9 月 17 日作业

韩岳成 524531910029

2025 年 10 月 18 日

题目 1. 设 A,B,C 为三个事件，试用事件的关系和运算表示下列事件：

(1) 只有 A 发生；

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生；

(3) A,B,C 都不发生；

(4) A,B,C 不都发生；

(5) A.B,C 中至少有一个发生.

解答. (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$

(2) $A\,B\,\overline{C}$

(3) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$

(4) $\overline{ABC}$

(5) $A \cup B \cup C$

题目 2. 甲、乙二人参加知识竞赛，共有 10 道不同的题目其中有 6 道选择题，4 道判断题. 甲、乙二人依次各抽 1 题.

(1) 求甲抽到选择题，乙抽到判断题的概率；

(2) 求甲、乙二人中至少有一人抽到选择题的概率.

解答. 设事件 A 为甲抽到选择题，事件 B 为乙抽到判断题，则

(1) $P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $P(B|A)=\frac{4}{9}$,

$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{4}{15}$.

(2) $P(\overline{A})=1-P(A)=\frac{2}{5}, P(B|\overline{A})=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{2}{15}$

$P(A\cup\overline{B})=1-P(\overline{A}B)=\frac{13}{15}$

题目 3. 假设某博彩中心发行了 n 张奖券，其中 m($m\le n$) 张有奖. 某人一次性买了 k($k\le n$) 张奖券，这 k 张中没有一张有奖的概率是多少? 这 k 张中多于两张有奖的概率是多少?

解答. 设没有一张有奖为事件 A，有一张有奖为事件 B，有两张有奖为事件 C。

当 $k\le n-m$ 时，$P(A)=\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$,

当 $k>n-m$ 时，$P(A)=0$.

当 $k\le n-m+1$ 且 $m\ge 1$ 时，$P(B)=\frac{C_{n-m}^{k-1}C_m^1}{C_n^k}$,

当 $k>n-m+1$ 时，$P(B)=0$;

当 $k\le n-m+2$ 且 $m\ge 2$ 时，$P(C)=\frac{C_{n-m}^{k-2}C_m^2}{C_n^k}$,

当 $k>n-m+2$ 时，$P(C)=0$

因此 $P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(A)-P(B)-P(C)$

$$=\begin{cases}1-\frac{C_{n-m}^k+C_{n-m}^{k-1}C_m^1+C_{n-m}^{k-2}C_m^2}{C_n^k}, & k\le n-m+3, m\ge 3,\\ 1, & k>n-m+3, m\ge 3,\\ 0, & m<3.\end{cases}$$

题目 4. 有放回地从数字 1,2,...,n 中随机抽取 k 个数（$k\le n$)，求下列事件的概率:

(1) A 表示事件“k 个数字全不相同”;

(2) B 表示事件“数字‘5’恰好出现 r 次”($r\le k$);

(3) C 表示事件“至少出现 r 个数字‘5’”$(r \leq k)$.

解答. (1) $P(A) = \frac{A_n^k}{n^k}$;

(2) $P(B) = \frac{C_k^r (n-1)^{k-r}}{n^k}$;

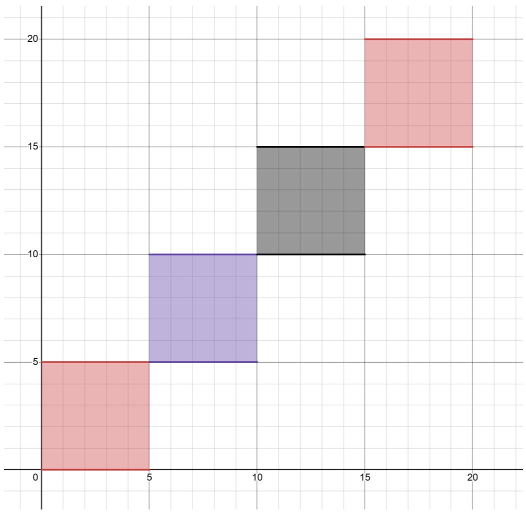
(3) $P(C) = \frac{\sum_{i=r}^{k} C_k^i (n-1)^{k-i}}{n^k}$.

题目 5. 甲、乙二人约定上午 9:00 至 9:20 之间到某地铁站乘地铁，这段时间内有 4 班车，开车时间分别为 9:05, 9: l0, 9: 15, 9: 20．他们约定 (l) 见车就乘；(2) 最多等一班车．假设甲、乙到达地铁站的时刻互不影响，且每人在这段时间内任何时刻到达车站是等可能的、求甲、乙同乘一班车的概率．

解答. 设甲、乙同乘一班车为事件 A, 甲、乙到达地铁站的时刻距 9:00 分别为 x,y,

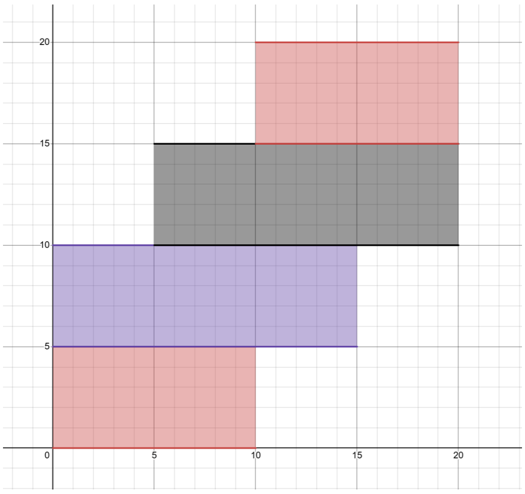
$\Omega = \{(x,y)|0 \leq x, y \leq 20\}$.

(1) 事件 A 对应的区域如下图所示:



因此 $P(A) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

(2) 事件 A 对应的区域如下图所示:



因此 $P(A) = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

题目 6. 考虑一元二次方程 $x^2 + Bx + C = 0$，其中 B,C 分别是将一枚骰子接连投掷两次先后出现的点数。求该方程有实根的概率和该方程有重根的概率。

解答. 设该方程有实根为事件 A，该方程有重根为事件 B.

样本空间 $\Omega = \{(1,1),(1,2),...,(1,6),(2,1),(2,2),...,(2,6),...,(6,6)\}$.

当 $B^2-4C \geq 0$ 时，该方程有实根，因此 $A = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$,$P(A) = \frac{19}{36}$.

当 $B^2 - 4C = 0$ 时，该方程有重根，因此 $B = \{(2,1),(4,4)\}$,$P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.