Транспортная задача и совершенные паросочетания минимального веса для одномерных точечных конфигураций

А. Соболевский (ИППИ РАН)

Семинар *Квазилинейные уравнения и обратные задачи*

ЦЭМИ, 28 августа 2012

Соавторы:

Ж. Делон (Télécom ParisTech)
Ж. Саломон (CEREMADE, Dauphine)

Записки научных семинаров ПОМИ **390** (2011) 52–68;
arXiv:1102.1558
SIAM J. Discr. Math. **26** (2012) 801–825; arXiv:1102.1795

С. Нечаев (LPTMS, Orsay)
О. Вальба (МФТИ & LPTMS, Orsay)

Препринт arXiv:1203.3248 направлен в *Phys. Rev. E*

Предшествующие работы

A. Aggarwal *et al*
"Efficient minimum cost matching using quadrangle inequality"
Foundations of Computer Science, 33rd Annual Symposium
(1992) 583–592

Robert J. McCann
"Exact solutions to the transportation problem on the line"
Proc. R. Soc. Lond. A **455** (1999) 1341–1380

D. Cordero-Erausquin
"Sur le transport de mesures périodiques"
C. R. Acad. Sci. Sér. I Math. **329** (1999) 199–202

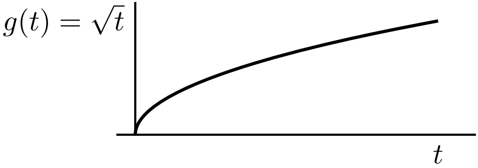
J. Delon, J. Salomon, A. Sobolevski
"Fast transport optimization for Monge costs on the circle"
SIAM J. Appl. Math. **70** (2010) 2239–2258

Мотивировка: метрика на $\mathbf{R}^1$

Рассмотрим на $\mathbf{R}^1$ метрику, заданную выражением

$$\rho(x, y) = g(|x - y|),$$

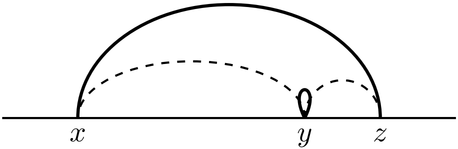
где $g(\cdot)\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ есть монотонная строго вогнутая функция и $g(0) = 0$.



Мотивировка: метрика на $\mathbf{R}^1$

Субаддитивность g влечет неравенство треугольника для ρ:

$$\rho(x,z)\ [+\ \rho(y,y)] \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

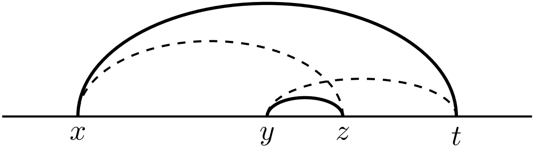


Элементы массы выгоднее не перемещать, а оставлять на месте.

Мотивировка: метрика на $\mathbf{R}^1$

Выполнено и более сильное свойство **субмодулярности** (**свойство Монжа**):

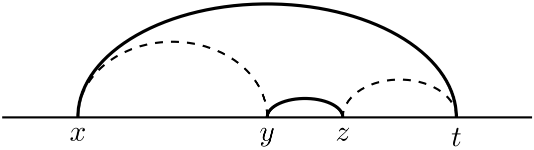
$$\rho(x,t) + \rho(y,z) \leq \rho(x,z) + \rho(y,t)$$



Вложенные траектории более выгодны, чем пересекающиеся.

Мотивировка: метрика на $\mathbf{R}^1$

Что лучше: $\rho(x,y)+\rho(z,t)$ или $\rho(x,t)+\rho(y,z)$?



Оптимальный транспортный план может содержать нелокальные перемещения.

Основные предположения

Необходимо перенести меру μ_0 в μ_1 при **субмодулярной** ценовой функции:

$$c(x,t) + c(y,z) \le c(x,z) + c(y,t)$$

при $x < y < z < t$

Требуется также **монотонность** функций $c(x,\cdot)$ и $c(\cdot,y)$

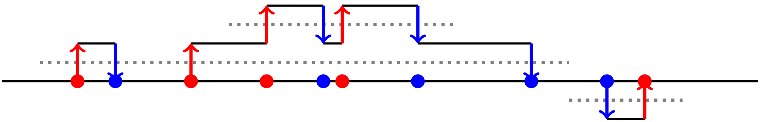
$$c(x,y) = \rho(x,y),$$
$$c(x,y) = \ln|x-y| \text{ и т. п.}$$
$$c(x,y) = c(|x-y|) \textbf{ не } \text{требуется}$$

Следствия

1. Достаточно перенести $\bar{\mu}_0 = (\mu_0 - \mu_1)_+$ to $\bar{\mu}_1 = (\mu_1 - \mu_0)_+$, где $\operatorname{spt} \bar{\mu}_0 \cap \operatorname{spt} \bar{\mu}_1 = \varnothing$

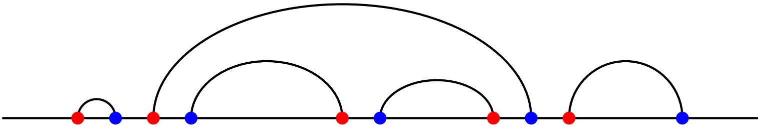
2. Перемещения частиц в оптимальном транспортном плане являются вложенными (не пересекаются)

3. Если $\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1$ дискретны, задачу можно разбить на подзадачи в **цепочках с чередованием**



Редукция к паросочетаниям в однодольном графе

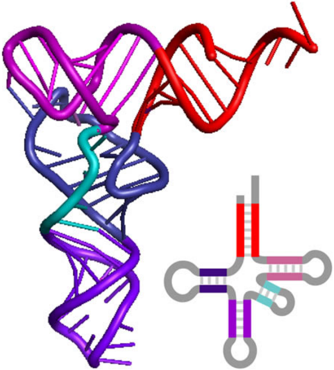
(Двудольный) оптимальный транспорт в цепочке с чередованием из n пар
$\equiv$ (однодольное) совершенное **паросочетание минимального веса** на $2n$ точках:

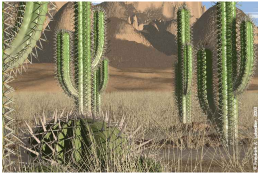


По заданным $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n}$ найти n-элементное подмножество дуг $\{(i', j')\}$ полного графа $\{(i, j) \colon 1 \leq i < j \leq 2n\}$, минимизирующее $\sum_{(i',j')} c(x_{i'}, x_{j'})$

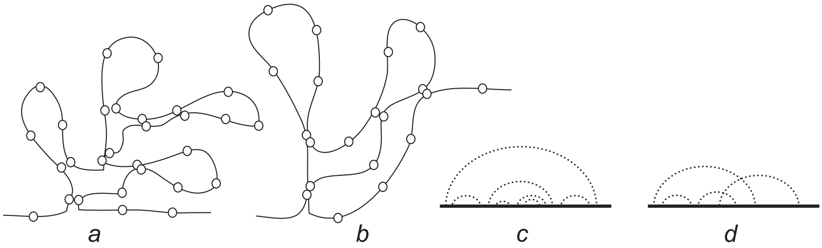
Биофизика: фолдинг РНК

Secondary structure of RNA

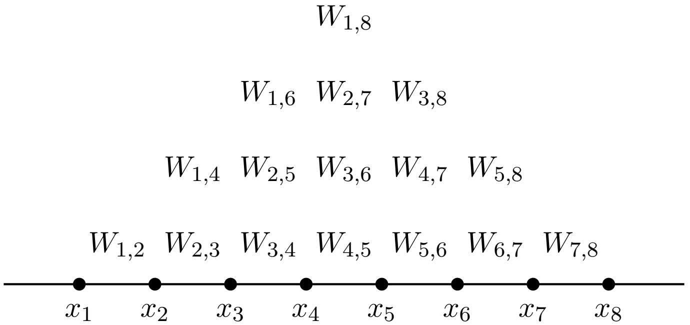




Биофизика: фолдинг РНК



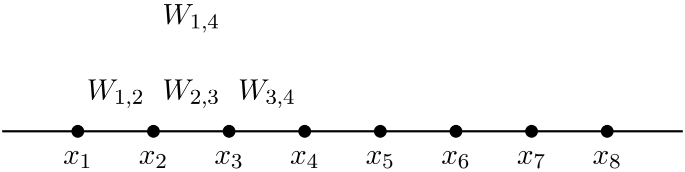
Принцип локализации



$W_{i,j}$ — минимальный вес частичного паросочетания на точках $x_i < x_{i+1} < \cdots < x_j$

$W_{12} = c(x_1, x_2)$,
$W_{14} = \min\{c(x_1, x_2) + c(x_3, x_4);\; c(x_1, x_4) + c(x_2, x_3)\}$ и т. д.

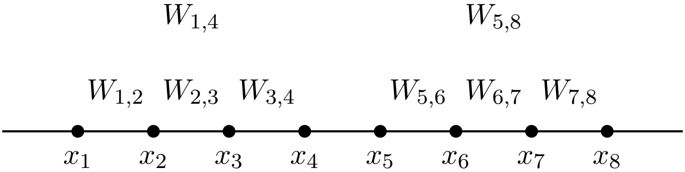
Принцип локализации



$W_{i,j}$ — минимальный вес частичного паросочетания на точках $x_i < x_{i+1} < \cdots < x_j$

$W_{12} = c(x_1, x_2)$,
$W_{14} = \min\{c(x_1, x_2) + c(x_3, x_4);\ c(x_1, x_4) + c(x_2, x_3)\}$ и т. д.

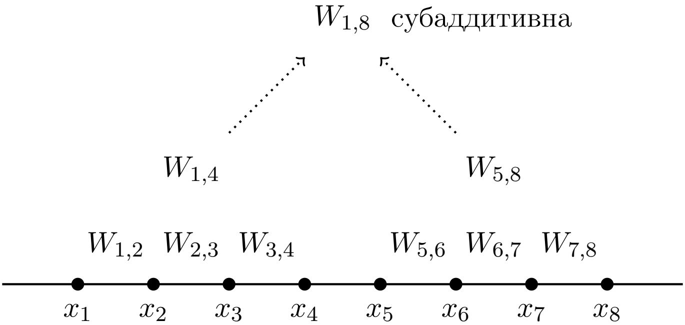
Принцип локализации



$W_{i,j}$ — минимальный вес частичного паросочетания на точках $x_i < x_{i+1} < \cdots < x_j$

$W_{12} = c(x_1, x_2)$,
$W_{14} = \min\{c(x_1, x_2) + c(x_3, x_4);\ c(x_1, x_4) + c(x_2, x_3)\}$ и т. д.

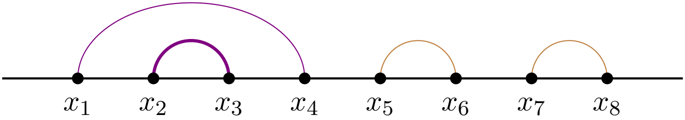
Принцип локализации



$W_{i,j}$ — минимальный вес частичного паросочетания на точках $x_i < x_{i+1} < \cdots < x_j$

$W_{12} = c(x_1, x_2)$,
$W_{14} = \min\{c(x_1, x_2) + c(x_3, x_4);\ c(x_1, x_4) + c(x_2, x_3)\}$ и т. д.

Принцип локализации

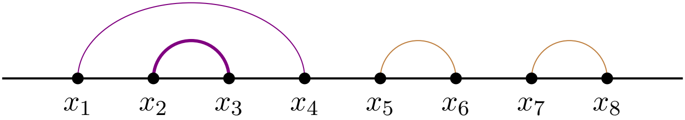


либо

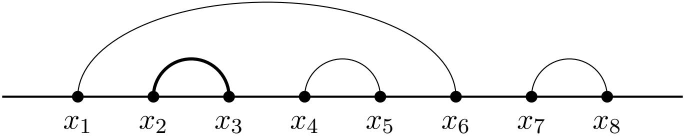
либо

и т. д.

Принцип локализации



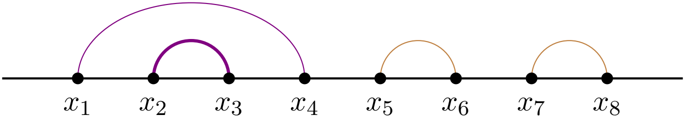
либо



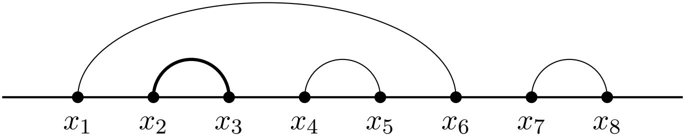
либо

и т. д.

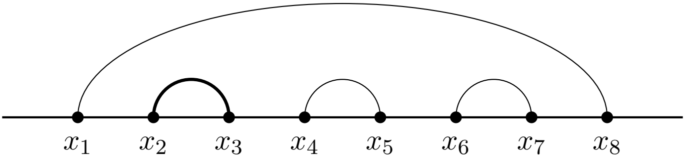
Принцип локализации



либо



либо

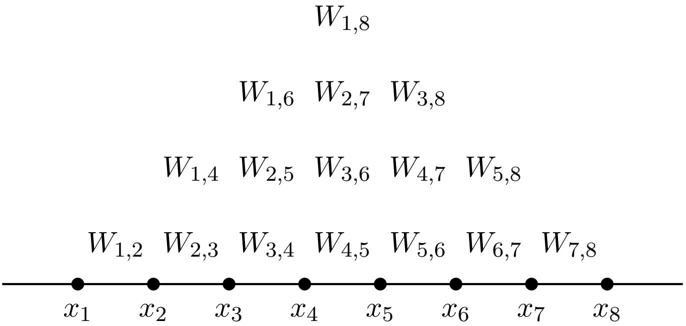


и т. д.

Принцип локализации

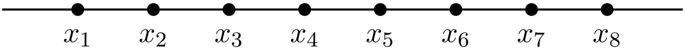
При объединении двух паросочетаний минимального веса в объединенном паросочетании **все скрытые дуги сохраняются** (хотя видимые дуги могут перезамыкаться)

Рекуррентное уравнение Беллмана

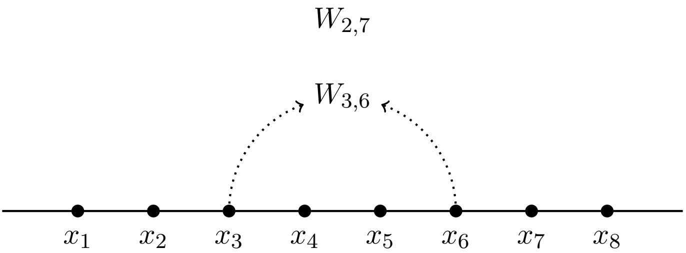


Рекуррентное уравнение Беллмана

$W_{2,7}$

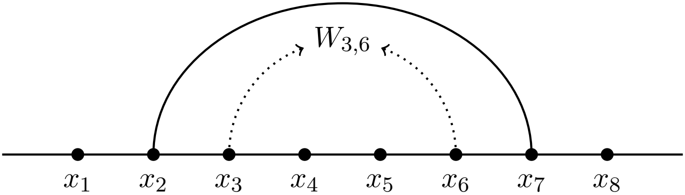


Рекуррентное уравнение Беллмана



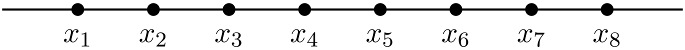
Рекуррентное уравнение Беллмана

$$W_{2,7} = c(x_2, x_7) + W_{3,6} \ ?$$

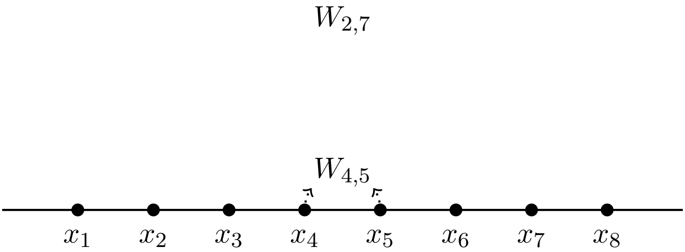


Рекуррентное уравнение Беллмана

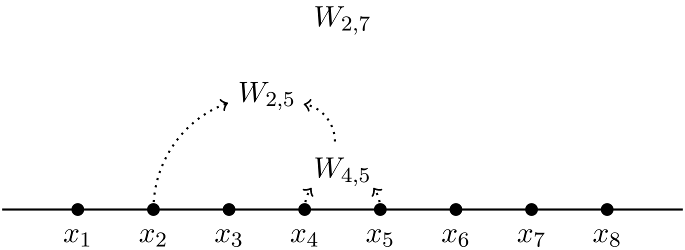
$$W_{2,7}$$



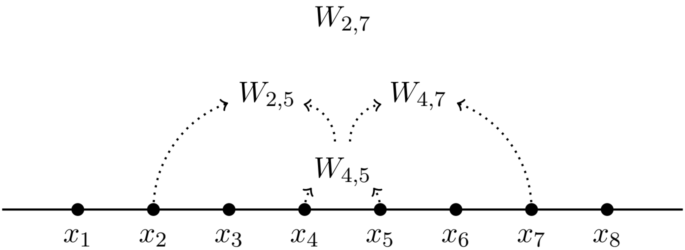
Рекуррентное уравнение Беллмана



Рекуррентное уравнение Беллмана

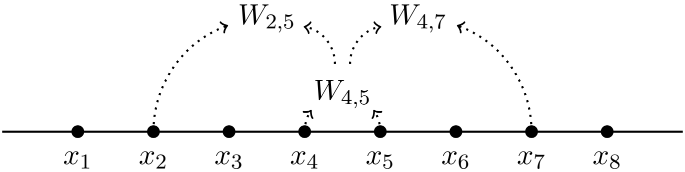


Рекуррентное уравнение Беллмана



Рекуррентное уравнение Беллмана

$$W_{2,7} \;\; = W_{2,5} + W_{4,7} - W_{4,5} \;?$$



И вновь субмодулярность

$$W_{i,j} = \min\left[c(x_i, x_j) + W_{i+1,j-1};\ W_{i,j-2} + W_{i+2,j} - W_{i+2,j-2}\right]$$

$W_{\cdot,\cdot}$ субмодулярна:
$W_{i,j} + W_{i+2,j-2} \leq W_{i,j-2} + W_{i+2,j} \quad \forall i < j-4$

$W_{\cdot,\cdot}$ — **наибольшая** субмодулярная функция, удовлетворяющая условиям

$$W_{i,j} - W_{i+1,j-1} \leq c(x_i, x_j) \quad \forall i < j-2$$

С увеличением $j-i$ разности $W_{i,j} - W_{i+1,j-1}$ убывают, а $c(x_i, x_j)$ растут

И вновь субмодулярность

$$W_{i,j} = \min\left[c(x_i, x_j) + W_{i+1,j-1};\ W_{i,j-2} + W_{i+2,j} - W_{i+2,j-2}\right]$$

$W_{\cdot,\cdot}$ субмодулярна:
$W_{i,j} + W_{i+2,j-2} \le W_{i,j-2} + W_{i+2,j} \quad \forall i < j - 4$

$W_{\cdot,\cdot}$ — **наибольшая** субмодулярная функция, удовлетворяющая условиям

$$W_{i,j} - W_{i+1,j-1} \le c(x_i, x_j) \quad \forall i < j - 2$$

С увеличением $j - i$ разности $W_{i,j} - W_{i+1,j-1}$ убывают, а $c(x_i, x_j)$ растут

И вновь субмодулярность

$$W_{i,j} = \min\left[c(x_i, x_j) + W_{i+1,j-1};\ W_{i,j-2} + W_{i+2,j} - W_{i+2,j-2}\right]$$

$W_{\cdot,\cdot}$ субмодулярна:
$W_{i,j} + W_{i+2,j-2} \leq W_{i,j-2} + W_{i+2,j} \quad \forall i < j - 4$

$W_{\cdot,\cdot}$ — **наибольшая** субмодулярная функция, удовлетворяющая условиям

$$W_{i,j} - W_{i+1,j-1} \leq c(x_i, x_j) \quad \forall i < j - 2$$

С увеличением $j - i$ разности $W_{i,j} - W_{i+1,j-1}$ убывают, а $c(x_i, x_j)$ растут

И вновь субмодулярность

$$W_{i,j} = \min\left[c(x_i, x_j) + W_{i+1,j-1};\ W_{i,j-2} + W_{i+2,j} - W_{i+2,j-2}\right]$$

$W_{\cdot,\cdot}$ субмодулярна:
$W_{i,j} + W_{i+2,j-2} \le W_{i,j-2} + W_{i+2,j} \quad \forall i < j - 4$

$W_{\cdot,\cdot}$ — **наибольшая** субмодулярная функция, удовлетворяющая условиям

$$W_{i,j} - W_{i+1,j-1} \le c(x_i, x_j) \quad \forall i < j - 2$$

С увеличением $j - i$ разности $W_{i,j} - W_{i+1,j-1}$ убывают, а $c(x_i, x_j)$ растут

Бесконечные конфигурации

Рассмотрим локально конечную конфигурацию в $\mathbf{R}^1$

$$\cdots < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots$$

$$W_{i,j} = \min\left[c(x_i, x_j) + W_{i+1,j-1};\ W_{i,j-2} + W_{i+2,j} - W_{i+2,j-2}\right]$$

Периодический случай: $x_{i+K} = x_i + L$

— $W_{i,j}$ стабилизируются, существует глобально оптимальная конфигурация

Непериодический случай: (x_i) образуют однородное случайное поле

— возможны перемежаемость, многомасштабный случайный рост

Бесконечные конфигурации

Рассмотрим локально конечную конфигурацию в $\mathbf{R}^1$

$$\cdots < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots$$

$$W_{i,j} = \min\left[c(x_i, x_j) + W_{i+1,j-1};\ W_{i,j-2} + W_{i+2,j} - W_{i+2,j-2}\right]$$

Периодический случай: $x_{i+K} = x_i + L$
— $W_{i,j}$ стабилизируются, существует глобально оптимальная конфигурация

Непериодический случай: (x_i) образуют однородное случайное поле
— возможны перемежаемость, многомасштабный случайный рост

Бесконечные конфигурации

Рассмотрим локально конечную конфигурацию в $\mathbf{R}^1$

$$\cdots < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots$$

$$W_{i,j} = \min\bigl[c(x_i, x_j) + W_{i+1,j-1};\ W_{i,j-2} + W_{i+2,j} - W_{i+2,j-2}\bigr]$$

Периодический случай: $x_{i+K} = x_i + L$

— $W_{i,j}$ стабилизируются, существует глобально оптимальная конфигурация

Непериодический случай: (x_i) образуют однородное случайное поле

— возможны перемежаемость, многомасштабный случайный рост