ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГРУЗОПЕРЕВОЗОК.

Л.А. Бекларян, Н.К. Хачатрян

Рассматриваются модели организации грузоперевозок на протяженном участке пути с большим количеством промежуточных станций, через которые проходит грузопоток. Предполагается, что между двумя соседними станциями существует межстанционный перегонный путь, где временно может храниться часть грузов (Рис.1).

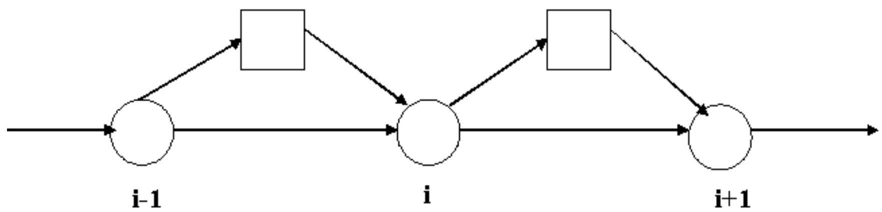

Рис.1

Емкость перегонных путей считаем неограниченной. Движение грузопотока происходит в одном направлении. Первая модель описывает транснациональные транспортные перевозки, т.е. перевозки без начальной станции отправления и конечной станции распределения грузов. Вторая модель описывает транспортные перевозки с выделенной начальной станцией отправления грузов. Третья модель описывает транспортные перевозки с начальной станцией отправления и конечной станцией распределения грузов. Четвертая модель описывает транспортные перевозки по круговой цепочке станций.

Модель транснациональных грузоперевозок

Работа всех станций состоит из приема, обработки и отправки грузов, а сами станции имеют заданную пропускную способность. Под пропускной способностью понимаем максимальный объем грузов, который может пройти через промежуточную станцию за единичный отрезок времени. Обработка грузов происходит в узлах станций. В каждый момент времени число задействованных узлов на n-ой станции обозначим через $z_n(t)$. В каждом узле в течении единицы времени обрабатывается единичный объем грузов. Очевидно, что количество задействованных узлов обработки грузов при бесперебойной работе всей цепи перевозок ограничено. Максимальное количество таких узлов, обозначаемое через Δ, определяет пропускную способность станций. Организация подобных грузопотоков зависит от технологий по приему, обработке и отправлению грузов. Опишем эти технологии.

Первая технология основана на установленных нормативных правилах взаимодействия соседних станций. Для каждой станции с номером i существуют правила взаимодействия с предыдущей $(i-1)$-ой станцией и последующей $(i+1)$-ой станцией. Согласно правилу взаимодействия с предыдущей станцией, станция с номером i увеличивает количество задействованных узлов с интенсивностью $\alpha(z_{i-1}-z_i)$ если количество задействованных узлов на ней меньше чем на предыдущей станции. При этом грузопоток принимается с предыдущей станции. В противном случае станция с номером i уменьшает количество задействованных узлов с такой же интенсивностью и грузопоток отправляется на перегонный путь.

Согласно правилу взаимодействия с последующей станцией, станция с номером i уменьшает количество задействованных узлов с интенсивностью $\alpha(z_i-z_{i+1})$ если количество задействованных узлов на ней больше чем на следующей станции. При этом грузопоток отправляется на следующую станцию. В противном случае станция с номером i увеличивает количество задействованных узлов с такой же интенсивностью и грузопоток принимается с перегонного пути.

Первая технология не учитывает условие ограниченности пропускной способности станций. Кроме того, она не позволяет использовать весь потенциал станций. В связи с этим, наряду с первой технологией, используется и иная технология.

Вторая технология позволяет как увеличить число задействованных узлов (если оно меньше Δ) так и уменьшать (если оно превышает Δ). При этом груз принимается с перегонного пути либо отправляется на перегонный путь. Функция $\varphi(.)$, задающая скорость изменения задействованных узлов в рамках второй технологии, имеет следующий вид

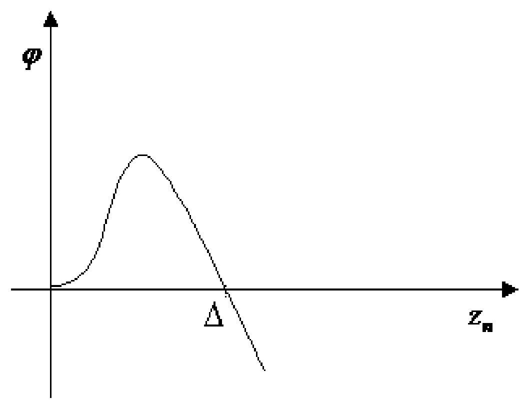

Рис.2

Таким образом, с учетом работы первой и второй технологий, скорость изменения числа задействованных узлов для i - ой станции будет описываться дифференциальным уравнением:

$$\dot{z}_i(t) = \alpha(z_{i-1} - z_i) - \alpha(z_i - z_{i+1}) + \varphi(z_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, +\infty). \tag{1}$$

Для грузоперевозок необходимо иметь действенную и простую систему контроля. Она заключается в том, что объемы обрабатываемых грузов для любого планового интервала времени на всех станциях должны совпадать с определенным лагом времени, единым для всех станций. Такое условие можно описать в следующем виде: существует число $\tau > 0$, не зависящее от t и i, такое, что при всех $i \in \mathbb{Z}$ и $t \in [0, +\infty)$ выполняется равенство:

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau). \tag{2}$$

Решения системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющие условию (2), называются решениями типа бегущей волны. Константу τ, которая является сдвигом между моментами замеров и сравнения объемов грузов, будем называть характеристикой системы контроля. Таким образом, наша модель, описывающая процесс грузоперевозок и их систему контроля, задается счетной системой дифференциальных уравнений и условием, задающим бегущую волну:

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, +\infty), \tag{3}$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, +\infty). \tag{4}$$

Определение 1. Семейство абсолютно-непрерывных функций $\{z_i(.)\}_{i \in \mathbb{Z}}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется решением системы дифференциальных уравнений (3), если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(.)$ удовлетворяют этой системе. ■

Для любого $\mu \in (0, 1)$ определим банаховы пространства (пространства функций с весами)

$$\mathcal{L}^1_\mu C^{(k)}(\mathbb{R}) = \left\{ x(.) : x(.) \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \max_{0 \le r \le k} \sup_{t \in R} \left\| x^{(r)}(t) e^{-\delta|t|} \right\|_{\mathbb{R}} < +\infty \right\},$$

$$k = 0, 1, ..., \quad \mu = e^{-\delta}$$

и нормой

$$\|x\|^{(k)}_\mu = \max_{0 \le r \le k} \sup_{t \in R} \left\| x^{(r)}(t) e^{-\delta|t|} \right\|_{\mathbb{R}},$$

а также векторное пространство $K^1 = \prod_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{R}_i, \quad \mathbb{R}_i = \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{Z}$ с элементами $\varkappa = \{x_i\}_{-\infty}^{+\infty}, \quad x_i \in \mathbb{R}, \quad i \in \mathbb{Z}$ и со стандартной топологией полного прямого произведения.

В пространстве K^1 определим семейство гильбертовых подпространств

$$K^1_{2\mu} = \left\{ \varkappa : \varkappa \in K^1; \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |x_i|^2_R \mu^{2|i|} < +\infty \right\}, \quad \mu \in (0, 1)$$

с нормой

$$\|\varkappa\|_{2\mu} = \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} |x_i|^2_R \mu^{2|i|} \right]^{1/2}$$

Обозначим

$$M(\tau) = \tau \max[2\alpha, L_0]$$

и рассмотрим неравенство относительно двух переменных $\tau \in (0, +\infty)$ и $\mu \in (0, 1)$

$$M(\tau)[1 + 2\mu^{-1}] < \ln \mu^{-1}, \qquad \mu \in (0, 1). \tag{5}$$

Множество решений неравенства (5) описывается функциями $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$, заданными на следующем рисунке

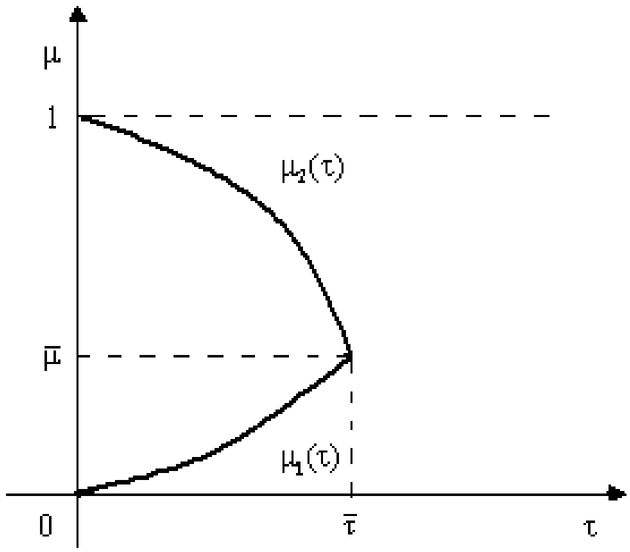

Рис.3

Теорема 1. *Для любых начальных данных $a > 0$, $\bar{i} \in \mathbb{Z}$, начального момента времени $\bar{t} \in [0, +\infty)$ и характеристик τ, удовлетворяющих условию $0 < \tau < \bar{\tau}$ существует решение $\{z_i(.)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ уравнения (3) типа бегущей волны (условие (4)) с характеристикой τ, удовлетворяющее начальному условию $z_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$. Более того, в таком решении для всякого $i \in \mathbb{Z}$ функция $z_i(.)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_{\sqrt[\tau]{\mu}} C^{(0)}([0, +\infty))$ при любом $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$. Такое решение является единственным и непрерывно зависит от начального условия a, каждая координата $z_i(.)$, $i \in \mathbb{Z}$ непрерывно зависит от начального условия a как элемент пространства $\mathcal{L}^1_{\sqrt[\tau]{\mu}} C^{(0)}([0, +\infty))$.* ■

Система (3)-(4) имеет два стационарных решения типа бегущей волны: $\bar{z}_1 \equiv \{..., 0, 0, 0, ...\}$, $\bar{z}_2 \equiv \{..., \Delta\, \Delta, \Delta, ...\}$. Очевидно, что такие решения принадлежат пространству $K^1_{2\mu}$ при любом $\mu \in (0, 1)$.

Рассмотрим уравнение

$$\alpha\mu^2 - (2\alpha + \delta)\mu + \alpha = 0, \tag{6}$$

где $\delta = -\varphi'(\Delta)$. Решениями уравнения (6) являются $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\tilde{\lambda}}$, причем $0 < \tilde{\lambda} < 1$, $\tilde{\tilde{\lambda}} > 1$.

Определение 2. Стационарное решение $\bar{z} = \{\bar{z}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ системы уравнений (3) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (0, 1)$ называется устойчивым по Ляпунову, если существуют $\gamma > 0$, $\bar{t} \geq 0$ такие, что для произвольного $d \in K^1_{2\mu}$, удовлетворяющего условию $\|d - \bar{z}\|_{2\mu} < \gamma$, решение $z(t)$ уравнения (3) с начальным условием $z(\bar{t}) = d$ существует; для всякого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \sigma_1 < \gamma$, что при $\|d - \bar{z}\|_{2\mu} < \sigma_1$ решение $z(t)$ уравнения (3) с начальным условием $z(\bar{t}) = d$ удовлетворяет условию $\|z(t) - \bar{z}\|_{2\mu} < \varepsilon$ для всех $t > \bar{t}$.

Устойчивое по Ляпунову стационарное решение $\bar{z} = \{\bar{z}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ системы уравнений (3) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (0, 1)$ называется асимптотически устойчивым, если $\lim\limits_{t\to+\infty} \|z(t) - \bar{z}\|_{2\mu} = 0$. ■

Теорема 2. *Для любых $\alpha, \delta > 0$ и характеристик $\tau \in (0, +\infty)$ стационарное решение $\bar{z}_2 = \{..., \Delta\,\Delta, \Delta, ...\}$ уравнения (3) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (\tilde{\lambda}, 1)$ является асимптотически устойчивым, а стационарное решение $\bar{z}_1 = \{..., 0, 0, 0, ...\}$ в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (0, 1)$ является неустойчивым.* ■

Обозначим

$$\tau_{max} = \sup\{\tau : \tau \leq \bar{\tau},\ \mu_2(\tau) \geq \tilde{\lambda}\}.$$

На интервале $(0, \tau_{max}]$ определяется функция $\lambda(\tau) = \max(\tilde{\lambda}, \mu_1(\tau))$, графически изображенная на рис.4 (при $\tilde{\lambda} < \bar{\mu}$ - слева и при $\tilde{\lambda} > \bar{\mu}$ - справа).

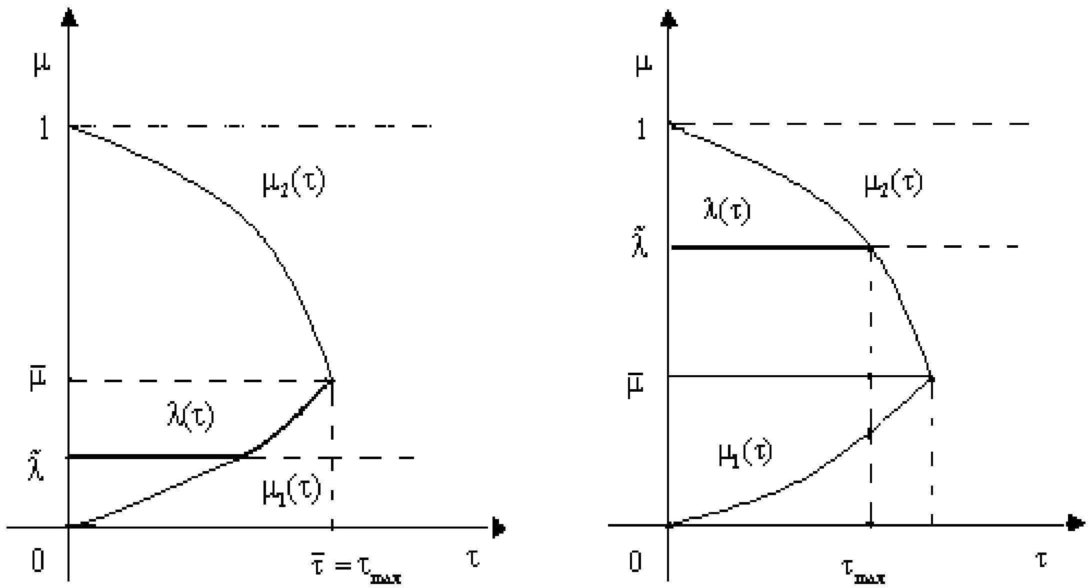

Рис.4

Определение 3. Стационарное решение $\bar{z} = \{\bar{z}_i\}_{i \in \mathbb{Z}},\ \bar{z}_i = \bar{z}_{i+1},\ i \in \mathbb{Z}$ типа бегущей волны системы уравнений (3) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (0, 1)$ называется устойчивым по Ляпунову среди решений типа бегущей волны с характеристикой τ, если: оно устойчиво по Ляпунову; существуют $\gamma > 0$, $\bar{t} \geq 0$ такие, что для произвольного числа d_0, удовлетворяющего условию $|d_0 - \bar{z}_0| < \gamma$, решение $z(t) = \{z_n(t)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ системы (3)-(4) с начальным условием $z_0(\bar{t}) = d_0$ существует; для всякого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \sigma_2 < \gamma$ такое, что из условия $|d_0 - \bar{z}_0| < \sigma_2$ следует, что решение $z(t)$ системы (3)-(4) с начальным условием $z_0(\bar{t}) = d_0$ удовлетворяет условию $||z(t) - \bar{z}||_{2\mu} < \varepsilon$ для всех $t > \bar{t}$. ■

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Для любых $\alpha, \delta > 0$ и характеристик $\tau \in (0, \tau_{max})$ стационарное решение $\bar{z}_2 = \{..., \Delta\,\Delta, \Delta, ...\}$ системы уравнений (3) в фазовом пространстве $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (\lambda(\tau), \mu_2(\tau))$ является асимптотически устойчивым среди решений типа бегущей волны с характеристикой τ.* ■

Модель грузоперевозок с выделенной начальной станцией отправления грузов

В предыдущем параграфе была рассмотрена модель транснациональных транспортных перевозок, где предполагалось, что множество промежуточных станций бесконечно как в правую, так и в левую стороны. В данном параграфе рассмотрим модель транспортных перевозок с выделенной начальной станцией отправления грузов. Итак, рассмотрим модель транспортных перевозок с начальной станцией отправления грузов $i = 0$ и большим количеством промежуточных станций $i = 1, 2, ...$ Также как и в первой модели организация грузопотока осуществляется посредством двух технологий.

Первая технология. На станциях с номерами $i = 1, 2, ...$ действует первая технология, описанная в предыдущем параграфе. На начальной станции $i = 0$ первая технология определяется с помощью правила взаимодействия с последующей станцией и правила подачи грузов на нее, определяемая функцией $\psi(t)$, зависящей от переменной времени $t \geq 0$. Предполагаем, что функция $\psi(.)$ является бесконечно-дифференцируемой. Так как начальная станция является узловой, то естественно предположить, что она обладает большими мощностями и при необходимости на ней можно резко изменять число задействованных узлов, чего нельзя сделать на промежуточных станциях.

Вторая технология. Для произвольной станции с номером $i = 1, 2, ...$ вторая технология в точности повторяет вторую технологию, описанную в предыдущем параграфе. Для начальной станции $i = 0$ вторая технология из предыдущего параграфа используется только для разгрузки. Поэтому скорость изменения числа задействованных узлов обработки на начальной станции в рамках второй технологии описывается функциией $\varphi_0(t)$, зависящей от количества задействованных узлов на начальной станции и удовлетворяет следующим условиям: на полупрямой $(-\infty, \Delta]$ тождествена равна нулю, а на полупрямой $[\Delta, +\infty)$ является линейно убывающей функцией. Предполагаем, что функции $\varphi_0(.)$ и $\varphi(.)$ (определенная в предыдущем параграфе) являются бесконечно дифференцируемыми. Очевидно, что при объеме грузов на 0 - ой станции, не превышающем Δ, используется только первая технология.

Таким образом, с учетом работы первой и второй технологий, а также системы контроля, процесс грузоперевозок будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_0(t) = \psi(t) - \alpha z_0 + \alpha z_1 + \varphi_0(z_0), \quad t \in [0, +\infty), \tag{7}$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i = 1, 2, ..., \quad t \in [0, +\infty), \tag{8}$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 0, 1, 2, ..., \quad t \in [0, +\infty). \tag{9}$$

Класс решений системы (7)-(9) чрезвычайно узок. Поэтому, для описания реализуемых режимов грузоперевозок используется более широкий класс решений, которые называются квазирешениями типа бегущей волны. Эти решения являются кусочно абсолютно-непрерывными, а разрывы расположены в точках кратных характеристике системы контроля (параметр τ). Приведем точное определение.

Определение 4. Семейство кусочно абсолютно-непрерывных функций $\{z_i(.)\}_0^{+\infty}$, определенных на $[0, +\infty)$, называется квазирешением типа бегущей волны с характеристикой $\tau > 0$ для системы (7)-(9), если при почти всех $t \in [0, +\infty)$ функции $z_i(.)$ удовлетворяют этой системе, а разрывы расположены в точках кратных числу τ. ■

Теорема 4. *Для любых начальных данных $a > 0$, $\bar{i} \in \{0, 1, ...\}$, начального момента времени $\bar{t} \in [0, +\infty)$, характеристик τ, удовлетворяющих условию $0 < \tau < \bar{\tau}$ (см. рис.1) и функций $\psi(.) \in C^{\infty}([0, \tau], \mathbb{R})$, существует квазирешение $\{z_i(.)\}_0^{+\infty}$ типа бегущей волны с характеристикой τ системы (7)-(9) в фазовом пространстве $K_{2\mu}^1$, $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$, удовлетворяющее начальному условию $z_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$. Такое квазирешение является единственным и непрерывно зависит от начального условия a и функции $\psi(.)$.* ■

В содержательном плане это означает, что на всех станциях в моменты времени, кратные характеристике системы контроля необходимо резко менять число задействованных узлов. Данная процедура требует подключения дополнительных мощностей, которые имеются только на узловой (начальной) станции. Оказывается, что достаточно лишь на начальной станции в начальный период времени резко изменить число задействованных узлов (слегка изменить функцию $\psi(.)$ в норме $L_1([0, \tau], \mathbb{R})$) чтобы организовать контролируемый грузопоток с помощью определенных выше технологий (получить так называемое ε квазирешение, т.е. такое квазирешение, у которого указанные разрывы меньше ε).

Определение 5. Квазирешение типа бегущей волны с характеристикой τ называется ε-квазирешением типа бегущей волны с характеристикой τ или (ε, τ)-квазирешением, если выполняются неравенства

$$|z_0(k\tau - 0) - z_0(k\tau + 0)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, ... \; . \blacksquare$$

Теорема 5. *Для любых начальных данных $a > 0$, $\bar{i} \in \{0, 1, ...\}$, начальных моментов времени $\bar{t} \in [0, +\infty)$, характеристик τ, удовлетворяющих условию $0 < \tau < \bar{\tau}$, произвольной функции $\psi(.) \in C^{\infty}([0, \tau], \mathbb{R})$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует функция $\psi_{\varepsilon}(.) \in C^{\infty}([0, \tau], \mathbb{R})$, отличная от $\psi(.)$ в малой окрестности точки 0 такая, что ей соответствующее квазирешение $\{z_{i\varepsilon}(.)\}_0^{+\infty}$ типа бегущей волны с характеристикой τ системы (7)-(9), удовлетворяет начальному условию $z_{\bar{i}\varepsilon}(\bar{t}) = a$, принадлежит фазавому пространству $K_{2\mu}^1$ при любом $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ и является (ε, τ)-квазирешением.* ■

Модель грузоперевозок с начальной станцией отправления и конечной станцией распределения грузов

Рассмотрим модель транспортных перевозок с начальной станцией отправления грузов $i = 0$, конечным числом промежуточных станций $i = 1, 2, ...m$ и конечной станцией распределения грузов $i = m + 1$. Также как и в предыдущих моделях организация грузопотока осуществляется посредством двух технологий

Первая технология. На станциях с номерами $i = 0, 1, 2, ...m$ действует технология, описанная раннее. Технология подачи грузов на начальную станцию описывается функцией $\psi_1(t)$, $t \geq 0$. На конечной станции первая технологии определяется с помощью правила взаимодействия с предыдущей станцией и правилом распределения грузов с нее, описываемая функцией $\psi_2(t)$, $t \geq 0$. Предполагаем, что функция $\psi_1(.)$ является бесконечно-дифференцируемой, а функция $\psi_2(.)$ – непрерывной.

Вторая технология. Для начальной и промежуточных станций вторая технология в точности повторяет вторую технологию, описанную в предыдущих параграфах. Вторая технология для конечной станции такая же, как для промежуточных станций.

Таким образом, с учетом работы первой и второй технологий, а также системы контроля прием и отправка грузов будет описываться следующей системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_0(t) = \psi_1(t) - \alpha z_0 + \alpha z_1 + \varphi_0(z_0), \quad t \in [0, +\infty), \tag{10}$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \quad i = 1, 2..., m, \quad t \in [0, +\infty), \tag{11}$$

$$\dot{z}_{m+1}(t) = \alpha z_m - \alpha z_{m+1} - \psi_2(t) + \varphi(z_{m+1}), \quad t \in [0, +\infty), \tag{12}$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \quad i = 0, 1, 2, ..., m, \quad t \in [0, +\infty). \tag{13}$$

Класс решений системы (10)-(13) также чрезвычайно узок и для описания реализуемых режимов грузоперевозок используются квазирешения (имеются разрывы в точках кратных характеристике системы контроля) типа бегущей волны.

Теорема 6. *Для любых начальных данных* $a > 0$, $\bar{i} \in \{0, 1, ..., m+1\}$, *начального момента времени* $\bar{t} \in [0, +\infty)$, *характеристик* τ, *удовлетворяющих условию* $0 < \tau < \bar{\tau}$ *(см. рис.1) и функций* $\psi_1(.)$, $\psi_2(.) \in C^\infty([0, \tau], \mathbb{R})$, *существует квазирешение* $\{z_i(.)\}_0^{m+1}$ *типа бегущей волны с характеристикой* τ *системы (10)-(13) в фазовом пространстве* $K^1_{2\mu}$, $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$, *удовлетворяющее начальному условию* $z_{\bar{i}}(\bar{t}) = a$. *Такое квазирешение является единственным и непрерывно зависит от начального условия* a *и функций* $\psi_1(.)$, $\psi_2(.)$. ■

Оказывается, что также как и для предыдущей модели (с выделенной начальной станцией отправления грузов), с помощью резкого изменения числа задействованных узлов на начальной станции в начальный период времени можно организовать контролируемый грузопоток (получить ε квазирешение).

Теорема 7. *Для любых начальных данных* $a > 0$, $\bar{i} \in \{0, 1, ..., m+1\}$, *начальных моментов времени* $\bar{t} \in [0, +\infty)$, *характеристик* τ, *удовлетворяющих условию* $0 < \tau < \bar{\tau}$, *произвольных функций* $\psi_1(.) \in C^\infty([0, \tau], R)$, $\psi_2(.) \in C([0, \tau], R)$ *и произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $\psi_{1\varepsilon}(.) \in C^\infty([0, \tau], R)$, *отличная от* $\psi_1(.)$ *в малой окрестности точки 0 такая, что квазирешение* $\{z_{i\varepsilon}(.)\}_0^{m+1}$ *типа бегущей волны с характеристикой* τ *системы* (10)-(13), *соответствующее функциям* $\psi_{1\varepsilon}(.)$ *и* $\psi_2(.)$, *удовлетворяет начальному условию* $z_{\bar{i}\varepsilon}(\bar{t}) = a$, *принадлежит фазавому пространству* $K^1_{2\mu}$ *при любом* $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ *и является* (ε, τ)*-квазирешением.* ■

Модель грузоперевозок по круговой цепочке станций

Рассмотрим следующие две разновидности модели транснациональных грузоперевозок:

1. Модель грузоперевозок по круговой цепочкой станций, изображенной на следующем рисунке

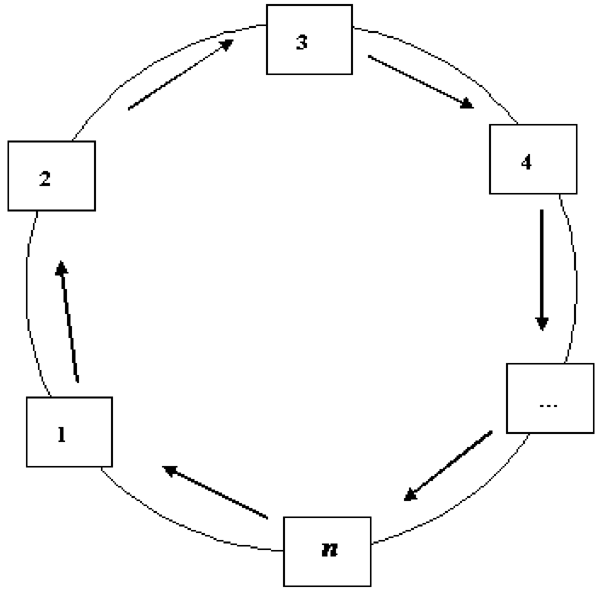

Рис. 5

Для исследования данной модели нам необходимо изучить решения системы (3)—(4), удовлетворяющие следующему условию

$$z_i(t) = z_{i+n}(t), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty).$$

Таким образом, данная модель описывается следующей системой

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \qquad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty), \tag{14}$$

$$z_i(t) = z_{i+n}(t), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty), \tag{15}$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \qquad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty). \tag{16}$$

2. Модель транснациональных грузоперевозок с периодическим решением (периодом равным τn).

Такая модель описывается следующей системой

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \qquad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty), \tag{17}$$

$$z_i(t) = z_i(t + \tau n), \quad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty), \tag{18}$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t + \tau), \qquad i \in Z, \quad t \in [0, +\infty). \tag{19}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Если* $\{\bar{z}_i(.)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *является решением системы* (14)—(16)*, то для произвольного* $i \in Z$ *функция* $\bar{z}_i(.)$ *периодическая с периодом* τn *и является решением системы (17)-(19).*

Если $\{\bar{z}_i(.)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *является решением системы* (17)—(19)*, то она является решением системы* (14)—(16). ■

Разрешимость системы (14)—(16) зависит от разрешимости следующей конечномерной системы

$$\dot{z}_1(t) = \alpha z_n - 2\alpha z_1 + \alpha z_2 + \varphi(z_1), \qquad t \in [0, +\infty), \tag{20}$$

$$\dot{z}_i(t) = \alpha z_{i-1} - 2\alpha z_i + \alpha z_{i+1} + \varphi(z_i), \qquad i = 2, ..., n-1, \quad t \in [0, +\infty), \tag{21}$$

$$\dot{z}_n(t) = \alpha z_{n-1} - 2\alpha z_n + \alpha z_1 + \varphi(z_n), \qquad t \in [0, +\infty), \tag{22}$$

$$z_i(t) = z_{i+1}(t+\tau), \qquad i = 1, ..., n-1, \quad t \in [0, +\infty), \tag{23}$$

$$z_n(t) = z_1(t+\tau), \qquad t \in [0, +\infty). \tag{24}$$

Теорема 8. *Всякое решение системы дифференциальных уравнений (20)—(22) с начальными значениями большими нуля снизу ограничено нулем, а сверху ассимптотически значением Δ если выполняется условие: $\delta > \gamma_n \alpha$, где $\gamma_n = 0$ при $n = 2k$, $k = 2, 3, ...$; γ_n образуют убывающую последовательность с положительными элементами при $n = 2k-1$, $k = 2, 3, ...$ (Таблица 1)* . ■

k	2	3	4	5	6	7	8
γ_{2k-1}	0.087	0.031	0.016	0.009	0.006	0.004	0.003

Таблица1

Для более детального исследования решений система дифференциальных уравнений (20)—(22) была решена численно для разных значений n. Как показали численные эксперименты, при выполнении условий теоремы 8 решения системы дифференциальных уравнений (20)—(22) не просто ограничены, а сходятся к стационарному решению $(\Delta, \Delta, ..., \Delta)$.

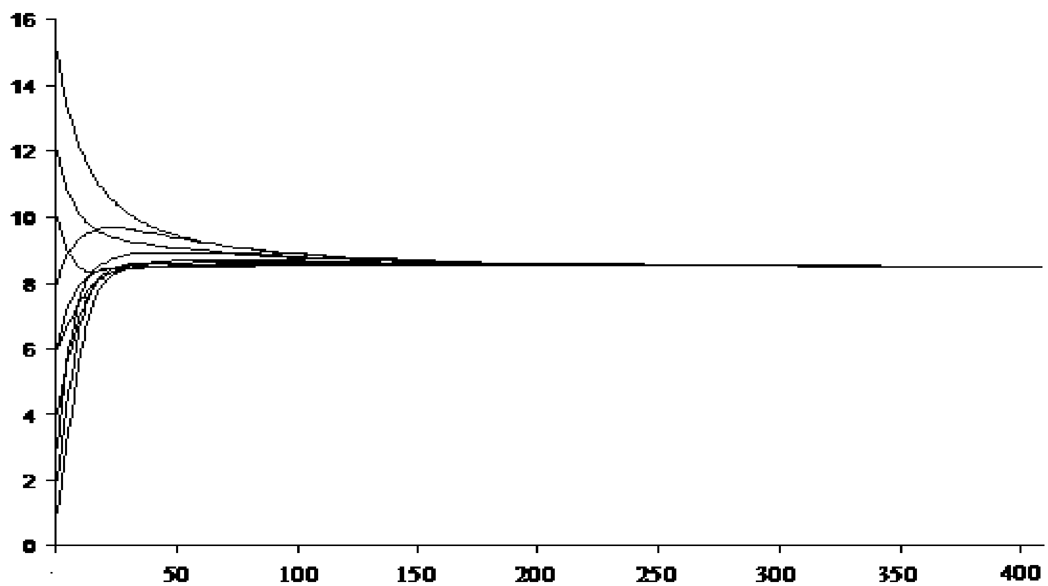

Рис. 6

На данном рисунке представлен график решений системы (20)—(22) при $n = 10$, $\alpha = 1$, $\delta = 0.5$, $\Delta = 8.5$. Как с увеличением значения δ, так и с увеличением значения α (при сохранении условия теоремы 8) решения системы (20)—(22) раньше выходят на стационарный режим. Например, ниже на рисунках 7 и 8 представлены графики решений системы (20)—(22) при $n = 10,\ \alpha = 1,\ \delta = 1$ и $n = 10,\ \alpha = 5,\ \delta = 0.5$ соответсвенно.

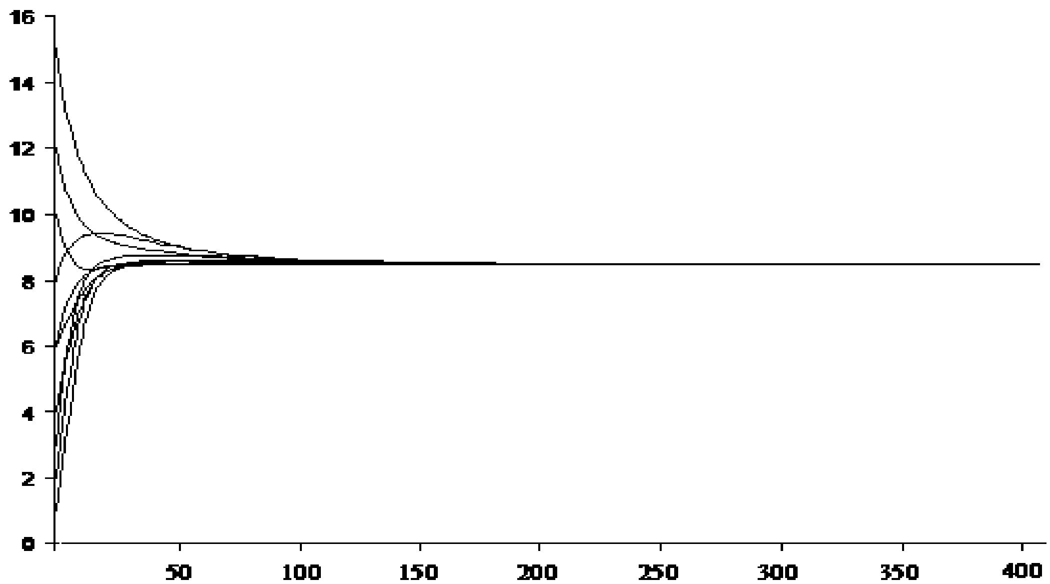

Рис. 7

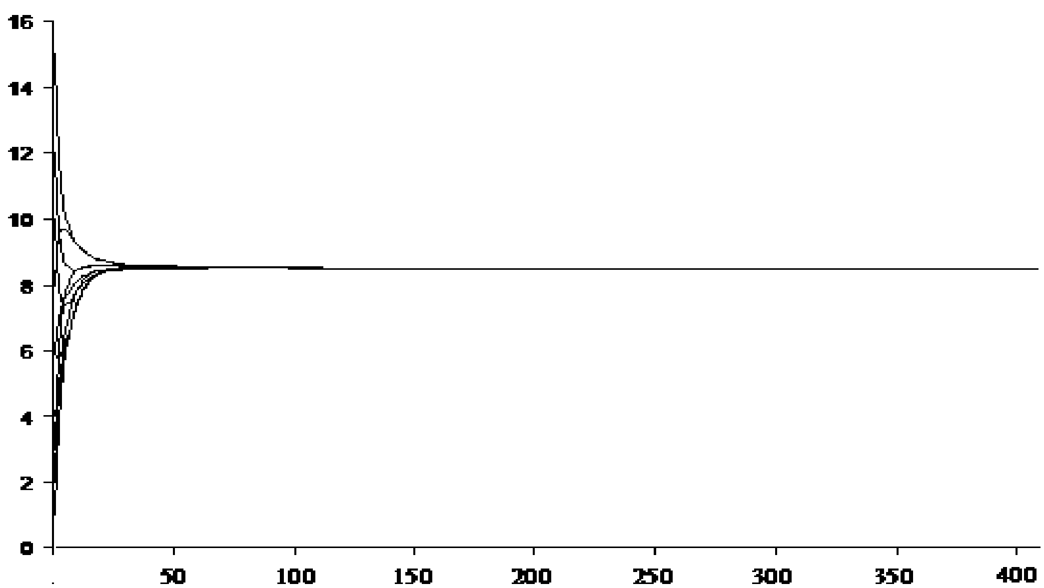

Рис. 8

Таким образом, при выполнении условий теоремы 8, начиная с некоторого момента времени всякое решение системы (20)—(22) удовлетворяет ограничениям (23)—(24), причем с произвольным значением $\tau > 0$.

Список литературы

[1] Бекларян Л.А. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход. М.: Издательство "Факториал". 2007.

[2] Бекларян Л.А. О квазибегущих волнах//Математический сборник, 2010, Т.201, N12, с.21-68.

[3] Хачатрян Н.К. Динамическая модель транснациональных грузоперевозок. / Препринт # WP/2002/145. – М.: ЦЭМИ РАН, 2002. – 43с.

[4] Хачатрян Н.К. О решениях типа бегущей волны в одной транспортной модели // Автоматика и телемеханика. – 2003. – N 3. – с. 137-149.

[5] L.A. Beklaryan, N.K. Khachatryan. Traveling wave type solutions in dynamic transport models // Functional differential equations. - 2006. - V. 13, N. 2. - P. 125-155.