L'Espace de Nash d'un idéal de Bautin

Jean-Pierre Françoise, Lubomir Gavrilov and Dongmei Xiao

UPMC, CNRS, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Institut de mathématiques de Toulouse and School of Mathematics SJTU

10/29/2016

Plan

1. Introduction
2. Les centres quadratiques et l'idéal de Bautin
3. L'espace des arcs de Nash et la fonction de bifurcation principale
4. Espace des arcs de Nash de l'ensemble des centres quadratiques
5. Finitude des nombres d'Iliev
6. Conclusion

Plan

1. Introduction
2. Les centres quadratiques et l'idéal de Bautin
3. L'espace des arcs de Nash et la fonction de bifurcation principale
4. Espace des arcs de Nash de l'ensemble des centres quadratiques
5. Finitude des nombres d'Iliev
6. Conclusion

Le 16ème problème de Hilbert "tangentiel"

On considère le feuilletage défini dans le plan par une 1-forme polynômiale:

$$\omega = dH + \epsilon[f(x,y)dy - g(x,y)dx] = 0, \tag{1}$$

où $H(x,y)$ est un polynôme de degré $n+1$ et $f(x,y), g(x,y)$ sont des polynômes de degré n.
On suppose que les lignes de niveaux de $H, H = h, \quad h_0 < h < h_1$ contiennent des ovales γ_h et que $H = h_0$ est réduit à un point isolé, point critique de H. On dit que l'Hamiltonien H possède un anneau périodique.
La dérivée de l'application de premier retour, ici appelée la première fonction de bifurcation est proportionnelle à

$$M_1(h) = \int_{H=h} [f(x,y)dy - g(x,y)dx]. \tag{2}$$

On suppose que $I_1(h)$ n'est pas identiquement nulle. Dans ces conditions le nombre de cycle limite présenté par ω pour $\epsilon \to 0$ est donné par le nombre de zéros isolés de $M_1(h)$.

Fonctions de bifurcation d'ordre supérieur

Il peut se produire (par exemple pour des raisons de symmétrie) que

$$M_1(h) = \int_{H=h} [f(x,y)dy - g(x,y)dx] \equiv 0. \tag{3}$$

Dans ce cas, il faut calculer les fonctions de bifurcation d'ordre supérieur. La première qui est non-identiquement nulle est appelée la fonction de bifurcation principale.

Le cas des pertubations d'Hamiltoniens génériques

On dit qu'un polynôme H satisfait la propriété (*) si pour toute 1-forme polynomiale ω telle que

$$M_1(h) = \int_{H=h} [f(x,y)dy - g(x,y)dx] \equiv 0, \tag{4}$$

il existe des polynômes g et R tels que $\omega = gdH + dR$.

Theorem

(JPF, 1996) On considère une perturbation polynômiale:

$$\omega = dH + \epsilon[f(x,y)dy - g(x,y)dx], \tag{5}$$

où $H(x,y)$ est un polynôme de degré $n+1$ et $f(x,y), g(x,y)$ sont des polynômes de degré n. On suppose que H satisfait la propriété (*) et que les fonctions de bifurcations $M_1(h), ..., M_k(h)$ sont identiquement nulles jusqu'à l'ordre k, alors il existe une suite de polynômes $g_1, ..., g_k; R_1, ..., R_k$ telles que $g_i\omega = g_{i+1}dH + dR_{i+1}$ et la fonction de bifurcation d'ordre $k+1$ est donnée par:

$$M_{k+1}(h) = \int_{H=h} g_k\omega. \tag{6}$$

Extension à des perturbations de centres

Plus généralement, on peut s'intéresser aux perturbations de centres qui ne sont pas des Hamiltoniens génériques ou pas forcément hamiltoniens. Considérons l'exemple des champs quadratiques tangents à l'origine à une rotation.

Plan

1 Introduction

2 Les centres quadratiques et l'idéal de Bautin

3 L'espace des arcs de Nash et la fonction de bifurcation principale

4 Espace des arcs de Nash de l'ensemble des centres quadratiques

5 Finitude des nombres d'Iliev

6 Conclusion

Champs de vecteurs quadratiques au voisinage d'un centre linéaire

La forme normale de Kapteyn d'un champ de vecteurs quadratique près d'un centre linéaire est:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy - \lambda_6 y^2, \\ \dot{y} &= x + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Il s'agit en fait d'une carte locale affine de l'espace des champs quadratiques modulo l'action du groupe des rotations.

L'idéal de Bautin

Pour ce choix de paramètres, l'idéal de Bautin est engendré par:

$$\begin{aligned} v_1(\lambda) &= \lambda_1, \\ v_2(\lambda) &= \lambda_5(\lambda_3 - \lambda_6), \\ v_3(\lambda) &= \lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)(\lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6), \\ v_4(\lambda) &= \lambda_2\lambda_4(\lambda_3 - \lambda_6)^2(\lambda_3\lambda_6 - 2\lambda_6^2 - \lambda_2^2) \end{aligned} \tag{8}$$

La varété algébrique affine définie par cet idéal s'appelle la variété du centre et elle est nôtée C.

La variété du centre

La variété du centre a quatre composantes irréductible nôtées I_1, I_2, I_3, I_4:

$$I_1 : \lambda_1 = 0, \lambda_3 - \lambda_6 = 0 \tag{9}$$

$$I_2 : \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_5 = 0 \tag{10}$$

$$I_3 : \lambda_1 = 0, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 0 \tag{11}$$

$$I_4 : \lambda_1 = 0, \lambda_5 = 0, \lambda_4 + 5\lambda_3 - 5\lambda_6 = 0, \lambda_3\lambda_6 - 2\lambda_6^2 - \lambda_2^2 = 0. \tag{12}$$

On peut les identifier (avec un peu de soin) avec LV, R, H and Q_4, Lotka-Volterra, Reversible, Hamiltonien et codimension quatre.

Anneau périodique

Un anneau périodique ouvert Π d'un champ de vecteurs polynomial du plan X_0:

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \tfrac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \tag{13}$$

est une union d'orbites périodiques de X_0, homéomorphe à l'anneau standard $\mathbb{S}^1 x(0, 1)$, l'image de chaque orbite périodique étant un cercle. On suppose que $X_0(0, 0) = 0$ et que la partie linéaire de X_0 à $(0, 0)$ est une rotation.

Intégrales premières logarithmiques

Definition

Etant donnés des polynômes $f_1, ..., f_s \in \mathbb{C}[x, y]$ de degrés $d_1, ..., d_s$ et des nombres complexes $\lambda_i \in \mathbb{C}, i = 1, ..., s.$, on défini $\mathcal{F}(\omega_0)$ comme le feuilletage holomorphe $\mathbb{C}^2$ associé à la 1-forme polynomiale:

$$\omega_0 = f_1 ... f_s(\Sigma_{i=1}^s \lambda_i \frac{df_i}{f_i}), \tag{14}$$

où df est la différentielle du polynôme f. On note $\mathcal{L}(d_1, ..., d_s)$ l'ensemble des 1 formes ω_0 de degrés $d_i, i = 1, ..., s$ des $f_i, i = 1, ..., s$ fixés.

L'ensemble $\mathcal{L}(d_1, ..., d_s)$ est une variété algèbrique irréductible paramétrée par les λ_i et les coefficients des polynômes f_i, $i = 1, ..., s.$. La 1-forme ω_0 est polynomiale de degré inférieur ou égal à $d = \Sigma_{i=1}^s d_i - 1$.

Anneau périodique associé à un centre quadratique

La composante *LV*, appelée la composante Lotka-Volterra est l'adhérence de Zariski de $\mathcal{L}(1,1,1)$. La composante réversible *R* est l'adhérence de Zariski de $\mathcal{L}(1,2)$. La composante Hamiltonienne est exactement $\mathcal{L}(3)$. La composante Q_4 est l'adhérence de Zariski de $\mathcal{L}(2,3)$ intersecté par l'ensemble des formes différentielles quadratiques. Plus précisément, il existe un paramètre $\alpha = \cos(\xi/2)$ tel que:

$$\begin{aligned} f_2 &= x^2 + 4y + 1 \\ f_3 &= \alpha x(x^2 + 6y) + 6y + 1, \end{aligned} \tag{15}$$

et on peut vérifier que $\omega_0 = 3f_3 df_2 - 2f_2 df_3$ est de degré 2.

Cyclicité locale, cyclicité globale

Considérons une famille X_λ de champ de vecteurs polynomiaux du plan qui est une perturbation de $X_\lambda*$ en $(0,0)$ et où les λ sont les coefficients de la perturbation. Pour un ensemble compact $K \subset \Pi$, on définit la cyclicité $Cycl(K, X_\lambda*, X_\lambda)$ comme le nombre maximum de cycle limite du champ X_λ qui tendent dans K lorsque λ tends vers $\lambda*$. On peut ensuite définir la cyclicité de l'anneau périodique ouvert:

$$Cycl(\Pi, X_\lambda*, X_\lambda) = sup_{K\subset\Pi} Cycl(K, X_\lambda*, X_\lambda)\}. \tag{16}$$

D'une façon équivalente, soit Σ une cross-section de Π, $P_\lambda : \Sigma \to \Sigma$ l'application de premier retour et $F(., \lambda) = P_\lambda - id$ l'application déplacement. Les cycles limites de X_λ correspondent to aux zéros isolés de $F(., \lambda)$. La cyclicité $Cycl(K, X_\lambda*, X_\lambda)$ est le nombre maximum de zéros de l'applcation déplacement $x \mapsto F(x, \lambda)$ sur $K \cap \Sigma$ quand $\lambda \to \lambda*$.
La finitude de la cyclicité d'un anneau périodique (fermé ou ouvert) d'un champ de vecteurs polynomial du plan est un problème ouvert appelé le 16ème problème de Hilbert sur un anneau périodique.

Cyclicité le long d'un arc

Etant donné un arc analytique $\alpha : \epsilon \mapsto \underline{\lambda}(\epsilon), \underline{\lambda}(0) = \lambda*$ et la famille à un paramètre induite $X_{\underline{\lambda}(\epsilon)}$, nous avons bien sûr:

$$Cycl(\Pi, X_{\lambda}*, X_{\underline{\lambda}(\epsilon)}) \leq Cycl(\Pi, X_{\lambda}*, X_{\lambda}). \tag{17}$$

Si $Cycl(\Pi, X_{\lambda}*, X_{\lambda}) < +\infty$, alors (cf. L. Gavrilov,2008)

Theorem

Il existe un arc analytique $\alpha : \epsilon \mapsto \underline{\lambda}(\epsilon), \underline{\lambda}(0) = \lambda*$ *tel que:*

$$Cycl(\Pi, X_{*}, X_{\underline{\lambda}(\epsilon)}) = Cycl(\Pi, X_{\lambda}*, X_{\lambda}). \tag{18}$$

Perturbations essentielles

- Le théorème précédent ne permet pas de construire explicitement des exemples d'arcs qui réalisent le maximum de cyclicité.
- Une perturbation essentielle est une famille d'arcs qui réalise le maximum de cyclicité avec le minimum de paramètres.
- Pour préciser cette notion, la théorie de l'espace des arcs de Nash est la plus efficace.
- Elle permet aussi de préciser le lien entre les fonctions de bifurcations principales et l'idéal de Bautin.

Plan

1 Introduction

2 Les centres quadratiques et l'idéal de Bautin

3 L'espace des arcs de Nash et la fonction de bifurcation principale

4 Espace des arcs de Nash de l'ensemble des centres quadratiques

5 Finitude des nombres d'Iliev

6 Conclusion

Espace des arcs/jets de Nash

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique zéro, I_X un idéal de $\mathbb{K}[\lambda_1, ..., \lambda_l]$ et $X = \mathrm{Spec}[\mathbb{K}[\lambda_1, ..., \lambda_l]/I_X]$ la variété algèbrique définie par l'idéal I_X. L'espace des m-jets d'arcs sur X est défini par

$$X_m = \{\mathrm{Spec}\mathbb{K}[\underline{\lambda}^{(0)}, ..., \underline{\lambda}^{(m)}]/(v^{(0)}, ..., v^{(m)}), v \in I_X\}, \tag{19}$$

où $\underline{\lambda}^{(n)} = \lambda_1^{(n)}, ..., \lambda_l^{(n)}$ et

$$v(\Sigma_{n\geq 0}\underline{\lambda}^{(n)}\epsilon^n) = \Sigma_{n\geq 0} v^{(n)}\epsilon^n. \tag{20}$$

Plus généralement l'espace des m-jets d'arcs d'un $\mathbb{K}$-schèma X is equipped with a natural $\mathbb{K}$-schèma. Si X est un $\mathbb{K}$-schèma de type fini, il en est de même de X_m. Pour $m' \geq m$, l'application naturelle $X_{m'} \mapsto X_m$ est un morphisme affine et donc, la limite projective des X_m est un $\mathbb{K}$-schèma. Cette limite est l'espace des arcs de Nash X_∞ de X. Il y a une projection naturelle $j_0 : X_\infty \mapsto X$ et pour un élément $\alpha \in X_\infty$, le point $j_0(\alpha)$ est appelé le centre de α.

L'idéal de Bautin et les facteurs

Considérons l'application déplacement définie sur la section transverse Σ, dont les coefficients du développement de Taylor sont des polynômes en $\underline{\lambda}$:

$$F(x, \underline{\lambda}) = \Sigma_{k=1}^{+\infty} F_k(\underline{\lambda}) x^k, x \in \Sigma \tag{21}$$

Comme l'anneau $\mathbb{R}[\underline{\lambda}]$ est Noetherien, il existe un sous-ensemble fini de coefficients $(F_{i_1}(\underline{\lambda}), ..., F_{i_N}(\underline{\lambda}))$ qui engendrent l'idéal des coefficients $F(x, \underline{\lambda})$. Ces coefficients sont appelés les générateurs canonique de l'idéal de Bautin.
Il existe N functions $x^{i_j} b_j(x, \underline{\lambda}), j = 1, ...N$ analytiques sur Σ appelées les facteurs (relativement aux générateurs de l'idéal de Bautin) telles que:

$$\begin{aligned} F(x, \underline{\lambda}) = \Sigma_{j=1}^{N} F_{i_j}(\underline{\lambda}) x^{i_j} b_j(x, \underline{\lambda}), \\ b_j(0, \underline{\lambda}) = 1. \end{aligned} \tag{22}$$

Idéal de Bautin et les arcs

Il est plus commode de noter dans la suite $v_j(\underline{\lambda}) = F_{i_j}(\underline{\lambda}), j = 1, ...N$. Rappelons que N est appelé l'indice de Bautin.

$$F(x, \underline{\lambda}) = \Sigma_{j=1}^{N} v_j(\underline{\lambda}) x^{i_j} b_j(x, \underline{\lambda}),$$
$$1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_N, \; i_j \in \mathbb{N}, \; b_j(0, \underline{\lambda}) = 1. \tag{23}$$

Etant donné un arc $\lambda(\epsilon)$ tel que $\lambda(0) = \lambda*$, on écrit:

$$v_j(\lambda(\epsilon)) = \Sigma_r \overline{v}_{j,r} \epsilon^r, \tag{24}$$

où les $\overline{v}_{j,r}$ sont des polynômes en les coefficents $\lambda_{i,l}$, tels que $\lambda_i(\epsilon) = \Sigma_l \lambda_{i,l} \epsilon^l$. Ces polynômes définissent l'espace de Nash des arcs de la variété algébrique affine définie par l'idéal de Bautin $(v_1, ..., v_N)$.

La fonction de bifurcation principale associée à un arc

Definition

La fonction de bifurcation principale d'un arc analytique $\alpha : [0, a[\to \Lambda$ centré en $\lambda* \in C$ est la fonction $M_k^\alpha(x) = M_k(x)$ telle que:

$$F(x, \alpha(\epsilon)) = M_k^\alpha(x)\epsilon^k + O(\epsilon^{k+1}). \qquad (25)$$

Par le théorème de préparation de Weierstrass, la cyclicité de $\{X_{\underline{\lambda}(\varepsilon)}\}$ est bornée par le nombre de zéros de la fonction de bifurcation principale $M_k^\alpha(x)$.

Le théorème de C. Chicone et P. Jacobs revisité

Proposition

Il existe N fonctions linéairement indépendantes $x^{i_j}B_j(x)$ analytiques en $x \in [0, h[$ avec $B_j(0) = 1$ telles que:

$$M_k(x) = \Sigma_{j=1}^{N} \overline{v}_{j,k} x^{i_j} B_j(x).$$

Plan

1 Introduction

2 Les centres quadratiques et l'idéal de Bautin

3 L'espace des arcs de Nash et la fonction de bifurcation principale

4 Espace des arcs de Nash de l'ensemble des centres quadratiques

5 Finitude des nombres d'Iliev

6 Conclusion

Arcs centrés en un point de la composante Lotka-Volterra

La composante irréductible I_1 des centres de type Lotka-Volterra est donnée par les équations: $\lambda_1 = 0, \lambda_3 = \lambda_6$. Considérons un point λ^* de cette composante. On dit qu'il est générique si $\lambda_{(5,0)}, \lambda_{(2,0)}$ et $\lambda_{(4,0)}$ sont non nuls. L'espace de Nash des arcs considéré ici, $V_\infty^{I_1}$ est l'espace des arcs de C centrés en un point générique de I_1.

$$\begin{aligned} \overline{v}_{1,1} &= \lambda_{1,1}, \\ \overline{v}_{2,1} &= \lambda_{5,0}(\lambda_{3,1} - \lambda_{6,1}), \\ \overline{v}_{3,1} &= \lambda_{2,0}\lambda_{4,0}^2(\lambda_{3,1} - \lambda_{6,1}), \\ \overline{v}_{4,1} &= 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Supposons qu'un arc satisfasse $\overline{v}_{j,r} = 0$, pour $r = 1, ...k - 1$, alors on a $\lambda_{3,r} - \lambda_{6,r} = 0$ pour tout $r = 1, ..., k - 1$ et:

$$\begin{aligned} \overline{v}_{1,k} &= \lambda_{1,k}, \\ \overline{v}_{2,k} &= \lambda_{5,0}(\lambda_{3,k} - \lambda_{6,k}), \\ \overline{v}_{3,k} &= \lambda_{2,0}\lambda_{4,0}^2(\lambda_{3,k} - \lambda_{6,k}), \\ \overline{v}_{4,k} &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Fonction de bifurcation principale

Ceci permet de comprendre la forme de $M_k(x) = \Sigma_j \overline{v}_{j,k} x^{l_j} B_j(x)$ pour n'importe quel arc de centre générique dans I_1. Toutes les valeurs possibles des fonctions de bifurcations principales sont déjè obtenues dès le premier ordre (noté k_* par Iliev) $k_* = 1$ en se limitant aux arcs:

$$\lambda_1(\epsilon) = \lambda_{1,1}\epsilon; \lambda_2(\epsilon) = \lambda_{2,0}; \lambda_3(\epsilon) = \lambda_{3,0}; \lambda_4(\epsilon) = \lambda_{4,0}; \lambda_5(\epsilon) = \lambda_{5,0}; \lambda_{6,0} = \lambda_{6,0} + \lambda_{6,1}\epsilon,$$

avec $\lambda_{3,0} = \lambda_{6,0}$.
Une telle perturbation est appelée par Iliev, “perturbation essentielle". On peut choisir comme paramètres essentiels $\lambda_{1,1}, \lambda_{6,1}$.

Représentation projective

Etant donné un arc analytique α qui n'est pas contenu dans C,

$$\alpha : \epsilon \mapsto (\lambda_1(\epsilon), ..., \lambda_6(\epsilon)), \tag{28}$$

il existe un k tel que $M_k^\sigma(x) \neq 0$.
Considérons le point $[v_1(\underline{\lambda}(\epsilon)) : ... : v_4(\underline{\lambda}(\epsilon))] \in \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}[v_1(\underline{\lambda}(\epsilon)) : ... : v_4(\underline{\lambda}(\epsilon))] &= [\epsilon^k \overline{v}_{1,k} : ... : \epsilon^k \overline{v}_{4,k}] + O(\epsilon) \\ &= [\overline{v}_{1,k} : ... : \overline{v}_{4,k}] + O(\epsilon).\end{aligned} \tag{29}$$

Cela fait sens de prendre la limite:

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \to 0}[v_1(\underline{\lambda}(\epsilon)) : ... : v_4(\underline{\lambda}(\epsilon))] &= [\overline{v}_{1,k} : ... : \overline{v}_{4,k}] \\ &= [\frac{\lambda_{1,k}}{\lambda_{3,k} - \lambda_{6,k}} : \lambda_{5,0} : \lambda_{2,0}\lambda_{4,0}^2 : 0].\end{aligned} \tag{30}$$

Pour l'ensemble des arcs de la perturbation essentielles α, on obtient la droite projective $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$: $E = \{[s : \lambda_{5,0} : \lambda_{2,0}\lambda_{4,0}^2 : 0], s \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\}$.

Arcs centrés en un point de la composante réversible

La composante I_2 est définie par les équations $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_5 = 0$. Considérons d'abord l'espace des arcs $V_\infty^{I_2}$. Les polynômes $v_{j,1}$ s'écrivent:

$$\begin{aligned}
\overline{v}_{1,1} &= \lambda_{1,1}, \\
\overline{v}_{2,1} &= \lambda_{5,1}(\lambda_{3,0} - \lambda_{6,0}), \\
\overline{v}_{3,1} &= \lambda_{2,1}\lambda_{4,0}(\lambda_{3,0} - \lambda_{6,0})(\lambda_{4,0} + 5\lambda_{3,0} - 5\lambda_{6,0}), \\
\overline{v}_{4,1} &= \lambda_{2,1}\lambda_{4,0}(\lambda_{3,0} - \lambda_{6,0})^2(\lambda_{3,0}\lambda_{6,0} - 2\lambda_{6,0}^2).
\end{aligned} \tag{31}$$

Il est naturel de décider qu'un point, au vue des équations de l'espace des arcs, qu'un “point générique" de cette composante irréductible caractérisé par les conditions $\lambda_{3,0} - \lambda_{6,0} \neq 0$,, $\lambda_{4,0} \neq 0$, $\lambda_{4,0} + 5\lambda_{3,0} - 5\lambda_{6,0} \neq 0$ et $\lambda_{3,0}\lambda_{6,0} - 2\lambda_{6,0}^2 \neq 0$.

Arcs centrés en un point de la composante réversible

Il est facile de poursuivre et de découvrir les “perturbations essentielles " au sens d'Iliev dans ce cas. On peut en effet vérifier que $k* = 1$ parce que supposant $\overline{v}_{i,j} = 0, i = 1, ..., 4; j = 0, ...k - 1$ on obtient:

$$\begin{aligned} \overline{v}_{1,k} &= \lambda_{1,k}, \\ \overline{v}_{2,k} &= \lambda_{5,k}(\lambda_{3,0} - \lambda_{6,0}), \\ \overline{v}_{3,k} &= \lambda_{2,k}\lambda_{4,0}(\lambda_{3,0} - \lambda_{6,0})(\lambda_{4,0} + 5\lambda_{3,0} - 5\lambda_{6,0}), \\ \overline{v}_{4,k} &= \lambda_{2,k}\lambda_{4,0}(\lambda_{3,0} - \lambda_{6,0})^2(\lambda_{3,0}\lambda_{6,0} - 2\lambda_{6,0}^2). \end{aligned} \tag{32}$$

et $\lambda_{1,j} = 0, \lambda_{2,j} = 0, \lambda_{5,j} = 0, j = 1, ...k - 1.$
Un choix possible de paramètres essentiels est: $\lambda_{1,1}, \lambda_{2,1}, \lambda_{5,1}$ et le nombre de paramètres essentiels est 3.

Représentation projective

Etant donné un arc analytique α qui n'est pas contenu dans C, on peut prendre la limite:

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0}[v_1(\underline{\lambda}(\epsilon)) : \dots : v_4(\underline{\lambda}(\epsilon))]\\ =&[\frac{\lambda_{1,k}}{\lambda_{2,k}} : \frac{\lambda_{5,k}}{\lambda_{2,k}}(\lambda_{3,0}-\lambda_{6,0}) : \lambda_{4,0}(\lambda_{3,0}-\lambda_{6,0})(\lambda_{4,0}+5\lambda_{3,0}-5\lambda_{6,0})\\ &: \lambda_{4,0}(\lambda_{3,0}-\lambda_{6,0})^2(\lambda_{3,0}\lambda_{6,0}-2\lambda_{6,0}^2)].\end{aligned} \tag{33}$$

Il est alors possible d'associer aux arcs λ avec un centre générique dans I_2 un plan projectif $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}E =&[s_1 : s_2 : \lambda_{4,0}(\lambda_{3,0}-\lambda_{6,0})(\lambda_{4,0}+5\lambda_{3,0}-5\lambda_{6,0})\\ &: \lambda_{4,0}(\lambda_{3,0}-\lambda_{6,0})^2(\lambda_{3,0}\lambda_{6,0}-2\lambda_{6,0}^2)],\ s_1, s_2 \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}.\end{aligned} \tag{34}$$

Arcs centrés en un point de la composante Hamiltonienne

Nous pouvons considérer les arcs centrés en un point générique de I_3. Les calculs sont tout à fait analogue aux deux cas précédents et ils ne seront pas répétés dans l'exposé. On a encore $k_* = 1$ et le nombre de paramètres essentiels est 3.

Arcs centrés sur la composante I_4

Considérons un arc centré en un point de I_4. Le 1-jet de cet arc est:

$$\begin{aligned} \overline{v}_{1,1} &= \lambda_{1,1}, \\ \overline{v}_{2,1} &= \lambda_{5,1}(\lambda_{3,0}-\lambda_{6,0}), \\ \overline{v}_{3,1} &= \lambda_{2,0}\lambda_{4,0}(\lambda_{3,0}-\lambda_{6,0})(\lambda_{4,1}+5\lambda_{3,1}-5\lambda_{6,1}), \\ \overline{v}_{4,1} &= \lambda_{2,0}\lambda_{4,0}(\lambda_{3,0}-\lambda_{6,0})^2(\lambda_{3,1}\lambda_{6,0}+\lambda_{3,0}\lambda_{6,1}-4\lambda_{6,0}\lambda_{6,1}-2\lambda_{2,0}\lambda_{2,1}). \end{aligned} \tag{35}$$

Il est naturel de définir un point générique de I_4 comme un point tel que $\lambda_{1,0}=\lambda_{5,0}=\lambda_{4,0}+5\lambda_{3,0}-5\lambda_{6,0}=\lambda_{3,0}\lambda_{6,0}-2\lambda_{6,0}^2-\lambda_{2,0}^2=0$ et $\lambda_{2,0}\lambda_{4,0}(\lambda_{3,0}-\lambda_{6,0})\neq 0$.
L'annulation de $\overline{v}_{i,1}$, $i=1,...4$ donne:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,1} &= 0, \\ \lambda_{5,1} &= 0, \\ \lambda_{4,1}+5\lambda_{3,1}-5\lambda_{6,1} &= 0, \\ \lambda_{3,1}\lambda_{6,0}+\lambda_{3,0}\lambda_{6,1}-4\lambda_{6,0}\lambda_{6,1}-2\lambda_{2,0}\lambda_{2,1} &= 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Arcs centrés sur la composante I_4

En général, nous trouvons pour tout k:

$$\begin{aligned}
\overline{v}_{1,k} &= \lambda_{1,k}, \\
\overline{v}_{2,k} &= \lambda_{5,k}(\lambda_{3,0} - \lambda_{6,0}), \\
\overline{v}_{3,k} &= \lambda_{2,0}\lambda_{4,0}(\lambda_{3,0} - \lambda_{6,0})(\lambda_{4,k} + 5\lambda_{3,k} - 5\lambda_{6,k}), \\
\overline{v}_{4,k} &= \lambda_{2,0}\lambda_{4,0}(\lambda_{3,0} - \lambda_{6,0})^2(\lambda_{3,k}\lambda_{6,0} + \lambda_{3,0}\lambda_{6,k} - 4\lambda_{6,0}\lambda_{6,k} - 2\lambda_{2,0}\lambda_{2,k}).
\end{aligned} \tag{37}$$

Le nombre $k_* = 1$ et la codimension est égale à 4.

Arcs centrés à l'intersection de I_1 et I_2

Considérons le cas d'un arc centré en un point de l'intersection de I_1 et I_2. L'espace de Nash concerné ici est $V_\infty^{I_1 \cap I_2}$. De tels arcs sont centrés en :

$$\lambda_{1,0} = \lambda_{3,0} - \lambda_{6,0} = \lambda_{2,0} = \lambda_{5,0} = 0. \tag{38}$$

On suppose que le centre est "générique" $\lambda_{4,0} \neq 0$. La projection sur les 1-jets d'arcs donne:

$$\begin{aligned} \overline{v}_{1,1} &= \lambda_{1,1}, \\ \overline{v}_{2,1} &= 0, \\ \overline{v}_{3,1} &= 0, \\ \overline{v}_{4,1} &= 0. \end{aligned} \tag{39}$$

Pour l'annuler, on a une seule condition $\lambda_{1,1} = 0$. Ceci supposé, on calcule le 2-jet:

Arcs centrés à l'intersection de I_1 et I_2

$$\begin{aligned}
\overline{v}_{1,2} &= \lambda_{1,2}, \\
\overline{v}_{2,2} &= \lambda_{5,1}(\lambda_{3,1} - \lambda_{6,1}), \\
\overline{v}_{3,2} &= \lambda_{2,1}\lambda_{4,0}^{2}(\lambda_{3,1} - \lambda_{6,1}), \\
\overline{v}_{4,2} &= 0.
\end{aligned} \tag{40}$$

Son annulation conduit à $\lambda_{3,1} - \lambda_{6,1} = 0$ ou $\lambda_{5,1} = \lambda_{2,1} = 0$ et bien sûr $\lambda_{1,1} = 0$.

Arcs centrés à l'intersection de l_1 et l_2

Le calcul du 3-jet donne:

$$\begin{aligned}
\overline{v}_{1,3} &= \lambda_{1,3},\\
\overline{v}_{2,3} &= \lambda_{5,1}(\lambda_{3,2}-\lambda_{6,2}),\\
\overline{v}_{3,2} &= \lambda_{2,1}\lambda_{4,0}^2(\lambda_{3,2}-\lambda_{6,2}),\\
\overline{v}_{4,2} &= 0,
\end{aligned} \tag{41}$$

et son annulation conduit à $\lambda_{3,2}-\lambda_{6,2}=0$ ou $\lambda_{5,1}=\lambda_{2,1}=0$ et de plus $\lambda_{1,3}=0$. L'autre possibilité est

$$\begin{aligned}
\overline{v}_{1,3} &= \lambda_{1,3},\\
\overline{v}_{2,3} &= \lambda_{5,2}(\lambda_{3,1}-\lambda_{6,1}),\\
\overline{v}_{3,3} &= \lambda_{2,2}\lambda_{4,0}^2(\lambda_{3,1}-\lambda_{6,1}),\\
\overline{v}_{4,2} &= 0,
\end{aligned} \tag{42}$$

et son annulation conduit à $\lambda_{3,1}-\lambda_{6,1}=0$ ou $\lambda_{5,2}=\lambda_{2,2}=0$. Il est alors clair que la situation se stabilise. L'entier k_* est ici $k_*=2$.
Pour décrire toutes les fonctions de bifurcations principales, il suffit de considérer les 2-jets d'arcs.

Arcs centrés à l'intersection de I_1 et I_2

Pour les perturbations essentielles, on peut prendre $\lambda_{1,2}$,$\lambda_{2,1}$ and $\lambda_{5,1}$ et fixer arbitrairement $\lambda_{3,1}$ et $\lambda_{6,1}$ en sorte que $\lambda_{3,1} - \lambda_{6,1} \neq 0$. Notons que pour tout k, $\overline{v}_{4,k} = 0$.

Représentation projective

Etant donné un α qui n'est pas contenu dans C, il existe (s_1, s_2) tels que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0}[v_1(\underline{\lambda}(\epsilon)) : \ldots : v_4(\underline{\lambda}(\epsilon))] &= [\overline{v}_{1,k} : \ldots : \overline{v}_{4,k}] \\ &= [s_1 : s_2 : \lambda_{4,0}^2 : 0]. \end{aligned} \tag{43}$$

Il est alors possible d'associer à l'ensemble des arcs α un plan projectif $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$:
$E = \{[s_1 : s_2 : \lambda_{4,0}^2 : 0], s_1, s_2 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}\}$.

Un premier message

Dans les années 2005, plusieurs contributions marquantes au sujet ont permis de discuter des extensions possibles du calcul de la fonction de bifurcation principale (Hamiltoniens non génériques, Darboux, reversibles). Travaux de Gavrilov, Gentes, Iliev, Jebrane, Li Zhengzhi, Movasati, Novikov, Pelletier, Roussarie, Zoladek.

L'approche Espace des arcs de Nash permet de:

- Une caractérisation beaucoup plus fine des cas où il faut calculer les fonctions de bifurcation d'ordre supérieur.
- On ne calcule pas d'intégrales!

Perturbation d'une équation de Liénard intégrable

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \frac{1}{2}x^2 \\ \dot{y} &= x \end{aligned} \tag{44}$$

Dans ce cas $\lambda_{1,0} = 0, \lambda_{2,0} = 0, \lambda_{3,0} = -\frac{1}{2}, \lambda_{4,0} = 1, \lambda_{5,0} = 0, \lambda_{6,0} = 0.$ Ce centre appartient à la composante irréversible I_2. On a de plus:
$\lambda_{3,0} - \lambda_{6,0} = -\frac{1}{2} \neq 0$, $\lambda_{4,0} = 1 \neq 0$, $\lambda_{4,0} + 5\lambda_{3,0} - 5\lambda_{6,0} = -\frac{3}{2} \neq 0$ mais $\lambda_{3,0}\lambda_{6,0} - 2\lambda_{6,0}^2 = 0$.
Donc ce n'est pas un point générique (au sens de l'espace des arcs) mais il n'est pas à l'intersection de plusieurs composantes irréductibles de l'ensemble des centres.
Considérons l'espace des arcs centrés en le point p, C_∞^p où p est le point de C associé à cette équation de Liénard symétrique.

Espace des arcs et des jets d'arcs associés

Nous avons:

$$\begin{aligned} \overline{v}_{1,1} &= \lambda_{1,1} \\ \overline{v}_{2,1} &= -\frac{1}{2}\lambda_{5,1} \\ \overline{v}_{3,1} &= -\frac{3}{4}\lambda_{2,1} \\ \overline{v}_{4,1} &= 0. \end{aligned} \tag{45}$$

L'annulation de $\overline{v}_{j,1}$ (ou de $M_1(x)$) est équivalente à $\lambda_{1,1} = \lambda_{2,1} = \lambda_{5,1} = 0$.
Supposons par réccurence $\overline{v}_{j,r} = 0, r = 1, ..., k-1$ alors $\lambda_{1,r} = \lambda_{2,r} = \lambda_{5,r} = 0$ et:

$$\begin{aligned} \overline{v}_{1,k} &= \lambda_{1,k} \\ \overline{v}_{2,k} &= -\frac{1}{2}\lambda_{5,k} \\ \overline{v}_{3,k} &= -\frac{3}{4}\lambda_{2,k} \\ \overline{v}_{4,1} &= 0. \end{aligned} \tag{46}$$

Espace engendré par la fonction de bifurcation principale

Il est clair que cet espace est déjà engendré par les 1-jets $(\epsilon\lambda_{1,1}, \epsilon\lambda_{2,1}, \epsilon\lambda_{5,1})$. Donc $k* = 1$ et une perturbation essentielle au sens d'Iliev est:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + \frac{1}{2}x^2 + \epsilon[\lambda_{1,1}x + (2\lambda_{2,1} + \lambda_{5,1})xy], \\ \dot{y} &= x + \epsilon[\lambda_{1,1}y + \lambda_{2,1}(x^2 - y^2)]. \end{aligned} \tag{47}$$

On pose $\alpha = 2\lambda_{2,1} + \lambda_{5,1}$ et $\beta = \lambda_{2,1}$. Si on change y en $-y$, l'équation de Liénard symmétrique admet un facteur de Darboux généralisé avec un facteur intégrant e^y et une intégrale première $H = \mathrm{e}^{-y}[\frac{1}{2}x^2 - (y+1)]$. Une perturbation essentielle au sens d'Iliev donne:

$$dH + \epsilon\{\mathrm{e}^{-y}[\lambda_{1,1}(xdy - ydx) + \alpha xydy - \beta(x^2 - y^2)dx]\} \tag{48}$$

Le nombre maximum de cycles limites qui peuvent apparaitre dans une perturbation quadratique est le nombre de zéros de $M_1(x)$ défini par la perturbation essentielle:

$$\int_{H=c} \{\mathrm{e}^{-y}[\lambda_{1,1}(xdy - ydx) + \alpha xydy - \beta(x^2 - y^2)dx]\}. \tag{49}$$

Plan

1 Introduction

2 Les centres quadratiques et l'idéal de Bautin

3 L'espace des arcs de Nash et la fonction de bifurcation principale

4 Espace des arcs de Nash de l'ensemble des centres quadratiques

5 Finitude des nombres d'Iliev

6 Conclusion

Y-a-t-il une borne pour k_* ?

Oui, on peut le justifier en développant l'idée initiale de Nash qui est le lien entre l'espace des arcs et le théorème de désingularisation d'Hironaka.

Eclatement d'un idéal

Soit $I = (v_1, \dots, v_N) \subset \mathbb{C}[\underline{\lambda}]$ un idéal dont la variété algébrique associée

$$Z(I) = \{\underline{\lambda} \in \mathbb{C}^n : v_1(\underline{\lambda}) = v_2(\underline{\lambda}) = \cdots = v_N(\underline{\lambda}) = 0\}.$$

L' éclatement $B_I\mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{N-1}$ of $\mathbb{C}^n$ de centre I est l'adhérence de Zarisky du graphe de l'application

$$\mathbb{C}^n \setminus Z \to \mathbb{P}^{N-1}, \underline{\lambda} \mapsto [v_1(\underline{\lambda}) : \cdots : v_N(\underline{\lambda})]$$

avec la projection $\pi : B_I\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Ici, $[v_1(\underline{\lambda}) : \cdots : v_N(\underline{\lambda})]$ est le projectivisé $(v_1(\underline{\lambda}), \dots, v_N(\underline{\lambda}))$.
On dit que π est l' éclatement de $\mathbb{C}^n$ de centre I, et $E = \pi^{-1}(Z)$ est le lieu exceptionnel. Le triplet (E, π, Z) est donc un espace fibré de projection π et de base Z. Ici, Z et E sont des variétés algébriques, qui ne sont pas nécessairement lisses. Pour $\lambda \in Z$ on désigne par $E_\lambda = \pi^{-1}(\lambda)$ le fibre de E sur λ. La fibre $E_\lambda \subset \mathbb{P}^{N-1}$ est une variété projective.

Diviseur exceptionnel et fonction de bifurcation principale

Soit $\lambda * \in Z$. La proposition suivante permet de décrire les points P de la fibre $E_{\lambda *}$ en terme d'arcs.

Proposition

$P \in E_{\lambda *}$ si et seulement si il existe un arc analytique:

$$\alpha : [0, a[\to \mathbb{C}^n, \; \varepsilon \mapsto \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_{i,r} \varepsilon^r, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

non contenu dans Z, tel que $\alpha(0) = \lambda * \in Z$ et

$$P = \lim_{\varepsilon \to 0} [v_1(\alpha(\varepsilon)) : \cdots : v_N(\alpha(\varepsilon))].$$

Nombres d'Iliev généralisés

L'existence de la limite est équivalente à l'existence d'un nombre $k \geq 1$ tel que

$$(v_1(\alpha(\varepsilon)), \ldots, v_N(\alpha(\varepsilon))) = \varepsilon^k(1 + O(\varepsilon))p$$

où $p \in \mathbb{C}^N$ est un vecteur non-nul dont la projectivisation est le point P. Dans ce cas

$$p = (\overline{v}_{1,k}, \overline{v}_{2,k}, \ldots, \overline{v}_{N,k})$$

et p peut-être identifié à la fonction de bifurcation principale par la formule:

$$M_k(x) = \Sigma_{j=1}^N \overline{v}_{j,k} x^{l_j} B_j(x).$$

Le nombre k dépends du point $P \in E_{\lambda *}$ et de l'arc α. Soit k_P le nombre entier minimal k, pour lequel il existe un arc analytique α , relié à P par la proposition précédente. Pour les applications à la théorie des bifurcations, on est interessés à la fonction de bifurcation principale P, telle que $\pi(P) = \lambda_*$ pour un $\lambda_* \in Z(I)$. On définit de plus

$$k_* = \sup_{\pi(P)=\lambda_*} k_P$$

et même plus généralement,

$$k_{max} = \sup_{P \in E} k_P = \sup_{\lambda_* \in Z} k_*$$

Finitude des nombres d'Iliev

Theorem

$$k_{max} < \infty.$$

On suppose qu'il existe une résolution forte, au sens où $\tilde{\pi}^{-1}(E)$ est un diviseur à croisements normaux. Le faisceau image inverse

$$\tilde{I} = (\pi \circ \tilde{\pi})^* I$$

est localement principal et localement monomial, et son ensemble de zéros est $\tilde{\pi}^{-1}(E)$. Donc, au voisinage de chaque point $\tilde{P} \in \tilde{\pi}^{-1}(E)$ on peut trouver des coordonnées locales z_i et des nombres naturels c_i, tel que le faisceau d'idéal $\tilde{I}$ est engendré par $\Pi_i z_i^{c_i}$. Nous définissons l'ordre d'annulation, ou l'ordre du faisceau d'idéal localement principal $\tilde{I} = (\pi \circ \tilde{\pi})^* I$ en $\tilde{P}$ par:

$$ord_{\tilde{P}} \tilde{I} = \sum_i c_i.$$

Comme $\tilde{\pi}^{-1}(E)$ est une sous-variété de $R_I \mathbb{C}^n$, Il a un nombre fini de composantes irréductibles, définies localement par $z_i^{c_i} = 0$. Il s'en suit que le nombre

$$\text{max-ord} := \max\{ord_{\tilde{P}} \tilde{I} : \tilde{P} \in \tilde{\pi}^{-1}(E)\}$$

est fini.

Fin de la démonstration

Soit $P \in E$ et $\tilde{P}$ une pre-image de P par $\tilde{\pi}$. Considérons un arc $\tilde{\alpha}$ qui coincide avec une ligne droite générale passant par $\tilde{P}$ dans les coordonnées z_i. La principalité locale de $\tilde{I}$ implique que

$$(\tilde{v}_1(\tilde{\alpha}(\varepsilon)), \ldots, \tilde{v}_N(\tilde{\alpha}(\varepsilon))) = \varepsilon^k (1 + O(\varepsilon))p$$

où $k = \sum_i c_i \leq$ max-ord, $v_i \circ \pi \circ \tilde{\pi} = \tilde{v}$, et p est un vecteur non nul. La projection $\tilde{\alpha}$ sous $\pi \circ \tilde{\pi}$ sur $\mathbb{C}^n$ donne un arc analytique α tel que

$$(v_1(\alpha(\varepsilon)), \ldots, v_N(\alpha(\varepsilon))) = \varepsilon^k (1 + O(\varepsilon))p$$

(avec le même k et P qui est la projectivisation de p. Le nombre max-ord est donc une borne supérieure pour k_P. Comme max-ord ne dépend pas de P, et donc la finitude des nombres d'Iliev est démontrée.

Plan

1 Introduction

2 Les centres quadratiques et l'idéal de Bautin

3 L'espace des arcs de Nash et la fonction de bifurcation principale

4 Espace des arcs de Nash de l'ensemble des centres quadratiques

5 Finitude des nombres d'Iliev

6 Conclusion

Conclusion

- L'espace de Nash permet de beaucoup mieux comprendre le lien entre les dérivées successives de l'application de permier retour et l'idéal de Bautin.
- Il permet de mieux caractériser les cas non génériques où il faut aller au delà du premier ordre de perturbation.
- Il permet de mieux comprendre la notion de perturbations essentielles d'Iliev
- Il permet des théorèmes de finitude au delà de la Noethérianité. L'espace des arcs est un shéma au sens de Grothendieck. Il n'est pas forcément Noethérien mais il garde certaines propriétés de finitude.
- En utilisant le théorème d'Hironaka, on peut montrer la finitude des nombres d'Iliev.