Вопросы. Теория вероятностей и статистика.

1. (YA) Элементы теории вероятностей: пространство элементарных исходов, вероятностная мера. Свойства вероятностной меры. Условная вероятность. Классическая вероятностная схема. Формулы полной вероятности и Байеса.

Пусть в результате испытания наступает одно и только одно из событий ω_i ($i = 1, ..., n$). События ω_i называют *элементарными событиями* (*элементарными исходами*). Множество всех элементарных событий, которые могут появится в испытании, называют *пространством элементарных событий (исходов)* Ω, а сами элементарные события — *точками пространства* Ω.

Определение: Пусть $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ — пространство элементарных событий, тогда некоторое его подмножество $A \subset \Omega$ называется *событием.*

Определение: События A, B называются *несовместными*, если появление A исключает появление B и наоборот. Более формально, $A \cap B = \varnothing$.

Вероятностное пространство. Пусть $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ — пространство элементарных событий. Припишем каждому элементарному исходу некоторое число $p_i \geq 0$ так, чтобы $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$. Тогда *вероятностью события* A назовем сумму

$$P(A) = \sum_{k:\omega_k \in A} p_k.$$

Полученная конструкция обладает следующими свойствами:

1. $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$;
2. $0 \leq P(A) \leq 1$;
3. $A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
5. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$;
6. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Аксиоматическое определение вероятности. Предполагается, что задано некоторое пространство элементарных событий X. *Вероятностью* (*вероятностной мерой*) называется мера (числовая функция) P, заданная на множестве событий, обладающая следующими свойствами:

1. *Неотрицательность*: $\forall A \subset X : P(A) \geq 0$;

2. *Аддитивность*: вероятность наступления хотя бы одного из попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий. Другими словами, если $A_i \cap A_j = \varnothing$, то
$$P\left(\sum_i A_i\right) = \sum_i P(A_i).$$

3. *Конечность (ограниченность единицей)*: $P(X) = 1$.

Примечание: *Мера* — это некоторая числовая функция, ставящая в соответствие каждому множеству (из некоторого семейства множеств) некоторое неотрицательное число. Кроме неотрицательности мера как функция должна также обладать свойством аддитивности — мера объединения непересекающихся множеств должна равняться сумме их мер.

Свойства вероятности (исходя из аксиоматического определения):

1. $P(\varnothing) = 0$;

2. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$;

3. $0 \leq P(A) \leq 1$;

4. $A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$;

5. $P(A) = 1 - P(\overline{A})$;

6. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

7. $P\left(\cup_{k=1}^{n} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$;

8. *Формула включений-исключений* для вероятностей:
$$P\left(\cup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{i<k} P(A_i \cap A_k) + ...(-1)^n P(A_1 \cap ... \cap A_n).$$

Классическая вероятностная схема. Если каждое элементарное событие из пространства элементарных событий равновероятно, то есть для любых двух $\omega_i, \omega_j \in \Omega$ выполняется равенство $P(\{\omega_i\}) = P(\{\omega_j\})$, и в результате эксперимента какое-то из них точно произойдет, то $p_i = P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{|\Omega|}$. Следовательно, вероятность события A считается по формуле

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Условная вероятность.

Определение: Условной вероятностью события B при условии события A с $P(A) > 0$ называется величина

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

В случае классической схемы:

$$P(B|A) = \frac{|A \cap B|}{|A|}.$$

Формула полной вероятности.

Рассмотрим разбиение $\mathcal{D} = \{A_1, ..., A_n\}$ пространства элементарных исходов. Причем $P(A_i) > 0$. Такое разбиение называют *полной группой несовместных событий*. Тогда $B = BA_1 + ... + BA_n$. Значит,

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i).$$

Используя формулу условной вероятности, получаем *формулу полной вероятности*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i).$$

Формула Байеса.

По определению условной вероятности $P(B|A) = P(AB)/P(A)$, тогда $P(AB) = P(B|A)P(A)$. Аналогично $P(AB) = P(A|B)P(B)$. Тогда имеется равенство

$$P(B|A)P(A) = P(A|B)P(B).$$

Из него можно получить *формулу Байеса*:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}.$$

Заменим A на часть разбиения A_i и распишем числитель по формуле полной вероятности. Получим утверждение *теоремы Байеса*:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}.$$

---

2. (SE) Вероятностное пространство. Независимые события. Теорема сложения. Условная вероятность. Полная система событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Вероятностное пространство — это тройка $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, где

1. Ω — произвольное непустое множество, элементы которого называются элементарными событиями, исходами или точками;
2. $\mathfrak{A}$ — сигма-алгебра подмножеств Ω, называемых (случайными) событиями;
3. $\mathbb{P}$ — вероятностная мера или вероятность, то есть сигма-аддитивная конечная мера, такая что $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

Примечание. Семейство $\mathfrak{S}$ подмножеств множества X называется σ(сигма)-алгеброй, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. $\mathfrak{S}$ содержит множество X и пустое множество $\varnothing$.
2. $E \in \mathfrak{S} \Rightarrow X \setminus E \in \mathfrak{S}$.
3. Объединение счетного подсемейства из $\mathfrak{S}$ принадлежит $\mathfrak{S}$.

Для **классической** вероятностной схемы $\mathfrak{S} = 2^{\Omega}$.

Геометрические вероятности.

Пусть Ω — ограниченное множество n-мерного евклидова пространства, обладающее объемом. Пусть $\mathfrak{S}$ — система подмножеств Ω, имеющих объем. Тогда для любого события $A \in \mathfrak{S}$ положим

$$\mathbb{P} = \frac{\mu(A)}{\mu(\mathfrak{S})},$$

где $\mu(C)$ — объем множества.

Определение. Два события A и B называются *независимыми*, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Некоторые свойства независимых событий.

1. Если $P(B) > 0$, то независимость A и B эквивалентна равенству $P(A|B) = P(A)$.

   ◀ $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$. По определению независимых событий: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, при $P(B) \neq 0$ поделим обе части на $P(B)$, получим требуемое равенство. ▶

   Это свойство означает, что события A, B независимы $\Leftrightarrow$ наступление события B не меняет вроятность наступления события A.

2. Если события A и B независимы, то $\overline{A}, B$ тоже независимы.

   ◀ $P(\overline{A} \cap B) = P(B - A \cap B)$. $P(B) = P(B \cap A) + P(B - B \cap A)$, так как последние события несовместны. Значит $P(B - B \cap A) = P(B) - P(B \cap A)$. Тогда $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(B \cap A)$. Воспользуемся независимостью B и A, получим: $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\overline{A})$. ▶

Определение. События $B_1, ..., B_n$ независимы в совокупности, если для любых $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_r \leq n$, $r = 2, 3, ..., n$,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{r} B_{i_k}\right) = \prod_{k=1}^{r} P(B_{i_k}).$$

Попарной независимости событий недостаточно для независимости в совокупности. Пример: тетраэдр, три грани которого покрашены в цвета К,З,С, а четвертая во все три. Тогда вероятность выпадения грани, содержащей два цвета $P(\text{грань с тремя цветами}) = \frac{1}{4} = P(\text{К})P(\text{З}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Вероятность выпадения грани со всеми цветами есть $P(\text{грань с тремя цветами}) = \frac{1}{4} \neq P(\text{К})P(\text{З})P(\text{С}) = \frac{1}{8}$.

Теорема сложения вероятностей. Если A, B — события с вероятностями $P(A)$ и $P(B)$, то вероятность наступления хотя бы одного из них $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

◀ Разобьем событие $A+B$ (или аналогично $A\cup B$) на несовместные события: $A-AB$, AB, $B-AB$. По определению вероятности $P(A+B) = P(A-AB)+P(AB)+P(B-AB)$. При этом $P(A) = P(A-AB)+P(AB)$, тогда $P(A+B) = (P(A)-P(AB))+P(AB)+(P(B)-P(AB)) = P(A)+P(B)-P(AB)$. ▶

Определение. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ есть вероятностное пространство. Любое разбиение множества Ω элементами сигма алгебры $\mathfrak{A}$ называется *полной группой событий.*

Другими словами, это система случайных событий такая, что в результате произведенного эксперимента непременно произойдет ровно одно из них.

Формулу полной вероятности и формулу Байеса см. в билете 1.

(SE) Случайная величина и ее функция распределения. Совместное распределение случайных величин. Распределение суммы независимых случайных величин.

Пусть $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P\rangle$ — произвольное вероятностное пространство.

Определение. *Случайной величиной* ξ называется измеримая функция $\xi(\omega)$, отображающая Ω в множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

Функция $\xi(x)$ называется измеримой, если $\forall x \in \mathbb{R}$ выполняется

$$\{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \le x\} \in \mathfrak{A}.$$

Определение. Вероятность $P_\xi(B) = P(\xi \in B)$ называется *распределением случайной величины* ξ.

Определение. Функцией распределения с.в. ξ называется функция

$$F_\xi := P(\xi \le x).$$

Свойства функции распределения:

1. $F_\xi : \mathbb{R} \to [0, 1]$;

2. F_ξ — монотонная неубывающая функция;

3. F_ξ — непрерывна справа. Рассмотрим последовательность $x_0 \leftarrow \{x_n\}$. Тогда $\{\xi \le x_i\} \subset \{\xi \le x_{i-1}\}$, при этом

$$\{\xi \le x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\xi \le x_n\},$$

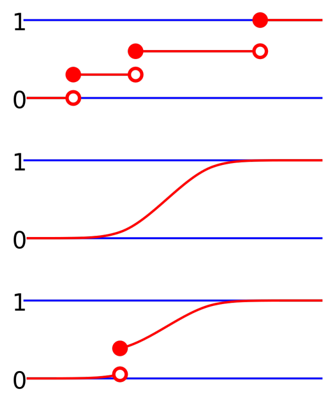

Рис. 1: Функция распределения непрерывна справа

следовательно $P(\xi \le x_0) = \lim_{n\to\infty} P(\xi \le x_n)$, а это в точности определение непрерывности функции F_ξ:

$$\lim_{n\to\infty} F_\xi(x_n) = F_\xi(x_0).$$

4. $\lim_{x\to+\infty} F_\xi(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0$.

5. Существует $\lim_{x\to x_0-0} F_\xi(x) =: F_\xi(x_0-0)$. Для доказательства рассмотрим последовательность $\{x_n\} \to x_0$, $\{x_n\}$ не убывает. Имеем

$$\{\xi \le x_n\} \supset \{\xi \le x_{n-1}\} \supset ...,$$

значит $\{\xi < x_0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\xi \le x_n\}$, поэтому

$$F_\xi(x-0) = P(\xi < x_0) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\xi \le x_n\}) = \lim_{x\to x_0-0} F_\xi(x).$$

6. $P(\xi = x_0) = F_\xi(x_0) - F_\xi(x_0-0)$.

7. $P(a < \xi \le b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$.

8. $P(\xi > a) = 1 - F_\xi(a)$.

Многомерные случайные величины.

Пусть $\xi_1, ..., \xi_n$ — случайные величины, заданные на вероятностном пространстве $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$. Каждому $\omega \in \Omega$ эти случайные величины ставят в соответствие вектор $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), ..., \xi_n(\omega))$.

Определение. Отображение $\Omega \to \mathbb{R}^n$, задаваемое случайными величинами $\xi_1, ..., \xi_n$ называется *случайным вектором* или *многомерной случайной величиной.*

Определение. Функция

$$F_{\xi_1,...,\xi_n}(x_1, ..., x_n) = F_{\vec{\xi}}(x_1, ..., x_n) = P(\xi_1 \leq x_1, ..., \xi_n \leq x_n)$$

называется *функцией распределения вектора* $(\xi_1, ..., \xi_n)$ или *функцией совместного распределения* случайных величин.

Свойства функции совместного распределения:

1. $F_{\vec{\xi}} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$.
2. $F_{\vec{\xi}}$ монотонно не убывает по каждому аргументу.
3. $F_{\vec{\xi}}$ непрерывна справа по каждому аргументу.
4. $F_{\vec{\xi}}(x_1, ..., x_n) \to 1$ при $x_1, ..., x_n \to +\infty$.
5. $F_{\vec{\xi}}(x_1, ..., x_n) \to 0$ при $x_l \to -\infty$.
6. $\lim_{x_l \to +\infty} F_{\vec{\xi}}(x_1, ..., x_n) = F_{\vec{\eta}}(x_1, ..., x_{l-1}, x_{l+1}, ..., x_n)$, где $\vec{\eta} = (\xi_1, ..., \xi_{l-1}, \xi_{l+1}, ..., \xi_n)$.
7. $F_{\vec{\xi}}(a_1, ..., a_n) \leq F_{\vec{\xi}}(b_1, ..., b_n)$ при $a_i \leq b_i$.

Независимые случайные величины.

Определение. Случайные величины $\xi_1, ..., \xi_n$ — независимы, если

$$P(\xi_1 \leq x_1, ..., \xi_n \leq x_n) = P(\xi_1 \leq x_1) \cdot ... \cdot P(\xi_n \leq x_n).$$

Определение можно переписать через функцию совместного распределения:

$$F_{\vec{\xi}}(x_1, ..., x_n) = F_{\xi_1}(x_1) \cdot ... \cdot F_{\xi_n}(x_n).$$

Важное свойство. Если I_i — промежуток (отрезок, интервал и т.д) или луч, то для независимых случайных величин выполняется равенство

$$P(\xi_1 \in I_1, ..., \xi_n \in I_n) = P(\xi_1 \in I_1) \cdot ... \cdot P(\xi_n \in I_n).$$