1. Доказать, что

$$\lim_{x,y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0.$$

◀ Воспользуемся определением предела по Коши. Пусть

$$0<d(M,0)<\delta=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\frac{\varepsilon}{2},$$

и

$$2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\le 2\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon.$$

Применим неравенство о средних, получим

$$(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\le 2\frac{x+y}{2}\le 2\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Получаем требуемое неравенство. ▶

2. Доказать, что у функции

$$u(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

нет предела $\lim_{x,y\to 0}u(x,y)$.

◀ Рассмотрим точки вида $(x, y=kx)$. Значение функции в них равно

$$u(x,kx)=\frac{kx^2}{x^2(k+1)}=\frac{k}{k+1}.$$

Рассмотрим последовательность $\{M_n\}=\{(\frac{2}{n},\frac{2\cdot(-1)^n}{n})\}$. Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty}M_n=(0,0),$$

т. к. $\frac{2}{n}\to 0$ и $\frac{2\cdot(-1)^n}{n}\to 0$ при $n\to\infty$. Однако последовательность $\{u(M_n)\}$ принимает значение $\frac{1}{2}$ при четных n и $-\frac{1}{2}$ при нечетных n, а значит не имеет предела. Таким образом, мы предъявили последовательность точек $\{M_n\}$, которая сходится к $(0,0)$, но соответствующая ей последовательность $\{u(M_n)\}$ не имеет предела, а значит по определению по Гейне функция $u(x,y)$ не имеет предела в точке $(0,0)$. ▶

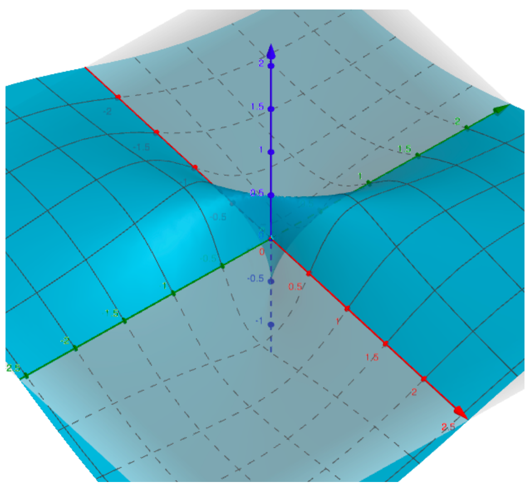

Рис. 1: График функции $\frac{xy}{x^2+y^2}$