10 月 15 日作业

韩岳成 524531910029

2025 年 10 月 18 日

题目 1. 某地区成年男子的体重 X(单位：kg) 服从正态分布 N(66,σ^2)，且已知 P(X≤60)=0.25. 若在该地区随机选取 3 人，求至少 1 人体重超过 65kg 的概率.

解答. $\Phi(\frac{60-66}{\sigma}) = 0.25 \approx 1 - \Phi(0.67) = \Phi(-0.67)$，解得 $\sigma \approx 9$

$P(X \geq 65) = 1 - P(X \leq 67) = 1 - \Phi(\frac{67-66}{9}) \approx 0.544$

设 Y 为体重超过 65kg 的人数，则 $Y \sim B(3, 0.544)$，则至少 1 人体重超过 65kg 的概率为 $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - 0.544)^3 \approx 0.905$

题目 2.

设随机变量 X 的分布函数

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ 0.3, & -2 \leqslant x < -1, \\ 0.9, & -1 \leqslant x < 2, \\ 1, & x \geqslant 2. \end{cases}$$

求随机变量 $Y = X^2 - 3$ 和 $Z = |X|$ 的分布律.

解答. 由题得，

$$f_X(x) = \begin{cases} 0.3, & x = -2, \\ 0.6, & x = -1, \\ 0.1, & x = 2, \\ 0, & \text{others.} \end{cases}$$

当 $X = -2, -1, 2$ 时,$Y = 1, -2, 1, Z = 2, 1, 2,$

$P(Y = -2) = P(X = -1) = f_X(-1) = 0.6$

$P(Y = 1) = P(X = -2) + P(X = 2) = f_X(-2) + f_X(2) = 0.4$

$P(Z = 1) = P(X = -1) = f_X(-1) = 0.6$

$P(Z = 2) = P(X = -2) + P(X = 2) = f_X(-2) + f_X(2) = 0.4$

因此，

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0.6, & y = -2, \\ 0.4, & y = 1. \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0.6, & z = 1, \\ 0.4, & z = 2. \end{cases}$$

题目 3. 设随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$ ，求 $Y = 3 - 2X$ 的分布函数 $F_Y(y)$.

解答. $f_Y(y) = P(Y \leq y) = P(3 - 2X \leq y) = P(X \geq \frac{3-y}{2})$
$= 1 - P(X \leq \frac{3-y}{2}) + P(X = \frac{3-y}{2}) = 1 - F_X(\frac{3-y}{2}) + F_X(\frac{3-y}{2}) - F_X(\frac{3-y}{2} - 0) // = 1 - F_X(\frac{3-y}{2} - 0)$

题目 4. 通过点 (0,1) 任意作直线与 x 轴相交成 θ 角 (0<θ<π) , 求直线在 x 轴上的截距 X 的概率密度 f(x).

解答. 由题意，Θ 在 $(0, \pi)$ 上均匀分布，$\Theta \sim U(0, \pi)$，

故 θ 的分布函数 $F_\Theta(\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & 0<\theta<\pi,\\ 0, & \text{others.}\end{cases}$

由 $-X=\cot\theta$ 得到 $\theta=\operatorname{arccot}(-X)$, $\quad \theta'=\frac{1}{1+x^2}$

因此 $f_X(x)=f_\Theta(\theta)\cdot|\theta'|=\frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad \in(-\infty.+\infty)$

题目 5. 设随机变量 X 的绝对值不大于 1, $P(X=-1)=\frac{1}{8}, P(X=1)=\frac{1}{4}$. 在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在 $(-1,1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间的长度成正比，求 X 的分布函数 $F(x)$.

解答.

$$P(-1<X<1)=1-P(X=-1)-P(X=1)=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}.$$

由于在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在 $(-1,1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比，因此在 $(-1,1)$ 上服从均匀分布。

设在 $(-1,1)$ 上的密度为常数 c，则有 $\int_{-1}^{1} c\,dx=2c=\frac{5}{8}$ ，

解得 $c=\frac{5}{16}$.

因此，$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & x=-1\\ \frac{5}{16}, & -1<x<1,\\ \frac{1}{4}, & x=1,\\ 0, & \text{others.}\end{cases}$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ P(X=-1)=\dfrac{1}{8}, & x=-1,\\ \dfrac{1}{8}+\displaystyle\int_{-1}^{x}\frac{5}{16}\,dt=\frac{1}{8}+\frac{5}{16}(x+1), & -1<x<1,\\ 1, & x\geq 1.\end{cases}$$