10 月 29 日作业

韩岳成 524531910029

2025 年 10 月 30 日

题目 1. 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}x\,, & 0\leqslant x\leqslant 2\,, 0\leqslant y\leqslant \dfrac{x}{2}\,,\\ 0\,, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) 求 (X,Y) 的边缘概率密度；

(2) 试问 X 与 Y 是否相互独立？

解答. (1) 由联合概率密度可得

$$f_X(x)=\int_0^{\frac{x}{2}}\frac{3}{4}x\,dy=\frac{3}{8}x^2,\quad 0\le x\le 2,$$

$$f_Y(y)=\int_{2y}^{2}\frac{3}{4}x\,dx=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}y^2,\quad 0\le y\le 1.$$

因此边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2\,, & 0\leqslant x\leqslant 2\,,\\ 0\,, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}y^2\,, & 0\leqslant y\leqslant 1\,,\\ 0\,, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x,y)$，因此 X 与 Y 不相互独立。

题目 2. 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0<x<1, 0<y<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求在 $\left\{0<X<\frac{1}{n}\right\}$ 的条件下 Y 的条件分布函数.

解答. 由联合概率密度可得

$$\begin{aligned} F_{Y|X}(y|0<X<\tfrac{1}{n}) &= P(Y\le y|0<X<\tfrac{1}{n}) \\ &= \frac{P(Y\le y, 0<X<\frac{1}{n})}{P(0<X<\frac{1}{n})} \\ &= \frac{\int_0^{\frac{1}{n}}\int_{-\infty}^{y}(x+t)\,dt\,dx}{\int_0^{\frac{1}{n}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+t)\,dt\,dx} \\ &= \begin{cases} 0, & y<0, \\ \frac{\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{y}(x+t)\,dt\,dx}{\int_0^{\frac{1}{n}}\int_0^{1}(x+t)\,dt\,dx}, & 0\le y<1, \\ 1, & y\ge 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & y<0, \\ \frac{y(1+ny)}{1+n}, & 0\le y<1, \\ 1, & y\ge 1. \end{cases} \end{aligned}$$

题目 3. 设随机变量 (X,Y) 的联合分布律为

p_{ij}		X: 0	1	2	3	4	5
Y	0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
	1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
	2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
	3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

分别求 $Z=X+Y$、$M=\max\{X,Y\}$ 和 $N=\min\{X,Y\}$ 的分布律.

解答. 由联合分布律可得

Z	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(Z=z)$	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

M	1	2	3	4	5
$P(M=m)$	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

N	0	1	2	3
$P(N=n)$	0.28	0.30	0.25	0.17

题目 4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且服从相同的分布，其中 $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$, 令

$$Z=\begin{cases}1, & \text{若 X+Y 为偶数,}\\ 0, & \text{若 X+Y 为奇数,}\end{cases}$$

问 p 取何值时 X 与 Z 相互独立?

解答. 由题意可得

$$P(Z=1)=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)=(1-p)^2+p^2=1-2p+2p^2,$$

$$P(Z=0)=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)=2p(1-p)=2p-2p^2.$$

因为 X 与 Z 相互独立，所以

$$P(X=1,Z=1)=P(X=1,Y=1)=p^2=P(X=1)P(Z=1)=p(1-2p+2p^2).$$

解得 $p=\frac{1}{2}$，即当 $p=\frac{1}{2}$ 时，X 与 Z 相互独立。

题目 5. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

令 $Z=2X-Y$，求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

解答. 由题意可得

$$Z=2X-Y\Rightarrow Y=2X-Z.$$

因此

$$f_Z(z)=\int_0^1 f(x,2x-z)\,dx.$$

当 $0<x<1$ 且 $0<y<2x$ 时，$0<2x-z<2x$，即 $z<2x$，所以

$$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^1 1\,dx=1-\frac{z}{2},\quad 0<z<2.$$

因此

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{2}, & 0<z<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

题目 6. 设 X 与 Y 是相互独立且同分布的随机变量，其概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{10}{x^2}, & x>10\,,\\ 0\,, & x\leqslant 10\,,\end{cases}$$

求 $Z=\frac{X}{Y}$ 的概率密度。

解答. 由变量变换 $x=zy$，得到

$$f_Z(z)=\int_{y>0} f_X(zy)f_Y(y)|y|\,\mathrm{d}y.$$

由于 $X > 10, Y > 10$，

若 $0 < z < 1$，则 $zy > 10 \Rightarrow y > 10/z > 10$，积分下限 $y = 10/z$：

$$f_Z(z) = \int_{10/z}^{\infty} \frac{10}{(zy)^2} \cdot \frac{10}{y^2} \cdot y \,\mathrm{d}y = \int_{10/z}^{\infty} \frac{100}{z^2 y^3} \,\mathrm{d}y = \frac{50}{z^2 (10/z)^2} = \frac{1}{2}.$$

若 $z \geq 1$，则 $zy > 10 \Rightarrow y > 10$，积分下限 $y = 10$：

$$f_Z(z) = \int_{10}^{\infty} \frac{100}{z^2 y^3} \,\mathrm{d}y = \frac{50}{z^2 \cdot 10^2} = \frac{1}{2z^2}.$$

因此 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & 0 < z < 1, \\ \dfrac{1}{2z^2}, & z \geq 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

题目 7. 设 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) \mid x \leq y \leq 2\}$ 内均匀分布，$Z = g(X, Y) = \begin{cases} 0, Y < 1 \\ Y, Y \geq 1 \end{cases}$，求 Z 的分布函数。

解答. 由题意可得区域 D 的面积为

$$S_D = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{x}^{2} 1 \, dy \, dx = \int_{-\infty}^{2} (2 - x) \, dx = 2(2) - \frac{(2)^2}{2} = 2.$$

因此 (X, Y) 的分布函数为

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当 $z < 0$ 时，$F_Z(z) = 0$；

当 $0 \leq z < 1$ 时，

$$P(z = 0) = \frac{1}{2} P(y < 1) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^y dx dy = \frac{1}{4},$$

因此 $F_Z(z)=\frac{1}{4}$；

当 $1\le z<2$ 时，

$$P(Z\le z)=\frac{1}{2}P(y<z)=\frac{1}{2}\int_0^z\int_0^y dxdy=\frac{z^2}{4},$$

因此 $F_Z(z)=\frac{z^2}{4}$；

当 $z\ge 2$ 时，$F_Z(z)=1$。综上所述，Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{1}{4}, & 0\le z<1,\\ \frac{z^2}{4}, & 1\le z<2,\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$$