10 月 17 日作业

韩岳成 524531910029

2025 年 10 月 18 日

题目 1. 在集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中不放回地取两次数，每次任取一数，用 X 表示第一次取到的数，用 Y 表示第二次取到的数，

(1) 求 (X,Y) 的联合分布律;

(2) 用表格形式写出当 $n=3$ 时 (X,Y) 的联合分布律.

解答. (1) 由于是从集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中不放回地取两次数，所以 X 和 Y 的取值范围均为 $\{1,2,\cdots,n\}$，且 $X\neq Y$. 因此 (X,Y) 的联合分布律为

$$P\{X=x,Y=y\}=\begin{cases}\frac{1}{n(n-1)}, & x,y=1,2,\cdots,n;x\neq y;\\ 0, & x=y.\end{cases}$$

(2) 当 $n=3$ 时，(X,Y) 的联合分布律表格如下:

$X\backslash Y$	1	2	3
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0

题目 2. 设随机变量 $X \sim U(-1,2)$, $Y_1 = \begin{cases} 0, & X < 0, \\ 1, & 0 \leqslant X < 1, \\ 2, & X \geqslant 1, \end{cases}$ $Y_2 = \begin{cases} -1, & X > 0, \\ 1, & X \leqslant 0, \end{cases}$ 求随机变量 (Y_1, Y_2) 的联合分布律与边缘分布律.

解答. 首先，由于 $X \sim U(-1,2)$，则随机变量 X 的概率密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -1 < x < 2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

根据 Y_1 和 Y_2 的定义，可知 (Y_1, Y_2) 的取值范围为 $\{(0,1), (1,-1), (2,-1)\}$. 下面分别计算这三个取值的概率:

$$P\{Y_1 = 0, Y_2 = 1\} = P\{X < 0\} = \int_{-1}^{0} \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3};$$
$$P\{Y_1 = 1, Y_2 = -1\} = P\{0 \leqslant X < 1\} = \int_{0}^{1} \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3};$$
$$P\{Y_1 = 2, Y_2 = -1\} = P\{X \geqslant 1\} = \int_{1}^{2} \frac{1}{3}\,dx = \frac{1}{3}.$$

因此，(Y_1, Y_2) 的联合分布律为

$$P\{Y_1 = y_1, Y_2 = y_2\} = \begin{cases} \frac{1}{3}, & (y_1, y_2) = (0,1), (1,-1), (2,-1); \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

接下来计算边缘分布律:

$$\begin{aligned}
P\{Y_1=0\}&=P\{Y_1=0,Y_2=1\}=\frac{1}{3};\\
P\{Y_1=1\}&=P\{Y_1=1,Y_2=-1\}=\frac{1}{3};\\
P\{Y_1=2\}&=P\{Y_1=2,Y_2=-1\}=\frac{1}{3};\\
P\{Y_2=-1\}&=P\{Y_1=1,Y_2=-1\}+P\{Y_1=2,Y_2=-1\}=\frac{2}{3};\\
P\{Y_2=1\}&=P\{Y_1=0,Y_2=1\}=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

题目 3. 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-2x-4y}, & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求:(1) 常数 k;

(2) $P(0\leqslant X\leqslant 2, 0<Y\leqslant 1)$;

(3) $P(X+Y<1)$;

(4) 联合分布函数 $F(x,y)$.

解答. (1) 由于 $f(x,y)$ 是联合概率密度函数,所以

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1.$$

计算该积分:

$$\begin{aligned}
\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy&=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} ke^{-2x-4y}\,dy\,dx\\
&=k\int_0^{\infty} e^{-2x}\left(\int_0^{\infty} e^{-4y}\,dy\right)dx\\
&=\frac{1}{8}k=1.
\end{aligned}$$

因此,$k=8$.

(2) 计算 $P(0 \leqslant X \leqslant 2, 0 < Y \leqslant 1)$:

$$\begin{aligned}
P(0 \leqslant X \leqslant 2, 0 < Y \leqslant 1) &= \int_0^2 \int_0^1 8e^{-2x-4y}\,dy\,dx \\
&= \int_0^2 8e^{-2x} \left(\int_0^1 e^{-4y}\,dy \right) dx \\
&= (1-e^{-4})^2.
\end{aligned}$$

(3) 计算 $P(X+Y<1)$:

$$\begin{aligned}
P(X+Y<1) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 8e^{-2x-4y}\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 8e^{-2x} \left(\int_0^{1-x} e^{-4y}\,dy \right) dx \\
&= 2\int_0^1 e^{-2x}(1-e^{-4+4x})\,dx. \\
&= 1-2e^{-2}+e^{-4}.
\end{aligned}$$

(4) 联合分布函数 $F(x,y)$ 为

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= P(X \leqslant x, Y \leqslant y) \\
&= \int_0^x \int_0^y 8e^{-2u-4v}\,dv\,du \\
&= \left(\int_0^x 8e^{-2u} \right) \left(\int_0^y e^{-4v}\,dv \right) \\
&= (1-e^{-2x})(1-e^{-4y}).
\end{aligned}$$

因此,

$$F(x,y) = \begin{cases} (1-e^{-2x})(1-e^{-4y}), & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

题目 4. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} kx, & (x,y) \in G, \\ 0, & (x,y) \notin G. \end{cases}$$

其中 G 是由 x 轴，直线 $y=\frac{x}{2}$ 和 $x=2$ 所确定的区域。

求：（1）常数 k；

（2）$P(X+Y\leqslant 2)$；

（3）边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；

解答. (1) 由于 $f(x,y)$ 是联合概率密度函数，所以

$$\begin{aligned}\iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^2\int_0^{\frac{x}{2}} kx\,dy\,dx\\ &= \int_0^2 kx\cdot\frac{x}{2}\,dx\\ &= \frac{k}{2}\int_0^2 x^2\,dx = \frac{4k}{3} = 1.\end{aligned}$$

因此，$k=\frac{3}{4}$.

(2) 计算 $P(X+Y\leqslant 2)$：

$$\begin{aligned}P(X+Y\leqslant 2) &= \iint_D f(x,y)\,dx\,dy,\\ &= \int_0^{\frac{2}{3}}\int_{2y}^{2-y}\frac{3}{4}x\,dx\,dy\\ &= \int_0^{\frac{2}{3}}(-\frac{9}{8}y^2-\frac{3}{2}y+\frac{3}{2})\,dy\\ &= \frac{5}{9}.\end{aligned}$$

其中 $D=\{(x,y): x>0, y>0, x+y\leqslant 2\}$.

(3) 计算边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$：

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_0^{\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy=\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{3}{4}x\,dy=\frac{3}{4}x\cdot\frac{x}{2}=\frac{3x^2}{8}, & 0<x<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{2y}^{2} f(x,y)\,dx=\int_{2y}^{2}\frac{3}{4}x\,dx=\frac{3}{2}(1-y^2), & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

题目 5. 设随机变量 (X,Y) 在区域 $G=\left\{(x,y)|y=x^2,y=\frac{x^2}{2},x=1\right\}$ 上服从均匀分布.

求：(1)(X,Y) 的联合概率密度；

(2)(X,Y) 的边缘概率密度.

解答. (1) 计算区域 G 的面积：

$$S_G=\int_0^1\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2}dy\,dx=\frac{1}{6}.$$

由于 (X,Y) 在区域 G 上服从均匀分布，所以 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & (x,y)\in G;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 计算边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$：

$$f_X(x)=\begin{cases}\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2}f(x,y)\,dy=\int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2}6\,dy=6\cdot\frac{x^2}{2}=3x^2, & 0<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2y}}f(x,y)\,dx=\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2y}}6\,dx=6(\sqrt{2y}-\sqrt{y})=6\sqrt{y}(\sqrt{2}-1), & 0<y<\frac{1}{2};\\ \int_{\sqrt{y}}^{1}f(x,y)\,dx=\int_{\sqrt{y}}^{1}6\,dx=6(1-\sqrt{y}), & \frac{1}{2}\leqslant y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

题目 6. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.01x}-e^{-0.01y}+e^{-0.01(x+y)}, & x\geq 0,y\geq 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求（1）$P(X>100,Y>50)$;

(2) 求两个边缘分布函数 $F_X(x),F_Y(y)$;

(3)$P(X\leq 100);P(80<Y\leq 100)$

解答. (1)

$$P(X>100,Y>50)=1-F(100,50)=e^{-1}+e^{-0.5}-e^{-1.5}.$$

(2) 计算边缘分布函数 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$:

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-0.01x}, & x\geq 0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-0.01y}, & y\geq 0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3)

$$P(X\leq 100)=F_X(100)=1-e^{-1}.$$

$$P(80<Y\leq 100)=F_Y(100)-F_Y(80)=(1-e^{-1})-(1-e^{-0.8})=e^{-0.8}-e^{-1}.$$