10 月 22 日作业

韩岳成 524531910029

2025 年 10 月 23 日

题目 1. 随机变量 X 服从参数为 0.6 的 $(0,1)$ 分布, 在 X=0 及 X=1 的条件下随机变量 Y 的条件分布律如下:

Y	1	2	3
$P(Y \mid X=0)$	0.25	0.5	0.25

Y	1	2	3
$P(Y \mid X=1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

求在$Y=1$ 以及$Y\neq 1$ 的条件下随机变量 X 的条件分布律.

解答. 由于随机变量 X 服从参数为 0.6 的 $(0,1)$ 分布, 故 $P(X=0)=0.4$, $P(X=1)=0.6$. 由全概率公式, 可得

$$\begin{aligned}P(Y=1) &= P(Y=1 \mid X=0)P(X=0)+P(Y=1 \mid X=1)P(X=1)\\ &= 0.25\times 0.4+\frac{1}{2}\times 0.6 = 0.4.\end{aligned}$$

$$P(Y\neq 1)=1-P(Y=1)=0.6.$$

因此, 在$Y=1$ 的条件下, 随机变量 X 的条件分布律为

$$\begin{aligned}P(X=0 \mid Y=1) &= \frac{P(Y=1 \mid X=0)P(X=0)}{P(Y=1)} = \frac{0.25\times 0.4}{0.4} = 0.25,\\ P(X=1 \mid Y=1) &= \frac{P(Y=1 \mid X=1)P(X=1)}{P(Y=1)} = \frac{\frac{1}{2}\times 0.6}{0.4} = 0.75.\end{aligned}$$

在$Y \neq 1$ 的条件下,

$$P(Y \neq 1 \mid X=0) = 1 - P(Y=1 \mid X=0) = 0.75,$$

$$P(Y \neq 1 \mid X=1) = 1 - P(Y=1 \mid X=1) = \frac{1}{2}.$$

因此，随机变量 X 的条件分布律为

$$P(X=0 \mid Y \neq 1) = \frac{P(Y \neq 1 \mid X=0)P(X=0)}{P(Y \neq 1)} = \frac{0.75 \times 0.4}{0.6} = 0.5,$$
$$P(X=1 \mid Y \neq 1) = \frac{P(Y \neq 1 \mid X=1)P(X=1)}{P(Y \neq 1)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0.6}{0.6} = 0.5.$$

题目 2. 在 n 重 Bernoulli 试验中，若事件 A 出现的概率为 p, 令

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{在第}i\text{次试验中}A\text{发生，} \\ 0, & \text{在第}i\text{次试验中}A\text{ 不发生,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

,

求在 $\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r\}$ $(0 \leqslant r \leqslant n)$ 的条件下 X_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ 的条件分布律.

解答.

$$\begin{aligned} & P(X_i = 1 | X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r) \\ & = \frac{P(X_i = 1, X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r)}{P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r)} \\ & = \frac{p \times C_{n-1}^{r-1} p^{r-1} (1-p)^{n-r}}{C_n^r p^r (1-p)^{n-r}} \\ & = \frac{r}{n}, \\ & P(X_i = 0 | X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r) \\ & = 1 - P(X_i = 1 | X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r) \\ & = 1 - \frac{r}{n} = \frac{n-r}{n}. \end{aligned}$$