11 月 14 日作业

韩岳成 524531910029

2025 年 11 月 19 日

题目 1. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $E(X)$, $E(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, ρ_{XY} 及 (X,Y) 的协方差矩阵 C.

解答.

$$E(X)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} xe^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} e^{-y}\mathrm{d}y=1.$$

同理 $E(Y)=1$.

$$E(X^2)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} x^2e^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} e^{-y}\mathrm{d}y=2.$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2-1=1.$$

同理 $D(Y)=1$.

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} xye^{-(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-1=1-1=0.$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=\frac{0}{\sqrt{1\cdot 1}}=0.$$

$$C=\begin{pmatrix} D(X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(X,Y) & D(Y) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

题目 2. 设二维随机变量 (X,Y) 的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, 令 $U=X-2Y, V=2X-Y$, 求 ρ_{UV}.

解答. 由协方差矩阵可知 $D(X)=1, D(Y)=5, \mathrm{cov}(X,Y)=2$. 先计算 $D(U), D(V), \mathrm{cov}(U,V)$:

$$D(U)=D(X-2Y)=D(X)+4D(Y)-4\mathrm{cov}(X,Y)=13.$$

$$D(V)=D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)-4\mathrm{cov}(X,Y)=1.$$

$$\mathrm{cov}(U,V)=\mathrm{cov}(X-2Y,2X-Y)=2D(X)-5\mathrm{cov}(X,Y)+2D(Y)=2.$$

因此

$$\rho_{UV}=\frac{\mathrm{cov}(U,V)}{\sqrt{D(U)D(V)}}=\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

题目 3. 设 $\{X_n\}$ $(n \geqslant 1)$ 为相互独立的随机变量序列, 且其分布律为

X_n	$-\sqrt{\ln n}$	$\sqrt{\ln n}$
P	0.5	0.5

其中 $n=1,2,\cdots$, 证明 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

解答. 由于 $E(X_n)=0$, $D(X_n)=(\sqrt{\ln n})^2=\ln n$,

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=0,$$

由 $\{X_n\}(n \geq 1)$ 为相互独立的随机变量序列, 得

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\ln i \leq \frac{\ln n}{n},$$

则对 $\forall\varepsilon > 0$, 有

$$1 \geq P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{\ln n}{n\varepsilon^2},$$

由 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

所以 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

题目 4. 设 $\{X_n\}(n \geq 1)$ 为独立同分布的随机变量序列, 且 $X_n \sim U(a,b)$, $f(x)$ 是 (a,b) 上的连续函数, 证明当 $n \to \infty$ 时, $\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(X_i)$ 依概率收敛于 $\int_a^b f(x)dx$.

解答. 由于 $X_n \sim U(a,b)$, 则 $E(X_n) = \frac{a+b}{2}$, $D(X_n) = \frac{(b-a)^2}{12}$. 由 $f(x)$ 在 (a,b) 上连续, 故 $f(X_n)$ 也是独立同分布的随机变量序列, 且

$$E(f(X_n)) = \int_a^b f(x)\frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

$$D(f(X_n)) = \int_a^b f^2(x)\frac{1}{b-a}dx - \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right)^2 < +\infty.$$

由大数定律可知, 对 $\forall\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(X_i) - E(f(X_i))\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(X_i) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(X_i) - \int_a^b f(x)dx\right| < (b-a)\varepsilon\right) = 1,$$

因此当 $n \to \infty$ 时, $\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f(X_i)$ 依概率收敛于 $\int_a^b f(x)dx$.

题目 5. 设随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 服从方差有限的同一分布, 且当 $|j-i| \geq 2$ 时, X_j 与 X_i 相互独立, 证明 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

其中 $\mu = E\left(X_i\right), D\left(X_i\right) = \sigma^2 < +\infty, i = 1, 2, \cdots$

解答. 由于 $D(X_i) = \sigma^2 < +\infty$, 则

$$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left(X_i\right) = \mu.$$

由 X_j 与 X_i 相互独立当 $|j-i| \geq 2$ 可知

$$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n} D\left(X_i\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{cov}\left(X_i, X_{i+1}\right)\right] \leq \frac{1}{n^2}\left[n\sigma^2 + 2(n-1)\sigma^2\right] = \frac{3\sigma^2}{n}.$$

因此, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$1 \geq P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{3\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

由 $\lim_{n\to\infty} \frac{3\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0$, 从而

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

即证.

题目 6. 设随机变量 X, Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，$P(Y = -1) = p, P(Y = 1) = 1 - p(0 < p < 1)$, 令 $Z = XY$

(1) 求 Z 的概率密度.

(2) p 为何值时，X 与 Z 不相关?

(3) X 与 Z 否相互独立，请给出理由.

解答. 由 X 服从参数为 1 的指数分布，则 X 的概率密度为 $f_X(x) = e^{-x}, x > 0$.

(1) 由 Y 的分布可知，Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} pe^z, & z < 0, \\ (1-p)e^{-z}, & z > 0, \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

(2) 由 $E(X) = 1, D(X) = 1$, 且 X 和 Y 相互独立, 则

$$E(Z) = E(XY) = E(X)E(Y) = 1 \cdot (1-2p) = 1-2p.$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} \mathrm{d}x = 2.$$

则

$$\operatorname{cov}(X,Z) = E(XZ) - E(X)E(Z) = E(X^2)E(Y) - E(X)E(Z) = 2(1-2p) - 1(1-2p) = 1-2p.$$

当 $\operatorname{cov}(X,Z) = 0$ 时，$1-2p = 0$, 即 $p = \frac{1}{2}$ 时, X 与 Z 不相关.

(3)

取区间事件

$$A = [1, 1.01], \qquad B = [1, 1.01].$$

由于 $Z = XY$，当 $Z > 0$ 时必有 $Y = 1$，因此事件

$$\{X \in A,\ Z \in B\} = \{X \in [1, 1.01],\ Y = 1\}.$$

于是

$$P(X \in A,\ Z \in B) = P(Y = 1)\, P(X \in [1, 1.01]) = (1-p)\left(e^{-1} - e^{-1.01}\right).$$

另一方面,

$$P(X \in A) = e^{-1} - e^{-1.01}.$$

由于当 $z>0$ 时 Z 的密度为 $f_Z(z)=(1-p)e^{-z}$，因此

$$P(Z\in B)=\int_1^{1.01}(1-p)e^{-z}\,dz=(1-p)\left(e^{-1}-e^{-1.01}\right).$$

于是

$$P(X\in A)P(Z\in B)=\left(e^{-1}-e^{-1.01}\right)\cdot(1-p)\left(e^{-1}-e^{-1.01}\right)=(1-p)\left(e^{-1}-e^{-1.01}\right)^2.$$

显然有

$$P(X\in A,\ Z\in B)\neq P(X\in A)P(Z\in B),$$

说明 X 与 Z 不独立。

题目 7. 随机变量 X,Y 的一阶矩二阶矩均存在，证明 $(E(XY))^2\leq E(X^2)E(Y^2)$，并讨论等号成立的条件。

解答. 考虑随机变量 $X-tY$，则

$$E\left[(X-tY)^2\right]=E(X^2)-2tE(XY)+t^2E(Y^2)\geq 0.$$

上式为关于 t 的二次函数，其判别式应小于等于零，即

$$\Delta=(-2E(XY))^2-4E(X^2)E(Y^2)\leq 0,$$

整理得

$$(E(XY))^2\leq E(X^2)E(Y^2).$$

当且仅当存在实数 t 使得 $P(X-tY=0)=1$ 时，等号成立。