11 月 5 日作业

韩岳成 524531910029

2025 年 11 月 5 日

题目 1. 设由自由流水线加工的某种零件内径 X(单位：mm) 服从正态分布 $N(\mu, 1)$，内径小于 10mm 或大于 12mm 的零件为次品，销售次品要亏损，已知销售利润 T(单位：元) 与销售零件的内径 X 有如下关系：

$$T = \begin{cases} -1, & X < 10, \\ 20, & 10 \leq X \leq 12, \\ -5, & X > 12. \end{cases}$$

问平均内径 μ 为何值时，销售一个零件的平均利润最大?

解答. 设销售一个零件的平均利润为 $E[T]$，则有

$$E[T] = -1 \cdot P(X < 10) + 20 \cdot P(10 \leq X \leq 12) - 5 \cdot P(X > 12).$$

由于 $X \sim N(\mu, 1)$，所以

$$P(X < 10) = \Phi(10 - \mu), \quad P(X > 12) = 1 - \Phi(12 - \mu),$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数。因此

$$\begin{aligned} E[T] &= -1 \cdot \Phi(10 - \mu) + 20 \cdot [\Phi(12 - \mu) - \Phi(10 - \mu)] - 5 \cdot [1 - \Phi(12 - \mu)] \\ &= 25\Phi(12 - \mu) - 21\Phi(10 - \mu) - 5. \end{aligned}$$

为了使 $E[T]$ 最大，只需使 $25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)$ 最大。对 μ 求导，有

$$\frac{dE[T]}{d\mu}=25\phi(12-\mu)-21\phi(10-\mu),$$

其中 $\phi(x)$ 为标准正态分布的概率密度函数。令 $\frac{dE[T]}{d\mu}=0$，解得

$$25\phi(12-\mu)=21\phi(10-\mu).$$

将 $\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 代入，得到

$$25e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}=21e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}.$$

解得

$$\mu=11-\frac{1}{2}\ln\frac{25}{21}.$$

因此，当平均内径 $\mu=11-\frac{1}{2}\ln\frac{21}{25}\approx 10.91\text{mm}$ 时，销售一个零件的平均利润最大。

题目 2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立 ,$X\sim U(0,1)$,Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(y-5)}, & y>5,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 $E\left(XY\right),D\left(XY\right),D\left(2X-Y\right)$.

解答. 由于 $X\sim U(0,1)$，因此 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

从而

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}.$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx=\int_0^1x^2dx=\frac{1}{3}.$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{12}.$$

由

$$f_Y(y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(y-5)}, & y>5,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

可得

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=\int_5^{+\infty}y\mathrm{e}^{-(y-5)}dy=6.$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}y^2f_Y(y)dy=\int_5^{+\infty}y^2\mathrm{e}^{-(y-5)}dy=37.$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=1.$$

由于 X 与 Y 相互独立，因此

$$E(XY)=E(X)E(Y)=3.$$

$$D(XY)=E(X^2Y^2)-[E(XY)]^2=E(X^2)E(Y^2)-[E(XY)]^2=\frac{10}{3}.$$

$$D(2X-Y)=4D(X)+D(Y)=\frac{4}{3}.$$

题目 3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，它们的概率密度分别是

$$f_X(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-x^2+2x-1}{4}},-\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(0.5y^2+2y+2)},-\infty<y<+\infty,$$

设随机变量 $Z=2X-Y+8$, 求 Z 的数学期望和方差.

解答. 由

$$f_X(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-x^2+2x-1}{4}},-\infty<x<+\infty,$$

可知 $X \sim N(1,2)$，因此

$$E(X)=1,\quad D(X)=2.$$

由

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-(0.5y^2+2y+2)},-\infty<y<+\infty,$$

可知 $Y \sim N(-2,1)$，因此

$$E(Y)=-2,\quad D(Y)=1.$$

由于 X 与 Y 相互独立，因此

$$E(Z)=E(2X-Y+8)=2E(X)-E(Y)+8=12,$$

$$D(Z)=D(2X-Y+8)=4D(X)+D(Y)=9.$$

题目 4. 22. 设连续型随机变量 X 的一切可能取值在区间 $[a,b]$ 内，且其概率密度为 $f(x)$. 证明:

(1)$a \leqslant E(X) \leqslant b$;

(2)$D(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}$.

解答. (1) 由于 X 的取值在 $[a,b]$ 内，因此对任意 $x \in [a,b]$，都有 $a \leqslant x \leqslant b$. 两边同时乘以 $f(x)$，并对 x 在 $[a,b]$ 上积分，得到

$$\int_a^b af(x)dx \leqslant \int_a^b xf(x)dx \leqslant \int_a^b bf(x)dx.$$

由于 $f(x)$ 是概率密度函数，因此 $\int_a^b f(x)dx=1$，从而

$$a \leqslant E(X) \leqslant b.$$

(2) 由方差的性质可知

$$D(X) \leq E[(X-c)^2]$$

对任意常数 c 成立。取 $c=\frac{a+b}{2}$，则

$$\begin{aligned}D(X) &\le E\left[\left(X-\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\\ &= \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 f(x)dx\\ &\le \int_a^b \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f(x)dx\\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \int_a^b f(x)dx\\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

题目 5. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 $X \sim U(1,3)$,$Y \sim N(0,1)$, 计算 $D(XY)$.

解答. 由于 $X \sim U(1,3)$，因此 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 1<x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

从而

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx=\int_1^3 \frac{x}{2}dx=2.$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx=\int_1^3 \frac{x^2}{2}dx=\frac{13}{3}.$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{3}.$$

由于 $Y \sim N(0,1)$，因此

$$E(Y)=0, \quad D(Y)=1, \quad E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=1.$$

由于 X 与 Y 相互独立，因此

$$D(XY)=E(X^2Y^2)-[E(XY)]^2]=E(X^2)E(Y^2)-[E(X)E(Y)]^2=\frac{13}{3}.$$

题目 6. 设 $X \sim E(0.5), Y=\max(X,2)$，求 $E(Y), E\left(Y^2\right)$.

解答. 由于 $X \sim E(0.5)$，因此 X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}0.5e^{-0.5x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \\
&= \int_{2}^{+\infty} y \cdot 0.5e^{-0.5y} dy + 2 \cdot P(X \leq 2) \\
&= \int_{2}^{+\infty} y \cdot 0.5e^{-0.5y} dy + 2\left(1-e^{-1}\right) \\
&= 2+2e^{-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left(Y^2\right) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y) dy \\
&= \int_{2}^{+\infty} y^2 \cdot 0.5e^{-0.5y} dy + 4 \cdot P(X \leq 2) \\
&= \int_{2}^{+\infty} y^2 \cdot 0.5e^{-0.5y} dy + 4\left(1-e^{-1}\right) \\
&= 4+16e^{-1}.
\end{aligned}$$

题目 7. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x-3|}, -\infty<x<+\infty$$

Z 表示对 X 进行的 6 次独立观察中事件 $\{X>3\}$ 出现的次数，求 $D(X), E(Z), D(Z)$.

解答. 由于 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x-3|}, -\infty < x < +\infty$$

因此

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{3} x \cdot \frac{1}{2}e^{-(3-x)}dx + \int_{3}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{2}e^{-(x-3)}dx \\ &= 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{3} x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{-(3-x)}dx + \int_{3}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{-(x-3)}dx \\ &= \frac{5}{2} + \frac{17}{2} = 11 \end{aligned}$$

因此

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 11 - 9 = 2.$$

由于 Z 表示对 X 进行的 6 次独立观察中事件 $\{X > 3\}$ 出现的次数，因此 Z 服从参数为 6 的伯努利分布，其中成功的概率为

$$p = P(X > 3) = \int_{3}^{+\infty} f(x)dx = \int_{3}^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-(x-3)}dx = \frac{1}{2}.$$

因此

$$E(Z) = 6P(X > 3) = 3, \quad D(Z) = 6P(X > 3)(1 - P(X > 3)) = \frac{3}{2}.$$