

11 月 14 日作业

韩岳成 524531910029

2025 年 11 月 17 日

题目 1. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求 $E(X)$, $E(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, $\text{cov}(X, Y)$, ρ_{XY} 及 (X, Y) 的协方差矩阵 C .

解答.

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x e^{-(x+y)} dx dy = \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 1.$$

同理 $E(Y) = 1$.

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-(x+y)} dx dy = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 2.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - 1 = 1.$$

同理 $D(Y) = 1$.

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} xy e^{-(x+y)} dx dy - 1 = 1 - 1 = 0.$$

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{0}{\sqrt{1 \cdot 1}} = 0.$$

$$C = \begin{pmatrix} D(X) & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(X, Y) & D(Y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

题目 2. 设二维随机变量 (X, Y) 的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, 令 $U = X - 2Y, V = 2X - Y$, 求 ρ_{UV} .

解答. 由协方差矩阵可知 $D(X) = 1, D(Y) = 5, \text{cov}(X, Y) = 2$. 先计算 $D(U), D(V), \text{cov}(U, V)$:

$$D(U) = D(X - 2Y) = D(X) + 4D(Y) - 4\text{cov}(X, Y) = 13.$$

$$D(V) = D(2X - Y) = 4D(X) + D(Y) - 4\text{cov}(X, Y) = 1.$$

$$\text{cov}(U, V) = \text{cov}(X - 2Y, 2X - Y) = 2D(X) - 5\text{cov}(X, Y) + 2D(Y) = 2.$$

因此

$$\rho_{UV} = \frac{\text{cov}(U, V)}{\sqrt{D(U)D(V)}} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

题目 3. 设 $\{X_n\}$ ($n \geq 1$) 为相互独立的随机变量序列, 且其分布律为

X_n	$-\sqrt{\ln n}$	$\sqrt{\ln n}$
P	0.5	0.5

其中 $n = 1, 2, \dots$, 证明 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

解答. 由于 $E(X_n) = 0, D(X_n) = (\sqrt{\ln n})^2 = \ln n$,

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = 0,$$

由 $\{X_n\}(n \geq 1)$ 为相互独立的随机变量序列, 得

$$D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \ln i \leq \frac{\ln n}{n},$$

则对 $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$1 \geq P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{D \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{\ln n}{n\varepsilon^2},$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \right| < \varepsilon \right) = 1,$$

所以 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

题目 4. 设 $\{X_n\} (n \geq 1)$ 为独立同分布的随机变量序列, 且 $X_n \sim U(a, b)$, $f(x)$ 是 (a, b) 上的连续函数, 证明当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)$ 依概率收敛于 $\int_a^b f(x)dx$.

解答. 由于 $X_n \sim U(a, b)$, 则 $E(X_n) = \frac{a+b}{2}$, $D(X_n) = \frac{(b-a)^2}{12}$. 由 $f(x)$ 在 (a, b) 上连续, 故 $f(X_n)$ 也是独立同分布的随机变量序列, 且

$$E(f(X_n)) = \int_a^b f(x) \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

$$D(f(X_n)) = \int_a^b f^2(x) \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right)^2 < +\infty.$$

由大数定律可知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) - E(f(X_i)) \right| < \varepsilon \right) = 1,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon \right) = 1,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i) - \int_a^b f(x) dx \right| < (b-a)\varepsilon \right) = 1,$$

因此当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(X_i)$ 依概率收敛于 $\int_a^b f(x)dx$.

题目 5. 设随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 服从方差有限的同一分布, 且当 $|j - i| \geq 2$ 时, X_j 与 X_i 相互独立, 证明 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| < \varepsilon \right) = 1,$$

其中 $\mu = E(X_i), D(X_i) = \sigma^2 < +\infty, i = 1, 2, \dots$

解答. 由于 $D(X_i) = \sigma^2 < +\infty$, 则

$$E \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu.$$

由 X_j 与 X_i 相互独立当 $|j - i| \geq 2$ 可知

$$D \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{i=1}^n D(X_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \text{cov}(X_i, X_{i+1}) \right] \leq \frac{1}{n^2} [n\sigma^2 + 2(n-1)\sigma^2] = \frac{3\sigma^2}{n}.$$

因此, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 有

$$1 \geq P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| < \varepsilon \right) \geq 1 - \frac{D \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{3\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| < \varepsilon \right) = 1,$$

即证.

题目 6. 设随机变量 X, Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, $P(Y = -1) = p, P(Y = 1) = 1 - p (0 < p < 1)$, 令 $Z = XY$

- (1) 求 Z 的概率密度.
- (2) p 为何值时, X 与 Z 不相关?
- (3) X 与 Z 否相互独立, 请给出理由.

解答. 由 X 服从参数为 1 的指数分布, 则 X 的概率密度为 $f_X(x) = e^{-x}, x > 0$.

(1) 由 Y 的分布可知, Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \begin{cases} pe^z, & z < 0, \\ (1-p)e^{-z}, & z > 0, \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

(2) 由 $E(X) = 1, D(X) = 1$, 且 X 和 Y 相互独立, 则

$$E(Z) = E(XY) = E(X)E(Y) = 1 \cdot (1-2p) = 1-2p.$$

$$E(X^2) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = 2.$$

则

$$\text{cov}(X, Z) = E(XZ) - E(X)E(Z) = E(X^2)E(Y) - E(X)E(Z) = 2(1-2p) - 1(1-2p) = 1-2p.$$

当 $\text{cov}(X, Z) = 0$ 时, $1-2p = 0$, 即 $p = \frac{1}{2}$ 时, X 与 Z 不相关.

(3)

取区间事件

$$A = [1, 1.01], \quad B = [1, 1.01].$$

由于 $Z = XY$, 当 $Z > 0$ 时必有 $Y = 1$, 因此事件

$$\{X \in A, Z \in B\} = \{X \in [1, 1.01], Y = 1\}.$$

于是

$$P(X \in A, Z \in B) = P(Y = 1) P(X \in [1, 1.01]) = (1-p)(e^{-1} - e^{-1.01}).$$

另一方面,

$$P(X \in A) = e^{-1} - e^{-1.01}.$$

由于当 $z > 0$ 时 Z 的密度为 $f_Z(z) = (1-p)e^{-z}$, 因此

$$P(Z \in B) = \int_1^{1.01} (1-p)e^{-z} dz = (1-p)(e^{-1} - e^{-1.01}).$$

于是

$$P(X \in A)P(Z \in B) = (e^{-1} - e^{-1.01}) \cdot (1-p)(e^{-1} - e^{-1.01}) = (1-p)(e^{-1} - e^{-1.01})^2.$$

显然有

$$P(X \in A, Z \in B) \neq P(X \in A)P(Z \in B),$$

说明 X 与 Z 不独立。

题目 7. 随机变量 X, Y 的一阶矩二阶矩均存在, 证明 $(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$, 并讨论等号成立的条件。

解答. 考虑随机变量 $X - tY$, 则

$$E[(X - tY)^2] = E(X^2) - 2tE(XY) + t^2E(Y^2) \geq 0.$$

上式为关于 t 的二次函数, 其判别式应小于等于零, 即

$$\Delta = (-2E(XY))^2 - 4E(X^2)E(Y^2) \leq 0,$$

整理得

$$(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$$

当且仅当存在实数 t 使得 $P(X - tY = 0) = 1$ 时, 等号成立。