11 月 19 日作业

韩岳成 524531910029

2025 年 11 月 19 日

题目 1. 某电力公司供应其所在地区 7500 户居民用电，假设各户用电情况相互独立，并且每户每日用电量 (单位：$kW \cdot h$) 在 $[0, 20]$ 上服从均匀分布，请利用中心极限定理估计：

(1) 这 7500 户居民每日用电总量超过 $76000 kW \cdot h$ 的概率；

(2) 要以 99.9% 的概率保证该地区居民用电的需求，该电力公司每天至少需向该地区供应多少电量?

解答. 设每一户居民的每日用电量为随机变量 X_i，则 $X_i \sim U(0, 20)$，且相互独立，则 $E(X_i) = 10, D(X_i) = \frac{100}{3}$。

设总用电量为 $X = \sum_{i=1}^{7500} X_i$，则 $E(X) = 75000, D(X) = 7500 \times \frac{100}{3} = 250000 = 500^2$。因此可以近似认为 $X \sim (75000, 500^2)$。

(1) $P(X > 76000) = 1 - \Phi(\frac{76000-75000}{500}) = 1 - \Phi(2) \approx 0.0228;$

(2) 设电力公司每天至少需供应电量为 Q，则有

$$P(X \leq Q) = 0.999.$$

根据正态分布的性质，

$$\frac{Q - 75000}{500} = \Phi^{-1}(0.999) \approx 3.09,$$

解得

$$Q \approx 75000 + 3.09 \times 500 = 76545.$$

题目 2. 据统计数据可知某商店出售一种贵重商品，每周销售量（单位：件）的分布律如下：

X	0	1	2
P	0.2	0.6	0.2

假定每周销售量相互独立。

(1) 用 Chebyshev 不等式估计一年 (按照 52 周算) 的累积销售量在 42 到 62 之间的概率;

(2) 用中心极限定理估计一年累积销售量在 42 到 62 之间的概率.

解答. 设每周销售量为 X_i，可计算得 $E(X_i) = 1, D(X_i) = 0.4$，设一年累积销售量为 $X = \sum_{i=1}^{52} X_i$，则 $E(X) = 52, D(X) = 52 \times 0.4 = 20.8$。

(1) 由 Chebyshev 多项式可得

$$P(42 \le X \le 62) = P(|X - E(X)|) < 10 = 1 - \frac{D(X)}{10^2} = 0.792$$

(2) 我们可以近似认为 $X \sim N(52, 20.8)$，则

$$P(42 \le X \le 62) = \phi(\frac{62-52}{\sqrt{20.8}}) - \phi(\frac{42-52}{\sqrt{20.8}}) \approx 0.9714$$

题目 3. 设 ξ_n 为 n 重 Bernoulli 试验中成功的次数 ,$p(0 < p < 1)$ 为每次试验成功的概率，当 n 充分大时，$\forall \varepsilon > 0$, 使用 De Moivre-Laplace 中心极限定理证明

$$P\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\boldsymbol{\Phi}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - 1.$$

解答. 由题意知 $\xi_n \sim B(n,p)$，则

$$E(\xi_n) = np, D(\xi_n) = np(1-p).$$

由 De Moivre-Laplace 中心极限定理可知，当 n 较大时，可近似认为

$$\frac{\xi_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1),$$

$$\begin{aligned}
P\left(\left|\frac{\xi_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) &= P\left(\frac{|\xi_n - np|}{n} < \varepsilon\right) \\
&= P\left(\frac{|\xi_n - np|}{\sqrt{np(1-p)}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) \\
&\approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) \\
&= 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - 1
\end{aligned}$$

题目 4. 假设某便利店每天接待顾客数按 200 位计, 每位顾客的消费额 X (单位: 元) 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} k(30 - |x-30|), & x \in [0,60], \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

且各顾客的消费额相互独立.

(1) 求 k;

(2) 用 Chebyshev 不等式估计该便利店每天的营业额在 5800 到 6200 元之间的概率.

(3) 用中心极限定理估计该便利店每天的营业额在 5800 到 6200 元之间

解答. (1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = \int_0^{30} kx\mathrm{d}x + \int_{30}^{60} k(60-x)\mathrm{d}x = 900k = 1$$

解得 $k = \frac{1}{900}$.

(2)

$$E(X) = \int_0^{60} xf(x)\mathrm{d}x = 30$$

$$E(X^2) = \int_0^{60} x^2 f(x)\mathrm{d}x = 1050, \quad D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 150$$

设总利润 $Y = \sum X$, 则 $E(Y) = 6000, D(Y) = 30000$.

由 Chebyshev 多项式可得

$$P(5800 < Y < 6200) = P(|Y - E(Y)| < 200) = 1 - \frac{D(Y)}{200^2} = 0.25$$

(3) 我们可以近似认为 $Y \sim N(6000, 30000)$，则

$$P(5800 < Y < 6200) = \Phi(\frac{6200-6000}{\sqrt{30000}}) - \Phi(\frac{5800-6000}{\sqrt{30000}}) = 2P(\frac{2}{\sqrt{3}}) - 1 \approx 0.7498$$

题目 5. 设随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots$ 相互独立且同分布 $B(m,p)$，记 $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$，当 n 充分大时求 $\overline{X_n}$ 的近似分布。

解答. 由题意知，由于 $X_i \sim B(m,p)$，则 $\sum_{k=1}^{n} X_k \sim B(mn,p)$。

当 n 充分大时，mn 充分大，可近似认为 $\sum_{k=1}^{n} X_k \sim N(mnp, mnp(1-p))$, 因此

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \sim N\left(mp, \frac{mp(1-p)}{n}\right).$$

题目 6. 尝试用概率论的方法证明:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!})e^{-n} = \frac{1}{2}$$

解答. 假设 $X_n \sim P(n)$，则 $P(X_n = k) = e^{-n}\frac{n^k}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$，因此

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} e^{-n}\frac{n^k}{k!} = P(X_n \le n)$$

由于 $E(X_n) = D(X_n) = n$，利用中心极限定理，令 $Z_n = \frac{X_n - n}{\sqrt{n}}$，则当 n 足够大时，可近似认为 $Z_n \sim N(0,1)$。

因此 $S_n = P(X_n \leq n) = P(Z_n \leq 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$. 即

$$\lim_{n\to\infty}(1 + n + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^n}{n!})e^{-n} = \frac{1}{2}$$