

10 月 30 日作业

韩岳成 524531910029

2025 年 10 月 31 日

题目 1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 并且都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 证明 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

(此时称 Z 服从参数为 $\sigma(\sigma > 0)$ 的 Rayleigh(瑞利) 分布.)

解答. 由于 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$, 故其联合概率密度为

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

由 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 可知, $Y = \sqrt{Z^2 - X^2}$ 或 $Y = -\sqrt{Z^2 - X^2}$. 因此,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, \sqrt{z^2 - x^2}) \left| \frac{\partial y}{\partial z} \right| dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, -\sqrt{z^2 - x^2}) \left| \frac{\partial y}{\partial z} \right| dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2 + (\sqrt{z^2 - x^2})^2}{2\sigma^2}} \frac{z}{\sqrt{z^2 - x^2}} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2 + (-\sqrt{z^2 - x^2})^2}{2\sigma^2}} \frac{z}{\sqrt{z^2 - x^2}} dx \\ &= \frac{z}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{z^2 - x^2}} dx \\ &= \frac{z}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \cdot \pi \\ &= \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

当 $z < 0$ 时, 显然 $f_Z(z) = 0$. 综上所述, Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

题目 2. 若某电子设备的输出服从 $\sigma = 2$ 的 Rayleigh 分布, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 表示相互独立的测量 5 次的输出, 求:

(1) $Z = \max |X_1, X_2, X_3, X_4, X_5|$ 的分布函数;

(2) $P(Z > 4)$.

解答. (1) $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \int_0^x \frac{t}{4} e^{-\frac{t^2}{8}} dt = 1 - e^{-\frac{x^2}{8}}.$

由题意可知, $X_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 相互独立且都服从参数为 $\sigma = 2$ 的 Rayleigh 分布. 因此,

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(\max |X_1, X_2, X_3, X_4, X_5| \leq z) \\ &= P(|X_1| \leq z, |X_2| \leq z, |X_3| \leq z, |X_4| \leq z, |X_5| \leq z) \\ &= \prod_{i=1}^5 P(|X_i| \leq z) \\ &= (F_X(z))^5 \\ &= \left(1 - e^{-\frac{z^2}{8}}\right)^5. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} P(Z > 4) &= 1 - P(Z \leq 4) \\ &= 1 - F_Z(4) \\ &= 1 - \left(1 - e^{-2}\right)^5. \end{aligned}$$

题目 3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且均服从 $(1, 3)$ 内的均匀分布, 试求 $Z = |X - Y|$ 的概率密度.

解答. 由题意可得,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 < x < 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

同理,

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 < y < 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

由于 X 与 Y 相互独立, 故其联合概率密度为

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 1 < x < 3, 1 < y < 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

由 $Z = |X - Y|$ 可知, $Y = X - Z$ 或 $Y = X + Z$. 因此,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, x-z) \left| \frac{\partial y}{\partial z} \right| dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, x+z) \left| \frac{\partial y}{\partial z} \right| dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, x-z) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, x+z) dx \\ &= \int_1^3 f_{X,Y}(x, x-z) dx + \int_1^3 f_{X,Y}(x, x+z) dx \\ &= \int_{\max(1, 1+z)}^3 \frac{1}{4} dx + \int_1^{\min(3, 3-z)} \frac{1}{4} dx. \end{aligned}$$

当 $0 < z \leq 2$ 时,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{1+z}^3 \frac{1}{4} dx + \int_1^{3-z} \frac{1}{4} dx \\ &= \frac{3 - (1+z)}{4} + \frac{(3-z) - 1}{4} \\ &= \frac{2-z}{2}. \end{aligned}$$

当 $z > 2$ 时,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_3^z \frac{1}{4} dx + \int_1^z \frac{1}{4} dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

当 $z \leq 0$ 时, 显然 $f_Z(z) = 0$. 综上所述, Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{z}{2}, & 0 < z \leq 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

题目 4. 甲、乙两人进行乒乓球预选赛, 预选赛为 5 局 3 胜制, 且有一方先胜 3 局比赛就结束. 假设每人每局获胜概率相同, 求比赛局数的数学期望.

解答. 设随机变量 X 表示比赛局数, 则 X 可能取值为 3, 4, 5. 现分别计算 $P(X = 3)$, $P(X = 4)$, $P(X = 5)$.

当某一方连胜 3 局时, 比赛结束. 因此,

$$P(X = 3) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}.$$

当某一方在前 3 局中赢 2 局, 第 4 局获胜时, 比赛结束. 因此,

$$P(X = 4) = 2 \times C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}.$$

当某一方在前 4 局中赢 2 局, 第 5 局获胜时, 比赛结束. 因此,

$$P(X = 5) = 2 \times C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{8}.$$

综上所述, 比赛局数的数学期望为

$$\begin{aligned} E(X) &= 3 \times P(X = 3) + 4 \times P(X = 4) + 5 \times P(X = 5) \\ &= 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{3}{8} + 5 \times \frac{3}{8} \\ &= \frac{33}{8}. \end{aligned}$$

题目 5. 某保险公司打算设立交通事故意外险, 若交通事故导致死亡发生, 保险公司的赔付额是 m 元. 据保险公司调查, 该险种受众群体发生交通事故死亡的概率为 p , 要使保险公司期望收益达到赔付金额的 5%, 公司要求客户缴纳的最低保费是多少?

解答. 设客户缴纳的保费为 C 元, 则保险公司的期望收益为

$$\begin{aligned} E(\text{收益}) &= C \times (1 - p) + (C - m) \times p \\ &= C - mp. \end{aligned}$$

由题意可知, 保险公司要求期望收益达到赔付金额的 5%, 即

$$\begin{aligned} E(\text{收益}) &\geq 0.05m \\ C - mp &\geq 0.05m \\ C &\geq m(p + 0.05). \end{aligned}$$

因此, 公司要求客户缴纳的最低保费为 $m(p + 0.05)$ 元.

题目 6. 设随机变量 X 的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求 $E(X)$, $E(2X + 1)$, $E(e^{-X})$.

解答. 计算 $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x)dx \\ &= 1. \end{aligned}$$

计算 $E(2X+1)$, 由方差的线性性质可得:

$$E(2X+1) = 2E(X) + 1 = 3.$$

计算 $E(e^{-X})$:

$$\begin{aligned} E(e^{-X}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \\ &= \int_0^1 xe^{-x} dx + \int_1^2 (2-x)e^{-x} dx \\ &= 1 - 2e^{-1} + e^{-2}. \end{aligned}$$

题目 7. 设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} kx, x > 0, |y| \leq 1-x, \\ 0, \text{其他} \end{cases}$, $Z = Y + |Y|$, 求 Z 的分布。

解答. 由归一化条件,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 1,$$

因此

$$\int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} kx dy dx = 1.$$

计算可得 $k = 3$. 由题意可得,

$$Z = \begin{cases} 2Y, & Y \geq 0, \\ 0, & Y < 0. \end{cases}$$

因此, $Z \geq 0$, 于是当 $z < 0$ 时, 显然 $f_Z(z) = 0, F_Z(z) = 0$.

当 $z = 0$ 时, $P(Z = 0) = P(Y < 0) = \int_0^1 \int_{x-1}^0 3xdydx = \frac{1}{2}$, 因此 $F_Z(0) = \frac{1}{2}$.

当 $z > 0$ 时,

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(Y < 0) + P(0 \leq Z \leq z)$$

因为当 $Y \geq 0$ 时, $Z = 2Y$, 因此

$$\begin{aligned} P(0 \leq Z \leq z) &= P\left(0 \leq Y \leq \frac{z}{2}\right) \\ &= \int_0^{\frac{z}{2}} \int_0^{1-y} 3xdxdy \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{z}{2}\right)^3\right] \end{aligned}$$

因此 $F_Z(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[1 - (1 - \frac{z}{2})^3] = 1 - \frac{1}{2}(1 - \frac{z}{2})^3, f_Z(z) = \frac{3}{4}(1 - \frac{z}{2})^2$.

对于 $z \geq 0$, 有 $F_Z(z) = 1, f_Z(z) = 0$.

综上所述, Z 的分布为

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}(1 - \frac{z}{2})^3, & 0 < z < 2, \\ 1, & z \geq 2. \end{cases}$$

且在 $z = 0$ 处有 $P(Z = 0) = \frac{1}{2}$.