1. Leistungsnachweis zur Numerischen Mathematik 1

Prof. Dr. Rainer Fischer

WS 2013/14

Aufgabe 1. Gegeben sind die folgenden Datenpunkte, die (näherungsweise) auf der Funktion $f(x) = 1/(1 + 25 * x^2)$ liegen:

t	-1	-0.75	-0.5	-0.25	0	0.25	0.5	0.75	1
g	0.0385	0.0664	0.1379	0.3902	1.0000	0.3902	0.1379	0.0664	0.0385

(a) Schreiben Sie zunächst eine Matlab-Funktion *myspline*, der man zwei Vektoren übergibt (einen mit den x- und einen mit den y-Werten der Datenpunkte) und die daraus mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems alle Parameter der natürlichen kubischen Spline-Funktion $s(x)$ berechnet und zurückgibt.

(b) Schreiben Sie ein m-File *testspline*, in dem Sie *myspline* mit obigen Daten testen und dabei $s(x)$ an ausreichend vielen Stellen auswerten und zusammen mit der Funktion $f(x)$ im Intervall $[-1, 1]$ plotten.

(c) Verwenden Sie nun die in Matlab vorhandene Funktion *spline* (die Not-a-knot Splines benutzt) und plotten Sie auch diese Näherung.

(d) Stellen Sie mit Hilfe von *vander* das Interpolationspolynom für obigen Datensatz auf, plotten Sie es und begründen Sie die Unterschiede zu den Splines.

(e) Schreiben Sie eine Funktion *mycheby*, die für eine gegebene Zahl n die n Chebyshev-Stützstellen im Intervall $[-1, 1]$ sowie die Funktionswerte von $f(x)$ und $g(x) = |x|$ an diesen Stellen bestimmt.

(f) Bestimmen Sie für $n = 21$ Interpolationspolynom (mit *polyfit*) und Spline-Funktion (mit *spline*) für f und g. Was sagt die Abschätzungsformel für den Fehler der Polynominterpolation bei $g(x)$ aus?

Aufgabe 2. Betrachten Sie die aus der Vorlesung bekannte Näherungsformel für die 1. Ableitung

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2 \cdot h} \tag{1}$$

sowie die Formeln

$$f'(x_0) \approx \frac{2 \cdot f(x_0 + h) - f(x_0) - f(x_0 - 2 \cdot h)}{4 \cdot h} \tag{2}$$

und

$$f'(x_0) \approx \frac{-f(x_0 + 2h) + 8 \cdot f(x_0 + h) - 8 \cdot f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h)}{12h} \tag{3}$$

(a) Schreiben Sie ein Matlab-Skript *Ableitung.m*, das für die Funktion $f(x) = e^x$ bei $x_0 = 0$ für $h = 10^{-1}, 10^{-2}, \ldots, 10^{-10}$ alle drei Näherungswerte für die erste Ableitung bestimmt und jeweils in einem Vektor abspeichert.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von Teil a) für alle Näherungswerte den absoluten Fehler und stellen Sie ihn für alle drei Formeln, abhängig von h, in einem doppelt logarithmischen Plot dar.

(c) Schließen Sie aus den Ergebnissen auf die Ordnung des Verfahrensfehlers der drei Methoden. Begründen Sie mit Hilfe der Plots, in welchen Fällen Sie eher Formel (1) und bei welchen Problemen eher Formel (3) verwenden würden.

(d) Bestimmen Sie von Hand durch Taylorreihenentwicklung die Ordnung von (2).

(e) **Optional für Zusatzpunkte:** Entwickeln Sie eine Näherungsformel zweiter Ordnung (d. h. mit einem Verfahrensfehler $O(h^2)$), die nur $f(x)$, $f(x-h)$ und $f(x+3h)$ benutzt.

(Tipp: Beginnen Sie mit dem Ansatz $f'(x) = \dfrac{a \cdot f(x+3h) + b \cdot f(x) + c \cdot f(x-h)}{d \cdot h}$)

Warum erhält man mit diesem Ansatz kein Verfahren der Ordnung 3 ?

Hinweise:

- Spätester Abgabetermin für diesen Leistungsnachweis ist Montag, der **18. November 2012** um 23.55 Uhr.
- Laden Sie dazu Ihre lauffähigen und kommentierten m-Files sowie eine separate Datei (Word, PDF, etc.) mit Erklärungen, Bewertungen und Plots in Moodle hoch.
- Die Abgabe ist in 2er-Gruppen möglich. Bitte schreiben Sie in jeder hochgeladenen Datei **beide** Namen als Kommentar dazu, damit eine eindeutige Zuordnung möglich ist.