b\mathrm{e_n},\ b \geq 0$$

$$u(\xi) = v(\xi_n) = v_0 e^{-\frac{b\xi_n}{a}}$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \xi_i,\ \psi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \xi_i$$

$$M\varphi(\xi_1, ..., \xi_n) = \frac{\int\limits_{\Omega} \varphi(\xi) u(\xi)\, d\xi}{\int\limits_{\Omega} u(\xi)\, d\xi}$$

$$K(\varphi,\psi)=\frac{M[(\varphi-M\varphi)(\psi-M\psi)]}{\sqrt{M[(\varphi-M\varphi)^2]M[(\psi-M\psi)^2]}}$$

$$\partial\Omega=\left\{\xi:\ \ \xi_n=\sum_{i=1}^{n-1}a_i\xi_i^2+o\left(\xi^2\right)\right\},$$

где все $a_i>0,\ i=1,...,n-1.$

Пусть

$$\bar{\varphi}=\left(\frac{\varphi_1}{\sqrt{a_1}},...,\frac{\varphi_{n-1}}{\sqrt{a_{n-1}}},0\right).$$

Основной результат: для ненулевых $\bar{\varphi}$, $\bar{\psi}$ и $b\to\infty$

$$K(\varphi,\psi)\to\frac{\left(\bar{\varphi},\bar{\psi}\right)}{\sqrt{(\bar{\varphi},\bar{\varphi})\left(\bar{\psi},\bar{\psi}\right)}}.$$

Литература

1. *Разжевайкин В.Н.*, 1991, Связь устойчивости и оптимальности в микроэволюционных распределенных системах квазилинейного типа. М.: Вычислительный центр РАН. 47 с.

2. *Разжевайкин В.Н.*, 1994. Устойчивость и эволюционная оптимальность приложения квазилинейной теории к конкретным распределенным биологическим системам. М.: Вычислительный центр РАН. 34 с.

3. *Разжевайкин В.Н.*, 2010, Принцип эволюционной оптимальности как инструмент моделирования структурированных биологических систем. Ж. общей биологии. Т. 71, № 1. С. 75–84

4. *Разжевайкин В.Н.*, 2010, Функционалы отбора в автономных моделях биологических систем с непрерывной возрастной и пространственной структурой. Ж. вычислительной математики и математической физики. Т.50, № 2. С. 338–346