ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2010, том 50, № 4, с. 725–745

УДК 519.634

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ВИДА БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ВРИЗА–БЮРГЕРСА[1)]

© 2010 г. А. В. Казейкина

(119992 Москва, Ленинские горы, МГУ)

e-mail: kazanna@bk.ru

Поступила в редакцию 26.11.2009 г.

Исследуется асимптотическое поведение решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса $u_t + (f(u))_x + au_{xxx} - bu_{xx} = 0$ при $t \longrightarrow \infty$. Достаточные условия существования и локальной устойчивости бегущей волны, известные для случая $f(u) = u^2$, обобщаются на случай произвольной достаточно гладкой, выпуклой функции $f(u)$. Библ. 14.

Ключевые слова: уравнение Кортевега–де Вриза–Бюргерса, решение в виде бегущей волны, асимптотика решения задачи Коши.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе обобщается результат из [1] об устойчивости решения вида бегущей волны для уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса (КдВБ)

$$u_t + (f(u))_x + au_{xxx} - bu_{xx} = 0, \quad b > 0. \tag{1}$$

Под бегущей волной понимается функция $u = \varphi(x - \lambda t)$, удовлетворяющая следующим условиям.

Условие 1. $u(x, t) = \varphi(x - \lambda t)$ является решением уравнения (1).

Условие 2. $\exists \lim\limits_{s \to -\infty} \varphi(s) = u_-$, $\lim\limits_{s \to +\infty} \varphi(s) = u_+$.

Условие 3. $\exists \lim\limits_{s \to \pm\infty} \varphi'(s) = 0$, $\lim\limits_{s \to \pm\infty} \varphi''(s) = 0$.

В [1] показано, что в случае, когда $f(u) = u^2$, решение вида бегущей волны для задачи Коши

$$\begin{gathered} u_t + (f(u))_x + au_{xxx} - bu_{xx} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad \lim_{x \to \pm\infty} u_0(x) = u_\pm, \quad u_- > u_+ \end{gathered} \tag{2}$$

устойчиво, если выполнено условие на параметры задачи

$$|a| \leqslant \frac{b^2}{4(u_- - u_+)}.$$

В настоящей работе при помощи использования схемы рассуждения из [1] получены достаточные условия устойчивости решения вида бегущей волны задачи (2) в случае произвольной достаточно гладкой, выпуклой функции $f(u)$.

Задача изучения асимптотического поведения решения задачи Коши для типичных уравнений гидродинамики получила довольно широкое развитие в последнее время. Это связано, в частности, с использованием метода автомодельной редукции для решения дифференциально-разностных уравнений, которые могут описывать, например, процесс распространения новых технологий в производстве (см. [2]) или некоторые явления в квантовой механике. Метод авто-

1) Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 08-07-00158) и РГНФ (код проекта 08-02-00347). Работа проведена в рамках реализации ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (1.2.1, НК-15П(3)).

модельной редукции заключается в том, что разность значений функции раскладывается по формуле Тейлора до некоторого порядка и вместо дифференциально-разностного уравнения изучается соответствующее уравнение в частных производных. Так, если, применяя метод автомодельной редукции к уравнению, описывающему распространение новых технологий, в формуле Тейлора брать члены только первого порядка, то получается уравнение типа закона сохранения, при использовании членов второго порядка – уравнение Бюргерса, при рассмотрении членов до третьего порядка включительно задача сводится к изучению уравнения КдВБ. Таким образом, для обоснования метода автомодельной редукции необходимо изучить, насколько похоже поведение решений задачи Коши для перечисленных выше уравнений.

Исследование асимптотического поведения решения закона сохранения и уравнения Бюргерса в случае, когда $f(u) = u^2/2$, было проведено в [3] на основе явной формулы для решения. В [4] изучалось уравнение типа Бюргерса в случае, когда $f(u)$ – выпуклая функция, и там была доказана глобальная устойчивость бегущей волны в случае, когда пределы начальной функции в задаче Коши (2) связаны неравенством $u_+ < u_-$, и глобальная устойчивость волны разрежения, если $u_+ > u_-$.

Исследование асимптотики вида системы бегущих волн и волн разрежения для уравнения Бюргерса было начато в [5]. В [8]–[10] доказана гипотеза, выдвинутая ранее в [6], [7] для дифференциально-разностного аналога уравнения типа Бюргерса, согласно которой при определенных условиях асимптотика имеет вид чередующейся системы бегущих волн и волн разрежения, при этом следует допускать зависимость сдвигов фаз бегущих волн от времени.

Поведение решения уравнения КдВБ при $u_+ < u_-$ рассматривалось в [1], [11]. В случае $f(u) = u^2$ была установлена локальная устойчивость решения уравнения КдВБ вида бегущей волны. Настоящая работа является обобщением результата, полученного в [1], на случай выпуклой функции $f(u)$ и представляет в некотором смысле распространение результата из [4] на уравнение КдВБ. В настоящей работе рассматривается случай $u_- > u_+$ и, следовательно, асимптотика только вида бегущей волны. Результаты по исследованию устойчивости волны разрежения для КдВБ (т.е. случай $u_- < u_+$) читатель может найти в [12].

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Утверждение 1. *Если бегущая волна для уравнения КдВБ существует, то ее скорость определяется однозначно из условия*

$$\lambda = \frac{f(u_-)-f(u_+)}{u_- - u_+}. \tag{3}$$

Пусть функция $f(u)$ дважды непрерывно дифференцируема и выпукла, т.е.

$$f''(u) \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad f''(u) \not\equiv 0 \quad \forall u \in (u_+, u_-). \tag{4}$$

Пусть, кроме того, выполнены условия

$$\begin{aligned} &\frac{b}{\sqrt{a}} \geqslant 2\sqrt{f'(u_-)-\lambda}, \quad a > 0, \\ &\frac{b}{\sqrt{-a}} \geqslant 2\sqrt{\lambda - f'(u_+)}, \quad a < 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Тогда бегущая волна существует, единственна и монотонна.

Уравнение (1) для бегущей волны принимает вид

$$-\lambda\varphi' + (f(\varphi))' + a\varphi''' - b\varphi'' = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение от $-\infty$ до x, учитывая условие 3 определения бегущей волны. Получим

$$-\lambda\varphi + f(\varphi) + a\varphi'' - b\varphi' + \lambda u_- - f(u_-) = 0. \tag{6}$$

Учитывая поведение функции φ при $x \longrightarrow +\infty$, получаем, что скорость волны определяется однозначно по формуле

$$\lambda = \frac{f(u_-)-f(u_+)}{u_- - u_+}.$$

Пусть

$$d = \lambda u_- - f(u_-).$$

Тогда уравнение

$$y = \lambda u - d = \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+}(u - u_-) + f(u_-) \tag{7}$$

определяет прямую, проходящую через точки $(u_+, f(u_+))$, $(u_-, f(u_-))$, а значит,

$$f(u_+) - \lambda u_+ + d = 0, \quad f(u_-) - \lambda u_- + d = 0. \tag{8}$$

Из условия (4) следует, что график этой функции лежит строго ниже прямой (7), т.е.

$$f(u) - \lambda u + d < 0 \quad \forall u \in (u_-, u_+). \tag{9}$$

Перепишем уравнение (6) в виде

$$\varphi'' - \frac{b}{a}\varphi' + \frac{f(\varphi) - \lambda\varphi + d}{a} = 0. \tag{10}$$

Предположим сначала, что $a > 0$. Сделаем замену

$$\varphi(x) = u_- - (u_- - u_+)\psi(x).$$

Тогда имеем

$$\lim_{x \to +\infty} \psi(x) = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} \psi(x) = 0, \quad \lim_{x \to \pm\infty} \psi'(x) = 0. \tag{11}$$

Если ввести обозначение

$$\nu = \frac{b}{a}, \quad F(\psi) = -\frac{f(u_- - (u_- - u_+)\psi) - \lambda(u_- - (u_- - u_+)\psi) + d}{a(u_- - u_+)},$$

то из уравнения (10) получим уравнение для ψ:

$$\nu\psi' = k\psi'' + F(\psi). \tag{12}$$

В [13] показано, что если функция $F(\psi)$ удовлетворяет условиям

$$F(0) = F(1) = 0, \quad F(\psi) > 0, \quad 0 < \psi < 1, \tag{13}$$

$$F'(0) = \alpha > 0, \quad F'(\psi) < \alpha, \quad 0 < \psi \leqslant 1, \tag{14}$$

и выполнено условие

$$\nu^2 \geqslant 4\alpha k, \tag{15}$$

то существует единственное решение уравнения (12), удовлетворяющее условиям (11), и оно является монотонным.

В рассматриваемом случае выполнение условия (13) следует из (8), (9). Выполнение условия (14) следует из выпуклости функции $f(u)$ и из условия (4), поскольку

$$F'(\psi) = \frac{1}{a}[f'(u_- - (u_- - u_+)\psi) - \lambda], \quad F'(0) = \frac{1}{a}[f'(u_-) - \lambda].$$

Условие (15) переписывается следующим образом:

$$\frac{b}{\sqrt{a}} \geqslant 2\sqrt{f'(u_-) - \lambda}.$$

В случае если $a < 0$, уравнение (10) приводится к виду (12) заменой

$$\varphi(x) = u_+ - (u_+ - u_-)\psi(-x)$$

и переобозначением в виде

$$\nu = \frac{b}{-a}, \quad F(\psi) = -\frac{f(u_+ - (u_+ - u_-)\psi) - \lambda(u_+ - (u_+ - u_-)\psi) + d}{a(u_+ - u_-)}.$$

Условие (15) переписывается следующим образом:

$$\frac{b}{\sqrt{-a}} \geqslant 2\sqrt{\lambda - f'(u_+)}.$$

3. УСТОЙЧИВОСТЬ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Введем следующее обозначение:

$$w(x, t; \alpha) = \int_{-\infty}^{x} (u(\xi, t) - \varphi(\xi - \lambda t + \alpha))d\xi.$$

Тогда

$$w(x, 0; \alpha) = \int_{-\infty}^{x} [u_0(\xi) - \varphi(\xi + \alpha)]d\xi.$$

Теорема 1 (см. [1]). 1. *Пусть* $f(u) = u^2$ *и выполнены условия* (5). 2. *Пусть начальная функция* $u_0(x)$ *достаточно близка к бегущей волне в следующем смысле: существует* α *такое, что*

$$w(x, 0; \alpha) \in H^{\infty}(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 w^2(x, 0; \alpha)dx < \infty.$$

Тогда существует такое $c > 0$, *что если для* $H = H^3(\mathbb{R})$ *выполнено неравенство*

$$\|w(x, 0; \alpha)\|_H < c,$$

то решение задачи Коши (2) *для уравнения КдВБ существует, единственно и имеется постоянная* $A > 0$ *такая, что выполнено неравенство*

$$\|w(x, t; \alpha)\|_H \leqslant \frac{A}{\sqrt[4]{t+1}} \quad \forall t \geqslant 0.$$

Данный результат может быть распространен на более общий случай:

Теорема 2. 1. *Пусть функция* $f(u)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

(а) $f(u) \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ *для некоторого натурального числа* n, $n \geqslant 3$;

(б) $f''(u) \geqslant 0 \ \forall u \in \mathbb{R}, f''(u) \not\equiv 0 \ \forall u \in (u_+, u_-)$.

Пусть выполнены условия

$$\begin{aligned} &\frac{b}{\sqrt{a}} \geqslant 2\sqrt{f'(u_-) - \lambda}, \quad a > 0, \\ &\frac{b}{\sqrt{-a}} \geqslant 2\sqrt{\lambda - f'(u_+)}, \quad a < 0. \end{aligned} \tag{16}$$

2. *Пусть начальная функция* $u_0(x)$ *достаточно близка к бегущей волне в следующем смысле: существует* α *такое, что*

$$w(x, 0; \alpha) \in H^{\infty}(\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 w^2(x, 0; \alpha)dx < \infty.$$

Тогда существует такое $c > 0$, *что если для* $H = H^n(\mathbb{R})$ *справедливо неравенство*

$$\|w(x, 0; \alpha)\|_H < c,$$

то решение задачи Коши (2) *для уравнения КдВБ существует, единственно и существует постоянная* $A > 0$ *такая, что*

$$\|w(x, t; \alpha)\|_H \leqslant \frac{A}{\sqrt[4]{t+1}} \quad \forall t \geqslant 0. \tag{17}$$

Следствие. Если начальное условие задачи Коши (2) достаточно близко к бегущей волне, то решение задачи Коши (2) сходится с течением времени к бегущей волне равномерно по x со скоростью, не меньшей $O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{t+1}}\right)$.

Доказательство. Для получения оценки (17) используем схему доказательства теоремы, проведенного в [1].

Согласно результату разд. 4, решение задачи Коши (2) существует, единственно и $w(x, t; \alpha) \in$ $\in C^\infty([0, \infty); H^\infty(\mathbb{R}))$.

При доказательстве будем использовать следующие обозначения:

$$w_{(n)}(x, t; \alpha) = \frac{\partial^n w(x, t; \alpha)}{\partial x^n}, \quad J_n(t; \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_{(n)}^2(x, t; \alpha)dx, \tag{18}$$

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \dot{J}_n = \frac{\partial J_n}{\partial t}, \quad J = J_0 + J_n, \tag{19}$$

$$W_1(t; \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 w^2(x, t; \alpha)dx, \quad W_2(t; \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 w_{(1)}^2(x, t; \alpha)dx. \tag{20}$$

Преобразование Фурье от функции $w(x, t; \alpha)$ по переменной x будем обозначать через $\hat{w}(p, t; \alpha)$:

$$\hat{w}(p, t; \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} w(x, t; \alpha)dx. \tag{21}$$

При доказательстве используется неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа (см. [14]): $\forall w \in$ $\in H^{n+k}(\mathbb{R})$

$$J_{i+k} \leqslant J_k^{\frac{n-i}{n}} J_{n+k}^{\frac{i}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad 0 < i < n, \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{22}$$

Из этого неравенства, в частности, следует, что $J_i \leqslant J$, $0 \leqslant i \leqslant n$.

Всюду далее, где пределы интегрирования опускаются, предполагается, что интегрирование ведется от $-\infty$ до $+\infty$ по переменной x.

Кроме того, при доказательстве используются следующие утверждения.

Утверждение 2. *Для произвольной функции* $w(x) \in H_1(\mathbb{R})$ *такой, что*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 w^2(x)dx < \infty,$$

справедливы неравенства

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |w(x)| \leqslant (4J_0 J_1)^{1/4}, \tag{23}$$

$$\sup_{p \in \mathbb{R}} |\hat{w}(p)| \leqslant (16\pi^2 J_0 W_1)^{1/4}, \tag{24}$$

где используются обозначения (18), (20), (21).

Доказательство. Первое неравенство доказывается при помощи неравенства Коши–Буняковского

$$|w(x)|^2 = |w^2(x)| = \left|\int_{-\infty}^{x} dw^2(\xi)\right| = \left|\int_{-\infty}^{x} 2w_{(1)}(\xi)w(\xi)d\xi\right| \leqslant 2\int_{-\infty}^{+\infty}|w_{(1)}(x)w(x)|dx \leqslant (4J_0J_1)^{1/2}.$$

Неравенство (24) доказывается при помощи аналогичных рассуждений, а также теоремы Планшереля:

$$|\hat{w}(p)|^2 = |\hat{w}^2(p)| = \left|\int_{-\infty}^{p} d\hat{w}^2(\xi)\right| = \left|\int_{-\infty}^{p} 2\hat{w}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\hat{w}(\xi)d\xi\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{w}(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\hat{w}(\xi)\right|d\xi \leqslant 2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{w}(\xi)|^2d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial}{\partial\xi}\hat{w}(\xi)\right|^2d\xi\right)^{1/2} =$$

$$= 4\pi\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|w(x)|^2dx\int_{-\infty}^{+\infty}x^2|w(x)|^2dx\right)^{1/2} = (16\pi^2J_0W_1)^{1/2}.$$

Утверждение 3. *Справедлива формула*

$$\int w_{(n-i)}w_{(n)}dx = \begin{cases} 0, & i = 2k+1, \quad k = 0, 1, \ldots, \left\lfloor\dfrac{n-1}{2}\right\rfloor; \\ (-1)^kJ_{n-k}, & i = 2k, \quad k = 0, 1, \ldots, \left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor. \end{cases} \tag{25}$$

Доказательство проведем по индукции отдельно для четного и нечетного случаев.

1. $i = 2k+1$, $k = 0, 1, \ldots, \left\lfloor\dfrac{n-1}{2}\right\rfloor$:

(а) $\forall n, k = 0$

$$\int w_{(n-1)}w_{(n)}dx = \int dw_{(n-1)}^2 = 0;$$

(б) пусть утверждение верно для всех n и некоторого k; покажем, что оно верно для некоторого произвольного n и для $k+1$:

$$\int w_{(n-2k-3)}w_{(n)}dx = -\int w_{(n-2k-2)}w_{(n-1)}dx = 0;$$

последнее равенство верно, по предположению индукции, для $n-1$ и k.

2. $i = 2k$, $k = 0, 1, \ldots, \left\lfloor\dfrac{n}{2}\right\rfloor$:

(а) $\forall n, k = 0$

$$\int w_{(n)}w_{(n)}dx = J_n$$

по определению;

(б) пусть утверждение верно для всех n и некоторого k; покажем, что оно верно для некоторого произвольного n и для $k+1$:

$$\int w_{(n-2k-2)}w_{(n)}dx = -\int w_{(n-2k-1)}w_{(n-1)}dx = -(-1)^kJ_{n-k-1} = (-1)^{k+1}J_{n-k-1}.$$

Последнее равенство верно, по предположению индукции, для $n-1$ и k.

Будем доказывать устойчивость для случая $b = 1$ (рассматриваемое уравнение сводится к данному случаю заменой $u(x, t) = w(x, bt)$ и преобразованием $f' = f/b$, $a' = a/b$). Для определенности будем считать, что $a > 0$.

Будем предполагать, что производные функции $f(u)$: $f'(u), f''(u), \ldots, f^{(n+1)}(u)$ ограничены на $\mathbb{R}$. В замечании после доказательства теоремы указано, как от этого требования можно избавиться.

Кроме того, будем считать, что

$$\exists u_0 \in (u_+, u_-) : f'(u_0) = 0, \quad f'(u) < 0 \quad u < u_0, \quad f'(u) > 0, \quad u > u_0. \tag{26}$$

Покажем, что данное требование не ограничивает общности рассуждений. Сделаем замену

$$u(x, t) = \tilde{u}(x + \mu t, t).$$

Пусть $\tilde{f}(u) = f(u) + \mu u$, $\tilde{\lambda} = \lambda + \mu$. Тогда уравнение для функции $\tilde{u}(\cdot, \cdot)$ будет иметь вид

$$\tilde{u}_t + \tilde{f}(\tilde{u})_x + a\tilde{u}_{xxx} - b\tilde{u}_{xx} = 0.$$

Для функции $\tilde{f}(\cdot)$ выполнены требования 1 (а), 1 (б) из условия теоремы, и, кроме того, для $\tilde{\lambda}$ и $\tilde{f}(\cdot)$ выполнено условие (16). Условие сходимости $\tilde{u}(x, t)$ к бегущей волне $\varphi(\xi - \tilde{\lambda}t + \alpha)$ эквивалентно условию сходимости $u(x, t)$ к бегущей волне $\varphi(\xi - \lambda t + \alpha)$. Таким образом, исходную задачу можно заменить новой, подобрав μ так, чтобы выполнялось требование (26).

Доказательство теоремы сводится к трем леммам. В условиях лемм предполагается, что бегущая волна существует и выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши (2).

Лемма 1. *Пусть функция* $f(u) \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ *и* $f''(u) \geqslant 0$. *Существуют* $c > 0$, $d > 0$ *такие, что если*

$$J_0(0) < c, \quad J(0) < d, \tag{27}$$

то

$$J_0(t) < c, \quad J(t) \leqslant d \quad \forall t \geqslant 0.$$

Доказательство. Пусть $K(u) = au_{xxx} - u_{xx}$. В этих обозначениях уравнение КдВБ перепишется в виде

$$\dot{u} + (f(u))_x + K(u) = 0.$$

Вычитая из уравнения КдВБ для $u(x, t)$ уравнение КдВБ для $\varphi(x - \lambda t)$ и интегрируя от $-\infty$ до x по переменной x, получаем

$$\dot{w} + f(\varphi + w_{(1)}) - f(\varphi) + K(w) = 0. \tag{28}$$

Продифференцируем это уравнение n раз по x, умножим его на $w_{(n)}$ и проинтегрируем по dx от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\frac{1}{2}\dot{J}_n + \int \frac{\partial^n}{\partial x^n}(f(\varphi + w_{(1)}) - f(\varphi))w_{(n)}dx + \int w_{(n)}K(w_{(n)}) = 0. \tag{29}$$

Согласно соотношению (25) имеем

$$\int w_{(n)}K(w_{(n)})dx = a\int w_{(n)}w_{(n+3)}dx - \int w_{(n)}w_{(n+2)}dx = J_{n+1}.$$

Рассмотрим уравнение (29) при $n = 0$. Разложим разность функции f по формуле Тейлора до 2-го порядка:

$$f(\varphi + w_{(1)}) - f(\varphi) = f'(\varphi)w_{(1)} + \frac{1}{2}f''(\varphi + \theta w_{(1)})w_{(1)}^2.$$

Проинтегрировав слагаемое, содержащее $f'(\varphi)$, по частям, получим

$$\frac{1}{2}\dot{J}_0 - \frac{1}{2}\int f''(\varphi)\varphi' w^2 dx + \frac{1}{2}\int f''(\varphi + \theta w_{(1)})w_{(1)}^2 w dx + J_1 = 0.$$

Из выпуклости функции f и монотонности бегущей волны φ следует, что

$$\int f''(\varphi)\varphi' w^2 dx \leqslant 0.$$

Далее введем обозначение $B = \max f''(u)$. Воспользуемся неравенством (23) и получим

$$-\frac{1}{2}\int f''(\varphi + \theta w_{(1)})w_{(1)}^2 w dx \leqslant \frac{B}{2}J_1(4J_0J_1)^{1/4} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}BJ_1\sqrt{J}.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{1}{2}\dot{J}_0 \leqslant -J_1\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}B\sqrt{J}\right). \tag{30}$$

Итак, существует константа d ($d = 1/(2B^2)$) такая, что если $J < d$, то

$$\dot{J}_0 \leqslant -J_1 \tag{31}$$

и J_0 с течением времени убывает.

Покажем теперь, что

$$\frac{1}{2}\dot{J}_n \leqslant -J_{n+1} + P(J)J,$$

где

$$P(J) = c_0 + \sum_{i=1}^{N} c_i J^{\alpha_i},$$

c_i, α_i – некоторые положительные числа.

Для этого достаточно показать, что

$$-\int\frac{\partial^n}{\partial x^n}(f(\varphi + w_{(1)}) - f(\varphi))w_{(n)}dx \leqslant P(J)J.$$

Продифференцируем n раз разность $f(\varphi + w_{(1)}) - f(\varphi)$ по x. В получившемся выражении разложим производные функции f в точке $\varphi + w_{(1)}$ по формуле Тейлора:

$$f^{(k)}(\varphi + w_{(1)}) = f^{(k)}(\varphi) + f^{(k+1)}(\varphi + \theta_k w_{(1)})w_{(1)}, \quad \theta_k \in (0, 1).$$

Это позволит сократить слагаемые, не содержащие производных функции w.

Далее все члены получившегося выражения можно разделить на три группы.

I. Члены, содержащие $w_{(n+1)}$.

Таких членов два: $f'(\varphi)w_{(n+1)}$ и $f''(\varphi + \theta_2 w_{(1)})w_{(1)}w_{(n+1)}$. Оценим интегралы, содержащие эти члены:

$$\int f'(\varphi)w_{(n)}w_{(n+1)}dx = -\frac{1}{2}\int f''(\varphi)\varphi' w_{(n)}^2 dx \leqslant \frac{1}{2}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f''(\varphi(x))\varphi'(x)|J_n \leqslant c_1 J,$$

где c_1 – некоторая константа. Применяя аналогичные рассуждения и учитывая неравенство (23), получаем оценку

$$\int f''(\varphi + \theta_2 w_{(1)})w_{(1)}w_{(n)}w_{(n+1)}dx \leqslant$$

$$\leqslant \int (f'''(\varphi + \theta_2 w_{(1)})(\varphi' + \theta_2 w_{(2)})w_{(1)} + f''(\varphi + \theta_2 w_{(1)})w_{(2)})w_{(n)}^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant c_3 J^{\sigma}\int w_{(n)}^2 dx = c_3 J^{\sigma} J, \quad \sigma \geqslant 0.$$

II. Члены, содержащие $w_{(n)}^j$ $(j \geqslant 1)$.

Заметим, что если некоторый член содержит множитель $w^i_{(k+1)}$, то $ik \leqslant n$, поэтому $j = 1$:

$$\int f^{(p)}\left(\prod(\varphi^{(q)})^{\sigma}\prod(w_{(n-r)})^{\beta}w^2_{(n)}\right)dx \leqslant c_4 J^{\gamma}J,$$

$$p \geqslant 1,\quad q \geqslant 1,\quad \sigma \geqslant 0,\quad \beta \geqslant 0,\quad r \geqslant 1,\quad \gamma \geqslant 0.$$

III. Члены, не содержащие $w_{(n)}$.

Заметим, что каждый такой член содержит по крайней мере один множитель вида $w_{(j)}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Поэтому можно получить оценку

$$\int f^{(p)}\prod(\varphi^{(q)})^{\sigma}\prod(w_{(n-r)})^{\beta}w_{(j)}w_{(n)}dx \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{u\in\mathbb{R}}\left|f^{(p)}(u)\right|\prod\sup_{u\in\mathbb{R}}\left|(\varphi^{(q)}(x))^{\sigma}\right|\prod\sup\left|(w_{(n-r)})^{\beta}\right|\left|\int w_{(j)}w_{(n)}dx\right|.$$

Учитывая соотношение (25), получаем необходимую оценку.

Итак,

$$\frac{1}{2}\dot{J}_n \leqslant -J_{n+1} + P(J)J.$$

Для оценки члена J_{n+1} воспользуемся теоремой Планшереля:

$$J_{n+1} = \int w^2_{(n+1)}dx = \frac{1}{2\pi}\int p^{2(n+1)}|\hat{w}|^2dp = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{|p|<\delta} + \int\limits_{|p|\geqslant\delta}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\delta^2}{2\pi}\int\limits_{|p|\geqslant\delta}p^{2n}|\hat{w}|^2dp = \frac{\delta^2}{2\pi}\left(\int p^{2n}|\hat{w}|^2dp - \int\limits_{|p|<\delta}p^{2n}|\hat{w}|^2dp\right) \geqslant \delta^2 J_n - \delta^{2(n+1)}J_0,$$

что верно для произвольного $\delta \geqslant 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2}\dot{J}_n \leqslant -\delta^2 J + (\delta^2 + \delta^{2(n+1)})J_0 + P(J)J. \tag{32}$$

Положим

$$\delta^2 = P(d) + \frac{\sqrt{2}}{2}B\sqrt{d} + \frac{1}{2}.$$

Пусть выполнены условия

$$J(0) < d,\quad J_0(0) < \frac{d}{4}\frac{1}{\delta^2 + \delta^{2(n+1)}} = c.$$

Покажем, что тогда

$$J(t) \leqslant d,\quad J_0(t) \leqslant c\quad \forall t \geqslant 0. \tag{33}$$

Предположим, что это не верно и нарушается второе из неравенств (33). Тогда существует момент времени T такой, что $J_0(T) = c$ и на $[0, T]$ выполняются неравенства (33). Тогда, согласно неравенству (31), J_0 убывает на сегменте $[0, T]$, а значит, равенство $J_0(T) = c$ невозможно. Таким образом, доказано, что $J_0(t) < c\ \ \forall t \geqslant 0$.

Предположим теперь, что не выполнено первое из неравенств (33). Тогда существует T: $J(T) = d$ и $J(t) \leqslant d\ \ \forall t \in [0, T]$. Складывая (30) и (32), имеем

$$\dot{J} \leqslant -J + 2(\delta^2 + \delta^{2(n+1)})J_0 < -J + d/2. \tag{34}$$

Значит, $\dot{J}(T) < 0$, и как только функция $J(t)$ достигает значения d, ее производная становится отрицательной, т.е. $J(t)$ не может превзойти d.

Лемма 2. *Пусть функция $f(u)$ удовлетворяет условиям теоремы. Кроме того, выполняется условие*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 w^2(x, 0; \alpha)dx < \infty.$$

Тогда существует число $\tilde{d} > 0$ такое, что если $J(t) \leqslant \tilde{d}$ для любого t, то существует константа $C > 0$ такая, что $\forall t \geqslant 0$

$$W_1(t) \leqslant C.$$

Доказательство. Умножим (28) на x^2w и проинтегрируем по dx от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\frac{1}{2}\dot{W}_1 + \int[f(\varphi + w_{(1)}) - f(\varphi)]wx^2dx + \int x^2 wK(w)dx = 0.$$

Умножим это уравнение на 2 и оставим в правой части только член $\dot{W}_1$:

$$\dot{W}_1 = -2\int[f(\varphi + w_{(1)}) - f(\varphi)]wx^2dx - 2\int x^2 wK(w)dx.$$

Пусть

$$I_1 = -2\int[f(\varphi + w_{(1)}) - f(\varphi)]wx^2dx, \quad I_2 = -2\int x^2 wK(w)dx.$$

Интеграл I_2 снова можно представить в виде суммы двух интегралов:

$$I_2 = -2\int wK(w)x^2dx = -2a\int ww_{(3)}x^2dx + \int ww_{(2)}x^2dx.$$

Обозначим

$$I_3 = -2a\int ww_{(3)}x^2dx, \quad I_4 = \int ww_{(2)}x^2dx.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$I_3 = -2a\int ww_{(3)}x^2dx = -2a\int wx^2dw_{(2)} =$$
$$= 2a\int x^2w_{(1)}w_{(2)}dx + 4a\int xww_{(2)}dx = a\int x^2dw_{(1)}^2 + 4a\int xwdw_{(1)} =$$
$$= -2a\int xw_{(1)}^2dx - 4a\int xw_{(1)}^2dx - 4a\int ww_{(1)}dx = -6a\int xw_{(1)}^2dx,$$

так как

$$\int ww_{(1)}dx = \int\frac{1}{2}dw^2 = 0.$$

Далее,

$$I_4 = 2\int ww_{(2)}x^2dx = 2\int x^2wdw_{(1)} =$$
$$= -4\int xww_{(1)}dx - 2\int x^2w_{(1)}^2dx = -2\int xdw^2 - 2W_2 = 2J_0 - 2W_2.$$

Используя неравенство Коши–Буняковского и неравенство $2pq - q^2 \leqslant p^2$, оцениваем I_2:

$$I_2 = -6a\int xw_{(1)}^2dx + 2J_0 - 2W_2 \leqslant 6a\sqrt{J_1W_2} - 2W_2 + 2J_0 \leqslant -W_2 + 9a^2J_1 + 2J_0.$$

Рассмотрим теперь слагаемое I_1, применив формулу Тейлора

$$I_1 = -2\int(f(\varphi + w_{(1)}) - f(\varphi))wx^2dx =$$
$$= -2\int f'(\varphi)w_{(1)}wx^2dx - \int f''(\varphi + \theta_2w_{(1)})w_{(1)}^2wx^2dx.$$

Пусть

$$I_5 = -2\int f'(\varphi)w_{(1)}wx^2dx,\quad I_6 = \int f''(\varphi+\theta_2 w_{(1)})w_{(1)}^2wx^2dx.$$

Справедлива оценка

$$I_6 = -\int f''(\varphi+\theta_2 w_{(1)})w_{(1)}^2wx^2dx \leqslant B(4J_0J_1)^{1/4}W_2 \leqslant 2BJ^{1/2}W_2 \leqslant W_2,$$

если выбрать $\tilde{d}$ таким образом, что $2B\sqrt{\tilde{d}} \leqslant 1$.

Преобразуем интеграл I_5:

$$I_5 = -\int f'(\varphi)x^2dw^2 = \int f''(\varphi)\varphi' x^2w^2dx + 2\int xf'(\varphi)w^2dx.$$

В силу выпуклости $f(u)$ и монотонности бегущей волны имеем

$$I_5 \leqslant 2\int f'(\varphi)xw^2dx.$$

Рассмотрим функцию $h(x, t; \alpha) = f'(\varphi(x-\lambda t+\alpha))x$ при некоторых фиксированных t и α. Обозначим через x_0 такую точку, что $\varphi(x_0) = u_0$, и предположим для определенности, что $x_0 > 0$. Тогда на интервале $\Delta = (0, x_0)$ функция $h(x, t; \alpha)$ положительна, а на множестве $\mathbb{R}\backslash\Delta$ неположительна. Кроме того,

$$h(x, t; \alpha) \xrightarrow[x\to\infty]{} -\infty.$$

Тогда для достаточно большого A_1 имеем

$$I_5 = 2\int\limits_{\Delta} h(x, t; \alpha)w^2dx + 2\int\limits_{\mathbb{R}\backslash\Delta} h(x, t; \alpha)w^2dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{\Delta} h(x, t; \alpha)w^2dx + 2\int\limits_{|x|\geqslant A_1} h(x, t; \alpha)w^2dx \leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_{\Delta} h(x, t; \alpha)w^2dx + 2\sup_{|x|\geqslant A_1} h(x, t; \alpha)\int\limits_{|x|\geqslant A_1} w^2dx.$$

Пусть

$$D = \sup_{|x|\geqslant A_1} h(x, t; \alpha) < 0,\quad I = \int\limits_{\Delta} h(x, t; \alpha)w^2dx \geqslant 0,$$

тогда получаем

$$I_5 \leqslant 2I + 2D\int\limits_{|x|\geqslant A_1} w^2dx \leqslant 2I + 2DJ_0 - 2D\int\limits_{|x|<A_1} w^2dx \leqslant$$

$$\leqslant 2I + 2DJ_0 - 8DA_1J_0^{1/2}J_1^{1/2} \leqslant 2I + DJ_0 - 16DA_1^2J_1.$$

Теперь для произвольно фиксированного t выберем A_1, зависящее от t, настолько большим, что

$$D \leqslant -2 - 2I/J_0 \leqslant -2,$$

тогда имеем $I_5 \leqslant -2J_0 + A_2J_1$, где A_2 – некоторая положительная константа, не зависящая от t.

Учитывая оценки для интегралов $I_1 - I_5$, имеем, что существует положительная константа $\tilde{d}$, такая, что если $J(t) \leqslant \tilde{d}$, то $\dot{W}_1 \leqslant A_3J_1$ для некоторой положительной константы A_3.

Пусть теперь $W = W_1 + A_3J_0$. Тогда будет

$$\dot{W} \leqslant \dot{W}_1 + A_3\dot{J}_0 \leqslant A_3J_1 - A_3J_1 = 0,$$

а значит, $W_1(t)$ ограничено.

Лемма 3. *Существует такое число* $\hat{d} > 0$, *что если* $J(0) < \hat{d}$, *то существует* $A > 0$ *такое, что*

$$J(t) \leqslant \frac{A}{\sqrt{t+1}}.$$

Доказательство. Выберем $\hat{d}$ минимальной из констант c, d, $\tilde{d}$ из лемм 1 и 2. Тогда

$$\dot{J}_0 \leqslant -J_1 = -\int w_{(1)}^2 dx = -\frac{1}{2\pi}\int p^2|\hat{w}|^2 dp =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|p| \leqslant \varepsilon} p^2|\hat{w}|^2 dp - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|p| > \varepsilon} p^2|\hat{w}|^2 dp \leqslant -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|p| > \varepsilon} p^2|\hat{w}|^2 dp \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{\varepsilon^2}{2\pi}\int\limits_{|p| > \varepsilon} |\hat{w}|^2 dp = -\frac{\varepsilon^2}{2\pi}\int|\hat{w}|^2 dp + \frac{\varepsilon^2}{2\pi}\int\limits_{|p| \leqslant \varepsilon} |\hat{w}|^2 dp =$$

$$= -\varepsilon^2 J_0 + \frac{\varepsilon^3}{\pi}\max_{|p| \leqslant \varepsilon}|\hat{w}|^2 \leqslant -\varepsilon^2 J_0 + \frac{\varepsilon^3}{\pi}4\pi\sqrt{J_0 W_1}.$$

Согласно лемме 1 и лемме 2 имеем

$$\dot{J}_0 \leqslant -\varepsilon^2 J_0 + \frac{\varepsilon^3}{\pi}4\pi\sqrt{J_0 W_1} \leqslant -\varepsilon^2 J_0 + \varepsilon^3 A_1,$$

где A_1 – некоторая положительная константа.

Таким образом, получаем

$$\dot{J}_0 \leqslant -\varepsilon^2 J_0 + A_1\varepsilon^3$$

для произвольного ε. Положим $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}$. Получим

$$\dot{J}_0 \leqslant -\frac{J_0}{t+1} + \frac{A_1}{(t+1)^{3/2}}.$$

Умножим на $t + 1$:

$$d(J_0(t+1)) \leqslant \frac{A_1}{\sqrt{t+1}}.$$

Интегрируя от 0 до t, получаем, что существует $A_2 > 0$ такое, что

$$J_0 \leqslant \frac{A_2}{\sqrt{t+1}}.$$

Из (34) следует, что

$$\dot{J} \leqslant -J + A_3J_0 \leqslant -J + \frac{A_4}{\sqrt{t+1}}.$$

Умножив это неравенство на e^t и проинтегрировав от 0 до t, получим

$$J \leqslant \frac{J(0)}{e^t} + \frac{A_4}{e^t}\int_0^t \frac{e^\tau}{\sqrt{\tau+1}}d\tau.$$

Поскольку, по правилу Лопиталя,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_0^t \frac{e^\tau}{\sqrt{\tau+1}}d\tau}{e^t} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t+1}},$$

то существует $A > 0$ такое, что

$$J \leqslant \frac{A}{\sqrt{t+1}}.$$

Лемма 3 завершает доказательство теоремы.

Доказательство следствия. При доказательстве теоремы установлено, что

$$J \leqslant \frac{A}{\sqrt{t+1}}.$$

Из определения J и неравенства (22) следует, что

$$J_0 \leqslant \frac{A}{\sqrt{t+1}}, \quad J_1 \leqslant \frac{A}{\sqrt{t+1}}.$$

Применяя неравенство (23), получаем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|u(x,t)-\varphi(x-\lambda t+\alpha)| \leqslant \frac{\tilde{A}}{\sqrt{t+1}}.$$

Покажем, как можно избавиться от требования ограниченности производных функции $f(u)$, используемого при доказательстве теоремы. В лемме 1 утверждается, что существуют $c > 0$, $d > 0$ такие, что если

$$J_0(0) < c, \quad J(0) < d, \tag{35}$$

то

$$J_0(t) < c, \quad J(t) \leqslant d \quad \forall t \geqslant 0.$$

При доказательстве показывается, что $d = \dfrac{1}{2B^2}$, где $B = \max\limits_{u\in\mathbb{R}} f''(u)$.

Кроме того, из утверждения имеем

$$\sup|u-\varphi| \leqslant \sqrt{2J} \leqslant \sqrt{2d} = 1/B.$$

Значит,

$$|u| \leqslant U + 1/B, \quad U = \max\{|u_-|, |u_+|\}.$$

Предположим теперь, что производные функции $f(u)$ не ограничены. Заметим, что всегда можно выбрать Δ так, чтобы $\Delta > U + 1/B$, а $|f''(u)| \leqslant B/2$ на отрезке $[-\Delta, \Delta]$ для некоторого $B > 0$. Определим теперь функцию $\tilde{f}(u)$:

$$\tilde{f}(u) = \begin{cases} [f'(-\Delta)-\varepsilon](u+\Delta)+f(-\Delta)+\varepsilon, & u\in(-\infty, -\Delta-\varepsilon],\\ f^{\varepsilon-}(u), & u\in(-\Delta-\varepsilon, -\Delta),\\ f(u), & u\in[-\Delta, \Delta],\\ f^{\varepsilon+}(u), & u\in(\Delta, \Delta+\varepsilon),\\ [f'(\Delta)+\varepsilon](u-\Delta)+f(\Delta)+\varepsilon, & u\in[\Delta+\varepsilon, +\infty).\end{cases}$$

Функции $f^{\varepsilon-}(u)$, $f^{\varepsilon+}(u)$ строятся таким образом, чтобы $\tilde{f}(u)\in C^{n+1}(\mathbb{R})$, $\tilde{f}''(u)\geqslant 0$, $|\tilde{f}''(u)|\leqslant B$.

Функция $\tilde{f}(u)$ удовлетворяет условиям теоремы. Ей соответствуют бегущая волна $\tilde{\varphi}(x - \lambda t + \alpha)$ и решение $u(x, t)$, лежащие внутри отрезка $[-\Delta, \Delta]$. Поскольку $\tilde{f}(u) \equiv f(u)$ на этом отрезке, то $\tilde{\varphi}(x - \lambda t + \alpha)$ является решением уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса с функцией $f(u)$, а $\tilde{u}(x, t)$ – решением соответствующей задачи Коши.

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Целью данного раздела является продемонстрировать, что доказательство существования и единственности решения задачи Коши (2), приведенное в [1], может быть перенесено без существенных изменений на случай функции $f(u) \in C^{m+1}(\mathbb{R})$, $m \geqslant 3$. Структура рассуждения повторяет [1]; там, где это возможно, делается ссылка на доказательства, проведенные в [1].

Лемма 4. 1. *Пусть* $w_0(x) \in H^m(\mathbb{R})$, *тогда для некоторого* $T > 0$ *существует единственное решение* $w(x, t) \in C^m([0, T]; H^m(\mathbb{R}))$ *следующей задачи Коши:*

$$\begin{gathered} w_t + f(w_x + \varphi) - f(\varphi) + a w_{xxx} - w_{xx} = 0, \\ w(x, 0) = w_0(x), \end{gathered} \tag{36}$$

где $f(\cdot) \in C^{m+1}(\mathbb{R})$, $\varphi(\cdot) \in C_b^m(\mathbb{R})$ ($C_b^m(\mathbb{R})$ – *класс функций из* $C^m(\mathbb{R})$, *ограниченных вместе со всеми своими производными*).

2. *Если норма решения* $\|w(x, t)\|_{H^3(\mathbb{R})}$ *остается ограниченной с течением времени, то решение* $w(x, t) \in C^m([0, +\infty); H^m(\mathbb{R}))$, *т.е. существует в целом по времени.*

Сделаем замену

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{x} u(x, t) dx,$$

тогда задача Коши для функции $u(x, t)$ записывается в виде

$$\begin{gathered} u_t + f'(u + \varphi) u_{(1)} + \mathbb{K}(u) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{gathered} \tag{37}$$

где $\mathbb{K}(u) = L(u) + f''(\varphi + \theta u)\varphi' u$, $\theta \in (0, 1)$, $L(u) = a u_{xxx} - u_{xx}$; $u_0(x) = w_0'(x)$.

Докажем сначала существование и единственность решения задачи Коши с регуляризованным оператором.

Утверждение 4. *Пусть* $u_0(x) \in H^{m-1}(\mathbb{R})$, $f(u) \in C^{m+1}(\mathbb{R})$, $\varphi(x) \in C_b^m(\mathbb{R})$. *Тогда для некоторого* $T > 0$ *существует решение* $u(x, t) \in C^m([0, T]; H^{m-1}(\mathbb{R}))$ *следующей задачи Коши:*

$$\begin{gathered} u_t + f'(u + \varphi) u_{(1)} + \mathbb{K}_{\text{reg}}(u) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{gathered} \tag{38}$$

где

$$\mathbb{K}_{\text{reg}}(u) = L_{\text{reg}}(u) + \xi(x, u) u(x, t), \quad L_{\text{reg}}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x - y) u(y, t) dy, \tag{39}$$

$\xi(x, u) \in C_b^{m-1}(\mathbb{R})$ *по обоим аргументам*, $k(x)$ *принадлежит пространству Шварца на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Решение строится методом последовательных приближений:

$$\begin{gathered} v^{(0)}(x, t) = u_0(x), \\ v_t^{(s)} + f'(v^{(s-1)} + \varphi) v_x^{(s)} + \mathbb{K}_{\text{reg}}(v^{(s-1)}) = 0. \end{gathered} \tag{40}$$

Заметим, что если $v^{(s-1)}(x, t)$ уже построена и принадлежит классу $C^m([0, +\infty); H^{m-1}(\mathbb{R}))$, то $f'(v^{(s-1)} + \varphi) \in C^m([0, +\infty); C_b^{m-1}(\mathbb{R}))$. В [1] показано, что из этого следует существование $v^{(s)}(x, t) \in$ $\in C^m([0, +\infty); H^{m-1}(\mathbb{R}))$.

Далее докажем, что для некоторого $T > 0$ последовательность $\{v^{(s)}(x, t)\}$ равномерно по $s \geqslant 0$ ограничена в классе $C^m([0, T]; H^{m-1}(\mathbb{R}))$. Для этого продифференцируем второе уравнение из (40) n раз по $x (n \leqslant m)$, умножим на $v_{(n)}^{(s)}$, проинтегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$:

$$\dot{V}_n^s + 2\sum_{j=0}^{n} C_n^j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^j}{\partial x^j}(f'(v^{(s-1)} + \varphi))\, v_{(n+1-j)}^{(s)}\, v_{(n)}^{(s)} dx + 2\int_{-\infty}^{+\infty} v_{(n)}^{(s)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \mathbb{K}_{\text{reg}}(v^{(s-1)}) dx = 0, \qquad (41)$$

где обозначено

$$V_n^s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} [v_{(n)}^{(s)}(x, t)]^2 dx.$$

Пусть теперь $J_n^s = 1 + \Sigma_{j=0}^n V_j^s$. Оценим величины J_n^s. При оценке будем пользоваться неравенством Коши–Буняковского и неравенством (23) в виде

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| v_{(n)}^{(s)}(x, t) \right| \leqslant (4 V_n^s V_{n+1}^s)^{1/4}.$$

Заметим, что, в силу формулы интегрирования по частям, имеем

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} L_{\text{reg}}(u) = L_{\text{reg}}(u_{(n)}).$$

Оценим член, содержащий $\frac{\partial^n}{\partial x^n} L_{\text{reg}}(v^{(s-1)})$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^n}{dx^n} k(x-y)\, v^{(s-1)}(y, t) dy\, v_{(n)}^{(s)}(x, t) dx \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{J_1^{s-1}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^n}{dx^n} k(x-y)\, v_{(n)}^{(s)}(x, t) \right| dx dy \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{J_1^{s-1} J_n^s} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d^n}{dx^n} k(x-y) \right)^2 dx}\, dy \leqslant \tilde{c} \sqrt{J_1^{s-1} J_n^s}.$$

Оценим слагаемые из (41) при $n = 2$, соответствующие каждому индексу j: при $j = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(v^{(s-1)} + \varphi)\, v_{(3)}^{(s)}\, v_{(2)}^{(s)} dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f''(v^{(s-1)} + \varphi)(v_{(1)}^{(s-1)} + \varphi')(v_{(2)}^{(s)})^2 dx \leqslant \gamma_1 J_2^{s-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (v_{(2)}^{(s)})^2 dx \leqslant \gamma_1' J_2^{s-1} J_2^s;$$

при $j = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f''(v^{(s-1)} + \varphi)(v_{(1)}^{(s-1)} + \varphi')(v_{(2)}^{(s)})^2 dx \leqslant 2\gamma_1' J_2^{s-1} J_2^s;$$

при $j = 2$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[f'''(v^{(s-1)}+\varphi)(v_{(1)}^{(s-1)}+\varphi')^2+f''(v^{(s-1)}+\varphi)(v_{(2)}^{(s-1)}+\varphi'')]v_{(1)}^{(s)}v_{(2)}^{(s)}dx \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_2 J_2^{s-1}J_2^s + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f''(v^{(s-1)}+\varphi)v_{(2)}^{(s-1)}v_{(1)}^{(s)}v_{(2)}^{(s)}dx \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_2 J_2^{s-1}J_2^s + \gamma_3\sqrt{J_2^s}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f''(v^{(s-1)}+\varphi)v_{(2)}^{(s-1)}v_{(2)}^{(s)}dx \leqslant \gamma_2' J_2^{s-1}J_2^s.$$

По формуле Лейбница получаем

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(\xi(x, v^{(s-1)})v^{(s-1)}) = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \frac{\partial^j}{\partial x^j}(\xi(x, v^{(s-1)}))v_{(n-j)}^{(s-1)}.$$

Снова для $n = 2$ оценим слагаемые, соответствующие каждому индексу j:
при $j = 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi v_{(2)}^{(s-1)}v_{(2)}^{(s)}dx \leqslant \beta_1\sqrt{J_2^{s-1}J_2^s};$$

при $j = 1$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi_x v_{(1)}^{(s-1)}v_{(2)}^{(s)}dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi_u (v_{(1)}^{(s-1)})^2 v_{(2)}^{(s)}dx \leqslant$$

$$\leqslant \beta_2'\sqrt{J_2^{s-1}J_2^s} + \beta_2''\sqrt{J_2^{s-1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_{(1)}^{(s-1)}v_{(2)}^{(s)}dx \leqslant \beta_2 J_2^{s-1}\sqrt{J_2^s};$$

при $j = 2$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi_{xx}v^{(s-1)}v_{(2)}^{(s)}dx + 2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi_{xu}v_{(1)}^{(s-1)}v^{(s-1)}v_{(2)}^{(s)}dx +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi_{uu}(v_{(1)}^{(s-1)})^2 v^{(s-1)}v_{(2)}^{(s)}dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi_u v_{(2)}^{(s-1)}v^{(s-1)}v_{(2)}^{(s)}dx \leqslant \beta_3 (J_2^{s-1})^{3/2}\sqrt{J_2^s}.$$

Таким образом, получаем, что

$$\dot{J}_2^s \leqslant c_2 (J_2^{s-1})^{3/2} J_2^s, \tag{42}$$

где c_2 – некоторая неотрицательная константа.

Покажем теперь, что

$$\dot{J}_n^s \leqslant c_n (J_n^s (J_{n-1}^{s-1})^{\sigma_n} + (J_2^s + J_2^{s-1})\sqrt{J_n^s J_n^{s-1}}), \quad n \geqslant 3, \tag{43}$$

где c_n, σ_n – неотрицательные константы, не зависящие от s.

Для этого слагаемые в сумме по j разделим на группы:

1) слагаемое, содержащее член $v_{(n)}^{(s-1)}$ (соответствующее значению индекса $j = n$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f''(v^{(s-1)} + \varphi) v_{(n)}^{(s-1)} v_{(1)}^{(s)} v_{(n)}^{(s)} dx \leq \delta_1 \sqrt{J_2^s J_n^s J_n^{s-1}};$$

2) слагаемое, содержащее член $v_{(n-1)}^{(s-1)} v_{(n)}^{(s)}$ (соответствующее значению индекса $j = n - 1$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f''(v^{(s-1)} + \varphi) v_{(n-1)}^{(s-1)} v_{(2)}^{(s)} v_{(n)}^{(s)} dx \leq \delta_2 \sqrt{J_2^s J_n^s J_n^{s-1}};$$

3) слагаемое, содержащее член $v_{(n+1)}^{(s)}$ (соответствующее значению индекса $j = 0$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(v^{(s-1)} + \varphi) v_{(n+1)}^{(s)} v_{(n)}^{(s)} dx = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (v_{(n)}^{(s)})^2 f'(v^{(s-1)} + \varphi)(v_{(1)}^{(s-1)} + \varphi') dx \leq \delta_3 \sqrt{J_2^{s-1}} J_n^s;$$

4) остальные слагаемые

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(p)}(v^{(s-1)} + \varphi)\left(\prod (\varphi^{(q)})^{\sigma} \prod (v_{(r)}^{(s-1)})^{\beta} v_{(m)}^{(s)} v_{(n)}^{(s)}\right) dx \leq \delta_4 (J_{n-1}^{s-1})^{\sigma_n} J_n^s,$$

так как $r \leq n - 2$, $m \leq n$.

Интегралы, содержащие производные ξ, будут иметь вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^p \xi}{\partial x^{p_1} \partial u^{p_2}} \Pi (v_{(r)}^{(s-1)})^{\beta} v_{(n-j)}^{(s-1)} v_{(n)}^{(s)} dx, \quad p_1 + p_2 = p \leq j, \quad \Sigma \beta r \leq j.$$

Оценим отдельно слагаемые, содержащие $v_{(n)}^{(s-1)}$ и $v_{(n-1)}^{(s-1)}$ (очевидно, остальные слагаемые оцениваются правой частью неравенства (43)). Такие слагаемые возникают при следующих значениях j: при $j = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi v_{(n)}^{(s-1)} v_{(n)}^{(s)} dx \leq \kappa_1 \sqrt{J_n^{s-1} J_n^s};$$

при $j = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_x v_{(n-1)}^{(s-1)} v_{(n)}^{(s)} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_u v_{(1)}^{(s-1)} v_{(n-1)}^{(s-1)} v_{(n)}^{(s)} dx \leq \kappa_2 J_2^{s-1} \sqrt{J_{n-1}^{s-1} J_n^s};$$

при $j = n - 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_u v_{(n-1)}^{(s-1)} v_{(1)}^{(s-1)} v_{(n)}^{(s)} dx \leq \kappa_3 J_2^{s-1} \sqrt{J_{n-1}^{s-1} J_n^s};$$

при $j = n$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_{xu} v_{(1)}^{(s-1)} v_{(n-1)}^{(s-1)} v^{(s-1)} v_{(n)}^{(s)} dx \leq \kappa_4 J_2^{s-1} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{(n-1)}^{(s-1)} v_{(n)}^{(s)} dx \leq \kappa_4 J_2^{s-1} \sqrt{J_{n-1}^{s-1} J_n^s}.$$

Таким образом, неравенство (43) доказано.

Предположим по индукции, что выполнено неравенство

$$J_2^{s-1}(t) \leqslant J_2(0)\Big(1-\frac{3}{2}c_2(J_2(0))^{3/2}t\Big)^{-2/3}. \qquad (44)$$

Подставим его в (42) и проинтегрируем, учитывая, что $J_2^s(0) = J_2(0)$, тогда получим, что неравенство (44) выполнено и для $J_2^s(t)$. (При $s = 1$ неравенство (42) справедливо по определению $J_2^0(t)$.)

Отсюда следует, что существует такое $T > 0$, что на сегменте $[0, T]$ при всех $s \geqslant 0$ будет $J_2^s(t) \leqslant D_2$, где D_2 – некоторая не зависящая от s константа.

Докажем индукцией по $n \geqslant 2$, что

$$J_n^s \leqslant D_n, \quad t \in [0, T], \quad s = 0, 1, 2, \dots.$$

Предположим, что это неравенство установлено для $n \leqslant n_1$. Тогда для $n = n_1 + 1$ получим из (43)

$$\dot{J}_n^s \leqslant \tilde{c}_n(J_n^s + \sqrt{J_n^s J_n^{s-1}}).$$

Завершение индукции приведено в [1].

Аналогично доказывается ограниченность величин $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^j V_n^{(s)}(x, t)}{\partial t^j}\right)^2 dx$ равномерно по s.

Итак, последовательность $\{v^{(s)}\}$ ограничена в $C^m([0; T]; H^{m-1}(\mathbb{R}))$ равномерно по $s \geqslant 0$. Значит, некоторая подпоследовательность из $\{v^{(s)}\}$ сходится к решению $u(x, t) \in C^m([0; T]; H^{m-1}(\mathbb{R}))$ задачи (38).

Пусть $\mathbb{K}$ в задаче (37) представлен в виде псевдодифференциального оператора:

$$\mathbb{K}(u) = L(u) + \xi(x, u)u(x, t), \quad L(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx}K(p)\hat{u}(p, t)dp,$$

где $\hat{u}(p, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx}u(x, t)dx$ – преобразование Фурье, символ $K(p) \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $\xi(x, u) \in C_b^{m-1}(\mathbb{R})$ по обоим аргументам.

Утверждение 5. *Пусть оператор* $\mathbb{K}$ *диссипативный, т.е.* $K^1(p) \equiv \operatorname{Re} K(p) \geqslant 0$; *начальное условие* $u_0(x) \in H^{m-1}(\mathbb{R})$. *Тогда на некотором сегменте* $[0, T]$ *существует единственное решение* $u(x, t)$ *задачи* (37), *принадлежащее* $C^m([0, T]; H^{m-1}(\mathbb{R}))$.

Доказательство. В [1] сначала строится оператор $\mathbb{K}_{\mathrm{reg}}^1(u)$ – регуляризация оператора $\mathbb{K}(u)$, представимая в виде (39). Согласно утверждению 4, для задачи Коши с регуляризованным оператором существует и единственно решение $u^{(l)}$.

Покажем ограниченность последовательности $\{u^{(l)}\}$ равномерно по l.

Продифференцируем n раз уравнение (38) по x ($n \leqslant m$), умножим на $u_{(n)}^{(l)}(x, t)$ и проинтегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$\dot{V}_n^{(l)} + 2\sum_{j=0}^{n} C_n^j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^j}{\partial x^j}(f'(u^{(l)} + \varphi))u_{(n+1-j)}^{(l)} u_{(n)}^{(l)} dx + 2I_n^{(l)} dx = 0, \qquad (45)$$

где

$$V_n^{(l)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (u_{(n)}^{(l)})^2 dx, \quad I_n^{(l)} = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{(n)}^{(l)} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\mathbb{K}_{\mathrm{reg}}^l(u^{(l)})dx.$$

Пусть $J_n^{(l)} = 1 + \Sigma_{j=0}^n V_j^{(l)}$. Аналогично доказательству утверждения 4 и с помощью теоремы Планшереля оценим интеграл $I_n^{(l)}$:

$$I_n^{(l)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{(n)}^{(l)} L_{\mathrm{reg}}^{(l)}(u_{(n)}^{(l)})dx + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial x^n}(\xi(x, u^{(l)})u^{(l)})u_{(n)}^{(l)}dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K^{l,1}(p)\left|\hat{u}^{(l)}(p,t)\right|^2 dp + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^n}{\partial x^n}(\xi(x, u^{(l)})u^{(l)})u_{(n)}^{(l)}dx \geqslant -\xi_0(J_{(n)}^{(l)})^{\sigma_n},$$

где ξ_0, σ_n – константы, не зависящие от l ($\sigma_2 = 2$).

Аналогично доказательству утверждения 4 строятся оценки

$$\dot{J}_2^{(l)} \leqslant M_2(J_2^{(l)})^2, \tag{46}$$

$$\dot{J}_n^{(l)} \leqslant M_n(J_n^{(l)})^{\sigma_n}, \tag{47}$$

где M_2, M_n, σ_n – константы, не зависящие от l.

Интегрируя (46), имеем

$$J_2^{(l)}(t) \leqslant \frac{1}{[J_2^{(l)}(0)]^{-1} - M_2 t}.$$

Таким образом, если выбрать T так, чтобы

$$0 < T < \frac{1}{M_2 J_2^{(l)}(0)} \equiv \frac{1}{M_2 J_2(0)},$$

то найдется такая константа $c_1 \geqslant 0$, не зависящая от l, что $J_2^{(l)}(t) \leqslant c_1 \quad \forall t \in [0, T]$. Учитывая это и интегрируя (47), получаем, что $J_n^{(l)}(t) \leqslant c_n \ \forall t \in [0, T]$ ($c_n \geqslant 0$ не зависит от l).

Аналогично доказывается ограниченность величин $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^{n+m}u^{(l)}}{\partial x^n \partial t^m}\right)^2 dx$ равномерно по l.

Из полученных оценок вытекает, что некоторая подпоследовательность из $\{u^{(l)}\}$ сходится к $u(x, t) \in C^m([0; T]; H^{m-1}(\mathbb{R}))$. При этом $\mathbb{K}^l(u^{(l)}) \longrightarrow \mathbb{K}(u)$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0; T]$, так что $u(x, t)$ является решением задачи (37).

Докажем *единственность*. Предположим, что $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ – два различных решения уравнения (37), пусть $v = u^{(1)} - u^{(2)}$.

Для разности $u_t^{(1)} - u_t^{(2)}$ имеем уравнение

$$u_t^{(1)} - u_t^{(2)} + f'(u^{(1)} + \varphi)u_{(1)}^{(1)} - f'(u^{(2)} + \varphi)u_{(1)}^{(2)} + \mathbb{K}(u^{(1)}) - \mathbb{K}(u^{(2)}) = 0. \tag{48}$$

Выделим в каждом слагаемом член v, применив формулу Тейлора:

$$f'(u^{(1)} + \varphi)u_{(1)}^{(1)} - f'(u^{(2)} + \varphi)u_{(1)}^{(2)} =$$

$$= f'(u^{(1)} + \varphi)(u_{(1)}^{(1)} - u_{(1)}^{(2)}) + [f'(u^{(1)} + \varphi) - f'(u^{(2)} + \varphi)]u_{(1)}^{(2)} =$$

$$= f'(u^{(1)} + \varphi)v + f''[\varphi + \theta_1 u^{(1)} + (1 - \theta_1)u^{(2)}]vu_{(1)}^{(2)}.$$

Аналогично поступим с нелинейным членом оператора $\mathbb{K}(u)$:

$$\xi(x, u^{(1)})u^{(1)} - \xi(x, u^{(2)})u^{(2)} = \xi(x, u^{(1)})v + \xi_u[x, \theta_2 u^{(1)} + (1 - \theta_2)u^{(2)}]vu^{(2)}.$$

Подставим эти представления в (48), умножим на v и проинтегрируем по всем x. Обозначая $V = \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 dx$, получаем неравенство для произвольного отрезка $t \in [0, T]$:

$$\dot{V} \leqslant CV,$$

где C – некоторая константа, зависящая от выбранного отрезка. Учитывая, что $V(0) = 0$, получаем, что $V(t) \equiv 0$ на $[0, T]$.

Доказательство леммы. Поскольку решения задач (36) и (37) связаны соотношением

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{x} u(x, t)dx,$$

необходимо только показать, что $w(x, t) \in L_2(\mathbb{R})$ при всех $t \in [0; T]$. Для этого умножим уравнение (36) на $\rho(x)w(x, t)$ ($\rho(x)$ – произвольная неотрицательная финитная функция, $|\rho(x)| \leqslant 1$) и проинтегрируем по всем x. Пусть

$$W(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} w^2(x, t)\rho(x)dt,$$

и используем следующее представление для разности значений функции $f(\cdot)$:

$$f(w_x + \varphi) - f(\varphi) = f'(\varphi + \theta w_x)w_x, \quad \theta \in (0; 1).$$

Получим

$$\frac{1}{2}\dot{W} + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho w w_x f'(w_x + \varphi)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho w(a w_{xxx} - w_{xx})dx = 0.$$

В силу неравенства Коши имеем

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \rho w w_x f'(w_x + \varphi)dx\right| \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}}|f'(w_x + \varphi)| \int_{-\infty}^{+\infty} \rho w w_x dx \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}}|f'(w_x + \varphi)| \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho w^2 dx} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \rho w_x^2 dx} \leqslant \sqrt{WJ_0}[\sup_{x \in \mathbb{R}}|f'(w_x + \varphi)|].$$

Аналогично

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \rho w(a w_{xxx} - w_{xx})dx\right| \leqslant \sqrt{W(aJ_2 + J_1)}.$$

Таким образом, имеем

$$\dot{W} \leqslant c\sqrt{W},$$

где c – некоторая положительная константа. Отсюда следует ограниченность $W(t)$ при каждом t некоторой константой, не зависящей от функции $\rho(x)$. Значит, $w(x, t) \in L_2(\mathbb{R})$ при всех $t \geqslant 0$.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю А.А. Шананину за значительный вклад в проделанную работу, а также А.В. Гасникову за ценное обсуждение затронутых в работе проблем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наумкин П.И., Шишмарев И.А.* Задачи о распаде ступеньки для уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса // Функц. анализ и его прилож. 1991. Т. 25. № 1. С. 21–32.

2. *Полтерович В.М., Хенкин Г.М.* Математический анализ экономических моделей. Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий // Экономика и матем. методы. 1988. Т. 24. № 6. С. 1071–1083.
3. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ // Communs Pure and Appl. Math. 1950. V. 3. № 3. P. 201–230.
4. *Ильин А.М., Олейник О.А.* Асимптотическое поведение решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при больших значениях времени // Матем. сб. 1960. Т. 51(93). № 2. С. 191–216.
5. *Weinberger H.F.* Long-time behavior for regularized scalar conservation law in absence of genuine nonlinearity // Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Lineaire. 1990. V. 7. P. 407–425.
6. *Henkin G.M., Polterovich V.M.* A difference-differencial analogue of the Burgers equation: Stability of the two-wave behavior // J. Nonlinear Sci. 1994. V. 4. P. 497–517.
7. *Henkin G.M., Polterovich V.M.* A difference-differential analogue of the Burgers equation and some models of economic development // Discrete Continuous Dynamic Systems. 1999. V. 5. № 4. P. 697–728.
8. *Henkin G.M., Shananin A.A.* Asymptotic behavior of solutions of the Cauchy problem for Burgers type equations // J. Math. Pures and Appl. 2004. V. 83. P. 1457–1500.
9. *Henkin G.M., Shananin A.A., Tumanov A.E.* Estimates for solution of Burgers type equations and some applications // J. Math. Pures and Appl. 2005. V. 84. P. 717–752.
10. *Henkin G.M.* Asymptotic structure for solutions of the Cauchy problem for Burgers type equations // JFPTA. 2007. V. 1. № 2. P. 239–291.
11. *Наумкин П.И., Шишмарев И.А.* О распаде ступеньки для уравнения Кортевега–де Вриза–Бюргерса // Функц. анализ и его прилож. 1991. Т. 26(2). С. 88–93.
12. *Duan R., Zhao H.* Global srability of strong rarefaction waves for the generalized KdV–Burgers equation // Nonlinear Anal. 2007. V. 66. P. 1100–1117.
13. *Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюл. МГУ. Сер. матем. и механ. 1937. Т. 1. № 6. С. 1–26.
14. *Арестов В.В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи матем. наук. 1996. Т. 51. № 6. С. 89–124.