Функциональный анализ и его приложения,
1988, т. 22, вып. 4, 11—22

УДК 517.9

МНОГОМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0$

Р. Г. Новиков

§ 1. Введение

Уравнение вида

$$-\Delta\psi + (v(x) - Eu(x))\psi = 0 \tag{1.1}$$

возникает во многих областях физики: в квантовой механике, теории упругости, электродинамике. Восстановление потенциалов $v(x)$ и $u(x)$ в уравнении (1.1) по спектральным данным является классической задачей. В одномерном случае эта задача хорошо исследована (см. [1—3]). В многомерном случае без предположения сферической симметрии первые результаты получены в [4—7]. Фундаментальное исследование многомерной обратной задачи было проведено Л. Д. Фаддеевым [8; 9]. Часть результатов [9] была независимо получена Р. Ньютоном [10]. В работе Б. А. Дубровина, И. М. Кричевера, С. П. Новикова [11] были получены первые принципиальные результаты по многомерной обратной задаче при фиксированном значении спектрального параметра. Несмотря на эти и дальнейшие результаты (см. [12—25]) многомерные обратные задачи еще далеко не исчерпаны. В частности, оставалась нерешенной следующая обратная задача, поставленная И. М. Гельфандом [26].

Пусть в ограниченной области $D \Subset \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$ выполнено уравнение

$$-\Delta\psi + v(x)\psi = E\psi \tag{1.2}$$

и задан оператор $\hat{\Phi}(E)$, действующий в пространстве функций на ∂D, так что

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\psi\Big|_{\partial D}\right) = \hat{\Phi}(E)(\psi|_{\partial D}), \tag{1.3}$$

где ψ — решение (1.2), ν — внешняя нормаль к ∂D. Требуется определить потенциал $v(x)$ по оператору $\hat{\Phi}(E)$. Еще больший интерес эта задача представляет для уравнения (1.1).

Работ, посвященных решению многомерной обратной задачи в точно такой постановке, по-видимому, не было. Однако из работ [4; 12; 27] вытекает, что при некоторых ограничениях на $u(x)$ и $v(x)$ в уравнении (1.1) оператор $\hat{\Phi}(E)$, заданный при всех E, однозначно определяет $v(x)$ и $u(x)$.

В настоящей статье показано, что при фиксированном E оператор $\hat{\Phi}(E)$ однозначно определяет потенциал $v(x) - Eu(x)$. Этот потенциал находится по оператору $\hat{\Phi}(E)$, $E = \mathrm{const}$ на основе решения линейных фредгольмовых интегральных уравнений. В существенном получена характеризация ядра оператора $\hat{\Phi}(E)$ — функции $\Phi(x, y, E)$, $x, y \in \partial D$. Установлена взаимосвязь оператора $\hat{\Phi}(E)$ с другими данными рассеяния. В частности, дается решение следующей задачи. Пусть для уравнения (1.1) в D с $u(x) > 0$ задан спектр краевой задачи Дирихле $E_1, E_2, \ldots$ и нормальные производные на ∂D от ортонормированных собственных функций $\frac{\partial}{\partial\nu}\psi_j(x)\Big|_{\partial D}$. По этим данным требуется определить в уравнении (1.1) потенциалы $u(x)$ и $v(x)$.

В случае $v(x) \equiv 0$ или $u(x) \equiv 1$ задача решается явными формулами. В статье предложена также процедура восстановления финитного потенциала в уравнении Шредингера по амплитуде рассеяния при фиксированной энергии, доказана ($n \geqslant 3$) единственность такого восстановления без предположения о малости нормы потенциала. Ранее в [21] ($n = 2$) и [23] ($n \geqslant 3$) было доказано (при условии малости нормы потенциала), что не существует двух разных экспоненциально убывающих потенциалов в уравнении (1.2), имеющих одинаковые амплитуды рассеяния при фиксированной энергии. Формулировки результатов этой статьи вместе с идеями доказательств приведены в обзоре [23].

Недавно выяснилось, что независимо от [21; 23] Дж. Сильвестр и и Г. Ульман в [28] при $n = 2$ и в [29] при $n \geqslant 3$ получили следующую теорему единственности. Пусть в ограниченной области $D \Subset \mathbf{R}^n$ ($n \geqslant 2$) функция ψ удовлетворяет уравнению

$$\nabla \cdot (\gamma(x) \nabla \psi) = 0, \tag{1.4}$$

где $\gamma(x)$ — гладкая вещественная функция в $\overline{D}$, $\gamma(x) > \varepsilon > 0$. Тогда не существует двух разных функций $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ с одним оператором $\hat{\Phi}$ таким, что $\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\psi\Big|_{\partial D}\right) = \hat{\Phi}(\psi|_{\partial D})$, где ψ — решение уравнения (1.4). В случае $n = 2$ доказательство этого утверждения получено при условии малости нормы функции $1 - \gamma(x)$.

Результат [28; 29] вытекает из приведенных выше результатов для уравнения (1.1), поскольку подстановкой $\psi = \psi_0/\sqrt{\gamma(x)}$ уравнение (1.4) сводится к уравнению $-\triangle\psi_0 + v(x)\psi_0 = 0$, где $v(x) = -\triangle\sqrt{\gamma(x)}/\sqrt{\gamma(x)}$.

Интересно, что в [29] для доказательства теоремы единственности используются некоторые свойства экспоненциально растущих решений в $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 3$ уравнения (1.4). В обратной задаче свойства решений такого типа для уравнения Шредингера были впервые использованы Л. Д. Фаддеевым [8; 9]. Затем детальные свойства такого типа решений были использованы в работах [14—25].

Как указывается в [29], задача определения функции $\gamma(x)$ по оператору $\hat{\Phi}$ была поставлена А. Кальдероном в [30]. Результаты настоящей статьи дают решение этой задачи. Заметим, наконец, что в случае вещественно аналитической функции $\gamma(x)$ теорема единственности в задаче Кальдерона была доказана ранее в [31].

Автор благодарен С. П. Новикову за внимание к работе и полезные советы.

§ 2. Некоторые исходные результаты по многомерной обратной задаче рассеяния во всем пространстве

Пусть уравнение (1.2) или (1.1) выполнено во всем пространстве $\mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$. Функции $v(x)$ и $w(x) = u(x) - 1$ предполагаем вещественными, ограниченными и быстро убывающими на бесконечности. Амплитуда рассеяния $f(k, l)$, $k, l \in \mathbf{R}^n$, $k^2 = l^2 = E$ может быть определена равенством

$$f(k, l) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{x \in \mathbf{R}^n} e^{-ilx}\psi^+(x, k)(v(x) - Ew(x))\,dx, \tag{2.1}$$

где $\psi^+(x, k)$ — решение интегрального уравнения

$$\psi^+(x, k) = e^{ikx} + \int\limits_{y \in \mathbf{R}^n} G^+(x - y, k)(v(y) - Ew(y))\psi^+(y, k)\,dy, \tag{2.2}$$

$$G^+(x, k) = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\xi \in \mathbf{R}^n} \frac{e^{i\xi x}\,d\xi}{\xi^2 - k^2 - i0}. \tag{2.3}$$

Центральную роль при решении обратной задачи рассеяния играет семейство решений $\psi(x, k)$ уравнения (1.1), введенное и исследованное Л. Д. Фаддеевым [8; 9] в случае уравнения Шредингера. Л. Д. Фаддеев определил эти функции как решения интегрального уравнения

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + \int\limits_{y \in \mathbf{R}^n} G(x-y, k)\, v(y)\, \psi(y, k)\, dy, \tag{2.4}$$

где

$$G(x, k) = -\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int \frac{e^{i\xi x}\, d\xi}{\xi^2 + 2k\xi}\, e^{ikx}. \tag{2.5}$$

В подходящем классе функций уравнение (2.4) фредгольмово и при $k \in \mathbf{C}^n \setminus (\mathbf{R}^n \cup \mathscr{E})$ имеет единственное решение. Основные свойства множества исключительных точек $\mathscr{E}$, где уравнение (2.4) теряет однозначную разрешимость, найдены в [23].

В результате обсуждения с П. Г. Гриневичем выяснилось, что решения $\psi(x, k)$ при $k \in \mathbf{C}^n \setminus (\mathbf{R}^n \cup \mathscr{E})$ могут быть определены также как решения уравнения (1.1) со свойством

$$\psi(x, k) = e^{ikx}\left(1 + O\left(\left(\frac{1}{|x|}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)\right).$$

Л. Д. Фаддеев ввел в рассмотрение обобщенные данные рассеяния вида

$$h(k, l) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{x \in \mathbf{R}^n} e^{-ilx} \psi(x, k)\, v(x)\, dx, \tag{2.6}$$

где $k, l \in \mathbf{C}^n$, $k^2 = l^2$, $\operatorname{Im} k = \operatorname{Im} l$.

Для дальнейших формулировок удобно сделать замену переменных $k = k$, $p = \operatorname{Re} k - \operatorname{Re} l$ и рассматривать функцию $H(k, p) = h(k, k - p)$, $k \in \mathbf{C}^n$, $p \in \mathbf{R}^n$, $p^2 = 2kp$. Имеем

$$H(k, p) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{x \in \mathbf{R}^n} e^{ipx} \mu(x, k)\, v(x)\, dx, \tag{2.7}$$

где $\mu(x, k) = \psi(x, k)\, e^{-ikx}$.

Для вещественных γ, k, l, $k^2 = l^2 = E$, $|\gamma| = 1$ существуют следующие пределы [9] (см. также [23]):

$$G_\gamma(x, k) = G(x, k + i0\gamma), \quad \psi_\gamma(x, k) = \psi(x, k + i0\gamma), \quad h_\gamma(k, l) = h(k + i0\gamma, l + i0\gamma),$$

где $\gamma, k, l \in \mathbf{R}^n$, $|\gamma| = 1$, $k^2 = l^2 = E$ и выполнены равенства

$$G^+(x, k) = G\left(x, k + i0\frac{k}{|k|}\right), \quad \psi^+(x, k) = \psi\left(x, k + i0\frac{k}{|k|}\right),$$

$$f(k, l) = h\left(k + i0\frac{k}{|k|},\ l + i0\frac{l}{|l|}\right).$$

Функция $\mu(x, k)$ и функция $H(k, p)$ удовлетворяют следующим уравнениям [16; 17; 23] ($k \in \mathbf{C}^n$, $p \in \mathbf{R}^n$):

$$\frac{\partial}{\partial \bar{k}_j} \mu(x, k) = -2\pi \int\limits_{\xi \in \mathbf{R}^n} \xi_j H(k, -\xi)\, e^{i\xi x} \delta(\xi^2 + 2k\xi)\, \mu(x, k + \xi)\, d\xi, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{k}_j} H(k, p) = -2\pi \int\limits_{\xi \in \mathbf{R}^n} \xi_j H(k, -\xi)\, H(k + \xi, p + \xi)\, \delta(\xi^2 + 2k\xi)\, d\xi. \tag{2.9}$$

Если функция $H(k, p)$ ($n \geqslant 3$) известна на уровне энергии $k^2 = E$, $p^2 = 2kp$, то обратная задача может быть решена, например, по формуле [23]

$$\hat{v}(p)-\hat{w}(p)E=\lim_{\substack{k\to\infty,\ k^2=E,\\ p^2=2kp}} H(k,p), \tag{2.10}$$

где

$$\hat{v}(p)-E\hat{w}(p)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int\limits_{x\in\mathbf{R}^n} e^{ipx}(v(x)-Ew(x))\,dx. \tag{2.11}$$

Обратная задача может быть решена также по формуле [17; 23]:

$$v(x)-Eu(x)=\frac{\triangle\psi(x,k)}{\psi(x,k)}, \tag{2.12}$$

где $\psi=e^{ikx}\mu(x,k)$ — решение $\bar\partial$-уравнения (2.8), суженного на уровень энергии $k^2=E$, со свойством $\mu(x,k)\to 1$, $|k|\to\infty$.

В двумерном случае на фиксированном уровне энергии формула (2.10) отсутствует, однако можно воспользоваться формулой (2.12) (см. [18—20; 25]). Отметим, что в двумерном случае при $k^2=E\in\mathbf{R}_+$ для нахождения функции $\mu(x,k)$ при $k^2=E$ кроме $\bar\partial$-уравнения (2.8) на уровне энергии $k^2=E$ нужно учесть еще соотношение $\psi_1=\hat{R}(E)\psi_2$, где ψ_1,ψ_2 — пределы функции $\psi(x,k)$, $k\in\mathbf{C}^2$, $k^2=E$ на вещественной окружности $k\in\mathbf{R}^2$, $k^2=E$, а $\hat{R}(E)$ — оператор, выражающийся через оператор рассеяния $\hat{S}(E)$ (см. [19]). В двумерном случае характеризация данных рассеяния на уровне энергии получена в [18—20; 25], а в трехмерном в [17; 23].

§ 3. Основные результаты

Будем обозначать через $\Phi(x,y,E)$, где $x,y\in\partial D$, $E\in\mathbf{C}$ — ядро интегрального оператора $\hat\Phi(E)$, отвечающего уравнению (1.2) или (1.1). Всюду в этом параграфе функции $u(x)$ и $v(x)$ будем считать ограниченными в области D. Пусть $\Phi_0(x,y,E)$ — ядро интегрального оператора $\hat\Phi_0(E)$ вида (1.3) для уравнения

$$-\triangle\psi=E\psi \tag{3.1}$$

в области D. Пусть вне ограниченной области D с гладкой границей выполнены равенства $v(x)\equiv 0$, $u(x)\equiv 1$ (всюду в этом параграфе под гладкой границей будем понимать дважды непрерывно дифференцируемую границу). Тогда справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Функция $h(k,l)$, определенная равенством* (2.6), *может быть найдена по оператору $\hat\Phi(E)$ на основе формулы*

$$h(k,l)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\iint\limits_{x\in\partial D,\ y\in\partial D} e^{-ilx}(\Phi-\Phi_0)(x,y,k^2)\,\psi(y,k)\,\sigma(dx)\,\sigma(dy), \tag{3.2}$$

$k,l\in\mathbf{C}^n$, $k^2=l^2$, $\operatorname{Im}k=\operatorname{Im}l$. *При этом функция $\psi(y,k)$, определяемая уравнением* (2.4), *удовлетворяет уравнению*

$$(\psi(x,k)|_{\partial D})=e^{ikx}+\int\limits_{y\in\partial D} A(x,y,k)(\psi(y,k)|_{\partial D})\,\sigma(dy), \tag{3.3}$$

где

$$A(x,y,k)=\int\limits_{\substack{x,\,y\in\partial D\ z\in\partial D}} G(x-z,k)(\Phi-\Phi_0)(z,y,k^2)\,\sigma(dz).$$

Уравнение (3.3) можно ограничить на вещественное пространство. При этом получаются интегральные уравнения на функции $\psi_\gamma(x,k)$ и $\psi^+(x,k)$. Для функций $h_\gamma(k, l)$ и $f(k, l)$ справедливы формулы

$$h_\gamma(k, l) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \iint_{x,\, y \in \partial D} e^{-ilx} (\Phi - \Phi_0)(x, y, k^2)\, \psi_\gamma(y, k)\, \sigma(dx)\, \sigma(dy), \tag{3.4}$$

$$f(k, l) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \iint_{x,\, y \in \partial D} e^{-ilx} (\Phi - \Phi_0)(x, y, k^2)\, \psi^+(y, k)\, \sigma(dx)\, \sigma(dy), \tag{3.5}$$

$$k, l, \gamma \in \mathbf{R}^n, \quad k^2 = l^2, \quad \gamma^2 = 1.$$

Замечание 1. Формула (3.5) и уравнение (3.3) для $k = (1 + i0)\operatorname{Re} k$ остаются справедливыми и в одномерном случае, где они сводят обратную спектральную задачу на отрезке к обратной задаче по матрице рассеяния на всей оси.

Обозначим через s спектр задачи Дирихле для уравнения (1.1), а через s_0 спектр задачи Дирихле для уравнения (3.1).

Предложение 1. *Пусть $E \notin s \cup s_0$, тогда оператор $\hat{\Phi}(E) - \hat{\Phi}_0(E)$ является вполне непрерывным оператором в пространстве ограниченных функций на ∂D.* Кроме того, имеют место равенства (4.8), (4.9).

Из предложения 1 вытекает, что уравнение (3.3) является фредгольмовым уравнением второго рода в пространстве ограниченных функций на ∂D.

Предложение 2. *При $k \in (\mathbf{C}^n \setminus \mathbf{R}^n)$ и $k^2 \notin s \cup s_0$ уравнение* (3.3) *в пространстве ограниченных функций на ∂D однозначно разрешимо одновременно с уравнением* (2.4) *в пространстве ограниченных функций на D.*

Из теоремы 1 вытекают следующие следствия.

Следствие 1. Для того чтобы (в случае $n \geqslant 2$) по оператору $\hat{\Phi}(E)$ восстановить потенциал $v(x) - Eu(x)$, достаточно на основе формул (3.2)—(3.5) найти функцию h на уровне $k^2 = E$ и далее воспользоваться для решения обратной задачи способами, изложенными в [23] (некоторые из этих способов приведены в § 2).

Следствие 2. В случае $n \geqslant 2$ оператор $\hat{\Phi}(E)$ однозначно определяет потенциал $v(x) - Eu(x)$.

В случае $n \geqslant 3$ результат следствия доказан, по крайней мере, для любого ограниченного потенциала.

В случае же $n = 2$ аккуратное доказательство следствия 2 получено пока при некоторых дополнительных ограничениях на потенциал, например, при условии малости нормы функции $v(x) - Ew(x)$ по сравнению с $|E|$.

Пусть далее потенциал $q(x)$ требуется определить по оператору $\hat{\Phi}$, такому, что $\frac{\partial}{\partial \nu} \psi|_{\partial D} = \hat{\Phi}\psi|_{\partial D}$, где ψ — решение в D уравнения $-\Delta\psi + q\psi = 0$. Тогда, переписав это уравнение в виде $-\Delta\psi + (q + E)\psi = E\psi$, где E — произвольное комплексное число, оператор $\hat{\Phi}$ можно считать данными обратной задачи $\hat{\Phi}(E)$ для потенциала $q + E$ при выбранной «энергии» E.

Интересно отметить, как решаются прямая и обратная задачи в ограниченной области в борновском приближении. Пусть, например, в уравнении (1.2) потенциал $v(x)$ имеет очень маленькую норму. В этом случае справедливы две следующие формулы:

$$\Phi(x, y, E) - \Phi_0(x, y, E) = \int_{z \in D} \frac{\partial}{\partial \nu_x} G_0(x, z, E)\, v(z)\, \frac{\partial}{\partial \nu_y} G_0(z, y, E)\, dz + \bar{o}(\|v\|),$$

$$\hat{v}(p) = \iint_{\substack{x,\, y \in \partial D, \\ p^2 = 2kp,\ k^2 = E}} e^{ipx} e^{-ikx} (\Phi - \Phi_0)(x, y, E)\, e^{iky}\, dx\, dy + \bar{o}(\|v\|), \tag{3.6}$$

где $G_0(x, y, E)$ — функция Грина задачи Дирихле для уравнения (3.1).

Перейдем теперь к характеризации функции $\Phi(x, y, E)$. В связи с этим представляет интерес следующее предложение.

Предложение 3. *Функция* $H(k, p)$, $k \in \mathbf{C}^n$, $p \in \mathbf{R}^n$, *построенная по формуле* (3.2) *и* (3.3) *по произвольной функции* $\tilde{\Phi}(x, y, E)$, $x, y \in \partial D$ *аналитической по переменной* E, *удовлетворяет* $\bar{\partial}$*-уравнению* (2.9).

Из теоремы 1, предложения 3 и результатов [23] вытекает следующее следствие.

Следствие 3. Пусть $n \geqslant 3$. Пусть D — выпуклая область. Для того чтобы функция $\Phi(x, y, E)$, $x, y \in \partial D$, $E = \text{const}$ соответствовала некоторому потенциалу $v(x)$ $x \in D$, такому, что $|\hat{v}(p)| \leqslant C \cdot (1 + |p|)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\mu(x, k) = e^{-ikx}\psi(x, k)$, построенная по формуле (3.3), стремилась к 1, если $|k| \to \infty$, $k^2 = E$, а функция $H(k, p)$, $k^2 = E$, $p^2 = 2kp$, $p \in \mathbf{R}^n$, построенная по формуле (3.2), удовлетворяла при $|k| \to \infty$ неравенству $|H(k, p)| < C(1 + |p|)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}$.

Отметим, что для вещественного потенциала при $E \in \mathbf{R}$ выполнены две симметрии $\Phi(x, y, E) = \bar{\Phi}(x, y, E)$ и $\Phi(x, y, E) = \Phi(y, x, E)$. Отметим еще, что в двумерном случае функция $\Phi(x, y, E)$, $E = \text{const}$, $x, y \in \partial D$ зависит, как и потенциал, от двух переменных, т. е. обратная задача в двумерном случае не является переопределенной при $E = \text{const}$.

Если разрешить потенциалу $v(x)$, $x \in D \in \mathbf{R}^2$ быть обобщенной функцией, то необходимыми и достаточными свойствами функции $\Phi(x, y, E)$, $x, y \in \partial D$, $E \in \mathbf{R}$ являются эти две указанные выше симметрии.

К обратной задаче по оператору $\hat{\Phi}$ сводятся много других постановок обратной задачи для уравнений (1.1), (1.2), выполненных в области D.

Рассмотрим, например, для уравнения (1.1) с $u(x) \geqslant u_0 > 0$ в области D краевую задачу Дирихле $\psi|_{\partial D} = 0$. Данными обратной задачи назовем собственные числа задачи Дирихле E_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$ и последовательность функций $\frac{\partial}{\partial \nu}\psi_{j,r}(x, E_j)|_{\partial D}$, где $\psi_{j,r}(x, E_j)$ — нормированные собственные функции

$$\int_D \psi_{j,r}(x, E_j)\,\psi_{j',r'}(x, E_{j'})\,u(x)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{при } j = j',\ r = r', \\ 0 & \text{при } j \neq j' \text{ или } r \neq r'. \end{cases}$$

Следующая формула сводит эту обратную задачу к уже решенной обратной задаче по оператору $\hat{\Phi}(E)$

$$\Phi(x, y, E) = \sum_{j,r} \frac{\frac{\partial}{\partial \nu}\psi_{j,r}(x)\,\frac{\partial}{\partial \nu}\psi_{j,r}(y)}{E - E_j}\quad x,\ y \in \partial D. \tag{3.7}$$

Не представляет труда рассмотреть вместо краевого условия Дирихле краевое условие $\alpha(x)\psi|_{\partial D} + \beta(x)\frac{\partial}{\partial \nu}\psi|_{\partial D} = 0$. Например, в случае краевого условия Неймана $\frac{\partial}{\partial \nu}\psi|_{\partial D} = 0$ для ядра $Q(x, y, E)$ оператора $\hat{Q}(E) = (\hat{\Phi}(E))^{-1}$ справедлива формула

$$Q(x, y, E) = \sum \frac{\psi_{j,r}(x)\,\psi_{j,r}(y)}{E - E_j}, \quad x, y \in \partial D.$$

Укажем теперь способ определения оператора $\hat{\Phi}(E)$ по амплитуде рассеяния $f(k, l)$ при фиксированной энергии $k^2 = l^2 = E$.

Для потенциалов $u(x)$ и $v(x)$ таких, что $u(x) \equiv 1$, $v(x) \equiv 0$ при $x \in \mathbf{R}^n \setminus D$, где D — область со связной границей, справедливы формулы [4]

$$f(k, l) = \int\limits_{\partial D} \psi^+(x, k) K(x, l) \sigma(dx) \quad \psi^+(x, k) = \int\limits_{l^2=E} f(k, l) \tilde{K}(l, x) dl, \qquad (3.8)$$

где функции $K(x, l)$ и $\tilde{K}(l, x)$ полностью определяются областью D. Подставив (3.8) в (3.5), получаем уравнение для определения функции $\Phi(x, y, E)$, $x, y \in \partial D$ по амплитуде рассеяния $f(k, l)$, $k^2 = l^2 = E$.

Пусть D — ограниченная односвязная область с гладкой границей, u, v ограничены в D. Имеют место следующие предложения.

Предложение 4. *Оператор $\hat{\Phi}(E)$ и амплитуда рассеяния $f(k, l)$ $k^2 = l^2 = E$ (E фиксировано) определяются друг по другу однозначно.*

Предложение 5. *В случае $n \geqslant 3$ потенциал $v(x)$ в уравнении* (1.2), *равный нулю вне D, однозначно определяется своей амплитудой рассеяния $f(k, l)$, $k^2 = l^2 = E$, заданной при любом фиксированном $E > 0$ (малость нормы функции $v(x)$ не предполагается).* Фактически небольшое видоизменение рассуждений из [21], [23] приводит при $n \geqslant 3$ к доказательству единственности восстановления экспоненциально убывающего потенциала без предположения о малости его нормы по амплитуде рассеяния при фиксированной энергии. Нужно только проводить для функций $\Delta(k)$ и $H \cdot \Delta$ те же рассуждения, что были проведены для H в [21], [23].

В [4] установлена взаимосвязь обратной задачи по амплитуде рассеяния для финитного потенциала с большим числом других возможных постановок обратной задачи.

Важно отметить, что обратная задача для уравнений $-\Delta\psi + v\psi = E\psi$ и $-\Delta\psi = Eu\psi$ имеет упрощения по сравнению с обратной задачей для общего уравнения (1.1). В этих частных случаях обратная спектральная задача может быть решена явными формулами на основе формулы (3.7) и следующего предложения.

Предложение 6. *Пусть в ограниченной области D выполнены уравнения* а) $-\Delta\psi = \lambda u(x)\psi$ (*соответственно*), б) $-\Delta\psi + v(x)\psi = \lambda\psi$, *тогда справедливы формулы*

а) $(n \geqslant 2)$

$$\hat{v}(p) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \iint\limits_{\partial D \times \partial D} e^{ipx + ik(y-x)} (\Phi(x, y, \lambda) - \Phi_0(x, y, 0)) \sigma(dx) \sigma(dy),$$

$k^2 = 0$, $p^2 = 2kp$ (*соответственно*),

б) $(n \geqslant 3)$

$$\hat{v}(p) = \lim_{\tau \to +\infty} \iint\limits_{\partial D \times \partial D} e^{ipx + ik(\tau)(y-x)} (\Phi(x, y, \lambda(\tau)) - \Phi_0(x, y, \lambda(\tau))) \sigma(dx) \sigma(dy),$$

$p^2 = 2kp$, $k^2(\tau) = \lambda(\tau)$, $\operatorname{Re}\lambda(\tau) \to +\infty$, $\operatorname{Im}\lambda(\tau) = c_1 \neq 0$, $|\operatorname{Im} k(\tau)| \leqslant c_2$.

Близкую формулу можно написать и в случае $n = 2$.

Из предложения 6б) вытекает следствие: потенциал $v(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $n \geqslant 2$ в уравнении Шредингера однозначно определяется по данным E_j; $\frac{\partial}{\partial \nu} \psi_{j,r}(x)|_{\partial D}$, заданным с любого сколь угодно большого номера j.

Отметим еще, что в случае уравнения Шредингера справедлива характеризация функции $\Phi(x, y, E)$, $x, y \in \partial D$, $E \in \mathbf{R}_+$, аналогичная характеризации амплитуды рассеяния $f(k, l)$, $k^2 = l^2 = E \in \mathbf{R}_+$, полученной в [9]; 23].

Имея в виду приложения в геофизических обратных задачах, сформулируем некоторые результаты для области D, являющейся полупространством.

Пусть в полупространстве $D = \{x \in \mathbf{R}^n,\ x_n < 0\}$ задано уравнение (1.1) с вещественными ограниченными коэффициентами u и v, такими, что $u(x) \to 1$, $v(x) \to 0$ достаточно быстро при $x \to \infty$. Спектр задачи (1.1) с краевым условием Дирихле в $L_2(D, u(x)\,dx)$ состоит из всей положительной полуоси $\mathbf{R}_+$ и отдельных точек на отрицательной полуоси. Если E не является точкой спектра, то оператор $\hat{\Phi}(E)$ определяется по формуле (1.3) с помощью решений уравнения (1.1) из $L_2(D, u(x)\,dx)$. Для $E \in \mathbf{R}_+$ существуют пределы

$$\hat{\Phi}^{\pm}(E) = \hat{\Phi}(E \pm i0).$$

Для того чтобы можно было однозначно найти в D ограниченное решение ψ уравнения (1.1) при $E \in \mathbf{R}_+$ с заданным значением $\psi|_{\partial D} = f$, следует задать еще условие излучения на бесконечности. Решение ψ с условием излучения находится из следующего интегрального уравнения:

$$\psi(x) = \int\limits_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G_0(x, y, E) f(y)\,\sigma(dy) + \int\limits_{D} G_0(x, y, E)(v(y) - Ew(y))\,\psi(y)\,dy,$$

где $G_0(x, y, E) = G^+(x - y, E) - G^+(x - y^*, E)$, $y_1 = y_1^*, \ldots, y_n = -y_n^*$.

(Оператор $\hat{\Phi}^+(E)$, $E \in \mathbf{R}_+$ может быть определен по формуле (1.3) с помощью решений, удовлетворяющих условию излучения.)

Продолжим функции u и v в $\mathbf{R}^n \setminus D$ следующим образом: $u(x) \equiv 1$, $v(x) \equiv 0$ и рассмотрим во всем $\mathbf{R}^n$ решения уравнения (1.1). Справедливо следующее предложение.

Предложение 7. *Пусть $k \in D$, тогда функция $\psi^+(x, k)|_{\partial D}$ удовлетворяет уравнению*

$$\psi^+(x, k)|_{\partial D} + \hat{G}^+(k)(\hat{\Phi}^+(k^2) - \hat{\Phi}_0^+(k^2))(\psi^+|_{\partial D}) = e^{ikx},$$

где $G^+(k)$ — интегральный оператор с ядром $G^+(x - y, k)$, $x, y \in \partial D$. При этом амплитуда рассеяния $f(k, l)$ при $k \in D$, $l \in \mathbf{R}^n \setminus D$ определяется по формуле

$$f(k, l) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \iint e^{-ilx}(\Phi^+ - \Phi_0^+)(x, y, k^2)\,\psi^+(y, k)\,\sigma(dx)\,\sigma(dy).$$

Если потенциалы v и u таковы, что $v(x) \equiv 0$, $u(x) \equiv 1$ при достаточно большом $|x|$, то функция $f(k, l)$, $k^2 = l^2 = E$ допускает аналитическое продолжение по переменным $\theta = k/|k|$ и $\theta' = l/|l|$. На основе этого продолжения амплитуду рассеяния можно найти при любых направлениях k и l.

Предложение 7 сводит обратную задачу рассеяния в полупространстве к обратной задаче по амплитуде рассеяния во всем пространстве.

§ 4. Доказательство основной теоремы и предложений 1 — 7

Доказательство теоремы. Уравнение (3.3) удается получить из уравнения (2.4) с помощью формулы Грина

$$\int\limits_{D} (g\triangle f - f\triangle g)\,dx = \int\limits_{\partial D} \left(g \frac{\partial}{\partial \nu} f - f \frac{\partial}{\partial \nu} g\right)\sigma(dx). \tag{4.1}$$

С использованием формулы (4.1) получаем справедливость следующей цепочки равенств:

$$\int\limits_{D} G(x - y, k)(v(y) - k^2 w(y))\,\psi(y)\,dy = \int\limits_{D} G(x - y, k)(\triangle + k^2)\,\psi(y, k)\,dy =$$

$$= \int\limits_{D} \psi(y, k)(\triangle + k^2)\,G(x - y, k)\,dy + \int\limits_{\partial D} \left(G(x - y, k)\frac{\partial}{\partial \nu}\psi - \right.$$

$$- \psi \frac{\partial}{\partial \nu} G(x-y, k)\Big) \sigma(dy) = \int_D \psi(y, k)\, \delta(x-y)\, dy +$$

$$+ \int_{\partial D} \Big(G(x-y, k) \frac{\partial}{\partial \nu} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial \nu} G(x-y, k)\Big) \sigma(dy), \quad (4.2)$$

где ψ — решение уравнения $-\Delta\psi + (v - k^2 w)\psi = k^2\psi$.

Применяя (4.2) к уравнению (2.4), при $x \in \mathbf{R}^n \setminus D$ имеем

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + \int_{\partial D} \Big(G(x-y, k) \frac{\partial}{\partial \nu} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial \nu} G(x-y, k)\Big) \sigma(dy) =$$

$$= e^{ikx} + \int_{\partial D} \Big(G(x-y, k)(\widehat{\Phi}(k^2)\psi|_{\partial D}) - \psi \frac{\partial}{\partial \nu} G(x-y, k)\Big) \sigma(dy) =$$

$$= e^{ikx} + \int_{\partial D} G(x-y, k)(\widehat{\Phi}(k^2) - \widehat{\Phi}_0(k^2))(\psi|_{\partial D})\, \sigma(dy) +$$

$$+ \int_{\partial D} \Big(G(x-y, k)(\widehat{\Phi}_0(k^2)\psi|_{\partial D}) - \psi \frac{\partial}{\partial \nu} G(x-y, k)\Big) \sigma(dy), \quad (4.3)$$

где

$$\widehat{\Phi}(k^2)\psi = \int_{\partial D} \Phi(y, z, k^2)\, \psi(z)\, \sigma(dz),$$

$$\int_{\partial D} \Big(G(x-y, k)(\widehat{\Phi}_0 \psi|_{\partial D}) - \psi \frac{\partial}{\partial \nu} G(x-y, k)\Big) \sigma(dy) = 0. \quad (4.4)$$

Равенство (4.4) вытекает из формулы (4.1) и из существования решения φ уравнения $-\Delta\varphi = k^2\varphi$, такого, что $\psi(x, k)|_{\partial D} = \varphi(x)|_{\partial D}$. Уравнение 3.3) вытекает теперь из (4.3) и (4.4). Выведем формулу (3.2) из формулы (2.6). Действительно,

$$\int_D e^{-ilx} \psi(x, k)\, v(x)\, dx = \int_D e^{-ilx} (\triangle + k^2)\psi\, dx = (k^2 - l^2) \int_D e^{-ilx}\psi(x, k)\, dx +$$

$$+ \int_{\partial D} \Big(e^{-ilx} \frac{\partial}{\partial \nu} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial \nu} e^{-ilx}\Big) \sigma(dx). \quad (4.5)$$

Функцию $h(k, l)$ достаточно знать при условии $k^2 = l^2 = 0$, $\operatorname{Im} k = \operatorname{Im} l$, $k, l \in \mathbf{C}^n$. Далее,

$$\int_{\partial D} \Big(e^{-ilx} \frac{\partial}{\partial \nu} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial \nu} e^{-ilx}\Big) \sigma(dx) = \int_{\partial D} e^{-ilx} (\widehat{\Phi} - \widehat{\Phi}_0)\, \psi\sigma(dx) +$$

$$+ \int_{\partial D} \Big(e^{-ilx} (\widehat{\Phi}_0 \psi) - \psi \frac{\partial}{\partial \nu} e^{-ilx}\Big) \sigma(dx), \quad (4.6)$$

где

$$\int_{\partial D} \Big(e^{-ilx} (\widehat{\Phi}_0 \psi) - \psi(x, k) \frac{\partial}{\partial \nu} e^{-ilx}\Big) \sigma(dx) = 0 \quad (4.7)$$

при $l^2 = k^2$.

Равенство (4.7) верно по тем же причинам, что и равенство (4.4). Равенство (3.2) вытекает теперь из формул (4.5), (4.6), (4.7). Теорема 1 доказана.

Для доказательства предложения 7 необходимо воспользоваться следующим дополнительным соображением. При $k \in D$ распространение колебаний, описываемое функцией $\psi^+(x, k)$, происходит от границы вовнутрь области D. Этим свойством обладают все решения уравнения (1.1) в области

D с условием излучения на бесконечности, т. е. решения со свойством

$$\varphi(x) = e^{i|k||x|}|x|^{\frac{1-n}{2}} g\left(\frac{x}{|x|}\right) + o\left(|x|^{\frac{1-n}{2}}\right).$$

Оператор $\hat{\Phi}^+(k^2)$ определяется с помощью именно таких решений. Функцию $\psi^+(x, k)$ при $k \in D$ можно (а при $k \notin D$ нельзя) представить в виде предела последовательности функций, каждая из которых обладает условием излучения. Поэтому при $k \in D$ справедлива формула $\frac{\partial}{\partial\nu}\psi^+|_{\partial D} = \hat{\Phi}^+(k^2)(\psi^+|_{\partial D})$, которую необходимо использовать при написании для полупространства равенства типа (4.3). Равенства типа (4.5) — (4.7) для полупространства удается написать только при $l \in \mathbf{R}^n \setminus D$, $k \in D$.

Доказательство предложения 1. Без ограничения общности E можно считать равным нулю. Тогда для функции $c(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi_0(x, y)$, $x, y \in \partial D$ в трехмерном случае справедливо равенство

$$c(x, y)|x - y|\Big|_{y=x;\, x,\, y\in\partial D} = \frac{1}{4\pi} v(x)\Big|_{x\in\partial D}, \tag{4.8}$$

а в двумерном случае равенство

$$c(x, y)(\ln|x - y|)^{-1}|_{y=x;\, x,\, y\in\partial D} = \mathrm{const}\cdot v(x)|_{x\in\partial D}. \tag{4.9}$$

При этом за исключением диагонали $x = y$ функция $c(x, y)$ ограничена. Отсюда и вытекает предложение 1. Идея доказательства равенств (4.8), (4.9) состоит в следующем. Рассмотрим в $\mathbf{R}^3$ полупространство $D = \{x\colon x_3 < 0\}$. Пусть оператор $\Phi(x, y)$ отвечает в D уравнению $-\Delta\psi + v\psi = 0$, где $v = \mathrm{const}$. Оператор $\Phi_0(x, y)$ отвечает уравнению $-\Delta\psi = 0$. Имеем

$$\Phi_0(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial\nu_x\partial\nu_y}\left(-\frac{1}{4\pi}\right)\left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y^*|}\right)\Big|_{x,\, y\in D} = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{|x-y|^3} - \frac{3x_3^2}{|x-y|^5}\right)\Big|_{x,\, y\in\partial D},$$

$$c(x, y) = (\Phi - \Phi_0)(x, y) = \left(-\frac{1}{4\pi}\right)\frac{\partial^2}{\partial\nu_x\partial\nu_y}\left(\frac{e^{i\sqrt{-v}|x-y|} - 1}{|x-y|} - \frac{e^{i\sqrt{-v}|x-y^*|} - 1}{|x-y^*|}\right)\Big|_{x,\, y\in\partial D} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{v}{|x-y|}\Big|_{x,\, y\in\partial D} + O(1).$$

Доказательство предложения 3 проводится по той же схеме, что вывод уравнения (2.9) в [23]. Именно: дифференцируя равенство (3.3) по $\bar{k}_j$, приходим к уравнению (2.8), где $x \in \partial D$. Далее, дифференцируя по $\bar{k}_j$ равенство (3.2) и учитывая уравнение (2.8), приходим к уравнению (2.9).

Доказательство предложения 2 проводится по следующей схеме. Пусть уравнение (2.4) имеет несколько решений. Тогда, повторяя доказательство теоремы 1 для каждого решения в отдельности, получим, что ограничение на ∂D каждого из этих решений удовлетворяет уравнению (3.3). И таким образом, уравнение (3.3) имеет не меньше решений, чем уравнение (2.4). Для доказательства обратного и, таким образом, для доказательства предложения 2 достаточно показать, что каждое решение уравнения (1.1), обращающееся на границе в решение уравнения (3.3), является решением уравнения (2.4). Это можно сделать на основе равенств (4.3), (4.2) и следующего факта. Если при $x \in \mathbf{R}^n \setminus D$ справедлива формула (4.3), то при $x \in D$

справедлива формула

$$e^{ikx} + \int\limits_{\partial D} \left(G(x-y, k) \frac{\partial}{\partial \nu} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial \nu} G(x-y, k) \right) \sigma(dy) = 0.$$

Предложение 5 вытекает из предложения 4 и следствия 2.

Схема доказательства предложения 4 такова. Найдем по амплитуде рассеяния оператор $\hat{\Phi}(E)$. По амплитуде рассеяния $f(k, l)$ при фиксированном векторе k однозначно находится функция $\psi^+(x, k)$ при $x \in \mathbf{R}^n \setminus D$ (см. [4] и здесь формулу (3.8)). Таким образом, $\forall k \in \mathbf{R}^n$, $k^2 = E$ известны следующие две функции: $\psi^+(x, k)|_{\partial D}$ и $\frac{\partial}{\partial \nu} \psi^+(x, k)|_{\partial D}$. Достаточно доказать, что оператор $\hat{\Phi}(E)$ однозначно определяется своим действием на функциях $\psi^+(x, k)|_{\partial D} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \psi^+|_{\partial D} = \hat{\Phi}(E)(\psi^+|_{\partial D}) \right)$. Для этого достаточно доказать, что любое решение ψ уравнения (1.2) в D может быть аппроксимировано линейной комбинацией функций $\psi^+(x, k)$, $k^2 = E$. Последнее утверждение вытекает из уравнения (2.2), представимости любого решения ψ уравнения (1.2) в D в виде $\psi = \psi_0 + G^+ * (v - Ew)\psi$, где ψ_0 — решение уравнения (3.1), и утверждения, что ψ_0 аппроксимируется функциями e^{ikx}, $k^2 = E$, $k \in \mathbf{R}^n$.

По оператору $\hat{\Phi}(E)$ амплитуда рассеяния однозначно находится в силу теоремы 1.

Доказательство предложения 6 вытекает из формулы (3.6) решения обратной задачи в борновском приближении.

Примечание при корректуре. Недавно А. Г. Рамм [*; **], отталкиваясь от [23; 29], предпринял несколько попыток доказать предложение 5. Его статья [*] содержит принципиальную ошибку, состоящую в отождествлении решения ψ из формулы (3) в [*] и решения u из предложения 1 в [*]. Однако по крайней мере одна из его дальнейших попыток оказалась успешной (см. [**, § II, п. 3]).

*. *Ramm A. G.* Inverse Problems.—1987. V. 3. L. 77—82.

**. *Ramm A. G.* Recovery of the potential from fixed energy scattering data. Preprint. Kansas Univ., 1988.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
2. *Шадан К., Сабатье П.* Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980.
3. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма — Лиувилля. М.: Наука, 1984.
4. *Березанский Ю. М.* О теореме единственности в обратной задаче спектрального анализа для уравнения Шредингера // Труды ММО. 1958. Т. 7. С. 3—62.
5. *Moses H. E.* Calculation of the scattering potential from reflection coefficients // Phys. Rev. 1956. V. 102. P. 559—597.
6. *Фаддеев Л. Д.* Единственность решения обратной задачи рассеяния // Вестник ЛГУ.— 1956. № 7.— С. 126—130.
7. *Лаврентьев М. М.* Об обратной задаче для волнового уравнения // ДАН СССР.— 1964. Т. 157, вып. 3.— С. 520—521.
8. *Фаддеев Л. Д.* Растущие решения уравнения Шредингера // ДАН СССР.— 1965. Т. 165, вып. 3.— С. 514—517.
9. *Фаддеев Л. Д.* Обратная задача квантовой теории рассеяния. II // Совр. проблемы математики. Т. 3. М., ВИНИТИ, 1974. С. 93—180.
10. *Newton R. G.* The Gelfand — Levitan method in the inverse scattering problems // Scattering theory in mathematical physics. J. A. Lavita and J. P. Marchande editors. Dordrecht. Reidel Publ. Co., 1974. P. 193—235.
11. *Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П.* Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности // ДАН СССР.— 1976. Т. 229, вып. 1.— С. 15—18.
12. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
13. *Newton R. G.* The Marchenko and Gel'fand — Levitan methods in the inverse scattering problem in one and three dimensions // Conference on Inverse Scattering: Theory and Application/Ed. J. B. Bednaretal. Philadelphia: SIAM, 1983.— P. 1—74.

14. *Fokas A. S., Ablowitz M. J.* On the inverse scattering transform of multidimensional nonlinear equations related to first-order systems in the plane // J. Math. Phys.— 1984. V. 25.— P. 2494—2505.
15. *Веселов А. П., Новиков С. П.* Конечнозонные двумерные операторы Шредингера. Выделение потенциальных операторов. Вещественная теория // ДАН СССР.— 1984. Т. 279, вып. 4.— С. 784—788.
16. *Nachman A. I., Ablowitz M. J.* A multidimensional inverse scattering method // Studies in applied mathematics.— 1984. V. 71.— P. 243—250.
17. *Beals R., Coifman R. R.* Multidimensional scattering and nonlinear partial differential equations // Proc. of Symposia in Pure Mathematics.— 1985. V. 43. — P. 45—70.
18. *Гриневич П. Г., Новиков Р. Г.* Аналоги многосолитонных потенциалов для двумерного оператора Шредингера и нелокальная задача Римана // ДАН СССР.— 1986. Т. 286, вып. 1.— С. 19—22.
19. *Новиков Р. Г.* Построение двумерного оператора Шредингера с данной амплитудой рассеяния при фиксированной энергии // ТМФ.— 1986. Т. 66, вып. 2.— С. 234—240.
20. *Гриневич П. Г., Манаков С. В.* Обратная задача теории рассеяния для двумерного оператора Шредингера, $\bar\partial$-метод и нелинейные уравнения // Функцион. анализ и его прил.— 1986. Т. 20, вып. 2.— С. 14—24.
21. *Новиков Р. Г.* Восстановление двумерного оператора Шредингера по амплитуде рассеяния при фиксированной энергии // Функцион. анализ и его прил.— 1986. Т. 20, вып. 3.— С. 90—91.
22. *Fokas A. S.* An inverse problem for multidimensional first-order systems // J. Math. Phys.— 1986. V. 27.— P. 1737—1746.
23. *Новиков Р. Г., Хенкин Г. М.* $\bar\partial$-уравнение в многомерной обратной задаче рассеяния. Предпринт № 27М. Красноярск, Институт физики, 1986.— С. 1—36; УМН.— 1987. Т. 42, вып. 3.— С. 93—152.
24. *Henkin G. M., Novikov R. G.* A multidimensional inverse problem in quantum and acoustic scattering // Inverse Problems.— 1988. V. 4.— P. 103—121.
25. *Гриневич П. Г., Новиков С. П.* Двумерная «обратная задача рассеяния» для отрицательных энергий и обобщенно аналитические функции. I. Энергии ниже основного состояния // Функцион. анализ и его прил.— 1987. Т. 22, вып. 1.— С. 23—33.
26. *Гельфанд И. М.* Некоторые вопросы функционального анализа и алгебры // Международный математический конгресс в Амстердаме, 1954 г. М.: Наука, 1961. С. 49—74.
27. *Белишев М. И.* Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения // ДАН СССР.— 1987. Т. 297, вып. 3.— С. 523—526.
28. *Sylvester J., Uhlmann G.* A uniqueness theorem for an inverse boundary value problem in electrical prospection // Comm. Pure Appl. Math.— 1986. V. 32.— P. 91—112.
29. *Sylvester J., Uhlmann G.* A global uniqueness theorem. // Ann. of Math.— 1987. V. 125. — P. 153—169.
30. *Calderon A. P.* On an inverse boundary value problem. Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, Soc. Brasileira de Matematica, Rio de Janerio, 1980.
31. *Kohn R., Vogelius M.* Determining conductivity by boundary measurements. II. Interior Results // Comm. Pure Appl. Math.— 1985. V. 38.— P. 643—667.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
10 июня 1987 г.