10 月 22 日作业

韩岳成 524531910029

2025 年 10 月 22 日

题目 1. 设 $f(x) \in C^2([a,b])$，且 $f(a) = f(b) = 0$，求证 $\max_{a \le x \le b} |f(x)| \le \frac{1}{8}(b-a)^2 \max_{a \le x \le b} |f''(x)|$.

解答. 若 $\max_{a \le x \le b} |f(x)|$ 出现在端点，则显然有 $f(x) \equiv 0, f''(x) \equiv 0$，此时不等式成立。

若 $\max_{a \le x \le b} |f(x)|$ 不出现在端点，设 $c \in (a,b)$ 使得 $|f(c)| = \max_{a \le x \le b} |f(x)|$，假设 $f(c) > 0$ (若 $f(c) < 0$，则可以考虑 $-f(x)$)，由极值条件可得 $f'(c) = 0$.

由拉格朗日余项形式的二阶泰勒展开式，对于任意 $x \in [a,b]$，存在 ξ 介于 x 与 c 之间，使得

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-c)^2.$$

当 $x = a$ 时，利用 $f(a) = 0$ 及 $f'(c) = 0$，得

$$0 = f(c) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-c)^2,$$

其中 $\xi_1 \in (a,c)$。因此

$$f(c) = -\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-c)^2,$$

从而

$$|f(c)| \le \frac{1}{2}\max_{[a,b]} |f''(x)|\,(c-a)^2.$$

同理，对 $x=b$，存在 $\xi_2 \in (c,b)$ 使

$$|f(c)| \leq \frac{1}{2}\max_{[a,b]}|f''(x)|\,(b-c)^2.$$

于是

$$|f(c)| \leq \frac{1}{2}\max_{[a,b]}|f''(x)|\min\{(c-a)^2,(b-c)^2\}.$$

由于对任意 $c \in [a,b]$，都有

$$\min\{(c-a)^2,(b-c)^2\} \leq \left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

当且仅当 $c=\frac{a+b}{2}$ 时取等号。由此得到

$$|f(c)| \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{4}\max_{[a,b]}|f''(x)| = \frac{1}{8}(b-a)^2\max_{[a,b]}|f''(x)|.$$

因为 $|f(c)| = M = \max_{a\leq x\leq b}|f(x)|$，故

$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)| \leq \frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|.$$

题目 2. $f(x)=x^7+x^4+3x+1,$ 求$f[2^0,2^1,\cdots,2^7]$ 及 $f[2^0,2^1,\cdots,2^8]$.

解答. 将 $f(x)$ 写成 Newton 插值多项式的形式:

$f(x)=N_n(x)=f(2^0)+f[x_0,x_1](x-2^0)+\cdots+f[2^0,2^1,\cdots,2^7]$

$(x-2^0)(x-2^1)\cdots(x-2^6)+f[2^0,2^1,\cdots,2^8](x-2^0)(x-2^1)\cdots(x-2^7)$

$=f[2^0,2^1,\cdots,2^8]x^8+[(-2^0-2^1-\cdots-2^7)f[2^0,2^1,\cdots,2^8]+f[2^0,2^1,\cdots,2^7]]x^7+$

$\cdots$

$=x^7+x^4+3x+1$

将系数对比可得:

$$f[2^0,2^1,\cdots,2^7]=1$$

$$f[2^0,2^1,\cdots,2^8]=0$$

题目 3. 求一个次数不高于四次的多项式 $P(x)$，使它满足 $P(0)=P'(0)=0, P(1)=P'(1)=1, P(2)=1$.

解答. 对 $P(0)=P'(0)=0, P(1)=P'(1)=1$，可构造出两点三次 Hermite 插值多项式：

$$H_3(x)=0+1\times(1+2\frac{x-1}{0-1})(\frac{x-0}{1-0})^2+0+1\times(x-1)(\frac{x-0}{1-0})^2=(2-x)x^2$$

因为 $x^2(x-1)^2$ 在 $x=0,1$ 处及其导数均为 0，所以设 $P(x)=H_3(x)+Ax^2(x-1)^2$，代入 $P(2)=1$ 可得：

$$P(2)=(2-2)2^2+A\times 2^2(2-1)^2=A\times 4=1\Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

所以所求多项式为：

$$P(x)=(2-x)x^2+\frac{1}{4}x^2(x-1)^2=\frac{1}{4}x^2(x-3)^2$$