Вопросы. Математический анализ.

1. (НОД-МСК) Числовые множества. Грани множеств. Множества в конечномерном действительном пространстве. Соответствие множеств. Счетные и несчетные множества.

Определение: Наименьшее из чисел, ограничивающих множество $X \subset \mathbb{R}$ сверху, называется *верхней гранью* и обозначается $\sup X$. Или

$$(s = \sup X) := \forall x \in X((x \leq s) \wedge (\forall s' < s \, \exists x' \in X(s' < x'))).$$

Определение: *Соответствием* между множествами A и B называют произвольное подмножество декартова произведения

$$F \subset A \times B.$$

Определение: *Отображением* из множества A в множество B называется однозначное соответствие между A и B, т.е. такое соответствие, что для любого элемента из A найдется ровно один элемент из B.

Для отображения используют запись: $F : A \to B$, для отдельных элементов $b = F(a)$. Отображения также называют *функциями*.

Определение: Множество X называется *счетным*, если оно равномощно множеству $\mathbb{N}$ натуральных чисел, т.е. $|X| = |\mathbb{N}|$.

Определение: Множество X равномощно множеству Y, если существует биективное отображение X на Y.

Про отображение $F : X \to Y$ говорят, что оно

сюръективно, если $F(X) = Y$;

инъективно, если $\forall x_1, x_2 \in X \; (F(x_1) = F(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$;

биективно (или взаимно однозначно), если оно сюръективно и инъективно одновременно.

Определение: *Несчетное* множество — бесконечное множество, не являющееся счетным. Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел называют *числовым континуумом*, а его мощность — *мощностью континуума.*

Теорема (Кантор). Бесконечное множество $\mathbb{R}$ имеет мощность большую, чем бесконечное множество $\mathbb{N}$.

◀ Докажем, что отрезок $[0,1]$ больше $\mathbb{N}$. Пусть точки отрезка можно занумеровать $x_1, ..., x_n, ...$ Тогда построим отрезок I_1, не содержащий точку x_1. Внутри него построим отрезок I_2, не содержащий x_2, и т. д. Получим последовательность вложенных отрезков, которая по лемме о вложенных отрезках содержит точку c. Точка c по построению не совпадает ни с какой точкой последовательности $x_1, ..., x_n, ...$ ▶

Условимся через $\mathbb{R}^m$ обозначать множество всех упорядоченных наборов $(x^1, ..., x^m)$, состоящих из m действительных чисел $x^i \in \mathbb{R}$.

Определение: *Метрикой* или *расстоянием* назовем функцию

$$d : X \times X \to \mathbb{R},$$

определенную на парах (x_1, x_2) точек некоторого множества X и обладающую следующими свойствами:

(a) $d(x_1, x_2) \geq 0$;

(b) $d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$;

(c) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$;

(d) $d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$.

Множество X вместе с фиксированной функцией d называют *метрическим пространством.*

Пример метрики $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$:

$$d(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_1^i - x_2^i)^2}.$$

Определение: При $\delta > 0$ множество

$$B(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(a, x) < \delta\}$$

называется *шаром* с центром $a \in \mathbb{R}^m$ радиуса δ или *δ-окрестностью* точки $a \in \mathbb{R}^m$.

Определение: Множество $G \in \mathbb{R}^m$ называется *открытым* если для любой точки $x \in G$ существует шар $B(x, \delta)$ такой, что $B(x, \delta) \subset G$. Например, шар $B(a, r)$ — открытое множество в $\mathbb{R}^m$.

Определение: Множество $F \in \mathbb{R}^m$ называется *замкнутым*, если его дополнение $G = \mathbb{R}^m \setminus F$ является открытым. Пример: *сфера* $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid d(x, a) = r\},\ r \geq 0$.

Определение: Открытое в $\mathbb{R}^m$ множество, содержащее некоторую точку, называется окрестностью данной точки в $\mathbb{R}^m$.

Определение: Точка $x \in \mathbb{R}^m$ по отношению к множеству $E \in \mathbb{R}^m$ называется

внутренней точкой E, если она содержится в E вместе с некоторой своей окрестностью;

внешней точкой E, если она является внутренней точкой дополнения к E в $\mathbb{R}^m$.

граничной точкой E, если она не является ни внутренней, ни внешней точкой E.

Определение: Точка $a \in \mathbb{R}^m$ называется *предельной* точкой множества E, если для любой окрестности $O(a)$ точки a пересечение $E \cap O(a)$ есть бесконечное множество.

Определение: Объединение множества E и всех его предельных точек из $\mathbb{R}^m$ называется *замыканием* множества E в $\mathbb{R}^m$ (обозначение символом $\overline{E}$).

Пример: Множество $\overline{B}(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$ есть множество предельных точек для шара $B(a, r)$, поэтому $\overline{B}(a, r)$ — замкнутый шар.

Определение: Множество $K \subset \mathbb{R}^m$ называется *компактом*, если из любого покрытия K открытыми в $\mathbb{R}^m$ множествами можно выделить конечное покрытие.

Пример: Обобщением отрезка в $\mathbb{R}^m$ является множество

$$I = \{x \in \mathbb{R}^m \mid a^i \leq x \leq b^i,\ i = 1, ..., m\}.$$

Утверждение о том, что I — компакт, доказывается аналогично лемме о конечном покрытии. Если I нельзя покрыть конечным набором множеств, то его стороны можно разделить пополам, и хотя бы одну из 2^m частей нельзя покрыть конечным набором открытых множеств. Тогда повторяем для нее эту операцию. Далее, по лемме об общей точке системы вложенных отрезков, существует точка $c \in I$, которая принадлежит всем вложенным промежуткам. Тогда ее покрывает некоторое множество G, но тогда G покрывает все промежутки, начиная с некоторого номера n. Противоречие.

Утверждение: Если K — компакт, то K — замкнутое множество и любое замкнутое множество в K само является компактом.

Определение: Диаметром множества $E \in \mathbb{R}^m$ называется величина

$$d(E) := \sup_{x_1, x_2 \in E} d(x_1, x_2).$$

Определение: Множество $E \subset \mathbb{R}^m$ называется *ограниченным*, если его диаметр конечен.

Утверждения: K — компакт $\Rightarrow$ K — ограниченное подмножество $\mathbb{R}^m$. K — компакт $\Leftrightarrow$ K ограничено и замкнуто.