1. Доказать, что

$$\lim_{x,y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0.$$

◀ Воспользуемся определением предела по Коши. Пусть

$$0<d(M,0)<\delta=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\frac{\varepsilon}{2},$$

и

$$2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\le 2\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon.$$

Применим неравенство о средних, получим

$$(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\le 2\frac{x+y}{2}\le 2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Получаем требуемое неравенство. ▶

2. Доказать, что у функции

$$u(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

нет предела $\lim_{x,y\to 0}u(x,y)$.

◀ Рассмотрим точки вида $(x, y=kx)$. Значение функции в них равно

$$u(x,kx)=\frac{kx^2}{x^2(k+1)}=\frac{k}{k+1}.$$

Рассмотрим последовательность $\{M_n\}=\{(\frac{2}{n},\frac{2\cdot(-1)^n}{n})\}$. Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty}M_n=(0,0),$$

т. к. $\frac{2}{n}\to 0$ и $\frac{2\cdot(-1)^n}{n}\to 0$ при $n\to\infty$. Однако последовательность $\{u(M_n)\}$ принимает значение $\frac{1}{2}$ при четных n и $-\frac{1}{2}$ при нечетных n, а значит не имеет предела. Таким образом, мы предъявили последовательность точек $\{M_n\}$, которая сходится к $(0,0)$, но соответствующая ей последовательность $\{u(M_n)\}$ не имеет предела, а значит по определению по Гейне

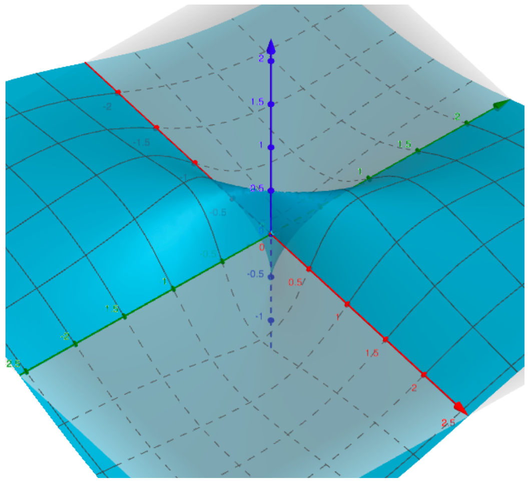

Рис. 1: График функции $\frac{xy}{x^2+y^2}$

функция $u(x, y)$ не имеет предела в точке $(0, 0)$. ►

Контест SE 21. Задача 5. Определить, под каким углом пересекаются графики функций $f_1 = \frac{1}{x}$ и $f_2 = \sqrt{x}$.

◄ Вычислим точку пересечения двух функций: $f_1 = f_2$. Получаем, что $\frac{1}{x} = \sqrt{x}$ при $x = 1$. Тогда

$$f_1'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f_1'(1) = -1;$$

$$f_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f_2'(1) = \frac{1}{2}.$$

Уравнения касательных к графикам функций равны соответственно: $y_1 = -x + 2$, $y_2 = 1/2x + 1/2$ (см. Рис. 2).

Далее найдем угол пересечения касательных. Для этого найдем направляющие векторы: $v_1 = \{1,\ -1\}$, $v_2 = \{1,\ 0.5\}$. Воспользуемся формулой скалярного произведения векторов:

$$|v_1||v_2| \cos\varphi = |v_{1,x}v_{2,x} + v_{1,y}v_{2,y}|.$$

Находим косинус искомого угла:

$$\cos\varphi = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 0.5|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}\sqrt{1^2 + 0.5^2}}.$$

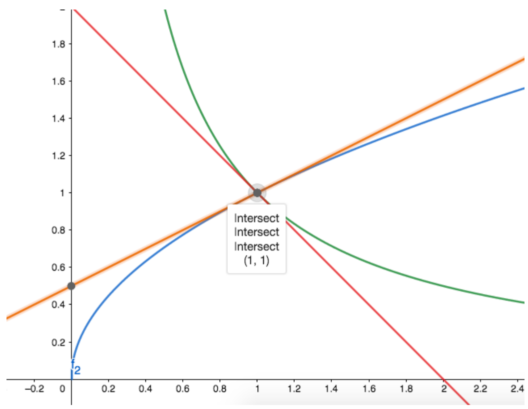

Рис. 2: Функции f_1, f_2 и касательные к ним

Тогда, $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{10}}{10}$. ▶

Контест SE 19. Задача 5. Вычислить предел последовательности $(1 + 1/n)^{5n+4}$.

◀
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n+4} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^{5} = e^5,$$
так как оба предела из средней части существуют. ▶

Задача. Натйти полный дифференциал функции
$$z = \ln(x^2 + y^2).$$

◀ Положим, что z — сложная функция
$$z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y)),$$
где $\varphi(x, y) = x^2$, $\psi(x, y) = y^2$. Тогда полный дифференциал функции $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ есть
$$dz = \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial z}{\partial \psi} d\psi = \frac{1}{x^2 + y^2} d\varphi + \frac{1}{x^2 + y^2} d\psi.$$
Далее
$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 2x dx, \quad d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 2y dy.$$

Таким образом,

$$dz = \frac{2x}{x^2+y^2}dx + \frac{2y}{x^2+y^2}dy. \blacktriangleright$$