11 月 12 日作业

韩岳成 524531910029

2025 年 11 月 12 日

题目 1. 求 $f(x)=e^x$ 在 $[0,1]$ 上的一次最佳一致逼近多项式。

解答.

$$c_1=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=e-1$$

令 $f'(t_2)=c_1$, 则 $e^{t_2}=e-1$, 解得 $t_2=\ln(e-1)$. 因此

$$p_1(x)=\frac{f(0)+f(t_2)}{2}+c_1(x-\frac{0+t_2}{2})=\frac{e}{2}+(e-1)(x-\frac{\ln(e-1)}{2})$$

题目 2. 设 $f(x)=x^4+3x^3-1$, 在 $[0,1]$ 上求三次最佳一致逼近多项式。

解答. 所求的三次最佳一致逼近多项式应满足

$$\max_{0\le x\le 1}(f(x)-p_3^*(x))=\inf_{p_3\in H_3}\max_{0\le x\le 1}|f(x)-p_3(x)|$$

令

$$x=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}, t\in[-1,1]$$

则

$$f(x)=f(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2})=\frac{1}{16}t^4+\frac{5}{8}t^3+\frac{3}{2}t^2+\frac{11}{8}t-\frac{9}{16}$$

根据 Chebyshev 首一多项式 $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(t)$ 与零的偏差最小的定理可得，当

$$f(x) - p_3^*(t) = \frac{1}{16 \times 2^3} T_4(t) = \frac{1}{128}(8t^4 - 8t^2 + 1)$$

时，$p_3^*(t)$ 为所求的三次最佳一致逼近多项式。解得

$$p_3^*(t) = \frac{5}{8}t^3 + \frac{25}{16}t^2 + \frac{11}{8}t - \frac{73}{128}$$

将 t 换回 x，得

$$p_3^*(x) = 5x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{129}{128}$$

题目 3. $f(x) = |x|$ 在 [-1,1] 上, 求在 $\varphi_1 = \mathrm{span}\langle 1, x^2, x^4 \rangle$ 上的最佳平方逼近.

解答. 设所求的最佳平方逼近多项式为

$$p(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4$$

则

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1}(|x| - p(x))\mathrm{d}x = 0 \\ \int_{-1}^{1}(|x| - p(x))x^2\mathrm{d}x = 0 \\ \int_{-1}^{1}(|x| - p(x))x^4\mathrm{d}x = 0 \end{cases}$$

计算必要的矩:

$$\int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x = 1, \quad \int_{-1}^{1}|x|x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \quad \int_{-1}^{1}|x|x^4\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$$

再计算基函数的内积:

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\mathrm{d}x = 2, \quad \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3}, \quad \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^4\mathrm{d}x = \frac{2}{5}$$

$$\int_{-1}^{1} x^2 \cdot x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{5}, \quad \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x^4\mathrm{d}x = \frac{2}{7}, \quad \int_{-1}^{1} x^4 \cdot x^4\mathrm{d}x = \frac{2}{9}$$

代入上式，得方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{7} & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_2 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

解得

$$a_0 = \frac{15}{128}, \quad a_2 = \frac{105}{64}, \quad a_4 = -\frac{105}{128}$$

因此所求的最佳平方逼近多项式为

$$p(x) = \frac{15}{128} + \frac{105}{64}x^2 - \frac{105}{128}x^4$$