10 月 15 日作业

韩岳成 524531910029

2025 年 10 月 19 日

题目 1. 设 $Y_0 = 28$，按递推公式

$$Y_n = Y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

计算到 Y_{100}，若取 $\sqrt{783} \approx 27.982$（五位有效数字），试问计算 Y_{100} 将有多大误差。

解答. 由递推公式 $Y_n = Y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783}$ 得到 $\{Y_n\}$ 为等差数列.

$$Y_n = Y_0 - n \cdot \frac{1}{100}\sqrt{783} \quad \Rightarrow \quad Y_{100} = Y_0 - 100 \cdot \frac{1}{100}\sqrt{783} = 28 - \sqrt{783}$$

若取 $\sqrt{783} \approx 27.982$，则 $Y_{100} = 28 - 27.982$. 由于将 $\sqrt{783}$ 保留五位有效数字得到 27.982，则由有效数字的定义其绝对误差不超过 $\frac{1}{2} \times 10^{-3}$，即 $|\sqrt{783} - 27.982| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$，设取近似值后得到的 Y_{100} 为 Y_{100}^*，则

$$|Y_{100} - Y_{100}^*| = |\sqrt{783} - 27.982| < \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

将 $\sqrt{783}$ 的精确值代入计算，得

$$|Y_{100} - Y_{100}^*| \approx 1.37 \times 10^{-4} < 5 \times 10^{-4} = \frac{1}{2} \times 10^{-3}$$

题目 2. 计算 $(\sqrt{2}-1)^6$, 取$\sqrt{2}\approx 1.4$, 利用下式计算, 哪一个得到的结果最好?

$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6},\quad (3-2\sqrt{2})^3,\quad \frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3},\quad 99-70\sqrt{2}.$$

解答. 设 $f(x)=(x-1)^6$，$f^*(x)$ 为我们选取的估计函数
$x=\sqrt{2}, x^*=1.4, \epsilon=|x-x^*|=|\sqrt{2}-1.4|<\frac{1}{2}\times 10^{-1}$.

则根据柯西中值定理，存在 ξ 介于 x 与 x^* 之间，使得

$$|f(x^*)-f^*(x^*)|=|f^{*\prime}(\xi)||x-x^*|.$$

我们可以估计 $\xi\approx x^*=1.4$，则

$$|f(x^*)-f^*(x^*)|=|f^{*\prime}(x^*)|\epsilon$$

对于 $f_1^*(x)=\frac{1}{(x+1)^6}$,

$$|f_1(x^*)-f^*(x^*)|=|f_1^{*\prime}(x^*)|\epsilon=\frac{6}{(x^*+1)^7}\epsilon=\frac{6}{(1.4+1)^7}\times\epsilon\approx 1.3\times 10^{-2}\epsilon.$$

对于 $f_2^*(x)=(3-2x)^3$,

$$|f_2(x^*)-f^*(x^*)|=|f_2^{*\prime}(x^*)|\epsilon=6(3-2x^*)^2\epsilon=6(3-2\times 1.4)^2\epsilon=0.72\epsilon.$$

对于 $f_3^*(x)=\frac{1}{(3+2x)^3}$,

$$|f_3(x^*)-f^*(x^*)|=|f_3^{*\prime}(x^*)|\epsilon=\frac{6}{(3+2x^*)^4}\epsilon=\frac{6}{(3+2\times 1.4)^4}\times\epsilon\approx 2.66\times 10^{-3}\epsilon.$$

对于 $f_4^*(x)=99-70x$,

$$|f_4(x^*)-f^*(x^*)|=|f_4^{*\prime}(x^*)|\epsilon=70\epsilon.$$

我们可以判断出利用 $\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$ 得到的结果误差最小.

我们使用真实值（更精确的 $\sqrt{2}=1.4142135623$）计算得

$$x=(\sqrt{2}-1)^6\approx 5.050633883\times 10^{-3}$$

若取 $\sqrt{2}\approx 1.4$，则:

$$x_1^*=\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}\approx\frac{1}{(1.4+1)^6}\approx 5.232780886\times 10^{-3},\quad |x-x_1^*|\approx 1.82147\times 10^{-4}$$

$$x_2^*=(3-2\sqrt{2})^3\approx(3-2\times 1.4)^3=0.008,\quad |x-x_2^*|\approx 2.94937\times 10^{-3}$$

$$x_3^*=\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}\approx\frac{1}{(3+2\times 1.4)^3}\approx 5.125261388\times 10^{-3},\quad |x-x_3^*|\approx 7.46275\times 10^{-5}$$

$$x_4^*=99-70\sqrt{2}\approx 99-70\times 1.4=1,\quad |x-x_4^*|\approx 0.994949$$

因此，利用 $\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$ 得到的结果最好.

题目 3. 3. 给出 $f(x)=\ln x$ 的数值表（见表 2.9），用线性插值及二次插值计算 $\ln 0.54$ 的近似值。

x	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\ln x$	-0.916291	-0.693147	-0.510826	-0.357765	-0.223144

解答. (1) 线性插值：利用 (10.5, -0.693147) 和 (10.6, -0.510826)

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=\frac{x-0.6}{0.5-0.6}=6-10x$$

$$l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{x-0.5}{0.6-0.5}=10x-5$$

$$y=(-0.693147)\times(6-10x)+(-0.510826)\times(10x-5)$$

将 $x=0.54$ 代入得 $\ln(0.54)\approx -0.620219$

(2) 二次插值:利用 (0.4, -0.916291), (10.5, -0.693147) 和 (10.6, -0.510826)

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-0.5)(x-0.6)}{0.02}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-0.4)(x-0.6)}{-0.01}$$
$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-0.4)(x-0.5)}{0.02}$$
$$y = (-0.916291)l_0(x) + (-0.693147)l_1(x) + (-0.510826)l_2(x)$$

将 $x = 0.54$ 代入得 $\ln(0.54) \approx -0.615320$

题目 4. 设 $x_k = x_0 + kh, k = 0, 1, 2, 3$, 求 $\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_3} |l_2(x)|$.

解答.

$$f_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{2h \cdot h \cdot (-h)}$$

$$\therefore x_0 \leqslant x \leqslant x_3 \therefore x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + 3h$$

设 $x = nh + x_0, n \in [0, 3]$

$$\therefore f_2(x) = \frac{nh \cdot (n-1)h \cdot (n-3)h}{2h \cdot h \cdot (-h)} = -\frac{n(n-1)(n-3)}{2}$$

$$\Rightarrow |f_2(x)| = \frac{1}{2}|n(n-1)(n-3)|$$

设

$$f(x) = x(x-1)(x-3), x \in [0, 3]$$

求导解得在 $x \in [0, 3]$ 内,

$$f(x)_{max} = f(\frac{4-\sqrt{7}}{3}) = \frac{-20+14\sqrt{7}}{27}$$
$$f(x)_{min} = f(\frac{4+\sqrt{7}}{3}) = \frac{-20-14\sqrt{7}}{27}$$

$|f(x)_{min}| > |f(x)_{max}|$ 因此

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_3} |l_2(x)| = \frac{1}{2}|\frac{-20-14\sqrt{7}}{27}| = \frac{10+7\sqrt{7}}{27}$$