2. Leistungsnachweis zur Numerischen Mathematik 1

Prof. Dr. Rainer Fischer

WS 2013/14

AUFGABE 1. (ca.12 Punkte) Für das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{10^{-6} + x^2}$$

ist der exakte Wert $2000 \cdot \arctan(1000) \approx 3139.59265425646$

(a) Schreiben Sie ein Matlab-Skript *Nadelimpuls.m*, in dem Sie für $i = 0, 1, 2, \ldots, 15$ die zusammengesetzte 3/8-Regel auf $[-1, 1]$ mit $h_i = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i$ anwenden. Testen Sie Ihr Skript mit obiger Funktion und bestimmen Sie dabei zu jeder Summe auch den relativen Fehler.

(b) Implementieren Sie nun ein adaptives Verfahren auf Basis der 3/8-Regel in einer Matlab-Funktion *AdaptQuad*, der Sie eine Funktion f, eine Toleranz TOL sowie die Intervallgrenzen übergeben. Die Funktion soll den Integralwert sowie die Anzahl an Funktionsaufrufen zurückgeben.
Versuchen Sie dabei, die Anzahl an Funktionsaufrufen so gering wie möglich zu halten und vergleichen Sie die Anzahl mit Teilaufgabe a).

(c) Testen Sie *AdaptQuad* sowie die Matlab-Funktionen *quad*, *quadgk* und *quadl* für die Nadelimpuls-Funktion, vergleichen Sie die erzielte Genauigkeit sowie bei *AdaptQuad*, *quad* und *quadgk* die Anzahl der Funktionsaufrufe.

AUFGABE 2. (ca. 7 Punkte)

(a) Bestimmen Sie von Hand für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 24 & 0 \\ -1 & 2 & 16 & 12 \\ 4 & 8 & 16 & 8 \\ 2 & 12 & 48 & 28 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Matrizen P, L und U in $P \cdot A = L \cdot U$ mit Spaltenpivotsuche und lösen Sie damit für die Matrix A und die rechte Seite $b = (2, 5, 4, 10)^T$ das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

(b) Gelöst werden sollen nun Gleichungssysteme mit quadratischen Matrizen der Größe n vom Typ B (d. h. mit 1 auf der Hautdiagonalen und in der letzten Spalte sowie -1 unterhalb der Hauptdiagonale) und rechter Seite $b = (2, 1, 0, \ldots, 5 - n, 4 - n, 2 - n)^T$. Würden Sie für größeres n eher eine LU-Zerlegung mit Spaltenpivotsuche oder eine QR-Zerlegung durchführen. Begründen Sie Ihre Antwort.

AUFGABE 3. (ca. 11 Punkte) Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ soll für eine obere Hessenberg-Matrix A (d. h. mit $a_{ij} = 0$ für $i - 1 > j$) mit Hilfe der QR-Zerlegung gelöst werden.

(a) Bestimmen Sie für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & -8 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

von Hand mit Hilfe der Givens-Rotationen die Matrix R und die Einträge, die unterhalb der Diagonalengespeichert werden und Q ausdrücken.

(b) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion *QRHessenberg(A,b)*, die eine gegebene Hessenberg-Matrix A mit Hilfe von Givens-Rotationen auf obere Dreiecksform bringt und dann das Gleichungssystem löst. Berechnen Sie dabei Q nicht explizit, sondern speichern Sie die benötigte Information in einem Vektor s. Wenn A nicht Hessenberg-Struktur hat, soll ein Fehler zurückgegeben werden.

(c) Betrachten Sie nun eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 9 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

die im unteren Dreieck nur Nullen hat mit Ausnahme der 1. Spalte. Benötigt hier die QR-Zerlegung in etwa genauso viele Rechenoperationen wie bei einer Hessenberg-Matrix der gleichen Größe oder signifikant mehr? Beschreiben Sie kurz eine effiziente Lösungsstrategie für ein solches Gleichungssystem.

Hinweise:

- Spätester Abgabetermin für diesen Leistungsnachweis ist Montag, der **16. Dezember 2013** um 23.55 Uhr.
- Laden Sie dazu einmal pro Gruppe Ihre lauffähigen und kommentierten m-Files sowie eine separate Datei (Word, PDF, etc.) mit Erklärungen, Bewertungen und Plots in Moodle hoch.
- Die Abgabe ist in 2er-Gruppen möglich. Bitte schreiben Sie in der separaten Datei **beide** Namen dazu, damit eine eindeutige Zuordnung möglich ist.