МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ (МИИТ)
Кафедра "Прикладная математика-1"

Волосов К.А., Вдовина Е.К.,
Волосова А.К.

НОВЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Учебное пособие

Москва–2010

УДК 917.95
В68

К. А. Волосов, Е. К. Вдовина , А. К. Волосова Новые точные решения уравнений с частными производными параболического типа. Учебное пособие. — М.: МИИТ, 2010. — 134 с.

В первой главе описано преобразование связывающее решения квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с решениями полулинейных уравнений. С помощью этого преобразования вычислены асимптотические представления решения квазилинейного ОДУ возникающего из важных в приложениях уравнений. Во второй главе проводится изложение нового метода нефиксированнной конструктивной замены переменных. Разобрано много примеров, связанных с именными уравнениями. Описана новая связь собственных чисел сопутствующей матрицы с характером поведения решения. Это имеет отношение к изучению устойчивости решений нелинейных уравнений. Предложена классификация решений по собственным числам сопутствующей матрицы. Пособие содержит необходимые сведения из различных курсов математики в виде повторения пройденного ранее материала.

Авторы выражают благодарность В. П. Маслову, В. В. Пухначеву, М. В. Карасеву, С. Ю. Доброхотову, В. Г. Данилову, Ю. П. Власову, Е. М. Воробьеву, А. С. Братусю, В. В. Жикову, А. П. Чупахину, В. Н. Денисову, С. О. Синицыну за полезные советы.

Рецензенты: **д.ф.-м.н., профессор, Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана Л. К. Мартинсон;**

д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой “Вычислительная математика” Московского государственного университета путей сообщения В. Н. Деснянский.

Содержание

Введение

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений активно выстраивалась в течение последних 300 лет и в середине XX века считалась фактически полностью завершенной. Однако в работах, рефераты которых приведены ниже, найдено нелинейное преобразование, позволяющее связывать решения полулинейных уравнений и нелинейных уравнений. А во второй главе описан новый эффективный метод построения точных решений уравнений с частными производными — метод нефиксированной конструктивной замены переменных. Поэтому возникает задача предложить читателю данное пособие, которое дополняет традиционные главы теории нелинейных дифференциальных уравнений.

По мнению известного математика Г. Х. Харди :"*Писать о математике- печальное занятие*-[1], с.71. Однако авторы предприняли попытку опровергнуть такую точку зрения.

Следуя традиции, которая идёт со времён Галилея, данное учебное пособие написано в форме диалога с студентом. Такая форма изложения удобна для проведения анализа характерных ошибок студентов, для разбора различных методов решения тех или иных задач, для обсуждения трудно понимаемых вопросов теории. Анализ ошибок всегда поучителен и всегда труден. Ведь правильный ответ только один, а ошибаться можно по разному. Разобрано много примеров. Важность разбора примеров и ошибок в процессе обучения отмечал еще великий поэт и мыслитель А. С. Пушкин: «*О, сколько нам открытий чудных Готовит просвещения дух, И опыт — сын ошибок трудных, И гений- парадоксов друг*».

Хотим предупредить, что данное пособие не содержит ответы на все вопросы теории нелинейных дифференциальных уравнений, скорее, это — своеобразный рассказ или, лучше сказать, свободная беседа о фрагменте этой теории. Такая беседа на математические темы пробуждает дремлющее сознание молодого поколения. На старшего автора, в свое время, сильное влияние оказала книга [26], авторы которой, по странному стечению обстоятельств, являлись сотрудниками Московского института электронного машиностроения. Через годы автор также связал свою жизнь с этим учебным заведением и завершал свое математическое образование на кафедре «Прикладная математика», которую возглавлял В. П. Маслов.

В пособии применен метод « *подстройки под партнера,* » описанный в книгах известного практикующего психолога М. Е. Литвака [39].

Во-первых, надо постараться избежать сложных, строгих определений, постараться объяснить сложные моменты просто и доходчиво.

Во-вторых, в пособии использован еще один прием подачи материала. А именно, специально проводится повторение некоторых важных положений с целью более прочного усвоения материала студентами. Многолетний опыт преподавания одного из авторов показывает, что это важно, так как студенты читают материалы, находясь в « цейтноте, » по « диагонали, » т.е. с любого места.

В-третьих, ссылки во введении на популярную научную литературу, возможно, заинтересуют читателя. Если на первом этапе ознакомления почитать такую литературу, то возможно у кого-то наступит и второй этап более глубокого изучения материала.

Молодое поколение должно знать, что в научных кругах довольно много людей, которые хотят иметь все степени и звания и занять соответствующие начальствующие позиции.[1] Много написано о политических репрессиях, но было и другое. Старший из авторов успел почувствовать все это на себе. После изложения в 1983 году теории, описанной в первой главе на семинаре в МГТУ им.Н.Э.Баумана, члены всесильной КПСС, «назначенные» работать начальниками в математической физике, предприняли усилия отработанным набором партийных приемов отнять данный результат. После прямого отказа отдать материалы последовали административные и партийные репрессии. Так что автор, хотя и не состоял в партии, на себе успел испытать проработку на партийном собрании КПСС, набор вздорных обвинений, выдуманных и « высосанных из пальца », огромную педагогическую нагрузку в 40 часов, игры в ошибочное расписание, обвинения в ухаживании за студентками, нарушения этики и т.д. Всего и не перечислишь. Интересно отметить, что всегда находятся люди с низкими моральными качествами, готовые помогать « начальству», конечно не бескорыстно. Не известно, чем бы это закончилось для автора в 1938 году, но к счастью тогда в числе, обозначающем год, две последние цифры были переставлены (шутливое замечание В. П. Маслова). Разрядили ситуацию усилия С. Ю. Доброхотова который обратился за помощью к родственнику « дяде Косте.»[2] Звоноки, переговоры в парткомах и усилия В.П.Маслова дали возможность автору, как старшему преподавателю кафедры Прикладной математики МИЭМ, включится в работу над книгами [8]—[10]. Такие передряги, видимо, не раз

[1]Интересно мнение академика РАН В. И. Арнольда о том откуда берутся такие люди. Оно приведено ниже во введении.

[2]К.У.Черненко генеральный секретарь ЦК КПСС с 1984 по 1985 год.

происходили и в глубокой древности, не зря же в Библии было сказано: «*Благословите гонителей ваших, ибо гонят они вас к лучшей жизни*». Для того, чтобы заниматься математикой, надо, чтобы не было излишних страстей, надо подняться над суетой и мещанской массой, которая ничему не учится у истории. Автор солидарен с позицией великого поэта А. С. Пушкина: «*Велению божию, о муза, будь послушна, Обиды не страшась, не требуя венца, Хвалу и клевету приемли равнодушно и не оспаривай глупца...*»

Заведующий кафедрой « Математического анализа » Московского института связи и информатики профессор, д.ф.-м.н. В. Г. Данилов в рецензии на учебное пособие [24] заметил следующее. « В СССР большое внимание уделялось математическому образованию молодого поколения. Выходило большими тиражами большое количество книг по численным методам, и они были доступны по цене и распространялись по всей территории страны. Однако начиная с 1991 года, наиболее способные, одаренные молодые люди стали уходить в экономические и юридические специальности. Уровень их математических знаний соответствует 7-9 классу общеобразовательного школьного курса. Понятна их полная беспомощность в анализе глобальных экономических процессов. В настоящее кризисное время они заполняют очереди на бирже труда. Ухудшение жизненного уровня населения, старение кадров преподавателей в школах и вузах, « утечка мозгов » специалистов за рубеж и т.д. привели к значительному ухудшению математического образования и общей культуры населения. Уезжали, по различным мотивам, в основном представители различных диаспор за « запахом гамбургеров »— люди не имеющие глубоких корней в России. В настоящее время большинство студентов не могут из-за отсутствия знаний читать и понимать литературу по методам вычислений. Статистика запросов этих книг в библиотеке МИИТ (и других университетов)— свидетельство этому. Разнообразная математическая литература передается на кафедры или уничтожается, как в средневековье. Книги Г.М. Фихтенгольца и других классиков, по которым училось наше поколение, просто потеряны для современного студента. В этом есть часть и нашей вины. Одной из причин является отсутствие настойчивого требования (а не мягкая рекомендация) преподавателя взять конкретную книгу и изучить в ней конкретную главу, разобрать определенную тему. В оправдание этого можно сказать, что и ранее читать такую литературу было трудно в силу ряда психологических причин. Трудность самого предмета и необходимость большого объема самостоятельной практической работы для овладения и истинного понимания численных методов приводила к « отторжению » предмета. В настоящее время ситуация близка к катастрофической. В силу отсутствия достаточного количества преподавательских кадров (дорабатывается старый советский ресурс) и в среде преподавателей слышны голоса о том, что « численные методы » не нужны и можно обойтись импортными программами (Mathcad, MatLab, ...) во всех случаях жизни. Однако это после окончания мирового кризиса приведет к глобальному отставанию страны, провалу в средневековье, как это видно на примере многих стран Азии и Африки, не обладающих своей базой электроники, техники и кадрами вычислителей-программистов. Хорошая, конкурентоспособная программа не может быть написана без эффективного алгоритма, без понимания математики. Начали появляться работы и программы, в которых новые авторы заново пытаются (доморощенным способом) обойти те проблемы, которые были грамотно решены 40 – – –60 лет назад.»

Вышесказанное позволяет сделать вывод о том тяжелом положении в котором оказываются руководители и ведущие специалисты предприятий. Кто и как будет проводить проектирование и разработку новых образцов изделий в аэрокосмической, автомобильной, машиностроительной промышленности, в электронике, приборостроении и строительстве? Поэтому важна работа корпораций, подобных MSC Software Corporation, которая разрабатывает компьютерные технологии. Они обеспечивают широкий спектр наукоемких инженерных расчетов, таких как расчет: прочности, динамики, кинематики, теплопередачи, акустики, долговечности, ресурса т.д., а также позволяют виртуально моделировать технологические процессы изготовления и сборки изделий. На данный момент времени эти пакеты программ далеко не полны. Но самое главное, идут попытки создания высокоточных компьютерных моделей Нового Уровня — Компьютерных Моделей Третьего Тысячелетия. Применение математических моделей значительно сокращает сроки проектирования и изготовления изделий, значительно повышает их качество, так как позволяет пользоваться программным продуктом пользователям невысокой математической квалификации. Все это в целом обеспечивает быстрый выход на рынок предприятий с новой продукцией и получение высокой отдачи от вложенных инвестиций [25]. Корпорация MSC Software Corporation проводит семинары повышения квалификации и обучение инженеров, как конкретно использовать ее программный продукт. То есть какие "иконки"на интерфейсе нажимать и в какой последовательности.

Модели, описанные в данном пособии, со временем войдут в справочники и учебники по дифференциальным уравнениям с частными производными, а также в вычислительные блоки в соответствующих областях приложений. В описанных в [25] моделях широко используется *параллельное численное программирование* на много процессорных суперкомпьютерах. Большая перспектива использования моделей открывается при использовании принципов *параллельного символьного* программирования.

Теперь сделаем замечание о роли квазилинейных и полулинейных параболических уравнений в теории моделирования процессов тепломассопереноса.

Во-первых, такие уравнения начали исследовать в 50-х годах XX века с целью использовать их решения при расчётах цепных ядерных реакций, а также реакций горения веществ. Работы по этой тематике рассекречены в 1998 году [16].

Во-вторых, о роли железных дорог и железнодорожного транспорта в Огромной и Великой стране России не раз говорилось со всех высоких трибун. Доля подвижного состава с неэлектрической тягой довольно большая, так как это обусловлено экономическими причинами. Таким образом, и в будущем будут существовать, а следовательно будут модифицироваться и совершенствоваться тепловозы и другие объекты, в которых большую роль играют процессы тепломассопереноса. Для их расчетов и модификации могут использоваться приведенные в пособии модели.

В-третьих, доля производства высокоэффективных, современных лекарств и других высокомолекулярных высоко технологичных веществ в современном мире все время возрастает. А следовательно, параллельно с этим возрастает интерес к использованию в исследованиях различных биологических моделей, начало которых было заложено в работе выдающихся российских ученых А. Н. Колмогорова, Г. И. Петровского, Н. С. Пискунова в 1937 году. К этой же области относятся более поздние работы Фитц Хью, Нагумо. Предложенные ими модели которых также затронуты в пособии.

В тексте учебного пособия использованы результаты работ следующих учёных: активных участников « Атомных проектов » в СССР академика Я. Б. Зельдовича, академиков, лауреатов Нобелевской премии Л. Д. Ландау, Н. Н. Семёнова , академиков РАН А. А. Самарского, В. П. Маслова, А М. Ильина, а также А. С. Компанееца, Г. И. Баренблатта, А. С. Калашникова, С. П. Курдюмова, Л. К. Мартинсона, И. С. Граника, В. В. Галактионова, В. А. Дородницына, С. П. Михайлова, Е. М. Воробьева, Н. В. Змитриенко, С. И. Похожаева, Г. Г. Малинецкого, В. Г. Данилова, А. С. Братуся, Р. О. Кершнера, Б. Х. Гилдинга, Л. М. Берковича, К. А. Волосова, Г. А. Рудных, Э. И. Семенова, Б. И. Сулейманова и других.

Ниже приведены краткие данные о жизни и деятельности классиков. Эти факты поучительны для молодого поколения во многих отношениях. Эти люди жили в сложное время, невольно стали участниками многих исторических и житейских событий и конфликтов, дружили и ссорились. Все эти события описаны в воспоминаниях и книгах о них [1], [36], [41]. Советуем студентам почитать их.

Зельдович Яков Борисович (1914-1987) — физик-теоретик, акад. АН СССР (1958; чл.-корреспондент АН СССР-1946), Герой социалистического Труда (1949, 1954, 1956). В 1931 после окончания средней школы начал работать в ИХФ АН СССР. С 1948 по 1965 начальник отдела, сектора, зам. научного руководителя КБ-11 (ВНИИЭФ). Осуществлял общее руководство теоретическими работами по атомным бомбам и водородной бомбе РДС-6Т, проводимым в КБ-11 и в организациях, работающих по заданиям КБ-11. Участвовал в работах по термоядерным бомбам РДС-6С и РДС-37. С 1965 по 1983 зав. отделом Ин-та прикладной математики АН СССР, с 1966 также профессор Московского университета. Основные работы посвящены химической физике, частиц, астрофизике, теории ядерного оружия. Лауреат Ленинской (1957) и Сталинских (1943, 1949, 1951, 1953) премий [16], с.236.

Ландау Лев Давыдович (1908-1968) — физик-теоретик, академик АН СССР (1946). Герой социалистического Труда (1954. Окончил Ленинградский университет (1927). В 1932-1937 начальник теоретического отдела Харьковского физико-технического ин-та и одновременно зав. кафедрой общей физики Харьковского университета
механико-машиностроительного ин-та, а с 1935 зав. кафедрой общей физики Харьковского университета, с 1937 заведовал теоретическим отделом Ин-та физических проблем АН СССР. Одновременно профессор Московского университета (1943-1947 и с 1955) и Московского физико-технического ин-та. Труды во многих областях физики: магнетизм, сверхтекучесть и сверхпроводимость; физика твёрдого тела, атомного ядра и элементарных частиц, плазмы; квантовая электродинамика, астрофизика и др. Разрабатывал теорию и проводил расчёты эффективно-

сти первых атомных бомб (РДС-1 - РДС-5) и водородной бомбы РДС-6 (РДС-6Т и РДС-6С). Лауреат Ленинской (1962), Сталинских (1946, 1949, 1953) и Нобелевской (1962) премий [16], с. 56.

Компанеец Александр Соломонович (1914-1974) — физик теоретик, доктор физ.-мат. наук (1945), профессор (1945). В 1934 окончил Харьковский механико-машиностроительный ин-т. В 1941-1944 работал в Физическом ин-те АН УзССР, в 1944-1945 — в Харьковском физико-техническом ин-те, с 1946 — в Ин-те химической физики АН СССР. Исследования по теории детонации, сильного взрыва в неоднородной атмосфере, ударных волн в пластических средах [16], с. 151.

Семёнов Николай Николаевич (1896-1986) — химик и физик, один из основоположников химической физики, основатель научной школы, академик АН СССР(1932), дважды Герой социалистического Труда(1966, 1976). В 1963-1971 вице-президент АН СССР. В 1920-1931 зав. лабораторией и зам. директора Ленинградского физико-технического ин-та. С 1931 директор Ин-та химической физики АН СССР. В 1920-1932 работал также в Ленинградском политехническом ин-те (с 1928 профессор), с 1944 профессор Московского университета. Создал общую количественную теорию цепных реакций (1934). Разработал теорию теплового взрыва газовых смесей. Участник разработки методов и аппаратуры измерений параметров атомного взрыва. Нобелевская премия по химии (1956), Ленинская (1976) и Сталинские (1941, 1949) премии [16], с.47.

В связи с большим периодом работы Я.Б.Зельдовича в атомном проекте несколько своих работ он написал под псевдонимом "Парадоксов". Много позже он объяснял

причину выбора псевдонима, ссылаясь на мнение великого русского поэта А.С.Пушкина, выраженное в выше приведенном четверостишии. См.с.46 в [1]. Вам будет интересно прочитать о истории его конкуренции к физиком А.Б.Мигдалом, которая описана в [41],(с.88).
Я.Б.Зельдович в одну из своих научных статей включил залихватский стишок с зашифрованным посланием. Прочитайте о продолжении этой истории.

Перейдем к изложению материала.

Рассмотрим задачу построения точных решений с граничными условиями, связанными с корнями алгебраического уравнения $F(Z) = 0$ для квазилинейного параболического уравнения с частными производными

$$Z'_t - (\rho(Z)(Z^k)'_x)'_x + F(Z) = 0. \tag{0.1}$$

Рассмотрим полулинейное параболическое уравнение с частными производными в другой системе координат для дважды непрерывно дифференцируемой функции $u(\delta, \zeta)$

$$u'_\delta - u''_{\zeta\zeta} + R(u) = 0. \tag{0.2}$$

Напомним, что решениями типа простых волн уравнения с частными производными являются функции аргументов $x + b\,t, b = \mathrm{const}$ и $\zeta + b\,\delta$. В ряде работ их называют однофазными решениями или решениями типа « волна перепада ».

Рассмотрим решения этих уравнений в виде простой волны

$Z(x,t) = \chi(\tau)|_{\tau=\alpha x+bt}$, и $u(\delta,\zeta) = \Theta(\xi)|_{\xi=\alpha\zeta+b\delta}$.

Тогда из уравнений в частных производных следуют обыкновенные дифференциальные уравнения, рассмотренные в следующем параграфе. Заметим, что параметр

α в зависимости от ситуации можно оставить или положить равным единице. Это эквивалентно перенормировке решения.

Материалы Главы 1 опубликованы в [8]—[11]. Кроме того, надо иметь в виду работы Л. К. Мартинсона [31]—[33] и Р. О. Кершнера [34], где получены важные результаты, приведен большой дополнительный материал и подробный список литературы по этой тематике. Естественное развитие науки привело к тому, что теорема 1.5.1 была уточнена и дополнена позднее в работах Р. О. Кершнера и Б. Х. Гилдинга. В данном пособии также приведены результаты, которые дополняют теорию дифференциальных уравнений.

Материалы Главы 2 опубликованы в [11]—[14]. Отметим, что полный объем вычислений, проведенный автором в рамках метода *нефиксированной конструктивной замены переменных*, довольно значительный с точки зрения человека, который полагает, что сто строчек выкладок это много. Объем набора данных (файла) условий разрешимости оценивается в 2 Мбайта. Анализ файлов такого объема, как показал автор, дает возможность получить качественно новые результаты. Эффективными средствами работы с ними в настоящем являются системы символьного программирования и в будущем — *символьного параллельного* программирования.

Обращаясь к историческим аналогиям, можно вспомнить случай с Алексисом Клодом Клеро, который проделал громоздкие по тем временам выкладки и получил новые результаты [36], с.229. Леонард Эйлер по этому поводу писал: « ***В этом вопросе у г. Клеро, пожалуй, не было сильнее противника, чем я. Хотя я и был в этом вопросе предшественником г. Клеро, у*** *меня не хватило терпения пуститься в столь пространные вычисления.* » Теперь сделаем замечание о

важных результатах приведенных в данном пособии.

Разными авторами было предпринято много попыток построить решение задачи Коши или асимптотику этого решения. В параграфе 2.5 построено точное решение задачи Коши в неявной форме с дважды непрерывно дифференцируемым начальным условием.

Поскольку уравнению в частных производных второго порядка и выше ставится в соответствие некоторая матрица, то для нее вычисляются собственные числа. На самом деле, это функции независимых переменных, но мы сохраним классические названия. Вопрос об устойчивости и эволюции решения нелинейного уравнения и системы является сложным. К.А. Волосовым был поставлен вопрос о связи вычисленных собственных чисел и трека матрицы с поведением и эволюцией решений и проведен математический эксперимент. Проанализировано большое количество решений с известными свойствами из работ, перечисленных во введении и в параграфе 2.8 авторов. В пособии рассмотрено несколько из этих примеров, в которых известно, что в них существуют « *предельные притягивающие*» решения, то есть функции к которым при больших временах эволюционирует, приближается решение.

Замечание В.1 Термин «*притягивающие* » множества широко применяется в теории динамических систем и позаимствован из неё. □

На этих известных решениях вычислены значения собственных чисел и трека матрицы и обнаружены удивительные закономерности. *Полученное совпадение результатов нельзя считать случайностью.*

В параграфе 2.8 сформулирована теорема — об эволюции решения уравнения с частными производными к «*предельному*
притягивающему» решению. Если найдутся люди, которые считают, что этот факт недостаточно строго доказан, то авторы могут ответить им следующее. Как сказал А. С. Братусь: "*Если бы люди ждали, когда математики строго докажут свои теоремы существования решения, то водопровода сегодня бы не было...*". Таким образом, авторы предлагают использовать обнаруженный факт сегодня. Конечно эта теорема будет со временем уточнена и дополнена. Здесь мы не затрагиваем важный класс решений, а именно периодические решения, по соображениям описанным в параграфе 2.8. Теорема сформулирована для нелокализованных решений.

Расчеты, выполненные авторами на известных локализованных решениях, взятых их работ Г. И. Баренблатта, Л. Д. Ландау, Я. Б. Зельдовича, А. С. Калашникова, А. А. Самарского, С. П. Курдюмова, Л. К. Мартинсона, И. С. Граника, В. В. Галактионова, В. А. Дородницына, С. П. Михайлова, Е. М. Воробьева, Н. В. Змитриенко, С. И. Похожаева, Г. Г. Малинецкого, Р. О. Кершнера, С. Н. Антонцева, В. П. Маслова, В. Г. Данилова, К. А. Волосова и других, показывают, что условия, сформулированные в теореме, верны внутри области локализации.

Предложенное утверждение является результатом математического эксперимента.

Обсуждая вопрос о происхождении математики на заседании Французского математического общества, академик РАН В.И.Арнольд сказал: «... *математика — это* *часть физики, являющаяся, как и физика, экспериментальной наукой: разница только в том, что в физике эксперименты стоят обычно миллионы долларов, а в математике — единицы рублей.»* [1], с.10. Мнение авторов, дополняющее это высказывание, приведено в параграфе 2.8.

Здесь можно добавить, что В.И.Арнольд интересно описывает проходившие в историческом прошлом споры на темы близкие к идеям затронутым в данном учебном пособии, между Я.Б.Зельдовичем и Л.С.Понтрягиным ([1], с.4), споры В.И.Арнольда с другими людьми и другие исторические коллизии.

Материал, изложенный во второй главе данного пособия, был доложен академику РАН В.И.Арнольду в 2008 году на международной конференции по дифференциальным уравнениям в г. Суздале. [3] Его резюме было сле-

[3] 1.) Выслушав старшего автора пять минут и ухватив смысл результата он встал и перехватил инициативу. Говорил о своем видении проблемы, советовал что еще интересно сделать, какие задачи рассмотреть... На попытку автора возразить по какому-то вопросу, он спросил:« Молодой человек, где вы были в 1958 году? » На что я ответил:«Мне было семь лет.» Его реплика была следующей: « Вы пешком под стол ходили, а я с Колмогоровым задачи решал..., так что молчите и слушайте...Я у вашего Маслова оппонентом был... После доклада его обступила молодежь и он рассказывал всякие забавные истории связанные с математикой...Их можно почитать в Интернете и в [1].»
2.)В Интернете есть много рассказов о В.И.Арнольде людей которые часто с ним общались. Большой и интересный рассказ написал В.П.Маслов. Старший из авторов пособия прочитал эти файлы. Но есть мысли, которые В. И. высказывал в Суздале при общении после докладов, и я не встречал их в других рассказах о нем. Эта тема чуть-чуть присутствует в [1](с.69) и связана с его борьбой с формализмом в математике...Поскольку, я оказался случайным слушателем этих рассуждений, постараюсь вкратце изложить его мысли. Он говорил:«Это моя борьба как у Дон Кихота с ветряными мельницами...».
« В СССР держащая власть элита «пристраивала» своих детей в МГИМО — Институт Международных отношений. Это стремление дать хорошее образование своим детям естественно для родителей в любом развитом обществе...Однако таких людей стало так много, что мест на всех не хватало. Тогда эти родители решили «пристраивать» своих детей в МГУ им. М.В. Ломоносова, в частности, в математику и физику. Большая масса этих людей не имела внутренней склонности к этим наукам. Им не снились математические сны, когда и приходят в голову самые интересные и важные мысли... Конечно, какие-то математические знания у них есть... Зато они стремятся стать и становятся начальниками в различных областях связанных с математикой. Так появляются «математические Держиморды»,«Изуиты от науки». Но это вечная проблема науки и общества...Все человеческие страсти отражаются в математике...Эта проблема Моцарта и Сальери... Мало что в математике называется именем первооткрывателя...За рубежом много работ российских авторов переписываются без всяких ссылок... »

дующим: « *Исследование одобряю. Я всегда так и думал, но не знал, что можно написать точные формулы».*

Отметим, что отзыв ведущей организации — « Института проблем механики РАН » к диссертации [11] был подписан заведующим кафедрой математики Московского физико-технического института (государственного университета), факультета нано-, био-, информационных и когнитивных технологий, заведующим лаборатории Институт прикладной механики РАН, профессором,
д.ф.– м.н. С. Ю. Доброхотовым и академиком
В. П. Масловым. Диссертация [11] выставлена на сайте "Мир дифференциальных уравнений"и сайте « Любителей прикладной математики» и всем доступна. Академик РАН В. П. Маслов представил работу в « Доклады РАН » [12]. Член корреспондент РАН В. В. Пухначев представил работу в « Сибирский журнал индустриальной математики » [13]. Метод получил оценку за рубежом. Профессор факультета математики и информатики университета Дебрецена Аттила Гилани представил работу в « Международный журнал Математики и Математических наук » [35].

М. В. Карасев дотошно проверял выкладки, вникая во все детали на этапе защиты диссертации [11]. Когда решение построено, его можно осмыслить с разных позиций. Он предложил в частном случае, когда функциональный произвол отсутствует, другой способ построения решения приведенного в параграфе 2.5. Этот фрагмент оформлен как пример М. В. Карасева. В последнем параграфе пособия приведены выдержки из отзыва заведующего кафедрой « Прикладной математики » Московско-

го государственного института электроники и математики, лауреата Государственной премии России, д.ф.-м.н., профессора М. В. Карасева.

1 ГЛАВА 1. Связь между квазилинейными и полулинейными ОДУ с помощью локализующего отображения

1.1 Исследование эталонных уравнений. Локализующее отображение

В этом параграфе изложен способ исследования уравнений, используемый при построении асимптотических локализованных решений в [8]—[11]. Этот способ основан на сведении некоторого эталонного уравнения к известным уравнениям простых волн для уравнений Колмогорова — Петровского — Пискунова–Фишера [3],[27] или Зельдовича [29].

Основные результаты о свойствах локализованных решений эталонных уравнений приведены в теореме 1.1.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) с постоянными коэффициентами

$$b\,\frac{d\chi}{d\tau} - \frac{d}{d\tau}\left(\rho(\chi)\frac{d\chi^k}{d\tau}\right) - F(\chi) = 0, \tag{1.1}$$

где $\rho(\chi) > 0,\ \rho(0) > 0,\ \rho(1) > 0,\ k > 1.$

Функция $\chi(\tau)$ решение уравнения (1.1).

Обозначим через $\Theta(\xi)$ гладкое монотонное решение уравнения

$$b\,\frac{d\Theta}{d\xi} - \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - R(\Theta) = 0, \tag{1.2}$$

где $\dfrac{dR}{d\Theta}(\Theta)$ — непрерывная функция при $\Theta \in [0,1]$.

Теорема 1.1

Уравнение* (1.2) *преобразованием

$$\rho(\chi)\frac{d\chi^k}{d\tau} = \frac{d\Theta}{d\xi}\,(\tau(\chi)) \tag{1.3}$$

сводится к уравнению (1.1), ***где*** $F(\chi) = \dfrac{R(\chi)\chi^{1-k}}{k\rho(\chi)}$.

$\square$

Замечание 1.1.1

В отличие от предыдущего примера в преобразовании (1.3) указан путь пересчета решения и в том случае, когда функция $\Theta(\xi)$ известна не полностью, например, только ее асимптотика. Это делает преобразование (1.3) важным в приложениях. Кроме того, это просто очень красивая формула, и если Вы это почувствовали «фибрами души» — значит в вас есть «искра математического таланта ». Что будет с ней в дальнейшем? Погаснет она или разгорится зависит от вас. $\square$

Обратная к функции $\Theta(\xi)$ функция $\xi(\Theta)$ существует в силу предположения о монотонности функции $\Theta(\xi)$. Кроме того, из монотонности функции $\Theta(\xi)$ и уравнения (1.3) вытекает монотонность функции $\chi(\tau)$.

Доказательство теоремы 1.1.

Из равенства (1.3) следует

$$\frac{d\chi}{d\tau} = \frac{1}{\rho(\chi)k\chi^{k-1}}\frac{d\Theta}{d\xi}\left(\tau(\chi)\right), \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{d\tau}\Big(\rho(\chi)\frac{d\chi^k}{d\tau}\Big) = \frac{d^2\Theta}{d\xi^2}\left[\frac{d\Theta}{d\xi}\big(\tau(\chi)\big)\right]^{-1}\frac{d\chi}{d\tau} = \\ = \frac{d^2\Theta}{d\xi^2}\left[\frac{d\Theta}{d\xi}\big(\tau(\chi)\big)\right]^{-1}\frac{1}{\rho(\chi)k\chi^{k-1}}\frac{d\Theta}{d\xi}\left(\tau(\chi)\right) = \\ = \frac{1}{\rho(\chi)k\chi^{k-1}}\frac{d^2\Theta}{d\xi^2}.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Студент: Объясните вычисления (1.5).
Авторы: Пожалуйста.

Выписываем левую часть выражения (1.3) и дифференцируем по переменной τ, учитывая, что при вычислении производной нужно вычислить производную сложной функции и обратной функции. Для вычисления выражения $\chi^{'}(\tau)$ снова используем соотношение (1.4).

□

Выражая из этих равенств производные функции $\chi(\tau)$ и подставляя их в (1.1), получим (1.2). Теорема 1.1 доказана.

□

Выражение в левой части равенства (1.3) имеет физический смысл потока переносимой величины. Отображение (1.3) называется локализующим и введено впервые в работе [8].

Замечании 1.1.2

Если функция $R(\chi)\chi^{1-k}$ при $\chi = 0$ не определена, то следует рассматривать вместо уравнения (1.1) уравнение (1.2)

$$\rho(\chi)\chi^{1-k}\left[b\,\frac{d\chi}{d\tau} - \frac{d}{d\tau}\left(\rho(\chi)\frac{d\chi^k}{d\tau}\right)\right] + \frac{1}{k}R(\chi) = 0. \tag{1.6}$$

□

Свойства монотонных решений уравнения (1.2) при функции $R(\Theta)$ не равной тождественно нулю, имеющей на отрезке [0,1] только два корня, исследованы в двух ситуациях:

$$\begin{gathered} R \in C^1([\,0,1]), \quad R(0) = 0, \quad R(1) = 0, \\ \frac{dR}{d\Theta}\bigg|_{\Theta=0}\frac{dR}{d\Theta}\bigg|_{\Theta=1} < 0, \end{gathered} \tag{1.7}$$

$$R \in C^1([\,0,1]), \quad R(0)=0, \quad R(1)=0, \quad \left.\frac{dR}{d\Theta}\right|_{\Theta=0}=0,$$
$$\left.\frac{dR}{d\Theta}\right|_{\Theta=1}<0, \quad R(\Theta)>0. \qquad (1.8)$$

Уравнения вида (1.2), в которых функция $R(\Theta)$ удовлетворяет условиям (1.7), будем называть уравнениями Колмогорова — Петровского — Пискунова — Фишера (КППФ)— по фамилиям авторов, изучавших подобные уравнения в классических работах [3], [27].

Замечание 1.1.3

В данной главе приведен материал из [8]—[10], который показывает, что свойства полулинейных параболических уравнений связаны с свойствами квазилинейных параболических уравнений. См. параграф 1.5. В 80 годах двадцатого века, это был новый факт. Когда это было выяснено, перед авторами указанных работ встал вопрос, как разделить, упорядочить и описать эти свойства. Для этого были введены названия уравнений. Хотя и до работ авторов названия некоторым уравнениям вводились хаотично, в других, более ранних работах. Ссылки на них приведены в цитируемых работах и в [2 с],[6],[11]. За свою жизнь каждый из классиков рассматривал большое количество различных проблем связанных с разными уравнениями.

При обсуждении материала, когда писали книги [8]—[10] было принято волевое решение именно это уравнение (1.16), а не какое-нибудь другое связать с именами выдающихся российских ученых А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского, И. С. Пискунова. Сюда же решено было добавить фамилию Р. А. Фишера [27]. Это сделано потому, что именно оно — уравнение (1.16) обладает базовыми, основными свойствами (1.7). Эти свойства как бы отделяют в области параметров различные уравнения с другими свойствами. Подробнее об этом написано в замечании 1.5.2. □

Хорошо известно, что в случае (1.7) уравнение (1.2) имеет гладкие монотонные решения $0 \leq \Theta(\xi) \leq 1$ только при условии $b \geq 2\sqrt{\left|\frac{dR}{d\Theta}\Big|_{\Theta=0}\right|}$, причём в случае $\frac{\partial R}{\partial\Theta}\Big|_{\Theta=0} > 0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} &\Theta(\xi) \sim 1 - \exp^{-l_0\xi}, \qquad \xi \to \infty \\ &\Theta(\xi) \sim 1 - \exp^{l\xi}, \qquad \xi \to -\infty \end{aligned} \tag{1.9}$$

Случай $\frac{\partial R}{\partial\Theta}\Big|_{\Theta=0} < 0$, очевидно, сводится к рассмотренному заменой $\Theta = 1 - \widetilde{\Theta}$.

Уравнения вида (1.2), у которых функция $R(\Theta)$ удовлетворяет условиям (1.8), называются уравнениями Зельдовича [29]. Эти уравнения имеют принципиальные отличия от уравнений (1.16).

Замечание 1.1.4

Сложность в названиях связана с тем, что классики А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского, И. С. Пискунова успели рассмотреть и уравнение (1.35) в [3]. Но называть все уравнения одним именем неудобно, при разговорах о них. Поэтому условно провели такую границу между ними. □

Во-первых, решение уравнения Зельдовича, удовлетворяющее условиям $\Theta(\xi) \to 1$ при $\xi \to \infty$, $\Theta(\xi) \to 0$ при $\xi \to -\infty$, существует и при $|\xi| \to \infty$ имеет асиптотики вида (1.9).

Во-вторых, изменение знака функции $R(\Theta)$ для уравнения Зельдовича приводит к уравнению со степенными асимптотиками, то есть с совершенно другими свойствами. Исследование уравнения в этом случае методами главы 2 параграфа 2.5 дает комплексозначные решения.

Замечание 1.1.5 Асимптотики решения — функции которая описывает предельный профиль «волны горения» могут быть и другие. Для малых значений искомой функции асимптотика носит степенной и логарифмический характер и построена в [50].

Во второй главе, в параграфе 2.5 построено точное решение, которое не является решением ОДУ, а удовлетворяет уравнению с частными производными. Разными авторами было предпринято много попыток построить решение задачи Коши или асимптотику этого решения. В параграфе 2.5 построено точное решение задачи Коши в неявной форме с дважды непрерывно дифференцируемым начальным условием. По точной формуле можно вычислить асимптотические формулы и они другие. Они отличаются от формул приведенных в работах Р. О. Кершенра, Б. Х. Гилдинга. □

Студент: Чтобы лучше понять материал, приведите, пожалуста, пример.

Авторы: Пожалуйста.

1)Рассмотрим функцию

$$R(\Theta) = \Theta(1-\Theta).$$

Вычислим её производные в точках 0 и 1:

$$\frac{dR}{d\Theta} = (1-2\Theta)\big|_{\Theta=0} = 1,$$

$$\frac{dR}{d\Theta} = (1-2\Theta)\big|_{\Theta=1} = -1.$$

Вычислим произведение этих производных:

$$-1 * 1 < 0.$$

Это условие совпадает с (1.7).

2)Классической функцией $R(\Theta)$ из [2] является функция

$$R(\Theta) = \Theta^2(1-\Theta),$$

где функция $R(\Theta) > 0$.
Вычислим её производные в точках 0 и 1:

$$\frac{dR}{d\Theta} = (2\Theta - 3\Theta^2)\Big|_{\Theta=0} = 0,$$
$$\frac{dR}{d\Theta} = (2\Theta - 3\Theta^2)\Big|_{\Theta=1} = -1.$$

Вычислим произведение этих производных. Получим нуль. Это совпадает с (1.8).

□

1.2 Пример применения локализующего отображения

Студент: **Здесь вы говорите о свойствах функции $\Theta(\xi)$. А где же пересчёт решений?**

Авторы: **Хорошо, давайте рассмотрим пример.**

После вычисления правой части (1.3) на конкретном решении оно превращается в ОДУ первого порядка. Исследовать уравнение первого порядка проще, чем (1.1). Сейчас мы приведём пример, в котором уравнение интегрируется в квадратурах.

Пример 1.2.1

В этом примере по решению $\Theta(\xi)$ (1.13) уравнения (1.2), строится решение $\chi(\tau)$ (1.11) уравнения (1.1). По решению (1.14) уравнения (1.2), строится решение (1.12) уравнения (1.1). При сравнении этих решений видно, что в одном из случаев область определения функции $\chi(\tau)$ уменьшается. То есть происходит локализация решения. В данном примере обратная функция $\xi(\Theta)$ к $\Theta(\xi)$ существует и

вычисляется. См.,например, (1.15). В уравнении (1.1), в котором в данном конкретном случае положено $\rho(\chi) = 1$,

$$F(\chi) = (1 - \chi^2)/2, \ k > 1. \tag{1.10}$$

Здесь ограничимся случаем $k = 2$, другие значения k рассмотрены в цитируемых выше работах.

Соответствующее уравнению (1.1) ОДУ (1.2) имеет (в частности) два решения:

$$\chi(\tau) = \begin{cases} H(-\tau)\sqrt{1 - \exp(\tau/2)}, & \tau < 0, \\ H(\tau)\sqrt{1 - \exp(-\tau/2)}, & \tau > 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

где $\tau = \alpha \ x, \ \alpha = \pm 1, \quad b = 0, \quad \tau \neq 0$, а $H(\tau)$ — функция Хевисайда.

$$\begin{aligned} &\chi(\tau) = 1 - \exp(\tau/2), \\ &\tau = \alpha \ x + b \ t, \ \alpha = 1/\sqrt{2}, \ b = -3/2. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Отметим, что в данном пособии изучаются только вещественные решения. В точке
$\tau = 0$ функция $\chi(\tau)$ доопределяется нулем: $\chi(0) = 0$. Заметим, что $\chi(\tau) = 0$— «особое решение» уравнения (1.1). Такая терминология используется в цитируемых работах.

Согласно приведённой теореме, эти два решения оказываются связанными с двумя решениями ОДУ

$$\Theta(\xi) = \frac{1 - \exp(\sqrt{2} \ \xi)}{1 + \exp(\sqrt{2} \ \xi)}, \ \xi = \alpha \ \zeta, \ b = 0, \ \alpha = \pm 1. \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} \Theta(\xi) = \frac{1}{1 + \exp(\xi)}, \ \xi = \alpha \ \zeta + b \ \delta, \\ \alpha = 1/\sqrt{2}, \ b = -3/2. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Покажем более подробно, как применяется преобразование (1.3), на примере решения (1.14). Производная и обратная функция имеют вид

$$\frac{d\Theta}{d\xi} = \frac{-\exp(\xi)}{(1+\exp(\xi))^2}, \qquad \xi(Theta) = ln(\frac{1-\Theta}{\Theta}) \tag{1.15}$$

соответственно.

Тогда (1.3) имеет вид $2\frac{d\chi}{d\tau} = \chi(\tau) - 1$.

Данное уравнение просто решается. Отсюда следует (1.12).

1.3 Исследование уравнений типа Колмогорова-Петровского - Пискунова - Фишера

Частный случай уравнения (1.2) имеет вид

$$b\,\frac{d\Theta}{d\xi} - \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - \Theta(1-\Theta) = 0. \tag{1.16}$$

Результаты классических работ сведены в [15], [29]. Уравнение (1.16) имеет бесконечное число решений типа бегущей волны, т. е. функций, удовлетворяющих условиям

$$0 \le \Theta \le 1, \quad \Theta(-\infty) = 0, \quad \Theta(+\infty) = 1, \quad \frac{d\Theta}{d\xi} \ne 0 \tag{1.17}$$

при конечных значениях τ.
При этом скорость движения самоподобного решения (бегущие волны, волны перепада) больше минимальной $b \geq b_{min} = 2$.

Для доказательства этого утверждения в [8]—[10] использовался анализ уравнения (1.16) методом фазовой плоскости. Уравнение (1.16) при этом переписывается в виде системы:

$$\frac{d\Theta}{d\xi} = f(\xi), \qquad \frac{df}{d\xi} = bf - \Theta(1-\Theta). \tag{1.18}$$

Тогда траектории в фазовой плоскости (Θ, f) будут решениями уравнения

$$\frac{df}{d\Theta} = \frac{bf - \Theta(1-\Theta)}{f}, \tag{1.19}$$

которое имеет две особые точки с координатами (0,0) и (1,0). (См. рис. 1).

Решению типа бегущей волны соответствует траектория, приходящие из точки (0,0) в точку (1,0), лежащая в полосе $0 \leq \Theta \leq 1$ (и такая, что производная $d\Theta/d\xi$ отлична от нуля вне концевых точек).

Вблизи точки $(0,0)$ уравнение (1.19) можно линеаризовать:

$$\frac{df}{d\Theta} \sim \frac{bf - \Theta}{f}\,. \tag{1.20}$$

Собственные значения матрицы линеаризованной системы равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - 1}.$$

Отсюда следует, что точка $(0,0)$ является «неустойчивым узлом», тогда и только тогда, если $b \geq b_{min} = 2$. В этом случае, согласно классификации особых точек, собственные числа — вещественные положительные.

Если $0 < b < b_{min}$, особая точка $(0,0)$ является «неустойчивым фокусом», а при $b = 0$ это — «центр». В этом случае, согласно классификации особых точек: особая точкой — «фокус» возникает если собственные числа комплексные сопряженные друг другу, с положительной вещественной частью...

Студент: Извините, у меня вопрос. Напомните мне, что такое «особые точки» ОДУ.

Авторы: Пожалуйста.

В теории ОДУ существует классификация особых точек линейной системы, последнею можно записать в виде $\dfrac{df}{d\Theta}=\dfrac{P(f,\Theta)}{Q(f,\Theta)}$.

Можно напомнить определение: Особой точкой называется такая точка на фазовой плоскости (f,Θ), в которой числитель и знаменатель дроби обращаются в ноль одновременно
$P=0,\ \ \Theta=0$. Классификация проводится по собственным числам матрицы A, полученной из линейного приближения. Выпишем линейное приближение системы в окрестности особой точки.

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\xi}\begin{pmatrix} f\\ \Theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f\\ \Theta\end{pmatrix}$$

Напомним, что собственные числа матрицы A— это корни характеристического уравнения $det(A-\lambda E)=0$.

1.***Если собственные числа матрицы** A **вещественные и одного знака**, **особая точка называется « узел »**.*

(Частные случаи вырождения мы опускаем. Они рассмотрены в [5]). ***Если собственные числа положительные, то решение соответствующего ОДУ неустойчиво относительно возмущения начальных данных*** [5], [24], ***и говорят, что особая точка — неустойчивая. В противоположном случае собственные числа отрицательные, и особая точка — устойчивая.***

2. ***Если собственные числа матрицы** A **вещественные разных знаков,то особая точка называется « седлом ».***

3. ***Если собственные числа матрицы** A **чисто мнимые, то особая точка называется «центром ».***

4. ***Если собственные числа матрицы** A **комплекс-***

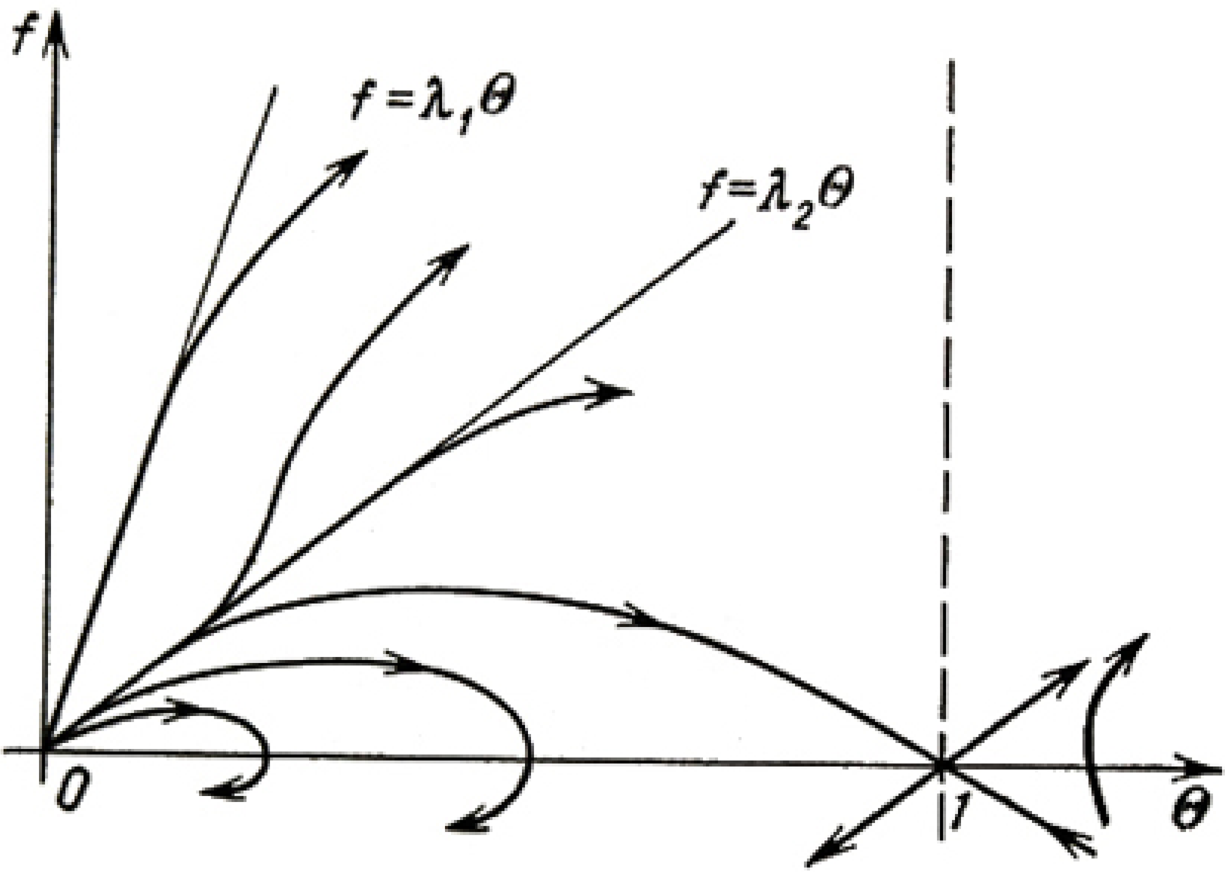

Рис. 1: **Траектории (Θ, f) системы (1.24)(уравнения КППФ)на фазовой плоскости.**

ные, то особая точка называется « фокусом ».

□

Авторы: Продолжим построение интегральных кривых на фазовой плоскости.

В этих случаях решений Θ, удовлетворяющих (1.17), не может быть, так как вблизи точки(0,0) на любой траектории найдутся точки, на которых $\Theta < 0$.

Вблизи точки (1,0) линеаризованная форма уравнения (1.19) имеет вид

$$\frac{df}{d\Theta} \sim \frac{bf + (\Theta - 1)}{f}, \tag{1.21}$$

что соответствует « седловой » точке для всех $b \geq 0$. Таким образом, справедлива теорема [3], [15], [24].

Теорема 1.2

Для любого $b \geq 2$ существует решение уравнения *(1.16)*, удовлетворяющее условиям *(1.17)*.

Результаты этой теоремы обобщаются на уравнения вида (1.2), в которых функция $\Theta(1-\Theta)$ заменяется функцией $R(\Theta)$, гладкой при $0 \leq \Theta \leq 1$ и удовлетворяющей условиям [3], [15], [29].

$$R(\Theta) > 0 \text{ при } 0 < \Theta < 1$$

$$R(0) = R(1) = 0, \quad R'(0) > 0, \quad R'(1) < 0. \tag{1.22}$$

Известно, что в этом случае решение типа бегущей волны (т.е. удовлетворяющее (1.17)) существуют при условии

$$b \geq b_{min} = 2\sqrt{\left|\frac{dR}{d\Theta}\Big|_{\Theta=0}\right|} \tag{1.23}$$

Обратимся теперь к уравнению (1.1) и предположим, что функция стоков—источников F в этом уравнении имеет вид $F = \chi^{1-k}R(\chi)/k$, где функция R удовлетворяет условиям (1.22). Тогда решение уравнения (1.1) может быть выражено через решение уравнения простых волн для уравнения КППФ с помощью метода, указанного в теореме 1.1. Поясним это графически. Пусть $\Theta(\xi)$ — решение уравнения простых волн

$$-b\,\frac{d\Theta}{d\xi} + \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + R(\Theta) = 0, \tag{1.24}$$

Кривая 1 на рис.3 есть упрощенный график функции $\Theta(\xi)$ — решения уравнения (1.24) на фазовой плоскости. Функции $\dfrac{d\Theta}{d\xi}$ соответствует график 2 на рис. 3.

График функции $f(\Theta) = \dfrac{d\Theta}{d\xi}\left(\Theta^{-1}(\Theta)\right)$ приведён на рис. 2. Здесь $\Theta^{-1}(\Theta)$– обратная функция к функции $\Theta = \Theta(\xi)$. Из

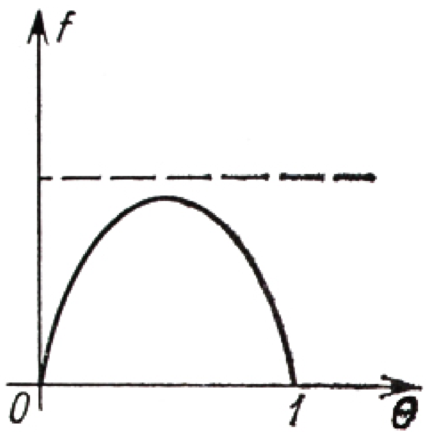

Рис. 2: **График функции** $f(\Theta) = \dfrac{d\Theta}{d\xi}\left(\Theta^{-1}(\Theta)\right)$.

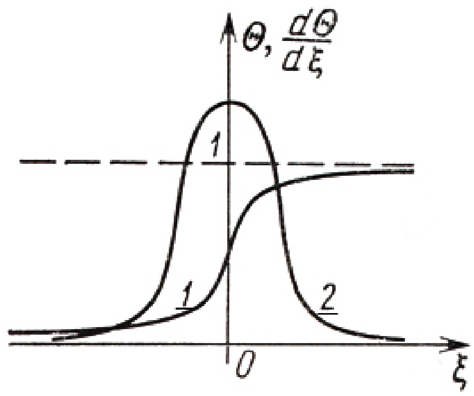

Рис. 3: **График функции** $\Theta(\xi)$**-кривая** 1 **и график** $\frac{d\Theta}{d\xi}$**-кривая** 2.

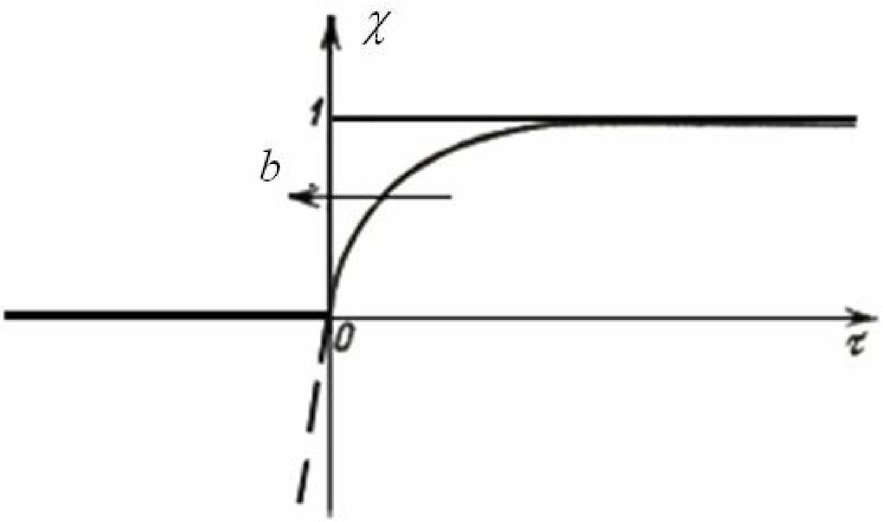

Рис. 4: **График функции $\chi(\tau)$-локализованное решение при $\tau > 0$. Левее точки $\tau = 0$ решение сшивается с особым решением $\chi(\tau) \equiv 0$. В точке $\tau = 0$ решение ветвится. Отрицательная ветвь решения - пунктирная кривая, она не имеет физического смысла.**

рис. 3 и теоремы 1.1 следует, что уравнение (1.1), в котором функция $F(\chi)$ имеет вид $F = \left(\rho(\chi)k\chi^{k-1}\right)^{-1} R(\chi)$, имеет решение $\chi(\tau)$, приведенное на рис. 4.

Студент: **Зачем нужны свойства ОДУ, которые были изложены здесь?**

Авторы: **При изучении конкретных задач, связанных с квазилинейными параболическими уравнениями асимптотические свойства решений в окрестностях особых точек имеют большое значение, поэтому в дальнейшем в работе [8]— [10] их изучению уделяется достаточное внимание. Во введении написано о создании универ-**

сальных пакетов программ в различных научных центрах для расчетов различных устройств, узлов и машин. Здесь для расчетов и понадобятся такие формулы [25].

$\square$

Исследуем поведение функции χ при $\chi \to 0$ и $\chi \to 1$. Не ограничивая общности, рассмотрим случай, когда фронт слабого разрыва находится в точке $\tau = 0$.

Студент: Как это понимать?

Авторы: Решение нелинейного уравнения (1.1) в окрестности точки ветвится, см. Рис. 4, [7]. В точке 0 имеются два возможных продолжения решений влево:
а. Вниз по пунктирной экспоненциальной кривой. Такое решение не имеет физического смысла;
б. Продолжение линии, совпадающей с осью OX.
Слева от особой точки функция тождественно равна нулю $(\chi(0_{-0}) \equiv 0)$, а справа больше нуля $(\chi(0_{+0}) > 0)$. В особой точке $\tau = 0$ они сшиваются, при этом оказывается дополнительно выполнено равенство нулю "потока". Потоком в работах [2], [4], [6]— [10] называют величину $\rho(\chi)\dfrac{d\chi^k}{d\tau}$. Таким образом, в особой точке выполнено равенство

$$\left(\rho(\chi)\,\frac{d\chi^k}{d\tau}\right)\Bigg|_{\tau=0,\chi(0)=0} = 0.$$

Такая точка в указанных работах называется слабым разрывом, так как производная $\frac{d\chi}{d\tau}$ терпит разрыв. А решение $\chi \equiv 0$ называют в цитируемых работах особым решением. Строгие определения этих понятий даны в работах [6], [9], [10].

$\square$

При $\tau \to 0$ справедливо соотношение

$$\chi(\tau) = \tau^{\alpha}\left(\gamma_1 + \mathbf{o}(\mathbf{1})\right), \tag{1.25}$$

где $\alpha,\ \gamma_1 = \gamma_1(\alpha)$ – некоторые константы.

Студент: Напомните мне значение символов «О большого» и «о малого».

Авторы: Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — две функции, определённые на некотором отрезке $[x_1, x_2]$, который обозначим через X, причем в X функция ψ не обращается в ноль.(См. [30], с. 67.)

1. Запись

$\varphi(x) = \mathbf{O}\ (\psi(x))$ при $x \in X$

означает, что существует постоянная $A > 0$ такая, что $|\varphi(x)| \le A|\psi(x)|$

для всех $x \in X$.

2. Запись $\varphi(x) = \mathbf{o}(\psi(\mathbf{x}))$ при $x \to a$ означает, что $\varphi(x) = \alpha(x)\psi(x)$ при $x \in U_a$, где U_a— некоторая окрестность точки a, и $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$.

$\square$

Авторы: Продолжим анализ построения решения со слабым разрывом.

В самом деле, для доказательства этого в силу (1.3), достаточно показать, что функция $f(\Theta)$, изображённая графически на рис. 2, удовлетворяет условию $\left.\dfrac{df}{d\Theta}\right|_{\Theta=0} \neq 0$.

Для установления последнего соотношения вычислим производную

$$\left.\frac{df(\Theta)}{d\Theta}\right|_{\Theta=0} = \left.\frac{d}{d\Theta}\left(\frac{d\Theta}{d\xi}\left(\Theta^{-1}(\Theta)\right)\right)\right|_{\Theta=0} = \\ = \left.\frac{d^2\Theta}{d\xi^2}\left(\frac{d\Theta}{d\xi}\right)^{-1}\right|_{\xi=-\infty} = l, \qquad (1.26)$$

где l — константа. Из уравнения (1.24) после дифференцирования по переменной ξ и применения правила Лопиталя получим при $\xi \to -\infty$

$$b = l + \frac{1}{l}\left|\left.\frac{dR}{d\Theta}\right|_{\Theta=0}\right|. \qquad (1.27)$$

Студент: Напомните мне правило Лопиталя.

Авторы: Первое правило Лопиталя служит для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ ([30], с.134.)

Если:

1.функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности U_ε[4] точки a, где $a---$ число или символ бесконечности, и при $x \to a$ обе стремятся к нулю:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;

2.производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в окрестности U_ε точка a, за исключением, может быть, самой точки a, причем одновременно не обращаются в нуль при $x \neq a$;

3. существует конечный или бесконечный предел

$\lim\limits_{x\to a} (f'(x)/g'(x))$,

то имеем:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Авторы: Покажем, как с помощью указанного правила из выражения (1.24) можно получить выражение для b (1.27). Действительно, разделим (1.24) на $\frac{d\Theta}{d\xi}$. По правилу Лопиталя

$$\lim_{\xi\to-\infty} b = \lim_{\xi\to-\infty}\left(\frac{d^2\Theta}{d\xi^2}\left(\frac{d\Theta}{d\xi}\right)^{-1} + \frac{dR}{d\Theta}\frac{d\Theta}{d\xi}\left(\frac{d^2\Theta}{d\xi^2}\right)^{-1}\right) = \\ = l + \frac{1}{l}\left(\frac{dR}{d\Theta}\right)\Big|_{\Theta=0}, \quad (1.28)$$

так как $\Theta \longrightarrow 0$, $\xi \to -\infty$.

$\square$

[4]Под окрестностью U_ε точки a понимается совокупность точек x, удовлетворяющих неравенству:

$I.$ $|x-a| < \varepsilon$, если $a-$ число, и

$II.$ $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$, если a символ бесконечности.

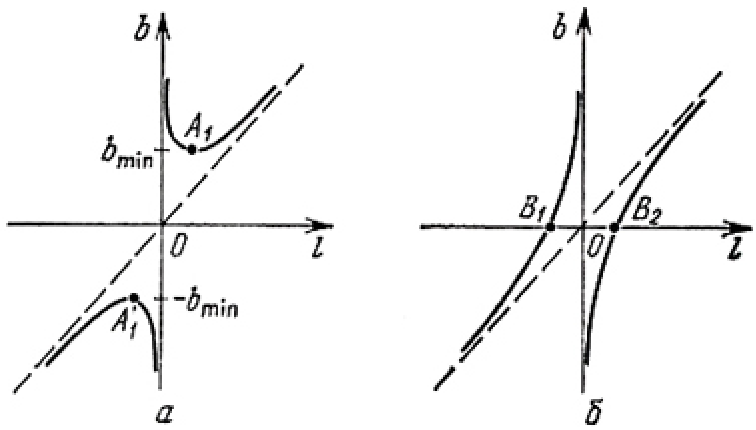

Рис. 5: **Графики функции $b(l)$. Это кривые для иллюстрации расчетов скорости простой волны в двух случаях**.

Очевидно, что если $b > b_{min}$ — заданная константа, то $0 < |l| < \infty$ (см. рис. 5 а).

Рассмотрим поведение функции χ при $\chi \to 1 - 0$. Аналогично (1.27) при $\xi \to \infty$ получаем

$$b = l_0 - \frac{1}{l_0}\left|\frac{dR}{d\Theta}\Big|_{\Theta=1}\right|,$$
$$l_0 = \frac{d^2\Theta}{d\xi^2}\left(\frac{d\Theta}{d\xi}\right)^{-1}\Bigg|_{\xi=\infty}, \quad l_0 < 0. \tag{1.29}$$

График этой функции приведён на рис. 5 б. Так как при $\xi \to \infty$,

$\Theta \to 1 - 0$, а значение $b(l_0)$ конечно, то

$$\lim_{\xi\to\infty} \frac{d^2\Theta}{d\xi^2}\left(\frac{d\Theta}{d\xi}\right)^{-1} = l_0 \neq 0. \tag{1.30}$$

Отсюда из теоремы 1.1 следуют равенства:

$$\begin{gathered}\Theta = 1 - \exp\{-|l_0|\xi\} + \mathbf{o}(\exp\{-|\mathbf{l_0}|\xi\}), \quad \xi \to \infty,\\ \frac{d\Theta}{d\xi} = |l_0|\exp\{-|l_0|\xi\} + \mathbf{o}(\exp\{-|\mathbf{l_0}|\xi\}) =\\ -|l_0|(1-\exp\{-|l_0|\xi\}) + l_0 + \mathbf{o}(\exp\{-|\mathbf{l_0}|\xi\}) =\\ -|l_0|\Theta + |l_0| = |l_0|(1-\Theta) + \mathbf{o}(\exp\{-|\mathbf{l_0}|\xi\}).\end{gathered} \tag{1.31}$$

Отсюда с учетом локализующего преобразования (1.3), следует, что функция χ при $\tau \to \infty$ имеет следующую асимптотику:

$$\chi = 1 - \exp\left\{-\frac{|l_0|\tau}{\rho(1)k}\right\} + \mathbf{o}\left(\exp\left\{-\frac{|\mathbf{l_0}|\tau}{\rho(\mathbf{1})\mathbf{k}}\right\}\right). \tag{1.32}$$

Студент: Почему так важно свойство непрерывности и дифференцируемости функции и ее производной?

Авторы:

В заключение параграфа приведём пример локализации решения в уравнении(1.2), когда одно из перечисленных свойств нарушается.

Рассмотрим функцию

$$\Theta(\xi) \;=\; \begin{cases} e^{-1/\xi}, & \xi \geq 0\\ 0, & \xi < 0,\end{cases} \tag{1.33}$$

которая является гладкой при $\xi \in R$ и удовлетворяет уравнению простых волн для уравнения типа КППФ

$$b\,\frac{\partial\Theta}{\partial\xi} - \frac{\partial^2\Theta}{\partial\xi^2} - \Theta\ln^2\Theta[\,b^2 - \ln\Theta(2+\ln\Theta)] = 0, \qquad \Theta \in [\,0,1].$$

В этом случае в уравнении (1.2) функция R имеет вид

$$R = \Theta \ln^2 \Theta [\, b^2 - \ln \Theta (2 + \ln \Theta)] \tag{1.34}$$

и имеет неограниченную первую производную в точке $\Theta = 0$. Это приводит к локализации решения (1.33).

1.4 Исследование уравнений типа Зельдовича

Частным случаем (1.2), в котором функция $R(\Theta)$ удовлетворяет условиям (1.8), является следующее уравнения:

$$b_0 \frac{d\Theta}{d\xi} - \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - \Theta^2(1 - \Theta) = 0 \tag{1.35}$$

Точное решение этого уравнения имеет вид

$$\Theta(\xi) = \left(1 + e^{-\xi/\sqrt{2}}\right)^{-1}. \tag{1.36}$$

Константа b_0 — константа Зельдовича — в данном случае следующая: $b_0 = 1/\sqrt{2}$. При $|\xi| \to -\infty$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} &\Theta = \mathbf{O}(\exp(\mathbf{b_0}\xi)), && \xi \to -\infty, \\ &\Theta = 1 - e^{-b_0\xi} + \mathbf{o}(\mathbf{e^{-b_0\xi}}), && \xi \to +\infty \end{aligned} \tag{1.37}$$

***Студент:* Объясните как получена вторая оценка (1.37).**

***Авторы:* Известно, что формула Тейлора имеет вид**

$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0) + f''(y_0)\frac{(y - y_0)^2}{2!} + ...$$

Нас интересует разложение функции (1.36) в окрестности точки $y_0 = 0$. Такой ряд называется рядом Маклорена (частный случай). Обозначим
$y = \exp(-\xi/\sqrt{2})$. Заметим что $\xi \to \infty,\ y \to 0$. Функция (1.36) примет вид: $f(y) = 1/(1 + y)$.

Вычислим

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 1,\\
f'(0) &= -\frac{1}{(1+y)^2}\Big|_{y=0} = -1,\\
f(y) &= 1 - y + \mathbf{o}(\mathbf{y}).
\end{aligned}
$$

Подставляем в ряд Маклорена и делаем обратную замену переменной. Получим (1.37).

□

Эти результаты обобщаются на уравнения вида (1.2), в которых функция $\Theta^2(1-\Theta)$ заменяется на гладкую функцию $R(\Theta)$, удовлетворяющую условиям (1.8).

Как отмечалось выше, уравнения Зельдовича изучаются в связи с задачами теории горения. Из физического смысла этих задач следует, что функция $R(\Theta)$ неотрицательна. Однако исследование локализованных решений нелинейных уравнений, основанное на теореме 1.1, приводит к необходимости изучения уравнений простых волн для уравнений Зельдовича в случае неположительных функций $R(\Theta)$. Это отвечает случаю диссипации (стоку) в уравнении (1.2).

Частным случаем уравнения Зельдовича с неположительной функцией $R(\Theta)$ является уравнение

$$
b\,\frac{d\Theta}{d\xi} - \frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + \Theta^2(1-\Theta) = 0 \tag{1.38}
$$

Предположим, что производная (поток) $\frac{d\Theta}{d\xi} \neq 0$, на числовой оси и производная $\frac{d\Theta}{d\xi} \to 0$ стремится к нулю при $|\xi| \to \infty$.

Краевые условия имеют вид

$$
\Theta|_{\xi\to-\infty} \to 0, \quad \Theta|_{\xi\to+\infty} \to 1. \tag{1.39}
$$

Покажем, что решения уравнения (1.38), удовлетворяющие условиям (1.39) не имеют экспоненциальной асимптотики при $\xi \to -\infty$. Существование таких решений доказано и приведено ниже с помощью метода анализа интегральных кривых на фазовой плоскости. Подробнее см. [9].

Предположим противное, т. е. пусть существуют такие константы
$l_1 < 0,\ l_2 > 0$, что имеют место экспоненциальные асимптотики решения

$$\begin{aligned}
\Theta &= 1 - e^{+l_1\xi} + \mathbf{o}(\mathbf{e}^{+\mathbf{l_1}\xi}), \qquad && \xi \to +\infty, \\
\Theta &= \mathbf{O}(\mathbf{e}^{+\mathbf{l_2}\xi}), && \xi \to -\infty.
\end{aligned} \tag{1.40}$$

Тогда из (1.38) при $|\xi| \to \infty$ получим

$$-bl_1 + l_1^2 + 1 = 0, \qquad +bl_2 - l_2^2 = 0. \tag{1.41}$$

Вещественные решения l_1 существуют только при условии $b \geq 2$. Это неравенство следует из условия не отрицательности дискриминанта первого квадратного уравнения (1.41) $D = b^2 - 4 \geq 0$. Из второго уравнения находим $b = l_2$.

Домножим уравнение (1.38) на производную $\frac{d\Theta}{d\xi}$. Заметим, что если проинтегрировать полученное соотношение на всей числовой оси, получим равенство

$$b\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{d\Theta}{d\xi}\right)^2 d\xi = -\int\limits_{0}^{1}\Theta^2(1-\Theta)\,d\Theta = -\frac{1}{12}. \tag{1.42}$$

Интеграл в левой части явно и просто вычисляется. Следовательно, $b < 0$ и $l_2 < 0$, и имеют место неравенства разного знака, что противоречит предположению.

Нетрудно проверить, что решение уравнения (1.38), удовлетворяющее условиям (1.39), имеет следующие асимптотики при $|\xi| \to \infty$:

$$\Theta(\xi) = \mathbf{O}(\mathbf{1}/|\xi|), \qquad \xi \to -\infty,$$

$$\Theta(\xi) = 1 - e^{l_1\xi} + \mathbf{o}(\mathbf{e}^{\mathbf{l_1}\xi}), \qquad \xi \to +\infty, \tag{1.43}$$

$$l_1 = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - 1}.$$

Условием существования вещественного решения является неравенство $b < -2$.

Далее в [9] проведено обобщение данного факта на уравнения (1.2).

Пусть в уравнении (1.2) функция $R(\Theta)$ дифференцируема на отрезке [0,1] и удовлетворяет условиям

$R(\Theta) < 0$ **при** $0 < \Theta < 1, \quad R(0) = R(1) = 0,$

$$\left.\frac{dR}{d\Theta}\right|_{\Theta=0} = 0, \quad \left.\frac{dR}{d\Theta}\right|_{\Theta=1} > 0. \tag{1.44}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.4.1

Пусть выполнены условия *(1.44)*. ***Тогда существует решение уравнения*** *(1.2)*, ***удовлетворяющее условиям*** **(1.39).**

Доказательство следует из анализа фазового портрета обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dp}{d\Theta} = \frac{bp - R(\Theta)}{p}, \qquad b < 0, \tag{1.45}$$

к которому приводится уравнение (1.2) (см. рис. 6).

Особая точка A является сложной особой точкой типа «седло — узел» с одним выделенным направлением (направление 1 на рис. 6).

Особая точка В при $|b| > 2\sqrt{\left.\frac{dR}{d\Theta}\right|_{\Theta=1}}$ **является «узлом» (при** $|b| = 2\sqrt{\left.\frac{dR}{d\Theta}\right|_{\Theta=1}}$ **— « вырожденным узлом»). Собственные числа и собственные векторы линеаризованно-**

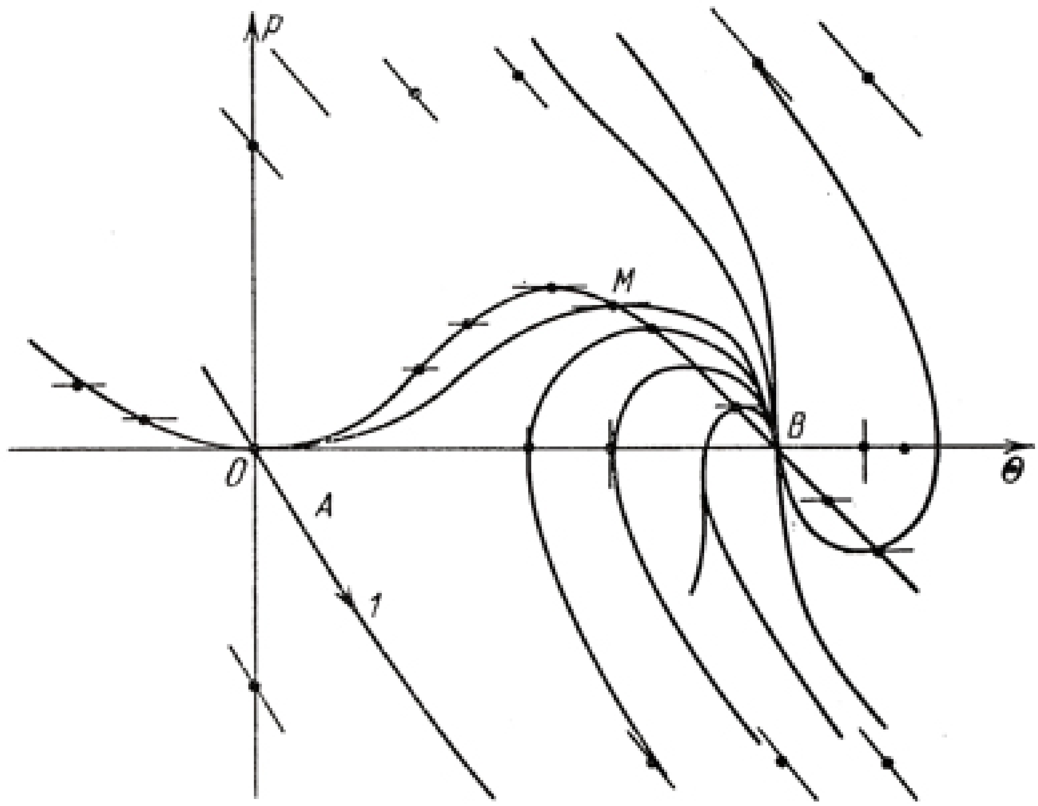

Рис. 6: **Интегральные кривые на фазовой плоскости для уравнения Зельдовича.**

го уравнения имеют вид

$$\lambda_{\pm} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{dR}{d\Theta}\Big|_{\Theta=1}}, \qquad \upsilon_- = (\lambda_-, 1), \qquad \upsilon_+ = (\lambda_+, 1)\,.$$

Существует интегральная кривая, соединяющая точки 0 (A) и B. Действительно, интегральная кривая AMB, отвечающая решению уравнения (1.39), удовлетворяющему условиям (1.38), входит в особую точку B по направлению собственного вектора υ_-.

Доказательство Леммы 1.4.1 завершено.

□

Как уже отмечалось выше в замечании 1.1.5 в работах [11]-[14],[35] построено решение уравнения с частными производными, которое приведено в параграфе 2.5. У него другие асимптотические формулы и наиболее сильно они отличаются при малых значениях функции.

Лемма 1.4.2

Пусть функция $R(\Theta)$ ***в уравнении*** (1.2) ***удовлетворяет условиям*** (1.44) ***и имеет степенное ветвление в точке*** $\Theta = 0, R(\Theta) \sim \Theta^{\beta}, \quad \beta > 1$. ***Тогда при*** $|\xi| \to \infty$ ***для решения*** $\Theta(\xi)$, ***удовлетворяющего условиям*** (1.39), ***справедливы оценки***

$$\Theta(\xi) = \mathbf{O}(|\xi|^{-\mathbf{1}/(\beta-\mathbf{1})}), \qquad \xi \to -\infty,$$
$$\Theta(\xi) = 1 - e^{l\xi} + \mathbf{o}(\mathbf{e}^{\mathbf{l}\xi}), \qquad \xi \to +\infty,$$

$$l = \frac{b}{2} \; - \; \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{dR}{d\Theta}\Big|_{\Theta=1}} < 0.$$

Доказательство данной леммы следует из вышеприведенных рассуждений.

1.5 Асимптотические оценки для квазилинейных параболических уравнений

Суммируя утверждения приведённые в предыдущих параграфах, получим следующую теорему об асимптотических свойствах решений уравнения (1.1).

Теорема 1.5.1

Пусть в уравнении (1.1) функция $F(\chi)$ ***имеет вид***

$$F(\chi) = \chi^q G(\chi), \;\; q > 0, \;\; k + q \geq 2,$$

функции $\rho(\chi), \;\; G(\chi)$ ***непрерывно дифференцируемы при***

$\chi \geq 0, \;\; G(\chi) \neq 0$ ***при*** $\chi \in [0, 1[, \quad G(1) = 0, \;\; \dfrac{dF}{d\chi}\Big|_{\chi=1} \neq 0.$

Тогда существует монотонные непрерывное неотрицательное решение уравнения (1.1) с полуограниченным носителем

$(\chi(\tau) \equiv 0$ ***при*** $\tau < 0)$, ***удовлетворяющее условию***

$\dfrac{d\chi^k}{d\tau}\Big|_{\chi=0} = 0$ ***и такое, что***

а. если $k+q>2,\ q\geq 1,\ G(\chi)>0$ ***при*** $\chi\in[0,1[$ ***(уравнение Зельдовича с источником), то***

$$\chi(\tau)=\mathbf{O}(\tau^{\mathbf{1/(k-1)}})=\mathbf{O}(\tau^{\mathbf{1/(1-q)}}),\qquad \tau\to 0,$$
$$\chi(\tau)=1-exp\left\{-\frac{l_0\tau}{\rho(1)k}\right\}+\mathbf{o}\left(\mathbf{exp}\left\{-\frac{\mathbf{l_0}\tau}{\rho(\mathbf{1})\mathbf{k}}\right\}\right),\quad \tau\to\infty,$$

$l_0=-\dfrac{b_0}{2}+\sqrt{\dfrac{b_0^2}{4}-\dfrac{dR}{d\Theta}\Big|_{\Theta=1}},\ b_0$ ***— константа Зельдовича, для уравнения***

$$b_0\,\frac{d\Theta}{d\xi}-\frac{d^2\Theta}{d\xi^2}-R(\Theta)=0;$$

б. если $k+q=2,\ q<1,\ G(\chi)>0$ ***при*** $\chi\in[0,1[$ ***(уравнение КППФ), то***

$$\chi(\tau)=\mathbf{O}(\tau^{\mathbf{1/(k-1)}})=\mathbf{O}(\tau^{\mathbf{1/(1-q)}}),\qquad \tau\to 0,$$
$$\chi(\tau)=1-e^{-l_3\tau}+\mathbf{o}(\mathbf{e}^{-\mathbf{l_3}\tau}),\qquad \tau\to\infty,$$

где

$$b\geq 2\sqrt{\frac{dR}{d\Theta}\Big|_{\Theta=0}},\qquad l_3=\frac{1}{k\rho(1)}\left(-\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}+\left|\frac{dR}{d\Theta}\Big|_{\Theta=1}\right|}\right);$$

в. если $k+q>2,\ q<1,\ G(\chi)<0$ ***при*** $\chi\in[0,1[$***(уравнение Зельдовича с диссипацией), то***

$$\chi(\tau)=\mathbf{O}(\tau^{\mathbf{1/(1-q)}}),\qquad \tau\to 0,$$
$$\chi(\tau)=1-e^{+l_4\tau}+\mathbf{o}(\mathbf{e}^{+\mathbf{l_4}\tau}),\qquad \tau\to\infty,$$

$$b\leq -2\sqrt{\frac{dR}{d\Theta}\Big|_{\Theta=1}},\qquad l_4=\frac{1}{k\rho(1)}\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-\frac{dR}{d\Theta}\Big|_{\Theta=1}}<0,$$

где $R(\Theta)=k\rho(\Theta)\Theta^{k+q-1}G(\Theta).$

Утверждение теоремы следует из равенства (1.3) и свойств решения соответствующего уравнения (1.2).

Замечание 1.5.1

В случае $q \geq 1$, $G(\chi) < 0$ при $\chi \in [0, 1[$ уравнение (1.1) не имеет монотонного неотрицательного решения $\chi(\tau)$, равного нулю при $\tau < 0$ и стремящегося к единице при $\tau \to \infty$. В самом деле, в силу теоремы 1.1.1 из [9] для такого решения должна выполняться оценка $\chi(\tau) = O(\tau^{1/(k-1)})$ при $\tau \to 0$, из которой с учётом равенства (преобразования)(1.3) следует, что при

$\xi \to -\infty$ решение соответствующего уравнения (1.2) удовлетворяет оценке $\Theta = O(e^{l_2 \xi})$, что противоречит утверждению леммы 1.4.2.

Замечание 1.5.2

В данной главе установлено соответствие между полулинейными и квазилинейными уравнениями. При обсуждении материала, когда писали книги [8]— [10] было принято решение именно это уравнение (1.16), а не какое-нибудь другое связать с именами выдающихся российских ученых (КППФ). Это сделано потому, что именно оно обладает базовыми, основными «центральными » свойствами (1.7). Соответствующее уравнению КППФ квазилинейное параболическое уравнение (случай *б* в теореме 1.5.1) также выделено соотношением $k + q = 2$ и обладает пограничными свойствами. Действительно, на плоскости параметров k, q прямая $k = 2 - q$ разделяет уравнения с разными свойствами. Об этом написано в замечании 1.1.3 в параграфе 1.1.

Замечание 1.5.3 Естественно, приведенная теорема 1.5.1 была уточнена и дополнена позднее в работах Р. О. Кершнера и Б. Х. Гилдинга. Множество решений уравнений с частными производными значительно шире. Так в параграфе 2.5 построены новые решения таких уравнений.

Приведенные уравнения и связанные с ними задачи были исследованы Л. Б. Берковичем другими методами в [51].

2 ГЛАВА 2. Метод нефиксированной конструктивной замены переменных

2.1 Уравнения с частными производными как система функциональных линейных алгебраических уравнения

2.1.1 Введение. Несколько важных замечаний

Замену переменных использовали классики математики для классификации линейных уравнений в частных производных для классификации линейных уравнений, см., например, [4]. Однако они не использовали такие дифференциальные связи, как в наших работах [11]— [14], и не провели весь объем вычислений. Рассмотрим как пример, уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными и с двумя дифференциальными связями. Тогда одно дифференциальное уравнение с частными производными заменяется системой четырех уравнений первого порядка с частными производными. В [11]— [14], [35] обнаружено, что эта внешне сильно нелинейная система является, на самом деле, системой линейных функциональных алгебраических уравнений $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ (!). (далее СФЛАУ. В цитируемых работах вводится такой термин, добавляя слово функциональный.)

СФЛАУ имеет единственное решение.

Диссертация [11] выставлена на сайте "Мир дифференциальных уравнений"и сайте "Любителей прикладной математики"и всем доступна.

Академик РАН В. П. Маслов представил работу в "Доклады РАН-[12]. Член корреспондент РАН В. В. Пухначев представил работу в "Сибирский журнал индустриальной математики-[13]. Отметим, что отзыв ведущей организации к диссертации был подписан заведующий кафедрой математики Московского физико-технического института (государственный университет), факультета нано-, био-, информационных и когнитивных технологий, заведующим лаборатории Институт прикладной механики РАН, профессором, д.ф.– м.н. С. Ю. Доброхотовым и академиком В. П. Масловым. Метод получил оценку за рубежом. Профессор факультета информатики университета Дебрецена Аттила Гилани представил работу в "Международный журнал Математики и Математических наук-[35].

Излагаемый подход, как показывает опыт вычислений, позволяет строить точные новые решения дифференциальных уравнений с частными производными. Априори предполагается, что решение существует. По мнению профессора, д.ф-м.н. Е. М. Воробьева построенные в данной работе сложные решения отвечают частичным симметриям, сложным группам преобразований [20], [21]. Приведенный в данной главе материал связан со сложными понятиями пространства струй, выпрямления векторных полей и т.д. Более полный список работ Е.Ṁ. Воробьева приведен в [11].

В цитируемых работах [11]— [14] и в данном пособии фактически показано, что существует диффеоморфизм решений записанных в исходных переменных и в новых переменных.

Сначала, чтобы формулы были проще и понятнее, рассмотрим важные частные случаи [11].

2.1.2. *Объяснение: как построено решение в ниже приведенном примере. Общий алгоритм построения решений.*

В школе вам объясняли, что касательная к функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, \ \ y_0 = f(x_0))$ является линейным уравнением относительно производной $f'(x_0)$, которое имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{2.1}$$

Таким образом, в (2.1) производная $f'(x_0)$ входит в первой степени, т.е. линейно. В теории дифференциальных уравнений частных производных при геометрическом, групповом подходе решение уравнения $u(x,t)$ трактуется как гиперплоскость в расширенном фазовом пространстве независимых переменных и производных. Подробнее об этом смотрите [19]— [21]. Глобальные точные формулы записи системы функциональных линейных алгебраических уравнений обнаружены и опубликованы в [14][5], а затем подробно изложены в [11]— [13], [35]. В указанных работах найден путь построения таких формул.

Рассмотрим уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными x, t и двумя дифференциальными связями. Тогда одно дифференциальное уравнение с частными производными заменяется системой четырех уравнений первого порядка с частными производными. Ниже объясним, что эта внешне сильно нелинейная система является на самом деле, системой функциональных линейных алгебраических уравнений (СФЛАУ) $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ (!) и имеет единственное решение [11]— [14], [35]. Из этого следуют условия разрешимости новой системы, которые позволят строить точные решения. Анализ двух условий разрешимости показывает, что всегда имеет место один общий множитель. Мы называем это новым свойством уравнений с частными производными, которое ранее было неизвестно.

Как следствие этого для класса квазилинейных диф-

[5] *Естественно, этому предшествовали неоднократные выступления на семинарах в школе академика РАН В.П. Маслова.*

ференциальных уравнений второго порядка существует ещё один метод построения точных решений. Этот метод мы называем методом ***нефиксированной конструктивной замены переменных.***

Поскольку выкладки при анализе нелинейного уравнения не простые, проще для понимания материала изложить метод на примере квазилинейного параболического уравнения

$$Z'_t - (K(Z)Z'_x)'_x + F(Z) = 0. \tag{2.2}$$

Если бы выкладки были тривиальные, то описываемый факт был бы давно известен. Приведенный ниже алгоритм работает в предположении, что все используемые функции имеют необходимую гладкость.

Сделаем произвольную замену переменных

$$Z(x,t)|_{x=x(\xi,\ \delta),t=t(\xi,\delta)} = U(\xi,\delta). \tag{2.3}$$

Обратная замена, хотя бы локально, восстанавливает решение $Z(x,t)$ уравнения **(2.2)** по функции $U(\xi,\delta)$

$$Z(x,t) = U(\xi,\delta)|_{\xi=\xi(x,t),\ \delta=\delta(x,t)}. \tag{2.4}$$

Вышесказанное говорит о том, что существует диффеоморфизм решений, записанных в исходных переменных и в новых переменных.

Предположим, что якобиан (определитель матрицы Якоби) замены переменных

$detJ = x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta \neq 0$ не равен нулю и бесконечности. Сама матрица Якоби имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} x'_\xi & t'_\xi \\ x'_\delta & t'_\delta \end{pmatrix}.$$

Тогда хотя бы локально, существует обратное преобразование $\xi = \xi(x,t), \delta = \delta(x,t)$.

При этом существуют формулы пересчёта производных старых переменных x, t по новым переменным ξ, δ:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = detJ\frac{\partial \delta}{\partial t}, \ \frac{\partial t}{\partial \xi} = -detJ\frac{\partial \delta}{\partial x},$$
$$\frac{\partial x}{\partial \delta} = -detJ\frac{\partial \xi}{\partial t}, \ \frac{\partial t}{\partial \delta} = detJ\frac{\partial \xi}{\partial x}. \tag{2.5}$$

Студент: **Как получены эти формулы? Объясните подробнее.**

Авторы: **Хорошо, давайте рассмотрим пример.**

Пример 2.1

Объясним подробнее, как участвуют в замене переменных формулы (2.5). Обратная замена $\xi = \xi(x,t), \delta = \delta(x,t)$ существует, если якобиан не равен нулю и бесконечности и матрица J^{-1} строится из производных $\xi'_x(x,t), \delta'_x(x,t), \xi'_t(x,t), \delta'_t(x,t)$. Таким образом, обратная матрица J^{-1} имеет вид

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \xi'_x(x,t) & \delta'_x(x,t) \\ \\ \xi'_t(x,t) & \delta'_t(x,t) \end{pmatrix}.$$

Ниже аргументы в функциях опускаем. Если все наши рассуждения верны, то должно быть быть выполнено равенство $JJ^{-1} = E$. Проверим это. Вычислим произведение

$$JJ^{-1} = \begin{pmatrix} x'_\xi \xi'_x + t'_\xi \xi'_t & x'_\xi \delta'_x + t'_\xi \delta'_t \\ \\ x'_\delta \xi'_x + t'_\delta \xi'_t & x'_\delta \delta'_x + t'_\delta \delta'_t \end{pmatrix}.$$

Подставим в правую часть этого выражения формулы

для производных (2.5). Получим

$$\frac{1}{detJ}\begin{pmatrix} detJ & 0 \\ \\ 0 & detJ \end{pmatrix},$$

то есть единичную матрицу.

□

Далее введем обозначения (В ряде работ используется авторы пишут: « ***установим дифференциальные связи***».)

$$K(Z)\frac{\partial Z}{\partial x}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = Y(\xi,\delta),$$
$$K(Z)\frac{\partial Z}{\partial t}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = T(\xi,\delta). \qquad (2.6)$$

Используя (2.5) из (2.6), получим выражения

$$K(U(\xi,\delta))\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi}\right) = Y(\xi,\delta)[x^{'}{}_{\xi}t^{'}{}_{\delta} - t^{'}{}_{\xi}x^{'}{}_{\delta}],$$
$$K(U(\xi,\delta))\left(-\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial x}{\partial \xi}\right) = T(\xi,\delta)[x^{'}{}_{\xi}t^{'}{}_{\delta} - t^{'}{}_{\xi}x^{'}{}_{\delta}]. \qquad (2.7)$$

Студент: Объясните более подробно, как получаются выражения (2.7).

Авторы: Пожалуйста.

Рассмотрим первое соотношение (2.6). Дифференцируем сложную функцию и пересчитываем с помощью формулы (2.5) связь «старых» переменных по «новым»:

$$K(Z)Z^{'}{}_{x}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = K(U)U^{'}_{x}(\xi(x,t),\delta(x,t)) =$$
$$K(U(\xi,\delta))\left(U^{'}{}_{\xi}\xi^{'}{}_{x} + U^{'}{}_{\delta}\delta^{'}{}_{x}\right) = K(U)\left(U^{'}{}_{\xi}t^{'}{}_{\delta} - U^{'}{}_{\delta}t^{'}{}_{\xi}\right)/detJ.$$

Получим первое соотношение (2.7). Аналогично преобразуется второе соотношение (2.6). Тогда получим второе соотношение (2.7).

Студент: Объясните более подробно, как преобразуется уравнение (2.2).

Авторы: **Продифференцируем функцию** $Y(\xi(x,t),\delta(x,t))$ **как сложную функцию:**

$$\frac{\partial Y(\xi(x,t),\delta(x,t))}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial \delta}\frac{\partial \delta}{\partial x} \tag{2.8}$$

Используя формулы (2.5), получаем

$$\frac{\partial Y(\xi,\delta)}{\partial x}=\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta}-\frac{\partial Y}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)/[x'_{\xi}t'_{\delta}-t'_{\xi}x'_{\delta}]. \tag{2.9}$$

Уравнение (2.2) принимает вид

$$\frac{T(\xi,\delta)}{K(U)}-\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta}-\frac{\partial Y}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)/[x'_{\xi}t'_{\delta}-t'_{\xi}x'_{\delta}]+$$
$$+F(U)=0. \tag{2.10}$$

Умножаем на функцию $K(U)$ **и окончательно получаем:**

$$T(\xi,\delta)-K(U)\left(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta}-\frac{\partial Y}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi}\right)/[x'_{\xi}t'_{\delta}-t'_{\xi}x'_{\delta}]+$$
$$+K(U)F(U)=0. \tag{2.11}$$

Соотношения (2.6) можно переписать в виде
$Z'_x(x,t)=[Y(\xi,\delta)/K(U)]|_{\xi=\xi(x,t),\ \delta=\delta(x,t)}$,
$Z'_t(x,t)=[T(\xi,\delta)/K(U)]|_{\xi=\xi(x,t),\ \delta=\delta(x,t)}$.

С необходимостью должно быть выполнено соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}Z'_x=\frac{\partial}{\partial x}Z'_t. \tag{2.12}$$

Равенства смешанных производных в переменных ξ,δ**:**

Студент: **Насколько я знаю, для дважды непрерывно дифференцируемых функций смешанные производные тождественно равны.**

Авторы: **Если функция $Z(x,t)$ явно задана, то действительно для неё справедлива теорема Шварца и вы правы. Но в данном случае функция $Z(x,t)$ — неизвестная и это – решение уравнения (2.2), поэтому равенство (2.12) является условием, а не тождеством. Вокруг этого пункта на докладах старшего автора не раз разгоралась горячая дискуссия. Такой вопрос задавали доктора и академики.**

Применим оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ к Z'_x:
$\frac{\partial}{\partial t}\left(Z'_x(x,t)\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(Y(\xi,\delta)/K(U(\xi,\delta))\right)\xi'_t +$
$\frac{\partial}{\partial \delta}\left(Y(\xi,\delta)/K(U(\xi,\delta))\right)\delta'_t,$
далее используем формулы (2.5):
$\xi'_t = -x'_\delta/detJ, \quad \delta'_t = x'_\xi/detJ.$
Аналогично применяем оператор $\frac{\partial}{\partial x}$ к Z'_t:
$\frac{\partial}{\partial x}\left(Z'_t(x,t)\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}(T/K(U))\xi'_x +$
$\frac{\partial}{\partial \delta}\left(T/K(U)\right)\delta'_x$
и используем формулы (2.5):
$\xi'_x = t'_\delta/detJ, \quad \delta'_x = -t'_\xi/detJ.$

Тогда это соотношение, с учетом (2.5),(2.6) можно записать в виде

$$-\frac{\partial x}{\partial \delta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{Y}{K(U)}\right) + \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \delta}\left(\frac{Y}{K(U)}\right) -$$
$$-\frac{\partial t}{\partial \delta}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{T}{K(U)}\right) + \frac{\partial t}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \delta}\left(\frac{T}{K(U)}\right) = 0. \qquad (2.13)$$

Система четырёх уравнений (2.7),(2.11),(2.13) на первый взгляд кажется системой нелинейных уравнений. Однако уравнение (2.13) является линейным, и мы воспро-

изводим доказательство того факта, что вся система является СФЛАУ.

Анализ системы (2.7),(2.11),(2.13) проводится в два этапа. На первом этапе система (2.7),(2.11),(2.13) рассматривается как СФЛАУ относительно производных
$x'_{\xi},\ x'_{\delta},\ t'_{\xi},\ t'_{\delta}$.

Теорема 2.1.1

Алгебраическая система (2.7),(2.11),(2.13) относительно производных $x'_{\xi},\ x'_{\delta},\ t'_{\xi},\ t'_{\delta}$, имеет единственное решение

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \Psi_1(\xi,\delta), \quad \frac{\partial x}{\partial \delta} = \Psi_2(\xi,\delta), \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = \Psi_3(\xi,\delta), \quad \frac{\partial t}{\partial \delta} = \Psi_4(\xi,\delta). \tag{2.15}$$

Это новая система, где

$$\begin{aligned}&\Psi_1(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} (K[-FKU'_{\xi}(U'_{\delta}T'_{\xi} - T'_{\delta}U'_{\xi}) -\\ &(-TU'_{\delta}{Y'_{\xi}}^2 - TT'_{\delta}{U'_{\xi}}^2 +\\ &TU'_{\delta}T'_{\xi}U'_{\xi} - YY'_{\delta}T'_{\xi}U'_{\xi} +\\ &TY'_{\delta}Y'_{\xi}U'_{\xi} + YT'_{\delta}U'_{\xi}Y'_{\xi})])/P_1(\xi,\delta),\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}&\Psi_2(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} K[-FKU'_{\delta}[U'_{\delta}T'_{\xi} - T'_{\delta}U'_{\xi}] -\\ &TT'_{\xi}{U'_{\delta}}^2 + YY'_{\delta}T'_{\xi}U'_{\delta} +\\ &TT'_{\delta}U'_{\xi}U'_{\delta} - YT'_{\delta}Y'_{\xi}U'_{\delta} +\\ &TY'_{\delta}Y'_{\xi}U'_{\delta} - T{Y'_{\delta}}^2U'_{\xi}]/P_1(\xi,\delta),\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}&\Psi_3(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} K[-YY'_{\xi} + FKU'_{\xi} + TU'_{\xi}][U'_{\delta}Y'_{\xi} -\\ &Y'_{\delta}U'_{\xi}]/P_1(\xi,\delta),\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}&\Psi_4(\xi,\delta) \stackrel{\text{def}}{=} K[-YY'_{\delta} + FKU'_{\delta} + TU'_{\delta}][U'_{\delta}Y'_{\xi} -\\ &Y'_{\delta}U'_{\xi}]/P_1(\xi,\delta).\end{aligned} \tag{2.19}$$

Здесь обозначено

$$P_1(\xi,\delta) = FK[(TY'_{\xi} - T'_{\xi}Y)U'_{\delta} + (YT'_{\delta} - TY'_{\delta})U'_{\xi}] + TY[-U'_{\delta}T'_{\xi} + U'_{\xi}T'_{\delta}] + Y^2[Y'_{\delta}T'_{\xi} - T'_{\delta}Y'_{\xi}] + T^2[U'_{\delta}Y'_{\xi} - Y'_{\delta}U'_{\xi}], \quad (2.20)$$

и кроме того якобиан имеет вид

$$detJ = \frac{K(U)^2(Y'_{\delta}U'_{\xi} - U'_{\delta}Y'_{\xi})^2}{P_1(\xi,\delta)}. \quad (2.21)$$

Доказательство теоремы 2.1.1

Студент: **Объясните как решается система (2.7),(2.11),(2.13).**

Авторы:

Делим первое уравнение (2.7) на Y а второе на T и вычитаем два уравнения и получим линейное уравнение.
$\frac{K(U)}{Y}\left(U'_{\xi}t'_{\delta} - U'_{\delta}t'_{\xi}\right) - \frac{K(U)}{T}\left(-U'_{\xi}x'_{\delta} + U'_{\delta}x'_{\xi}\right) = 0.$

Умножим это выражение на множитель $-TY/K(U)$. Отбрасываем знаменатель и получим первую строку матрицы A_1.

Коэффициенты этого уравнения соответствуют первой строке матрицы $\mathbf{A_1}$. Второй строке матрицы соответствуют коэффициенты выражения (2.13), умноженные на множитель $-K^2(U)$.

Далее умножим уравнение (2.11) на множитель $detJ/(T + K(U)F(U))$ и получим
$detJ = K(U)\left(Y'_{\xi}t'_{\delta} - Y'_{\delta}t'_{\xi}\right)/(T + K(U)F(U)).$

Первое уравнение (2.7) разделим на Y, и оно примет вид
$detJ = K(U(\xi,\delta))\left(U'_{\xi}t'_{\delta} - U'_{\delta}t'_{\xi}\right)/Y.$

Вычитаем эти два выражение и, домножая на множитель $Y(T + K(U)F(U))$,

получаем коэффициенты третьей строки матрицы a_{33}, a_{34}. Здесь мы просто приводим дроби к общему знаменателю и рассматриваем только числитель, отбрасывая знаменатель. Вся эта описанная процедура соответствует известному вам методу Гаусса решения СЛАУ.

Таким образом, как мы показали двумя строчками выше, линейное уравнение вытекает, если вычесть из преобразованного уравнения (2.11) преобразованное первое уравнение (2.7). Эти два уравнения выбраны нами, потому что в них коэффициенты при производных $x^{'}_{\xi}$ и $x^{'}_{\delta}$ равны нулю, и матрица $\mathbf{A_1}$ имеет вид, близкий к треугольному. Далее мы можем выразить любые три производные, например, $x^{'}{}_{\xi},\ x^{'}{}_{\delta},\ t^{'}{}_{\xi},$ через одну из них $t^{'}{}_{\delta}$.

После подстановки в первое уравнение (2.7) получим линейное алгебраическое уравнение. Заметим, что эти производные можно подставить в любое уравнение системы (2.7),(2.11),(2.13) и также можно получить линейное уравнение или тождество. Таким образом, имеем СФЛАУ $\mathbf{A_1 X = b}$.

Теорема 2.1.2

Система (2.7),(2.11),(2.13) эквивалентна уравнению (2.2) и может быть записана как СФЛАУ $\mathbf{A_1 X = b}$. Эта система имеет вид

$$\begin{pmatrix} YU^{'}{}_{\delta} & -YU^{'}{}_{\xi} & TU^{'}{}_{\delta} & -TU^{'}{}_{\xi} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_{\xi} \\ x'_{\delta} \\ t'_{\xi} \\ t'_{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_4 \end{pmatrix}$$

.

Здесь вектор $\mathbf{X} = (\mathbf{x}^{'}{}_{\xi},\ \mathbf{x}^{'}{}_{\delta},\ \mathbf{t}^{'}{}_{\xi},\ \mathbf{t}^{'}{}_{\delta})^{\tau}$, а вектор $\mathbf{b} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{b_4})^{\tau}$, где

$b_4 = K[-YY'_\delta + FKU'_\delta + TU'_\delta][U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi]$. [6]

$a_{21} = -K(U)Y'_\delta + YK'(U)U'_\delta,\ a_{22} = K(U)Y'_\xi - YK'(U)U'_\xi,$

$a_{23} = -K(U)T'_\delta + TK'(U)U'_\delta,\ a_{24} = K(U)T'_\xi - TK'(U)U'_\xi,$

$a_{33} = -YY'_\delta + (F(U)K(U) + T)U'_\delta,$

$a_{34} = YY'_\xi - (F(U)K(U) + T)U'_\xi,$

$a_{44} = P_1(\xi,\delta)) = FK[(TY'_\xi - T'_\xi Y)U'_\delta + (YT'_\delta - TY'_\delta)U'_\xi] + TY[-U'_\delta T'_\xi + U'_\xi T'_\delta] + Y^2[Y'_\delta T'_\xi - T'_\delta Y'_\xi] + T^2[U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi].$

Собственные числа имеют вид

$\lambda_1 = -YY'_\delta + FKU'_\delta + TU'_\delta,$

$\lambda_2 = P_1 = Y^2[T'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta T'_\xi] - T[FK + T][U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi] + $
$+ Y[FK + T][U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi],$

$\lambda_3 = \frac{1}{2}[M - \sqrt{D}], \lambda_4 = \frac{1}{2}[M + \sqrt{D}],$

$M = KY'_\xi + Y(U'_\delta - K'(U)U'_\xi),$

$D = 4YK(Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi) + [KY'_\xi + Y(U'_\delta - K'(U)U'_\xi)]^2.$

Замечание 2.1.1

Собственные числа матрицы в данном случае — уже функции $\lambda_i(x,t),\ i = 1 \div 4$, но мы оставляем общепринятую терминологию. Собственное число λ_3 соответствует знаку «минус» перед квадратным корнем и играет специальную роль при анализе характера эволюции решений нелинейных уравнений. Подробнее об этом в параграфе 2.8.

Доказательство теоремы 2.1.2

На втором этапе рассмотрим новую систему уравнений первого порядка (2.14),(2.15) относительно функций $x = x(\xi,\delta), t = t(\xi,\delta)$. Хорошо известно, что условие разрешимости системы такого типа получается вычислением с помощью (2.14),(2.15) вторых смешанных производных функций $x = x(\xi,\delta)$ и $t = t(\xi,\delta)$ по аргументам ξ и δ и приравниванием этих выражений друг другу согласно равенствам

[6] Знак τ означает транспонирование.

$$x''_{\xi\delta} = x''_{\delta\xi}, \quad t''_{\xi\delta} = t''_{\delta\xi}. \tag{2.22}$$

Таким образом, формально возникают два условия разрешимости системы (2.14),(2.15).

Замечание 2.1.2

В случае двух независимых переменных x, t утверждение, аналогичное теореме 2.1.2, приведено в [11] для квазилинейных эллиптических и квазилинейных гиперболических уравнений с частными производными.

Замечание 2.1.3 **Многие авторы рассматривали уравнение (2.2) с дополнительными младшими членами содержащими первые производные по переменной x. Все вышеприведенные формулы данного параграфа верны и для функции $F(Z, x, t)$ в уравнении (2.2). Различие между случаями $F(Z)$ и $F(Z, x, t)$ возникает при вычислении условий разрешимости. Это объяснено в [11] в теореме 1.6.2.**

Студент: **А что будет если кто-то запишет эту систему по другому?**

Авторы: **Матрицу можно записать и по другому. Но исследование собственных чисел в параграфе 2.8 позволяет сделать вывод о том, что принципиально ничего не изменяется.**

Действительно, подставляя производные (2.5) и (2.14)-(2.15) в выражение для якобиана получим (2.21.) Подставляя (2.21) в уравнения (2.7),(2.11),(2.13) получим следующую теорему.

Теорема 2.1.3.

Система (2.7),(2.11),(2.13) эквивалентна уравнению (2.2) и может быть записана как СФЛАУ $\mathbf{A_2}\ \mathbf{X} = \tilde{\mathbf{b}}$:

$$\begin{pmatrix} -(Y/K)'_{\delta} & (Y/K)'_{\xi} & -(T/K)'_{\delta} & (T/K)'_{\xi} \\ U'_{\delta} & -U'_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -U'_{\delta} & U'_{\xi} \\ 0 & 0 & -Y'_{\delta} & Y'_{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_{\xi} \\ x'_{\delta} \\ t'_{\xi} \\ t'_{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

.

Здесь вектор $\mathbf{X} = (\mathbf{x}'_{\xi},\ \mathbf{x}'_{\delta},\ \mathbf{t}'_{\xi},\ \mathbf{t}'_{\delta})^{\tau}$, а вектор $\tilde{\mathbf{b}} = (\mathbf{0}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}, \mathbf{b_4})^{\tau}$, где[7]

$b_1 = 0, b_2 = TdetJ/K,\ b_3 = YdetJ/K,\ b_4 = detY(BK+T)/K.$ $detJ$ **определен выражением (2.21).**

Собственные числа имеют вид

$\tilde{\lambda_{1,2}} = [-U'_{\delta} + Y'_{\xi} \mp \sqrt{D_1}]/2,$

$D_1 = (U'_{\delta})^2 - 4Y'_{\delta}U'_{\xi} + 2U'_{\delta}Y'_{\xi} + (Y'_{\delta})^2,$

$\tilde{\lambda_{3,4}} = [M \mp \sqrt{D}]/(2K^2),$

$M = YK'_{U}U'_{\delta} - KY'_{\xi} - K^2U'_{\xi},$

$D_2 = [\left(-YK'_{U}U'_{\delta} + KY'_{\delta} + K^2U'_{\xi}\right)^2 - 4K^3\left(Y'_{\delta}U'_{\xi} - U'_{\delta}Y'_{\xi}\right)].$

□

Далее в параграфе 2.8.1 сравним результаты вычисления на конкретных решениях смешанных задач, которое (неявно зависят) учитывает начальное и граничное условие. Данные, полученные на нескольких матрицах $\mathbf{A_i}, \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}...$, на нескольких десятков решений дают похожие результаты. Это не может быть случайностью. Для матрицы $\mathbf{A_1}$ удалось доказать Лемму 2.8.1, которая делает вычисления собственных чисел для неё более привлекательными.

Один из важных результатов работ [11]— [14], [35] состоит в следующем.

Теорема 2.1.4

1) Имеет место тождество

[7]Знак τ означает транспонирование.

$$(\frac{\partial\Psi_1}{\partial\delta} - \frac{\partial\Psi_2}{\partial\xi})/T \;\equiv\; (\frac{\partial\Psi_3}{\partial\delta} - \frac{\partial\Psi_4}{\partial\xi})/Y,$$

где функции $\Psi_i, i = 1, \div, 4$ определены равенствами (2.16)-(2.19).

2) Два условия разрешимости (2.22) новой системы (2.14),(2.15) сводятся к одному соотношению

$$\frac{\partial}{\partial\delta}\Psi_3 - \frac{\partial}{\partial\xi}\Psi_4 = 0, \tag{2.23}$$

где Ψ_3, Ψ_4 в (2.23) заданы формулами (2.18),(2.19). □

Студент: Объясните в чем смысл теоремы 2.1.4.

Авторы:

Теорема 2.1.4 утверждает, что в двух равенствах (2.22) всегда имеется общий множитель, то есть вместо двух равенств надо всегда анализировать только одно. Это важно, и значительно упрощает процедуру построения решения.

Следствие 2.2

Если какая-то тройка функций U, Y, T удовлетворяет соотношению (2.23), то соответствующая новая линейная система (2.14),(2.15) разрешима. При условии, что якобиан (2.21) не равен нулю и бесконечности, решение уравнения (2.2) восстанавливается по формуле (2.4).

Доказательство теоремы 2.1.4 производится прямыми вычислениями производных выражений новой системы (2.14),(2.15). Если продифференцировать правые части выражений (2.14),(2.15), то следует тождество приведенное в пункте 1 теоремы 2.1.3, то есть левая часть совпадает с правой. Таким образом, вместо двух соотношений всегда имеем одно. Теоремы 2.1.1, 2.1.2 демонстрируют некоторое скрытое, ранее неизвестное, свойство квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными, которое позволяет конструировать новые решения уравнения (2.2) в «параметрической форме» или «неявном виде». Параметр появляется в силу произвола в выборе тройки функций, удовлетворяющей соотношению (2.23). О функциональном произволе в новой системе и его смысле подробнее написано в следующих параграфах. В конце параграфа 2.5 приведен такой пример решения классического полулинейного уравнения.

Здесь общая теория заканчивается, и мы переходим к примерам. Можно делать какие угодно предположения о виде функций Y, T.

2.2 Пример решения уравнения Зельдовича-Компанейца

Подберем пример, в котором небольшой объем вычислений. С осмысления этого примера в [37] и появилась теория изложенная в предыдущем параграфе. Соотношения (2.6) и (2.11) были проанализированы в [37], а годом позже дополнены равенством смешанных производных (2.13).

Пример 2.2

Применим метод ***нефиксированной, конструктивной замены переменных*** для построения решения квазилинейного параболического уравнения

$$Z_t - \left(kZ^{k-1}{Z'}_x\right)'_x = 0, \quad F = 0, \tag{2.24}$$

при $t = t_0 > 0$.

В работе [2a] было найдено его решение:

$$Z = (Cx^2/t)^{1/(k-1)}, \ C = \frac{1-k}{2k(k+1)}. \tag{2.25}$$

Покажем как это известное решение может быть построено методом нефиксированной конструктивной замены переменных. Таким образом, это является еще одной иллюстрацией метода, и в данном случае мы имеем довольно простые выкладки, ход которых могут проследить студенты. Рассмотрим соотношение (2.23). Используем имеющийся в нашем распоряжении произвол в выборе связи функций U, Y, T. Положим здесь, например,

$Y(\xi,\delta) = U'_{\xi}, \quad T(\xi,\delta) = U'_{\delta}.$

То есть предполагается, что функции Y, T являются компонентами вектора градиента $\operatorname{grad} U$.

Тогда соотношение (2.23) превращается в однородное уравнение на одну функцию U:

$$\frac{\partial}{\partial\delta}\left(\frac{(U^{k-1})U'{}_{\xi}[U''{}_{\xi\xi} - U'{}_{\delta}][U'{}_{\xi}U''{}_{\xi\delta} - U'{}_{\delta}U''{}_{\xi\xi}]}{P}\right) -$$
$$-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{(U^{k-1})[(U'{}_{\delta})^2 - U'{}_{\xi}U''{}_{\xi\delta}][U'{}_{\delta}U''{}_{\xi\xi} - U'{}_{\xi}U''{}_{\xi\delta}]}{P}\right) =$$
$$= 0, \tag{2.26}$$

где

$P(\xi,\delta) = (U'{}_{\delta})^3U''{}_{\xi\xi} + U'{}_{\xi}U''{}_{\xi\delta}[U''{}_{\xi\delta}U'{}_{\xi} - 2(U'{}_{\delta})^2] + U''{}_{\delta\delta}[U'{}_{\delta}(U'{}_{\xi})^2 - (U'{}_{\xi})^2U''{}_{\xi\xi}].$

Числитель уравнения (2.26) имеет степень однородности (3+k). Каждое слагаемое содержит функцию U или её производную четыре раза. А знаменатель можно искать в виде рядов из экспоненциальных функций или отношения таких рядов. Уравнение имеет степень однородности, равную четырем. Одно из простейших решений уравнения (2.26) имеет вид

$$U(\xi,\delta) = \exp\left(-\frac{\xi^2}{2(k+1)\delta}\right). \tag{2.27}$$

Вычислим теперь новую систему (2.14),(2.15). После вычисления правых частей по формулам (2.16)— (2.19) получим:

$$
\begin{aligned}
x'_\xi &= \frac{2kE_1[(k+1)\delta + (k-1)\xi^2]}{(k-1)\xi^2},\\
x'_\delta &= -\frac{kE_1[2(k+1)\delta + (k-1)\xi^2]}{(k-1)\delta\xi},\\
t'_\xi &= \frac{2k\delta E_1[2(k+1)\delta + (k-1)\xi^2]}{(k-1)\xi^3},\\
t'_\delta &= \frac{-kE_1[4(k+1)\delta + (k-1)\xi^2]}{(k-1)\xi^2}.
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

где обозначено $E_1 = \exp[-(k-1)\xi^2/(2(k+1)\delta)]$.

После интегрирования (2.28) имеем

$$
\begin{aligned}
x = x(\xi,\delta) &= x_o - \frac{2kE_1(k+1)\delta}{(k-1)\xi},\\
t = t(\xi,\delta) &= t_o - \frac{2kE_1(k+1)\delta^2}{(k-1)\xi^2},
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

где x_o, t_o— произвольные константы сдвига, которые без ограничения общности можно выбрать равными нулю.

Выразив ξ и δ через x и t из (2.29) и подставив в (2.27), придем к формуле (2.25). Наиболее просто это сделать, если вычислить x^2/t.

$x^2/t = -2k(k+1)E_1/(k-1) =$
$-2k(k+1)\exp(-(k-1)\xi^2/[2(k+1)\delta])/(k-1)$.

После возведения в степень получим

$\left[-(k-1)x^2/(2k(k+1)t)\right]^{1/(k-1)} = U(\xi,\delta)|_{\xi=\xi(x,t),\delta=\delta(x,t)} =$
$= \exp[-\xi^2/(2(k+1)\delta)]|_{\xi=\xi(x,t),\delta=\delta(x,t)}$.

Откуда следует (2.25). Якобиан преобразования имеет вид

$$
J = \frac{2k^2{E_1}^2(k+1)\delta}{(k-1)\xi^2}.
\tag{2.30}
$$

Действуя аналогично, можно получить известное решение; комбинируя его с константами, можно построить более сложное локализованное решение [2a],и [23], [32], стр. 286. Но вырождающиеся уравнения и свойственные им локализованные решения в данном пособии подробно не рассматриваются. Мы только слегка затрагиваем данную тематику для первого ознакомления студентов с ней.

Студент: Объясните, что называется локализованным решением.

Авторы: Пожалуйста.

Вы видите, что предметы вокруг вас и вы сами имеете границу, то есть это локализованные объекты. При математическом моделировании, в задачах связанных с квазилинейными уравнениями, также определяют решения, имеющие смысл внутри некоторой области, а вне области решение продолжается нулем. В граничной точке решение имеет ветвление, см. Рис. 7. То есть имеются две возможности продолжения решения, а надо выбрать одну из них. Само решение из работы Л.К.Мартинсона мы не приводим, а ограничимся только его графиком [32]. Видно, что со временем решение "*расплывается*", эволюциирует, притягивается к нулю. Про такие решения говорят, что они *стабилизируются.* То есть, с нашей точки зрения, "*предельное притягивающее*" решение здесь — константа равная нулю. Более сложные задачи такого класса изучены в работах
В. Н. Денисова и В. В. Жикова. Ссылки на эти работы можно найти в [42]. При исследовании таких задач в случае многих переменных используются методы осреднения [38]. Эти решения комментируются также в параграфе 2.8.

Обсудим далее некоторые возможные способы разре-

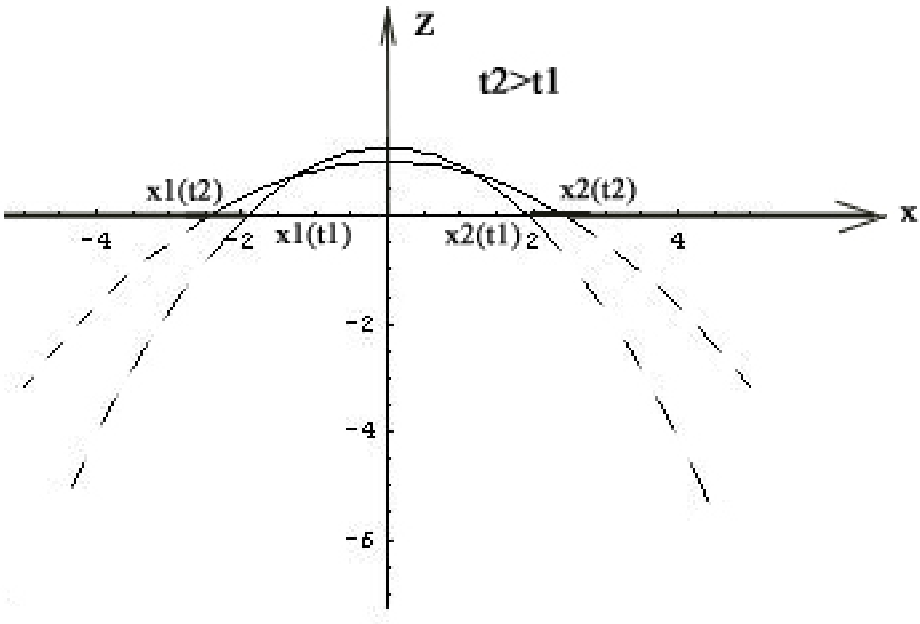

Рис. 7: **График локализованного решения из работы Л.К.Мартинсона [32], стр. 286**

шения общего условия разрешимости, а именно соотношения (2.23).

2.3 Анализ условий разрешимости и решения в частных случаях нелинейных параболических уравнений

Для уравнения

$$Z'_t - (K(Z)Z'_x)'_x + F(Z) = 0, \tag{2.31}$$

выписаны условия разрешимости (2.23).

Исследование уравнения (2.31) проводилось во второй половине двадцатого века А. А. Самарским, А. Н. Тихоновым,

В. А. Галактионовым, Л. К. Мартинсоном, Р. О. Кершнером

[4], [31]— [34] в связи с изучением процессов переноса. Уравнение (0.2) изучались в работах М.В.Колмогорова, И. Г. Петровского, И. С. Пискунова, Р. А. Фишера в связи с решением ряда биологических проблем [3], [15], [27], [29]. Уравнение (2.31) и близкие по форме к нему, и системы уравнений, включающие его, изучались Я. Б. Зельдовичем, А. С. Компанейцем [2],[29].

Все перечисленные уравнения изучались позже другими методами В. П. Масловым с соавторами, в частности [6], [8]— [11]. Более подробный список работ смотрите в [11], на сайтах www.aplsmath.ru, math-net. Мы ниже некоторые из этих уравнений называем именами классиков, хотя они рассматривали более широкий класс уравнений. Это сделано, чтобы как-то разделить уравнения с разными свойствами. В работе [11] предлагается один из множества способов удовлетворения равенства (2.23), который условно назван:

Способ A

Пусть $G(\xi, U)$ –функция двух переменных, а $w(U)$ и $v(U)$— функции одной переменной. Будем искать функции
$Y(\xi,\delta),\ T(\xi,\delta)$ в **(2.6)** в виде
$Y(\xi,\delta) = G(\xi,U), \quad T(\xi,\delta) = w(U) + v(U)G(\xi,U)$, где
$U = U(\xi,\delta)$.

Замечание 2.3.1.

Функциональный произвол, присутствующий в решениях, записанных в параметрической или неявной форме, можно сопоставить с функциональным произволом, который имеет место в записи решения задачи Коши. Это функция описывает произвольных гладкие начальные данные и входит в известную формулу для линейных параболических уравнениях.[4],[45]- [47]. Пример в котором есть функциональный произвол приведен в конце параграфа 2.5.

Теорема 2.3.1

Пусть $G(\xi, U)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция двух переменных, $w(U)$ и $v(U)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции одной переменной. Условие (2.23) представляет из себя произведение нескольких множителей — факторизуется[8]. Тогда соотношение (2.23) принимает вид

$$[K(U)v''(U) - K'(U)v'(U)]G^3 + [2K(U)vv'(U) - -K'(U)w'(U) + K(U)w''(U)]G^2 + [3F(U)v'(U)K^2 + 2wv'K + +vwK'(U)]G - K^2wF'(U) + w^2K'(U) + FK^2w'(U) = 0. \quad (2.32)$$

$\square$

Этому равенству можно попытаться удовлетворить, приравняв к нулю коэффициенты при степенях G.

Получим систему из четырех уравнений на две функции w, v.

$$[K(U)v''(U) - K'(U)v'(U)] = 0,$$
$$[2K(U)vv'(U) - K'(U)w'(U) + K(U)w''(U)] = 0,$$
$$[3F(U)v'(U)K^2 + 2wv'K + vwK'(U)] = 0,$$
$$K^2wF'(U) + w^2K'(U) + FK^2w'(U) = 0.$$

Оказывается, в ряде интересных случаев классических уравнений всем четырем последним уравнениям можно удовлетворить. При этом функция $G(\xi, U)$, а также функция U (!) остаются произвольными. Этот произвол является свободным "параметром".

[8]Это отдельный интересный факт, видимо связанный со сложными частичными групповыми симметриями.

2.4 Вывод новой системы для уравнений ФХНС, Зельдовича и КППФ

Пример 2а

Пусть в (2.31) $K(Z) = 1$, а функция $F(Z)$ имеет вид

$$F(Z) = \frac{2\lambda^2 Z^3}{9} \pm (a_1 - Z)(a_o - Z). \tag{2.33}$$

Тогда уравнение (2.31) является возмущенным уравнением Колмогорова - Петровского - Пискунова - Фишера.

Если выбрать
$v(U) = \frac{\pm 3}{2\lambda} + \lambda U, \quad w(U) = -3F(U)/2$ **, где** $\lambda-$**константа, то (2.32) удовлетворяется.**

Пример 2б.

Пусть в (2.31) $K(Z) = 1$, а

$$F(Z) = Z(a_1 - Z)(a_o - Z). \tag{2.34}$$

Уравнение (2.31) в этом случае превращается в уравнение Фитц-Хью-Нагумо-Семенова (ФХНС). Если $a_o = 0$, то (2.31) превращается в уравнение Зельдовича (2.40). Если выбрать
$v(U) = \frac{3U}{\sqrt{2}} - \frac{a_o + a_1}{\sqrt{2}}, \quad w(U) = -3F(U)/2,$ **то соотношение (2.32) удовлетворяется.**

В обоих примерах 2а, 2б правые части новой системы (2.14),(2.15) вычислены по формулам (2.16)-(2.19), которые окончательно имеют вид:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \tag{2.35}$$

$$((w(U) + v(U)G)G'_{\xi} -$$
$$= (F(U)v + vw + v^2 G + G^2 v' + Gw' - (w + vG)G'_{\xi})U'_{\xi})/P_1,$$

$$\frac{\partial x}{\partial \delta} =$$
$$= ((Gv+w)G'_{\delta} - [Fv + v^2G + vw + G^2v' + Gw' -$$
$$-(w+vG)G'_U]U'_{\delta})/P_1, \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = (-GG'_{\xi} + (F + Gv + w - GG'_U)U'_{\xi})/P_1, \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \delta} = (F + w + Gv - GG'_U)U'_{\delta}/P_1. \tag{2.38}$$

где $P_1 = Fw + w^2 + vwG - G^2(Gv' + w')$.

Якобиан $detJ = \frac{G'_{\xi}U'_{\delta}}{P_1}$ не обращается в нуль и бесконечность. Выбирая функции v, w, как указано в примерах 2а, 2б, при этом функции G и U остаются пока произвольными, мы получим разрешимую в квадратурах систему (2.35)— (2.38).

Фактически точное решение уравнения с частными производными уже построено, т.к. условия разрешимости новой системы (2.35)-(2.38) выполняются тождественно. А именно равенства смешанных производных

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \delta} = \frac{\partial^2 x}{\partial \delta \partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial \xi \partial \delta} = \frac{\partial^2 t}{\partial \delta \partial \xi} \tag{2.39}$$

выполняется уже без всяких условий, тождественно. Однако в приложениях, обычно, требуются более конкретные формулы.

Студент: Зачем нужно изучать такие системы? Какие преимущества даёт изучение системы (2.35)-(2.38)?

Авторы:

В то время как исходное уравнение было изучено разнообразными методами, данная система (2.35)-(2.38) является новой и позволяет найти не только старые, но и новые формулы решения, которые ранее не были известны. С её помощью можно построить сложные решения, которые очень трудно или невозможно построить классическим групповыми методами. Смотри примеры в параграфе 2.5 и далее.

Эти решения, по мнению профессора, д.ф.-м.н. Е. М. Воробьева, соответствуют «*частичным симметриям*», изучению которых он посвятил свои исследования [20], [21]. Эти сложные понятия выходят за рамки нашего пособия. Кроме того, такой подход дает возможность вычислить собственные числа сопутствующей матрицы (которые, на самом деле, являются функциями независимых переменных) нелинейного уравнения, это описано в параграфе 2.1. А это позволяет найти новые критерии устойчивости решений относительно «*предельного притягивающего* » решения и сделать важные выводы. Смотри параграф 2.8. В будущем, интересно было-бы установить связь собственных чисел построенных матриц с собственными числами соответствующих операторов.

2.5 Решение полулинейного уравнения

Полулинейное уравнение имеет вид

$$Z'_t - Z''_{xx} - Z^2(1-Z) = 0, \tag{2.40}$$

где $K(Z) = 1,\ F(Z) = -Z^2(1-Z)$.

Детализируем случай примера 2б и выпишем более конкретные формулы. Из Теоремы 2.3.1 и примера 2б следует, что в случае уравнения Зельдовича надо положить $a_o = 0,\ a_1 = 1$. Известно, что такое уравнение изучалось в [3] другими методами.

Тогда функции $v(U),\ w(U)$ имеют вид
$v(U) = \frac{3U}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad w(U) = -3F(U)/2$. Так как мы хотим

избежать здесь сложных выкладок, то положим дополнительно

$G(\xi, U) = \xi, \quad G'_{\xi} = 1, \quad G'_{U} = 0.$

Таким образом, для того чтобы получить новое точное решение и избежать сложных выражений мы жертвуем здесь функциональным произволом, см. замечание 2.3.1.

Первый интеграл данной системы имеет вид

$$C_3 + t(\xi, \delta) = \frac{2(1-U)}{3(-U+U^2-\sqrt{2}\xi)} - \frac{2}{3}\ln(|-U+U^2-\sqrt{2}\xi|) + \frac{2}{3}\ln(|U^2-\sqrt{2}\xi|). \qquad (2.41)$$

Остается проанализировать первую пару уравнений (2.35), (2.36) для функции $x(\xi, \delta)$, которая имеет вид

$$x'_{\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3U}{\sqrt{2}} + \frac{3(U-1)U^2}{2G(\xi,U)} + \frac{U'_{\xi}}{G(\xi,U)},$$
$$x'_{\delta} = \frac{U'_{\delta}}{G(\xi,U)}. \qquad (2.42)$$

Тогда второй интеграл легко берется имеет вид
$x(\xi, \delta) = \frac{(1-U)\sqrt{2}}{3(U-U^2+\sqrt{2}\xi)} + \frac{2\sqrt{2}}{3}[\ln(|-U+U^2-\sqrt{2}\xi|) - \ln(|U^2-\sqrt{2}\xi|)].$

Таким образом, построено точное решение в параметрической форме, которое описывается двумя интегралами (2.41), (2.42).

В данном случае есть возможность вернуться в исходные переменные x, t. Константу сдвига C_3 положим равной нулю; ее всегда можно добавить позже. Приравнивая в двух интегралах коэффициенты при слагаемом без логарифмов и складывая их, получим промежуточное выражение

$-x/\sqrt{2} + t/2 = \ln[(U^2 - \sqrt{2}\xi)/(U^2 - U - \sqrt{2}\xi)].$

Переходим к показательным функциям и получаем выражение

$\exp(-x/\sqrt{2}+t/2)=(U^2-\sqrt{2}\xi)/(U^2-U-\sqrt{2}\xi)$.

Отсюда найдем выражение для

$\xi=[U(U-1)\exp(t/2)-U^2\exp(x/\sqrt{2})]/[\sqrt{2}(\exp(t/2)-\exp(x/\sqrt{2}))]$.

После подстановки в интегралы (2.41), (2.42) получим выражение

$x+t\sqrt{2}+\sqrt{2}[\exp(t/2-x/\sqrt{2})-1](U-1)/U=0$.

Выразим из этого соотношения функцию U и получим следующую теорему

Теорема 2.5.1

Функция $Z(x,t)=U(\xi,\delta)|_{\xi=\xi(x,t),\delta=\delta(x,t)}$ ***является решением уравнения*** (2.40) ***и имеет вид***

$$Z(x,t)=\left(1-\exp(x/\sqrt{2}-t/2)\right)/R_o,$$
$$R_o=\left(1+\exp(x/\sqrt{2}-t/2)(-2+2t+x\sqrt{2})/2\right). \quad (2.43)$$

□

Графики, построенные по формуле (2.43), приведены на рисунке 8. Видно, что решение задачи Коши со специальными начальными данными претерпевает эволюцию и приближается к «предельному притягивающему » решению — волне с предельным профилем. Подробнее об этом смотри в параграфе 2.8.

Всеми предыдущими выкладками теорема 2.5.1 доказана.

Подставим построенное решение в уравнение (2.40). Уравнение удовлетворяется.

Если не делать упрощающих предположений, сформулированных в начале параграфа, то решение имеет функциональный произвол и остается записанным в параметрической форме. Функциональный произвол, присутствующий в решениях, записанных в параметрической или неявной форме, можно сопоставить с функциональным произволом, который имеет место в записи решения задачи Коши. Это функция описывает произвольных гладкие начальные данные и входит в известную формулу для линейных параболических уравнениях.[4],[45]-[47]. Пример в котором есть функциональный произвол приведен в конце параграфа 2.5.

Трудности заключаются в получении простых формул при интегрировании системы (2.35)—(2.38).

Пример М.В.Карасева 2.5.1

Профессор М.В.Карасев предложил простую трактовку предложенного решения. Действительно, после того как новое решение построено и идея решения очевидна можно ввести другие переменные, то есть найти другой путь построения этих формул.

Действительно, положим $t = \xi,\ x(\xi, \delta) = X(t, s(x, t))$, $\delta = s(x, t),\ G = r(t, U(t, s(x, t)))$.

Цель данного примера — продемонстрировать другой путь построения нового типа решения (которое уже построено в теореме 2.5.1), который ранее был неизвестен для уравнений рассматриваемого класса. Однако в этих предположениях также принята «жертва» функциональным произволом, который имел место в новой системе (2.35)—(2.38) ради упрощения выкладок.

Рассмотрим полулинейное параболическое уравнение Зельдовича (2.40). Будем искать решение в виде (сделаем замену переменных)

$$Z(x, t) = U(t, s(x, t)). \tag{2.44}$$

Пусть при $t \geq 0,\ 0 \leq U \leq 1$ произвольная дважды дифференцируемая функция $r(t, U) = r(t, U(t, s(x, t)))$ определена функциональным уравнением

$$C_1 + t = \frac{2\sqrt{2}(1-U)}{3\sqrt{2}U(U-1)-6r} - \frac{2}{3}\ln(|\sqrt{2}U(U-1)-2r|) +$$
$$\frac{2}{3}\ln(|\sqrt{2}U^2-2r|). \qquad (2.45)$$

Положим $x = X(t, s(x,t))$. Функция $X(t,s)$ удовлетворяет системе первого порядка

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3U}{\sqrt{2}} + \frac{3U^2(U-1)}{2r} + \frac{{U'}_t}{r}, \quad \frac{\partial X}{\partial s} = \frac{{U'}_s}{r}. \qquad (2.46)$$

Здесь в правых частях уравнений записана функция $U = U(t,s)$.

Решение приведено в теореме 2.5.1.

Проведем еще одно доказательство теоремы* 2.5.1 *для примера М. В. Карасева.[9]

Сделаем проверку[10]. Подставим построенное решение в уравнение (2.40). Уравнение удовлетворяется.

Покажем это.

Продифференцируем выражение $x = X(t, s(x,t))$ по переменным x, t. Получим выражения

$X'_t + s'_t(x,t)X'_s = 0, \quad 1 = s'_x(x,t)X'_s$. Отсюда найдем производные

$$\frac{\partial s(x,t)}{\partial x} = \left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)^{-1}, \quad \frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\partial X}{\partial t}/\frac{\partial X}{\partial s},$$
$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial^2 X}{\partial s^2}/\left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)^2. \qquad (2.47)$$

Функция $X(t,s)$ удовлетворяет системе (2.46). Выражение для второй частной производной следует из второго выражения (2.46) и имеет вид

[9]В данном случае приводятся два доказательства одной теоремы.
[10]приводим максимально подробные, почти построчные выкладки для возможности легкой проверки.

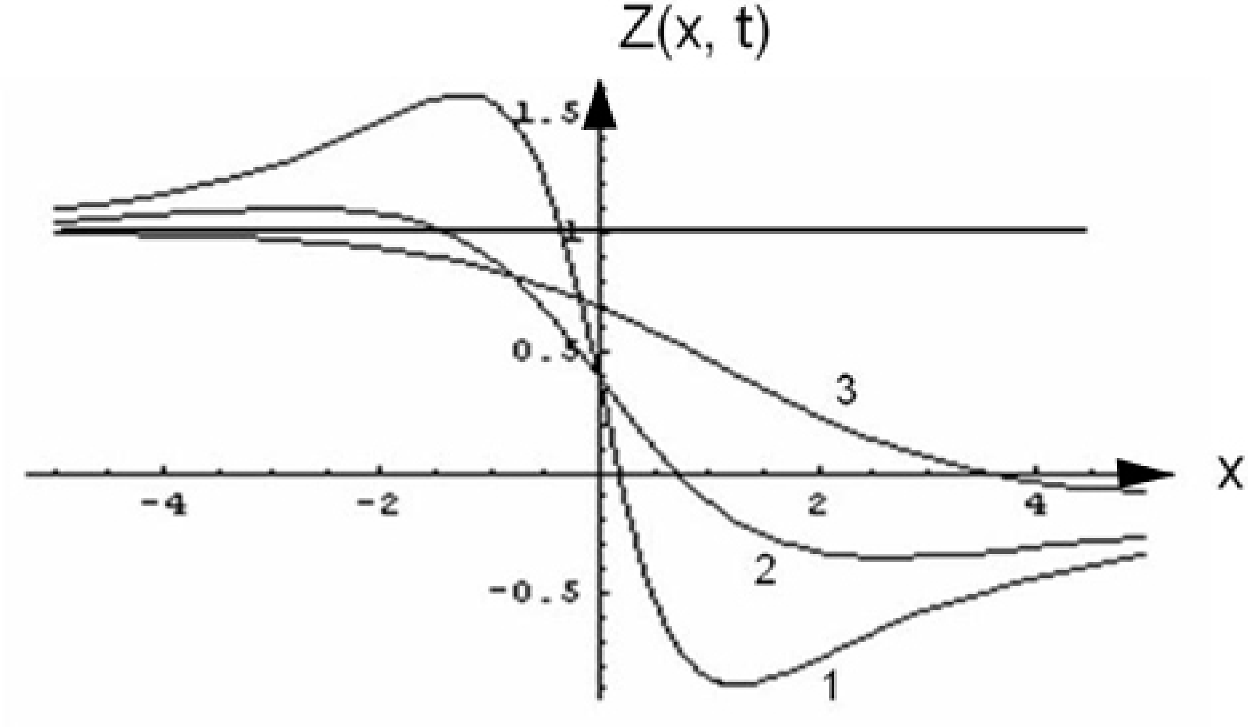

Рис. 8: **Начальные условия построенного решения при $t \longrightarrow 0$ имеют особенность. Данное решение не является самоподобным. Решение эволюционирует к предельной волне, «предельному притягивающему » решению. Кривые 1,2,3 отвечают значениям времени $t = 0.25,\ 1,\ 5$ соответственно.**

$X''_{ss} = (rU''_{ss} - r'_U(U'_s)^2)/r^2.$

Легко видеть, что соотношение (2.45) является интегралом системы уравнений с частными производными первого порядка для функции $r(t, U)$,

$$r'_U = [(1-U)U^2 + \sqrt{2}(3U-1)r]/(2r),$$
$$r'_t = 3[\sqrt{2}U(U-1) - 2r]^2(2r - \sqrt{2}U^2)/(8\sqrt{2}r). \qquad (2.48)$$

Интересно здесь привести следующее из (2.48) квазилинейное параболическое уравнение $r'_t + 3r^2(\sqrt{2} - r''_{UU}) = 0$. После подстановки в уравнение (2.40) функции (2.44) и её производных

$Z'_x = U'_s s'_x, \quad Z'_t = U'_s s'_t + U'_t, \quad Z''_{xx} = U''_{ss}(s'_x)^2 + U'_s s''_{xx}$

и исключения производных (2.47) получим соотношение

$$(U-1)U^2 - \frac{U''_{ss}}{(X'_s)^2} + \frac{U'_s X''_{ss}}{(X'_s)^3} + U'_t - \frac{U'_s X'_t}{X'_s} = 0. \qquad (2.49)$$

Далее подставляем в (2.49) производные (2.46) и вторую производную X''_{ss} получим выражение

$$(1-U)U^2 + r(-\sqrt{2} + 3\sqrt{2}U - 2r'_U) = 0. \qquad (2.50)$$

Далее подставляем первое соотношение из (2.48) и убеждаемся в том, что уравнение (2.40) удовлетворяется тождественно.

Замечание 2.5.1

Асимптотики построенного решения отличаются то построенных в главе 1 и в [50].

О задаче Коши для уравнения (2.40)

Приведем пример решения задачи Коши с начальным условием зависящим от двух произвольных констант. В данном случае решение записано в неявной форме и содержит две дважды непрерывно дифференцируемые функции $C_1(\xi), u_o(\xi)$. Справедлива теорема.

Теорема 2.5.2

Функция $Z(x,t) = U(\xi,\delta)|_{\xi=x,\delta=\delta(x,t)}$ ***является решением уравнения*** **(2.40)** ***и описывается соотношениями***

$x = \xi,$

$t(\xi,\delta) = C_1(\xi) + 2\int_{u_o(\xi)}^{U(\xi,\delta)} \left(3s^2(1-s) + \sqrt{2}(3s-1)G(\xi,s)\right)^{-1} ds,$

а функция $G(\xi,U)$ ***определена нелинейным алгебраическим уравнением***

$1/(2U) + 3\xi/(2\sqrt{2}) + 3U(U-1)/(2(U^2 - U - \sqrt{2}\ G(\xi,U))) +$
$+ (1-3U)G(\xi,U)/(\sqrt{2}\ U(U^2 - U - \sqrt{2}\ G(\xi,U))) - \ln 2 +$
$+ \ln|U^2 - \sqrt{2}\ G(\xi,U)| - \ln|U - U^2 - \sqrt{2}\ G(\xi,U)| = 0.$

$\square$

Комментарии к доказательству

Подставим в систему (2.35) — (2.38) функции $v(U),\ w(U)$ **вычисленные в *примере 2б* и положим** $a_o = 0,\ a_1 = 1$. **Заметим, что есть возможность выписать формулы при произвольных** $a_o,\ a_1$, **однако они значительно сложнее. Положим** $x = \xi$. **Тогда из уравнения (2.36) следует уравнение**

$G'_U(\xi,U) = [2U^2(1-4U+3U^2) - 2G(\xi,U) - 6\sqrt{2}\ G(\xi,U)^2]/[6(U-1)U^2 + 2\sqrt{2}\ (1-3U)\ G(\xi,U)]$ **и**

интеграл приведенный в теореме 2.5.2.

Производная функции $G(\xi,U)$ **по переменной** ξ **имеет вид**

$G'_\xi(\xi,U) = 3[U(U-1) - \sqrt{2}\ G(\xi,U)]^2(\sqrt{2}\ G(\xi,U) - U^2]/[6(U-1)U^2 + 2\sqrt{2}\ (1-3U)\ G(\xi,U)].$

Функции $C_1(\xi), u_o(\xi)$ **могут моделировать специальное начальное условие задачи Коши для уравнения (2.40). Вернемся в исходные переменные. Положим для простоты** $C_1(\xi) = 0,\ \xi = x.$

Справедлива теорема.

Теорема 2.5.3

Пусть специальное начальное условие для урав-

нения (2.40) имеет вид $Z(x,0) = u_o(x)$, ***где*** $u_o(x)$ ***дважды непрерывно дифференцируемая функция удовлетворяющая некоторому ОДУ и поэтому зависящая от двух произвольных констант. Тогда решение задачи Коши со специальными начальными данными для уравнения (2.40) задается формулой***

$$t = 2\int_{u_o(x)}^{Z(x,t)} (3s^2(1-s) + \sqrt{2}\ (3s-1)\ G(x,s))^{-1} ds.$$

Функция $G(x,s)$ ***определяется нелинейным алгебраическим уравнением приведенным в теореме 2.5.2, где*** $\xi = x$. □

Численное исследование этого уравнения проводится просто. Выразим из него переменную $x = \xi = \Phi(U,G)$. Зададим область изменения переменной $U \in [0,1]$. Будем задавать значения переменных U, G с некоторым шагом. Выясняется, что значения переменной G при которых нелинейное алгебраическое уравнение имеет решения, существуют. Например,

при значениях $U = 0.05$ — G принимает значения на отрезке $G \in [-0.04,\ 0.02]$;

при значениях $U = 0.5$ — G принимает значения на отрезке $G \in [-0.16,\ 0.16]$;

при значениях $U = 0.9$ — G принимает значения на отрезке $G \in [-0.06,\ 0.6]$. Далее построенный график надо перевернуть, как нам удобно.

2.6 Модифицированное уравнение Колмогорова - - Петровского - Пискунова - Фишера

Приведем содержание данного параграфа

1.1 Введение.

1.2 Пример решения для уравнения КППФ.

1.1 *Введение. Несколько важных замечаний*

Замену переменных использовали классики математики для классификации линейных уравнений в частных производных (см., например, [4]), однако они не использовали таких дифференциальных связей (2.6), как в работах [11]— [14], [35]. Рассмотрим уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными и двумя дифференциальными связями. Тогда одно дифференциальное уравнение с частными производными заменяется системой четырех уравнений первого порядка с частными производными. В [11]— [14], [35] обнаружено, что эта внешне сильно нелинейная система является, на самом деле, системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$\mathbf{A_1X} = \mathbf{b}$ (!) и она имеет единственное решение.(См. параграф 2.1.)
Предлагаемый алгоритм построения точных решений методом нефиксированной конструктивной замены переменных основан на этом свойстве.

Условие разрешимости (2.23) для случая, рассмотренного в данном параграфе удовлетворены в [11] приведены в параграфе 2.3, 2.4.

Излагаемый подход, как показывает опыт вычислений, позволяет строить новые точные решения дифференциальных уравнений с частными производными.[11]

1.2 Пример решения для модифицированного уравнения КППФ.

Рассмотрим краевую задачу для модифицированного полулинейного уравнение Колмогорова - Петровского -

[11]Априори предполагается, что решение существует. По мнению профессора, д.ф-м.н. Е. М. Воробьева, построенные в данной работе сложные решения отвечают частичным симметриям, сложным группам преобразований [20], [21]. Более полный список его работ приведен в [11].

Пискунова - Фишера (КППФ) [3]

$$Z'_t - Z''_{xx} + F(Z) = 0,\ Z(-\infty, t) = a_0,\ Z(\infty, t) \to a_1, \quad (2.51)$$

где

$F(Z) = \frac{2Z^3\lambda^2}{9} \pm (a_0 - Z)(a_1 - Z)$. В [11] проведена модификация уравнения КППФ, а именно, в уравнение введено кубическое слагаемое, которое содержит малый параметр $\lambda < 1$.

Приведенный ниже алгоритм работает в предположении, что все используемые функции имеют необходимую гладкость. В приложениях интересно решение $Z \in [a_0, a_1]$. То есть заданы граничные условия

$Z(a_0, t) = 0, Z(a_1, t) = 1.$

Чтобы формулы были проще, рассмотрим важный частный случай $a_0 = 0,\ a_1 = 1.$ [12]

Итак, дано уравнение в частных производных (2.51). После ряда предположений, приведенных в параграфе 2.1 и вычисления всех этапов алгоритма получим систему нелинейных алгебраических уравнений на две неизвестные функции $Z(x,t),\ \xi(x,t)$. Из условия разрешимости (2.23) следует точное решение исходного уравнения в неявной или параметрической форме.

Опишем построенное точное решение в независимых переменных x, t. Это решение — итог всех рассуждений и построений данного параграфа.

[12] В. И. Арнольд в [1] пишет о важности и трудности построения примеров опираясь на высказывания поэта А. С. Пушкина и мнения великих математиков. Правильный совет сочинителям математических текстов дал А. С .Пушкин в « Бове» в 1814 году: « Что примера лучше действует?». В. И. Арнольд пишет: « К сожалению, этому призыву сейчас мало кто следует, и писания современных математиков обычно неисправимо абстрактны и вовсе лишены примеров. Писание математических текстов-сложное искусство, и даже лучшие из математиков не всегда оказываются на высоте...», стр.71.

Теорема 2.6.1.

Пусть дана функция

$F(Z(x,t)) = \frac{2Z(x,t)^3\lambda^2}{9} - Z(x,t)(1-Z(x,t))$, **в (2.51), и даны два нелинейных алгебраических уравнения на функции** $Z(x,t), \xi(x,t)$

$$t = \frac{-2}{3}\ln|-9+9Z(x,t)+2Z(x,t)^2\lambda^2 - 6\lambda\xi(x,t)| -$$
$$\frac{-k+3}{3k}\ln|-3Z(x,t)k^2 + k(9Z(x,t)+$$
$$4Z(x,t)^2\lambda^2 - 12\lambda\xi(x,t))| +$$
$$+\frac{3+k}{3k}\ln|3Z(x,t)k^2 + k(9Z(x,t)+4Z(x,t)^2\lambda^2 - 12\lambda\xi(x,t))|,$$
$$x = \frac{1}{\lambda}\ln|-9+9Z(x,t)+2Z(x,t)^2\lambda^2 - 6\lambda\xi(x,t)| +$$
$$\frac{-k+3+4\lambda^2}{2\lambda k}\ln|-3Z(x,t)k^2 + k(9Z(x,t)+4Z(x,t)^2\lambda^2 -$$
$$12\lambda\xi(x,t))| + \frac{2\lambda(1-k)}{9+8\lambda^2-3k}\ln|3Z(x,t)k^2 + k(9Z(x,t)+$$
$$4Z(x,t)^2\lambda^2 - 12\lambda\xi(x,t))|. \qquad (2.52)$$

Тогда точное решение уравнения (2.51)имеет вид:

$$Z(x,t) =$$
$$[-D_1 \pm [D_1^2 + 6E_1D_o(-4k\lambda\xi(x,t)E_2/E_1 + 3 + 2\lambda\xi(x,t))]^{1/2}]/D_o, \qquad (2.53)$$

где

$D_1 = 9E_1 + 3(k-3)kE_2, \quad D_o = 4\lambda^2(E_1 - 2kE_2)$,
$k = \sqrt{9+8\lambda^2}$

и $E_1 = \exp[(3kt + 4x\lambda)/(2(k-3))]$,

$E_2 = \exp[(3t/(2(k-3))]$. **Формула для функции** $Z(x,t)$ **выражена из двух нелинейных алгебраических уравнений (2.52).**

□

Система (2.52) содержит степенные и логарифмические функции, поэтому, несмотря на то что решение существует, выписать его явно в элементарных функциях не представляется возможным. Для тех, кто забыл свойства логарифмов и операцию «потенцирование» приведем соотношение, которое следует из системы (2.52):

$E_1(-9 + 9Z(x,t) + 2Z^2\lambda^2 - 6\lambda\xi(x,t)) + E_2[3Zk^2 - k(9Z(x,t) + 4Z^2\lambda^2 - 12\lambda\xi(x,t))] = 0.$

Отсюда следует (2.53) или выражение для $\xi(x,t)$ **через** $Z(x,t), t, x.$

Заметим, что функция (2.53) является отношением радикалов от экспоненциальных функций.

Объяснение; как построено решение в примере. Общий алгоритм построения решений.

Теорема 2.6.2.

Пусть функция $U(\xi,\delta) \in C^2[R^1 \bigotimes R^1]$ **определена равенством**

$$Z(x,t)|_{x=x(\xi,\ \delta),t=t(\xi,\delta)} = U(\xi,\delta), \tag{2.54}$$

где якобиан замены переменных

$detJ = x'_\xi t'_\delta - t'_\xi x'_\delta \neq 0$ **не равен нулю и бесконечности.**

Пусть введены обозначения (установлены дифференциальные связи)

$$\frac{\partial Z}{\partial x}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = Y(\xi,\delta),$$
$$\frac{\partial Z}{\partial t}|_{x=x(\xi,\ \delta),\ t=t(\xi,\ \delta)} = T(\xi,\delta). \tag{2.55}$$

Пусть функции $Y(\xi,\delta),\ T(\xi,\delta) \in C^2[R^1 \bigotimes R^1]$ **имеют вид** $Y = G(\xi,U), \quad T = w(U) + v(U)G(\xi,U)$, **где** $\quad v(U) = \pm\frac{3U}{2\lambda} + U\lambda,$ $w(U) = -3F(U)/2$, **и** $\quad F(Z) = \frac{2Z^3\lambda^2}{9} - Z(1-Z).$

Тогда точное решение уравнения (2.51) имеет вид

$$Z(x,t) = U(\xi,\delta)|_{\xi=\xi(x,t),\ \delta=\delta(x,t)} =$$
$$= [-D_1 \pm [D_1^2 + D_2]^{1/2}]/(4\lambda^2(E_1 - 2k\ E_2))|_{\xi=\xi(x,t)}, \tag{2.56}$$

где $D_1 = 9E_1 + 3\eta k E_2$,

$D_2 = 24(E_1 - 2k\ E_2)\lambda^2(-4k\lambda\xi E_2 + E_1(3 + 2\lambda\xi))$,

$k = \sqrt{9 + 8\lambda^2}$ и $\eta = k - 3,\ E_1 = \exp[(3kt + 4x\lambda)/(2\eta)]$,

$E_2 = \exp[(3t/(2\eta)]$, а замена переменных $x = x(\xi, \delta),\ t = t(\xi, \delta)$ определяется соотношениями

$$t(\xi,\delta) = \frac{-2}{3}\ln|-9 + 9U + 2U^2\lambda^2 - 6\lambda\xi| -$$
$$\frac{-k+3}{3k}\ln|-3Uk^2 + k(9U + 4U^2\lambda^2 - 12\lambda\xi)| +$$
$$\frac{3+k}{3k}\ln|3Uk^2 + k(9U + 4U^2\lambda^2 - 12\lambda\xi)|,$$
$$x(\xi,\delta) = \frac{1}{\lambda}\ln|-9 + 9U + 2U^2\lambda^2 - 6\lambda\xi| +$$
$$\frac{-k+3+4\lambda^2}{2\lambda k}\ln|-3Uk^2 + k(9U + 4U^2\lambda^2 - 12\lambda\xi)| +$$
$$\frac{2\lambda(1-k)}{9+8\lambda^2-3k}\ln|3Uk^2 + k(9U + 4U^2\lambda^2 - 12\lambda\xi)|, \qquad (2.57)$$

где $U = U(\xi, \delta.)$

$\square$

Доказательство теоремы 2.6.2

Замечание 2.6.1

В теоремах 2.6.1 и 2.6.2 приведено фактически одно и то же утверждение. Это сделано для того, чтобы показать этапы обратной замены переменной. Находятся студенты, которые забыли, как надо делать обратную замену переменных. То есть сначала результаты записаны в новых переменных ξ, δ— в теореме 2.6.2. Затем возвращаемся к исходным переменным x, t— в теореме 2.6.1.

В случае произвольных значений $a_o,\ a_1$ функции источника F для построения решения необходимо разложить знаменатель P_1 на три квадратичных сомножителя. В этом состоит основная техническая трудность. Это можно сделать. Фактически все сводится к решению двух

алгебраических кубических уравнений. Решения их громоздки и не могут быть приведены в данном параграфе. Поэтому в теоремах 2.6.1, 2.6.2 мы ограничились более простым случаем. При конкретных значениях $a_o, \ a_1$ **эта процедура упрощается. Интегрировать надо вторые уравнения в (2.35)—(2.38).**

Положим здесь

$a_o = 0, \ a_1 = 1$ **и положим** $G(\xi, U) = \xi$. **Мы хотим избежать сложных выкладок и построить обозримые, простые формулы пример. Можно задавать различный вид этой функции**[13] **и получать другие решения, соответствующие другим начальным условиям.**

Тогда система (2.35)—(2.38) имеет вид

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = [3[-6U\lambda^2(-9+9U+2U^2\lambda^2)+18\lambda(3+2U\lambda^2)\xi + Q_1U'_{\xi}]]/(\lambda P_2),$$
$$\frac{\partial x}{\partial \delta} = [3Q_1U'_{\delta}]/(\lambda P_2), \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \xi} &= -6[18\lambda\xi + Q_2U'_{\xi}]/P_2, \\ \frac{\partial t}{\partial \delta} &= -3Q_2U'_{\delta}/P_2, \end{aligned} \tag{2.59}$$

где $Q_1 = -27U\lambda + 27U^2\lambda - 18U^2\lambda^3 + 24U^3\lambda^3 + 4U^4\lambda^5 - 81\xi - 54\lambda^2\xi - 36\lambda^3\xi^2$,

$Q_2 = -9U\lambda + 9U^2\lambda + 2U^3\lambda^3 - 27\xi - 18U\lambda^2\xi$,

[13]**например** $G = U + m\xi, G = Um\xi, m = const$ **и т.д.**

$$P_2 = (-9 + 9U + 2U^2\lambda^2 - 6\lambda\xi)(-9U^2\lambda + 9U^3\lambda +$$
$$2U^4\lambda^3 - 27U\xi - 12U^2\lambda^2\xi + 18\lambda\xi^2) = (-9 + 9U + 2U^2\lambda^2 -$$
$$6\lambda\xi) * (3Uk^2 + k(9U + 4U^2 - 12\lambda\xi^2))(-3Uk^2 +$$
$$k(9U + 4U^2 - 12\lambda\xi^2))/(8\lambda k^2),$$
$$k = \sqrt{9 + 8\lambda^2}.$$

Знаменатель P_2 содержит три квадратичных сомножителя. Все интегралы во втором и четвертом уравнении (2.58),(2.59) вычислены явно методом разложения на простые дроби (метод неопределенных коэффициентов). Интегрировать надо второе и четвертое уравнения по переменной δ, что сводится к интегрированию по переменной U. Затем полученные интегралы (2.57) подставляется в первое и третье уравнение (2.58),(2.59).

Исключим один из логарифмов в (2.57) и перейдем от логарифмических функций к показательным получим

$$\exp[\frac{4x\lambda + 3tk}{-6 + 2k}](-9 + 9U + 2U^2\ \lambda^2 - 6\lambda\xi) +$$
$$+ \exp[\frac{3\ t}{-6 + 2\ k}][3U\ k^2 - k(9U + 4U^2\ \lambda^2 - 12\lambda\xi)] = 0.$$

Выражая отсюда U, получим (2.56). Далее делаем обратную замену (2.4).

Исключаем ξ численными методами, организуя сортировку, и получаем решение $Z(x, t) \in [0, 1]$. Таким образом, формулы (2.56) отличаются от формул (2.53) только обозначениями.

Доказательство теорем 2.6.1, 2.6.2 завершено.

2.7 Уравнение Фитц Хью-Нагумо-Семенова

Пример 2.3 Рассмотрим полулинейное параболиче-

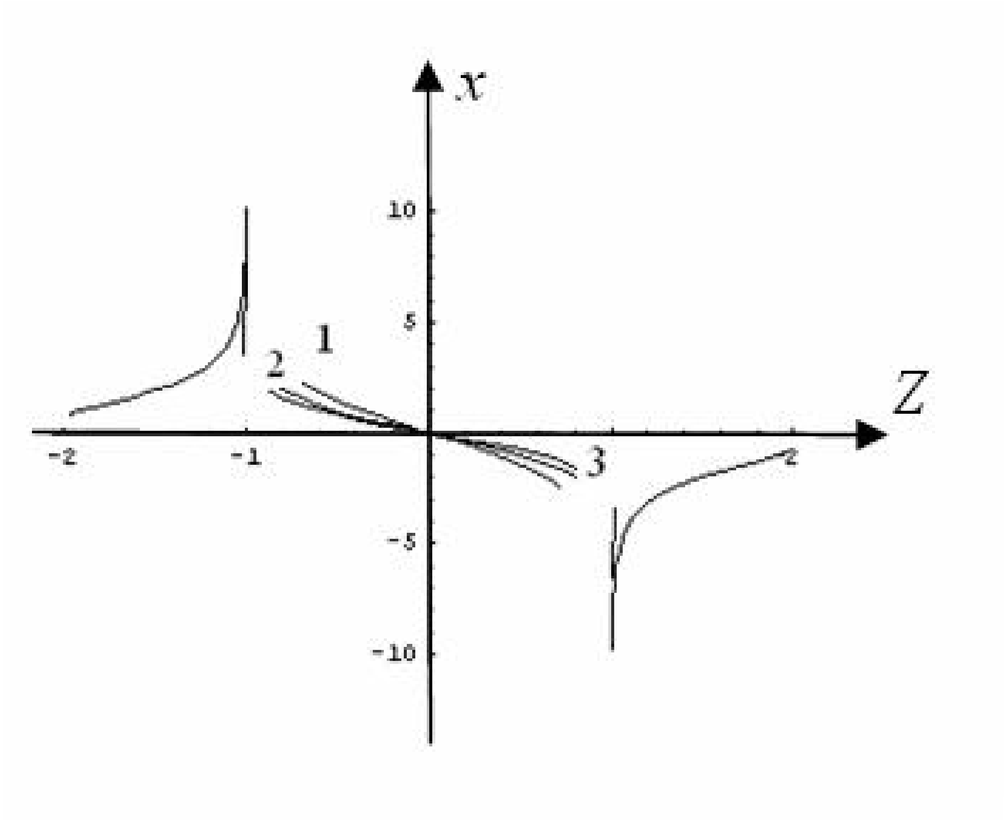

Рис. 9: **На графике представлены кривые $x = x(Z,t)$ со знаком «плюс» в первой формуле (2.61). Кривым 1,2,3 соответствуют значения времени** $t = 0.1, t = 1, t = 5$.

ское уравнение Фитц Хью - Нагумо - Семенова (ФХНС), которое известно в математической биологии. Подробный список литературы по этой теме приведен в [9], [15], [22]:

$$Z'_t - Z''_{xx} + F(Z) = 0, \tag{2.60}$$

где $F(Z) = Z(a_o - Z)(a_1 - Z)$.

В качестве начального условия мы выбираем здесь непрерывную функцию в области определения
$x \in \mathbb{R}^1: \ Z \in [-1; 1]$. Точное не автомодельное решение задачи Коши со специальными начальными данными для уравнения ФХНС найдено в [22] и исследовано в [9],[10]. Оно имеет вид

$Z(x,t) =$
$\left(1 - \exp(\sqrt{2}x)\right) / \left(1 + \exp(\sqrt{2}x) + \exp(x/\sqrt{2} - 3t/2)\right)$.

Специальные начальные данные легко находим, если полагаем $t = 0$.

Покажем еще один пример интегрирования системы (2.35)-(2.38).

Замечание 2.7.1

Здесь также ради простоты выкладок мы жертвуем общностью, функциональным произволом. Этот функциональный произвол сопоставим с функциональным произволом, который имеет место, например, в записи решения задачи Коши для линейного параболического уравнения. См. [4], [44] — [47]. □

В силу этих упрощений предполагаем, что функции $Y(\xi,\delta),\ T(\xi,\delta)$, входящие в (2.23) имеют вид
$Y(\xi,\delta) = \xi, \quad T(\xi,\delta) = w(U) + v(U)\xi$, где
$U = U(\xi,\delta)$.

Если $F(Z) = Z(a_o - Z)(a_1 - Z)$, тоо условие разрешимости(2.32) удовлетворяется в параграфе 2.4, пример 2 б

$v(U) = 3U/\sqrt{2} - (a_o + a_1)/\sqrt{2}$,
$w(U) = -3F(U)/2$.

В простом случае $a_o = -1,\ a_1 = 1$,
$F(U) = -U(1 - U^2)$ условие разрешимости (2.32) удовлетворяется если
$v(U) = 3U/\sqrt{2}, w(U) = 3U(1 - U^2)/2$.

Якобиан (2.21) не равен нулю и бесконечности. Чтобы не было недоразумений, приведем систему (2.35)— (2.38) в явной форме в данном случае:

$$x'_\xi = [2U(1-U^2+\sqrt{2}\xi)+(-\sqrt{2}U^2+\sqrt{2}U^4-2\xi-2\sqrt{2}\xi^2)U'_\xi]/P_1,$$
$$x'_\delta = (-\sqrt{2}U^2 + \sqrt{2}U^4 - 2\xi - 2\sqrt{2}\xi^2)U'_\delta/P_1,$$
$$t'_\xi = [-2(2\xi + U(-1 + U^2 - 3\sqrt{2}\xi)U'_\xi)]/(3P_1),$$
$$t'_\delta = [2(U - U^3 + 3\sqrt{2}U\xi)U'_\delta]/(3P_1).$$

Предположение о том, что $G = \xi$, важно для упрощения выкладок, так как это позволяет вычислить все интегралы более просто — методом разложения на простые дроби (методом неопределенных коэффициентов). Интегрировать надо второе и четвертое уравнение в последней системе, а затем подставить полученное решение в первое и третье уравнение. При интегрировании второго уравнения, эта процедура значительно упрощается.

Знаменатель в последней системе имеет шесть сомножителей

$$
\begin{aligned}
&P_1 = Fw + w^2 + vwG - G^2(Gv^{'} + w^{'}) = U^2 - 2U^4 + U^6 + \\
&3\sqrt{2}U^2\xi - 3\sqrt{2}U^4\xi - 2\xi^2 + 6U^2\xi^2 - 2\sqrt{2}\xi^3 = \\
&(U + \sqrt{\sqrt{2} + 2\xi}/2^{1/4})(U - \sqrt{\sqrt{2} + 2\xi}/2^{1/4}) * \\
&* (U - (-1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{2}\xi})/2)(U - (1 - \sqrt{1 + 4\sqrt{2}\xi})/2) * \\
&* (U - (-1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}\xi})/2)(U - (1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}\xi})/2).
\end{aligned}
$$

Объединяем сопряженное выражение по известной вам формуле $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Точное решение уравнения (2.60) в параметрической форме может быть записано в виде

$$
x(\xi, \delta) = \frac{1}{\sqrt{2 + 8\sqrt{2}\xi}} \left(\frac{\sqrt{2} + 8\xi + \sqrt{2 + 8\sqrt{2}\xi}}{\sqrt{-1 - 2\sqrt{2}\xi - \sqrt{1 + 4\sqrt{2}\xi}}} \times \right.
$$

$$
\times \arctan\left[\frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{-1 - 2\sqrt{2}\xi - \sqrt{1 + 4\sqrt{2}\xi}}} \right] +
$$

$$
+ \frac{-\sqrt{2} - 8\xi + \sqrt{2 + 8\sqrt{2}\xi}}{\sqrt{-1 - 2\sqrt{2}\xi + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}\xi}}} \times
$$

$$
\left. \times \arctan\left[\frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{-1 - 2\sqrt{2}\xi + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}\xi}}} \right] \right).
$$

$$
\begin{aligned}
&t(\xi,\delta) = -\frac{2}{3}\ln[|U - \sqrt{\sqrt{2}+2\xi}/2^{1/4}|] - \\
&\frac{2}{3}\ln[|U + \sqrt{\sqrt{2}+2\xi}/2^{1/4}|] + \\
&\frac{1}{3}\ln[|U + (-1 + \sqrt{1+4\sqrt{2}\xi})/2|] + \frac{1}{3}\ln[|U + \\
&(1 + \sqrt{1+4\sqrt{2}\xi})/2|] + \frac{1}{3}\ln[|U - (-1 + \sqrt{1+4\sqrt{2}\xi})/2|] + \\
&\frac{1}{3}\ln[|U - (1 + \sqrt{1+4\sqrt{2}\xi})/2|]. \qquad (2.61)
\end{aligned}
$$

Теорема 2.7.1

Пусть соотношения* (2.61) *справедливы. В этом случае решение уравнения* (2.60) *имеет вид

$Z(x,t) = U(\xi,\delta)|_{\delta=\delta(x,t),\xi=\xi(x,t)}$.

□

После того как точное решение в параметрической форме построено, можно вернуться к исходным переменным. Выразим переменную ξ из второго соотношения (2.61)

$$
\xi = \frac{-U^2 + \exp(3t)(U^2-1) \pm \sqrt{U^2 + \exp(3t)(1-U^2)}}{\sqrt{2}(-1+\exp(3t))}. \qquad (2.62)
$$

δ **остается произвольной.**

Подставим это выражение в первое соотношение (2.61) и получим $x = x_1(t, Z(x,t))$ — решение в параметрической форме.

Убедимся, что мы построили решение, сделаем проверку. Это — новое семейство решений уравнения (2.60). Если коэффициенты a_0, a_1, произвольные, то основная техническая проблема состоит в разложении знаменателя P_1 на простые множители. Значительно проще это сделать при заданных коэффициентах.

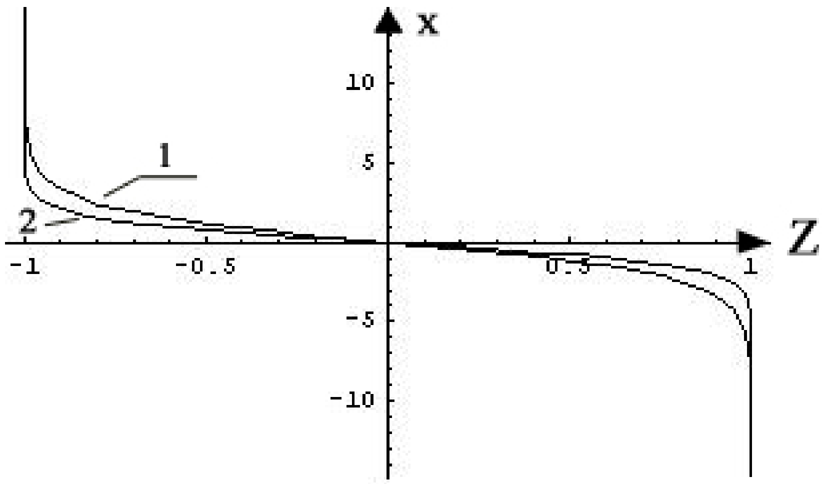

Рис. 10: **График решения, построенного в параметрической (неявной) форме, в узкой области изменения на отрезке $[-1, 1]$. Решения эволюциируют к « предельному притягивающему » решению.**

На Рис. 9 представлены кривые $x(\xi, \delta) = x(U(\xi, \delta))$. После возвращения к исходным переменным, это эквивалентно кривым $x = x(Z)$, здесь выбран знак «плюс» в формуле (2.62). Здесь показаны кривые на всей плоскости. На Рис. 10 приведены кривые решения в меньшем масштабе, с областью изменения на отрезке $[-1, 1]$. Поскольку нет возможности явно выразить $Z = Z(x, t)$ в элементарных функциях в первой формуле (2.61), то просто вычисляем $x = x(Z, t)$. Задаем значения Z при фиксированном значении времени t.

Замечание 2.7.2.

Укажем, как построить график в общепринятом виде $Z(x, t)$ при фиксированном t. После того, как график построен, его надо повернуть против часовой стрелки на 90 градусов и зеркально отобразить относительно оси $x = 0$. В данном случае, это можно сделать так как уравнение (2.60) инвариантно относительно замены x на $-x$. Это означает, что при такой смене знака независимой переменной уравнение (2.60) сохраняет свой вид. Это — окон-

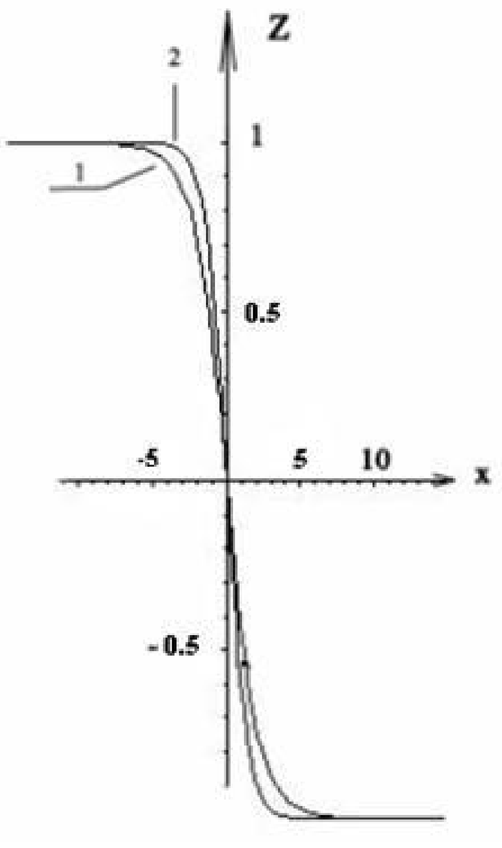

Рис. 11: **График решения, построенного в параметрической форме, в узкой области изменения на отрезке $[-1, 1]$. Решения эволюциируют к «предельному притягивающему» решению.**

чательный график функции $Z(x,t)$. Рис. 11.

Замечание 2.7.3.

Формула со знаком «минус» в формуле (2.62) не имеет физического смысла.

Как было отмечено выше, точное неавтомодельное решение уравнения ФХНС, найденное в [22] и исследованное в [9], [10], обобщается с помощью двух констант $C_i, i = 1,2$. Оно имеет вид

$$
\begin{aligned}
&Z(x,t) = \\
&\left(1 - C_1 \exp(\sqrt{2}x)\right) / K_o, \\
&K_o = \left(1 + C_1 \exp(\sqrt{2}x) + C_2 \exp(x/\sqrt{2} - 3t/2)\right). \quad (2.63)
\end{aligned}
$$

При значении констант $C_i = 1, \; i = 1,2$ это решение близко к «*предельному притягивающему* » решению.

Установлен факт, что решением уравнения (2.60) с любыми начальными условиями (с любыми вещественными значениями констант) из данного класса функция, описывает волну с предельным профилем. Это — также пример «*предельного притягивающего*» решения.

График этой функции — «*предельного притягивающего* » решения — имеет тот же характер, что и кривые на рис. 10.

Различные кривые на рис. 10 отвечают разным моментам времени, но все они эволюционируют к «*предельному притягивающему* » решению. Если выбрана другая функция $G(U,\xi)$, при которой якобиан не равен нулю, то получим решение с другим начальным условием.

2.8 Связь собственных чисел с характером эволюции решений нелинейных уравнений

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений существует классификация особых точек [5], [18]. Подробное и простое объяснение есть в [24]. Даже по примерам, рассмотренным в первой главе, видно, что поведение интегральных кривых в окрестности особой точки дает много информации о поведении решения. В теории ОДУ вопросы устойчивости решений решаются на основе анализа поведения поправок к решению, это теория показателей Ляпунова, устойчивость относительно возмущения начальных данных [5], [29], [36]. Простые примеры устойчивости решения ОДУ относительно возмущения начальных данных приведены в [24], стр.110.

Можно привести поучительный пример из прошлого [36], с.95. Оливер Хевисайд в последней четверти 19 века предложил революционный символический метод решения дифференциальных уравнений путем замены оператора дифференцирования d/dt умножением на параметр p. В то время операторных методов, преобразования Лапласа не существовало. О. Хевисайд опередил свое время. Переход к переменной p позволяет заменить дифференциальное уравнение алгебраическим. Эта методика была подвергнута беспощадной критике математиками, имен которых сейчас никто и не помнит. А ответ О. Хевисайда известен: « *Должен ли я отказаться от своего обеда, если не до конца понимаю процесс пищеварения?*». Прошло время, математики "подтянули" теорию, и операционный метод занял свое достойное место в математике.

В данном случае метод нефиксированной конструктивной замены переменных дает возможность уравнению в частных производных второго порядка (2.2) в теореме 2.1.2 поставить в соответствие некоторую матрицу, и для нее вычисляются собственные значения λ_i. На самом деле, это — функции независимых переменных, но мы сохраняем терминологию, так как в каждой фиксированной точке x_o, t_o это — опять числа. Наиболее близкий по смыслу параграф с классификацией решений по собственным числам есть в [40].

Вопрос об устойчивости и эволюции решений смешанных задач для нелинейного параболического уравнения и параболической системы является сложным. К. А. Волосовым был поставлен вопрос *о связи собственных чисел и трека матрицы с поведением и эволюцией решений относительно «предельного притягивающего»* решения и проведен математический эксперимент.

Термин «*притягивающие множества* » широко применяется в теории динамических систем и позаимствован из неё.

Мнение академика В.И.Арнольда о роли математического эксперимента приведено во Введении. Здесь можно только добавить, что стоимость математического эксперимента значительно выше, чем это оценил он.

Во-первых, *нужна идея, которая приходит в голову далеко не каждому.*

Во-вторых, *нужно много труда и усидчивости для доведения нетривиальных расчетов до логического конца.*

В-третьих, *нужно осознать и обобщить результаты примеров* и понять, что речь идет не об ошибках вычисления, а о математической закономерности, математическом открытии.

Еще нужно *иметь крепкую нервную систему, чтобы довести до коллег полученные результаты.*

«*В России нужно жить долго, чтобы увидеть, что люди поняли и оценили твои идеи*» сказал академик, лауреат Нобелевской премии В.Л.Гинзбург. Он получил свою премию в 2003 через 60 лет после выполнения своих работ [41].

В качестве образца для подражания приведем исторический пример научной смелости Э.Лоренца, выбравшего простейшую модель — систему всего трех ОДУ, просчитавшего её на компьютере и сумевшего понять, что он имеет дело не с ошибками вычислений, а с математическим открытием [49], с.209. Так в математике появилось понятие *аттрактор Лоренца* [36], [49].Однако этот термин мы не используем во избежание недоразумений.

В работах К. А. Волосова проанализировано несколько десятков семейств решений в различных смешанных задачах по работам, перечисленным во введении и работам других авторов с точки зрения поведения собственных чисел матрицы теорем 2.1.1, 2.1.2.

Доказательство теоремы 2.8.1 строится по индукции. [14]

Во-первых, сначала рассматриваются смешанные задачи, в которых заранее известно, что «*предельное притягивающее*» решение существует. Этот факт установлен какими либо логическими построениями либо «*предельное притягивающее* » решение вычислено явно, аналитически. То есть предъявлена формула.

Во-вторых, существуют задачи, когда известно, что «*предельное притягивающее* » решение существует, но вид его, формула не известна и может быть вычис-

[14] Но, конечно это не полная схема метода математической индукции.

лен только численными методами.

Разделим два вопроса:

А. Каковы необходимые условия существования «*предельного притягивающего*» решения?

В. Как осуществляется предельный переход к «*предельному притягивающему* » решению? В каком смысле следует понимать этот предел?

В рамках рассматриваемого подхода мы можем ответить только на первый вопрос.

В целом, из большого числа смешанных задач можно условно выделить три большие части.

1- ый случай. Существует класс решений в смешанных (с начальными и краевыми условиями) задачах для различных более конкретных функций в уравнении (2.2), когда при наличии диссипации, распределенных стоков неизвестной функции (переносимой величины, как говорят в прикладных работах) решение убывает со временем и стремится к нулю при любом значении x при t, стремящемся к бесконечности. К такому типу относится, например, решения возникающие в задачах Коши для линейных параболических уравнений. Эти задачи рассмотрены в большом цикле работ В. Н. Денисова, В. В. Жикова и других авторов. Ссылки на эти работы приведены в [42]. В них выяснены условия когда решение стабилизируется, то есть стремится к нулю. В пункте (**c**) рассмотрены примеры задач Коши для линейного параболического уравнения.

Для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений
Л. К. Мартинсоном построено важное решение [32]. Это решение выделяется тем, что оно построено для различных значений размерности пространства. Решение в слу-

чае двух независимых переменных x, t определено в области $x \in (x_1(t), x_2(t))$ и является дважды непрерывно дифференцируемой функцией внутри области. В крайних точках области локализации существуют слабые особенности, и функция равна нулю в них. Начальные условия в данном случае заданы положительной гладкой функцией, обращающейся в нуль на конечном расстоянии начала координат. Граничные условия равны нулю. Все это комментируется в параграфе 2.2. Это решение убывает со временем и стремится к нулю при любом значении x, при t стремящемся к бесконечности внутри области локализации. См. Рис.7. В данном случае, с нашей точки зрения, «*предельное притягивающее*» решение здесь — константа, тождественно равная нулю.

2-ой случай. Второй тип решения возникает в смешанных задачах для полулинейных уравнений, рассмотренных в главе 1, в параграфах 1.3, 1.4. Для уравнений КППФ, Зельдовича и других доказано, что существует решение задачи с предельным профилем бегущей волны с областью изменения $Z \in [a_o, a_1]$, где a_o, a_1 — корни алгебраического уравнения $F(Z) = 0$. Начальное условие в данном случае задано гладкой функцией, равной a_o при $x \to -\infty$ и a_1 при $x \to \infty$. Граничные условия определяются корнями a_o, a_1 и имеют вид $Z(-\infty, t) = a_o,\ Z(\infty, t) = a_1$. Функцию, являющуюся решением смешанной задачи, описывающую волну с предельным профилем, с нашей точки зрения, можно считать «*предельным притягивающим*» решением. Все остальные решения задачи с теми же краевыми условиями, с близкими, но другими начальными данными стремятся к этому «*предельному притягивающему*» решению. См. параграфы 2.5-2.8 и пункты $(\mathbf{d}, \mathbf{c})$ данного параграфа.

3-ий случай. Если в задаче существует стационарное решение, то есть решение, не зависящее от переменной t — времени, то другие решения, которые отличаются начальными данными, эволюционируют к стационарному решению. Первая краевая задача с начальным условием в виде стационарного решения для квазилинейного параболического уравнения была исследована в [48]. Такой пример рассмотрен в пункте (f). При этом краевое условие было задано таким образом, что решение смешанной задачи переходило, стабилизировалось на новом стационарном решении. Краевые условия в данных задачах таковы, что позволяют существовать стационарному решению. Таким образом, стационарные решения по результатам вычислений, с нашей точки зрения, можно также считать «*предельным притягивающим*» решением.

По результатам вычисления и анализа собственных чисел мы объединяем эти три случая вместе и указываем необходимые условия существования «*предельного притягивающего*» решения. Отдельно надо решать вопрос, каким образом достигается этот предел, какие надо сделать предположения, в каких функциональных пространствах строить решения. Ответ на этот вопрос не входит в круг наших интересов. В работах авторов, перечисленных во введении и упомянутых в списке библиографии, который далеко не полон, мы находим большое количество точных решений, соответствующих описанным случаям.

После того, как теоремы 2.1.1- 2.1.3 доказаны и выведены формулы для произвольной замены переменных (2.3) конкретизируем её. Предположим, что сделана тривиальная замена переменных

$Z(x,t)|_{x(\xi,\delta)=\xi,\ t(\xi,\delta)=\delta} \equiv U(\xi,\delta)$. Решение переходит само в себя, уравнение переходит само в себя. Формулы для собственных чисел, приведенные в теоремах 2.1.2, 2.1.3, остаются в силе, сохраняются.

После этого на известных решениях вышеперечисленных авторов мы вычислили значения собственных чисел и трека матрицы и обнаружили удивительные закономерности. Полученное совпадение результатов нельзя считать случайностью. Эти факты обобщены в теореме 2.8.1.

Вырожденным случаем будем называть случай, когда все формулы аналогичные формулам, приведенным в теоремах 2.1.1, 2.1.2, выведены для произвольных функций U, Y, T, а затем объявляем, что $U(\xi,\delta) = U(\xi + b\delta)$. Далее мы делаем тривиальную замену $x(\xi,\delta) = \xi, t(\xi,\delta) = \delta$.

Тогда функция $U(\xi + b\delta)$ удовлетворяет соответствующему ОДУ, а из собственных чисел только одно отлично от нуля. Три собственных числа кратны и равны нулю.

Таким образом, в данной работе и [35] предлагается ***альтернативный метод исследования поведения решений*** нелинейных уравнений относительно « ***предельного притягивающего***» решения, который описывается в данном параграфе.

Замечание 2.8.1

Когда студенты что-то не понимают, не надо смущаться. Нужно время, что бы разобраться с материалом; иногда на это уходят годы. Поскольку материал новый, не привычный и сложный для понимания, надо разобрать примеры, а затем попытаться обобщить их. Мы помещаем здесь это замечание, так как непонятные факты встают не только перед студентами...□

Действительно, здесь мы не касаемся важного класса решений — это периодических решений. Расчеты для них производились, но материала здесь явно не достаточно. Кроме того, результаты вычислений наводят на некоторые размышления. Нужно время для того, чтобы обобщить этот материал. В будущем теорема 2.8.1 будет уточнена и дополнена.

Замечание 2.8.2

Пример поведения решения задачи Коши для ОДУ при существовании «*отталкивающего* » множества рассмотрен в [24] на стр. 114.□

Рассмотрим примеры решений задач Коши со специальными начальными условиями перечисленных в пособии уравнений.

Будем называть « ***предельным притягивающим*** » решением $\Omega(x,t)$ неизвестное решение смешанной задачи для уравнения (2.2), к которому эволюционирует, стремится функция $Z(x,t)$. $Z(x,t)$ есть другое решение смешанной задачи со специальными начальными данными и краевыми условиями.

Далее рассмотрим примеры из работ, авторов перечисленных во Введении и ниже. Вычислим на известных решениях собственные числа, приведенные в теореме 2.1.2, и трек матрицы Tr A, проанализируем полученные функции.

Студент: Напомните, что такое трек матрицы A.

Авторы:

В литературе приняты следующие обозначения.

Треком Tr A, по русски « следом», а на немецком «шпуром » матрицы Sp A, принято называть сумму элементов находящихся на главной диагонали.

Вырожденные случаи.

(а.) Решение полулинейного уравнения Зельдовича при-

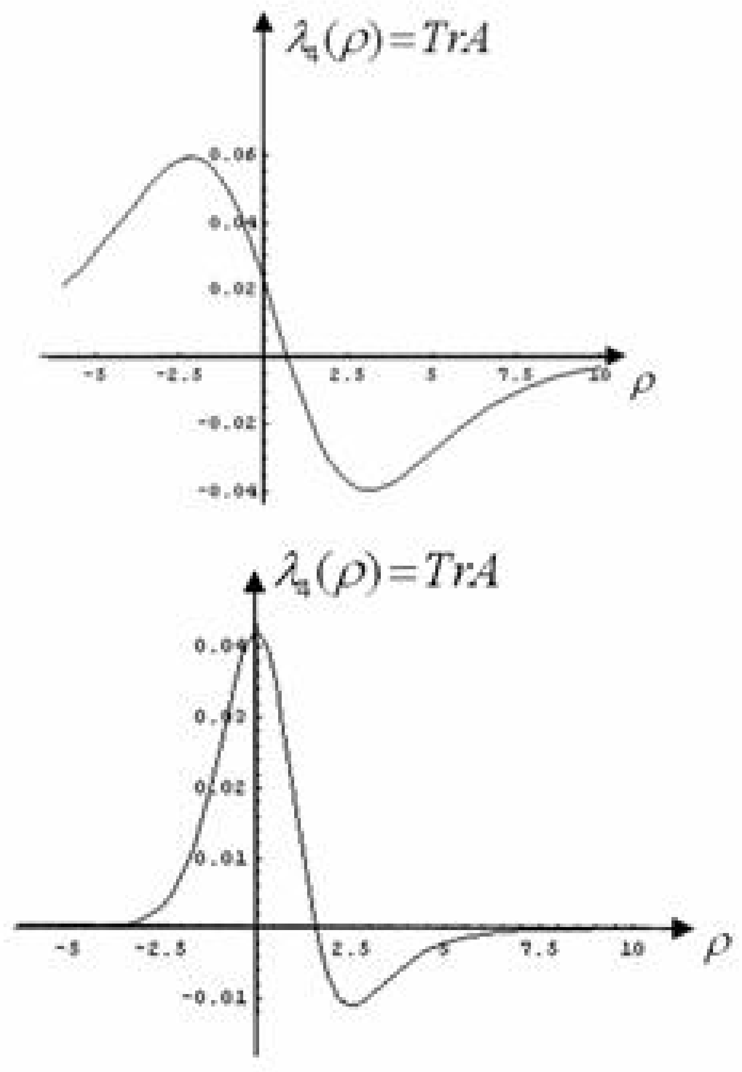

Рис. 12: **График собственного числа $\lambda_4(\rho)$ уравнения Зельдовича и уравнения КППФ**

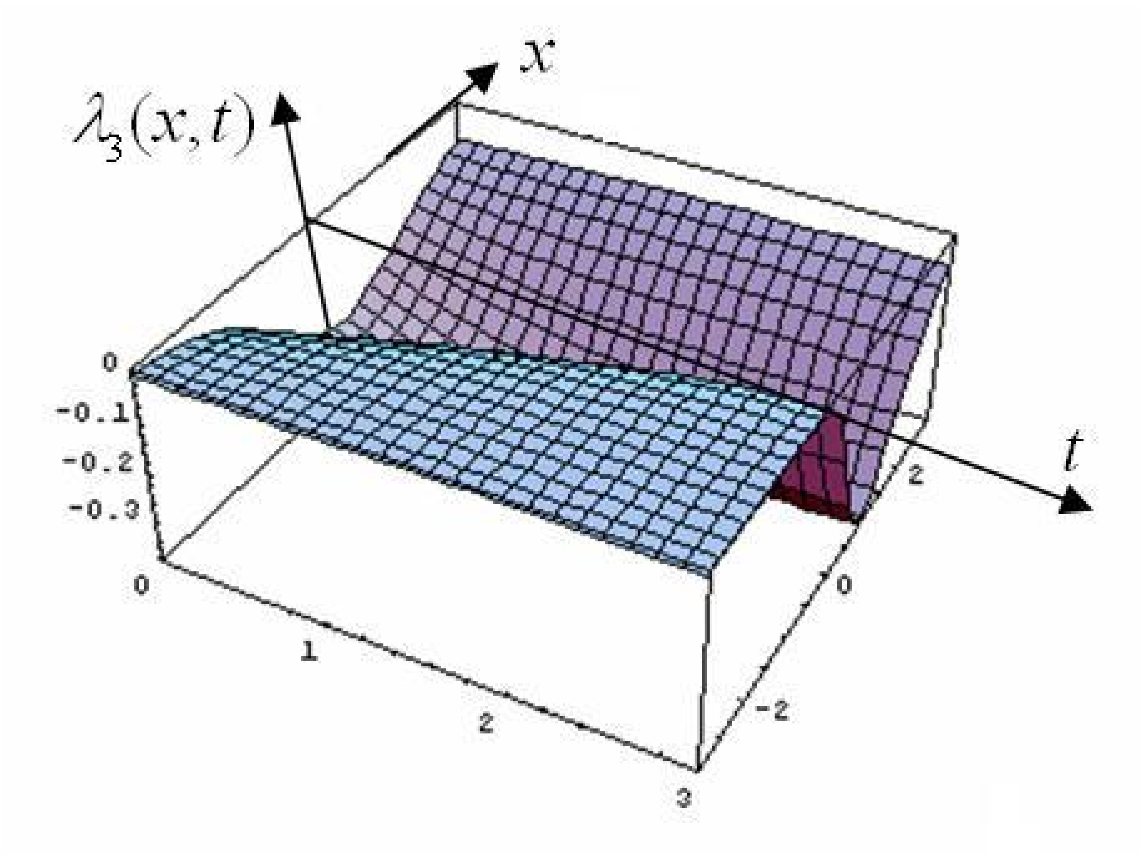

Рис. 13: **График собственного числа λ_3 уравнения ФХНС**

ведено в главе 1, в параграфе 1.4, формула (1.36). См. также [9], стр. 73. Здесь
$F(Z) = -Z^2(1-Z), K(Z) = 1$. Это — решение задачи Коши со специальными начальными условиями для двух независимых переменных, описывает решение типа бегущей волны и имеет вид

$$Z(x,t) = \Big(1 + \exp\left(-t - x\sqrt{2}\right)/2\Big)^{-1}. \tag{2.64}$$

То есть это решение уравнения в частных производных и соответствующего ОДУ. Про это решение известно, что оно близко к профилю «предельной » волны в окрестности значений Z, близких к единице.

Асимптотика построена в первой главе. А при $Z- > 0$ асимптотика решения построена в [50].

Положим $x(\xi,\delta) = \xi,\ t(\xi,\delta) = \delta$, тогда определитель матрицы Якоби-то есть якобиан, равен единице.

Поскольку замена тривиальная, дифференциальные связи (2.6) имеют вид

$Y(\xi,\delta) = {U'}_{\xi}(\xi,\delta),\ T(\xi,\delta) = {U'}_{\delta}(\xi,\delta)$. Уравнение для функции $U(\xi,\delta)$ переходит само в себя

$${U'}_{\delta} - {U''}_{\xi\xi} - U^2(1-U) = 0, \tag{2.65}$$

и решение (2.64) переходит само в себя

$$U(\xi,\delta) = \Big(1 + \exp\left(-\delta - \xi\sqrt{2}\right)/2\Big)^{-1}. \tag{2.66}$$

Таким образом, имеем отображение решения самого в себя. Такое изображение в математике называют «изоморфизмом».

Вычисляем собственные числа матрицы $\mathbf{A}_1$ на этом решении. Получим

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0,$
$\lambda_4 = \frac{1}{64}\left(sech(\rho/2)\right)^4\left(\sqrt{2} - 4\sinh(\rho/2)\right).$

Здесь введено обозначение $\rho = \delta + \sqrt{2}\xi$. Таким образом в формуле для функции λ_3, приведенных в теореме **2.1.2**, выполнено равенство $D = M^2$. Модуль $|\lambda_4| < 1$ меньше единицы. Очевидно, что это — вырожденный случай, так как ненулевое собственное число только одно. График функции $\lambda_4(\rho)$ приведен на Рис.12. График этой функции при отрицательных значениях переменной ρ — положительный и имеет локальный максимум. Затем при некотором значении переменной $\rho = \rho_o > 0$ функция равна нулю, а затем функция принимает отрицательные значения и имеет локальный минимум.

Обсудим полученный результат. Собственное число λ_4, а как мы поясняли выше, это функция независимых переменных, меняет знак и оно меньше нуля при значениях переменной $\rho > \rho_0 > 0$, ρ_0 некоторая константа. Решение задачи $U(\xi, \delta) \equiv Z(x, t) \to 1$. Вырожденная особая точка устойчива именно в этой области, где функция имеет значения близкие к единице. Когда собственное число становится положительным при $\rho < \rho_o$, то особая точка становится неустойчивой.

В [9],[10] независимо показано, что исследуемое решение эволюционирует к "*предельному притягивающему*" решению — предельной волне — при любом значении $x > x_0 > 0, t \to \infty$, но в окрестности значений функции Z близких к нулю эта эволюция продолжается значительно дольше. Трек матрицы $TrA = \lambda_4$, меняет знак.

Если те же самые вычисления повторить для матрицы $\mathbf{A_2}$, которая приведена в теореме **2.1.3**, то получим четыре собственных числа

$\lambda_1 = -\exp(\rho)/(1 + \exp(\rho))^3, \quad \lambda_2 = 0,$

$\lambda_3 = -\exp(\rho)(3 + \exp(\rho))/(2\sqrt{2}(1 + \exp(\rho)))^3, \;\; \lambda_4 = 0$—

два отрицательных и два равных нулю. Выводы следуют те же самые, но для матрицы $\mathbf{A}_1$ вычисления проще.

В работах Б. И. Сулейманова в окрестности значений функции $Z \to 0$ вычислена асимптотика решения. Она носит степенной и логарифмический характер и отличается от асимптотики, которую дают формулы (2.64) и (2.43).

Понятие особой точки системы ОДУ введено в классических работах, смотри, например, [4], [5], [30], [36], и используется в [24]. Здесь, это понятие переносится на более сложный случай.

(b.) Рассмотрим решение уравнения

$$Z'_t - Z''_{xx} - Z(1-Z) = 0. \tag{2.67}$$

Здесь $F(Z) = -Z(1-Z), K(Z) = 1$. Формула решения задачи Коши со специальными начальными условиями для двух независимых переменных, описывает решение типа бегущей волны и имеет вид

$$Z(x,t) = \left(\exp(5t/6 + x/\sqrt{6})\right) / \left(1 + \exp(5t/6 + x/\sqrt{6})\right)^2, \tag{2.68}$$

приведена в [9], с. 184, [22]и изучена в [10], с. 39. Таким образом, это решение обыкновенного дифференциального уравнения. Здесь введено обозначение $\rho = 5\delta/6 + \xi/\sqrt{6}$.

Сделаем тривиальную замену переменных.

$Z(x,t)|_{x(\xi,\delta)=\xi,\ t(\xi,\delta)=\delta} = U(\xi,\delta)$.

Положим $x(\xi,\delta) = \xi,\ t(\xi,\delta) = \delta$, как в предыдущем пункте (a). Справедливо и замечание о якобиане, приведенное в пункте (a). Поскольку замена тривиальная, дифференциальные связи (2.7)имеют вид

$Y(\xi,\delta) = U'_\xi(\xi,\delta),\ T(\xi,\delta) = U'_\delta(\xi,\delta)$. Таким образом, имеем отображение решения самого в себя. Уравнение для функции $U(\xi,\delta)$ переходит (2.67) само в себя

$$U'_\delta - U''_{\xi\xi} - U(1-U) = 0, \tag{2.69}$$

и решение (2.68) переходит само в себя

$$U(\xi, \delta) = \left(\exp(5\delta/6 + \xi/\sqrt{6})\right) / \left(1 + \exp(5\delta/6 + \xi/\sqrt{6})\right)^2 . \tag{2.70}$$

Находим производные и вычисляем собственные числа, по формулам приведенным в теореме 2.1.2, на этом решении. Получим

$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0,$

$\lambda_4 = \exp(2\rho)\left(6 + 9\exp(\rho) + 5\sqrt{6}\exp(2\rho) - 3\exp(3\rho)\right)/K_1,$

$K_1 = (9(1+\exp(\rho))^6)$. График функции $\lambda_4(\rho)$ приведен на Рис 12. Обсудим полученный результат. Другие случаи, когда решение уравнения в частных производных является одновременно решением ОДУ, похожи на варианты рассмотренные в пунктах (a,b). Собственное число λ_4 меняет знак и оно меньше нуля при значениях переменной $\rho > \rho_o > 0$. ρ_o некоторая константа. В [10] было проведено исследование и показано, что исследуемое решение эволюционирует к «*предельному притягивающему* » решению - предельной волне. Трек матрицы $TrA = \lambda_4$, меняет знак, рис 12. Выводы следующие: точное решение ОДУ описывает «*предельное притягивающее* » решение только в некоторой области.

Невырожденные случаи.

Вырожденным случаем будем называть случай, когда точное решение удовлетворяет уравнению с частными производными, а собственные числа различны и не тождественно равны нулю.

(c.) Рассмотрим решение линейного параболического уравнения

$$Z'_t - Z''_{xx} + \gamma Z = 0. \tag{2.71}$$

Здесь $F(Z) = \gamma Z, K(Z) = 1$. Если $\gamma > 0$, то такое слагаемое описывает диссипацию переносимой величины. В некоторых прикладных работах иногда употребляют термин "сток ".

Поведение решения простой задачи Коши для ОДУ с диссипацией приведено в [24] на стр. 117.

Если $\gamma < 0$, то такое слагаемое описывает источник. Поведение решения простой задачи Коши для ОДУ в этом случае приведено в [24] на стр. 97.

Формула решения задачи Коши со специальными начальными условиями для двух независимых переменных хорошо известна и имеет вид

$$Z(x,t) = \left(\exp(-\gamma t)/(2\sqrt{\pi t})\right)\exp(-x^2/(4t)) \tag{2.72}$$

и приведена в [4]. В данном случае эта функция не является решением типа простой волны, а удовлетворяет уравнению с частными производными.

Студент: Какое здесь может быть "***предельное притягивающее***" решение?

Авторы:

В данном случае, с нашей точки зрения, роль "***предельного притягивающего***" решения играет константа тождественно равная нулю. Обычно, в таких задачах другие авторы говорят о растущем или убывающем решении. Существует огромный цикл работ по построению априорных оценок с целью выявления условий того или иного поведения решения. Ссылки на авторов этих работ приведены [4], [6]— [11], [32], [34]. В данном примере поведение решения очевидно и определяется знаком коэффициента γ.

Посмотрим, что дает вычисление собственных чисел и трека матрица в данном случае.

Сделаем тривиальную замену переменных.

$Z(x,t)|_{x(\xi,\delta)=\xi,\ t(\xi,\delta)=\delta} = U(\xi,\delta)$.

Положим $x(\xi,\delta)=\xi,\ t(\xi,\delta)=\delta$, как в пункте (a). Справедливо и замечание о якобиане? приведенное в пункте (a). Поскольку замена — тривиальная, дифференциальные связи (2.7) имеют вид

$Y(\xi,\delta)=U'_{\xi}(\xi,\delta),\ T(\xi,\delta)=U'_{\delta}(\xi,\delta)$. **Таким образом, имеем отображение решения самого в себя. Уравнение для функции $U(\xi,\delta)$ переходит само в себя:**

$$U'_{\delta}-U''_{\xi\xi}+\gamma U=0, \tag{2.73}$$

и решение (2.72) переходит само в себя.

Получим выражения для собственных чисел.

$\lambda_1=\exp(-2\gamma t-x^2/(2t))(2t+4\gamma t^2+x^2)/(32\pi t^4)$.

Приведем здесь общее выражение для собственного числа λ_2 приведенного в теореме 2.1.2.

Лемма 2.8.1

Пусть окончательных формулах теоремы 2.1.2 сделана тривиальная замена переменных $x(\xi,\delta)=\xi,\ t(\xi,\delta)=\delta$.

Тогда дифференциальные связи (2.7)имеют вид

$Y(\xi,\delta)=K(U)U'_{\xi}(\xi,\delta),\ T(\xi,\delta)=K(U)U'_{\delta}(\xi,\delta)$. **Собственное число**

$\lambda_2\le 0$ **при всех значений независимых переменных и имеет вид**

$\lambda_2=-K(U)^2[F(U)U'_{\delta}+(U'_{\delta})^2-K'(U)U'_{\delta}(U'_{\xi})^2-K(U)U'_{\xi}U''_{\xi\delta}]^2$.

Таким образом, $\lambda_2\le 0$.

$\square$

Доказательство

Уравнение (2.2) переходит само в себя:

$U'_{\delta}=K'_U(U)(U'_{\xi})^2+K(U)U''_{\xi\xi}-F(U)$.

Учитывая это получим выражение для λ_2.

Таким образом, остается проанализировать одно значение λ_3, что делает этот вариант с матрицей $\mathbf{A}_1$, и формулами, приведенными в теоремах 2.1.1, 2.1.2, предпочтительным.

□

В данном конкретном случае пункта $(\boldsymbol{c})$ окончательное выражение имеет вид

$\lambda_2 = -\exp(-4\gamma t - x^2/t)(2t + 4\gamma t^2 + x^2)^2/(1024\pi^2 t^4)$.

Далее, поскольку в приведенных примерах все преобразования объяснены, можно сразу считать собственные числа в переменных x, t.

Собственные числа λ_3, λ_4 вычисляются, но имеют сложный вид, и мы их не приводим. Обсудим полученный результат при $\gamma > 0$.

Важно, что собственные числа λ_2, λ_3 — отрицательные, по модулю они меньше единицы.

Собственные числа λ_1, λ_4 — положительные. Трек матрицы меняет знак, то есть на некотором множестве принимает положительные значения, а на дополнении к нему принимает отрицательное значение.

Студент: Я помню, что в теории особых точек ОДУ, если собственные числа матрицы — вещественные отрицательные, то такая точка называется «устойчивый узел». Если собственные числа матрицы — вещественные положительные, то такая точка называется «неустойчивый узел». А если собственные числа матрицы — вещественные и разных знаков, то такая точка называется «седлом». А здесь как?

Авторы: Правильно.

В данном случае, если проводить аналогию с динамическими системами, такая особая точка при фиксированном значении независимых переменных x_o, t_o, является сложной и называется «устойчивый седло- узел». В данной работе это сложная особая точка, параметры которой меняются, а тип точки сохраняется. Её параметры меняются в каждый момент времени и в каждой точке пространства, но тип точки не меняется. Таким образом, два собственных числа λ_2, λ_3 — отрицательные во всей области определения, а два — положительные. Решение задачи Коши в случае наличия диссипации "расплывается " и убывает по амплитуде, то есть притягивается к нулю:

$Z(x,t) \to 0$ для любого значения x при $t \to \infty$.

Таким образом, в этом случае условия теоремы 2.8.1 выполнены.

Если сменить знак $\gamma < 0$, то оказывается, что собственные числа $\lambda_{3,4}$ определены не при всех значениях независимых переменных. Дискриминант D в этих выражениях — отрицательный. Очевидно, что решение в этом случае "отталкивается " от нуля, то есть возрастает, во всех точках x при $t \to \infty$.

Таким образом условия, теоремы 2.8.1 не выполнены.

Стабилизация решения задачи Коши и краевых задач линейного параболического уравнения с переменными коэффиктентами.

В цикле работ В.Н.Денисова, В.В. Жикова и других [42] рассмотрены условия стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений с переменными коэффициентами.

Студент: Объясните подробно что это за задачи.

Авторы:

Если дано уравнение (2.2) или его обобщение с переменными коэффициентами, в котором есть функция источника, а начальные условия задачи — положительные и растут по переменной x, то и решение задачи Коши будет неограниченно возрастать.

Другое дело, если в уравнении (2.2) или в его обобщении с переменными коэффициентами есть диссипация (сток энергии).

Тогда возникает сложная борьба этих двух противоположных причин: диссипация в уравнение и рост начальных данных. Что победит в этой борьбе и установлено в работах В.Н.Денисова, В.В.Жикова и других авторов. Ими получены оценки на рост начальных данных.

Много примеров, которые мы использовали в наших расчетах, есть в [45]. Рассмотрим пример 4 на стр.65, в [45]. Уравнение имеет вид

$$Z'_t - Z''_{xx} + (b\ x^2 + c)Z = 0. \tag{2.74}$$

При $b > 0, \ \ c > 0$ в уравнении присутствует диссипация. В [45] на стр.65 приведено решение

$$Z = A\exp[sign(\sqrt{b} - sign\ c)t + sign\ b\ x^2/2] \tag{2.75}$$

где $sign = \pm 1$, а A, b, c — константы.

Как было указано в замечании 2.1.3, формулы в теоремах 2.1.1, 2.1.2 верны для функции $F(Z, x, t)$.

Начальные условия следуют из (2.75), если положить $t = 0$, то $Z(x, 0) = A\exp(sign\ b\ x^2/2)$.

I. Рассмотрим $b > 0, \ \ sign = 1$. Тогда начальное условие растет слишком сильно, и диссипация в уравнение не может его погасить, так как убывание в показателе экспоненты в формуле (2.75) — только линейное за счет слагаемого $(-c\ t)$.

Рассмотрим, что дает вычисление собственных чисел. Как доказано в лемме 2.8.1 $\lambda_2 \leq 0$.

Существует область $\omega_o(x, t)$ такая, что $\lambda_3 > 0$ при $(x, t) \in \omega_o(x, t)$. Четвертое собственное число $\lambda_4 > 0$. Условие теоремы 2.8.1 нарушаются. Решение "отталкиваются"от нуля и растут, особая точка «устойчивый седло-узел» отсутствует.

II. Рассмотрим случай $b > 0, \quad sign = -1$. Тогда положительные начальные данные убывают по переменной x, и решение задачи Коши убывает. Собственное число $\lambda_3 < 0$ при $(x,t) \in \omega_1(x,t) \subset R^2$. Условия теоремы 2.8.1 выполнены в области $\omega_1(x,t)$, и формируется особая точка «устойчивый седло-узел». Решение притягивается к нулю при больших значениях x, t, то есть стабилизируется.

Аналогично можно рассмотреть стабилизацию решения смешанной задачи с начальными и краевыми условиями первого, второго и третьего рода для линейного параболического уравнения с переменными коэффициентами. Как показано в [44] на стр.263,[46] и систематизировано в [45] начальные данные $u_0(x)$ и краевые данные $\psi(x,t)$ добавляются к функции источника $F(Z,x,t)$. А именно, новая функция источника имеет вид

$$\tilde{F}(Z,x,t) = F(Z,x,t) - u_0(x)\tilde{\delta(t)} - \psi(x,t), \qquad (2.76)$$

где $\tilde{\delta(t)}$ — функция Дирака.

Эти результаты приведены в [46] и упорядочены в таблице [47] стр.49. Поскольку преобразования в теоремах 2.1.1, 2.1.2 — алгебраические, при вычислении λ_3 можно взять функцию из дельтаобразной последовательности. Например, $\exp(-t^2/\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon < 1$.

Далее вычисляем λ_3 на известном решении или пытаемся оценить собственное число λ_3 на неизвестном решении и проверяем, выполнены ли условия теоремы 2.8.1.

Перспективы оценки собственного числа λ_3 здесь есть. Заметим, что из условия $\lambda_3 \leq 0$ следует неравенство

$M^2 \leq D$, теорема 2.1.2. Отсюда следует неравенство

$Z'_x[Z''_{xt}Z'_x - Z''_{xx}Z'_t] \leq 0$. Далее надо использовать уравнение (2.2), где $K(Z) = 1$, и проводить более тонкий анализ. Связь с начальными и граничными условиями реализуется через функцию (2.76).

Замечание 2.8.3.

Заметим, что если в уравнение (2.2) входят младшие слагаемые с переменными коэффициентами, то они добавятся к функции $F(Y,Z,x,t)$, и формулы теорем 2.1.1 — 2.1.3, с учетом очевидных изменений замены $F(U)$ на $F(Y,Z,x,t)$, остаются справедливыми. $\square$

(d.) Рассмотрим полулинейное уравнение Фитц - Хью - Нагумо - Семенова.

$$Z'_t - Z''_{xx} - Z(1-Z^2) = 0. \tag{2.77}$$

Здесь $F(Z) = -Z(1-Z^2), K(Z) = 1$. Формула решения задачи Коши со специальными начальными условиями для двух независимых переменных имеет вид

$$\begin{aligned} &Z(x,t) = \\ &\left(1-\exp(-x\sqrt{2})\right)/R_o, \\ &R_o = \left(1+\exp(-x\sqrt{2})+\exp(-3t/2-x/\sqrt{2})\right) \end{aligned} \tag{2.78}$$

приведена в [9],с.194,[22]. Решение изучено в [11], с. 66 методом нефиксированной конструктивной замены переменных и численными методами. В данном случае эта функция не является решением типа простой волны, а удовлетворяет уравнению с частными производными. Показано, что эта функция отличается от « предельного притягивающего» решения на очень малую величину. В параграфе 2.7 построено семейство решений уравнения (2.60) в параметрической форме. Численное исследование этих решений показывает, что все они при эволюции стремятся к решению (2.63). Посмотрим, что дает вычисление собственных чисел в данном случае.

Сделаем тривиальную замену переменных.

$Z(x,t)|_{x(\xi,\delta)=\xi,\ t(\xi,\delta)=\delta} = U(\xi,\delta)$.

Положим $x(\xi,\delta) = \xi,\ t(\xi,\delta) = \delta$, как во всех пунктах. Поскольку замена — тривиальная, дифференциальные связи (2.7)имеют вид $Y(\xi,\delta) = U'_{\xi}(\xi,\delta),\ T(\xi,\delta) = U'_{\delta}(\xi,\delta)$. Таким образом, имеем отображение решения самого в себя. Уравнение для функции $U(\xi,\delta)$ переходит само в себя:

$$U'_{\delta} - U''_{\xi\xi} - U(1-U^2) = 0, \tag{2.79}$$

и решение (2.78) переходит само в себя:

$$U(\xi,\delta) = \left(1-\exp(-\xi\sqrt{2})\right)/R_o,$$
$$R_o = \left(1+\exp(-\xi\sqrt{2})+\exp(-3\delta/2-\xi/\sqrt{2})\right). \tag{2.80}$$

Получим выражения для собственных чисел:
$\lambda_1 = -3\exp(3\delta - 3\xi/\sqrt{2})/{P_o}^3,\ \ \lambda_2 = -9\exp(6\delta+3\xi\sqrt{2})/{P_o}^6$.

Собственные числа λ_3, λ_4 легко вычисляются, но имеют сложный вид и мы их не приводим. График λ_3 приведен на Рис 13. Здесь введено обозначение
$P_o = \exp(3\delta/2) - \exp(\xi/\sqrt{2}) + \exp(3\delta/2+\xi\sqrt{2})$.

Обсудим полученный результат. Легко видеть, что собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — вещественные,отрицательные и по модулю меньше единицы. Собственное число λ_4— положительное.

Студент: **А здесь какая особая точка?**

Авторы:

В данном случае, если проводить аналогию с динамическими системами, такая особая точка является сложной и называется «устойчивый седло- узел». Таким образом, все собственные числа по модулю меньше единицы, а три из них — отрицательные во всей области определения. Численное исследование большого количества представителей семейства решений задачи Коши в параграфе

2.7 с различными начальными условиями заданными в полосе $Z \in [-1, 1]$, показывает, что все они при эволюции стремятся к « предельному притягивающему» решению (2.63). Трек матрицы меняет знак в области определения.

(e.) Исследуем поведение решения полулинейного уравнения Зельдовича, которое найдено в параграфе 2.5. Уравнение в этом случае имеет вид

$$Z'_t - Z''_{xx} - Z^2(1 - Z) = 0. \tag{2.81}$$

Здесь $F(Z) = -Z^2(1 - Z), K(Z) = 1$. Формула решения задачи Коши со специальными начальными условиями из теоремы 2.5 для двух независимых переменных имеет вид

$$Z(x, t) = \left(2\exp(t/2) - 2\exp(x/\sqrt{2})\right)/K_2, \tag{2.82}$$

где $K_2 = 2\exp(t/2) + \exp(x/\sqrt{2})(-2 + 2t + x\sqrt{2})$ и приведена в [35]. См. Рис.8. В данном случае это функция не является решением типа простой волны, а удовлетворяет уравнению с частными производными. Численные исследования показывают, что функция (2.82) стремятся к «предельному, притягивающему» решению. Посмотрим, что дает вычисление собственных чисел в данном случае.

Сделаем тривиальную замену переменных.

$Z(x, t)|_{x(\xi,\delta)=\xi,\ t(\xi,\delta)=\delta} = U(\xi, \delta)$.

Положим $x(\xi, \delta) = \xi,\ t(\xi, \delta) = \delta$ и проведем все вычисления.

Все собственные числа — вещественные. Все собственные числа вычисляются, λ_1 — положительная, λ_2, λ_3 — отрицательные, по модулю меньше единицы, λ_4 меняет знак. Трек матрицы меняет знак. См. рис. 8.

(f.) В заключение кратко исследуем поведение решения краевой задачи, изученной в [48]. Там рассмотрена более сложная задача. Здесь рассмотрим её упрощенный вариант.

Коэффициенты уравнения (2.2) в этом случае имеют вид $F(Z) = \gamma Z^m,\ K(Z) = kZ^{(k-1)},\ k > 1$. Рассматривается краевая задача в области $x \geq 0,\ t \geq 0$. В данном случае уравнение (2.2) рассматривается как вырожденное, то есть коэффициент $K(Z)$ обращается в нуль: $K(0) = 0$, как в главе 1. Её решение — локализованное, отлично от нуля в области $0 \leq x \leq x_f(t)$ и тождественно равно нулю при $x \geq x_f(t)$, рис. 14. На линии фронта выполнено условие непрерывности потока, аналогичное поставленному в параграфе 1.3. В данном случае оно имеет вид

$\left(Z^k\right)'_x|_{x=x_f(t)} = 0$, где $Z(x_f, t) = 0$. Решение $Z(x,t) = 0$ называется в цитируемых работах «особым решением». Функция $x = x_f(t)$ отделяет область локализации от остального пространства; это — фронт слабого разрыва решения. Такая терминология введена в цитируемых работах. На границе этой области происходит сшивание функций, то есть на этой границе гарантируется выполнение условия непрерывности функции $Z(x,t)$ с нулевым особым решением $Z(x,t) = 0$. Решение в точках фронта ветвится —(см. пунктирную кривую на Рис.14.) Однако отрицательные решения не имеют физического смысла.

Начальное условие имеет вид стационарного решения

$$Z(x,0) = \begin{cases} B\left(1 - x/x_0\right)^{(2/(k-m))}, & 0 \leq x \leq x_o, \\ 0, \quad x_o \leq x, \end{cases} \tag{2.83}$$

где $B = ((k-m)^2 {x_0}^2 \gamma/(2k(k+m)))^{1/(k-m)},\ k > m$. В данном случае при малых значениях t справедливо равенство $x_o = x_f$. То есть фронт слабого разрыва неподвижен до некоторого значения времени t_m. Граничное условие имеет вид

$$Z(0,t)=\begin{cases}B, \quad x=0, \quad t=0,\\ Bz(t), x=0, \quad t>0.\end{cases} \tag{2.84}$$

В данном примере непрерывная функция $z(t)$ имеет вид

$$z(t)=\begin{cases}1, \quad\ t=0,\\ 2, \quad\ t>t_1>0.\end{cases} \tag{2.85}$$

Здесь t_1 — некоторая константа или бесконечность. В работах D. G. Aronson, С. Н. Тараненко, Л. Д. Покровского, Л. К. Мартинсона, (подробные ссылки на работы которых приведены в [6], [9], [10], [31], [48]), показано, что фронт слабого разрыва неподвижен, пока асимптотика решения в окрестности фронта имеет вид

$$Z(x,t)=\begin{cases}\beta\,(1-x/x_o)^{(2/(k-m))}+\mathbf{O}\left((\mathbf{1}-\mathbf{x}/\mathbf{x_o})^{(\mathbf{1}+\mathbf{2}/(\mathbf{k}-\mathbf{m}))}\right),\\ \quad 0\le x\le x_0,\ t<t_m,\\ 0, \quad x\ge x_o.\end{cases} \tag{2.86}$$

Здесь $\beta=B$, а время $0<t\le t_m$. В сформулированной смешанной задаче это — время перехода с одного типа решения — стационарного решения, которое имеет определенную
асимптотику, на другой тип решения. Это время расходуется на перестройку асимптотики, (см. Рис 14) и называется, в цитируемых работах, временем «метастабильного состояния» t_m. См. кривые 1 и 2 на Рис.14. Асимптотика решения в окрестности фронта, когда фронт начинает

движение, имеет вид

$$Z(x,t) = \begin{cases} \psi_o(t)\,(1 - x/x_o + x_f/x_o)^{(1/(k-1))} + \\ \mathbf{O}\left((\mathbf{1} - \mathbf{x}/\mathbf{x_o} + \mathbf{x_f}/\mathbf{x_o})^{(\mathbf{1}+\mathbf{1}/(\mathbf{k}-\mathbf{1}))}\right), \quad x_o \le x \le x_f, \\ t_1 < t, \\ 0, \quad x \ge x_f. \end{cases} \tag{2.87}$$

Студент:Объясните, как решать эту задачу численным методом.

Авторы: Для того, чтобы решить задачу численными методами, проведём разностную аппроксимацию задачи. Введем сетку с шагом по времени и пространству $\triangle t,\ h$. Нами реализована неявная разностная схема в области

$x \in [0, x_f(t)], t \in [0, t_2]$, выбраны следующие значения шага по времени и пространству $\triangle t = h = 0.01$. Таким образом, от значений непрерывной функции $Z(x,t)$ переходим к дискретной функции ${Z^j}_i,\ j = 0 \div 100,\ i = 0 \div 200, t \simeq j\triangle t,\ x = ih$ значения которой заданы в узлах сетки. Как известно [4], [24], ***шаблоном*** называется минимальное количество точек, необходимых для разностной аппроксимации задачи. В данном случае, для того, чтобы провести разностную аппроксимацию второй производной шаблон состоит из трех точек : $x_{i-1},\ x_i,\ x_{i+1}$.

Уравнение (2.2) с коэффициентами определенными вначале пункта (f) после разностной аппроксимации имеет вид.

$\left({Z^{j+1}}_i - {Z^j}_i\right)/\triangle t-$
$[(K({Z^j}_{i+1}) + K({Z^j}_i))\left({Z^{j+1}}_{i+1} - {Z^{j+1}}_i\right)/(2h)-$
$(K({Z^j}_i) + K({Z^j}_{i-1}))\left({Z^{j+1}}_i - {Z^{j+1}}_{i-1}\right)/(2h)]/h+$
$\gamma({Z^j}_i)^m = 0.$

Если параметр $m = 1$, то последнее слагаемое можно взять на $j+1$ слое, оно имеет вид $\gamma {Z^{j+1}}_i$.

Значения коэффициентов $K({Z^j}_{i-1})$, $K({Z^j}_i)$, $K({Z^j}_{i+1})$ вычисляются на предыдущем временном слое (шаге) и поэтому в каждый момент времени известны. При $j=0$ для вычисления используются начальные условия.

Далее приводим подобные при ${Z^{j+1}}_{i-1}$, ${Z^{j+1}}_i$, ${Z^{j+1}}_{i+1}$ и дополняем СЛАУ краевыми условиями. При каждом проходе области для определения неизвестных на данном временном слое (шаге) значений ${Z^{j+1}}_i$ использован метод правой прогонки [4], [24]. Процедура разностной аппроксимации и дополнения системы СЛАУ краевыми условиями подробно описана в цитируемых работах. В данном случае правое краевое условие нулевое ${Z^j}_{200}=0$ для любого значения j.

Таким образом, здесь используется алгоритмизированный метод Гаусса решения СЛАУ для трех диагональных матриц. Значения параметров при расчетах выбраны $k=3$, $m=1$, $\gamma=1$, функция $z(t)$ имеет вид $z(t)=1+(\exp(t/\varepsilon)-1)/(\exp(t/\varepsilon)+1)$, $\varepsilon=1/5$.

Старое стационарное решение (начальное условие) при данных значениях параметров имеет вид

$Z(x,0)=\sqrt{(1/6)}(1-x)$, $0\le x\le 1$. Новое стационарное решение при данных значениях параметров имеет вид

$Z(x,\infty)=\sqrt{(2/3)}(1-x/2)$, $0\le x\le 2$.

Конкретный вид асимптотики решения в окрестности фронта (2.87) при малых $1-x+c(t)<1$, когда фронт начинает движение, имеет вид

$$Z(x,t)=\begin{cases}\psi_o(t)\,(1-x+c(t))^{1/2}+\mathbf{O}\left((\mathbf{1}-\mathbf{x}+\mathbf{c}(\mathbf{t}))^{(\mathbf{1}+\mathbf{1}/\mathbf{2})}\right),\\ x_o\le x\le x_f(t),\ t_1<t,\\ 0, \qquad\qquad x\ge x_f(t),\end{cases} \tag{2.88}$$

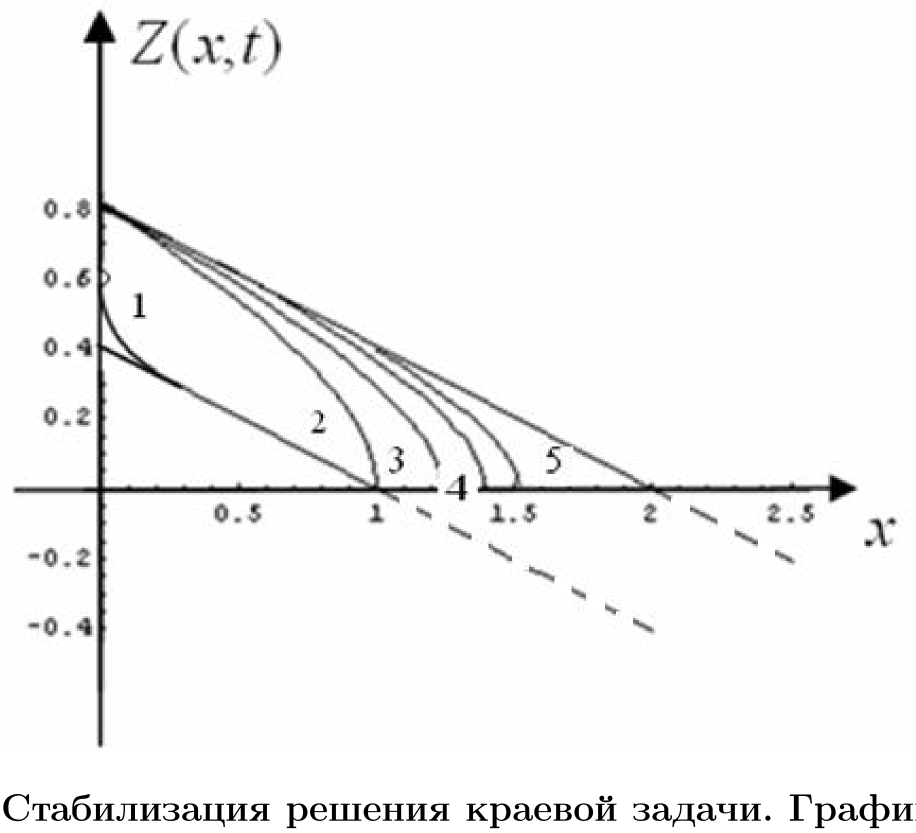

Рис. 14: **Стабилизация решения краевой задачи. График численного решения перехода с одного стационарного решения на другое. Здесь** $k = 3,\ m = 1,\ \gamma = 1$ **Кривая 1 соответствует некоторому моменту времени** $t < t_m,$ **когда происходит перестройка асимптотики. Кривая 2 соответствует времени метастабильной локализации,** $t = t_m,$ **время когда перестройка асимптотики завершена. После этого фронт слабого разрыва приходит в движение. Кривым** $2,\ 3, 4, 5$ **соответствуют времена** $t = t_m + (0,\ 0.5,\ 1,\ 1.7)$ **соответственно**.

где $x_o = 1, x_f(t) = 1 + c(t),\ c(t) = 3\int(\psi_o(t))^2 dt.$

Замечание 2.8.4

На самом деле в асимптотическом ряде выписываются пять слагаемых. После подстановки в уравнение (2.2)приводим подобные члены и приравниваем слагаемые при одинаковых степенях выражения $(1-x+c(t))$ к нулю. Получим систему уравнений на функции $\psi_i(t),\ \ i = 0, 1...$, откуда они могут быть определены. Такое разложение «***по гладкости***» предложено В.П.Масловым в цитируемых работах.□

Кривая 1 на Рис. 14 соответствует некоторому моменту времени $t < t_m$, когда происходит перестройка асимптотики. Кривая 2 на Рис. 14 соответствует времени $t = t_m$, когда перестройка асимптотики завершена. Кривые 2, 3, 4, 5 на Рис. 14 соответствует временам $t = t_m + (0,\ 0.5,\ 1,\ 1.7)$ соответственно. Здесь за новую точку отсчета времени выбрана кривая 2, когда закончилось время метастабильной локализации и началось движение фронта $x_f(t) = 1 + c(t)$. Эти безразмерные приращения времени отсчитываются от значения $t = t_m$. Значения ψ_o вычисленные на кривых 2, 3, 4, 5 принимают значения $0.68,\ 0.56,\ 0.51,\ 0.45$ соответственно. Очевидно, что происходит стабилизация решения на новом стационарном решении.

Далее, проведем аппроксимацию части предельного стационарного решения $Z(x,\infty) = \sqrt{(2/3)}(1-x/2),\ 0 \le x \le 2$ и кривых 2, 3, 4, 5 с помощью более сложной нелинейной функции двух переменных x, t, учитывающей вышеприведенную асимптотику. Здесь используем так называемую Паде — аппроксимацию. Простые примеры на эту тему приведены в [36] с. 44, 47. Эту функцию в виду её сложности, мы здесь не приводим. Зато данную функцию можно подставить в выражения для собственных чисел вычисленных в теореме 2.1.2.

Все собственные числа вычисляются, λ_1— положительная, λ_2, λ_3 — отрицательные в области локализации решения рассмотренной задачи. Трек матрицы меняет знак. Решение смешанной задачи, приведенное в этом пункте стабилизируется на новом стационарном решении. Таким образом, в области локализации условия нижеприведенной теоремы выполнены, и возможно сделать независимые выводы о стабилизации решения краевой задачи в данном случае. Таким образом « *предельное притягивающее* » решение в данном примере имеет вид $Z(x,\infty) = \sqrt{(2/3)}(1-x/2),\ 0 \le x \le 2$.

Подведем итог рассмотренных примеров и попытаемся обобщить полученные результаты.

Анализируя множество известных точных решений полученных в работах Г. И. Баренблатта, Л. Д. Ландау, Я. Б. Зельдовича, А. С. Калашникова, А. А. Самарского, С. П. Курдюмова, Л. К. Мартинсона, И. С. Граника, В. В.Галактионова, В. А. Дородницына, С. П. Михайлова, Е. М. Воробьева, Н. В. Змитриенко, С. И. Похожаева, Г. Г. Малинецкого, В. П. Маслова, В. Г. Данилова, К. А. Волосова, Л. Б. Берковича, Р. О. Кершнера, Б. Х. Гилдинга, Г. А. Рудных, Э. И. Семенова, В. Н. Денисова, В. Н. Разживайкина, А. Д. Полянина, В. Ф. Зайцева, А. В. Вязьмина, А. И. Журова, Д. А. Казенина и многих других, по вышеприведенной методике, можно сформулировать теорему.

Здесь сформулирована теорема о необходимых условиях эволюции решения уравнения с частными производными к «*предельному притягивающему*» решению.

Поскольку мы обобщаем три случая, три класса за-

дач описанных в начале данного параграфа, то как было отмечено выше, предлагаем называть «***предельным притягивающим***» решением $\Omega(x,t)$ неизвестное решение смешанной задачи (со специальными начальными и граничными условиями) для квазилинейного параболического
уравнения обобщающего уравнение (2.2)

$$Z'_t - (K(Z)Z'_x)'_x + M(Z'_x, Z, x, t) = 0. \qquad (2.89)$$

Смотри здесь замечание 2.8.3.

В теореме 2.8.1 мы не пишем норму, так как переход от произвольного решения задачи к "***предельному притягивающему***" решению в каждой конкретной задаче надо понимать по-своему. В каждой задаче есть предположение, в каких функциональных пространствах существует решение.

Повторим, что мы разделяем два вопроса:

А. Каковы необходимые условия существования «***предельного притягивающего***» решения?

В. Как осуществляется предельный переход к «***предельному притягивающему*** » решению?

Мы занимаемся только ответом на первый вопрос.

На конкретных решениях, взятых из работ вышеперечисленных авторов, при вычислении конкретных формул собственных чисел решение $Z(x,t)$ эволюционирует к «***предельному притягивающему*** » решению если такое существует в данной задаче. Необходимые условия, когда происходит этот переход, установлены поставленным и описанным выше математическим экспериментом.

Теорема 2.8.1

Пусть $\Omega(x,t)$— неизвестное решение квазилинейного параболического уравнения (2.2) или (2.89) и является «***пре-***

дельным
притягивающим» решением. Оно может быть и тождественным нулем. Пусть сделана замена переменных (2.3), установлены дифференциальные связи (2.6) и вычислены собственные числа соответствующей матрицы СФЛАУ.

а. В вырожденном случае функция
$Z(x,t) = Z(x+bt)$ удовлетворяет квазилинейному уравнению в частных производных (2.2) или (2.89) и соответствующему ОДУ.

С необходимостью выполнены условия: дискриминант $D \geq 0$, три собственных числа равны нулю, а одно собственное число отлично от нуля $\lambda = TrA < 0$ в некоторой области $\omega_1(x,t) \subset R^2$.

б. В невырожденном случае с необходимостью выполнено условие: собственное число матрицы A $\lambda_2 \leq 0$, и существует область $\omega_2(x,t) \subset R^2$ в которой дискриминант $D \geq 0$, и собственное число $\lambda_3 \leq 0$ при любом t в указанной области. Трек матрицы TrA меняет знак в области определения.

Тогда $\Omega(x,t)$ существует и выполнено: $Z_1(x,t) \to \Omega(x,t)$ для любого значения $x \in \omega_2(x,t)$ при $t \to \infty$, где $Z_1(x,t)$ некоторое решение смешанной задачи с начальными и краевыми условиями соответствующим одному из трех случаев (***1- 3 случаи*** выделенные в начале параграфа) для уравнений (2.2),(2.89), стремится к «предельному притягивающему» решению в некотором смысле, определенном в каждой конкретной задаче.

□

Комментарии к доказательству.

После тривиальной замены, как уже говорилось, уравнение (2.2) или обобщающие его уравнение (2.89) переходит само в себя, а следовательно вычисленные коэффициенты матрицы A_1 и все ее характеристики приписываются исходному уравнению.

Студент: Какая польза для практики от такой теоремы?

Авторы:

Так как после тривиальной замены функции $Z(x,t)$ и $U(\xi,\delta)$ тождественно равны $Z(x,t) \equiv U(\xi,\delta)$, можно вычислить собственные числа по известному точному решению. Мы уже отмечали, что собственные числа на самом деле функции независимых переменных и зависят от краевых и начальных условий, неявно через известное решение. Поскольку замена тривиальная, дифференциальные связи (2.7) имеют вид

$Y(\xi,\delta) = K(U){U'}_{\xi}(\xi,\delta) = K(Z){Z'}_{x}$,

$T(\xi,\delta) = K(U){U'}_{\delta}(\xi,\delta) = K(Z){Z'}_{t}$.

Можно предпринять попытку выяснить условия, когда собственное число $\lambda_3 \leq 0$ в нелинейном случае, то есть сделать оценку. Это конечно сложнее, чем в линейном случае, о чем мы говорили в заключении пункта *(c.)*

Подобную теорему можно сформулировать для случая многих независимых переменных при некоторых дополнительных предположениях. Теорема 2.8.1 сформулирована для не локализованных решений.

Расчеты, выполненные на известных локализованных решениях, взятых их работ вышеперечисленных авторов, показывают, что условия теоремы верны внутри области локализации. Анализ растущих и обостряющихся решений, показывают, что для них условия теоремы 2.8.1 нарушаются.

Ясно, что теория применима к широкому классу уравнений и систем.

Аналогичная гипотетическая теорема сформулирова-

на совместно с
А.К. Волосовой для системы параболических полулинейных уравнений Эйгена.

Собственные числа для уравнения Колмогорова, Фоккера, Планка в стохастической задаче управления колебаниями вычислены совместно с С.О. Синицыным.

Совместно с Е.К. Вдовиной и А.К. Волосовой вычислены необходимые условия стабилизации для смешанных задач линейных параболических уравнений с переменными коэффициентами.

Совместно с Е.К. Вдовиной и А.К. Волосовой написана работа дополняющая теорию солитонов.

Можно наметить дальнейшую программу развития описанной теории. Нужно записать нелинейное уравнение как СФЛАУ в базисе из собственных векторов и строить решения в виде разложения их в таком базисе.

2.9 Основные формулы для расчета трехмерного случая

Конечно, интересно получить результаты при применении этой теории в случае многих переменных. В вычислительной математике существует понятие "проклятие размерности ". Это означает, что с увеличением размерности задача усложняется. Если независимых переменных две x, t, то уравнение второго порядка в частных производных всегда записывается как СФЛАУ, если его решение — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Если независимых переменных три (x, t, y), и более, то уравнение второго порядка в частных производных записывается как СФЛАУ только при некоторых дополнительных предположениях. Приведем здесь формулы связи производных старых переменных по новым, потому что именно на этом этапе, по нашим наблюдениям, встречается наибольшее количество ошибок.

Рассмотрим случай трех независимых переменных

x, t, y. Переходим к переменным ξ, δ, τ, то есть
$x = x(\xi, \delta, \tau), t = t(\xi, \delta, \tau), y = y(\xi, \delta, \tau)$.

Предположим, что якобиан замены переменных

$detJ \neq 0$ не равен нулю и бесконечности, а матрица Якоби имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} x'_\xi & x'_\delta & x'_\tau \\ \\ t'_\xi & t'_\delta & t'_\tau \\ \\ y'_\xi & y'_\delta & y'_\tau \end{pmatrix}.$$

Тогда, хотя бы локально, существует обратное преобразование,

$\xi = \xi(x, t, y), \delta = \delta(x, t, y), \tau = \tau(x, t, y)$.

Обратная матрица J^{-1} имеет вид

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \xi'_x(x,t,y) & \xi'_t(x,t,y) & \xi'_y(x,t,y) \\ \\ \delta'_x(x,t,y) & \delta'_t(x,t,y) & \delta'_y(x,t,y) \\ \\ \tau'_x(x,t,y) & \tau'_t(x,t,y) & \tau'_y(x,t,y) \\ \\ \end{pmatrix}.$$

Ниже аргументы в функциях опускаем. Так как должно быть быть выполнено равенство $JJ^{-1} = E$, решаем систему уравнений $JJ^{-1} = E$ и получаем формулы пересчёта производных новых переменных

$\xi(x,t,y), \delta(x,t,y), \tau(x,t,y)$ **по старым переменным** x, t, y**.**

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial\delta}\frac{\partial y}{\partial\xi} - \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\delta}\right)/detJ, \quad \frac{\partial\delta}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\tau} - \frac{\partial x}{\partial\tau}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)/detJ,$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial\tau}\frac{\partial y}{\partial\delta} - \frac{\partial x}{\partial\delta}\frac{\partial y}{\partial\tau}\right)/detJ, \quad \frac{\partial\xi}{\partial x} = \left(\frac{\partial y}{\partial\tau}\frac{\partial t}{\partial\delta} - \frac{\partial y}{\partial\delta}\frac{\partial t}{\partial\tau}\right)/detJ,$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial x} = \left(\frac{\partial t}{\partial\tau}\frac{\partial y}{\partial\xi} - \frac{\partial t}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\tau}\right)/detJ, \quad \frac{\partial\tau}{\partial x} = \left(\frac{\partial t}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\delta} - \frac{\partial t}{\partial\delta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)/detJ,$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial y} = \left(\frac{\partial t}{\partial\tau}\frac{\partial x}{\partial\delta} - \frac{\partial t}{\partial\delta}\frac{\partial x}{\partial\tau}\right)/detJ, \quad \frac{\partial\delta}{\partial y} = \left(\frac{\partial x}{\partial\tau}\frac{\partial t}{\partial\xi} - \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial t}{\partial\tau}\right)/detJ,$$
$$\frac{\partial\tau}{\partial y} = \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial t}{\partial\delta} - \frac{\partial x}{\partial\delta}\frac{\partial t}{\partial\xi}\right)/detJ. \tag{2.90}$$

Конечно, из этой системы, можно выразить, наоборот, производные старых переменных x, t, y **по новым** ξ, δ, τ**.**

Если в данных соотношениях положить $y(\xi, \delta, \tau) = \tau$**, то есть предположить наличие зависимости только от одной переменной, то получим формулы двухмерного случая, которые приведены в параграфе 2.1.**

2.10 Выдержка из отзыва профессора М.В.Карасева

В диссертации [11] собран ряд интересных решений и целых классов решений (точных и асимптотических) для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, важных в приложениях. Эти решения были получены К. А. Волосовым более, чем за 20 лет. Можно было бы подробно обсудить их одно за другим. Еще можно было бы высказать замечания о некоторых местах текста диссертации с точки зрения отсутствия ясности изложения. Но цель данного отзыва

— обратить внимание на метод, изложенный в главе 1 диссертации.

В теории нелинейных дифференциальных уравнений иногда успешно срабатывает прием, когда данное уравнение неким преобразованием (скажем, заменой переменных) сводится к другому уравнению, решение которого уже известно. Таким образом, это известное решение генерирует достаточно нетривиальное решение исходного уравнения. В подходе К. А. Волосова предлагается априори не фиксировать вид замены переменных, оставив его на первом шаге произвольным. Получившаяся в итоге, после замены переменных, система содержит как искомую вектор-функцию (искомое решение и его производные), так и неизвестное координатное преобразование (матрицу Якоби замены переменных). Количество уравнений в этой системе всегда меньше количества неизвестных, что открывает возможности для построения решения с помощью введения тех или иных связей между компонентами искомой вектор-функции. Ограничение на выбор связей заключается в том, что после их введения уравнения на функции координатной замены должны быть совместными. Условие совместности — это условие на оставшиеся независимые компоненты искомой вектор — функции.

Например, в классическом случае, для дифференциальных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, искомая вектор-функция имеет три компоненты, координатная замена содержит еще две функции, и все они вместе подчинены четырем дифференциальным уравнениям первого порядка. Оказывается, из этих уравнений все элементы $(2x2)$ матрицы Якоби координатной замены удается явно выразить через компоненты искомой вектор-функции. На данном этапе нет необходимости вводить дополнительные связи. Далее, полученная формула для матрицы Якоби рассматривается как система уравнений первого порядка относительно двух функций координатной замены, и записывается условие совместности этой системы. Оно сводится всего к одному уравнению, но содержит три компоненты искомой вектор-функции. В итоге, появляется большая свобода для удовлетворения условию совместности. Здесь уже полезно вводить связи, что позволяет во многих случаях свести условие совместности к обыкновенному дифференциальному уравнению или даже явно разрешить. После этого нужно вернуться к построению координатной замены, т.е. к интегрированию упомянутой системы первого порядка, но теперь уже с известной правой частью. В той степени, насколько это интегрирование можно выполнить явно в квадратурах, в той же степени удается построить явное решение исходного нелинейного уравнения с частными производными.

Этот алгоритм не привязан ни к каким групповым или симметрийным свойствам. Предлагаемое преобразование нелинейных дифференциальных уравнений со многими переменными и механизм интегрирования имеют общую природу. При этом коэффициенты и вид нелинейностей в решаемом уравнении не конкретизируются, а остаются общими функциями.

Нужно заметить, что К.А.Волосов смог найти этот новый метод, только благодаря наблюдательности, умению внимательно "рассматривать"формулы в примерах и применению компьютерной техники. Сначала был изучен известный пример решения квазилинейного параболического уравнения Зельдовича — Компанейца в предварительной работе[15] [37], а затем результат был обобщен на все виды уравнений с частными производными. Получить окончательные ключевые теоремы 1.2.1 — 1.2.3 [16]гл. 1 без использования компьютера было бы очень не просто и, даже вообще, проблематично, поскольку никто не взялся бы за такой большой ручной счет просто по причине неуверенности получения в конце какого-либо результата. Работа К.А.Волосова в этом плане исключительная.

Конечно, после того, как с помощью вычислительной техники получены основные формулы, задающие решение в символьной форме, их в принципе уже можно проверить «дедовским» методом, т.е., вручную, проведя довольно длинные (на несколько страниц) алгебраические выкладки. Я не поленился выполнить такую ручную проверку для класса нелинейных параболических уравнений с двумя независимыми переменными, рассмотренного в разделе 1.2 диссертации, и явно убедился в том, что рожденные на компьютере и весьма сложные формулы К. А. Волосова дают точные решения для этого важного класса нелинейных дифференциальных уравнений математической физики.

В заключение - комментарий о названии диссертации, где использован редко встречающийся в математических текстах термин «методика». Для всех привычней звучал бы термин «метод» или «методы». С другой стороны, древнегреческое по своему происхождению слово «методика», если отвлечься от его дидактического и бюрократического значения, изначально имеет несколько иной, расширительный, обобщающий оттенок, и сродни слову «технология». С этих позиций такой термин вполне

[15]В данном пособии этот пример изложен в параграфе 2.2.

[16]В данном пособии это теоремы 2.1.1 — 2.1.3.

применим к данной диссертации, содержащей не только конкретные классы новых решений, но и новую концептуальную «технологическую» идею.

Эта работа открывает очень интересное направление в целом ряде областей математики и ее приложений, имеющих дело с нелинейными уравнениями с частными производными высокого порядка.

подпись Заведующий кафедрой «Прикладной математики» Московского государственного института электроники и математики, лауреат Государственной премии России, профессор, д.ф.-м.н. М. В. Карасев.

Литература

[1] В.И.Арнольд.Что такое математика. М., Изд.МЦНМО,2008.

[2]*a*.Зельдович Я.Б. К теории распространения пламени ЖФХ.1948.Т. 22,С.27-48

b. Зельдович Я.Б., Компанеец А.С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры К 70-летию А.Ф. Иоффе.М.: Изд-во АН СССР, 1950.С. 142.

[3]Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов И.С. Бюллетень МГУ. Секция А.1937.Т.1, вып. 6.С. 1-25

[4] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.:Наука, 1972.

[5] Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., ГИФМЛ.1961.

[6] Данилов В.Г. Применение асимптотических методов в задачах тепломассопереноса. -Автореф. дис... доктора ф.-м.н. М.,1989.324 с.

[7] Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

[8] К.А.Волосов, В.Г.Данилов, Н.А. Маслов. Математическое моделирование технологических процессов изготовления
БИС.М.:ВИНИТИ, 1984.

[9] В.П.Маслов, В.Г.Данилов, К.А.Волосов, Математическое моделирование процессов тепломассопереноса (эволюция диссипативных структур). М.,Наука, 1987.

[10] V.P. Maslov, V.G.Danilov , K.A. Volosov Mathematical Modelling of Heat and Mass Transfer Processes. Kluver Academic Publishers. Dordrecht,Boston, London, 1995.

[11] Волосов К.А. Методика анализа эволюционных систем с распределенными параметрами, дис... доктора ф.-

м.н., 2007, МИЭМ. Диссертация выставлена на сайте "Мир дифференциальных уравнений http:// eqworld.ipmnet.ru, в разделе диссертаций. См. также www.aplsmath.ru
[12] Волосов К.А. Формулы для точных решений квазилинейных уравнений с частными производными в неявной форме. Доклады АН 2008,т.77, н.1,С.1-4. English transl. in Dokludy Akademii Nauk. 2008, V.418, No.1, pp.11-14.
[13] Волосов К.А. Конструирование решений квазилинейных уравнений с частными производными. Сибирский журнал индустриальной математики 2008,т.11, н.2(34),С.29-39.English transl.in J. of Applied and Industrial Math.2009, V.3,No.4,pp.519-527.
[14](a.)Волосов К.А. Метод построения решений квазилинейных параболических уравнений в параметрической форме.
Изд.С-Петербургский педагогический университет., Материалы научной конфер. Герценовские чтения,
(17-22 04.2006), С-Петербург,2006 с.35-40.

(b.)Волосов К.А. Российский гос. Педагогический университет А.И.Герцена. Фундаментальная библиотека имени императрицы Марии Федоровны. Научный журнал "Известия Российского гос. Пед. унив. А.И. Герцена"2007, N 7, (26) Естественные и точные науки с.13-20. http:// lib.herzen.spb.ru/ page154a.asp?s=11
[15] Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии: Лекции о моделях.М.:Мир, 1983.
[16]Атомный проект СССР III.Водородная бомба 1945-1956.М.: Наука,Физматлит 2008.
[17]Синицын С.О., Волосова А.К., Волосов К.А., Братусь А.С.
Решение уравнения КППФ в параметрической форме.
Изд.С-Петербургский педагогический университет., Ма-

териалы научной конфер. Герценовские чтения,
(13-15 04.2009), С-Петербург,2009.с.35-40.
[18] Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.:Наука, 1978.
[19] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия.Методы и приложения. М.:Наука, 1979.
[20] Воробьев Е.М. Частичные симметрии и многомерные интегрируемые дифференциальные уравнения.
Дифф. урав.1989.Т.25.№3.С.461–465.
[21] Воробьев Е.М. Инвариантные и частично инвариантные решения краевых задач.
Докл. АН СССР.1989.Т.306.№4.С.836–840.
[22] Ablowitz M.J.,Zeppetella A.Explicit Solutions of Fisher's equation for a Special Wave Speed. Bulletin of Math. Biology. 1979.,V.28,PP.835-840
[23] Овсяников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.,:Наука, 1978.
[24] Волосов К.А. Численные методы. М., МИИТ, 2009.
[25] Комплексные технологии виртуального моделирования и инженерного дела. MSC. Software Coorporation, www.mscsoftware.ru, www.mscsoftware.com
[26] Тарасов Л.В., Тарасова А.Н. Вопросы и задачи по физике.М., Высшая школа.1968.
[27] Fisher R.A. The wave of advance of advantageous genes. Ann.Eugenics 7, p.355-369.
[28] Engler H. Relationsbetween travelling wave solutions of quasi-linear parabolic equations. Proc.Amer.Math.Soc. 1985.V.93,N.2, p.297-302.
[29] Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.В., Махвиладзе Г.М. Математическая теория горения и взрыва.М.:Наука.1980.
[30] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по

математическому анализу. М.,Наука.1969.
[31] Мартинсон Л.К. Локализованные тепловые структуры в среде с объемным поглащением тепла.
ПМТФ.1981.№ 2.С.70-73.
[32] Мартинсон Л.К. Исследование математической модели процесса нелинейной теплопроводности в средах с объемным поглащением. с.279–309. Математическое моделирование.
Процессы в нелинейных средах. Под редакцией Самарского А.А., Галактионова В.А., Курдюмова С.П. Сборник статей. М.:Наука,1986.
[33] Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики.М.:Изд. МГТУ им. Н.Э.Баумана,1996.
[34] Kershner R.O. Oncertain properties of generalized solutions of quasilinear degenerate parabolic equations, Acta Math. Acad.Sci. Hungaricae.1978.Vol.32.No.3.P.301-330.
[35] Волосова А.К., Волосов К.А. Конструирование решений уравнений с частными производными. Международный журнал Математики и Математических наук.
International Journal of Mathematics and Mathematical Siences. V.2009,Article ID, 319268,17 p.
http://www.hindawi.com/journals/ijmms/2009/319269.html.
doi:10.1155./2009/319269
[36] И.В.Андрианов, Р.Г.Баранцев, Л.И.Маневич Асимптотическая математика и синергетика. М.,Изд.Едиториал УРСС,2004.
[37] Волосов К.А. Преобразование приближенных решений линейных параболических решений в асимптотические решения квазилинейного параболического уравнения.
Мат. зам.1994.Т.56.№6.С.122-126.

Volosov K.A.Transformation of Approximate solutions of liner parabolic equations into asymptotic solutions of quasilinear parabolic equations.
Mathematical Notes.1994.Vol.56.№5-6.P.1295-1299.
[38] Волосов В.М.,Моргунов Б.И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем.М.:Изд.МГУ, 1971.
[39] Литвак М.Е. Из ада в рай.М.:Изд."Феникс ", 2003.
[40] Петров А.З. Новые методы в теории относительности. М.Наука.1966.
[41] Горобец Б.С. Круг Ландау и Лифшеца. М., Либроком, 2009.
[42] Денисов В.Н. О стабилизации решений задачи Коши линейных параболических уравнений с растущими младшими коэффициентами. Доклады РАН, 2010, Т. 430, №5, С.586-588
[43] Разживайкин В.Н. Труды МФТИ. Т.1.№4, 2009.
[44] Владимиров В.С. Уравнения математической физики.М.Наука.1971
[45] Полянин А.Д., Вязьмин А.В., Журов А.И., Казенин Д.А. Справочник по точным решениям уравнений тепломассапереноса. М.: Факториал,1998.
[46] Бабич В.М., Капелевич М.Б., Михлин С.Б. и др. Линейные уравнения математической физики. М.:Наука. 1964.
[47] Полянин А.Д. Справочник. Линейные уравнения математической физики. М.:Физматлит. 2001.
[48] Волосов К.А., Федотов И.А. Асимптотическое представление решения квазилинейного параболического уравнения в окрестности фронта. ЖВМ и МФ.,Т.5, №5. 1983. С.93-104.
[49] Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Вве-

дение в нелинейную динамику. Хаос и фракталы. М.:Изд.ЛКИ,2007.
[50] Сулейманов Б.И. О решениях краевых задач типа Колмогорова-Петровского-Пискунова. Матем. заметки 83:4, С.618-628, 2008.
[51] Беркович Л.М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. М.: НИЦ, 2002,464 с.