如何学好微积分

给新手的话

Zhihu: tempo

2016 年 9 月 28 日

写在前面

- 这次 Live 还是新手优先。末尾会有互动环节。
- 有人问怎么学，关于方法论我简单讲几句：
  1. 克服恐惧
  2. 重视定义
  3. 付出时间
  4. 熟悉代数运算
- 剩下的时间主要讨论数学。也会穿插讲上面这几点。

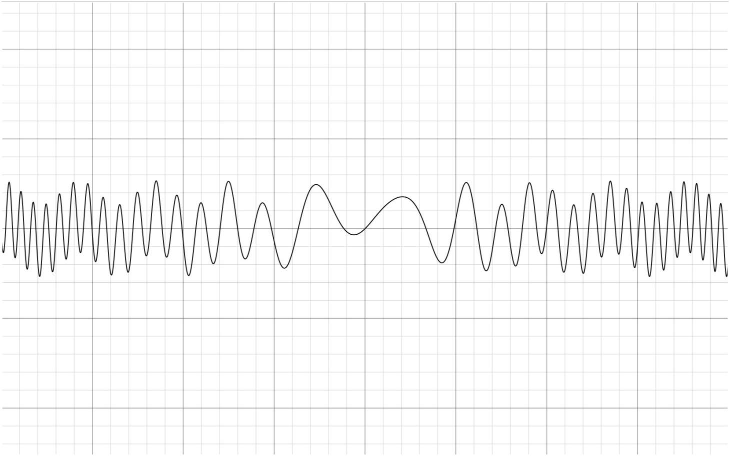
开讲

考虑一个简单的问题:

$$y = f(x) = \sin x^2 + \frac{\sin 3x}{3}$$

的图像长什么样子?

这样——



这很复杂。(这里 $-10 < x < 10$.)

换一个问题：

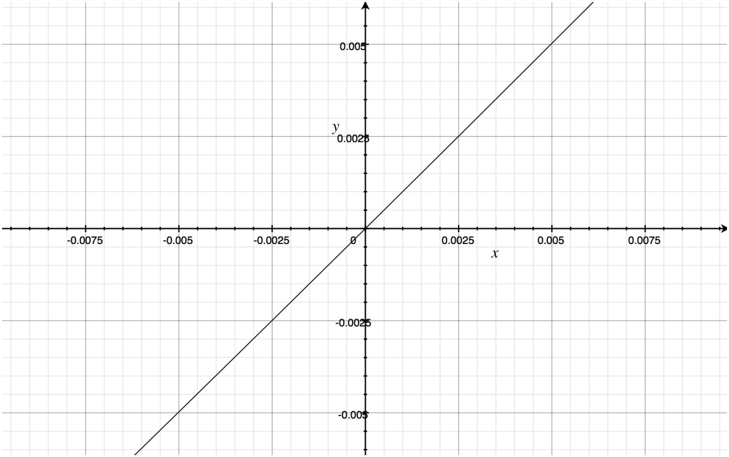
在 $x = 0$ 附近，

$$y = f(x) = \sin x^2 + \frac{\sin 3x}{3}$$

的图像长什么样子？ 比如

$$-0.01 < x < 0.01$$

这样——



这很简单，（几乎）就是一条直线。

“这条”直线的斜率，就是

$$f(x) \text{ 在 } x=0 \text{ 这点的导数 (derivative), 记作 } f'(0)$$

猜猜 $f'(0)$ 等于多少?

导数的严格定义

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} (\star)$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$(a+h, f(a+h))$ 和 $(a, f(a))$ 是函数图像上的两点，$(\star)$ 是他们之间连线的斜率。取极限——$f(x)$ 在 $x=a$ 的导数，是切线的斜率。这个值也叫 $f(x)$ 在 $x=0$ 的变化率。

作为函数的导数

导数是一个数，但它不仅仅是一个数：

对于函数 $f(x)$，如果它在任意一点都有导数，

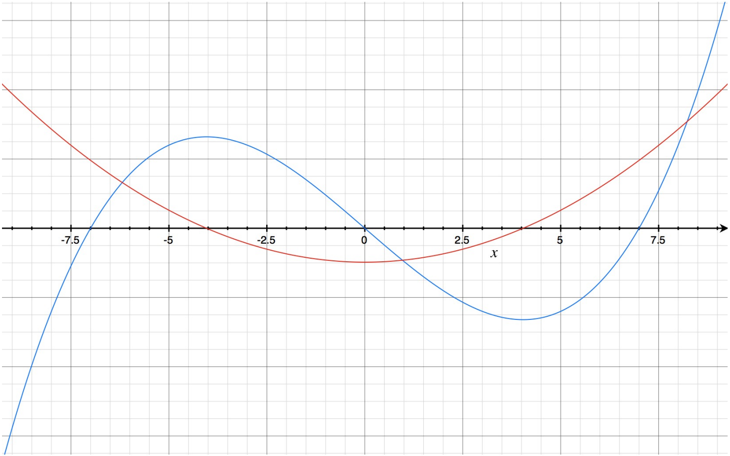
则从 $f(x)$ 我们可以得到一个新的函数 $f'(x)$：

$f'(x)$ 在 $x = c$ 处的值，

是 $y = f(x)$ 的图像在 $(c, f(c))$ 这点的切线的斜率。

一个小问题

下图中有两个函数的图像，一个是 $f(x)$，一个是 $f'(x)$，把它们区分出来。



罗尔定理（Rolle's Theorem）

给定 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$, 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 上有导数，且 $f(a)=f(b)=0$, 则存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f'(c)=0$。

罗尔定理（Rolle's Theorem）

为什么罗尔定理是对的呢?

一只鸟从 a 飞到 b, 中间肯定要经过一个最高点，最高点的切线斜率就是 0.

罗尔定理（Rolle's Theorem）

严格证明：

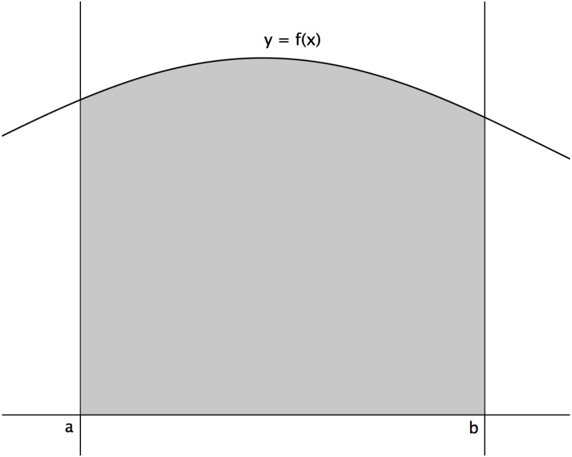
- 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 中某点处 >0，则 $f(x)$ 一定有非零的最大值，在那个点导数为 0.
- 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 中某点处 <0，则 $f(x)$ 一定有非零的最小值，在那个点导数为 0.
- 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 中既不大于零，也不小于零，则 $f(x)$ 总是 0，(a,b) 中任意一点的导数都为 0.

又一个小问题

$f(x)$ 有四个零点，求证 $f'''(x)$ 有一个零点。

面积

给定 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$，下图阴影部分



的面积是多少？

面积

为上述面积引入一个记号

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

——其中真正的信息是 a, b, f.

至于 t, 只是一个哑变量（dummy variable），同样的量，记作

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

也是可以的。这个记号读作 $f(x)dx$ 从 a 到 b 的积分

面积

一旦克服了对新记号的恐惧，

对于 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$

这只不过是个数字而已。

所以——以下对话也是合理的：

- 你今年多大了？
- 我今年 $\displaystyle\int_0^{25} \frac{x^3\,dx}{1+x^3}$ 岁。

至于怎么计算，那是另一回事。

一点点“哲学”

定义与计算的分离可以说是一个重大的飞跃。很多人就栽倒在这里。

- 定义通常有深刻的意义，但却对计算没有帮助。
- 计算通常用到由定义导出的技巧，但是不理解定义直接引入，则莫名其妙。
- 单纯做题（通常是计算）有时无助于理解定义。
- 需要沉思。

黎曼和（Riemann Sum）

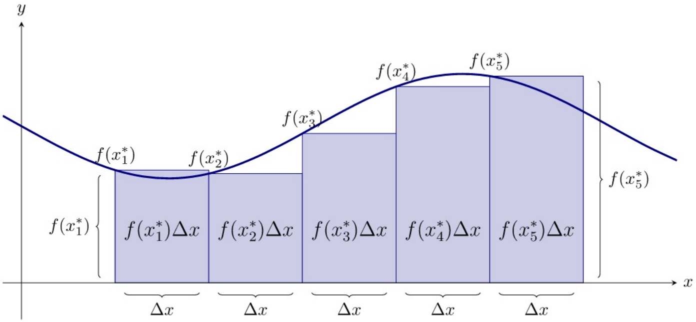
积分的真正定义

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_i f(x_i^*)\Delta x_i$$

完全无助于计算，但却对理解积分非常重要。

黎曼和（Riemann Sum）

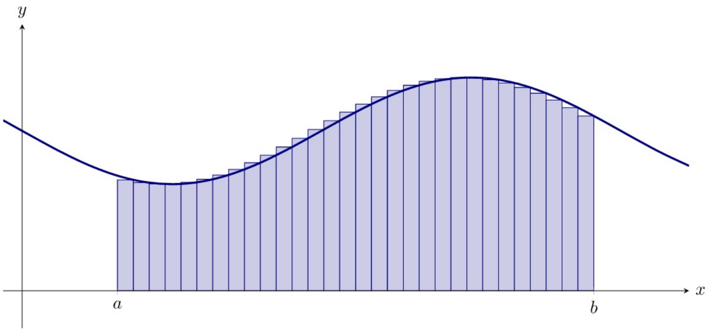
上面右边的求和，叫做黎曼和，这是一些矩形的面积之和



$$f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots + f(x_5^*)\Delta x_5 =: \sum_{i=1}^{5} f(x_i^*)\Delta x_i$$

黎曼和（Riemann Sum）

对于更细的划分 Δ，显然，这个和要更接近曲线下方的面积



$$f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n^*)\Delta x_n =: \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x_i$$

黎曼和（Riemann Sum）

取极限

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_i f(x_i^*)\Delta x_i$$

就是（黎曼）积分的定义：

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_i f(x_i^*)\Delta x_i$$

一个自然的问题

道理我都懂，那到底怎么计算刚刚定义出来的面积呢?

牛顿-莱布尼兹公式

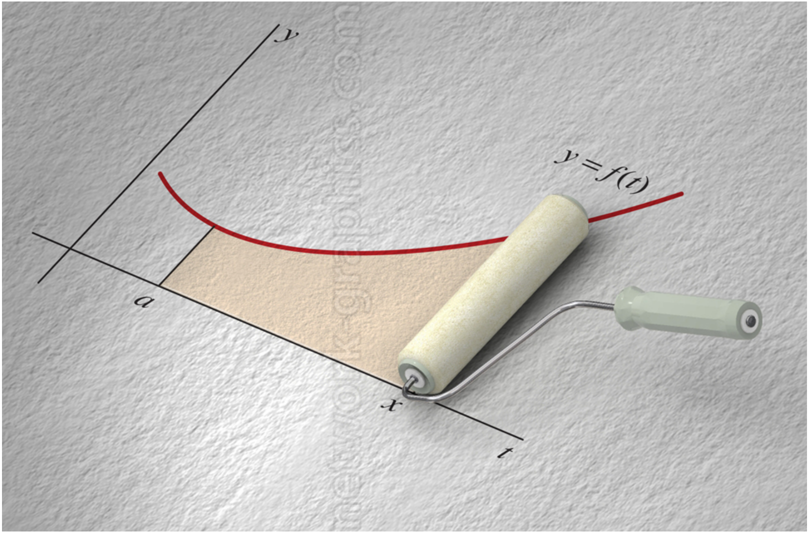
一个神奇的公式

又叫“微积分基本定理”（fundamental theorem of calculus）：

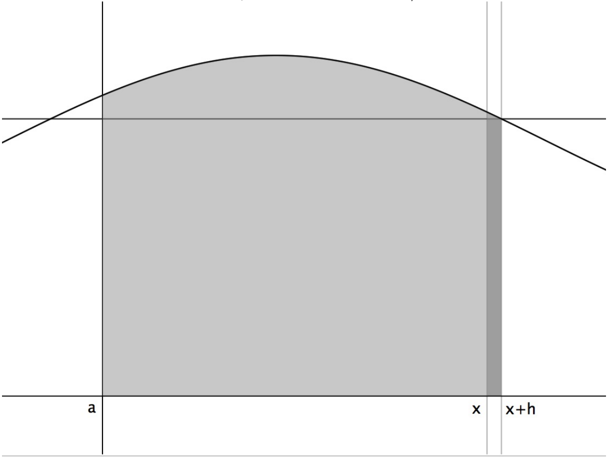
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

左边 = 面积的变化率，右边 = 函数 $f(x)$ 的值。

这是一个不平凡的公式，但它显然是对的，为什么呢?


y
$y=f(t)$
a
x
t

因为面积的变化率就是函数在那一点的值啊。



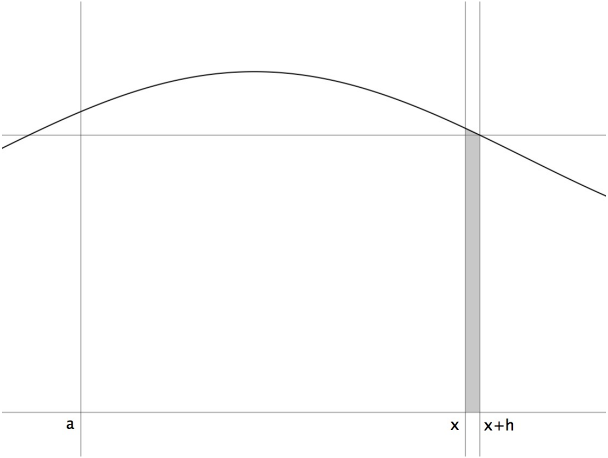
面积的变化率

如果把面积 $\int_a^x f(t)dt$ 记作 $F(x)$, 则按照定义, 面积的变化率为

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

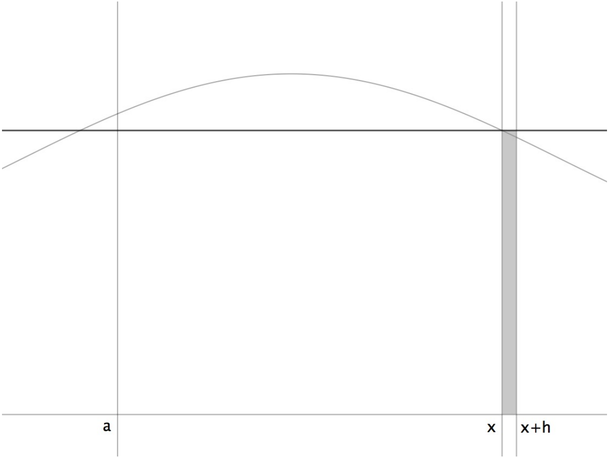
面积的变化率

右边的分子，是两块面积的差，也就是下图中阴影部分的值



面积的变化率

如果把阴影部分看作下图的矩形，则矩形面积等于底乘以高——底边长为 h，而高正好是 $f(x)$。



定积分

牛顿-莱布尼兹公式到底告诉我们什么呢?

一件困难的事情——计算黎曼和的极限,

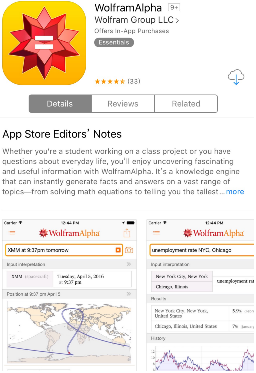
$$\int_c^d f(x)dx := \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_i f(x_i^*)\Delta x_i$$

可以转化成一件简单的事情——计算一个函数在两点的取值的差。

$$\int_c^d f(x)dx = F(c) - F(d)$$

只要你能找到一个 $F(x)$ 使得 $F'(x) = f(x)$.

辅助工具



这个 App 接受输入 "integral of x/(1+x^3)dx for x from 1 to 10"

网站 www.wolframalpha.com 也有类似的功能。

图片来源

- 黎曼和的两张图片来自
  https://ximera.osu.edu/course/mooculus/mooculus/textbook/approximatingTheAreaUnderACurve/digInApproximatingAreaWithRectangles
- 牛顿-莱布尼兹公式后面那张刷油漆的图片来自
  http://www.network-graphics.com/images/calculus/paintroller_area_m.jpg