Задачи. Теория вероятностей и статистика.

1. (ВШЭ. ML. 2020) Какова вероятность того, что сумма n независимых случайных величин, равномерно распределенных на $[0,1]$ будет не более 1.

2. (ВШЭ. ML. 2020) Нужно написать программу, которая случайным образом генерирует точки в круге радиуса 1. Точки должны быть равномерно распределены по площади круга. Как бы Вы это организовали?

3. (ВШЭ. ML. 2021) Школьник Ваня приболел, и его мама решила вызвать врача домой. У врача есть статистика по району, где живет Ваня. У 90 % больных детей этого района — грипп, у остальных 10 % — ветрянка. Других болезней в этом районе не зафиксировано. Один из основных симптомов ветрянки — это сыпь, она появляется в 95 % случаях заболевания ветрянкой. Однако, во время гриппа она тоже возможна и появляется в 8 % случаях. Осмотрев Ваню, врач обнаружил сыпь. Какова вероятность того, что у Вани ветрянка?

◀ Решение см. в Miro [панель SE]. ▶

4. (ВШЭ. ML. 2021) Каждый из девяти единичных квадратов 3×3 - квадрата случайным образом окрашен в красный или синий цвет с вероятностью 1/2. Определите вероятность того, что ни один из четырех квадратов 2×2 не является полностью красным.

◀ Считаем вероятность того, что хотя бы 1 квадрат будет красным (событие A). Для этого занумеруем углы квадрата, тогда A_1 — вероятность того, что первый угол красный. Формула включений-исключений:

$$P(A) = P(A_1) + ... + P(A_4) - ... - P(A_1A_2A_3A_4).$$

Считаем вероятности, получаем $P(A) = 95/512$. Ответ: $P(\overline{A}) = 1 - 95/512 = 417$. ▶

5. (ВШЭ. PROG. 2020) Найдите математическое ожидание числа бросков монетки до выпадения первого орла.

6. (ВШЭ. PROG. 2021) У Пети есть для игральных кубика. Один из них честный — имеет равные вероятности выпадения каждой из граней.

Второй кубик бракованный — шестерка на нем выпадает с вероятностью 2/3, а все остальные — с вероятностью 1/15.

Петя случайным образом выбирает один из двух кубиков, после этого бросает его три раза. Какой будет вероятность выпадения шестерки при третьем броске при условии того, что первые два раза выпала шестерка?

7. (ВШЭ. СКН) Случайные величины X и Y независимы и экспоненциально распределены, X — с параметром 1, а Y — с параметром 2. Пусть $Z = \max(X, Y)$. Найдите математическое ожидание случайной величины Z.

8. (ВШЭ. СКН) Пусть $Y_i \sim N(0,1)$ при всех $1 \leq i \leq n$ и все Y_i независимы, $\varepsilon_{ij} = Y_i - Y_j$. Покажите, что выполнено

$$E\left[\max_{1\leq i,j\leq N} |\varepsilon_{ij}|\right] = 2E\left[\max_{1\leq i\leq N} Y_i\right],$$

а также вычислите дисперсию распределения ε_{ij} при $i \neq j$.

9. (ВШЭ. СКН) На потоке 120 студентов. Каждый студент может выбрать одного из 10 семинаристов. Оказалось, что 20 человек выбрали Алексея. Верно ли, что студенты выбирают его со статистически значимо большей вероятностью, чем случайно, на уровне значимости 5 %. Придумайте статистический критерий для проверки гипотезы, воспользуйтесь им и сделайте выводы.

10. (ВШЭ. НОД-МСК. 2022) Случайная величина X задана функцией плотности вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\pi} e^{-\frac{(x-1)^2}{\pi}}.$$

Найдите мат. ожидание случайной величины $Z = X^2 - X + 1$.

11. (ВШЭ. НОД-МСК. 2022) Предполагается, что результаты измерений приведенные в таблице распределены равномерно, с функцией плотности вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & x < a,\ x > b \end{cases}$$

Оцените параметры a, b, используя метод моментов.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
1.8080	3.2900	3.4050	2.4490	3.1140	1.7600	2.3230	3.3160	3.0820	3.4050

12. (ВШЭ. НОД-МСК. 2021) Вася подбросил монетку 103 раза, и у него 51 раз выпала решка. Потом Миша подбросил ее 53 раза и получил 25 орлов. Оцените вероятность выпадения решки с помощью метода максимального правдоподобия.

13. (ВШЭ. НОД-МСК. 2019) Независимые одинаково распределенные случайные величины $X_1, ..., X_{20}$ принимают только значения 2 и 3, при этом значение 3 принимается с вероятностью 0,2. Найти вероятность того, что сумма данных величин будет равна 46.

14. (ВШЭ. НОД-МСК. 2019) Программист желает найти доверительный интервал для математического ожидания времени работы программы с надежностью $\gamma = 0,95$. Выборочное среднее времени работы 65 циклов составило 0,09 сек. Времена работы программы независимы и распределены нормально с постоянными параметрами, при этом генеральное среднеквадратичное отклонение равно 0,02. Найти искомый доверительный интервал.

15. (ВШЭ. ML. 2022) Петя бросил 3 игральных шестигранных кубика и сообщил вам, что в выпавших кубиках есть хотя бы одна шестерка. Какова вероятность того, что выпало хотя бы две шестерки?

16. (SE. test. 2019) Двадцать пять человек выбирают числа, каждый наугад выбирает число от 1 до 100 независимо друг от друга. Далее участники объявляют выбранные номера по очереди (и делают это честно). Первый (если такой человек есть), кто объявляет номер, который уже был объявлен, получает приз. Какой человек по счету имеет наибольшую вероятность выиграть приз?

◄ Вероятность того, что i-ый человек выиграет приз равна произведению вероятностей того, что ни один из игроков до него не выиграл приз, и вероятности, что он попал в $i-1$ предыдущее число. Вероятность последнего $\frac{i-1}{100}$, а вероятность, что $i-1$ первых игроков не выиграли есть вероятность того, что люди последовательно называли разные числа, то есть $\frac{100}{100} \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{98}{100} \cdot \ldots \cdot \frac{100-i-2}{100}$. Получаем, что

$$p(i) = \frac{100}{100} \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{98}{100} \cdot \ldots \cdot \frac{100-i-2}{100} \cdot \frac{i-1}{100}.$$

Находим максимум этой функции по $i = 1..25$, получаем, что $p(11)$ — максимальна. ►

17. Наугад взяты два положительных числа, каждое из которых не больше 3. Какова вероятность того, что их сумма не превзойдет 3, а произведение будет не больше 14/9?

◄ Пусть x, y — взятые числа. Тогда элементарному исходу соответствует точка с координатами (x, y). Тогда все пространство элементарных исходов — квадрат (0,0)-(3,3). Ограничения из условия можно переписать в виде $x + y \leq 3$, $xy \leq \frac{14}{9}$ (см. Рис. 1).

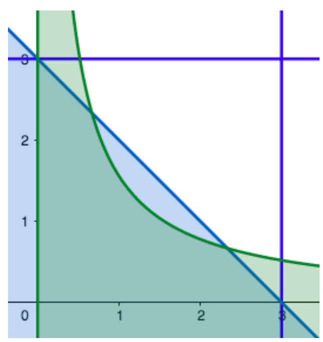

Рис. 1: к задаче 17

Находим точки пересечения прямой $y = 3 - x$ с гиперболой $y = \frac{14}{9}x$, получаем $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{7}{3}$. Тогда площадь области, подходящей под условия равна

$$S_g = \int_0^{x_1} (3-x)dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{14}{9x}dx + \int_{x_1}^{x_2} (3-x)dx \approx 3,9487.$$

Площадь множества элементарных исходов очевидно равна $3 \cdot 3$, тогда искомая вероятность

$$p \approx \frac{3,9487}{9} = 0,4387. ►$$

18. Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5, хотя бы один раз появилась сумма очков, равная 12?

◀ Подбросим пару костей n раз. Вероятность успеха в одном испытании $p = \frac{1}{36}$, вероятность неудачи $q = \frac{35}{36}$. Тогда исходов в точности с i успехами ровно C_n^i. Вероятность одного такого исхода $p^i q^{n-1}$. Тогда сумма всех вероятностей =

$$= 1 = C_n^0 p^0 q^n + C_n^1 p q^{n-1} + ... + C_n^n p^n q^0.$$

Нас интересует вся сумма, начиная со второго слагаемого. Она равна $1 - C_n^0 p^0 q^n$. По условию эта вероятность должна быть не менее $0,5$, тогда решим неравенство

$$1 - C_n^0 p^0 q^n \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{35}{36}\right)^n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow n \geq 25. \blacktriangleright$$