Вопросы устойчивости и неустойчивости в обратной задаче Гельфанда

М. И. Исаев

научный руководитель: Р. Г. Новиков

Московский Физико-Технический Институт (НИУ)
Centre de Mathématiques Appliquées, Ecole Polytechnique

14 августа 2012 г.

Содержание

1. Постановка задачи. Известные результаты
2. Оценки для импендансного граничного оператора
3. Поведение оценок устойчивости при больших энергиях

Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$-\Delta\psi + v(x)\psi = E\psi \text{ для } x \in D, \tag{1}$$

где

- D — открытая связная область в $\mathbb{R}^d$,
- $d \geq 2$,
- $\partial D \in C^2$,
- $v \in L^\infty(D)$.

Постановка задачи

Определим оператор* $\hat{\Phi} = \hat{\Phi}(E)$ следующим образом:

$$\hat{\Phi}(\psi|_{\partial D}) = \frac{\partial \psi}{\partial \nu}|_{\partial D}.$$

Здесь предполагаем, что

$$E \text{ не является собственным значением для } -\Delta + v \text{ в } D.$$

* Этот оператор называется Dirichlet to Neumann map.

Постановка задачи

Задача 1.

- Задан* оператор $\hat{\mathbf{\Phi}}$.
- Требуется восстановить $\boldsymbol{v}$.

* например, считаем известным его ядро.

Теорема 1. (вариация результата G. Alessandrini [A1988])

При выполненных предположениях Задачи 1, а также при

- $d \geq 3$, $m > 0$, $N > 0$ и $supp\, v_i \subset D$,
- $||v_i||_{m,1} \leq N$, $i = 1, 2$,
- $0 < s \leq (m - d)/m$

существует такая константа $C = C(N, D, m)$, что

$$||v_1 - v_2||_{L^\infty(D)} \leq C\Big(\log(3 + ||\hat{\Phi}_1 - \hat{\Phi}_2||^{-1}\Big)^{-s}, \qquad (2)$$

где $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2$ обозначают DtN операторы для v_1 и v_2 соответственно,

$$||\hat{\Phi}_1 - \hat{\Phi}_2|| = ||\hat{\Phi}_1 - \hat{\Phi}_2||_{L^\infty(\partial D) \to L^\infty(\partial D)}.$$

R. G. Novikov и M. Santacesaria, случай размерности $d = 2$ [NS2010].

Недостаток оценки G. Alessandrini:

$$s < 1 \text{ для любого } m > d, \text{ даже если } m \text{ очень большое.}$$

- R. G. Novikov [N2011] показал, что (2) выполняется при $s = m - d$ для обратной задачи Гельфанда-Кальдерона $(E = 0)$ и $d \geq 3$.
- M. Santacesaria [S2011] показал, что (2) выполняется при $s = m - 2$ для обратной задачи Кальдерона ($E = 0$ и v — специального кондуктичного типа) и $d = 2$.

Оценки неустойчивости

- N. Mandache [M2001] показал, что оценка (2) **не может быть верной** для обратной задачи Гельфанда-Кальдерона ($E = 0$) и размерности $d \geq 2$
  - при $s > 2m - \frac{m}{d}$ для вещественнозначных потенциалов,
  - при $s > m$ для комплекснозначных потенциалов.

- M. I. Isaev [I2011] распространил результаты [M2001] на случай произвольной энергии E, а также на случай интервалов энергии.

Оценки устойчивости

Потенциал можно восстановить приближенно, зато более устойчиво!

R. G. Novikov [N1998], [N2005] (см. также [N2008], [NS2012]) показал, что в обратных задачах для уравнения Шредингера при фиксированной энергии и $d \geq 2$ (таких как Задача 1), потенциал v можно найти приближенно, а именно:

$$v = v_{approx} + v_{err}.$$

- v_{approx} — восстанавливается с Гёльдоровской устойчивостю,
- v_{err} — быстро (в зависимости от гладкости) убывает при $E \to \infty$.

Два момента

1. Что происходит, когда нарушается условие

$$\boldsymbol{E} \text{ не является собственным значением для } -\boldsymbol{\Delta}+\boldsymbol{v} \text{ в } \boldsymbol{D},$$

   или энергия $\boldsymbol{E}$ приближается к спектру?

2. Связь между логарифмическими оценками устойчивости типа (2) и приближенными Гёльдоровскими.

Данные Коши

Определим

$$\mathcal{C}_v = \left\{ \left(\psi|_{\partial D}, \frac{\partial\psi}{\partial\nu}|_{\partial D} \right) : \begin{array}{r} \text{для всех достаточно гладких решений } \psi \\ \text{уравнения (1) в } \bar{D} = D \cup \partial D. \end{array} \right\}.$$

Тогда Задачу 1 можно переформулировать следующим образом:

Задача 1'.

- Известны данные Коши $\mathcal{C}_v$.
- Требуется восстановить потенциал v.

Импедансный граничный оператор

Рассмотрим импедансный граничный оператор (или Robin-to-Robin map) $\hat{M}_\alpha = \hat{M}_{\alpha,v}(E)$, определенный следующим образом:

$$\hat{M}_\alpha[\psi]_\alpha = [\psi]_{\alpha-\pi/2}$$

для всех достаточно гладких решений ψ уравнения (1) в $\bar{D} = D \cup \partial D$, где

$$[\psi]_\alpha = [\psi(x)]_\alpha = \cos\alpha\, \psi(x) - \sin\alpha\, \frac{\partial\psi}{\partial\nu}|_{\partial D}(x), \quad x \in \partial D.$$

Импедансный граничный оператор

Можно показать, что

- импедансный граничный оператор $\hat{M}_\alpha$ сводится к оператору Дирихле-Неймана(DtN), если $\alpha = 0$, и сводится к оператору Нейман-Дирихле(NtD), если $\alpha = \pi/2$;
- существует не более чем счетное число таких α, что E является собственным значением оператора $-\Delta + v$ в D с граничным условием

$$\cos\alpha\,\psi|_{\partial D} - \sin\alpha\,\frac{\partial\psi}{\partial\nu}|_{\partial D} = 0.$$

Оценка устойчивости

M. I. Isaev и R. G. Novikov [IN2012] показали, что при выполненных условиях Теоремы 1 (только с модифицированным граничным условием) выполняется:

$$||v_1 - v_2||_{L^\infty(D)} \le C_\alpha \left(\ln\left(3 + \delta_\alpha^{-1}\right)\right)^{-s}, \quad 0 < s \le (m-d)/m,$$

где

$C_\alpha = C_\alpha(N, D, m, s, E)$ и $\delta_\alpha = ||\hat{M}_{\alpha,v_1}(E) - \hat{M}_{\alpha,v_2}(E)||_{L^\infty(\partial D)\to L^\infty(\partial D)}$.

Свойства импендансного граничного оператора

Результаты из [IN2012]:

- $\hat{M}_{\alpha,v_1}(E) - \hat{M}_{\alpha,v_2}(E)$ — компактный оператор в $\mathbb{L}^\infty(\partial D)$,
- для всех достаточно гладких решений ψ_1 и ψ_2 уравнения (1) в $\bar{D}$ с $v = v_1$ и $v = v_2$, соответственно:

$$\int_D (v_1 - v_2)\,\psi_1\psi_2\,dx = \int_{\partial D} [\psi_1]_\alpha \left(\hat{M}_{\alpha,v_1} - \hat{M}_{\alpha,v_2}\right)[\psi_2]_\alpha dx. \tag{3}$$

Равенство (3) является обобщением тождества Алессандрини:

$$\int_D (v_1 - v_2)\,\psi_1\psi_2\,dx = \int_{\partial D} \psi_1 \left(\hat{\Phi}_{v_1} - \hat{\Phi}_{v_2}\right)\psi_2\,dx.$$

Две оценки

Логарифмическая оценка устойчивости:

$$||v_1 - v_2||_{L^\infty(D)} \le C\Big(\log(3 + ||\hat{\Phi}_1 - \hat{\Phi}_2||^{-1}\Big)^{-s},$$

Приближенное восстановление:

$$v = v_{approx} + v_{err}.$$

- v_{approx} — восстанавливается с Гёльдоровской устойчивостю,
- v_{err} — быстро (в зависимости от гладкости) убывает при $E \to \infty$.

Оценка устойчивости

Теорема 2. (M. I. Isaev, R. G. Novikov [IN2012+])

Пусть предположения Теоремы 1 выполнены, причем энергия $E \geq 0$. Пусть $s_1 = (m-d)/d$. Тогда, для любого $\tau \in (0,1)$ и произвольных $\alpha, \beta \in [0, s_1]$, $\alpha + \beta = s_1$,

$$||v_2 - v_1||_{L^\infty(D)} \leq A(1+\sqrt{E})\delta^\tau + B(1+\sqrt{E})^{-\alpha}\left(\ln\left(3+\delta^{-1}\right)\right)^{-\beta}, \quad (4)$$

где $\delta = ||\hat{\Phi}_2(E) - \hat{\Phi}_1(E)||_{\mathbb{L}^\infty(\partial D)\to\mathbb{L}^\infty(\partial D)}$ и константы $A, B > 0$ зависят только от N, D, m, τ.

- Более слабая оценка, чем в Теореме 2 была получена ранее в [Isakov2011].
- Для размерности $d = 2$, см. M. Santacesaria [S2012].

Оценки неустойчивости

M. I. Isaev [I2012] доказал оптимальность оценки (4) в следующем смысле:

Для любых фиксированных констант $A, B, \kappa, \tau, \varepsilon > 0$, $m > d$ и $s_2 > m$ существует $E > 0$ и потенциалы $v_1, v_2 \in C^m(D)$,

- удовлетворяющие предположениям Теоремы 2,
- $||v_1 - v_2||_{\mathbb{L}^\infty(D)} \leq \varepsilon$, $||v_j||_{C^m(D)} \leq C_1$, где $C_1 = C_1(D, m) > 0$,

причем:

$$||v_1 - v_2||_{L^\infty(D)} > A(1+\sqrt{E})^\kappa \delta^\tau + B(1+\sqrt{E})^{2(s-s_2)} \left(\ln\left(3+\delta^{-1}\right)\right)^{-s}$$

для любого $s \in [0, s_2]$.

Конец

Спасибо за внимание!

Литература

[A1988] G. Alessandrini, Stable determination of conduct. by boundary measur., Appl.Anal.27 (1988) 153-172.

[I2011] M.I. Isaev, Exponential instability in the Gel'fand inverse problem on the energy intervals, J. Inverse Ill-Posed Probl., Vol. 19(3) (2011) 453-473; e-print arXiv: 1012.2193.

[I2012] M.I. Isaev, Instability in the Gel'fand inverse problem at high energies, e-print hal-00689636.

[IN2012] Stability estimates for determination of potential from the impedance boundary map, e-print arXiv:1112.3728.

[Isakov2011] V. Isakov, *Increasing stability for the Schrödinger potential from the Dirichlet-to-Neumann map*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 4, 2011, no. 3, 631-640.

[M2001] N. Mandache, Exponential instability in an inverse problem for the Schrödinger equation, Inverse Problems. 17(2001) 1435–1444.

[N1998] R.G. Novikov, Rapidly converging approximation in inverse quantum scattering in dimension 2, Physics Letters A 238, 1998, 73-78.

[N2005] R.G. Novikov, The $\bar{\partial}$-approach to approximate inverse scattering at fixed energy in three dimensions. IMRP Int. Math. Res. Pap. 2005, no. 6, 287-349.

[N2008] R.G. Novikov, The $\bar{\partial}$-approach to monochromatic inverse scattering in three dimensions, J. Geom. Anal 18, 2008, 612-631.

[N2011] R.G. Novikov, New global stability estimates for the Gel'fand-Calderon inverse problem, Inverse Problems 27 (2011) 015001(21pp); e-print arXiv:1002.0153.

Литература

[NS2010] R. G. Novikov and M. Santacesaria, A global stability estimate for the Gel'fand- Calderon inverse problem in two dimensions, J.Inverse Ill-Posed Probl., Vol. 18, Iss. 7 (2010) 765-785; e-print arXiv: 1008.4888.

[NS2012] R. G. Novikov and M. Santacesaria, Monochromatic Reconstruction Algorithms for Two-dimensional Multi-channel Inverse Problems, International Mathematics Research Notes, 2012, doi: 10.1093/imrn/rns025.

[S2011] M. Santacesaria, New global stability estimates for the Calderon inverse problem in two dimensions, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, doi:10.1017/S147474801200076X, e-print: hal-00628403.