ФИНАЛЬНОЕ СВЕДЕНИЕ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ К СИСТЕМАМ ОДУ

А.В. Романов (МИЭМ, Москва)

Доклад будет посвящён конечномерному описанию предельной динамики полулинейных параболических уравнений. Идея о конечномерной природе динамики таких уравнений при большом времени восходит к работе [Hopf1948] и исторически связана с проблемой турбулентности.

[Hopf1948] E. Hopf. A mathematical example displaying features of turbulence. Comm. Appl. Math., 1:4, 303–322.

1. ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассмотрим абстрактное диссипативное полулинейное параболическое уравнение (ППУ)

$$u_t = -Au + F(u) \qquad (1\text{-}1)$$

в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве X со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $|\cdot|$. Предполагаем что A положительный самосопряжённый линейный оператор в X с компактным обратным и обозначаем через $\{X^\theta\}_{\theta\geq 0}$ порождённую им гильбертову шкалу. Пусть также справедлива оценка

$$|F(u)-F(v)| \leq K|u-v|_\theta \qquad (u,v\in X^\theta) \qquad (1\text{-}2)$$

для нелинейного члена F с некоторым $\theta\in[0,1)$ где $|u|_\theta = |A^\theta u|$. Назовём число θ показателем нелинейности уравнения (1-1). Разрешающий фазовый полупоток Φ_t в X^θ инъективен в случае $\theta\leq 1/2$ [Temam1997] и наследует гладкость функции $F: X^\theta \to X$ [Хенри 1985] в общем случае. В этой ситуации существует компактный глобальный аттрактор $\mathcal{A}\subset X^\theta$ [Temam1997], т.е. максимальное ограниченное инвариантное множество X^θ (фактически, $\mathcal{A}$ равномерно притягивает ограниченные подмножества в X^θ при $t\to+\infty$).

Конечномерное описание предельной динамики ППУ (1-1) означает существование ОДУ

$$x_t = h(x) \quad (x\in R^n)$$

с (по крайней мере) непрерывным векторным полем $h(x)$ и единственными решениями , описывающим (как максимум) поведение всех решений $u(t)$ при большом времени и (как минимум) поведение решений $u(t)\in\mathcal{A}$ для $t\in(-\infty,\infty)$.

[Temam1997] R. Temam. Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. Appl. Math. Sci. 68, Berlin: Springer, 2-nd ed.
[Хенри 1985] Д. Хенри. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М., Мир, 1985.

2. ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

Наиболее радикальный подход к задаче описания финальной динамики ППУ (1-1) системой ОДУ в R^n связан с концепцией инерциального многообразия (ИМ): гладкой или липшицевой конечномерной инвариантной поверхности $\mathcal{M}$ в X^θ содержащей аттрактор и экспоненциально притягивающей все решения $u(t)$ при большом времени с асимптотической фазой. Разумеется, гладкость ИМ не может превосходить гладкость функции $F: X^\theta \to X$. Обычно ИМ строится как график над нижними модами линейной части уравнения к высшим модам. Сужение (1-1) на $\mathcal{M}$ даёт ОДУ в R^n ($n = \dim \mathcal{M}$), полностью воспроизводящее финальную X^θ - фазовую динамику ППУ при $t \to +\infty$. Большинство известных методов построения липшицева или C^1-гладкого ИМ требуют условия спектрального скачка

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > cK(\lambda_{n+1}^\theta + \lambda_n^\theta), \qquad (2\text{-}1)$$

где K число из неравенства (1-2) и $\{\lambda_1 \le \lambda_2 \le ...\} = \sigma(A)$. В случае $\mathcal{M} \in \mathrm{Lip}$ оптимальная константа c этом условии равна 1 [Mik1991], [Ром 1991-1993] (простое и краткое доказательство с $c = 2$ получено в статьях [Rob1993-1995]). Для случая $\mathcal{M} \in C^1$ наилучшая известная постоянная c в (2-1) равна $\sqrt{2}$ (см. [Kok1997]). Достаточное условие существования ИМ класса C^k при $k \ge 2$ оказывается очень жёстким

$$\lambda_{n+1} - k\lambda_n > cK(\lambda_{n+1}^\theta + \lambda_n^\theta)$$

[Kok1997] и обычно практически неприменимо.

Даже в виде (2-1) условие спектрального скачка весьма ограничительно и существование ИМ удаётся доказать лишь узкого класса ППУ. Этот класс включает в себя, например, скалярные или векторные 1d уравнения реакции-диффузии, а также скалярные уравнения подобного типа в некоторых специальных областях $D \subset R^n$ $(n = 2,3)$. Во втором случае условие (2-1) обычно не выполняется и нужно использовать так называемый «принцип пространственного усреднения» предложенный в [MP-Sell1988] (см. также [Kwean2001]).

Следует отметить недавние результаты Е. Вукадиновича (см. [Vuk2009], [Vuk2011] и ссылки там). Так, в последней статье построено ИМ для диффузионного уравнения Бюргерса вида

$$u_t + (u \cdot \nabla)u = \Delta u + Tu + \nabla g(x) \qquad (u = \nabla\varphi), \qquad (2\text{-}2)$$

где $u(t,x)$ – функции с нулевым средним на торе $[-\pi,\pi]^d$, $d=1,2$. Оператор T здесь представляет собой мультипликатор Фурье с ограниченным символом $m: Z^d \to R$, $m(0)=0$. В указанных работах к исходной задаче применяются подходящие преобразования с тем, чтобы обойти условие спектрального скачка. В частности, для уравнения (2-2) используется преобразование Коула-Хопфа. При этом важно, что данные преобразования сохраняют симметричность линейной части уравнения. Полезно напомнить в этой связи многочисленные неверные работы опубликованные в 90-е годы (M. Kwak и ряд других авторов), в которых данное свойство терялось после преобразования оригинального уравнения.

[Mik1991] M. Miklavcic. A sharp condition for existence of an inertial manifold. J. Dyn. Differ. Eq., 3:3, 437-456.

[Ром1991] А.В. Романов. Условия асимптотической k - мерности полулинейных параболических уравнений. Успехи матем. наук, 46:1, 213-214.

[Ром1993] А.В. Романов. Точные оценки размерности инерциальных многообразий для нелинейных параболических уравнений. Изв. РАН, сер. матем., 57:4, 36–54.

[Rob1993] J. C. Robinson. Inertial manifolds and the cone condition. Dyn. Systems Appl., 2:3, 311–330.

[Rob1995] J. C. Robinson. A concise proof of the geometric construction of inertial manifolds. Phys. Lett. A, 200, 415–417.

[Kok1997] N. Koksch. Almost sharp conditions for the existence of smooth inertial manifolds. Conf. Diff. Equat. Appl. (Equadiff-9), 1997, Brno, 139-166.

[MP-Sell1988] J. Mallet-Paret and R. Sell. Inertial manifolds for reaction diffusion equations in higher space dimensions. J. Amer. Math. Soc., 1:4, 805–866.

[Kwean2001] H. Kwean. An inertial manifold and the principle of spatial averaging. Int. J. Math. Math. Sci., 28:5, 293–299.

[Vuk2009] J. Vukadinovic. Inertial manifolds for a Smoluchowski equation on a unit sphere. Comm. Math. Phys., 285:3, 975-990.

[Vuk2011] J. Vukadinovic. Global dissipativity and inertial manifolds for diffusive Burgers equations with low-wavenumber instability. Discr. Cont. Dyn. Syst., 29:1, 327-341.

3. НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ ИНЕРЦИАЛЬНОГО МНОГООБРАЗИЯ

В настоящее время известно очень мало о случаях отсутствия ИМ для ППУ (1-1). В работе [Ром2000] была построена система двух связанных 1d параболических псевдо-дифференциальных уравнений не имеющая гладкого ИМ. Более естественный пример упомянут в тезисах доклада [Ром2002]. Рассмотрим интегро-дифференциальное параболическое уравнение

$$u_t = ((I+B)u_x)_x + f(x,u,u_x) + Ku \qquad (3\text{-}1)$$

на единичной окружности Γ. Ограниченные линейные операторы K, $I=id$ и $B=B^*$ действуют в $X=L^2(\Gamma)$, а функция $f(x,u,p)$ гладкая, но не аналитическая. Оператор $I+B\ \geq 0$ играет здесь роль нелокального коэффициента диффузии, а величину Ku можно интерпретировать как нелокальный источник. Более точно,

$$(Bh)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{x+y}{2}\right| h(y)\,dy$$

для $h \in X$. Заметим, что $\partial_x B$ это слегка модифицированный оператор Гильберта с ядром $ctg\frac{x+y}{2}$ вместо $ctg\frac{x-y}{2}$.

ТЕОРЕМА 3.1. *При подходящем выборе функции* f *и компактного интегрального оператора* K *с* C^∞*- ядром уравнение* (3-1) *порождает гладкий диссипативный полупоток в* X^θ, $\theta > 3/4$ *и не существует инвариантного конечномерного* C^1 *- многообразия* $\mathcal{M} \subset X^\theta$ *содержащего в себе аттрактор этого уравнения.*

Оба упомянутых примера основаны на свойствах спектра

$$\sigma_u = \sigma(A - DF(u))$$

в стационарных точках ППУ (1-1). Пусть E это множество гиперболических стационарных точек $u \in X^\theta$, для которых σ_u не содержит вещественных значений $\lambda > 0$. Пусть ещё $l(u)$ число (с кратностью) значений величин $\lambda < 0$ в спектре σ_u. Ясно, что $l(u) < \infty$.

ЛЕММА 3.2 [Ром2000]. *Если аттрактор* $\mathcal{A}$ *уравнения* (1-1) *содержится в некотором гладком инвариантном конечномерном многообразии* $\mathcal{M} \subset X^\theta$, *то для любых точек* $u_1, u_2 \in E$ *число* $l(u_1) - l(u_2)$ *чётно.*

На основе этого результата в недавней работе [EKZ2011] получена общая конструкция абстрактного ППУ без гладкого ИМ. К сожалению более реалистических примеров, чем уравнение (3-1) в этой связи пока не известно.

[Ром2000] А.В. Романов. Три контрпримера в теории инерциальных многообразий. Матем. заметки, 68:3, 439–445.

[Ром2002] А.В. Романов. О конечномерной динамике параболических уравнений. Нелинейный динамический анализ (NDA'2). Москва, Июнь 3-8, 195.

[EKZ2011] A. Eden, V. Kalanarov, S. Zelik. Counterexamples to the regularity of Mane projections and global attractors, arXiv:1108.0217v1 [math.AP] 1 Aug 2011.

4. ЛИПШИЦЕВА КОНЕЧНОМЕРНАЯ ДИНАМИКА НА АТТРАКТОРЕ

Поскольку имеют место вышеуказанные проблемы с существованием ИМ, в работах [EFNT1994] и [Rob1999] было предложено рассматривать ОДУ, воспроизводящие фазовую динамику эволюционного уравнения (1-1) только на аттракторе. Скажем в этой связи (следуя [Ром2000]), что динамика на аттракторе липшиц-конечномерна (имеет место свойство LFDA), если для некоторого ОДУ

$$x_t = h(x) \qquad\qquad (x \in R^n,\ h \in \mathrm{Lip})$$

с фазовым потоком S_t и S_t - инвариантного компакта $V \subset R^n$ динамические системы Φ_t на $\mathcal{A}$ и S_t на V липшиц-сопряжены при $t > 0$. Свойство LFDA формально слабее, чем свойство существования ИМ, так как в первом случае рассматривается динамика только на аттракторе.

Я не буду обсуждать здесь важный вопрос о том, будет ли при этом V глобальным аттрактором потока S_t.

Пусть далее $G(u) = F(u) - Au$ и P_n ортогональный спектральный проектор в X^θ (проектор Фурье), соответствующий первым n (с кратностью) нижним модам оператора A. Пусть ещё $\mathcal{A}_0$ обозначает множество разностей $w = u - v$ при различных $u, v \in \mathcal{A}$.

В работах [Ром2000-2006] были получены следующие критерии свойства LFDA.

(Vf) Векторное поле уравнения (1-1) липшицево на аттракторе, т.е.

$$\left| G(u) - G(v) \right|_\theta \le C_1 \left| u - v \right|_\theta$$

для $u, v \in \mathcal{A}$.

(Fl) Полупоток Φ_t на аттракторе инъективен и расширяется до липшицева потока. Это означает что

$$\left| \Phi_t u - \Phi_t v \right|_\theta \le C_2 e^{k|t|} \left| u - v \right|_\theta$$

на $\mathcal{A}$ для любых $t \in R$ и $k = k(\mathcal{A})$.

(Fl0) Справедлива оценка

$$\left| \Phi_\tau u - \Phi_\tau v \right|_\theta \ge c(\tau) \left| u - v \right|_\theta$$

на $\mathcal{A}$ для некоторого фиксированного $\tau > 0$.

(Em) Метрики X^θ и X^β эквивалентны на $\mathcal{A}$ для некоторого (для любого) $\beta \in [0,1],\ \beta \ne \theta$.

(Le) Существует линейное билипшицево вложение аттрактора $\mathcal{A}$ в R^n (равносильное требование: вложение осуществляется конечномерным проектором $P \in \mathrm{End}\, X^\theta$). Последнее означает, что $\mathcal{A}$ есть липшицев график.

(Lle) Для любой точки $u \in \mathcal{A}$ некоторую её X^θ- окрестность на $\mathcal{A}$ можно линейно билипшицево вложить в R^n (с n зависящим u). Это свойство фактически означает, что $\mathcal{A}$ обладает локальной липшиц-декартовой структурой.

(GrF) Имеет место оценка

$$\left|u-v\right|_{\theta} \le C_3 \left|P_n(u-v)\right|_{\theta}$$

на $\mathcal{A}$ при некотором $n \ge 1$. Это означает возможность линейного билипшицева вложения аттрактора $\mathcal{A}$ в R^n с помощью проектора Фурье.

В этих формулах $C_i = C_i(\mathcal{A})$. Некоторые (но не все) из приведённых критериев предполагают дополнительное условие гладкости $F \in C^2(X^{\theta}, X)$.

Критерий (Em) для $1 > \beta > \theta$ был получен независимо в работах [Rob2003], [PM-Rob2010]) . Известно [CFKM1997], что свойство билипшицева вложения Фурье (GrF) следует из свойства (Em) при $\beta = 0,\ \theta = 1/2$. В сущности это факт сводится к ограниченности отношения Дирихле $\mu = \dfrac{(w, Aw)}{(w, w)}$ на $\mathcal{A}_0$.

Если обозначить через $\mathcal{A}^s$ множество точек $\omega = \dfrac{w}{|w|}$ $(w \in \mathcal{A}_0)$, то можно сформулировать ещё три критерия свойства LFDA.

(Sk) Множество $\mathcal{A}^s$ относительно компактно в X^{θ} ([Rom2001]).

(Sk0) Хаусдорфова мера некомпактности множества $\mathcal{A}^s$ меньше 1, т.е. $\mathcal{A}^s$ лежит в ε-окрестности некоторого компактного множества $H \subset X^{\theta}$ с $\varepsilon < 1$ ([Rom2006]).

(Skw) Слабое замыкание множества $\mathcal{A}^s$ в X^{θ} не содержит ([ML-W2005]).

H. Movahedi-Lankarani назвал свойства (Sk) и (Skw) множества $\mathcal{A}$ “сферической компактностью” и “слабой сферической компактностью” соответственно. Более точно, в работе [ML-W2005] доказано, что (Sk) $\Rightarrow$ (Le) и (Skw) $\Leftrightarrow$ (Le) *для любого компактного* множества $\mathcal{A}$ *в любом пространстве Банаха.*

Сформулируем также полезное достаточное условие [Rom2000-2001]: если аттрактор $\mathcal{A}$ содержится в конечномерном C^1-подмногообразии $\mathcal{M} \subset X^{\theta}$, то справедливо свойство LFDA. *При этом не предполагается инвариантность* $\mathcal{M}$. Отметим, что как следует из свойств (Le), (GrF) аттрактор есть часть конечномерного липшицева подмногообразия $\mathcal{M} \subset X^{\theta}$. Наконец, если положить

$$G^s = \{ w \in X^{\theta} :\ w = \frac{G(u)}{\|G(u)\|_{\theta}} \} \qquad (u \in \mathcal{A},\ G(u) \ne 0),$$

то $G^s \subset \mathrm{cl}(\mathcal{A}^s)$ и условие относительной компактности подмножества G^s единичной сферы гильбертова пространства X^{θ} оказывается необходимым для справедливости свойства LFDA полулинейного параболического уравнения (1-1).

[EFNT1994] A. Eden, C. Foias, B. Nicolaenko, R. Temam. Exponential Attractors for

Dissipative Evolution Equations. Wiley: New York.
[Rob1999] J.C. Robinson. Global attractors: topology and finite-dimensional dynamics. J. Dyn. Differ. Eq., 11:3, 557–581.
[Ром2000] А.В. Романов. Конечномерная предельная динамика диссипативных параболических уравнений. Матем. сб., 2000, 191:3, 99-112.
[Ром2001] А.В. Романов. Конечномерность динамики на аттракторе для нелинейных параболических уравнений. Изв. РАН, сер. матем., 2001, 65:5, 129-152.
[Ром2006] А.В. Романов. Эффективная конечная параметризация в фазовых пространствах параболических уравнений. Изв. РАН, сер. матем., 2006, 70:5, 163-178.
[Rob2003] J. C. Robinson. Attractors and finite-dimensional behavior in the Navier- Stokes equations. Instructional Conf. Math. Anal. of Hydrodynamics.
[PM-Rob2010] E. Pinto de Moura, J.C. Robinson. Log-Lipschitz continuity of the vector field on the attractor of certain parabolic equations, arXiv:1008.4949v1 [math.AP], 29 Aug.
[CFKM1997] P. Constantin, C. Foias, I. Kukavica, A. Majda. Dirichlet quotients for periodic 2 dimensional Navier–Stokes equations. J. Math Pure Appl., 76:2, 125–153.
[ML-W2005] H. Movahedi-Lankarani, R. Wells. On bi-Lipschitz embeddings. Portugaliae Mathematica, 62:3, 247–268.

5. ПРИМЕРЫ ППУ СО СВОЙСТВОМ LFDA

Свойство LFDA выглядит как неплохая замена концепции ИМ, однако пока известно немного примеров уравнений (1-1) демонстрирующих LFDA, для которых не было бы доказано и существование ИМ. Это, например, [Rom2001] параболические уравнения

$$u_t = d\,u_{xx} + f(x,u,u_x), \quad x \in (0,1), \quad d > 0 \qquad (5\text{-}1)$$

в подходящем фазовом пространстве с гладкой функцией f и стандартными (Штурма или периодическими) краевыми условиями. Доказательство основано на нелинейной версии условия конуса с использованием критерия (Lle) локально липшицевой структуры аттрактора и использует также преобразование Лиувилля линеаризованного уравнения.

Независимо, I. Kukavica установил [Kuk2003] свойство вложения Фурье (GrF) для уравнения (5-1) в периодическом случае. Более того, он получил данное свойство и для диссипативного уравнения вида

$$u_t + (-1)^m u^{(2m)} = f(x,u,u_x,\ldots u^{(2m-2)}) \quad (m \geq 1)$$

на окружности. Доводы [Kuk2003] связанные с ограниченностью отношения Дирихле и подходящей версией преобразования Лиувилля проще, чем в [Ром2001], но дают более частный результат для уравнения (5-1). Наконец, в работе [Ром2001] было отмечено, что свойство LFDA демонстрируют системы 1d уравнений вида

$$u_t^j = (d(x)u_x^j)_x + f_j(x,u,u_x), \quad 1 \leq j \leq n$$

с граничными условиями Дирихле и гладкой функцией $d(x) > 0$. При этом используется некоторая модификация преобразования Лиувилля [Кам1992].

[Ром2001] А.В. Романов. Конечномерность динамики на аттракторе для нелинейных параболических уравнений. Изв. РАН, сер. матем., 2001, 65:5, 129-152.
[Kuk2003] I. Kukavica. Fourier parametrization of attractors for dissipative equations in one

space dimension. J. Dyn. Differ. Eq., 15:2/3, 473-484.
[Кам1992] Д.А. Камаев. Семейства устойчивых многообразий инвариантных множеств систем параболических уравнений. Успехи матем. наук, 47:5, 179–180.

6. LOG-ЛИПШИЦЕВА КОНЕЧНОМЕРНАЯ ДИНАМИКА НА АТТРАКТОРЕ

В наиболее слабой форме конечномерность динамики на аттракторе ([EFNT1994], [Rob1999]) означает единственность решений представляющего ОДЕ и только лишь непрерывность сопрягающего отображения. Будем говорить при этом о свойстве FDA эволюционного уравнения (1-1). Ещё одно ослабление свойства LFDA, принадлежащее E. Pinto de Moura и J.C. Robinson [PM-Rob2010], выглядит весьма перспективно. Предположим, что векторное поле $G(u)$ уравнения (1-1) η-log-липшицево на аттракторе в X^{θ}-норме, т.е.

$$\left|G(u)-G(v)\right|_{\theta} \le C_1\left|u-v\right|_{\theta} \ln^{\eta}\frac{M}{\left|u-v\right|_{\theta}} \qquad (u,v\in\mathcal{A}),$$

и существует линейное вложение $L: X^{\theta}\to R^{n}$ с γ-log-липшицевым обратным на образе $L(\mathcal{A})$. Недавно возможность такого вложения была доказана ([Ol-Rob2010], [Rob2010]) с любым $\gamma>1/2$ при условии, что множество $\mathcal{A}-\mathcal{A}$ однородно, т.е. имеет конечную размерность Булижена. Если здесь $\eta+\gamma\le 1$, то фазовая динамика ППУ (1-1) на аттракторе описывается ОДУ в R^{n} с единственными решениями. В этом случае можно говорить о log-липшицевой конечномерной динамике на аттракторе (свойстве log-LFDA) уравнения (1-1).

Ряд фактов свидетельствует о том, что LFDA или log-LFDA могут быть существенно более общими свойствами ППУ, чем существование инерциального многообразия. Я перечислю их.

1). Фактически ещё в работе Ладыженской [Лад1972] (см. также [Ром2000]) для класса ППУ содержащего 2d N-S на торе была получена оценка

$$\left|\Phi_{\tau}u-\Phi_{\tau}v\right|_{\theta}^{\kappa} \ge c(\tau)\left|u-v\right|_{\theta} \quad (\kappa=e^{-k\tau},\ \ \tau>0)$$

на $\mathcal{A}$ с некоторым $k=k(\mathcal{A})$ («почти» свойство (Fl0)).

2) Недавно I. Kukavica доказал [Kuk2007] (см. также [PM-Rob2010) оценку

$$\left|A^{1/2}w\right| \le C_1\left|w\right|\log^{1/2}\frac{M}{\left|w\right|} \qquad (w\in\mathcal{A}_0). \qquad (6\text{-}1)$$

при $\theta\le 1/2$. Если аттрактор $\mathcal{A}$ ограничен в X^1, $\theta=1/2$ и $F\in \mathrm{Lip}(X^{1/2},X^1)$, то [PM-Rob2010] неравенство

$$\left| Aw \right| \le C_2 \left| w \right| \log \frac{M}{\left| w \right|} \qquad (w \in \mathcal{A}_0) \qquad (6\text{-}2)$$

следует из (6-1). Наконец, оценка

$$\left| G(u) - G(v) \right| \le C_3 \left| u - v \right| \log \frac{M}{\left| u - v \right|} \qquad (u, v \in \mathcal{A})$$

легко следует из (6-2) (постоянные M, C_i зависят только от $\mathcal{A}$). Три последних соотношения это «почти» свойства (Em) and (Vf).

3) Согласно результатам работ [PM-Rob2010], [Ol-Rob2010] в предположении справедливости неравенства (6-2) для любого $0 < \kappa < 1$ найдётся линейный оператор $L : X^{\theta} \to R^n$ с $n = n(\kappa)$ такой, что

$$\left| u - v \right|_{\theta} \le C_{\kappa} \left| Lu - Lv \right|_{R^n}^{\kappa} \qquad (u, v \in \mathcal{A}).$$

Это «почти» свойство (Le).

По аналогии со случаем инерциальных многообразий естественно попробовать найти пример ППУ не обладающего липшицевой предельной динамикой. В недавней работе [EKZ2011] построено абстрактное уравнение вида (1-1) с показателем нелинейности $\theta = 0$ и гладкой нелинейной частью F такое, что на его аттракторе $\mathcal{A}$ найдутся две траектории $u(t)$ и $v(t)$, удовлетворяющие оценке

$$\left\| u(t) - v(t) \right\| \le C e^{-\kappa t^2}, \quad t \ge 0.$$

Согласно критерию (Fl) это гарантирует отсутствие липшиц-конечномерной динамики на $\mathcal{A}$. Более того, некоторая модификация соответствующей конструкции позволила авторам [EKZ2011] получить ППУ с бесконечно гладкой функцией F такое, что не существует инъективного на аттракторе конечномерного проектора $P \in \operatorname{End} X$ с 1-log-липшицевым обратным на образе $P\mathcal{A}$. Таким образом в последнем примере уравнение (1-1) не обладает даже log-липшицевой предельной динамикой.

[PM-Rob2010] E. Pinto de Moura, J.C. Robinson. Log-Lipschitz continuity of the vector field on the attractor of certain parabolic equations, arXiv:1008.4949v1 [math.AP] 29 Aug.

[Ol-Rob2010] E.J. Olson, J.C. Robinson. Almost bi-Lipschitz embeddings and almost homogeneous sets. Trans. Amer. Math. Soc., 362:1, 45-168.

[Rob2010] J.C. Robinson. Log-Lipschitz embeddings of homogeneous sets with sharp logarithmic exponents and slicing the unit cube, arXiv:1007.4570v [math.MG] 26 Jul.

[Лад1972] О.А. Ладыженская. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье-Стокса. Зап. науч. семин. ЛОМИ, 1972, 27, 91-115.

[Ром2000] А.В. Романов. Конечномерная предельная динамика диссипативных параболических уравнений. Матем. сб., 2000, 191:3, 99-112.

[Kuk2007] I. Kukavica. Log-log convexity and backward uniqueness.

[EKZ2011] A. Eden, V. Kalanarov, S. Zelik. Counterexamples to the regularity of Mane

projections and global attractors, arXiv:1108.0217v1 [math.AP] 1 Aug 2011.

7. УСИЛЕНИЕ ОЦЕНКИ КУКАВИЦЫ

Сформулируем утверждение, улучшающее оценку Кукавицы (6-1) при $\theta < 1/2$ и фактически повторяющее её при $\theta = 1/2$. Такое усиление актуально с точки зрения свойства log-LFDA.

THEOREM 7.1. *Если* $\theta \in [0, 1/2]$ *и* $\alpha = \dfrac{1}{2(1-\theta)}$, *то*

$$\left| A^{1/2} w \right| \le \sqrt{d_\alpha} \, |w| \, (\ln \frac{M^2}{|w|^2})^{\alpha/2} \tag{7-1}$$

для $w \in \mathcal{A}_0$ *с* $d_\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\theta}{\alpha-\theta}} (2K^2)^{\frac{1}{2(1-\theta)}}$ *и* $M = m\sqrt{e}$, $m = diam \mathcal{A}$ *в* X.

В частности:

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ при } \theta = 0, \quad \alpha = \frac{2}{3} \text{ при } \theta = \frac{1}{4}, \quad \alpha = 1 \text{ при } \theta = \frac{1}{2}$$

и оценка

$$\left| A^{1/2} w \right| \le 2K |w| \ln^{1/4} \frac{M^2}{|w|^2} \qquad (w \in \mathcal{A}_0)$$

верна в случае $\theta = 0$. Действуя как в [PM-Rob2010] можно получить следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. *Если* $\theta = 0$ *и* $F \in Lip(X^{1/2}, X^{1/2})$, *то*

$$|Aw| \le C |w| \log^{1/2} \frac{M}{|w|} \qquad (w \in \mathcal{A}_0)$$

с $C = C(\mathcal{A})$.

Полагаем $R = F(u) - F(v)$ для $u, v \in X^\theta$.

ЛЕММА 7.3. *Справедлива оценка*

$$\left| w(t) \right| \le \left| w(\tau) \right| e^{k(t-\tau)} \qquad\qquad (t > \tau, \quad k = \frac{K^2}{4\lambda_1^{1-2\theta}})$$

для разности $w(t) = u(t) - v(t)$ *любых двух решений уравнения* (1-1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножая (1-1) скалярно на w и учитывая соотношение (1-2) можно записать

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 = -(A^{1-2\theta} A^\theta w, A^\theta w) + (R, w) \le -\lambda_1^{1-2\theta}\left| A^\theta w \right|^2 + K\left| A^\theta w \right| |w|,$$

где

$$K\left| A^\theta w \right| |w| \le \lambda_1^{1-2\theta}\left| A^\theta w \right|^2 + \frac{K^2}{4\lambda_1^{1-2\theta}}|w|^2.$$

Итак, мы получаем неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 \le \frac{K^2}{4\lambda_1^{1-2\theta}}|w|^2,$$

из которого и следует искомая оценка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 7.1. Рассмотрим классическое отношение Дирихле $\mu = \dfrac{(w, Aw)}{(w, w)}$ для $w \in \mathcal{A}_0$ и пусть $L = \ln\dfrac{M^2}{|w|^2}$. Заметим, что $L \ge 1$. Если рассмотреть для любого $\alpha \in [0,1]$ log-Дирихле отношение $Q(t) = \dfrac{\mu(t)}{L^\alpha(t)}$ (реально $Q(t) = Q(t; w_0)$, $w_0 \in \mathcal{A}_0$, $w(0) = w_0$), то [Kuk2007, p.2417] имеет место неравенство

$$Q_t + \alpha\frac{Q^2}{L^{1-\alpha}} \le \frac{2|R|^2}{|w|^2 L^\alpha}. \tag{7-2}$$

Пользуясь (1-2) имеем оценку $|R| \le K\left| A^\theta w \right|$. Из интерполяционного неравенства

$$\left| A^\theta w \right| \le |w|^{1-2\theta}\left| A^{1/2} w \right|^{2\theta}$$

следует, что

$$|R|^2 \le K^2 \left| A^\theta w \right|^2 \le K^2 |w|^{2-4\theta}\left| A^{1/2} w \right|^{4\theta}$$

и

$$\frac{|R|^2}{|w|^2} \le K^2 \frac{|A^{1/2}w|^{4\theta}}{|w|^{4\theta}} = K^2 \mu^{2\theta} .$$

С учётом данного соотношения можно получить из (7-2) оценку

$$Q_t + \alpha \frac{Q^2}{L^{1-\alpha}} \le \frac{2K^2}{L^{\alpha-2\alpha\theta}} Q^{2\theta} .$$

Постулируя равенство $1-\alpha = \alpha - 2\alpha\theta$ имеем $\alpha(1-\theta) = \frac{1}{2}$ для значений $\theta \in [0, 1/2]$ и $\alpha \in [1/2, 1]$ (отметим, что $\alpha > \theta$). Таким образом,

$$Q_t + \alpha b(t) Q^2 \le 2K^2 b(t) Q^{2\theta}$$

для каждого $\theta \in [0, 1/2]$ с $\alpha = \frac{1}{2(1-\theta)}$ и $b(t) = \frac{1}{L^{1-\alpha}(t)}$. Пользуясь неравенством Юнга

$$2K^2 Q^{2\theta} \le \frac{Q^2}{p} + \frac{(2K^2)^q}{q}$$

с $p = \frac{1}{\theta}$ и $q = \frac{1}{1-\theta}$ получаем оценки

$$Q_t + (\alpha - \theta) b(t) Q^2 \le (1-\theta) b(t) (2K^2)^{\frac{1}{1-\theta}} \tag{7-3}$$

для семейства функций $Q(t) = Q(t; w_0)$. Положим для краткости $d_\alpha = d$ и применим к анализу неравенства (7-3) типичные аргументы (см., например, [Temam1997]). Так как $Q(t) \equiv d$ есть решение дифференциального уравнения, соответствующего (7-3), то $Q(t) \le d$ на $[0, +\infty)$ при $Q(0) \le d$. Если же $Q(0) > d$, то $Q(t) > d$ на $(-\infty, 0)$ и

$$\frac{dz}{dt} \le -(\alpha - \theta) b(t) z^2$$

для положительной величины $z(t) = Q(t) - d$. Интегрируя это неравенство и обозначая $a(s) = (\alpha - \theta) \int_s^0 b(t)\, dt$ находим:

$$\int_{z(s)}^{z(0)} \frac{dt}{t^2} \le -a(s), \quad \frac{1}{z(0)} - \frac{1}{z(s)} \ge a(s), \quad z(0) \le \frac{z(s)}{1 + z(s) a(s)} \le \frac{1}{a(s)}.$$

Возвращаясь к переменной $Q(t)$ получаем оценку

$$Q(0) \le d + \frac{1}{a(s)}. \tag{7-4}$$

для $s<0$. Далее, согласно лемме 7.3 мы имеем

$$|w(0)| \le |w(s)| e^{-ks}, \quad |w(s)|^{-1} \le |w(0)|^{-1} e^{-ks}$$

для $s<0$. Следовательно,

$$L(s) \le \ln(M^2 |w(0)|^{-2} e^{-2ks}) = L(0) - 2ks$$

и

$$b(s) \ge \frac{1}{(L(0)-2ks)^{1-\alpha}}.$$

Поскольку $\alpha \in [1/2,1]$, то независимо от выбора начальной точки $w_0 \in \mathcal{A}_0$ интегралы $\int_{-\infty}^{0} b(s)\,ds$ расходятся, стало быть $a(s) \to +\infty$ при $s \to -\infty$ и $Q(0) \le d_\alpha$ из (7-4).
После извлечения квадратного корня получаем искомую оценку (7-1) и теорема 7.1 доказана.

[Kuk2007] I. Kukavica. Log-log convexity and backward uniqueness.
Proc. Amer. Math. Soc., 35:8, 2415-2421.
[Temam1997] R. Temam. Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.
Appl. Math. Sci. 68, Berlin: Springer, 2-nd ed.

8. КОНЕЧНОМЕРНАЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

Полезно напомнить один старый и незаслуженно забытый результат Д. Камаева [Кам1980], представляющий интерес в контексте данной темы. Отметим, что все сформулированные выше результаты о конечномерной динамике на аттракторе справедливы также и для любого компактного инвариантного (КИ) множества $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$.

Пусть P_n спектральный проектор линейной части A ППУ (1-1) отвечающий его n (с кратностью) нижним модам. Полагая $p = P_n u$ для $u \in X^\theta$, рассмотрим Галёркинские приближения

$$p_t = -Ap + P_n F(p). \tag{8-1}$$

Для каждого фиксированного n это ОДУ в R^n с липшицевым векторным полем и фазовым потоком $S_n(t)$.

ТЕОРЕМА 8.1 [Кам1980]. *Пусть $\mathcal{K}$ гиперболическое КИ-множество ППУ* (1-1), *тогда для $n \ge n_0$ найдётся гиперболическое КИ-множество*

$\mathcal{K}_n$ *ОДУ* (8-1) *и гомеоморфизм* $h_n : \mathcal{K} \to \mathcal{K}_n$, *удовлетворяющий* (*при* $t>0$) *следующим условиям*:

$$1)\ \ S_n(t)\circ h_n = h_n \circ \Phi_t \ \ \text{на}\ \ \mathcal{K}\,; \quad 2)\ \ \left| h_n(u) - u \right|_\theta \le c_n \ \ \text{на}\ \ \mathcal{K}\ \ \text{и}\ \ c_n \to 0.$$

Отсюда следует, что разрешающий полупоток Φ_t инъективен на гиперболическом КИ-множестве $\mathcal{K}$ и полупотоки Φ_t на $\mathcal{K}$ и $S_n(t)$ на $\mathcal{K}_n$ топологически сопряжены.

Как видим, здесь показано, что гиперболичность КИ-множества ППУ (1-1) влечёт конечномерность динамики на нём. Цитированная статья не содержит доказательств, но их можно найти в кандидатской диссертации Д.А. Камаева, 1980.

Конечно, наиболее интересный случай здесь $\mathcal{K} = \mathcal{A}$. Известно, что движение на (нетривиальном) гиперболическом аттракторе должно быть хаотичным. Удивительно, что гиперболическая предельная динамика ППУ (когда она имеет место) эквивалентна подобной динамике для ОДУ. Известно, что ППУ достаточно редко имеют нетривиальный гиперболический аттрактор, однако можно ожидать, что условие сильной (классической) гиперболичности в теореме 8.1 удастся заменить на более слабую версию этого понятия.

[Кам1980] Д.А. Камаев. Гиперболические предельные множества эволюционных уравнений и метод Галёркина. Успехи матем. наук, 35:3, 188-192.

9. ЧТО ДЕЛАТЬ ДАЛЬШЕ

1. Главной целью должен быть случай нулевого показателя нелинейности $(\theta = 0)$ ППУ (1-1) типичного для скалярных и векторных уравнений реакции-диффузии. Приведём соответствующие доводы.

(А) Согласно следствию 7.2 имеет место оценка

$$\left| A(u-v) \right| \le C \left| u-v \right| \log^{1/2} \frac{M}{\left| u-v \right|}$$

на аттракторе $\mathcal{A}$. Если установить оценку

$$\left| L^{-1}(x-y) \right| \ \le\ C \left| x-y \right|_{R^n} \log^{\gamma} \frac{M}{\left| x-y \right|_{R^n}} \qquad (\gamma \le 1/2) \qquad\qquad (9\text{-}1)$$

на образе $L\mathcal{A}$ для некоторого линейного (инъективного на $\mathcal{A}$) вложения $L : X \to R^n$, то свойство log-LFDA для уравнения (1-1) будет обеспечено. В настоящее время оценка (9-1) известна с произвольным $\gamma > 1/2$ при условии, что множество $\mathcal{A} - \mathcal{A}$ однородно, т.е. имеет конечную размерность Булижена (см. [Ol-Rob2010], [Rob2010]). Соответствующий результат, однако, имеет чисто топологический характер и не связан со свойствами динамики на аттракторе. Кажется вероятным с этой точки зрения, что порог $\gamma > 1/2$ удастся преодолеть и установить свойство log-LFDA для ППУ с $\theta = 0$ и однородным множеством $\mathcal{A} - \mathcal{A}$.

(Б) Скалярные уравнения реакции-диффузии

$$u_t = d\Delta u + f(x,u) \qquad (9\text{-}2)$$

в ограниченных областях $D \subset R^N$ $(N \geq 2)$ с гладкой функцией f являются градиентно-подобными и допускают строгую функцию Ляпунова

$$G(u) = \int_D \left(\frac{1}{2}\left|\nabla u(x)\right|^2 - F(x,u)\right) dx,$$

где $F_u(x,u) = f(x,u)$. Хорошо известно ([Хенри1985] и [Temam1997]), что в общем положении аттрактор уравнения (9-2) состоит из конечного числа гиперболических стационарных точек и их (гладких) неустойчивых многообразий. Более того, в общем положении устойчивые (также гладкие!) и неустойчивые многообразия стационарных точек пересекаются трансверсально (см. недавний обзор [J-R2011] R. Joly & G. Raugel). Наконец, свойство LFDA справедливо [Ром2001], если аттрактор содержится в конечномерном C^1- подмногообразии фазового пространства. Всё сказанное даёт надежду на то, что свойства LFDA или log-LFDA удастся установить для скалярных уравнений реакции-диффузии в произвольной пространственной размерности (возможно при каких-то дополнительных предположениях).

2. Большой интерес представляет построение примеров ППУ без свойства LFDA или log-LFDA. Первый (и весьма не тривиальный) пример такого рода для абстрактных уравнений (1-1) получен совсем недавно [EKZ2011]. Уравнение (1-1) не обладает свойствами LFDA и log-LFDA, если его разрешающий полупоток не инъективен на аттракторе, однако до сих пор не известно ни одного ППУ, для которого бы нарушалось свойство обратной единственности.

3. Есть основания считать, что свойствами LFDA или log-LFDA должны обладать (возможно при некоторых дополнительных условиях) уравнения (1-1) с аналитической нелинейной частью (например 2d Н-С). В этом случае [Хенри1985] разрешающий полупоток совместно аналитичен по времени и по фазовой переменной. При этом в случае УРЧП решения могут быть аналитичны и по пространственной переменной [Foi-Tem1989]. Можно показать (действуя, например, как в работе [Prom1991]), что лежащие на аттракторе $\mathcal{A}$ решения $u(t), v(t)$ продолжаются аналитически и равномерно ограниченно в полосу $D_\delta : \left|\operatorname{Im} z\right| < \delta$, $z = t + i\tau$, $\delta = \delta(\mathcal{A})$. После этого соображения комплексного анализа можно применить к разности $w(z) = u(z) - v(z)$. В данной ситуации справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. *Предположим, что найдутся величины* $\nu > 1$, $0 < t_0 < \delta/\nu$ *и* $M = M(\mathcal{A})$ *для которых оценки*

$$\left\| \frac{d^k w}{dt^k}(t_0) \right\|_\theta \leq \frac{M\,k!}{(\nu t_0)^k} \| w(0) \|_\theta \qquad (9\text{-}3)$$

имеют место при всех $k \geq 1$, $w = u - v$ $(u, v \in \mathcal{A})$. *Тогда свойство LFDA выполняется для ППУ* (1-1).

Фактически, в условиях предложения устанавливается оценка

$$\| \Phi_{-\tau} u - \Phi_{-\tau} v \|_\theta \leq M_1 \| u - v \|_\theta \text{ с } \tau = (\nu - 1) t_0 / 2,$$

а затем применяется критерий (Fl0). Подчеркнём, что по крайней мере в случае $\theta = 0$ неравенства типа (9-3) с $\nu = 1$ получаются непосредственно из формулы Коши и оценки $| w(z) |_\theta \leq \mathrm{const} \cdot | w(0) |_\theta$, справедливой в прямоугольнике $0 < \operatorname{Re} z < 2t_0, | \operatorname{Im} z | < \delta$.

[Ol-Rob2010] E.J. Olson, J.C. Robinson. Almost bi-Lipschitz embeddings and almost homogeneous sets. Trans. Amer. Math. Soc., 362:1, 45-168.

[Rob2010] J.C. Robinson. Log-Lipschitz embeddings of homogeneous sets with sharp logarithmic exponents and slicing the unit cube, arXiv:1007.4570v [math.MG] 26 Jul.

[Хенри 1985] Д. Хенри. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М., Мир, 1985.

[Temam1997] R. Temam. Infinite-dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics.

[Ром2001] А.В. Романов. Конечномерность динамики на аттракторе для нелинейных параболических уравнений. Изв. РАН, сер. матем., 2001, 65:5, 129-152.

[J-R2011] R. Joly, G. Raugel. A striking correspondence between the dynamics generated by the vector fields and by the scalar parabolic equations, arXiv:1005.1727v2 [math.AP], 14 Jan.

[Foi-Tem1989] C. Foias, R. Temam. Gevrey class regularity for the solutions of the Navier- Stokes equations. J. Funct. Anal., 87:2, 359-369.

[Prom1991] K. Promislow. Time analyticity and Gevrey regularity for solutions of a class of dissipative partial differential equations. Nonl. Anal., TMA, 16:11, 959-980.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Полное метрическое пространство E называется однородным, если для некоторых $d > 0$ и $M = M(d)$ справедлива оценка

$$N(r, \rho) \leq M (r / \rho)^d \qquad \text{для} \quad 0 < \rho < r < 1,$$

где $N(r, \rho)$ это минимальное число ρ - шаров, требуемых для покрытия любого r - шара в E. Нижняя грань соответствующих значений d именуется при этом ([Boul1928], [Olsson2002]) размерностью Булижена $d_b(E)$ (альтернативные названия – метрическая размерность или размерность Ассада). На самом деле в определении однородного пространства достаточно ограничиться случаем $r = 2\rho$. Более того, свойство однородности пространства эквивалентно наличию на E меры с условием удвоения – нетривиальной неотрицательной борелевской меры μ, удовлетворяющей оценке

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C \mu(B(x, r))$$

для некоторого $C \geq 1$ и каждого шара $B(x,r)$. При этом всегда $d_h \leq d_f \leq d_b$, где d_h и d_f – соответственно хаусдорфова и фрактальная размерность. Размерность Булижена сохраняется при билипшицевых вложениях и конечна для подмножеств R^n, поэтому липшиц-конечномерная динамика на аттракторе $\mathcal{A}$ ППУ (1-1) влечёт конечность величины $d_b(\mathcal{A})$. Есть гипотеза (J.C. Robinson, 2011), что верно и обратное. К сожалению до сих пор не известны методы оценки размерности Булижена (в отличие от хаусдорфовой или фрактальной) для аттракторов эволюционных уравнений.

[Boul1928] G. Bouligand. Ensembles impropres et nombre dimensionnel. Bull. Sci. Math., 52, 320-344, 361-376.

[Olson2002] E.J. Olson. Bouligand dimension and almost Lipschitz embeddings. Pacific J. Math., 202:2, 459–474.