Проблема эквивалентности принципов максимума в сильной поточечной и интегральной формах. *

Л.А. Бекларян

Центральный Экономико-Математический Институт РАН
E-mail beklar@cemi.rssi.ru, beklaryan@mailfrom.ru

27 августа 2014 года, Москва,
Семинар Новикова-Хенкина-Шананина

Исследуется проблема эквивалентности принципов максимума в сильной поточечной и интегральной формах в задаче оптимального управления, в которой динамика описывается функционально-дифференциальным уравнением точечного типа (дифференциальным уравнением с отклоняющимся аргументом). Принцип максимума в сильной поточечной форме формулируется в виде два-параметрического семейства конечномерных экстремальных задач [1],[2]. Первый параметр-это время t, как и в обыкновенных системах, а вторым параметром служит длина слов, составленных из образующих конечнопорожденной группы Q гомеоморфизмов прямой, порожденных функциями отклонения аргумента (для обыкновенных систем соответствующая группа Q является тривиальной). Из принципа максимума в интегральной форме следует принцип максимума в сильной поточечной форме. Основным препятствием для их эквивалентности служит условие комбинаторного свойства на группу Q. Наличие отмеченного комбинаторного свойства влечет за собой существование метрических инвариантов для группы Q, что позволяет более детально описать ее структуру.

Введение

Доклад посвящена групповым особенностям задачи оптимального управления для систем с дифференциальными связями в виде функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. Изучается следующая задача оптимального управления.

Задача I. *Минимизировать функционал*

$$J = J(x(t_0), x(t_1)) \to \inf \tag{1}$$

*Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант №09-01-90200, грант № 09-01-00324-а) и программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3038.2008.1)

при ограничениях:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(q_1(t)), \ldots, x(q_s(t)), \, u(q_1(t)), \ldots, u(q_s(t))\,), \qquad t \in [t_0, t_1], \tag{2}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \qquad t \in \mathbb{R} \backslash [t_0, t_1], \qquad \varphi(.) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \tag{3}$$

$$\mathcal{K}(x(t_0), x(t_1)) = 0, \tag{4}$$

$$u(t) \in U, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad U \subseteq \mathbb{R}^m. \tag{5}$$

Здесь $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \times \mathbb{R}^{ms} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — отображение класса $C^{(0)}$ и по второй группе ns переменных непрерывно дифференцируемо; $\mathcal{K} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^\kappa$ отображение класса $C^{(1)}$; $q_j(.)$, $j = 1, \ldots, s$ — диффеоморфизмы прямой класса $Diff^{(1)}(\mathbb{R})$, сохраняющие ориентацию. Не нарушая общности, можем полагать что

$$(t_1 - t_0) + \sup_{j \in \{1,\ldots,s\}} |t_0 - q_j(t_0)| + \sup_{j \in \{1,\ldots,s\}} |t_1 - q_j(t_1)| < 1. \tag{6}$$

Так как гомеоморфизмы q_j, $j = 1, ..., s$ удовлетворяют условию (6), то их можно считать накрытиями единичной окружности, т.е. для них выполняются условия

$$q_j(t+1) = q_j(t) + 1, \quad j = 1, ..., s, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Через Q будем обозначать группу, порожденную такими гомеоморфизмами, т.е.

$$Q = < q_1, ..., q_s > .$$

В дальнейшем полную группу всех накрытий единичной окружности будем обозначать через $H\widetilde{omeo}_+(S^1)$ и, соответственно, для рассматриваемой группы Q справедливо вложение $Q \subseteq H\widetilde{omeo}_+(S^1)$.

Для систем с отклоняющимся аргументом (функционально-дифференциальных уравнений точечного типа), в наиболее широком классе отклонений аргумента, на основе метода локальных вариаций в работах [3], [4] получен поточечный принцип максимума Понтрягина (слабый поточечный принцип максимума). В основе другого метода исследования необходимых условий оптимальности (сильного поточечного принципа максимума) лежит модификация метода v-вариаций [1],[2]. Для групп гомеоморфизмов прямой из "массивного"подмножества справедлив принцип максимума Понтрягина в сильной поточечной форме в виде два-параметрического семейства конечномерных экстремальных задач (для обыкновенных систем принцип максимума представлен один параметрическим семейством конечномерных экстремальных задач). Одним параметром, как и в случае обыкновенных систем, является время t. Вторым параметром является k=0,1,2, . . . , который для группы гомеоморфизмов прямой Q характеризует элементы орбиты $Q(t)$ точки t, полученные с помощью слов длины не более чем k.

В общем случае из принципа максимума в интегральной форме следует принцип максимума в сильной поточечной форме. Препятствия, связанные с эквивалентностью принципа максимума в сильной поточечной форме и принципа максимума в интегральной форме, связаны с условиями комбинаторного характера на группу Q. Наличие отмеченного комбинаторного свойства влечет за собой существование метрических инвариантов для группы гомеоморфизмов Q, что позволяет более детально описать ее структуру. Все эти вопросы будут обсуждаться ниже.

1 Формулировка основных результатов.

Для формулировки результатов определим векторное пространство

$$K^r = \overline{\prod_{q\in Q}} R^r_q, \qquad R^r_q = \mathbb{R}^r, \quad q \in Q.$$

со стандартной топологией полного прямого произведения (метризуемое пространство).

Пусть

$$\vec{x} = \{x_q\}_{q\in Q} \in K^n, \qquad \vec{\psi} = \{\psi_q\}_{q\in Q} \in K^n, \qquad \vec{u} = \{u_q\}_{q\in Q} \in K^m.$$

Для любых $t \in \mathbb{R}$, $\vec{x}, \vec{\psi} \in K^n$, $\vec{u} \in K^m$ положим:

$$H_q(t,\vec{x},\vec{\psi},\vec{u}) = \psi_q[\dot{q}(t) f(q(t), x_{q_1 q}, ..., x_{q_s q}, u_{q_1 q}, ..., u_{q_s q})\chi_{[t_0,t_1]}(q(t)) + \dot{q}(t)\varphi(q(t))\chi_{\mathbb{R}\setminus[t_0,t_1]}(q(t))]. \quad (8)$$

В пространстве K^m определим множество значений управления

$$\mathbb{U} = \{\vec{u} : \vec{u} = \{u_q\}_{q\in Q} \in K^m; \quad \forall q \in Q, \quad u_q \in U\},$$

а также множество вектор-функций управления

$$\Omega = \{\vec{u}(.) : \vec{u}(t) = \{u_q(t)\}_{q\in Q}, \quad \vec{u}(t) \in \mathbb{U}, \quad u_q(t) = u_e(q(t)) \quad \text{для почти всех } t \in \mathbb{R}$$
$$\text{и всех} \quad q \in Q\}.$$

Пусть

$$Q^k = \{q : \ q = q_{i_1}^{\varepsilon_1} ... q_{i_l}^{\varepsilon_l}, \quad l \leq k, \quad \varepsilon_p = +(-)1, \ p = 1, ..., l\}, \qquad k = 0, 1, ...$$

элементы группы Q, имеющие представление с помощью слов длины не более чем k, то есть каждый элемент Q^k получается с помощью не более чем k суперпозиций образующих q_j, $j = 1, ..., s$ и их обратных элементов. По определению полагаем $Q^0 =< e >$. По множеству Q^k, $k = 0, 1, ...$ и заданному управлению $u(.)$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$ определим

$$\mathbb{U}^k(t, u(.)) = \{\vec{u} : \ \vec{u} \in \mathbb{U}, \quad \vec{u} = \{u_q\}_{q\in Q}; \quad \forall q \notin Q^k, \quad u_q = u(q(t))\}.$$

Образуем k-частичную функцию Понтрягина

$$\mathbb{H}^k(t,\vec{x},\vec{\psi},\vec{u}) = \sum_{q\in Q^{(k+1)}} H_q(t,\vec{x},\vec{\psi},\vec{u}) \quad (9)$$

и краевую функцию

$$\mathfrak{F}(x^0, x^1, l_J, l_{\mathcal{K}}) = l_J J(x^0, x^1) + l_{\mathcal{K}}\mathcal{K}(x^0, x^1). \quad (10)$$

Определение 1. *Диффеоморфизмы* $q_1, q_2 \in Diff^{(1)}(\mathbb{R})$, $q_1 \neq q_2$ *прямой называются взаимно трансверсальными, если из условия* $q_1(t) = q_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$ *следует, что* $\dot{q}_1(t) \neq \dot{q}_2(t)$. ■

Важное замечание заключается в том, что для группы $Q =< q_1, ..., q_s >$, с образующими $q_j \in Diff^{(1)}(\mathbb{R}) \cap \widetilde{Homeo}_+(S^1), \quad j = 1, ..., s$ и взаимно трансверсальными элементами, для любого $t \in \mathbb{R}$, за исключением счетного множества точек, соответствие $\eta: \ Q \to Q(t), \quad \eta(q) = q(t), \ \ q \in Q$ является взаимно однозначным.

Сформулируем принцип максимума Понтрягина в наиболее сильной форме, полученный в [2]. Наряду с группой $Q =< q_1, ..., q_s >$ будем рассматривать расширенную группу $\mathcal{J}_Q =< q_1, ..., q_s, \hat{q} >$, где $\hat{q}(t) = t+1$. В силу свойста (7), элемент $\hat{q}$ принадлежит центру группы $\mathcal{J}_Q$, т.е. перестановочен с любым элементом группы.

Теорема А (Принцип максимума [2]). *Пусть: $Q =< q_1, ..., q_s >$ есть группа диффеоморфизмов с элементами из $Diff^{(2)}(\mathbb{R}) \cap \widetilde{Homeo}_+(S^1)$ и элементы расширенной группы $\mathcal{J}_Q =< q_1, ..., q_s, \hat{q} >$ взаимно трансверсальны; функция $f(.)$ непрерывна и по первым $(ns+1)$ переменным непрерывно-дифференцируема; краевая функция $\varphi(.)$ принадлежит пространству $L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Если $(\hat{x}(.), \hat{u}(.))$ точка сильного локального минимума задачи A, то найдется функция $\hat{\psi}(.)$ абсолютно непрерывная на $(-\infty, t_0) \cup (t_0, t_1) \cup (t_1, +\infty)$, в точках t_0, t_1 имеющая разрывы первого рода, и функционалы $l_J \in \mathbb{R}, \ l_J \geq 0, \ \ l_K \in (\mathbb{R}^p)'$ такие, что для любых $k = 0, 1, ...$ и почти всех $t \in \mathbb{R}$ выполняются условия:*

$$\frac{\hat{x}_e(t)}{dt} = \frac{\partial \mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t))}{\partial \psi_e}, \tag{11}$$

$$\frac{\hat{\psi}_e(t)}{dt} = \frac{\partial \mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t))}{\partial x_e}, \tag{12}$$

$$\hat{x}_q(t) = \hat{x}(q(t)), \quad \hat{\psi}_q(t) = \hat{\psi}(q(t)) \quad \text{для любых} \quad q \in Q, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

$$\hat{u}_q(t) = \hat{u}(q(t)) \quad \text{для любых} \quad q \in Q \quad \text{и почти всех} \quad t \in \mathbb{R}; \tag{14}$$

граничные условия

$$\frac{\partial \mathfrak{F}(.)}{\partial l_K} = 0, \tag{15}$$

$$\hat{\psi}(t_0) = \frac{\partial \mathfrak{F}(.)}{\partial x_0}, \quad \hat{\psi}(t_1) = -\frac{\partial \mathfrak{F}(.)}{\partial x_1}; \tag{16}$$

условие нормировки

$$l_J + \|\hat{\psi}\|_{L_\infty} + \|l_{\mathcal{K}}\| > 0; \tag{17}$$

принцип максимума в сильной поточечной форме

$$\mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t)) = \max_{\vec{u} \in \mathbb{U}^k(t, \hat{u}(.))} \mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{u}). \tag{18}$$

■

Замечание 1. *В условии нормировки присутствует сопряженная переменная $\hat{\psi}$. Это свойственно исключительно для управляемых систем с дифференциальной связью, задаваемой функционально-дифференциальным уравнением. Для дифференциальных связей, задаваемых ФДУ запаздывающего типа или опережающего типа (очевидно, что ОДУ также относится к такому типу), в условии нормировки функция $\hat{\psi}$ отсутствует.* ■

Замечание 2. *Если для сопряженного уравнения* (12) *справедлива теорема о единственности решения, то в условии нормировки сопряженная переменная $\hat{\psi}$ отсутствует.* ■

В случае $k = 0$ условие (18) будем называть *принципом максимума в слабой поточечной форме*. Мы уже отмечали, что такой принцип максимума для наиболее широкого класса функций отклонения аргумента получен в работе [4]. Там предполагалось, что $q_1, ..., q_s \in Diff^{(1)}(\mathbb{R}) \cap H\widetilde{omeo}_+ (S^1)$, а множество $\Upsilon = \{t : \ \exists i, j, \quad i, j \in \{1, ..., s\}, \quad i \neq j, \quad q_i^{-1}(t) = q_j^{-1}(t) \}$ является дискретным множеством. Очевидно, что из условия о взаимной трансверсальности диффеоморфизмов $q_1^{-1}, ..., q_s^{-1}$ будет следовать дискретность множества Υ. Пример, приведенный в разделе 3, показывает, что принципы максимума в слабой и сильной поточечных формах не эквивалентны.

Условие о взаимной трансверсальности элементов группы $\mathcal{J}_Q$ весьма важное. Очевидно, что в этом случае элементы группы Q также взаимно трансверсальны. Как отмечалось выше, в силу этого свойства для почти каждого $t \in \mathbb{R}$ имеет место взаимнооднозначное соответствие между элементами q группы Q и элементами $q(t)$ орбиты $Q(t)$ точки t, т.е. на орбите $Q(t)$ группа Q действует свободно. Это делает корректным формулировку принципа максимума в сильной поточечной форме (21), в которой, в действительности, суммирование должно было производиться по элементам орбиты точки t.

Естественно задаться вопросом. Как много групп, для которых выполняются условия из теоремы A. При каждом заданном $m = 1, 2, ...$ определим пространство Θ^m в виде прямого произведения

$$\Theta^m = \otimes_m [Diff^2(\mathbb{R}) \cap H\widetilde{omeo}_+ (S^1)]. \tag{19}$$

Всякую группу $< q_1, ..., q_m >$ с образующими $q_j \in Diff^{(2)}(\mathbb{R}) \cap H\widetilde{omeo}_+ (S^1), \quad j = 1, ..., m$ будем рассматривать как элемент пространства Θ^m.

Теорема B ([5],[6]). *Множество свободных групп диффеоморфизмов* $Q =< q_1, ..., q_s >$, $q_j \in Diff^{(2)}(\mathbb{R}) \cap \widetilde{Homeo}_+(S^1)$, $j = 1, ..., s$ *с фиксированным числом s образующих, для которых элементы расширенной группы* $\mathcal{J}_Q =< q_1, ..., q_s, \hat{q} >$, $\hat{q} = t + 1$ *взаимно трансверсальны, в метрике пространства* $\otimes_s [Diff^{(2)}(\mathbb{R}) \cap \widetilde{Homeo}_+(S^1)]$ *является счетным пересечением открытых всюду плотных подмножеств (массивным множеством).*

Теорема B может быть переформулирована в терминах групп диффеоморфизмов окружности. Всякую группу $< g_1, ..., g_m >$ с образующими $g_j \in Diff^{(2)}(S^1)$, $j = 1, ..., m$ будем рассматривать как элемент пространства $\otimes_m Diff^{(2)}(S^1)$.

Теорема B*([5],[6]). *Множество свободных групп диффеоморфизмов* $G =< g_1, ..., g_s >$, $g_j \in Diff^{(2)}(S^1)$, $j = 1, ..., s$ *с фиксированным числом s образующих, для которых элементы взаимно трансверсальны, в метрике пространства* $\otimes_s Diff^{(2)}(S^1)$ *является счетным пересечением открытых всюду плотных подмножеств (массивным множеством).*

Решение проблемы эквивалентности принципов максимума в сильной поточечной и интегральной формах связано с препятствиями в виде комбинаторных условий для группы Q. Для формулировки этих условий следует определить важную топологическую характеристики группы Q.

Определение 2. *Пусть* $Q \subseteq \widetilde{Homeo}_+(S^1)$. *Непустое подмножество* $\mathbb{R}$ *называется минимальным, если оно замкнуто,* Q*-инвариантно и не содержит собственных замкнутых* Q*-инвариантных подмножеств.* ∎

Для группы $Q \subseteq \widetilde{Homeo}_+(S^1)$ минимальное множество не пусто (см. [7], теорема 3.6) и имеет одно из взаимоисключающих структур: дискретное множество (возможно не единственным); единственное совершенное нигде не плотное подмножество $\mathbb{R}$ (канторово множество); совпадает со всем $\mathbb{R}$. Объединение минимальных множеств группы $Q \subseteq \widetilde{Homeo}_+(S^1)$, обозначаемое через $E(Q)$, является замкнутым множеством (см. [7], теорема 3.7), а каноническую нормальную подгруппу H_Q определим следующим образом

$$H_Q = \{\, q : \ \forall t \in E(q), \quad q(t) = t \,\}.$$

Комбинаторное условие, которое будет использовано при формулировке основного результата имеет вид: факторгруппа Q/H_Q не содержит свободных подгрупп с двумя образующими. Весьма важно понять смысл комбинаторного условия об отсутствии свободной подгруппы с двумя образующими для факторгруппы Q/H_Q, какие ограничения оно накладывает на структуру самой группы Q. Для такой группы Q (см. [7], теорема 9.6) существует инвариантная борелевская мера, конечная на компактах. В действительности о структуре такой группы можно сказать большее.

Теорема C. *Пусть группа* $Q =< q_1, ..., q_s >$ *является группой диффеоморфизмов с элементами из* $Diff^{(2)}(\mathbb{R}) \cap \widetilde{Homeo}_+(S^1)$ *и элементы расширенной группы* $\mathcal{J}_Q =< q_1, ..., q_s, \hat{q} >$ *взаимно трансверсальны. Если факторгруппа* Q/H_Q *не содержит свободной подгруппы с двумя образующими, то факторгруппа* Q/H_Q *и подгруппа* H_Q*являются коммутативными, то есть группа* Q *является разрешимой группой ступени не более двух. Более того, группа* Q *является почти нильпотентной.* ∎

Коммутативность факторгруппы Q/H_Q является следствием отсутствия свободной подгруппы с двумя образующими, а коммутативность самой подгруппы H_Q является следствием условия взаимной трансверсальности элементов группы $\mathcal{J}_Q =< q_1, ..., q_s, \hat{q} >$.

В терминах числа сдвига $\tau(q)$ (числа вращения $\rho(q) = \tau(q) \mod 1$) гомеоморфизма $q \in \widetilde{Homeo}_+(S^1)$ (см. [8], параграф 11, раздел Ж) можно уточнить структуру группы $Q =< q_1, ..., q_s >$. Структура минимального множества группы $Q =< q_1, ..., q_s >$ с инвариантной мерой зависит от значений чисел вращения $\{\tau(q_1), ..., \tau(q_s)\}$. Для такой группы Q отображение $\tau_Q : Q \to S^1$, где для любого $q \in Q, \quad \tau_Q(q) = \tau(q)$, является гомоморфизмом (см. [7], теорема 5.14), а при рациональных числах вращения $\{\tau(q_1), ..., \tau(q_s)\}$ каждое из минимальных множеств группы Q является дискретным множеством.

Следствие. *Пусть группа $Q =< q_1, ..., q_s >$ является группой диффеоморфизмов с элементами из $Diff^2(\mathbb{R}) \cap \widetilde{Homeo}_+(S^1)$, элементы расширенной группы $\mathcal{J}_Q =< q_1, ..., q_s, \hat{q} >$ взаимно трансверсальны, а факторгруппа Q/H_Q не содержит свободной подгруппы с двумя образующими. Если хотя бы одно из чисел сдвига $\{\tau(q_1), ..., \tau(q_s)\}$ является иррациональным, то $H_Q =< e >$ и группа Q является коммутативной группой свободно действующих гомеоморфизмов на $\mathbb{R}$. В противном случае, каждый элемент коммутативной нормальной подгруппы H_Q на каждой связной компоненте множества $\mathbb{R} \backslash E(Q)$ является свободно действующим гомеоморфизмом, факторгруппа Q/H_Q является циклической и каждый представитель заданного смежного класса на множестве $E(Q)$ действует как одно и то же отображение.* ■

Теперь мы можем перейти к формулировке основного результата данной работы. Для этого дадим определение принципа максимума в интегральной форме.

Определение 3. *Условие*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t))dt = \max_{\vec{u}(.)\in\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{u}(t))dt \tag{20}$$

называется принципом максимума Понтрягина в интегральной форме.

■

Из принципа максимума в интегральной форме следует принцип максимума в сильной поточечной форме. В случае постоянных отклонений аргумента принцип максимума в сильной поточечной форме и принцип максимума в интегральной форме эквивалентны [5]. В связи с этим, актуальны следующие проблемы:

(1) для каких групп гомеоморфизмов прямой, порожденных функциями отклонения аргумента, принципы максимума Понтрягина в интегральной и сильной поточечной формах эквивалентны?;

(2) для возможно широкого класса функций отклонения аргумента получить принцип максимума в интегральной форме.

Теорема D. *Пусть группа* $Q =< q_1, ..., q_s >$ *является группой диффеоморфизмов с элементами из* $Diff^{(2)}(\mathbb{R}) \cap \widetilde{Homeo}_+(S^1)$ *и элементы расширенной группы* $\mathcal{J}_Q =< q_1, ..., q_s, \hat{q} >$ *взаимно трансверсальны. Если факторгруппа* Q/H_Q *не содержит свободной подгруппы с двумя образующими, то принцип максимума в сильной поточечной форме*

$$\mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t)) = \max_{\vec{u} \in \mathbb{U}^k(t, \hat{u}(.))} \mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{u}). \tag{21}$$

эквивалентен принципу максимума в интегральной форме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t))dt = \max_{\vec{u}(.) \in \Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{u}(t))dt. \tag{22}$$

■

2 Доказательство сформулированных результатов.

Доказательство теоремы C. Перед формулировкой теоремы C мы уже отмечали, что для такой группы $Q =< q_1, ..., q_s >$ существует инвариантная борелевская мера, конечная на компактах (см. [7], теорема 9.6), откуда в свою очередь следует, что инвариантная мера существует и для расширенной группы $\mathcal{J}_Q =< q_1, ..., q_s, \hat{q} >$ (см. [7], предложение 5.5).

Для группы Q определим каноническое подмножество Q^s и топологическую характеристику $Fix\ Q^{\mathcal{S}}$:

$$Q^{\mathcal{S}} = \{q : \ q \in Q, \quad \exists t \in \mathbb{R}, \quad q(t) = t\}, \qquad Fix\ Q^{\mathcal{S}} = \{t : \ \forall q \in Q^{\mathcal{S}}, \quad q(t) = t\}. \tag{23}$$

Условие $Fix\ Q^{\mathcal{S}} \neq \emptyset$ является критерием существования инвариантной борелевской меры, конечной на компактах (см. [7], теорема 5.1). В то же время, для группы с инвариантной мерой справедливо вложение $E(Q) \subseteq Fix\ Q^{\mathcal{S}}$ (см. [7], теоремы 3.1, 3.8), а в случае дискретности минимальных множеств справедливо равенство $E(Q) = Fix\ Q^{\mathcal{S}}$. Из отмеченных свойств минимальных множеств, в частности, следует равенство $H_Q = Q^{\mathcal{S}}$. Для группы $\mathcal{J}_Q$ точно также справедливо равенство $H_{\mathcal{J}_Q} = \mathcal{J}_Q^{\mathcal{S}}$.

Рассмотрим два случая. 1)Случай первый- среди чисел сдвига $\{\tau(q_1), ..., \tau(q_s)\}$ есть хотя бы одно иррациональное число. Не ограничивая общности, будем полагать, что $\tau(q_1)$ является иррациональным числом. Рассмотрим группу $\mathcal{J}_{<q_1>} =< q_1, \hat{q} >$. Для группы $\mathcal{J}_{<q_1>}$ минимальное множество будет не дискретным (см. [7], предложение 5.4, теоремы 5.14, 5.15) и оно будет содержаться в минимальном множестве группы $\mathcal{J}_Q$ (см. [7], лемма 3.3). Так как $q_1 \in Diff^{(2)}(\mathbb{R}) \cap H\widetilde{omeo}_+(S^1)$, то для группы $\mathcal{J}_{<q_1>}$, в силу теоремы Данжуа (см. [8], глава 3, теорема 3), минимальное множество не может быть канторовым и потому совпадает со всей прямой. В таком случае минимальное множество группы $\mathcal{J}_Q$ также совпадает со всей прямой и, в силу определения нормальной подгруппы $H_{\mathcal{J}_Q}$, такая подгруппа будет тривиальной, т.е. $H_{\mathcal{J}_Q} =< e >$. Так как справедливо равенство $H_{\mathcal{J}_Q} = \mathcal{J}_Q^{\mathcal{S}}$, то из условия тривиальности нормальной подгруппы $H_{\mathcal{J}_Q}$ следует, что группа $\mathcal{J}_Q$ является коммутативной группой свободных действий на прямой и топологически сопряжена группе сдвигов (см. [7], теоремы 2.1, 5.8, 8.1, замечание 8.1). Так как имеет место вложение $Q \in \mathcal{J}_Q$, то Q также является коммутативной группа свободных действий на прямой и топологически сопряжена группе сдвигов.

2)Случай второй- все числа сдвига $\{\tau(q_1), ..., \tau(q_s)\}$ являются рациональными. Тогда минимальные множества группы Q $(\mathcal{J}_Q)$ являются дискретными множествами (см. [7], теоремы 5.8, 5.9, 5.12, 5.14). Так как $H_Q = Q^{\mathcal{S}}$ $(H_{\mathcal{J}_Q} = \mathcal{J}_Q^{\mathcal{S}})$, то факторгруппа Q/H_Q $(\mathcal{J}_Q/H_{\mathcal{J}_Q})$ коммутативная (см. [7], теорема 2.1) и циклическая (см. [7], теорема 4.1). Рассмотрим нормальную подгруппу H_Q $(H_{\mathcal{J}_Q})$. Элементы подгруппы H_Q $(H_{\mathcal{J}_Q})$ точки замкнутого дискретного множества $E(Q)$ $(E(\mathcal{J}_Q))$ оставляют на месте. Не трудно заметить, что $E(Q) \subseteq E(\mathcal{J}_Q)$ и $H_{\mathcal{J}_Q} \subseteq H_Q$. Рассмотрим какой-либо связный интервал из $\mathbb{R} \backslash E(Q)$ $(\mathbb{R} \backslash E(\mathcal{J}_Q))$ и обозначим его через $\Delta = (t_0, t_1)$. Очевидно, что $t_0, t_1 \in E(Q)$ $(E(\mathcal{J}_Q))$. На группе H_Q $(H_{\mathcal{J}_Q})$ определим порядок следующим образом: для любых $g_1, g_2 \in H_Q$ $(g_1, g_2 \in H_{\mathcal{J}_Q})$, $g_1 \preceq g_2$ тогда и только тогда, когда $\dot{g}_1(t_0) \leq \dot{g}_2(t_0)$. Так как элементы группы $\mathcal{J}_Q$ являются взаимно трансверсальными, то с таким порядком группа H_Q $(H_{\mathcal{J}_Q})$ является вполне упорядоченной архимедовой группой (см. [10], глава 6, параграф 1). По теореме Гельдера (см. [10], глава 6, параграф 1) такая группа H_Q $(H_{\mathcal{J}_Q})$ коммутативна и изоморфна некоторой подгруппе аддитивной группы $\mathbb{R}$.

Покажем, что для любого элемента $g \in H_Q \backslash e$ $(g \in H_{\mathcal{J}_Q} \backslash e)$ и любой точки $t \in \Delta$ справедливо условие $g(t) \neq t$. Докажем от противного. Пусть найдется элемент $g_1 \in H_Q \backslash e$ $(g_1 \in H_{\mathcal{J}_Q} \backslash e)$ и точка $t \in \Delta$ такие, что $g_1(t) = t$. В силу определения множества $E(Q)$ $(E(\mathcal{J}_Q))$, найдется элемент $g_2 \in H_Q$ $(g_2 \in H_{\mathcal{J}_Q})$, для которого $g_2(t) \neq t$. Для определенности будем полагать, что $g_2(t) > t$. Очевидно, что для любого $n = 0, 1, 2, ...$ справедливо условие $g_2^{(n+1)}(t) > g_2^n(t)$. Тогда, в силу взаимной трансверсальности элементов g_1, g_2, найдется $k \in 0, 1, ...$, для которого будут справедливы условия $g_1(g_2^k(t)) = g_2^k(t)$, $g_1(g_2^{(k+1)}(t)) \neq g_2^{(k+1)}(t)$. Легко проверить, что такие элементы g_1, g_2 не коммутируют. Противоречие. Следовательно, элементы группы H_Q $(H_{\mathcal{J}_Q})$ на интервале Δ действуют свободно. Точно также можно показать это свойство для любой связной компоненты множества $\mathbb{R} \backslash E(Q)$ $(\mathbb{R} \backslash E(\mathcal{J}_Q))$. Таким образом, каждый нетривиальный элемент коммутативной нормальной подгруппы H_Q $(H_{\mathcal{J}_Q})$ на каждой связной компоненте (открытом интервале) множества $\mathbb{R} \backslash E(Q)$ $(\mathbb{R} \backslash E(\mathcal{J}_Q))$ является свободно действующим гомеоморфизмом. Остается заметить, что для циклической факторгруппы Q/H_Q $(Q/H_{\mathcal{J}_Q})$ каждый представитель заданного смежного класса на множестве $E(Q)$ $(E(\mathcal{J}_Q))$ действует как одно и то же отображение.

Покажем, что группа Q почти нильпотентна. В первом случае (случай 1)) группа Q коммутативна, а потому нильпотентна. Рассмотрим второй случай (случай 2)). Если циклическая факторгруппа Q/H_Q тривиальная, либо тривиальна подгруппа H_Q, то из коммутативности факторгруппы Q/H_Q и подгруппы H_Q также следует нильпотентность Q. Пусть циклическая факторгруппа Q/H_Q и подгруппа H_Q не тривиальны. Через qH_Q обозначим левый смежный класс, соответствующий образующей факторгруппы Q/H_Q. Число сдвига $\tau(q)$ рационально и равно $\frac{n}{m}$ $(\frac{n}{m} \neq 0,\ m \in \mathbb{Z}^+)$. Для любых заданных $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ рассмотрим произвольные элементы $\tilde{q}_1 \in q^{r_1} H_Q$, $\tilde{q}_2 \in q^{r_2} H_Q$. Очевидно, что $\tau(q_1) = \frac{nr_1}{m}$, $\tau(q_2) = \frac{nr_2}{m}$. В таком случае, справедливы включения

$$\tilde{q}_1^m \hat{q}^{-nr_1},\ \hat{q}^{-nr_2} \tilde{q}_2^m \in H_{\mathcal{J}_Q} \tag{24}$$

Так как элемент $\bar{q}$ принадлежит центру группы $\mathcal{J}_Q$, а подгруппа $H_{\mathcal{J}_Q}$ коммутативна, то справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1^m \tilde{q}_2^m = \hat{q}^{nr_1} \hat{q}^{-nr_1} \tilde{q}_1^m \tilde{q}_2^m \hat{q}^{-nr_2} \hat{q}^{nr_2} = \hat{q}^{nr_1} \tilde{q}_1^m \hat{q}^{-nr_1} \hat{q}^{-nr_2} \tilde{q}_2^m \hat{q}^{nr_2} = \\ = \hat{q}^{nr_1} \hat{q}^{-nr_2} \tilde{q}_2^m \tilde{q}_1^m \hat{q}^{-nr_1} \hat{q}^{nr_2} = \tilde{q}_2^m \tilde{q}_1^m. \end{aligned} \tag{25}$$

Следовательно в группе Q не существует свободной подполугруппы с двумя образующими. По теореме Розенблата (см. [11]) такая группа является почти нильпотентной. Это и доказывает теорему C и следствие. ■

Доказательство теоремы D. Из принципа максимума в интегральной форме очевидным образом следует принцип максимума в сильной поточечной форме. Проведем доказательство в обратную сторону. Пусть выполняется принцип максимума в сильной поточечной форме. Для заданного управления $u(.)$ и вектор-функции управлении $\vec{w}(.) \in \Omega$ построим новую вектор-функцию управления: для почти всякого $t \in [t_0, t_1]$

$$\vec{v}^k(t; u(.), \vec{w}(.)) = \{\vec{v}_q^k(t; u(.), \vec{w}(.))\}_{q \in Q}, \quad \vec{v}_q^k(t; u(.), \vec{w}(.)) = \begin{cases} u(q(t)), & q \notin Q^k, \\ w(q(t)), & q \in Q^k. \end{cases} \tag{26}$$

Пусть $\vec{u}(.) \in \Omega$. Тогда из принципа максимума в сильной поточечной форме (18) следует, что для любого $k = 1, 2, ...$ и почти всякого $t \in [t_0, t_1]$ справедливо неравенство

$$\mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t)) \geq \mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{v}^k(t; \hat{u}(.), \vec{u}(.))\,), \tag{27}$$

которое становится равенством в случае, когда в вектор-функцию $\vec{v}^k(.)$ вместо $\vec{u}(.)$ подставить $\vec{\hat{u}}(.)$.

Интегрируя левую и правую части неравенства (27) на интервале $[t_0, t_1]$, а также пользуясь определениями k-частичной функции Понтрягина и вектор-функции $\vec{v}^k(.)$ из (26), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t))dt = \sum_{q \in Q^{(k+1)}} \int_{-\infty}^{+\infty} H_q(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t))dt =$$

$$= |Q^{(k+1)}| \int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t))dt,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{v}^k(t; \hat{u}(.), \vec{u}(.))(t))dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{H}^{(k-2)}(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{v}^k(t; \hat{u}(.), \vec{u}(.))(t))dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{v}^k(t; \hat{u}(.), \vec{u}(.))(t)) - \mathbb{H}^{(k-2)}(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{v}^k(t; \hat{u}(.), \vec{u}(.))(t))]dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{H}^{(k-2)}(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{u}(t))dt + \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{v}^k(t; \hat{u}(.), \vec{u}(.))(t)) -$$

$$- \mathbb{H}^{(k-2)}(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{v}^k(t; \hat{u}(.), \vec{u}(.))(t))]dt = |Q^{(k-1)}| \int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{u}(t))dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{v}^k(t; \hat{u}(.), \vec{u}(.))(t)) - \mathbb{H}^{(k-2)}(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{v}^k(t; \hat{u}(.), \vec{u}(.))(t))]dt.$$

Интегралы от левой и правой частей неравенства (27) будут удовлетворять такому же неравенству. Поэтому поделив их на величину $|Q^k|$, получим

$$\frac{|Q^{(k+1)}|}{|Q^k|} \int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t))dt \geq \frac{|Q^{(k-1)}|}{|Q^k|} \int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{u}(t))dt +$$

$$+ \frac{1}{|Q^k|} \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{v}^k(t; \hat{u}(.), \vec{u}(.))(t)) - \mathbb{H}^{(k-2)}(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{v}^k(t; \hat{u}(.), \vec{u}(.))(t))]dt \tag{28}$$

Заметим, что общее количество слагаемых в выражении

$$[\mathbb{H}^k(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{v}^k(t; \hat{u}(.), \vec{u}(.))(t)) - \mathbb{H}^{(k-2)}(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{v}^k(t; \hat{u}(.), \vec{u}(.))(t))]$$

равно $|Q^{(k+1)} - Q^{(k-1)}| = |Q^{(k+1)}| - |Q^{(k-1)}|$ и все слагаемые при всевозможных $k = 1, 2, ...$ равномерно ограничены. В силу теоремы C, группа Q является почти нильпотентной. По теореме Громова (см. [12]) для почти нильпотентной группы Q рост величины $|Q^k|$ (рост группы) относительно k является полиномиальным. В таком случае

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|Q^{(k+1)}|}{|Q^k|} = \lim_{k \to \infty} \frac{|Q^{(k-1)}|}{|Q^k|} = 1, \qquad \lim_{k \to \infty} \frac{|Q^{(k+1)}| - |Q^{(k-1)}|}{|Q^k|} = 0.$$

Переходя в неравенстве (28) к пределу при $k \to \infty$ получим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t))dt \geq \int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{u}(t))dt. \tag{29}$$

Неравенство (29) справедливо для любого $\vec{u}(.) \in \Omega$, а в случае вектор-функции $\vec{\hat{u}}(.)$ становится равенством, что совпадает с принципом максимума в интегральной форме. ■

3 Неэквивалентность принципов максимума в сильной и слабой поточечных формах.

Пример. Минимизировать функционал

$$J = -x(3) \to \inf$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0), \\ u(t)[1 - u(t-1)], & t \in [0,3], \\ 0, & t \in (3, +\infty), \end{cases} \\ &x(0) = 0, \\ &u(t) \in U, \qquad U = \{0, 1\}. \end{aligned}$$

В такой задаче группа Q является циклической с образующей $q(t) = t - 1$. Так как функция Понтрягина от x не зависит, то получим, что $\psi \equiv \hat{l}_J$, где $\hat{l}_J > 0$. Можно положить $\hat{l}_J = 1$. Для такой задачи k-частичная функция Понтрягина при $k = 0$
и $\vec{u} = \{u_q\}_{q \in Q} \in \mathbb{U}^0(t, \hat{u}(.))$ имеет вид

$$\mathbb{H}^\circ(t, \vec{x}, \vec{\psi}, \vec{u}) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0), \\ u_e[1 - \hat{u}(t-1)] + \hat{u}(t+1)[1 - u_e], & t \in [0, 2], \\ u_e[1 - \hat{u}(t-1)], & t \in [2, 3], \\ 0, & t \in (3, +\infty). \end{cases}$$

Таблица значений управлений $\hat{u}(t)$ (экстремальных управлений), удовлетворяющих принципу максимума в слабой поточечной форме (при $k = 0$) имеет следующий вид.

$\hat{u}(.)$	интервалы				
	$[-1, 0]$	$[0, 1]$	$[1, 2]$	$[2, 3]$	$\int$
1	0	1	0	1	2
2	0	0	1	1	1
3	0	0	1	0	1
4	0	1	1	0	1
5	1	0	1	0	1
6	1	0	1	1	1
7	1	1	0	1	1
8	1	1	1	0	0
9	1	1	0	0	0

В последней колонке данной таблицы приводятся значения интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{\hat{u}}(t))dt$$

на приведенных экстремалях (подозрительных на оптимальность). Здесь для любого $\vec{u}(.) \in \Omega$, в обозначениях $u_e(.) = u(.)$, функция Понтрягина $H_e(.)$ имеет вид

$$H_e(t, \vec{x}(t), \vec{\psi}(t), \vec{u}(t)) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, 0), \\ u(t)[1 - u(t-1)], & t \in [0, 3], \\ 0, & t \in (3, +\infty). \end{cases}$$

Так как функция Понтрягина $H_e(.)$ от x не зависит, то не сложно заметить, что

$$\max_{\vec{u}(.)\in\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} H_e(t, \vec{\hat{x}}(t), \vec{\hat{\psi}}(t), \vec{u}(t))dt = 2.$$

Следовательно, принцип максимума в интегральной форме выделяет единственную экстремаль, представленную в первой строке таблицы. В силу сказанного, принципы максимума в интегральной и в слабой поточечной формах не эквивалентны. В случае постоянных отклонений аргумента принцип максимума в сильной поточечной форме эквивалентен принципу максимума в интегральной форме (см.[5]), откуда и следует, что принципы максимума в слабой и сильной поточечных формах не эквивалентны.

Список литературы

[1] Бекларян Л.А. Вариационная задача с запаздывающим аргументом и ее связь с некоторой полугруппой отображений отрезка в себя//Докл.АН СССР.(1983), Т.271, № 5. С.1036-1040.

[2] Бекларян Л.А. Задача оптимального управления для систем с отклоняющимся аргументом и ее связь с конечно-порожденной группой гомеоморфизмов $\mathbb{R}$, порожденной функциями отклонения аргумента//Доклады АН СССР (1991), Т.317, № 6, С.1289-1294.

[3] Арутюнов А.В., Марданов М.Дж. К теории принципа максимума в задачах с запаздываниями// Дифференциальные уравнения Т.25, № 12, с.2048-2058 (1989).

[4] Арутюнов А.В. Возмущения экстремальных задач с ограничениями и необходимые условия оптимальности// Итоги Науки и Техники. Серия матем. анализ. (1989), Т.27. С.147-235.

[5] Бекларян Л.А.Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом как бесконечномерное дифференциальное уравнение// Препринт. Вычислительный Центр АН СССР, Сообщения по прикладной математике. (1989), с.18.

[6] Беклариан Л.А. О массивных подмножествах в пространстве конечно-порожденных групп диффеоморфизмов окружности// В печати

[7] Бекларян Л.А. Группы гомеоморфизмов прямой и окружности. Топологические характеристики и метрические инварианты// Успехи математических наук (2004), Т.59, № 4, С.3-68.

[8] Арнольд В.И.Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[9] Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. М.: Мир, 1973.

[10] Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Наука, 1973.

[11] Rosenblatt J. Invariant measures and growth conditions// Trans. of the AMS (1974), vol.197, p.33-53

[12] Gromov M. Group of polinomial growth and expending maps// Publ.Math. de I'IHES (1981), vol.53, p.53-73.

[13] Beklaryan L.A. Group specialties in the problem of the maximum principle for systems with deviating argument//Journal of Denamical and Control Systems, (2012), V.18, № 3, P.419-432.

[14] Бекларян Л.А. О массивных подмножествах в пространстве конечно-порожденных групп диффеоморфизмов окружности//Математические заметки, (2012), Т.92, №6.