О численном методе решения семейства интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, возникающих в финансовой математике

О. Е. Кудрявцев

Ростовский филиал Российской таможенной академии

В. В. Родоченко

Южный Федеральный Университет

1 Аннотация

Здесь представлен алгоритм вычисления и небольшое введение, позволяющее понять контекст и отладить основные шаги

2 Предварительные соображения

Система. Описывает поведение актива S_t. Процесс вариации V_t, подчиняется процессу CIR.

$$\begin{aligned} &dS_t = (r - \lambda_J \zeta) S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_t^S + (J-1) S_t dN_t, \\ &dV_t = \kappa_V(\theta_V - V_t)dt + \sigma_V \sqrt{V_t} dZ_t^V, \\ &< dZ_t^S, dZ_t^V >= \rho dt, \end{aligned} \tag{1}$$

где r – неотрицательный параметр, Z_t^S и Z_t^V - винеровские процессы, связанные коэффициентом корреляции ρ. В скачковой части, N_t представляет из себя пуассоновский процесс с интенсивностью λ_J, считающий к моменту t количество одинаково распределенных скачков размера J. Процесс N_t не зависит от процессов Z_t^S и Z_t^V, а также независим от J. Параметр κ_V определяет скорость “возврата” процесса вариации к “долговременному” среднему значению θ_V, $\sigma_V > 0$ называется “волатильностью” вариации. Соотношение между ζ и параметрами распределения J подбирается из соображения мартингальности процесса $\exp(-rt)S_t$.

Величина скачков J имеет логнормальное распределение $J \sim \mathrm{LogN}(\mu_J, \sigma_J^2)$, тогда $\zeta = e^{\mu_J + \frac{1}{2}\sigma_J^2} - 1$

Математическое ожидание:

$$f(S, V, t) = M[e^{-r(T-t)} \mathbf{1}_{\underline{S}_T > H} G(S_T) | S_t = S, V_t = V], \tag{2}$$

H – поглощающий барьер, $\underline{S}_T (= \inf_{0 \le t \le T} S_T)$ – процесс инфимума процесса S_t.

Функция выплат (put)): $G(S) = \max\{0, K - S\}$

Пусть $\tau = T - t$, тогда $F(S, V, \tau)\ (= f(S, V, T - \tau))$ удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному уравнению в частных производных с переменными коэффициентами в области $S(\tau) > H$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(S,V,\tau)}{\partial \tau} &= \frac{1}{2}VS^2\frac{\partial^2 F(S,V,\tau)}{\partial S^2} + \rho\sigma_V VS\frac{\partial^2 F(S,V,\tau)}{\partial S \partial V} + \\
\frac{1}{2}\sigma_V^2 V\frac{\partial^2 F(S,V,\tau)}{\partial V^2} &+ (r-\lambda_J\zeta)S\frac{\partial F(S,V,\tau)}{\partial S} + \kappa_V(\theta_V - V)\frac{\partial F(S,V,\tau)}{\partial V} - \\
(r+\lambda_J)F(S,V,\tau) &+ \lambda_J\int_0^\infty F(JS,V,\tau)f(J)dJ, \\
F(S,V,0) &= G(S),
\end{aligned}$$

где $f(J)$ – функция плотности вероятностей величины скачков J. $F(S,V,\tau) = 0, S(\tau) \leq H$.

3 Замена процесса

Обозначим $\hat{\rho} = \sqrt{1-\rho^2}$, $W = Z^V$, $\rho W + \hat{\rho} Z = Z^S$, где W_t Z_t – независимые броуновские движения.

Введём замену для процесса S_t, положив $Y_t = \ln(\frac{S_t}{H}) - \frac{\rho}{\sigma_V}V_t$. При этом $S_t = H\exp(Y_t + \frac{\rho}{\sigma_V}V_t)$ Тогда:

$$\begin{aligned}
&dY_t = (r - \tfrac{1}{2}V_t - \tfrac{\rho}{\sigma_V}\kappa_V(\theta_V - V_t) - \lambda_J\zeta)dt + \hat{\rho}\sqrt{V_t}dZ_t + \ln J dN_t, \\
&dV_t = \kappa_V(\theta_V - V_t)dt + \sigma_V\sqrt{V_t}dW_t.
\end{aligned}$$

Для дальнейшего описания алгоритма введём обозначения:

$$\begin{aligned}
&\mu_Y(V_t) = r - \tfrac{1}{2}V_t - \tfrac{\rho}{\sigma_V}\kappa_V(\theta_V - V_t) - \lambda_J\zeta, \\
&\mu_V(V_t) = \kappa_V(\theta_V - V_t).
\end{aligned}$$

4 Рандомизация Карра

Для того, чтобы иметь возможность свести рассматриваемую задачу к задаче на малых интервалах времени, мы используем процедуру, известную как "рандомизация Карра", впервые введённую в статье [19] и обобщённую на общий случай задач стохастического управления в статье [20]. Обозначим $F_n(Y_{t_n}, V_{t_n}) = F_n(H\exp(Y_t + \frac{\rho}{\sigma_V}V_t), V_{t_n}, t_n)$ – приближение Карра значения функции $F(S,V,\tau)$ в момент времени t_n, где $t_i = i\Delta\tau$ и $\Delta\tau = \frac{T}{N}$. Пусть $\{\tau_i\}_{i=1}^N$ — набор независимых экспоненциально распределённых случайных величин со средним $\Delta\tau$. Обозначим $Z_\tau^n = Y_{t_n+\tau} + \frac{\rho}{\sigma_V}V_{t_n+\tau}$.

Полагая $F_N(Y_T, V_T) = G(H\exp(Y_T + \frac{\rho}{\sigma_V}V_T))$, получаем возможность записать:

$$F_n(Y_{t_n}, V_{t_n}) = M_{t_n}[e^{-r\Delta\tau} I_{\underline{Z}^n_{\tau_n} > 0} F_{n+1}(Y_{t_n+\tau_n}, V_{t_n+\tau_n})], n = N-1, .., 0$$

5 Аппроксимация

Построим биномиальное дерево со "склеенными" вершинами, определяемыми по формуле:

$$V(n,k) = (\sqrt{V_0} + \frac{\sigma_V}{2}(2k-n)\sqrt{\Delta\tau})^2 \mathbb{1}_{(\sqrt{V_0} + \frac{\sigma_V}{2}(2k-n)\sqrt{\Delta\tau}) > 0}, n = 0, 1, ..., N,\ k = 0, 1, ..., n.$$

Идея приближения состоит в том, что в каждый момент времени t_n вариация может находиться в одном из состояний $V(n,k)$. В момент t_{n+1} из вершины (n,k) мы можем попасть либо "вверх" – в вершину $(n+1,k_u)$, либо "вниз" – в вершину $(n+1,k_d)$, при этом k_u и k_d подбираются так, чтобы согласовать движение по дереву со сносом $\mu(V_{(n,k)})$, по следующим правилам:

$$k_u^{\Delta\tau}(n,k) = min\{k^* : k+1 \le k^* \le n+1, V(n,k) + \mu_V(V(n,k))\Delta\tau \le V(n+1,k^*)\}$$
$$k_d^{\Delta\tau}(n,k) = max\{k^* : 0 \le k^* \le k, V(n,k) + \mu_V(V(n,k)) \ge V(n+1,k^*)\}$$

Определим вероятности переходов как:

$$p^{\Delta\tau}_{k_u^{\Delta\tau}(n,k)} = \frac{\mu_V(V(n,k))\Delta\tau + V(n,k) - V(n+1,k_d^{\Delta\tau}(n,k))}{V(n+1,k_u^{\Delta\tau}(n,k)) - V(n+1,k_d^{\Delta\tau}(n,k))}$$

Чтобы обеспечить корректную работу схемы в случае различных значений параметров, необходимо ввести дополнительные правила, предотвращающие появление отрицательных вероятностей в некоторых вершинах:

$$p^{\Delta\tau}_{k_u^{\Delta\tau}(n,k)} := \begin{cases} 1, & p^{\Delta\tau}_{k_u^{\Delta\tau}(n,k)} > 1 \\ p^{\Delta\tau}_{k_u^{\Delta\tau}(n,k)}, & p^{\Delta\tau}_{k_u^{\Delta\tau}(n,k)} \in [0,1] \\ 0, & p^{\Delta\tau}_{k_u^{\Delta\tau}(n,k)} < 0 \end{cases}, \quad p^{\Delta\tau}_{k_d^{\Delta\tau}(n,k)} := 1 - p^{\Delta\tau}_{k_u^{\Delta\tau}(n,k)},$$

6 Приближённая факторизация

Зафиксировав таким образом вариацию в каждом из узлов, мы имеем возможность рассматривать семейство задач с интегро-дифференциальным оператором следующего вида:

$$L_{n,k}f(y) := L_Y^{V(n,k)}f(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\xi}\psi_{n,k}(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi.$$

Этот оператор можно понимать как псевдодифференциальный оператор, символом которого является $\psi_{n,k}(\xi)$ – характеристическая экспонента процесса Y_t при $V_t = V(n,k)$:

$$\psi_{n,k}(\xi) = \hat{\rho}^2 \frac{V(n,k)}{2}\xi^2 - i\mu_Y(V(n,k))\xi + \phi(\xi),$$

где $\phi(\xi)$ – характеристическая экспонента обобщённого пуассоновского процесса. Например, для модели Мертона она имеет вид: $\phi(\xi) = \lambda_J(1 - e^{\frac{\sigma_J^2}{2}+\mu_J})$

Для каждого из узлов $(n,k), n = N-1, ...0$ возникает две задачи – одна в предположении, что переход был совершён в вершину $(n+1,k_d)$, другая – в предположении, что переход был совершён в вершину $(n+1,k_u)$. Решение каждой из этих задач может быть записано в терминах операторов ε_q^+ и ε_q^- – факторов Винера-Хопфа (см статью [14]):

$$f_n^{k_d}(y) = (q\Delta\tau)^{-1}\ \varepsilon_q^- \mathbb{1}_{(-\frac{\rho}{\sigma_V}V(n,k),+\infty)}(y)\ \varepsilon_q^+ f_{n+1}^{k_d}(y);$$
$$f_n^{k_u}(y) = (q\Delta\tau)^{-1}\ \varepsilon_q^- \mathbb{1}_{(-\frac{\rho}{\sigma_V}V(n,k),+\infty)}(y)\ \varepsilon_q^+ f_{n+1}^{k_u}(y),$$

Далее последовательно вычисляя $f_n^k = p_{k_d^{\Delta\tau}(n,k)} f_n^{k_d}(y) + p_{k_u^{\Delta\tau}(n,k)} f_n^{k_u}(y)$ для $n = N - 1, .., 0, k = 0, ..., n$, где $f_n^k = F(He^{y+\frac{\rho}{\sigma_V}V(n,k)}, V(n,k), n\Delta\tau)$, мы, после возвращения к исходным обозначениям, получаем приближённые значения искомого функционала (2). В отличие от более простого случая модели Хестона [21], наличие скачков лишает возможности использовать явные формулы для факторов – их получить не удаётся. Аналитические формулы для факторов имеют вид:

$$\begin{aligned}
\phi_q^+(\xi) &= \exp\left[(2\pi i)^{-1}\int_{-\infty+i\omega_-}^{+\infty+i\omega_-} \frac{\xi\ln(q+\psi(\eta))}{\eta(\xi-\eta)}d\eta\right];\\
\phi_q^-(\xi) &= \exp\left[-(2\pi i)^{-1}\int_{-\infty+i\omega_+}^{+\infty+i\omega_+} \frac{\xi\ln(q+\psi(\eta))}{\eta(\xi-\eta)}d\eta\right],
\end{aligned}$$

Константы ω_+ и ω_-, такие, что $\omega_- < 0 < \omega_+$, имеют здесь смысл параметров и подбираются так, чтобы сохранить сходимость соответствующих интегралов и зависят от параметров процесса Леви. В работе [18] получено универсальное и удобное для численной реализации представление факторов Винера-Хопфа. Функция $\phi_q^+(\xi)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\Im\xi > \omega_-$ и может быть представлена как:

$$\begin{aligned}
\phi_q^+(\xi) &= \exp\left[i\xi F^+(0) - \xi^2\hat{F}^+(\xi)\right],\\
F^+(x) &= \mathbb{1}_{(-\infty,0]}(x)(2\pi)^{-1}\int_{-\infty+i\omega_-}^{+\infty+i\omega_-} e^{ix\eta}\frac{\ln(q+\psi(\eta))}{\eta^2}d\eta;\\
\hat{F}^+(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}F^+(x)dx.
\end{aligned}$$

Аналогично, $\phi_q^-(\xi)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\Im\xi < \omega_+$ и может быть представлена как:

$$\begin{aligned}
\phi_q^-(\xi) &= \exp\left[-i\xi F^-(0) - \xi^2\hat{F}^-(\xi)\right],\\
F^-(x) &= \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x)(2\pi)^{-1}\int_{-\infty+i\omega_+}^{+\infty+i\omega_+} e^{ix\eta}\frac{\ln(q+\psi(\eta))}{\eta^2}d\eta;\\
\hat{F}^-(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}F^-(x)dx.
\end{aligned}$$

Для вычисления интегралов используется алгоритм быстрого преобразования Фурье.