# 10 月 22 日作业

韩岳成 524531910029

2025 年 10 月 23 日

**题目 1.** 随机变量 X 服从参数为 0.6 的 $(0,1)$ 分布, 在 X=0 及 X=1 的条件下随机变量 Y 的条件分布律如下:

| $Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(Y \mid X=0)$ | 0.25 | 0.5 | 0.25 |

| $Y$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $P(Y \mid X=1)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ |

求在$Y=1$ 以及$Y \neq 1$ 的条件下随机变量 X 的条件分布律.

**解答.** 由于随机变量 X 服从参数为 0.6 的 $(0,1)$ 分布, 故 $P(X=0)=0.4$, $P(X=1)=0.6$. 由全概率公式, 可得

$$\begin{aligned} P(Y=1) &= P(Y=1 \mid X=0)P(X=0) + P(Y=1 \mid X=1)P(X=1) \\ &= 0.25 \times 0.4 + \frac{1}{2} \times 0.6 = 0.4. \end{aligned}$$

$$P(Y \neq 1) = 1 - P(Y=1) = 0.6.$$

因此, 在$Y=1$ 的条件下, 随机变量 X 的条件分布律为

$$\begin{aligned} P(X=0 \mid Y=1) &= \frac{P(Y=1 \mid X=0)P(X=0)}{P(Y=1)} = \frac{0.25 \times 0.4}{0.4} = 0.25, \\ P(X=1 \mid Y=1) &= \frac{P(Y=1 \mid X=1)P(X=1)}{P(Y=1)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0.6}{0.4} = 0.75. \end{aligned}$$

在$Y \neq 1$ 的条件下,

$$P(Y \neq 1 \mid X=0) = 1 - P(Y=1 \mid X=0) = 0.75,$$

$$P(Y \neq 1 \mid X=1) = 1 - P(Y=1 \mid X=1) = \frac{1}{2}.$$

因此，随机变量 X 的条件分布律为

$$P(X=0 \mid Y \neq 1) = \frac{P(Y \neq 1 \mid X=0)P(X=0)}{P(Y \neq 1)} = \frac{0.75 \times 0.4}{0.6} = 0.5,$$
$$P(X=1 \mid Y \neq 1) = \frac{P(Y \neq 1 \mid X=1)P(X=1)}{P(Y \neq 1)} = \frac{\frac{1}{2} \times 0.6}{0.6} = 0.5.$$

**题目 2.** 在 $n$ 重 Bernoulli 试验中，若事件 $A$ 出现的概率为 $p$, 令

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{在第}i\text{次试验中}A\text{发生,} \\ 0, & \text{在第}i\text{次试验中}A\text{ 不发生,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

,

求在 $\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r\}$ $(0 \leqslant r \leqslant n)$ 的条件下 $X_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ 的条件分布律.

**解答.**

$$\begin{aligned}
&P(X_i = 1 | X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r) \\
&= \frac{P(X_i = 1, X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r)}{P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r)} \\
&= \frac{p \times C_{n-1}^{r-1} p^{r-1} (1-p)^{n-r}}{C_n^r p^r (1-p)^{n-r}} \\
&= \frac{r}{n}, \\
&P(X_i = 0 | X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r) \\
&= 1 - P(X_i = 1 | X_1 + X_2 + \cdots + X_n = r) \\
&= 1 - \frac{r}{n} = \frac{n-r}{n}.
\end{aligned}$$

**题目 3.** 设随机变量 $(X, Y)$ 的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{2}e^{-x(1+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求:(1) $(X, Y)$ 关于 $X$ 的边缘概率密度 $f_X(x)$; (2) 条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$，并写出当 $x = 0.5$ 时的条件概率密度; (3) 条件概率 $P(Y \geqslant 1|X = 0.5)$.

**解答.** (1) 边缘概率密度:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{2}e^{-x(1+y)}dy \\ &= \frac{x^3}{2}e^{-x}\int_0^{+\infty} e^{-xy}dy = \frac{x^3}{2}e^{-x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x^2}{2}e^{-x}, \quad x>0. \end{aligned}$$

因此

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}e^{-x}, & x>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2) 条件概率密度:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{x^3}{2}e^{-x(1+y)}}{\frac{x^2}{2}e^{-x}} = xe^{-xy}, \quad y>0.$$

因此 $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} xe^{-xy}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$.

当 $x = 0.5$ 时, $f_{Y|X}(y|0.5) = \begin{cases} 0.5e^{-0.5y}, & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$.

(3) 条件概率:

$$\begin{aligned} P(Y \geqslant 1|X = 0.5) &= \int_1^{+\infty} f_{Y|X}(y|0.5)dy = \int_1^{+\infty} 0.5e^{-0.5y}dy \\ &= 0.5\left[-2e^{-0.5y}\right]_1^{+\infty} = e^{-0.5}. \end{aligned}$$

**题目 4.** 设 (X,Y) 是二维随机变量, 其关于 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{2+x}{6}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

且当 $\{X=x\}(0<x<2)$ 时 Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y\mid x)=\begin{cases}\frac{1+xy}{1+x/2}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求: (1)(X,Y) 的联合概率密度;

(2)(X,Y) 关于 Y 的边缘概率密度;

(3) 在 $\{Y=y\}$ 的条件下 X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$.

**解答.** (1)

$$\begin{aligned}f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)&=\frac{2+x}{6}\cdot\frac{1+xy}{1+x/2}\\ &=\frac{1+xy}{3}, \qquad 0<x<2, 0<y<1.\end{aligned}$$

因此，(X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1+xy}{3}, & 0<x<2, 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2)

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\int_0^2\frac{1+xy}{3}dx, \quad 0<y<1.$$

计算可得

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2+2y}{3}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3)

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1+xy}{3}}{\frac{2+2y}{3}} = \frac{1+xy}{2+2y}, \quad 0 < x < 2.$$

因此，

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1+xy}{2+2y}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

**题目 5.** 设随机变量 $X, Y$ 满足 $P(XY=0)=1$，且其分布律分别如下表所示：

| $X$ | $-1$ | $0$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $P_i$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

| $Y$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $P_i$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

(1) 求在 $\{X=0\}$ 的条件下 $Y$ 的条件分布律；

(2) 试问 $X$ 与 $Y$ 是否相互独立？为什么？

**解答.** 由题意可知，$P(XY \neq 0) = 0$，所以 $P(X=-1, Y=1) = 0$ 且 $P(X=2, Y=1) = 0$.

因此 (X,Y) 的联合分布律如下表所示:

| $P_{ij}$ | $X=-1$ | $X=0$ | $X=2$ | $P_j = \sum_i P_{ij}$ |
|---|---|---|---|---|
| $Y=0$ | $\frac{1}{4}$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $Y=1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ |
| $P_i = \sum_j P_{ij}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | |

(1) 由全概率公式, 可得

$$P(Y=0|X=0) = \frac{P(X=0, Y=0)}{P(X=0)} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0,$$

$$P(Y=1|X=0)=\frac{P(X=0,Y=1)}{P(X=0)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1.$$

因此，在 $\{X=0\}$ 的条件下 $Y$ 的条件分布律为:

| $Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P(Y\|X=0)$ | 0 | 1 |

(2) 由于 $P(Y=0|X=0)\neq P(Y=0)$, 故随机变量 X 与 Y 不相互独立.

**题目 6.** 尝试用多种方法解下面的题目:

假设随机变量 $X\sim U(0,1)$，并且当 $X=x(0<x<1)$ 时，随机变量 $Y$ 服从 $(0,x)$ 上的均匀分布，即 $Y\sim U(0,x)$，并且随机变量 $Y$ 的可能取值范围为 $(0,1)$，求 $Y$ 的分布函数。

**解答.**

方法一: 因为 $X\sim U(0,1)$，所以 $X$ 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

由于随机变量 Y 服从 $(0,x)$ 上的均匀分布, 故在 $\{X=x\}(0<x<1)$ 时, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & 0<y<x;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

因此，

$$\begin{aligned}f_Y(y)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)dx\\&=\int_0^1 f_{Y|X}(y|x)f_X(x)dx\\&=\int_y^1\frac{1}{x}\cdot 1\,dx,\\&=[-\ln x]_y^1=-\ln y.\quad 0<y<1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \int_0^y f_Y(y)dy \\ &= \int_0^y -\ln t\,dt \\ &= y - y\ln y, \quad 0 < y < 1.\end{aligned}$$

因为分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leqslant 0; \\ y - y\ln y, & 0 < y < 1; \\ 1, & y \geqslant 1. \end{cases}$$

方法二: 已知随机变量 $X \sim U(0,1)$，并且在给定 $X = x$ 时，

$$Y \mid X = x \sim U(0,x).$$

因此，对任意固定的 $x$（其中 $0 < x < 1$），有条件分布函数

$$P(Y \leq y \mid X = x) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \dfrac{y}{x}, & 0 < y < x, \\ 1, & y \geq x. \end{cases}$$

因为 $X \sim U(0,1)$，其密度为 $f_X(x) = 1$ $(0 < x < 1)$。由全概率公式可得，对 $0 < y < 1$，

$$\begin{aligned}F_Y(y) = P(Y \leq y) &= \int_0^1 P(Y \leq y \mid X = x)\, f_X(x)\, dx \\ &= \int_0^y 1\, dx + \int_y^1 \frac{y}{x}\, dx \\ &= y + y\int_y^1 \frac{1}{x}\, dx \\ &= y - y\ln y.\end{aligned}$$

于是 $Y$ 的分布函数为

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ y(1-\ln y), & 0 < y < 1, \\ 1, & y \geq 1. \end{cases}$$

**题目 7.** 设 $(X,Y) \sim N(0,4;2,9;0)$, 求

$(1) P(|X| > 1)$;

$(2) f_{Y|X}(y \mid x)$;

$(3) P(X < 3 \mid Y = 2)$.

**解答.** (1) 由正态分布的性质可知，$X$ 的分布为 $N(0,4)$，因此

$$\begin{aligned} P(|X| > 1) &= P(X < -1) + P(X > 1) \\ &= 2P(X > 1) \\ &= 2(1 - \Phi(\frac{1-0}{2})) \\ &= 0.617 \end{aligned}$$

(2) 由正态分布中 $\rho = 0$ 可得，随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立，因此

$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-2)^2}{18}}.$$

(3) 由随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立可知

$$P(X < 3|Y = 2) = P(X < 3) = \Phi(\frac{3-0}{2}) = 0.9332.$$