

А. В. Казейкина¹

ПРИМЕРЫ ОТСУТСТВИЯ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА– –БЮРГЕРСА *

В настоящей работе строится пример выпуклой функции $f(u)$, для которой обобщенное уравнение Кортевега–де Фриза–Бюргерса $u_t + (f(u))_x + au_{xxx} - bu_{xx} = 0$ не имеет решения вида бегущей волны с заданными пределами на бесконечности. Пример демонстрирует трудности при анализе асимптотики решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса, которые отсутствуют для уравнения типа закона сохранения, уравнения типа Бюргерса и его дифференциально–разностного аналога.

Ключевые слова: уравнение Кортевега–де Фриза–Бюргерса, бегущая волна.

1. Введение. Задача изучения асимптотического поведения решения задачи Коши для квазилинейных уравнений в частных производных получила довольно широкое развитие в последнее время. Это связано, в частности, с использованием метода автомодельной редукции для решения дифференциально–разностных уравнений. Метод автомодельной редукции заключается в том, что разность значений функции раскладывается по формуле Тейлора до некоторого порядка, и вместо дифференциально–разностного уравнения изучается соответствующее уравнение в частных производных. Рассмотрим, например, дифференциально–разностное уравнение, описывающее создание и заимствование новых технологий в модели Полтеровича–Хенкина ([1]). Если при применении метода автомодельной редукции к этому уравнению в формуле Тейлора брать члены только первого порядка, то получается уравнение типа закона сохранения, при использовании членов второго порядка — обобщенное уравнение Бюргерса, при рассмотрении членов до третьего порядка включительно задача сводится к изучению обобщенного уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса (далее КдФБ). Таким образом, для обоснования метода автомодельной редукции или установления границ его применимости необходимо изучить, насколько схожа асимптотика решений задачи Коши для перечисленных выше уравнений.

Поведение решения задачи Коши для уравнения типа закона сохранения

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

¹Факультет ВМК МГУ, студ., E-mail: kazanna@bk.ru

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 08–07–00158. Работа проведена в рамках реализации ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009 – 2013 годы (1.2.1, НК-15П(3)).

и уравнения Бюргерса

$$u_t + (f(u))_x - bu_{xx} = 0 \quad (1)$$

с начальными данными

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u = u_{\pm}$$

изучалось в [2]. Если $u_+ > u_-$ и $f(u)$ выпуклая, то асимптотика имеет вид волны разрежения. Если $u_+ < u_-$, то асимптотика представляет из себя ударную волну в случае закона сохранения и бегущую волну в случае уравнения Бюргерса, причем критерием существования такого решения является то, что $f(u)$ удовлетворяет энтропийным условиям на (u_+, u_-) . Значения соответствующей волны всегда лежат в интервале (u_+, u_-) и, следовательно, ее поведение целиком определяется поведением функции $f(u)$ на (u_+, u_-)

Решение задачи Коши для закона сохранения в случае произвольной $f(u)$ исследовано в [3]. Асимптотика имеет вид системы чередующихся ударных волн и волн разрежения: если $u_+ < u_-$, то тем участкам, на которых выпуклое замыкание $f(u)$ совпадает с самой функцией $f(u)$, соответствуют волны разрежения, остальным участкам — ударные волны.

Для дифференциально-разностного аналога уравнения Бюргерса асимптотика также представляет из себя систему волн: тем участкам, на которых выпуклое замыкание $f(u)$ совпадает с самой функцией $f(u)$, соответствуют волны разрежения, остальным участкам — бегущие волны (см. [4]–[6]). Кроме того, сдвиги фаз волн в этом случае могут зависеть от времени. Данный результат для уравнения Бюргерса доказан в [7].

Для уравнения КдФБ

$$u_t + (f(u))_x + au_{xxx} - bu_{xx} = 0 \quad (2)$$

в случае, когда $f(u)$ выпукла и $u_+ > u_-$, волна разрежения будет глобально устойчивой, как для закона сохранения и уравнения Бюргерса (см. [8]). Случай $u_+ < u_-$ исследован для функции $f(u) = u^2$. Если выполнено условие на параметры задачи

$$\frac{b}{\sqrt{|a|}} \geq 2\sqrt{u_- - u_+}, \quad (3)$$

то бегущая волна для уравнения КдФБ существует, монотонна и локально устойчива ([9]). Если (3) нарушается, то бегущая волна для уравнения КдФБ существует, но не является монотонной, и ее значения могут превосходить u_- ([10]). В [11] доказана локальная устойчивость немонотонной бегущей волны при небольших отклонениях $b/\sqrt{|a|}$ от $2\sqrt{u_- - u_+}$.

Если $f(u)$ — произвольная выпуклая функция, то условия

$$\begin{cases} \frac{b}{\sqrt{a}} \geq 2\sqrt{f'(u_-) - \lambda}, & a > 0, \\ \frac{b}{\sqrt{-a}} \geq 2\sqrt{\lambda - f'(u_+)}, & a < 0. \end{cases} \quad (4)$$

обеспечивают существование и монотонность бегущей волны (см. [12]). В данной работе продемонстрировано, что если условие (4) не выполнено, то выпуклости функции $f(u)$ на (u_+, u_-) недостаточно для существования бегущей волны. Также показано, что если условия (4) выполняются, то нельзя ослабить требование выпуклости $f(u)$, заменив его на энтропийные условия. Таким образом, необходимы дополнительные требования на поведение функции $f(u)$ при $u > u_-$, чтобы обеспечить существования бегущей волны. Это свидетельствует о том, что асимптотику решения задачи Коши для уравнения КдФБ не удастся построить таким способом, каким она строится для закона сохранения, уравнения Бюргера и его дифференциально-разностного аналога.

2. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение КдФБ (2). В данной работе бегущей волной для уравнения КдФБ будем называть $u(x, t) = \varphi(x - \lambda t)$:

1. $\varphi(x - \lambda t)$ — решение уравнения КдФБ;
2. $\lim_{s \rightarrow -\infty} \varphi(s) = u_-$, $\exists \lim_{s \rightarrow +\infty} \varphi(s) = u_+$;
3. $\exists \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \varphi'(s) = 0$, $\exists \lim_{s \rightarrow \pm\infty} \varphi''(s) = 0$.

Будем предполагать, что выполнены условия:

- (a) $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ (положим для определенности $a > 0$);
- (b) $u_+ < u_-$;
- (c) $f(u) \in C^1(\mathbb{R})$, $f(u)$ выпукла на (u_+, u_-) .

3. Сведение задачи к изучению траектории динамической системы. Введем обозначения $\Phi(\varphi) = f(\varphi) - \lambda\varphi + d$, $d = \lambda u_- - f(u_-)$.

Утверждение 1. Если бегущая волна $u = \varphi(x - \lambda t)$ для уравнения КдФБ (2), удовлетворяющая условиям 1–3, существует, то ее скорость определяется однозначно из условия

$$\lambda = \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+}.$$

Бегущая волна для уравнения КдФБ существует тогда и только тогда, когда для динамической системы

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{a}\psi, \\ \frac{d\psi}{ds} = \frac{b}{a}\psi - \Phi(\varphi). \end{cases} \quad (5)$$

сепаратриса S , входящая в седло $(u_+, 0)$ при $s \rightarrow +\infty$ из области $\{\varphi > u_+, \psi < 0\}$, при $s \rightarrow -\infty$ входит в точку $(u_-, 0)$.

Доказательство. Бегущая волна для уравнения КдФБ удовлетворяет уравнению

$$-\lambda \frac{d\varphi}{ds} + \frac{df(\varphi)}{ds} + a \frac{d^3\varphi}{ds^3} - b \frac{d^2\varphi}{ds^2} = 0.$$

Проинтегрируем это уравнение от $-\infty$ до s , учитывая условия 2, 3. Получим

$$a \frac{d^2\varphi}{ds^2} - b \frac{d\varphi}{ds} + \Phi(\varphi) = 0, \quad (6)$$

где $\Phi(\varphi) = f(\varphi) - \lambda\varphi + d$, $d = \lambda u_- - f(u_-)$. Устремляя $s \rightarrow +\infty$, получим, что λ определяется однозначно, как угол наклона прямой, проходящей через точки $(u_+, f(u_+))$, $(u_-, f(u_-))$:

$$\lambda = \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+}.$$

Если обозначить $\psi = a d\varphi/ds$, то уравнение (6) эквивалентно динамической системе:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{a}\psi, \\ \frac{d\psi}{ds} = \frac{b}{a}\psi - \Phi(\varphi). \end{cases}$$

Существование бегущей волны эквивалентно существованию траектории данной динамической системы, выходящей из точки $(u_-, 0)$ и входящей в точку $(u_+, 0)$ при возрастании параметра s .

Изучим особые точки системы. На отрезке $[u_+, u_-]$ система имеет ровно две особые точки: $(u_+, 0)$ и $(u_-, 0)$.

Матрица системы, линеаризованной в точке $(u_+, 0)$, имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2}^+ = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a\Phi'(u_+)}}{2a}$$

и собственные векторы

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}_{1,2}^+ = \begin{pmatrix} 1/a \\ \lambda_{1,2}^+ \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Phi'(u_+) = f'(u_+) - \lambda < 0$ (следствие выпуклости $f(u)$), то точка $(u_+, 0)$ является седлом.

Матрица системы, линеаризованной в точке $(u_-, 0)$, имеет собственные значения

$$\lambda_{1,2}^- = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a\Phi'(u_-)}}{2a}$$

и собственные векторы

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}_{1,2}^- = \begin{pmatrix} 1/a \\ \lambda_{1,2}^- \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Phi'(u_-) = f'(u_-) - \lambda > 0$ (следствие выпуклости $f(u)$), то точка $(u_-, 0)$ является либо неустойчивым фокусом, либо неустойчивым узлом.

В точку $(u_+, 0)$ при $s \rightarrow +\infty$ входит ровно две полутраектории системы: сепаратриса T , входящая в $(u_+, 0)$ из области $\{\varphi < u_+, \psi > 0\}$ и сепаратриса S , входящая в $(u_+, 0)$ из области $\{\varphi > u_+, \psi < 0\}$.

Покажем, что траектория T не может входить в точку $(u_-, 0)$ при $s \rightarrow -\infty$. Это происходит потому, что траектория T никогда не пересекает прямую $\varphi = u_+$. Действительно, умножим (6) на $\varphi'(s)$ и проинтегрируем от s до $+\infty$:

$$-\int_{u_+}^{\varphi(s)} \Phi(\varphi) d\varphi = \frac{a}{2}(\varphi'(s))^2 + b \int_s^{+\infty} (\varphi'(\xi))^2 d\xi. \quad (7)$$

Предположим теперь, что траектория T пересекает прямую $\varphi = u_+$ при значении параметра $s = s^*$: $\varphi(s^*) = u_+$. Тогда имеем

$$0 = \frac{a}{2}(\varphi'(s^*))^2 + b \int_{s^*}^{+\infty} (\varphi'(\xi))^2 d\xi.$$

Противоречие.

Итак, бегущая волна в определенном выше смысле существует тогда и только тогда, когда сепаратриса S входит в точку $(u_-, 0)$ при $s \rightarrow -\infty$. \square

4. Вспомогательные утверждения. Будем рассматривать векторное поле системы (5). Запишем уравнение изоклины.

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{b\psi - a\Phi(\varphi)}{\psi}.$$

Пусть α — угол наклона, соответствующий данной изоклине: $d\psi/d\varphi = \alpha$. Имеем уравнение изоклины:

$$\psi_\alpha(\varphi) = \frac{a\Phi(\varphi)}{b - \alpha}. \quad (8)$$

Обозначим α_+ угол наклона, который имеет траектория S , когда $s \rightarrow +\infty$, $\alpha_+ = (b - \sqrt{b^2 - 4a\Phi'(u_+)})/2$.

Заметим, что S не может пересекать отрезок $\{\varphi \in (u_+, u_-), \psi = 0\}$ в силу того, что на нем векторное поле системы имеет вид $(0, -\Phi(\varphi))$, $-\Phi(\varphi) > 0$. Значит, всюду в области $\varphi \in (u_+, u_-)$ угол наклона сепаратрисы S $d\psi/d\varphi < \infty$, и в этой области сепаратриса S может быть задана уравнением $\psi = \psi(\varphi)$.

Утверждение 2. Пусть $\psi = \psi(\varphi)$ — уравнение траектории S в области $\varphi \in (u_+, u_-)$. Тогда $\psi(\varphi) < \psi_{\alpha_+}(\varphi)$ всюду в этой области (см. рис. 1).

Доказательство. Заметим, что изоклины, соответствующие $\alpha < \alpha_+ < 0$, лежат выше изоклины ψ_{α_+} на (u_+, u_-) . Рассмотрим одну из таких изоклин $\psi_\alpha(\varphi)$ и касательный вектор к ней в некоторой точке φ_0 :

$$\bar{\tau} = \left(1, \frac{a\Phi'(\varphi_0)}{b - \alpha}\right).$$

Рассмотрим также векторное поле динамической системы (5) в точке $(\varphi_0, \psi_\alpha(\varphi_0))$:

$$\bar{v} = \left(\frac{\Phi(\varphi_0)}{b - \alpha}, \frac{b\Phi(\varphi_0)}{b - \alpha} - \Phi(\varphi_0)\right).$$

Покажем, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} > 0.$$

Это будет означать, что траектория S никогда не пересекает изоклину ψ_α , $\alpha \leq \alpha_+$.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & \frac{a\Phi'(\varphi_0)}{b - \alpha} \\ \frac{\Phi(\varphi_0)}{b - \alpha} & \frac{b\Phi(\varphi_0)}{b - \alpha} - \Phi(\varphi_0) \end{vmatrix} = \frac{b\Phi(\varphi_0)}{b - \alpha} - \Phi(\varphi_0) - \frac{a\Phi(\varphi_0)\Phi'(\varphi_0)}{(b - \alpha)^2} = \\ &= \frac{1}{(b - \alpha)^2} (b(b - \alpha)\Phi(\varphi_0) - (b - \alpha)^2\Phi(\varphi_0) - a\Phi(\varphi_0)\Phi'(\varphi_0)) = \\ &= \frac{\Phi(\varphi_0)}{(b - \alpha)^2} (-\alpha^2 + b\alpha - a\Phi'(\varphi_0)). \end{aligned}$$

Поскольку $\alpha_+^2 - b\alpha_+ + a\Phi'(u_+) = 0$ и $\alpha < \alpha_+ < 0$, то $\alpha^2 - b\alpha + a\Phi'(u_+) > 0$. Кроме того, $\varphi_0 > u_+$ и, в силу выпуклости, $\Phi'(\varphi_0) > \Phi'(u_+)$, значит,

$$\alpha^2 - b\alpha + a\Phi'(\varphi_0) > 0.$$

Окончательно, поскольку $\Phi(\varphi_0) < 0$, имеем $\Delta > 0$. \square

Утверждение 3. Пусть $(u_-, \psi(u_-))$ — точка, в которой S пересекает прямую $\varphi = u_-$. Тогда

$$\frac{a\Phi_{\min}}{b} = \psi_+ \leq \psi(u_-) \leq \psi_- = \frac{a}{b - \alpha_+}\Phi_{\min} + b(u_- - \varphi_{\text{int}}), \quad (9)$$

где $\Phi_{\min} = \min_{u \in (u_+, u_-)} \Phi(u)$, $u_{\min} = \text{Argmin}_{u \in (u_+, u_-)} \Phi(u)$, φ_{int} — единственное решение уравнения $\Phi(\varphi) = b\Phi_{\min}/(b - \alpha_+)$ на отрезке $[u_{\min}, u_-]$ (см. рис. 1).

Доказательство. Из уравнения изоклины имеем, что если $\psi(\varphi) < \psi_0(\varphi)$ в некоторой точке φ , то угол наклона траектории в этой точке $\alpha = d\psi/d\varphi > 0$, т.е. когда траектория S лежит ниже изоклины ψ_0 , она возрастает (см. рис. 1). Значит,

$$\psi(u_-) \geq \psi_+ = \frac{a\Phi_{\min}}{b}.$$

Согласно утверждению 2, $\psi(\varphi) < \psi_{\alpha_+}(\varphi)$ при $\varphi \in (u_+, u_-)$. Обозначим $U \subset (u_{\min}, u_-)$ область значений φ , при которых $\psi(\varphi) \geq \psi_0(\varphi)$. В этой области $d\psi/d\varphi \leq 0$, значит, $\psi(\varphi) < \psi_{\alpha_+}(u_{\min}) = a\Phi_{\min}/(b - \alpha_+)$. Таким образом, траектория пересекает изоклину ψ_0 в точке, абсцисса которой не превосходит значения φ_{int} , которое является единственным на отрезке $[u_{\min}, u_-]$ решением уравнения

$$\frac{a}{b}\Phi(\varphi_{\text{int}}) = \frac{a}{b - \alpha_+}\Phi_{\min}.$$

Если $\varphi \in (u_{\min}, u_-) \setminus U$, то $0 < d\psi/d\varphi < b$. Значит, имеем оценку

$$\psi(u_-) \leq \psi_- = \frac{a}{b - \alpha_+}\Phi_{\min} + b(u_- - \varphi_{\text{int}}).$$

□

Замечание. При $b \rightarrow 0$ $\psi_- \rightarrow 2a\Phi_{\min}/\sqrt{-4\Phi'(u_+)} < 0$, значит, существует достаточно малое b , т.ч. $\psi_- < 0$.

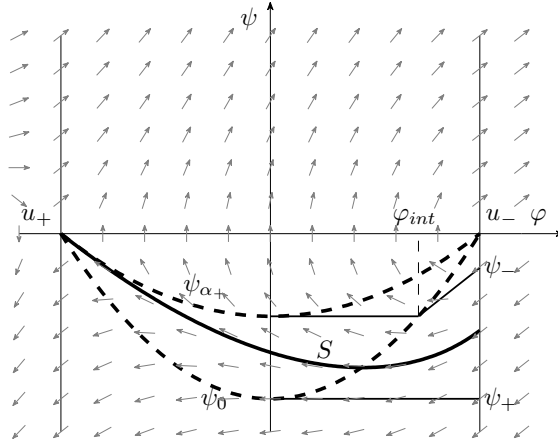


Рис. 1: Поведение траектории S системы (5) в области $\varphi \in (u_+, u_-)$

5. Достаточные условия отсутствия бегущей волны.

Утверждение 4. Пусть существует единственный корень u_* уравнения $\Phi(u) = 0$ на множестве (u_-, ∞) . Пусть b достаточно мало, т.е. таково, что в обозначениях предыдущего утверждения $\psi_- < 0$. Тогда если

$$u_* < u_- + \frac{\psi_-^2}{2(-b\psi_+ + a\Phi_{\max})}, \quad (10)$$

где $\Phi_{\max} = \max_{u \in (u_-, u_*)} \Phi(u)$, то бегущей волны не существует.

Доказательство. Рассмотрим область $U_- \subset (u_-, u_*)$ значений φ , при которых изучаемая траектория S остается в полуплоскости $\psi < 0$. В области U_-

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{b\psi - a\Phi(\varphi)}{\psi} > 0,$$

а значит, значение ψ возрастает при увеличении φ и выполнено неравенство $\psi_+ < \psi$.

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{b\psi - a\Phi(\varphi)}{\psi} = \frac{-b\psi + a\Phi(\varphi)}{-\psi} \leq \frac{-b\psi_+ + a\Phi_{\max}}{-\psi}.$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$-\psi^2(\varphi) + \psi^2(u_-) \leq 2(-b\psi_+ + a\Phi_{\max})(\varphi - u_-)$$

или

$$\psi^2(\varphi) \geq \psi^2(u_-) + 2(b\psi_+ - a\Phi_{\max})(\varphi - u_-).$$

Окончательно, имеем оценку, справедливую при $\varphi \in U_-$

$$\psi(\varphi) \leq \tilde{\psi}(\varphi) = -\sqrt{\psi_-^2 + 2(b\psi_+ - a\Phi_{\max})(\varphi - u_-)}.$$

Отсюда видно, что если $u_* < u_- + \psi_-^2/(2(-b\psi_+ + a\Phi_{\max}))$, то $\psi(u_*) < 0$.

Далее траектория S всегда остается в области $\{\varphi > u_*, \psi < 0\}$ при $s \rightarrow -\infty$. Действительно, S не может покинуть эту область через полупрямую $\{\varphi > u_*, \psi = 0\}$, т.к. на ней векторное поле имеет вид $(0, -\Phi(\varphi))$. Также она не может покинуть эту область через полупрямую $\{\varphi = u_*, \psi < 0\}$, т.к. на ней векторное поле имеет вид $(\psi/a, b\psi/a)$. Таким образом, траектория никогда не войдет в точку $(u_-, 0)$ при $s \rightarrow -\infty$. \square

Пример. Положим $a = 1$, $u_+ = -1$, $u_- = 1$, $f(u) = u^2 - 1$ на интервале $(-1, 1)$. Тогда

$$\varphi_{\text{int}} = \frac{\sqrt{b^2 + 8} - b}{\sqrt{8}}, \quad \psi_- = -\frac{2}{b + \sqrt{b^2 + 8}} + b \left(1 - \frac{\sqrt{b^2 + 8} - b}{\sqrt{8}} \right).$$

Выберем $b = 1$, тогда $\psi_- = (1 - \sqrt{2})/2 < 0$, $\psi_+ = -1$.

Далее пусть

$$f(u) = -\frac{2}{u_* - 1}(u - 1)(u - u_*)$$

на множестве $(1, +\infty)$. Тогда $f(u) \in C^1(u_+, +\infty)$; $\Phi_{\max} = (u_* - 1)/2$.

Выберем $u_* = 1 + 1/48$. Тогда условие (10) будет выполнено. Получим, что в построенном примере бегущей волны не существует.

Итак, уравнение

$$u_t + (f(u))_x + u_{xxx} - u_{xx} = 0,$$

где

$$f(u) = \begin{cases} u^2 - 1, & u \in (-1, 1), \\ -96(u - 1)(u - \frac{49}{48}), & u \in (1, +\infty). \end{cases} \quad (11)$$

не имеет решения вида $u(x, t) = \varphi(x - \lambda t)$, т.ч. $\varphi(s) \xrightarrow{s \rightarrow -\infty} 1$, $\varphi(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} -1$; $\varphi'(s) \xrightarrow{s \rightarrow \pm\infty} 0$, $\varphi''(s) \xrightarrow{s \rightarrow \pm\infty} 0$.

5. Случай, когда $f(u)$ удовлетворяет энтропийным условиям и отношение b^2/a достаточно велико. В предыдущих параграфах было продемонстрировано, что выпуклости функции $f(u)$ на интервале (u_+, u_-) недостаточно для существования бегущей волны. Если функция $f(u)$ имеет на множестве $(u_-, +\infty)$ корень u_* , достаточно близкий к u_- , то при достаточно малых значениях отношения b^2/a бегущей волны не существует. Однако можно указать оценку на отношение b^2/a , при выполнении которой выпуклости функции $f(u)$ на интервале (u_+, u_-) достаточно для существования бегущей волны (см. [12]).

Утверждение 5. Пусть $f(u) \in C^2(\mathbb{R})$ и $f(u)$ выпукла, т.е.

$$f''(u) \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad f''(u) \not\equiv 0 \quad \forall u \in (u_+, u_-). \quad (12)$$

Пусть, кроме того, выполнены условия

$$\begin{cases} \frac{b}{\sqrt{a}} \geq 2\sqrt{f'(u_-) - \lambda}, & a > 0, \\ \frac{b}{\sqrt{-a}} \geq 2\sqrt{\lambda - f'(u_+)}, & a < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Тогда бегущая волна существует, единственна и монотонна.

Известно ([2]), что бегущая волна для уравнения Бюргерса (1) существует тогда и только тогда, когда $f(u)$ удовлетворяет энтропийным условиям, т.е. график $f(u)$ на (u_+, u_-) лежит ниже прямой, проведенной через точки $(u_+, f(u_+))$, $(u_-, f(u_-))$:

$$f(u) < \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+}(u - u_-) + f(u_+), \quad u \in (u_+, u_-).$$

Естественно было бы попробовать ослабить требование выпуклости в утверждении 5, заменив его энтропийными условиями. Однако оказывается, что данное требование является существенным. Покажем, что можно построить пример, когда $f(u)$ удовлетворяет энтропийным условиям, выполнено условие (13), однако бегущей волны не существует. Для этого модифицируем пример, приведенный в предыдущем параграфе.

Положим $a = 1$, $b = 1$, $u_+ = -1$, $u_- = 1$, $f(u) = u^2 - 1$ на интервале $(u_+, u_- - \Delta)$, где $\Delta < u_- - \varphi_{int}$ (см. утв. 3). Предположим, что $f(u) \in C^2(\mathbb{R})$, $f(u_-) = 0$ и $f(u)$ удовлетворяет энтропийным условиям на (u_+, u_-) (т.е. $f(u) < 0$ при $u \in (u_+, u_-)$). Тогда утверждение 2 для сепаратрисы S соответствующей динамической системы (5) справедливо в области $\varphi \in (u_+, u_- - \Delta)$. Утверждение 3 также справедливо, т.к. его доказательство проводится без изменения. Значит, для траектории S справедливы оценки (9).

Далее выберем u_* : $\psi_- + b(u_* - u_-) = \psi^* < 0$. На множестве $(u_-, +\infty)$ положим $f_\varepsilon(u) = -\varepsilon(u - u_-)(u - u_*)$. $f_\varepsilon(u)$ непрерывно дифференцируема по ε на некотором отрезке $[0, \varepsilon_0]$, $f_\varepsilon(u) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

На отрезке $[u_- - \Delta, u_-]$ доопределим $f(u)$ так, чтобы $f(u) \in C^2(\mathbb{R})$ и $f(u) < 0$ при $u \in [u_- - \Delta, u_-]$.

Теперь устремим $\varepsilon \rightarrow 0$. Последовательность $\psi_\varepsilon(u_-)$ ограничена, а значит, из нее можно выделить сходящуюся: $\psi_\varepsilon(u_-) \rightarrow \hat{\psi} \in [\psi_+, \psi_-]$. По теореме о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров и начальных данных, существует такое ε_0 , что $|\psi_{\varepsilon_0}(u_*) - \tilde{\psi}(u_*)| < |\psi^*|/2$, где $\tilde{\psi}$ — решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{d\varphi} = b, \\ \psi(u_-) = \hat{\psi}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\psi_{\varepsilon_0}(u_*) < \tilde{\psi}(u_*) - \frac{\psi^*}{2} = \hat{\psi} + b(u_* - u_-) - \frac{\psi^*}{2} < \psi_- + b(u_* - u_-) - \frac{\psi^*}{2} = \frac{\psi^*}{2} < 0.$$

Окончательно, аналогично параграфу 5 исследуя векторное поле системы при $\varphi > u_*$, получаем, что траектория S остается в области $\{\varphi > u_*, \psi < 0\}$ при $s \rightarrow -\infty$, а значит, не попадает в точку $(u_-, 0)$.

Заметим, что при достаточно малых ε условие (13) будет выполнено.

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору А.А. Шананину за ценный вклад в проделанную работу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полтерович В. М., Хенкин Г. М. Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий // Экономика и мат. методы. 1988. **24**. № 6. С. 1071–1083.
2. Ильин А. М., Олейник О. А. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для некоторых квазилинейных уравнений при больших значениях времени // Мат. сборник. 1960. **51(93)**. № 2. С. 191–216.
3. Кружков С. Н., Петросян Н. С. Асимптотическое поведение решений задачи Коши для нелинейных уравнений первого порядка // УМН. 1987. **42**. № 5(257). С. 3–40.
4. Henkin G. M., Shananin A. A. Asymptotic behavior of solutions of the Cauchy problem for Burgers type equations // J. Math. Pures Appl. 2004. **83**. P. 1457–1500.
5. Henkin G. M., Shananin A. A., Tumanov A. E. Estimates for solution of Burgers type equations and some applications // J. Math. Pures Appl. 2005. **83**. P. 717–752.
6. Henkin G. M. Asymptotic structure for solutions of the Cauchy problem for Burgers type equations // JFPTA. 2007. **1**. N 2. P. 239–291.
7. Гасников А. В. Асимптотическое по времени поведение решения начальной задачи Коши для закона сохранения с нелинейной дивергентной вязкостью // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. **73**. № 6. С. 39–76.
8. Duan R., Zhao H. Global stability of strong rarefaction waves for the generalized KdV–Burgers equation // Nonlinear Anal. 2007. **66**. P. 1100–1117.
9. Наумкин П. И., Шишмарев И. А. Задача о распаде ступеньки для уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса // Функц. анализ и его прил. 1991. **25**. № 1. С. 21–32.
10. Bona J. L., Schonbek M. E. Travelling-wave solutions to the Korteweg–de Vries–Burgers equation // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1985. **101(A)**. P. 207–226.
11. Наумкин П. И., Шишмарев И. А. О распаде ступеньки для уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса // Функц. анализ и его прил. 1991. **26**. № 2. С. 88–93.
12. Казейкина А. В. Устойчивость решения задачи Коши вида бегущей волны для уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса // ЖВМиМФ. 2010. **50**. № 4. С. 725–745.

Поступила в редакцию