10 月 30 日作业

韩岳成 524531910029

2025 年 10 月 31 日

题目 1. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 并且都服从正态分布 $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$, 证明 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

(此时称 Z 服从参数为 $\sigma(\sigma > 0)$ 的 Rayleigh(瑞利) 分布.)

解答. 由于 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$, 故其联合概率密度为

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

由 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 可知, $Y = \sqrt{Z^2 - X^2}$ 或 $Y = -\sqrt{Z^2 - X^2}$. 因此,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, \sqrt{z^2 - x^2}) \left| \frac{\partial y}{\partial z} \right| dx + \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, -\sqrt{z^2 - x^2}) \left| \frac{\partial y}{\partial z} \right| dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2 + (\sqrt{z^2 - x^2})^2}{2\sigma^2}} \frac{z}{\sqrt{z^2 - x^2}} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2 + (-\sqrt{z^2 - x^2})^2}{2\sigma^2}} \frac{z}{\sqrt{z^2 - x^2}} dx \\ &= \frac{z}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{z^2 - x^2}} dx \\ &= \frac{z}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} \cdot \pi \\ &= \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

当 $z<0$ 时, 显然 $f_Z(z)=0$. 综上所述, Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\geq 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

题目 2. 若某电子设备的输出服从 $\sigma=2$ 的 Rayleigh 分布, X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 表示相互独立的测量 5 次的输出，求:

(1)$Z=\max|X_1,X_2,X_3,X_4,X_5|$ 的分布函数;

(2)$P(Z>4)$.

解答. (1) $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(t)dt=\int_0^x\frac{t}{4}e^{-\frac{t^2}{8}}dt=1-e^{-\frac{x^2}{8}}$.

由题意可知, $X_i(i=1,2,3,4,5)$ 相互独立且都服从参数为 $\sigma=2$ 的 Rayleigh 分布. 因此,

$$\begin{aligned}F_Z(z)=P(Z\leq z)&=P(\max|X_1,X_2,X_3,X_4,X_5|\leq z)\\&=P(|X_1|\leq z,|X_2|\leq z,|X_3|\leq z,|X_4|\leq z,|X_5|\leq z)\\&=\prod_{i=1}^{5}P(|X_i|\leq z)\\&=(F_X(z))^5\\&=\left(1-e^{-\frac{z^2}{8}}\right)^5.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}P(Z>4)&=1-P(Z\leq 4)\\&=1-F_Z(4)\\&=1-\left(1-e^{-2}\right)^5.\end{aligned}$$

题目 3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立且均服从 $(1,3)$ 内的均匀分布, 试求 $Z=|X-Y|$ 的概率密度.

解答. 由题意可得,

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 1<x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

同理,

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 1<y<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由于 X 与 Y 相互独立, 故其联合概率密度为

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 1<x<3, 1<y<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由 $Z=|X-Y|$ 可知, $Y=X-Z$ 或 $Y=X+Z$. 因此,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,x-z)\left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| dx+\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,x+z)\left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,x-z)dx+\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,x+z)dx \\ &= \int_{1}^{3} f_{X,Y}(x,x-z)dx+\int_{1}^{3} f_{X,Y}(x,x+z)dx \\ &= \int_{\max(1,1+z)}^{3} \frac{1}{4}dx+\int_{1}^{\min(3,3-z)} \frac{1}{4}dx. \end{aligned}$$

当 $0<z\le 2$ 时,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{1+z}^{3}\frac{1}{4}dx+\int_{1}^{3-z}\frac{1}{4}dx \\ &= \frac{3-(1+z)}{4}+\frac{(3-z)-1}{4} \\ &= \frac{2-z}{2}. \end{aligned}$$

当 $z>2$ 时,

$$f_Z(z)=\int_3^3\frac{1}{4}dx+\int_1^1\frac{1}{4}dx$$
$$=0.$$

当 $z\le 0$ 时, 显然 $f_Z(z)=0$. 综上所述, Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{z}{2}, & 0<z\le 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

题目 4. 甲、乙两人进行乒乓球预选赛，预选赛为 5 局 3 胜制，且有一方先胜 3 局比赛就结束. 假设每人每局获胜概率相同，求比赛局数的数学期望.

解答. 设随机变量 X 表示比赛局数, 则 X 可能取值为 3, 4, 5. 现分别计算 $P(X=3)$, $P(X=4)$, $P(X=5)$.

当某一方连胜 3 局时, 比赛结束. 因此,

$$P(X=3)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}.$$

当某一方在前 3 局中赢 2 局, 第 4 局获胜时, 比赛结束. 因此,

$$P(X=4)=2\times C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}.$$

当某一方在前 4 局中赢 2 局, 第 5 局获胜时, 比赛结束. 因此,

$$P(X=5)=2\times C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{8}.$$

综上所述, 比赛局数的数学期望为

$$\begin{aligned}E(X)&=3\times P(X=3)+4\times P(X=4)+5\times P(X=5)\\&=3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}\\&=\frac{33}{8}.\end{aligned}$$

题目 5. 某保险公司打算设立交通事故意外险，若交通事故导致死亡发生，保险公司的赔付额是 m 元. 据保险公司调查，该险种受众群体发生交通事故死亡的概率为 p, 要使保险公司期望收益达到赔付金额的 5%, 公司要求客户缴纳的最低保费是多少?

解答. 设客户缴纳的保费为 C 元, 则保险公司的期望收益为

$$\begin{aligned} E(\text{收益}) &= C \times (1-p) + (C-m) \times p \\ &= C - mp. \end{aligned}$$

由题意可知, 保险公司要求期望收益达到赔付金额的 5%, 即

$$\begin{aligned} E(\text{收益}) &\geq 0.05m \\ C - mp &\geq 0.05m \\ C &\geq m(p+0.05). \end{aligned}$$

因此, 公司要求客户缴纳的最低保费为 $m(p+0.05)$ 元.

题目 6. 设随机变量 X 的概率密度

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 2-x, & 1 < x < 2, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $E\left(X\right), E\left(2X+1\right), E\left(\mathrm{e}^{-X}\right)$.

解答. 计算 $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x) dx \\ &= 1. \end{aligned}$$

计算 $E(2X+1)$，由方差的线性性质可得:

$$E(2X+1) = 2E(X) + 1 = 3.$$

计算 $E(e^{-X})$:

$$\begin{aligned} E(e^{-X}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} f(x) dx \\ &= \int_0^1 x e^{-x} dx + \int_1^2 (2-x) e^{-x} dx \\ &= 1 - 2e^{-1} + e^{-2}. \end{aligned}$$

题目 7. 设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x,y) = \begin{cases} kx, x > 0, |y| \le 1-x, \\ 0, \text{其他} \end{cases}$,$Z = Y + |Y|$, 求 Z 的分布。

解答. 由归一化条件，

$$\iint_D f(x,y) dx dy = 1,$$

因此

$$\int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} kx dy dx = 1.$$

计算可得 $k = 3$. 由题意可得，

$$Z = \begin{cases} 2Y, & Y \ge 0, \\ 0, & Y < 0. \end{cases}$$

因此,$Z \geq 0$，于是当 $z < 0$ 时, 显然 $f_Z(z) = 0, F_Z(z) = 0$.

当 $z = 0$ 时，$P(Z = 0) = P(Y < 0) = \int_0^1 \int_{x-1}^0 3xdydx = \frac{1}{2}$，因此 $F_Z(0) = \frac{1}{2}$.

当 $z > 0$ 时,

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(Y < 0) + P(0 \leq Z \leq z)$$

因为当 $Y \geq 0$ 时，$Z = 2Y$，因此

$$\begin{aligned} P(0 \leq Z \leq z) &= P\left(0 \leq Y \leq \frac{z}{2}\right) \\ &= \int_0^{\frac{z}{2}} \int_0^{1-y} 3xdxdy \\ &= \frac{1}{2}[1 - (1 - \frac{z}{2})^3] \end{aligned}$$

因此 $F_Z(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[1 - (1 - \frac{z}{2})^3] = 1 - \frac{1}{2}(1 - \frac{z}{2})^3$.

对于 $z \geq 0$，有 $F_Z(z) = 1$.

综上所述, Z 的分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{1}{2}, & z = 0, \\ 1 - \frac{1}{2}(1 - \frac{z}{2})^3, & 0 < z < 2, \\ 1, & z \geq 2. \end{cases}$$