Задачи. Алгебра

(SE, test, 2021) Найдите значение λ при котором вектор $b = (7, -2, \lambda)$ линейно выражается через векторы $(2, 3, 5)$, $(3, 7, 8)$, $(1, -6, 1)$.

◀ Если вектор b линейно выражается через указанные вектора, то имеет место система уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 7, \\ 3x + 7y - 6z = -2, \\ 5x + 8y + z = \lambda, \end{cases}$$

которая эквивалентна следующей системе

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 7, \\ y - 3z = -5, \\ 0 = \lambda - 15. \end{cases} \tag{1}$$

Система (1), очевидно, имеет решение только при $\lambda = 15$.

Замечание. Все векторы из условия лежат в одной плоскости с уравнением $11x + y - 5z = 0$, поэтому вектор b может быть выражен через них только при условии, что он лежит в этой плоскости, то есть $11 \cdot 7 + 1 \cdot (-2) - 5 \cdot \lambda = 0$. Откуда $\lambda = 15$. ▶

(SE, test, 2021) При каком максимальном значении λ следующее уравнение имеет решение $\vec{x} \neq \vec{0}$?

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} = \lambda \vec{x}.$$

◀ Данное уравнение равносильно следующей системе уравнений

$$\begin{cases} (2 - \lambda)x - y + 2z = 0 \\ 5x - (3 + \lambda)y + 3z = 0 \\ -x + 0 - (2 + \lambda)z = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Она имеет решение только при условии, что определитель матрицы системы равен нулю. Вычисляем определитель матрицы (как мы бы это делали для собственных чисел), получаем $-(\lambda + 1)^3 = 0$. Таким образом, система имеет ненулевое решение только при $\lambda = -1$. ▶

(SE, test, 2020) См. задачу 3.

(SE, test, 2019) Решите в натуральных числах уравнение: $2^n + 1 = k^2$.

◀ Перепишем уравнение в виде $2^n = k^2 - 1$, далее распишем правую часть как разность квадратов

$$2^n = (k-1)(k+1).$$

1) $k-1, k+1$ — степени двойки. Пусть $k-1 = 2^l$, $k+1 = 2^{l+m}$, тогда $2 = (k+1)-(k-1) = 2^{l+m} - 2^l = 2^l(2^m - 1)$. Следовательно 2^l делится на 2, значит $l \geq 1$. Разделим обе части на 2, получим

$$1 = 2^{l-1}(2^m - 1).$$

Таким образом, $2^{l-1} = 1$, $2^m - 1 = 1$, а значит $l = 1$, $m = 1$. Тогда $k - 1 = 2$, $k + 1 = 2^2 = 4$, $\mathbf{k} = \mathbf{3}$, $\mathbf{n} = \mathbf{3}$.

2) Пусть $1 - k = 2^{l+m}$, $-k - 1 = 2^l$, тогда $2^l(2^m - 1) = 1$. Получаем $l = 1$, $m = 1$,но уже $1-k = 4$, $-k-1 = 2$. Таким образом, $\mathbf{n} = \mathbf{3}$, $\mathbf{k} = -\mathbf{3}$. ▶

(SE, test, 2019) Решите уравнение:

$$\begin{vmatrix} 4 & x & x \\ x & 4 & x \\ x & x & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

(SE, test, 2019. ВШЭ, ML, 2021) В разложении многочлена $(1+2x^2-3x^4)^{10}$ найдите коэффициент при x^8. ◀ Распишем исходное выражение

$$(1+2x^2-3x^4)^{10} = (1+2x^2-3x^4)\cdot(1+2x^2-3x^4)\cdot\ldots\cdot(1+2x^2-3x^4).$$

Коэффициент перед x^8 есть сумма всех слагаемых, в которых переменная x возведена в степень 8. Получить восьмую степень x в данном выражении можно только следующими способами: $x^4 \cdot x^4$, $x^4 \cdot x^2 \cdot x^2$, $x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2$. Первый вариант слагаемых можно получить, выбрав две скобки и взяв из них x^4. Всего таких вариантов C_{10}^2. Коэффициент перед такими слагаемыми $-3 \cdot (-3) = 9$.

Получить слагаемые второго вида можно, выбрав одну скобку с x^4 и две скобки с x^2. Вариантов такого выбора $C_{10}^1 \cdot C_9^2$. Коэффициент: $-3 \cdot 2 \cdot 2 = -12$.

Слагаемых третьего варианта C_{10}^4 штук. Коэффициент: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Складываем все

$$9C_{10}^2 + (-12)C_{10}^1 C_9^2 + 16C_{10}^4 = -555 \blacktriangleright$$

(ВШЭ, ML, 2020) Приведите пример линейного оператора, матрица которого не является диагональной ни в каком базисе.

(ВШЭ, ML, 2021) Напишите программу, которая получает на вход натуральное число N и выводит максимальное K, такое что N делится на p^K, где p — простое число.

(ВШЭ, ML, 2021) Напишите программу, которая получает на вход три целых числа A, B и C и выводит целые корни уравнения

$$Ax + By = C.$$

Если решений нет, то необходимо вывести “No roots”.

(ВШЭ, ML,2022) Разложить вектор $v = (1, 1, 1)$ по базису из трех векторов: $a = (1, 3, 5), b = (2, 4, -6), c = (3, 6, 0)$.

$\blacktriangleleft$ Необходимо найти коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ такие, что

$$x = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = \lambda_1(1, 3, 5) + \lambda_2(2, 4, -6) + \lambda_3(3, 6, 0).$$

Составим систему уравнений и решим ее методом Гаусса:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 1, \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 + 6\lambda_3 = 1, \\ 5\lambda_1 - 6\lambda_2 = 1. \end{cases}$$

Получаем, что $v = -a - b + \frac{4}{3}z$. $\blacktriangleright$

(ВШЭ, PROG, 2020) Пусть $a, b \in \mathbb{Z}$. Доказать, что $19a + 9b$ делится на 7 тогда и только тогда, когда $a - b$ делится на 7.

◀ $19a+9b = 19a+14b-5b = 14a+5a+14b-5b = 14(a+b)+5(a-b)$. Если $a-b$ делится на 7, то очевидно, что обе части делятся на 7, значит их сумма делится на 7.

Если $a-b$ не делится на 7, то и $5(a-b)$ не делится на 7, а значит и вся сумма не делится на 7. ▶

(ВШЭ, СКН) Заполните третий столбец матрицы

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & x \\ -2 & 2 & y \\ -1 & -2 & z \end{pmatrix}$$

если известно, что это матрица ортогональной проекции на некоторую плоскость.

(ВШЭ, СКН) Существует ли скалярное произведение на пространстве матриц $n \times n$ $(n > 1)$, относительно которого матрица из всех единиц была бы ортогональна любой верхнетреугольной матрице?

(ВШЭ, НОД. 2022) См. задачу 3.

(ВШЭ, НОД. 2022) См. задачу 4.

(ВШЭ, НОД. 2021) См. задачу 4.

(ВШЭ, НОД. 2019) См. задачу 1.

(ВШЭ, НОД. 2019) См. задачу 3.

(ВШЭ, НОД. 2019) См. задачу 8.