

## Вопросы. Математический анализ.

**1. (НОД-МСК)** Числовые множества. Грани множеств. Множества в конечномерном действительном пространстве. Соответствие множеств. Счетные и несчетные множества.

---

**Определение:** Наименьшее из чисел, ограничивающих множество  $X \subset \mathbb{R}$  сверху, называется *верхней гранью* и обозначается  $\sup X$ . Или

$$(s = \sup X) := \forall x \in X((x \leq s) \wedge (\forall s' < s \exists x' \in X(s' < x'))).$$

**Определение:** *Соответствием* между множествами  $A$  и  $B$  называют произвольное подмножество декартова произведения

$$F \subset A \times B.$$

**Определение:** *Отображением* из множества  $A$  в множество  $B$  называется однозначное соответствие между  $A$  и  $B$ , т.е. такое соответствие, что для любого элемента из  $A$  найдется ровно один элемент из  $B$ .

Для отображения используют запись:  $F : A \rightarrow B$ , для отдельных элементов  $b = F(a)$ . Отображения также называют *функциями*.

**Определение:** Множество  $X$  называется *счетным*, если оно равномощно множеству  $\mathbb{N}$  натуральных чисел, т.е.  $|X| = |\mathbb{N}|$ .

**Определение:** Множество  $X$  равномощно множеству  $Y$ , если существует биективное отображение  $X$  на  $Y$ .

Про отображение  $F : X \rightarrow Y$  говорят, что оно

*сюръективно*, если  $F(X) = Y$ ;

*инъективно*, если  $\forall x_1, x_2 \in X (F(x_1) = F(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$ ;

*биективно* (или взаимно однозначно), если оно сюръективно и инъективно одновременно.

**Определение:** *Несчетное* множество — бесконечное множество, не являющееся счетным. Множество  $\mathbb{R}$  действительных чисел называют *числовым континуумом*, а его мощность — *мощностью континуума*.

**Теорема (Кантор).** Бесконечное множество  $\mathbb{R}$  имеет мощность большую, чем бесконечное множество  $\mathbb{N}$ .

◀ Докажем, что отрезок  $[0, 1]$  больше  $\mathbb{N}$ . Пусть точки отрезка можно занумеровать  $x_1, \dots, x_n, \dots$ . Тогда построим отрезок  $I_1$ , не содержащий точку  $x_1$ . Внутри него построим отрезок  $I_2$ , не содержащий  $x_2$ , и т. д. Получим последовательность вложенных отрезков, которая по лемме о

вложенных отрезках содержит точку  $c$ . Точка  $c$  по построению не совпадает ни с какой точкой последовательности  $x_1, \dots, x_n, \dots$  ►

**Условимся** через  $\mathbb{R}^m$  обозначать множество всех упорядоченных наборов  $(x^1, \dots, x^m)$ , состоящих из  $m$  действительных чисел  $x^i \in \mathbb{R}$ .

**Определение:** Метрикой или расстоянием назовем функцию

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

определенную на парах  $(x_1, x_2)$  точек некоторого множества  $X$  и обладающую следующими свойствами:

1.  $d(x_1, x_2) \geq 0$ ;
2.  $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ ;
3.  $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$ ;
4.  $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ .

Множество  $X$  вместе с фиксированной функцией  $d$  называют *метрическим пространством*.

Пример метрики  $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_1^i - x_2^i)^2}.$$

**Определение:** При  $\delta > 0$  множество

$$B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(a, x) < \delta\}$$

называется *шаром* с центром  $a \in \mathbb{R}^m$  радиуса  $\delta$  или  $\delta$ -*окрестностью* точки  $a \in \mathbb{R}^m$ .

**Определение:** Множество  $G \in \mathbb{R}^m$  называется *открытым* если для любой точки  $x \in G$  существует шар  $B(x, \delta)$  такой, что  $B(x, \delta) \subset G$ . Например, шар  $B(a, r)$  — открытое множество в  $\mathbb{R}^m$ .

**Определение:** Множество  $F \in \mathbb{R}^m$  называется *замкнутым*, если его дополнение  $G = \mathbb{R}^m \setminus F$  является открытым. Пример: *сфера*  $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(x, a) = r\}$ ,  $r \geq 0$ .

**Определение:** Открытое в  $\mathbb{R}^m$  множество, содержащее некоторую точку, называется *окрестностью* данной точки в  $\mathbb{R}^m$ .

**Определение:** Точка  $x \in \mathbb{R}^m$  по отношению к множеству  $E \in \mathbb{R}^m$  называется

*внутренней точкой*  $E$ , если она содержится в  $E$  вместе с некоторой своей окрестностью;

*внешней точкой*  $E$ , если она является внутренней точкой дополнения к  $E$  в  $\mathbb{R}^m$ .

*граничной точкой*  $E$ , если она не является ни внутренней, ни внешней точкой  $E$ .

**Определение:** Точка  $a \in \mathbb{R}^m$  называется *предельной* точкой множества  $E$ , если для любой окрестности  $O(a)$  точки  $a$  пересечение  $E \cap O(a)$  есть бесконечное множество.

**Определение:** Объединение множества  $E$  и всех его предельных точек из  $\mathbb{R}^m$  называется *замыканием* множества  $E$  в  $\mathbb{R}^m$  (обозначение символом  $\overline{E}$ ).

Пример: Множество  $\overline{B}(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$  есть множество предельных точек для шара  $B(a, r)$ , поэтому  $\overline{B}(a, r)$  — замкнутый шар.

**Определение:** Множество  $K \subset \mathbb{R}^m$  называется *компактом*, если из любого покрытия  $K$  открытыми в  $\mathbb{R}^m$  множествами можно выделить конечное покрытие.

Пример: Обобщением отрезка в  $\mathbb{R}^m$  является множество

$$I = \{x \in \mathbb{R}^m \mid a^i \leq x \leq b^i, i = 1, \dots, m\}.$$

**Утверждение** о том, что  $I$  — компакт, доказывается аналогично лемме о конечном покрытии. Если  $I$  нельзя покрыть конечным набором множеств, то его стороны можно разделить пополам, и хотя бы одну из  $2^m$  частей нельзя покрыть конечным набором открытых множеств. Тогда повторяем для нее эту операцию. Далее, по лемме об общей точке системы вложенных отрезков, существует точка  $s \in I$ , которая принадлежит всем вложенным промежуткам. Тогда ее покрывает некоторое множество  $G$ , но тогда  $G$  покрывает все промежутки, начиная с некоторого номера  $n$ . Противоречие.

**Утверждение:** Если  $K$  — компакт, то  $K$  — замкнутое множество и любое замкнутое множество в  $K$  само является компактом.

**Определение:** Диаметром множества  $E \in \mathbb{R}^m$  называется величина

$$d(E) := \sup_{x_1, x_2 \in E} d(x_1, x_2).$$

**Определение:** Множество  $E \subset \mathbb{R}^m$  называется *ограниченным*, если его диаметр конечен.

**Утверждения:**  $K$  — компакт  $\Rightarrow K$  — ограниченное подмножество  $\mathbb{R}^m$ .  $K$  — компакт  $\Leftrightarrow K$  ограничено и замкнуто.

---

**2. (НОД-МСК, (3 SE))** Числовые последовательности и пределы. Свойства сходящихся последовательностей. Признаки существования предела. Первый и второй замечательные пределы.

---

**Определение:** Функция  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  называется *числовой последовательностью*.

**Определение:** Число  $A \in \mathbb{R}$  называется пределом числовой последовательности  $\{x_n\}$ , если для любой окрестности  $V(A)$  точки  $A$  существует такой номер  $N$ , что все члены последовательности, номера которых больше  $N$  содержатся в указанной окрестности.

Через  $\varepsilon$ :

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A) := \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N (|x_n - A| < \varepsilon).$$

**Свойства предела последовательности.**

**Определение:** Последовательность называется *ограниченной*, если существует число  $M$  такое, что  $|x_n| < M$  для любого  $n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема.** а) Финально постоянная последовательность сходится.

б) Любая окрестность предела последовательности содержит все члены последовательности, за исключением конечного их числа.

в) Последовательность не может иметь двух различных пределов.

г) Сходящаяся последовательность ограничена.

**Предельный переход и арифметические операции.**

**Теорема.** Если  $\{x_n\} \rightarrow A \in \mathbb{R}$ ,  $\{y_n\} \rightarrow B \in \mathbb{R}$ , то

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = A + B$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B$ ;

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$ , если  $y_n \neq 0$ ,  $B \neq 0$ .

**Предельный переход и неравенства.**

**Теорема.** а) Пусть  $\{x_n\} \rightarrow A \in \mathbb{R}$ ,  $\{y_n\} \rightarrow B \in \mathbb{R}$ . Если  $A < B$ , то  $\exists N \in \mathbb{N}$  такой, что при любом  $n > N$  выполнено неравенство  $x_n < y_n$ .

б) Пусть последовательности  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{z_n\}$  таковы, что найдется номер  $N \in \mathbb{N}$  такой, что для всех  $n > N$  выполняются неравенства

$x_n \leq y_n \leq z_n$ . При этом последовательности  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$  сходятся к одному пределу. Тогда и  $\{y_n\}$  сходятся к этому пределу.

### Вопросы существования предела последовательности.

**Определение:** Последовательность называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует  $N \in \mathbb{N}$ , что из  $n, m > N$  следует, что  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ .

**Теорема. Критерий Коши сходимости последовательности.** Последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

◀ ( $\Rightarrow$ )  $|x_n - A| < \varepsilon/2$ ,  $|x_m - A| < \varepsilon/2$ , тогда  $|x_n - x_m| \leq |x_n - A| + |x_m - A| < \varepsilon$ .

( $\Leftarrow$ ) Для некоторого  $N$  имеем

$$x_N - \frac{\varepsilon}{3} < x_k < x_N + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть  $a := \inf x_k$ ,  $b := \sup x_k$ , тогда последовательность вложенных отрезков  $[a_k; b_k]$  имеет общую точку  $A$ . Тогда  $|A - x_k| \leq b_k - a_k$ , но  $x_N - \frac{\varepsilon}{3} \leq a_k$ ,  $x_N + \frac{\varepsilon}{3} \geq b_k$ , значит  $|x_k - A| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$ . ►

**Определение:** Последовательность  $\{x_n\}$  называется *возрастающей*, если  $x_n > x_{n-1}$  для любого  $n$ .  $\{x_n\}$  — *неубывающая* последовательность, если  $x_n \geq x_{n-1}$  для любого  $n$ . *Убывающая* и *невозрастающая* определяются аналогично.

**Теорема (Вейерштрасс).** Для того чтобы неубывающая последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху.

◀ То, что всякая сходящаяся последовательность ограничена было доказано выше. Докажем в обратную сторону. Рассмотрим  $s := \sup x_n$ , который существует в силу того, что множество принимаемых значений ограничено сверху. По определению супремума  $\forall \varepsilon > 0 \exists N x_N > s - \varepsilon$ . Тогда  $\forall n > N s - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq s$ , то есть  $|s - x_n| = s - x_n < \varepsilon$ . ►

### Подпоследовательность и частичный предел.

**Определение:** Если  $x_1, x_2, \dots$  — некоторая последовательность, а  $n_1 < n_2 < \dots$  — возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots$  называется *подпоследовательностью* последовательности  $\{x_n\}$ .

**Теорема Больцано-Вейерштрасса.** Каждая ограниченная последовательность действительных чисел содержит сходящуюся подпоследовательность.

◀ Если множество  $E$  значений ограниченной последовательности конечно, то существует хотя бы один элемент  $e \in E$  и последовательность номеров  $n_1 < n_2 < \dots$  такие, что  $x_{n_1} = x_{n_2} = \dots = e$ .

Если множество  $E$  бесконечно, то по принципу Больцано-Вейерштрасса оно обладает хотя бы одной предельной точкой  $e$ . Далее выбираем номера  $n_k$  такие, что  $|x_{n_k} - e| < \frac{1}{k}$ . Поскольку  $\{\frac{1}{k}\} \rightarrow 0$ , то полученная подпоследовательность сходится к  $e$ . ▶

**Лемма Больцано-Вейерштрасса.** Всякое бесконечное ограниченное множество содержит предельную точку (предельная точка множества  $X$  — это точка, любая окрестность которой содержит бесконечное подмножество множества  $X$ ).

◀ Докажем для  $X \subset \mathbb{R}$ . Из определения ограниченности следует, что  $X$  содержится в некотором отрезке  $I = [a; b]$ . Докажем, что хотя бы одна точка  $I$  является предельной.

Предположим, что это не так. Тогда каждая точка из  $x \in I$  имела бы окрестность  $U(x)$ , содержащую лишь конечное число точек из  $X$ . По лемме о конечном покрытии из совокупности этих окрестностей можно выделить конечное покрытие отрезка  $I$ , а значит и конечное покрытие множества  $X$ . Так как количество окрестностей в покрытии конечно и каждая окрестность содержит лишь конечное число точек из  $X$ , то во всем покрытии конечное число точек, что противоречит тому, что  $X$  бесконечное множество. ▶

**Первый замечательный предел.** Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

◀ а) Покажем, что  $\cos^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$  при  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ . Из рис. 1 и определения косинуса и синуса, сравнивая площади сектора  $\angle OCD$ , треугольника  $\triangle OAB$  и сектора  $\angle OAB$ , имеем

$$S_{\angle OCD} = \frac{1}{2} x \cos^2 x < S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \sin x < S_{\angle OAB} = \frac{1}{2} x.$$

Получаем  $x \cos^2 x < \sin x < x$  или  $1 - \sin^2 x < \frac{\sin x}{x} < 1$ .

б) Из а) следует, что  $\sin x \leq x$  при любом  $x \in \mathbb{R}$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ .

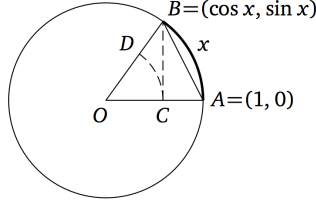


Рис. 1: Конструкция для первого замечательного предела

с)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sin^2 x) = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 1$ . Значит из а) и теореме о предельном переходе в неравенствах можем заключить, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \blacktriangleright$$

### Второй замечательный предел.

Докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

где  $e$  — некоторое вещественное число.

◀

Для начала докажем существование предела  $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$ . Для этого заметим, что при любых  $n \in \mathbb{N}$  и  $\alpha \geq -1$  выполняется неравенство Бернулли:

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

Доказывается индукцией по  $n$ .

Теперь покажем, что последовательность  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$  — убывающая.

При  $n \geq 2$  находим

$$\frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{n^{2n}}{(n^2 - 1)^n} \frac{n}{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n \frac{n}{n+1} \geq \left(1 + \frac{n}{n^2 - 1}\right) \frac{n}{n+1} > 1.$$

Таким образом последовательность убывает и ограничена снизу 0, а значит имеет предел. Легко показать, что тогда и последовательность  $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}$  имеет предел.

Теперь осталось доказать, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$ .

Рассмотрим случай  $x \rightarrow \infty$ . Пусть  $n = [x]$  — целая часть  $x$ , тогда  $n \leq x < n + 1$ . Тогда

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Далее заметим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

По теореме о двух полицейских получаем искомый результат. ►

**4. (SE)** Два определения предела функции одной и нескольких переменных: с помощью окрестностей и через пределы последовательностей.

Пусть  $E$  — некоторое подмножество множества  $\mathbb{R}$  действительных чисел и  $a$  — предельная точка множества  $E$  (т.е. такая, что в любой ее окрестности содержится бесконечное подмножество  $E$ ).

**Определение (по Коши).** Функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  стремится к  $A$  при  $x$ , стремящимся к  $a$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta > 0$  такое, что для любой точки  $x \in E$  такой, что  $0 < |x - a| < \delta$ , выполнено соотношение  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

В логической символике

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon).$$

**Напоминание:** Окрестностью точки в  $\mathbb{R}^m$  называют любое открытое множество, содержащее данную точку. Для  $m = 1$  окрестность точки — это любой интервал, содержащий данную точку. *Проколота* окрестность точки — это окрестность, из которой удалена сама эта точка. Множества

$$U_E(a) := U(a) \cap E, \quad \mathring{U}_E(a) := \mathring{U}(a) \cap E$$

будем называть окрестностью и проколотой окрестностью точки  $a$  в множестве  $E$ .



**Определение предела функции через окрестности.**

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A\right) := \forall V_{\mathbb{R}}(A) \exists \mathring{U}_E(a) \left(f(\mathring{U}_E(a)) \subset V_{\mathbb{R}}(A)\right)$$

**Утверждение. Определение предела функции через пределы последовательностей (определение по Гейне).** Соотношение  $\lim_{E \ni x \rightarrow a} f(x) = A$  имеет место тогда и только тогда, когда для любой последовательности  $\{x_n\}$  точек из  $E \setminus a$ , сходящейся к  $a$ , последовательность  $\{f(x_n)\}$  сходится к  $A$ .

**Предел функции нескольких переменных.**

Если каждому натуральному числу  $n$  поставлена в соответствие точка  $x_n \in \mathbb{R}^m$ , то говорят, что задана последовательность точек  $\{x_n\}$  в пространстве  $\mathbb{R}^m$ .

**Определение.** Точка  $A \in \mathbb{R}^m$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$  если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(A, x_n) = 0.$$

**Лемма.** Последовательность точек  $x_n(x_1^{(n)}, \dots, x_m^{(n)})$  сходится к точке  $A(a_1, \dots, a_m)$  тогда и только тогда, когда последовательности  $\{x_i^{(n)}\}$  сходятся к соответствующим координатам  $a_i$  точки  $A$ .

◀ Утверждение леммы следует из формулы для расстояния

$$d(x_1, x_2) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

**Определение.** Последовательность точек  $\{x_n \in \mathbb{R}^m\}$  называется *фундаментальной*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Для того, чтобы последовательность была фундаментальной необходимо и достаточно, чтобы фундаментальными были все последовательности  $\{x_i^{(n)}\}$ .

**Теорема. Критерий Коши сходимости последовательности.** Последовательность  $\{x_n\}$  точек из  $\mathbb{R}^m$  сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

**Определение.** Пусть  $\{M(x_1, \dots, x_m)\}$  — множество точек из  $\mathbb{R}^m$  и пусть каждой точке  $M$  поставлено в соответствие некоторое число  $u$ .

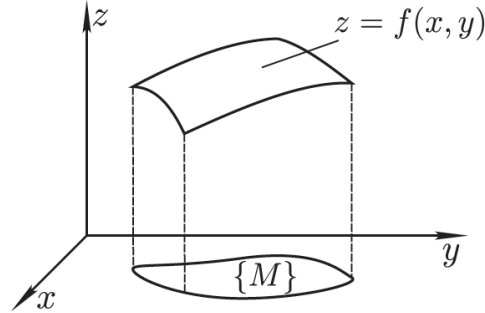


Рис. 2: График функции двух переменных

Тогда говорят, что на множестве  $\{M\}$  определена функция  $n$  переменных (см. Рис. 2).

Пусть  $A$  — предельная точка множества  $\{M\}$ , а функция  $u = f(M)$  определена на множестве  $\{M\}$ .

**Определение предела функции нескольких переменных (по Коши).** Число  $b$  называется *пределом* функции  $u = f(M)$  в точке  $A$  (при  $M \rightarrow A$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любой точки  $M \in \{M\}$ , удовлетворяющей условию  $0 < d(A, M) < \delta$ , выполняется неравенство  $|b - f(M)| < \varepsilon$ .

**Определение предела функции нескольких переменных (по Гейне).** Число  $b$  называется *пределом* функции  $u = f(M)$  в точке  $A$ , если для любой последовательности точек из  $M$ , сходящейся к  $A$ , соответствующая последовательность  $\{f(M)\}$  сходится к  $b$ .

---

#### 4.5. Дополнительно. Непрерывность функции многих переменных.

---

Пусть функция  $u = f(M)$  определена на множестве  $\{M\} \subset \mathbb{R}^m$  и пусть точка  $A \in \{M\}$  — предельная точка множества  $\{M\}$ .

**Определение.** Функция  $u = f(M)$  называется *непрерывной в точке*  $A$ , если

$$\lim_{M \rightarrow A} f(M) = f(A).$$

*Точка разрыва* функции  $f(M)$  — это предельная точка множества  $M$ , в которой функция не является непрерывной.

**Определение.** Приращением (полным приращением) функции  $u = f(M)$  в точке  $A$  называется функция  $\Delta u = f(M) - f(A)$ .

Условие непрерывности функции в точке  $A$  можно переписать в виде

$$\lim_{M \rightarrow A} \Delta u = \lim_{M \rightarrow A} [f(M) - f(A)] = 0.$$

Такое равенство называется *разностной формой условия непрерывности функции в точке  $A$* .

Если  $M = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $A = (a_1, \dots, a_m)$ ,  $\Delta x_i = x_i - a_i$ , то разностная форма условия непрерывности принимает вид

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \Delta u = 0.$$

**Определение.** Частным приращением функции  $f(x, y)$  в точке  $M_0$ . Называется функция одной переменной  $\Delta x$  вида

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

**Определение.** Функция  $u = f(x, y)$  называется непрерывной в точке  $M_0(x_0, y_0)$  по переменной  $x$ , если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta_x u = 0.$$

**Аналогичное определение.** Функция  $u = f(x, y)$  называется *непрерывной в точке  $M_0(x_0, y_0)$  по переменной  $x$* , если при фиксированном значении переменной  $y = y_0$  предел функции  $f(x, y_0)$  одной переменной  $x$  существует и равен

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0).$$

**Теорема.** Если функция  $f(x, y)$  определена в окрестности точки  $M_0$  и непрерывна в  $M_0$ , то она непрерывна в ней по отдельным переменным. Обратное в общем случае неверно (функция может быть непрерывна в точке по отдельным переменным, но быть разрывной по совокупности переменных).

---

**5. (SE)** Производные и дифференциалы функции одной и нескольких переменных.

---

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на интервале  $(a, b)$ . Зафиксируем точку  $x$  из  $(a, b)$  и рассмотрим другую точку  $x + \Delta x$ . Величину  $\Delta x$  назовем *приращением аргумента* в точке  $x$ . Пусть

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$

при фиксированном  $x$  эта разность является функцией от  $\Delta x$  и называется *приращением функции  $f(x)$  в точке  $x$* .

Рассмотрим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

которое также является функцией аргумента  $\Delta x$ .

**Определение.** Если существует

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то он называется *производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x$* .

**Пример.** Рассмотрим функцию  $f(x) = \sin x$ . Для нее

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x.$$

Используем формулу разности синусов, получаем

$$\Delta y = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Нетрудно показать, что  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(x + \Delta x) = \cos x$ . Используем это далее, получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.$$

Таким образом, производная функции  $\sin x$  есть  $\cos x$ .

**Дифференцируемость и дифференциал функции.** Пусть функция  $f(x)$  имеет производную в точке  $x$ , то есть существует предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Введем функцию

$$\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x),$$

которая определена при  $\Delta x \neq 0$  и является бесконечно малой при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Тогда приращение функции можно расписать как

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Удобно определить  $\alpha(0) = 0$  до непрерывности.

Пусть теперь приращение функции можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \quad (5.1)$$

где  $A$  — некоторое число,  $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\alpha(0) = 0$ . Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha(\Delta x)) = f'(x) = A.$$

Таким образом, производная функции  $f(x)$  в точке  $x$  существует тогда и только тогда, когда  $f(\Delta x) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ , где  $A \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$ , при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\alpha(0) = 0$ .

**Определение.** Если приращение функции  $f(x)$  в точке  $x$  можно представить в виде (5.1), то функция  $f(x)$  называется *дифференцируемой* в точке  $x$ .

Заметим, что для дифференцируемости функции в точке необходимо и достаточно того, чтобы у нее существовала производная в этой точке.

**Пример.** Рассмотрим функцию  $y = x^2$  и докажем, что она дифференцируема в любой фиксированной точке  $x \in \mathbb{R}$ . Действительно,

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x,$$

тогда  $\alpha(\Delta x) = \Delta x \rightarrow 0$ ,  $A = 2x$  — число, не зависящее от  $\Delta x$ .

**Теорема.** Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x$ , то она непрерывна в точке  $x$ .

◀ Необходимо показать, что если

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x), \quad (5.2)$$

то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(x).$$

Перепишем (5.2) в виде

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + o(\Delta x),$$

и устремим  $\Delta x \rightarrow 0$ . Тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x) + f'(x)\Delta x + o(\Delta x)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x) + 0 + 0 = f(x).$$

Стоит отметить, что непрерывность функции в точке не означает существование производной в этой точке. Пример:  $f(x) = |x|$ , которая непрерывна в точке 0, но не имеет в ней производной. ►

**Определение.** Дифференциалом функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  называется линейная функция аргумента  $\Delta x$ :

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Если  $f'(x) \neq 0$ , то  $dy = f'(x)\Delta x$  является главной частью  $\Delta y$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Иначе, не является. Дифференциал независимой переменной определим как  $dx = \Delta x$ .

**Физический смысл дифференциала.**  $dy = f'(x)\Delta x = v(x)\Delta x$ , то есть дифференциал равен тому изменению координаты, которое имела бы точка, если бы ее скорость  $v(x)$  на отрезке времени  $[x, x + \Delta x]$  была бы постоянной, равной  $f'(x)$ .

**Геометрический смысл дифференциала.** Дифференциал  $dy$  равен изменению касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  на отрезке  $[x, x + \Delta x]$  (см. Рис. 3).

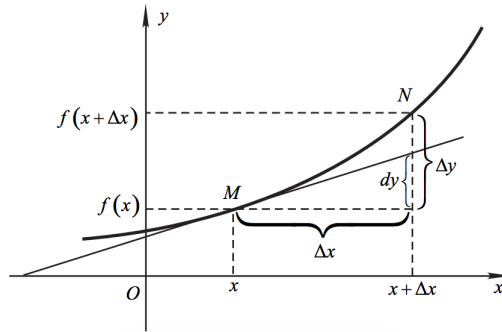


Рис. 3: Геометрический смысл дифференциала функции в точке  $x$

**Частные производные и дифференцируемость функции нескольких переменных.**

Пусть  $M(x_1, \dots, x_m)$  — внутренняя точка области определения функции  $u = f(M) = f(x_1, \dots, x_m)$ . Рассмотрим частное приращение функции в этой точке:

$$\Delta_{x_k} u = f(x_1, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_m),$$

которое зависит только от  $\Delta x_k$  при фиксированной точке  $M$ .

**Определение.** Если существует

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k},$$

то он называется частной производной функции  $u$  в точке  $M$ . Обозначение:  $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M)$ .

**Физический смысл частной производной.** Частная производная  $\frac{\partial u}{\partial x_k}$  характеризует скорость изменения функции в точке в направлении оси  $Ox_k$ .

Рассмотрим теперь полное приращение  $\Delta u$  функции  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  во внутренней точке  $M(x_1, \dots, x_m)$  из области определения функции:

$$\Delta u = f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m) - f(x_1, \dots, x_m).$$

**Определение.** Функция  $f(x_1, \dots, x_m)$  называется *дифференцируемой в точке*  $M(x_1, \dots, x_m)$ , если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m, \quad (5.3)$$

где  $A_i$  — какие-то числа, не зависящие от  $\Delta x_i$ ,  $\alpha_i = \alpha(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m)$  — бесконечно малые функции при  $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_m \rightarrow 0$ , равные нулю при  $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_m = 0$ .

Условие (5.3) будем называть *условием дифференцируемости функции в точке*.

Условие (5.3) можно переписать в виде

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + o(\rho),$$

где  $\rho$  — расстояние между точками  $M(x_1, \dots, x_m)$  и  $M'(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_m + \Delta x_m)$ .

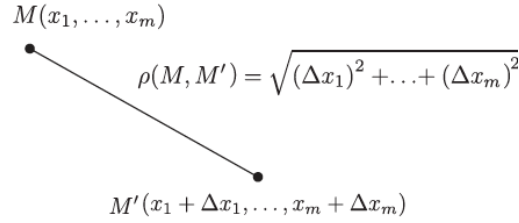


Рис. 4: Расстояние между точками  $M$  и  $M'$

**Замечание.** Из условия (5.3) следует, что если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в данной точке. Так как при  $\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m$  предел

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \Delta u = 0.$$

---

**6. (YA)** Необходимое и достаточное условия дифференцируемости функции. Частные производные. Полный дифференциал. Дифференцирование сложной функции.

---

**Теорема. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции.** Функция одной переменной  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда существует производная  $f'(x_0)$ .

◀ 1. ( $f$  — дифференцируема  $\Rightarrow \exists f'(x_0)$ ) Если  $f$  — дифференцируема в  $x_0$ , тогда ее приращение можно представить в виде

$$\Delta f = A \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x,$$

где  $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $A$  — некоторое число. Значит,

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{A \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

тогда

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} A + \alpha(\Delta x) = A.$$

Следовательно, существует производная.

2. ( $\exists f'(x_0) \Rightarrow f$  — дифференцируема)



По определению производной существует предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A,$$

что равносильно записи

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} - A = 0,$$

то есть функция  $\alpha(x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} - A$  — б.м.ф. при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Тогда приращение функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  можно представить как

$$\Delta f = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где  $\alpha(\Delta x) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , а  $A = f'(x_0)$  — некоторое число. Получаем определение дифференцируемой в точке функции. ►

Для функции многих переменных существование частных производных в точке  $M_0$  уже не является достаточным условием ее дифференцируемости в этой точке.

**Теорема.** Если функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  дифференцируема в точке  $M$ , то она имеет в точке  $M$  частные производные по всем переменным.

◄ Пусть функция  $u$  дифференцируема в точке  $M$ , тогда ее приращение можно записать в виде

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + \dots + A_m\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \dots + \alpha_m\Delta x_m,$$

где  $A_i$  — некоторые числа,  $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \rightarrow 0$  при  $\forall \Delta x_i \rightarrow 0$ ,  $\alpha_i = 0$  при  $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_m = 0$ . Зафиксируем номер  $k \in \{1, \dots, m\}$ . Пусть теперь  $\Delta x_i = 0$  при  $i \neq k$ . Тогда

$$\Delta u = A_k\Delta x_k + \alpha_k\Delta x_k.$$

Значит

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(M) = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x_k} = A_k + \alpha_k = A_k.$$

Таким образом, частная производная  $\frac{\partial u}{\partial x_k}(M)$  существует для любого  $k \in \{1, \dots, m\}$ . ►

**Теорема.** Если функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.

◀ Пусть

$$\Delta u = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m,$$

где  $A_i$  — некоторые числа,  $\alpha_i = \alpha_i(\Delta x_1, \dots, \Delta x_m) \rightarrow 0$  при  $\forall \Delta x_i \rightarrow 0$ ,  $\alpha_i = 0$  при  $\Delta x_1 = \dots = \Delta x_m = 0$ . Тогда

$$\lim_{\forall \Delta x_i \rightarrow 0} \Delta u = \lim_{\forall \Delta x_i \rightarrow 0} (A_1 \Delta x_1 + \dots + A_m \Delta x_m + \alpha_1 \Delta x_1 + \dots + \alpha_m \Delta x_m) = 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{\forall \Delta x_i \rightarrow 0} \Delta u = 0,$$

что соответствует разностной форме условия непрерывности функции в точке. ▶

**Замечание.** У функции могут существовать производные по всем переменным, но при этом она не будет дифференцируема в точке. Пример:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{на осях координат} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ , при этом функция не является непрерывной в точке  $(0, 0)$ , а значит не дифференцируема в ней.

**Теорема. Достаточное условие дифференцируемости функции.** Если функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  имеет частные производные по всем переменным в некоторой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $M(x_1, \dots, x_m)$ , причем в самой точке  $M$  эти частные производные непрерывны, то функция дифференцируема в точке  $M$ .

◀ Проведем доказательство для функции двух переменных  $u = f(x, y)$ . Пусть частные производные  $f'_x, f'_y$  существуют в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $M(x, y)$  и непрерывны в самой точке  $M$ .

Возьмем  $\Delta x, \Delta y$  столь малыми, чтобы точка  $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$  лежала в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $M$  (см. Рис. 5). Тогда полное приращение функции в точке  $M$  есть

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\ &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \end{aligned}$$

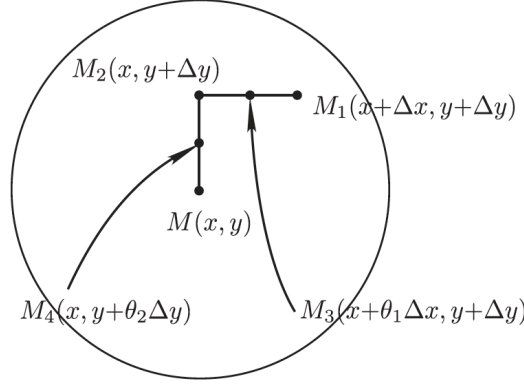


Рис. 5:  $\varepsilon$ -окрестность точки  $M$

Заметим, что первая скобка соответствует частному приращению функции в точке  $M_2$  при приращении  $\Delta x$ , а вторая скобка — частному приращению функции в точке  $M$  при приращении  $\Delta y$ . Так как функция  $u = f(x, y)$  — дифференцируема в  $\varepsilon$ -окрестности и непрерывна во всех рассматриваемых точках, то можно воспользоваться теоремой Лагранжа для разностей в скобках:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = f'_x(M_3)\Delta x,$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_y(M_4)\Delta y.$$

Здесь  $M_3 = (x + \theta_1\Delta x, y + \Delta y)$ ,  $M_4 = (x, y + \theta_2\Delta y)$ ,  $0 < \theta_i < 1$ .

Так как производные  $f'_x$ ,  $f'_y$  непрерывны в точке  $M$ , то

$$\lim_{\Delta x, y \rightarrow 0} f'_x(x + \theta_1\Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y),$$

$$\lim_{\Delta x, y \rightarrow 0} f'_y(x, y + \theta_2\Delta y) = f'_y(x, y).$$

Распишем приращение функции  $u = f(x, y)$  в точке через производные

$$\begin{aligned} \Delta u &= [f'_x(x, y)\Delta x + \alpha_1\Delta x] + [f'_y(x, y)\Delta y + \alpha_2\Delta y] = \\ &= f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y. \end{aligned}$$

здесь  $\alpha_{1,2} \rightarrow 0$  при  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  при  $\Delta x = \Delta y = 0$ . Таким образом, мы записали приращение функции в необходимом виде, а значит она дифференцируема в точке  $M$ . ►