11 月 12 日作业

韩岳成 524531910029

2025 年 11 月 12 日

题目 1. 设二维随机变量的联合分布律为

p_{ij}		X		
		-1	0	1
Y	-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

试验证 X 和 Y 既不相关，也不相互独立。

解答. 计算得到边缘分布律为

$$P(X=-1)=\frac{3}{8},\quad P(X=0)=\frac{1}{4},\quad P(X=1)=\frac{3}{8}$$

$$P(Y=-1)=\frac{3}{8},\quad P(Y=0)=\frac{1}{4},\quad P(Y=1)=\frac{3}{8}$$

计算 $E(X),E(Y),E(XY)$:

$$E(X)=(-1)\cdot\frac{3}{8}+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{3}{8}=0$$

$$E(Y)=(-1)\cdot\frac{3}{8}+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{3}{8}=0$$

$$E(XY) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} + 0 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} + (-1) \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = 0$$

因为 $E(XY) = E(X)E(Y) = 0$，所以 X 和 Y 不相关。

再验证 X 和 Y 是否相互独立，取 $P(X=1, Y=1) = \frac{1}{8}$，而 $P(X=1)P(Y=1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$，所以 X 和 Y 不相互独立。

题目 2. 设 A, B 是试验 E 的两个随机事件, 且 P(A)>0, P(B)>0, 并定义随机变量 X 与 Y 如下:

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生}, \\ 0, & \bar{A} \text{ 发生}, \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生}, \\ 0, & \bar{B} \text{ 发生}, \end{cases}$$

证明: 若 X 与 Y 不相关, 则 X 与 Y 必定相互独立.

解答. 若 X 与 Y 不相关，则 $E(XY) = E(X)E(Y)$, 又有 $E(X) = P(A)$, $E(Y) = P(B)$, $E(XY) = P(AB)$，所以 $P(AB) = P(A)P(B)$，即 A 与 B 相互独立。

题目 3. 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(1, 9; 0, 16; -0.5)$，令 $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$，求 $E(Z), D(Z), \rho_{XZ}$.

解答. 由 $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}$，可得

$$E(Z) = E\left(\frac{X}{3} + \frac{Y}{2}\right) = \frac{E(X)}{3} + \frac{E(Y)}{2} = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

$$D(Z) = D\left(\frac{X}{3} + \frac{Y}{2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 D(X) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 D(Y) + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot Cov(X, Y)$$

其中 $Cov(X, Y) = \rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)} = -0.5 \cdot \sqrt{9 \cdot 16} = -6$，所以

$$D(Z) = \frac{1}{9} \cdot 9 + \frac{1}{4} \cdot 16 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-6) = 1 + 4 - 2 = 3$$

接下来计算 ρ_{XZ}：

$$Cov(X,Z)=Cov\left(X,\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}\right)=Cov\left(X,\frac{X}{3}\right)+Cov\left(X,\frac{Y}{2}\right)=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)$$

所以

$$Cov(X,Z)=\frac{1}{3}\cdot 9+\frac{1}{2}\cdot(-6)=3-3=0$$

因此

$$\rho_{XZ}=\frac{Cov(X,Z)}{\sqrt{D(X)D(Z)}}=\frac{0}{\sqrt{9\cdot 3}}=0$$

题目 4. 设 $(X,Y)\sim N(2,9;2,4;0)$，如果相互独立对 (X,Y) 进行观察，Z_1 表示直到出现 $X>Y$ 为止所需要的观察次数，Z_2 表示 10 次观察中出现 $X>Y$ 的次数。求 Z_1,Z_2 的数学期望与方差.

解答. 由于 (X,Y) 相互独立，故 $X-Y\sim N(0,9+4)=N(0,13)$，令 $Z=X-Y$，则

$$P(X>Y)=P(X-Y>0)=P(Z>0)=P\left(\frac{Z-0}{\sqrt{13}}>0\right)=\frac{1}{2}$$

其中 $Z\sim N(0,13)$。

对于 Z_1，它服从参数为 $p=\frac{1}{2}$ 的几何分布，所以

$$E(Z_1)=\frac{1}{p}=2,\quad D(Z_1)=\frac{1-p}{p^2}=2$$

对于 Z_2，它服从参数为 $n=10,p=\frac{1}{2}$ 的二项分布，所以

$$E(Z_2)=np=10\cdot\frac{1}{2}=5,\quad D(Z_2)=np(1-p)=10\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

题目 5. 将 n 个球随机地放入 n 个盒子中，每盒容纳的球数无限，求空着的盒子数的数学期望和方差.

解答. 设随机变量 X 表示空着的盒子数，定义指示变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第}i\text{个盒子为空} \\ 0, & \text{第}i\text{个盒子不为空} \end{cases}$$

则 $X = \sum_{i=1}^n X_i$。计算 $E(X_i)$：

$$E(X_i) = P(X_i = 1) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

因此

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

接下来计算 $D(X)$，首先计算 $E(X^2)$：

$$E(X^2) = E\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} X_iX_j\right)$$

注意到 $X_i^2 = X_i$，所以

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n E(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n} E(X_iX_j)$$

计算 $E(X_iX_j)$：

$$E(X_iX_j) = P(X_i = 1, X_j = 1) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

因此

$$E(X^2) = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n + n(n-1)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

最后，方差为

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n + n(n-1)\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n - n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n}$$