Progetto fondamenti di automatica

Vaccaro Francesca 239641

Traccia numero 106

Progetto Fondamenti di Automatica n°106

Vaccaro Francesca 239641

L.T. Ingegneria Informatica 23/24

Contents

1 Introduzione

1.1 Argomenti trattati

La seguente relazione è finalizzata alla realizzazione di un'analisi, che toccherà diversi punti suggeriti, di tre differenti tipologie di sistemi, che verranno trattati in maniera separata, e per ognuno saranno date definizioni e leggi, e occasionalmente anche dimostrazioni relative. I tre sistemi che verranno presi in considerazione sono:

1. Sistema LTI-TC
2. Sistema LTI-TD
3. Catena di Markov TD

I primi due della lista presenteranno richieste simili, dunque verrà spesso fatto riferimento a questo fattore.

1.2 Strumenti utilizzati

Per agevolare i vari calcoli, e le varie operazioni che vengono fatte all'interno del progetto, è stato fatto uso di alcuni strumenti:

1. Wolfram Mathematica : un software che permette di poter svolgere calcoli matematici e algebrici attraverso comandi di input, che permette di lavorare con matrici e vettori, e di visionare i grafici relativi alle varie richieste, così da rendere anche la descrizione maggiormente visiva.
2. Python : linguaggio di programmazione, che è stato nello specifico utilizzato all'interno del terzo macro-punto(Catena di Markov).

2 Sistema LTI-TC proprio

In questa prima macro-sezione del progetto ci viene richiesto lo studio di un sistema dinamico che presenta le seguenti caratteristiche :

- Lineare: se un sistema è lineare rispetta anche quello che è detto "principio di sovrapposizione degli effetti", troveremo infatti nella risposta del sistema che questa sarà la somma tra la *risposta libera*[1] e la *risposta forzata*[2],
- Tempo invariante: conosciuta anche come stazionarietà, e dice che a meno del fatto che l'esperimento sia fatto nel passato o nel futuro i risultati sono gli stessi,
- Tempo continuo: come dominio temporale ci troviamo nel continuo,
- Siso: Single input Single output ci dice che un sistema presenta ingresso e uscita scalari,
- Proprio: D = 0, generalmente infatti la risposta di un sistema non è immediata, vi è un bisogno di una mediazione.

[1] ingresso identicamente nullo, anche detto in evoluzione libera
[2] anche detto sistema in quiete

Sistema Dinamico:

$$\begin{cases} \dot{x(t)} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Possiamo notare che il sistema ci viene dato nella rappresentazione I/S/U ovvero Ingresso Stato Uscita.

Matrice dinamica A :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{29}{9} & \frac{49}{3} & -\frac{49}{9} & \frac{49}{9} \\ -\frac{20}{9} & -\frac{43}{3} & \frac{49}{9} & -\frac{49}{9} \\ -\frac{20}{9} & -\frac{46}{3} & \frac{49}{9} & -\frac{58}{9} \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matrice degli ingressi B :

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matrice delle uscite C :

$$C = \begin{pmatrix} -8 & 24 & -32 & -28 \end{pmatrix}$$

2.1 Modi naturali del sistema

La prima richiesta riguarda i **modi naturali del sistema** che servono per la descrizione del comportamento che assume il sistema preso in considerazione nel corso del tempo, andando a considereare però la sola presenza di quelli che sono gli ingressi iniziali. In particolare li individuiamo, nel caso del tempo continuo, come $e^{\lambda t}$, (λ sono gli autovalori). Prima di trovare in maniera effettiva questi elementi del sistema, dobbiamo come prima cosa analizzare la natura della matrice A, in particolare se questa risulta *diagonalizzabile*. Calcoliamo lo **spettro** della matrice, ovvero l'insieme dei suoi autovalori(λ).

Per operare con le matrici verrà utilizzato un software apposito : **Mathematica**, di seguito riporterò i comandi con conseguenti spiegazioni. Per il calcolo degli autovalori scrivo come input:

$$\lambda = Eigenvalues[A]$$

output :

$$\{-3, -3, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$$

Come si può notare, gli autovalori che si ottengono sono *reali* ma *non distinti*, l'informazione che ne deriva è che la *molteplicità algebrica* dell'autovalore -3 è $\{2\}$ e dell'autovalore $-\frac{1}{3}$ è $\{2\}$.

Arrivati a questo punto, sapremo se la matrice è diagonalizzabile solamente se la molteplicità algebrica degli autovalori[3] è uguale alla *molteplicità geometrica*, ovvero la dimensione della base del nucleo : $Ker(A - \lambda I)$

Quindi deve valere : $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$,

input :

$$NullSpace[A - (-3)IdentityMatrix[4]]$$

output:

$$\{\{\frac{7}{2}, -\frac{14}{5}, -\frac{17}{5}, 1\}\}$$

input :

$$NullSpace[A - (-\frac{1}{3})IdentityMatrix[4]]$$

output:

$$\{\{\frac{49}{30}, -\frac{14}{15}, -\frac{11}{15}, 1\}\}$$

Possiamo notare che la molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica sono differenti, ne consegue dunque che la matrica A non risulta essere diagonalizzabile. Prima di sapere quali sono i modi naturali, capiamo prima *quanti* sono, e lo facciamo sfruttando il polinomio minimo e il polinomio caratteristico; il polinomio minimo è uno dei divisori del polinomio caratteristico tale che $P_m(A) = O_{n*n}$, quindi tale che la matrice A è un suo "zero", se non si trova nessun divisore per cui vale ciò, allora polinimio minimo = polinomio caratteristico, difatti la matrice A è sempre uno zero del polinomio caratteristico per il teorema di **Cayley-Hamilton**[4]. Fatto questo preambolo diremo che il numero dei modi naturali corrisponderà al grado del polinomio minimo.

calcolo il polinomio caratteristico

[3] le volte in cui un autovalore λ si trova nello spettro della matrice

[4] ogni matrice A $\in R^{n*n}$ è uno zero del suo polinomio caratteristico; $p_A(\lambda) = det(\lambda I - A), p_A(A) = O_{n*n}$

input:

$$pC = Factor[CharacteristicPolynomial[A, x]]$$

output:

$$\frac{1}{9}(3+x)^2(1+3x)^2$$

calcolo il polinomio minimo

input:

$$Factor[MatrixMinimalPolynomial[A, x]]$$

output:

$$\frac{1}{9}(3+x)^2(1+3x)^2$$

A questo punto verifico il teorema di Cayley-Hamilton:

input:

Simplify[1 IdentityMatrix[4] + $\frac{20}{3}$A + $\frac{118}{9}$A.A+ $\frac{20}{3}$A.A.A + A.A.A.A]

output:

$$\{\{0,0,0,0\},\{0,0,0,0\},\{0,0,0,0\},\{0,0,0,0\}\}$$

Dunque vediamo che è verificato.

Dato il grado del polinomio caratteristico che abbiamo ottenuto, ci aspettiamo dunque di avere 4 modi naturali; adesso andiamo a trovarli tenendo in considerazione il fatto di avere una matrice non diagonalizzabile, con autovalori che hanno molteplicità algebrica > 1, dunque dovremo ricorrere alla forma canonica di Jordan, ovvero una generalizzazione della forma canonica diagonale; quindi avremo che una matrice A $\in R^{n*n}$ è simile tramite una matrice T $\in R^{n*n}$ non singolare ad una forma **diagonale a blocchi**:

input:

$$\{T, \Lambda\} = JordanDecomposition[A]$$

output:

Per come è stato dichiarato, all'interno di questo output vi è la presenza sia della matrice di cambiamento di base T, ma anche della matrice in forma canonica di Jordan Λ, quindi se volessimo prenderle separata-mente dovremmo solamente andare a chiamare il comando e volendo potremmo anche visualizzarle in forma matriciale, così da ottenere il seguente risultato :

input:

$$T//MatrixForm$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{11}{10} & \frac{49}{30} & \frac{49}{50} \\ -\frac{14}{5} & \frac{51}{50} & -\frac{14}{15} & -\frac{13}{50} \\ -\frac{17}{5} & \frac{29}{25} & -\frac{11}{15} & -\frac{11}{25} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Come precedentemente annunciato la matrice T è la matrice di cambiamento di base, overo la matrice non singolare per cui vale la seguente relazione: $AT = T\Lambda$

Vediamo come poter interpretare questa matrice T nella forma di Jordan :

$$T = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{31} & v_{32} \end{pmatrix}$$

La rappresentazione di T avviene nella modalità sopra raffigurata, in quanto, si vogliono evidenziare i blocchi, difatti avremo la presenza di due blocchi, il primo si troverà in corrispondenza della colonna 1 e della colonna 2, il secondo in corrispondenza della colonna 3 e della colonna 4; si vuole evidenziare come v_{11} e v_{21} siano *autovettori standard*, ovvero capaci di soddisfare la seguente relazione $(A - \lambda I)v = 0$. Facciamo la prova su Mathematica e poi vediamo come si comportano gli altri due vettori v_{21} e v_{22}.

input:

$$(A - (-3)IdentityMatrix[4]).T[[All, 1]]$$

output:

$$\{0, 0, 0, 0\}$$

input:

$$(A - (-1/3)IdentityMatrix[4]).T[[All, 3]]$$

output:

$$\{0, 0, 0, 0\}$$

Gli altri due vettori invece restituiranno proprio le colonne precedenti, ecco perchè parleremo di **catene**

input:

$$(A-(-3)IdentityMatrix[4]).T[[All,2]]$$

output:

$$\{\frac{7}{2},-\frac{14}{5},-\frac{17}{5},1\}$$

input:

$$(A-(-1/3)IdentityMatrix[4]).T[[All,4]]$$

output:

$$\{\frac{49}{30},-\frac{14}{15},-\frac{11}{15},1\}$$

Questi risultati ottenuti sono esattamente la prima e la terza colonna. A questo punto visualizziamo in forma matriciale anche Λ:

input:

$$\Lambda//MatrixForm$$

output:

$$\Lambda=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

Dal momento che ci troviamo nel tempo continuo, avremo i modi naturali del sistema nella matrice esponenziale e ottenere una matrice del tipo : $e^{\Lambda t}$

input:

$$Simplify[MatrixExp[\Lambda t]]//MatrixForm$$

output:

$$e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-3t}t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{t}{3}} & e^{-\frac{t}{3}}t \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{t}{3}} \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi ricavato i modi naturali *polinomial-esponenziali*:

- e^{-3t}
- $e^{-3t}t$
- $e^{-\frac{t}{3}}$
- $e^{-\frac{t}{3}}t$

Vediamo come si comportano i modi naturali in termini di *convergenza a 0*, domina il termina esponenziale, dunque ci concentreremo su questo per capire la convergenza. In particolare, un esponenziale converge a zero quando il suo argomento risulta essere strettamente minore di zero :

$$\lim_{t\to+\infty} te^{\lambda t} =?$$

$$\begin{cases} se \quad \lambda < 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} te^{\lambda t} = 0 \\ se \quad \lambda \geq 0 \Rightarrow \lim_{t\to+\infty} te^{\lambda t} = \infty \end{cases}$$

I modi naturali che sono stati ricavati dalla matrice di ingresso A, presentano tutti e 4 degli esponenti strettamente negativi, questa peculiarità poteva essere visibile anche dal calcolo degli autovalori stessi. Lo studio dei modi naturali però non si ferma qui, difatti possiamo anche capire quali sono i modi naturali che convergono a 0 più "lentamente", e quali quelli che convergono a 0 più "velocemente", prima di passare alle considerazioni sarebbe opportuno avere anche una prova grafica :

grafico del primo modo naturale:

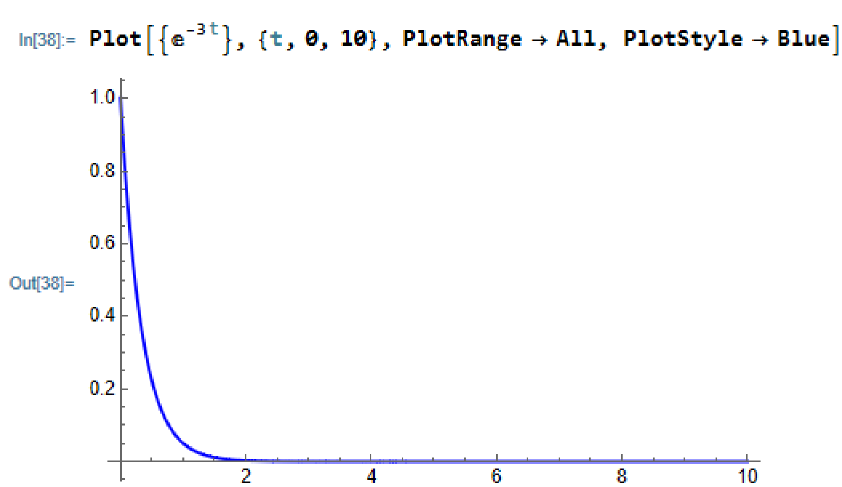


grafico del secondo modo naturale:

In[37]:= **Plot**[{$e^{-3t}\,t$}, {t, 0, 10}, PlotRange → All, PlotStyle → Orange]

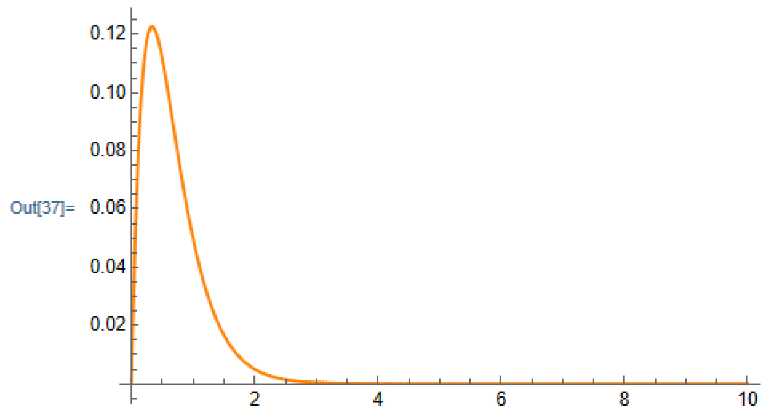


grafico del terzo modo naturale:

In[36]:= **Plot**[{$e^{-t/3}$}, {t, 0, 10}, PlotRange → All, PlotStyle → Green]

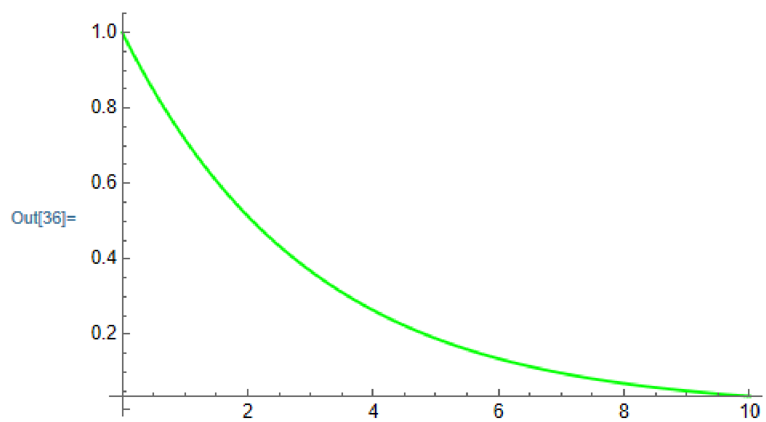


grafico del quarto modo naturale:

In[35]:= **Plot**[{$e^{-t/3}\,t$}, {t, 0, 10}, PlotRange → All, PlotStyle → Red]

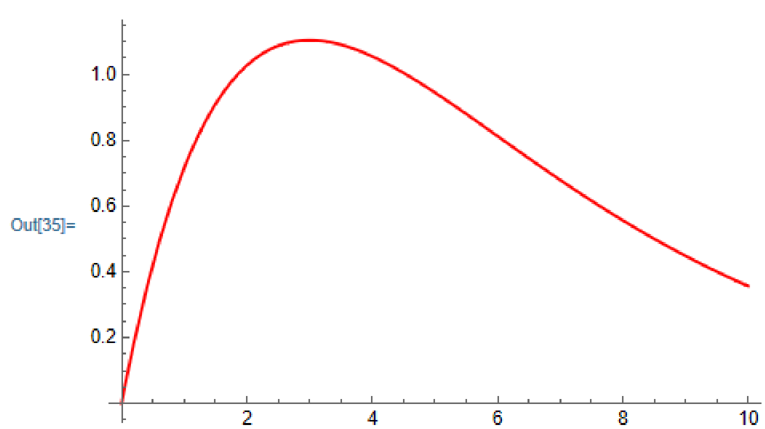
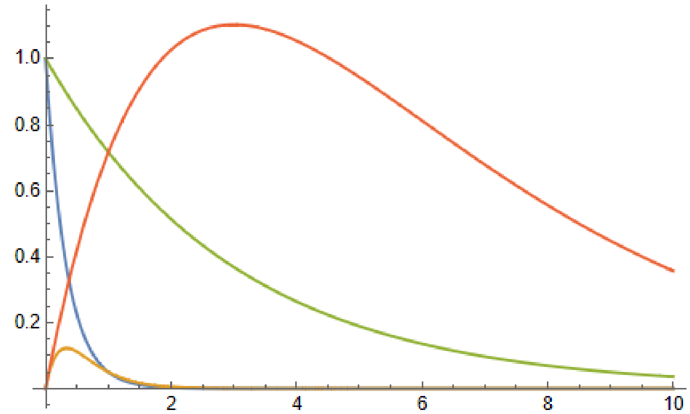


grafico che racchiude tutti i modi naturali:

```
In[22]:= Plot[{{e^(-3 t)}, {e^(-3 t) t}, {e^(-t/3)}, {e^(-t/3) t}}, {t, 0, 10}, PlotRange → All]
```

Out[22]=



Cominciamo a mettere a confronto il grafico relativo al modo naturale e^{-3t} e a quello $e^{-3t}t$, come si può notare, quello che converge più lentamente è $e^{-3t}t$, la motivazione è data dal fatto che l'esponenziale è moltiplicato per un termine lineare, difatti possiamo riscontrare che il termine lineare t può influenzare il comportamento del sistema, inizialmente nel grafico sembra esserci una retta, ma poi prevale il termine esponenziale. Stessa cosa accade se andiamo a confrontare $e^{-\frac{t}{3}}$ e $e^{-\frac{t}{3}}t$, guardandoli infine tutti assieme, il più "lento" è il modo che possiede l'argomento dell'esponenziale più grande e prenderà il nome di **modo dominante**.

2.2 Risposta Libera

La seconda richiesta è quella della **risposta libera** anche conosciuta come *risposta in evoluzione libera*, questa descrive come si comporta il sistema quando l'ingresso è identicamente nullo, in modo che vi sia dipendenza solamente dalle condizioni iniziali. Viene fornito uno stato iniziale che corrisponde a :

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2.2.1 Risposta libera nello stato

In particolare la prima cosa che si andrà a cercare è la risposta libera dello stato, ossia la risposta libera che viene vista in funzione dei vettori dello stato.

Scriviamo il sistema ricordando che l'ingresso è identicamente nullo:

$$\begin{cases} x\dot{(t)} = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

A questo punto si tratta della risoluzione di una equazione differenziale, il risultato che ne deriva è esprimibile come esponenziale ed è il seguente:

$$x_l(t) = e^{At}x_0$$

dove e^{At} è dimensionalmente una matrice $n * n$, mentre x_0(come abbiamo potuto osservare) è un vettore colonna $n * 1$. Dobbiamo però considerare che la nostra matrice è non diagonalizzabile e presenta autovalori coincidenti, quindi per evitare inesattezze procedo nella ricerca della matrice simile a e^{At} tramite T e questa è $e^{\Lambda t}$, si ottiene una relazione del tipo $e^{At}T = Te^{\Lambda t}$, dunque $e^{At} = Te^{\Lambda t}T^{-1}$; quindi $x_l(t) = Te^{\Lambda t}T^{-1}x_0$, ma $T^{-1}x_0$ è proprio z_0 ovvero la proiezione dello stato iniziale lungo le colonne della matrice di cambiamento di base. Alla fine otterremo la conseguente relazione:

$$\boxed{x_l(t) = Te^{\Lambda t}z_0}$$

Ora, riportiamo i passaggi sopra descritti in Mathematica in modo da poter osservare la risposta libera(tutto ciò dopo esserci assicurati di aver caricato nel software lo stato iniziale).

input:

$$z_0 = Inverse[T].x_0$$

output:

$$\{\{-\frac{325}{128}\}, \{-\frac{175}{32}\}, \{-\frac{59}{128}\}, \{\frac{355}{96}\}\}$$

input:

$$x_l[\text{t\_}] := Expand[T.MatrixExp[\Lambda t].z_0]$$

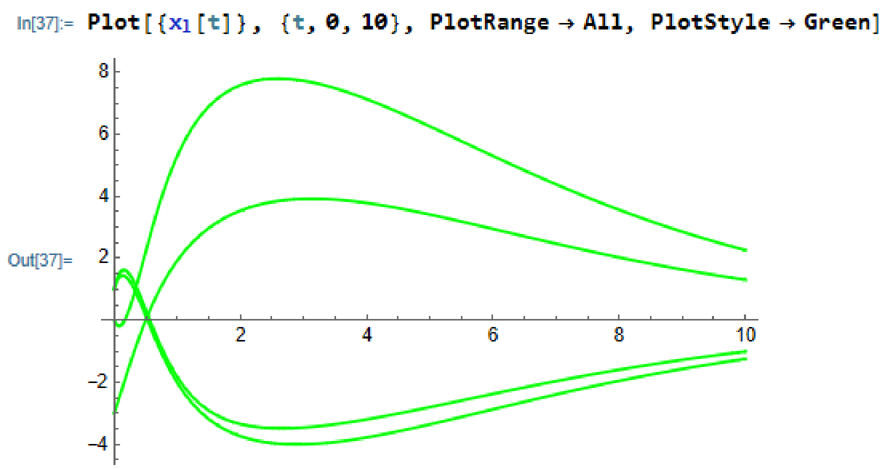
$$x_l[t]//MatrixForm$$

output:

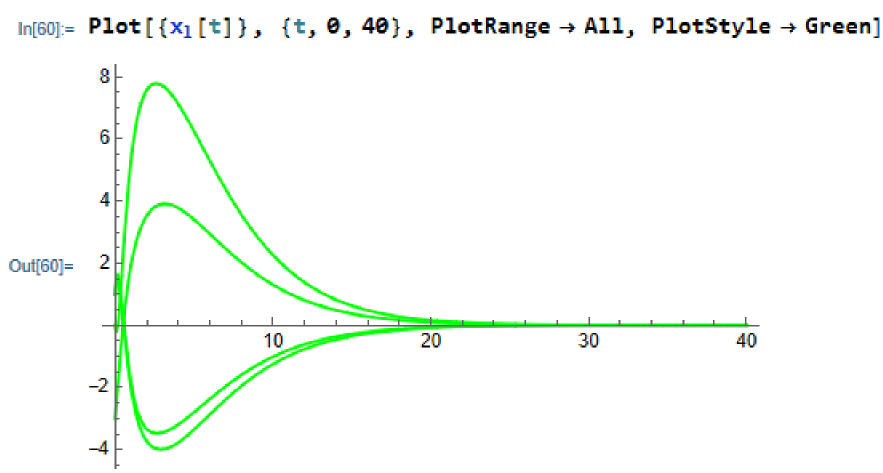
$$\begin{pmatrix} -\frac{735}{256}e^{-3t} + \frac{735}{256}e^{-\frac{t}{3}} - \frac{1225}{64}e^{-3t}t + \frac{3479}{576}e^{-\frac{t}{3}}t \\ \frac{49}{32}e^{-3t} - \frac{17}{32}e^{-\frac{t}{3}} + \frac{245}{16}e^{-3t}t - \frac{497}{144}e^{-3t}t \\ \frac{293}{128}e^{-3t} - \frac{165}{128}e^{-\frac{t}{3}} + \frac{592}{32}e^{-3t}t - \frac{781}{288}e^{-3t}t \\ -\frac{325}{128}e^{-3t} - \frac{59}{128}e^{-\frac{t}{3}} + -\frac{175}{32}e^{-3t}t - \frac{355}{96}e^{-3t}t \end{pmatrix}$$

Come possiamo notare, la risposta libera risulta proprio essere una combinazione lineare dei modi naturali del sistema, perchè, come già precedentemente annunciato rappresenta l'evoluzione intrinseca del sistema nel tempo.

Andiamo a vedere come invece viene rappresentata graficamente e traiamo le opportune conclusioni:



Da questo grafico però, con questo intervallo dei valori che può assumere t, non si nota molto bene la **convergenza** della risposta libera, quindi ampliamo l'intervallo:



Ora possiamo notare meglio la convergenza a zero, data dalla convergenza a zero dei modi naturali.

2.2.2 Risposta libera nell'uscita

La *risposta libera nell'uscita* invece dipende come richiama lo stesso nome dal vettore delle uscite. Per trovarla utilizzo la seguente espressione:

$$y_l(t) = C \cdot x_l(t)$$

Trasporto la formula appena annunciata all'interno di Mathematica e ottengo:

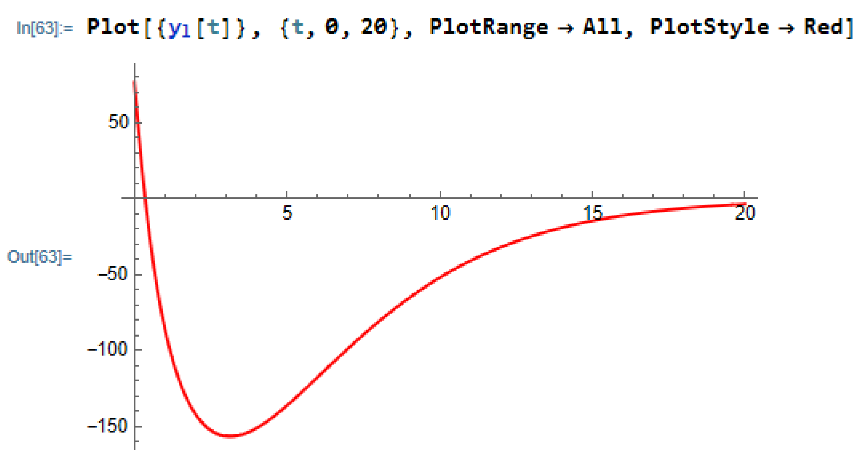
input:

$$y_l[\mathrm{t\_}] := Simplify[C1.x_l[t]]$$

output:

$$\{\{\tfrac{1}{48}e^{-3t}(e^{8\frac{t}{3}}(885 - 7100t) + 9(307 + 420t))\}\}$$

Anche in questo caso, rappresentiamo il risultato appena ottenuto graficamente :



2.3 Configurazione stati iniziali che attivano i modi naturali

Se volessimo andare ad analizzare quali stati iniziali attivano i modi naturali, dovremmo andare a lavorare sulla matrice T trovata in precedenza, ovvero la matrice di cambiamento di base nella forma di jordan.

$$T = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{11}{10} & \frac{49}{30} & \frac{49}{50} \\ -\frac{14}{5} & \frac{51}{50} & -\frac{14}{15} & -\frac{13}{50} \\ -\frac{17}{5} & \frac{29}{25} & -\frac{11}{15} & -\frac{11}{25} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa matrice è composta da colonne le quali sono gli autovettori linearmente indipendenti, che sono associati agli autovalori precedentemente calcolati per la matrice A, che ricordiamo essere:

$$\lambda = \{-3, -3, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$$

Gli stati iniziali che attivano i modi naturali sono rappresentati come combinazione lineare delle colonne di T; vado a prendere prima la prima colonna e la moltiplico per $\frac{1}{3}$ ovvero l'antireciproco del modo naturale associato alla prima colonna, e svolgo le seguenti operazioni:

1. moltiplico il fattore $\frac{1}{3}$ per la colonna che desidero di T

2. trovo la risposta libera relativa a questo stato iniziale

Per farlo vado a digitare in mathematica $x_1 = \frac{1}{3} \cdot T[[All, 1]]$, in questo modo moltiplico il fattore per la prima colonna e ottengo:

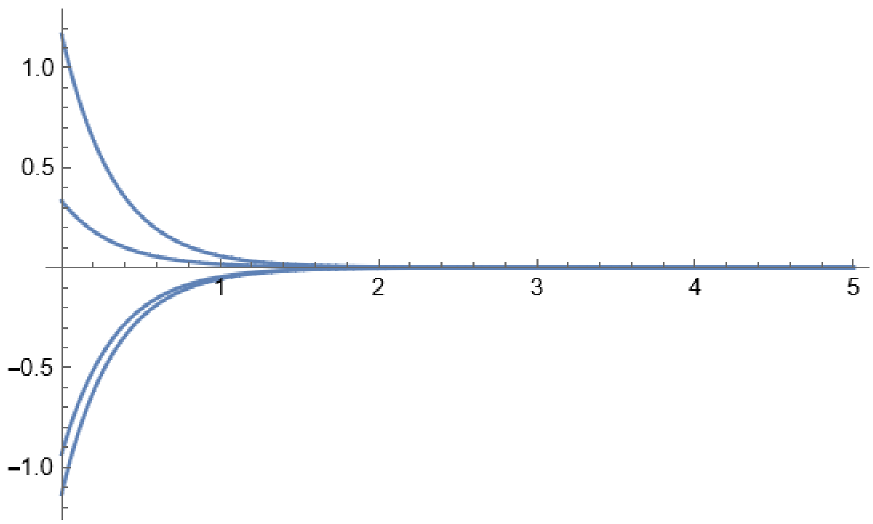
$$\{\frac{7}{6}, -\frac{14}{15}, -\frac{17}{15}, \frac{1}{3}\}$$

Ora ricerco la risposta libera $x_{l1}[t_] := Expand[Simplify[MatrixExp[At].x_1]]$

$$\{\frac{7e^{-3t}}{6}, -\frac{14e^{-3t}}{15}, -\frac{17e^{-3t}}{15}, \frac{1e^{-3t}}{3}\}$$

Avremmo potuto tuttavia utilizzare anche la formula che coinvolge z_0 o per meglio dire in questo caso z_1 e procedere dunque nel modo analogo utilizzato nel precedente punto.

Andiamo a vedere graficamente :



Questa operazione la si può fare anche su più colonne, per visionare per esempio lo stato iniziale che attiva i due modi naturali.

2.4 Funzione di trasferimento, poli e zeri

Il terzo punto del progetto che verrà trattato è quello della **funzione di trasferimento del sistema** abbreviata anche attraverso l'acronimo di **Fdt**, simbolicamente viene indicata con $G(s)$ se ci troviamo a tempo continuo, oppure $G(z)$ se invece ci troviamo a tempo discreto. Questa è una paricolare funzione di variabile complessa, tale che moltiplicata algebricamente per la per la *trasformata di Laplace* anche chiamata *L-trasformata* dell'ingresso,(se ci troviamo nel discreto intendiamo la moltiplicazione algebrica con la Z-trasformata) restituisce la trasformata di Laplace(o trasformata Z) della **risposta forzata**.

$$Y_f(s) = G(s)U(s)$$

Da qui verrà fuori anche la seconda definizione:

$$G(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)}$$

Che vede dunque la FDT come il rapporto tra risposta forzata e forzamenti ($\frac{RispostaForzata}{Forzamenti}$)

Dal momento che $Y_f(s) = (C(SI - A)^{-1}B + D)U(s)$, dividendo per U(s) avremo $G(s) = C(SI - A)^{-1}B + D$.

Sarà proprio questa la formula che verrà utilizzata(dal momento però che il soggetto della trattazione è un sistema proprio, la D vale proprio 0). $(sI - A)^{-1}$ corrisponde alla matrice inversa di $(sI - A)$ e posso calcolarla attraverso la seguente formula:

$$(sI_n - A)^{-1} = \frac{1}{det(sI_n - Aa)} \cdot adj(sI_n - A)$$

Dove $adj(sI_n - A)$ rappresenta la matrice aggiunta(anche detta aggiogata). Sostituiamo la relazione appena ricavata all'interno della formula della fdt:

$$G(s) = C(\frac{1}{det(sI_n - Aa)} \cdot adj(sI_n - A)) \cdot B + D$$

Da questa formula viene fuori che:

$$\frac{1}{det(sI_n - Aa)}$$

corrisponde ad un polinomio di grado n $\Rightarrow p_a(s)$

$$C \cdot adj(sI_n - A)$$

è uno scalare combinazione lineare, polinomio di grado al più n-1.

Dunque avremo un rapporto di polinomi, il grado di questi due, dipenderà dalla natura del sistema, difatti se il sistema risulterà proprio, allora numeratore e denominatore non si raggiungeranno mai in termine di grado(grado numeratore $<$ grado denominatore); nel caso in cui invece il sistema dovesse essere improprio, allora i due gradi potrebbero raggiungersi(grado numeratore $\leq$ grado denominatore).

input:

$G[\mathrm{s\_}] := Simplify[C1.Inverse[sIdentityMatrix[4] - A].B]$

output:

$$\{\{\frac{36(-3+s)^2}{(3+10s+3s^2)^2}\}\}$$

Non è però questo, l'unico modo che viene messo a disposizione da mathematica per il calcolo della fdt, difatti, andando a omettere le definizioni formali, si potrebbe utilizzare una particolare funzione:

input:

$$\Sigma = StateSpaceModel[A, B, C1]$$

output:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
\frac{29}{9} & \frac{49}{3} & -\frac{49}{9} & \frac{49}{9} & 1 \\
-\frac{20}{9} & -\frac{43}{3} & \frac{49}{9} & -\frac{49}{9} & -1 \\
-\frac{20}{9} & -\frac{46}{3} & \frac{49}{9} & -\frac{58}{9} & -1 \\
2 & 2 & 1 & -1 & 0 \\
\hline
-8 & 24 & -32 & -28 & 0
\end{array}\right)^{\mathcal{S}}$$

input:

$$G1[s] = TransferFunctionModel[\Sigma]$$

output:

$$\left(\frac{36 - 24\,s + 4\,s^2}{1 + \frac{20\,s}{3} + \frac{118\,s^2}{9} + \frac{20\,s^3}{3} + s^4}\right)^{\mathcal{T}}$$

Si può notare che il denominatore della funzione di trasferimento corrisponde al polinomio caratteristico precedentemente calcolato.

La funzione StataSpaceModel che è stata utilizzata, mi restituisce una matrice che rappresenta il sistema dinamico definito dalle 3 matrici che le sono state passate, in questo modello vi sono tutte le informazioni necessarie per l'analisi dell'evoluzione del sistema dinamico. I due metodi utilizzati risultano essere equivalenti, e questa affermazione può essere provata anche attraverso il calcolo dei poli e degli zeri della funzione di trasferimento del sistema.

2.4.1 Poli della fdt

Per **Polo** della *funzione di trasferimento* si intende quel numero complesso ρ tale che:

$$\lim_{s \to \rho} G(s) = +\infty$$

corrispondono dunque a quelli che sono gli *zeri del denominatore*.

Procediamo al calcolo nei due modi per ora testati:

input:

$$Solve[Denominator[G[z][[1]]] == 0, z]$$

output:

$$\{\{z \Rightarrow -3\}, \{z \Rightarrow -3\}, \{z \Rightarrow -(1/3)\}, \{z \Rightarrow -(1/3)\}\}$$

Si può notare che, dal momento che il denominatore della funzione di trasferimento risulta equivalente al polinomio caratteristico, i suoi zeri(nonchè poli della fdt) saranno proprio gli autovalori.

Utilizziamo l'altro metodo:

input:

$$transferFunctionPoles[\Sigma]$$

output:

$$\{\{\{-3, -3, -(1/3), -(1/3)\}\}\}$$

2.4.2 Zeri della fdt

Uno **zero** della funzione di trasferimento è un numero complesso ζ tale che:

$$(G(\zeta) = 0)$$

dunque parliamo degli zeri del numeratore.

Calcoliamoli nel software:

input:

$$Solve[Numerator[G[z][[1]]] == 0, z]$$

output:

$$\{\{z \Rightarrow 3\}, \{z \Rightarrow 3\}\}$$

Secondo metodo:

input:

$$transferFunctionZeros[\Sigma]$$

output:

$$\{\{\{3, 3\}\}\}$$

Anche in questo caso le due funzioni sono esattamente equivalenti.

2.5 Risposta al gradino, e grafico

Altro punto dell'analisi del sistema, è l'analisi della **risposta forzata** al **gradino unitario**. Prima di passare all'analisi vera è propria è doveroso capire i concetti che verranno esaminati.

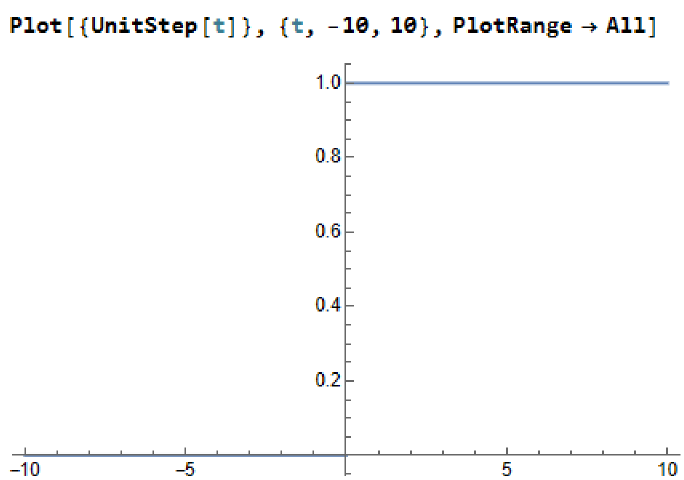
2.5.1 Cosa è la risposta forzata?

Partiamo dal concetto della *risposta forzata*, questa come già accennato nel corso della relazione, può essere anche definita come risposta in evoluzione forzata e permette di analizzare il sistema quando è in quiete, ovvero quando il vettore delle condizioni iniziali è nullo, dipenderà solamente dall'ingresso. La risposta forzata si compone a sua volta della risposta a regime(dipendente dall'ingresso), e la risposta transitoria(dipendente dai modi naturali).

$$y_f(t) = y_{ss}(t) + y_{tr}(t)$$

2.5.2 Concetto di gradino unitario

Il secondo importante, e centrale concetto è quello del *gradino unitario*, il quale è un *segnale canonico* che permette di capire come si comporta la risposta forzata, appartiene alla famiglia dei segnali/ingressi *polinomiali*[5], è difatti definito come un polinomiale di base, è anche importante specificare che è un segnale **right-sided**(come tutti gli altri segnali/ingressi canonici), ovvero è nullo per t <0 e dunque definito soltanto per t ≥ 0, presenta il seguente grafico:



Si può facilmente notare il fatto che sia right-sided, e poi possiamo anche andare ad individuare *l'ampiezza* del gradino, quindi otterremo una funzione del tipo:

$$f(x) = \begin{cases} U & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Dal momento che il gradino che vogliamo utilizzare è **unitario**, la sua ampiezza corrisponderà ad 1. A questo passiamo al calcolo della trasformata di Laplace, che però richiede dei controlli preventivi per capire se converge o meno, questi controlli, servono per stabilire se una funzione/segnale è definibile di *classe* $\mathscr{L}$:

1. continua a destra in zero: la nostra funzione soddisfa questo requisito.

2. continua a tratti: anche questo è soddisfatto.

[5] i segnali o ingressi canonici si suddividono in due famiglie: i polinomiali e i periodici

3. maggiorata da un segnale esponenziale; troviamo che il segnale che riesce a maggiorarla è ke^{at} con a = 0 e k = $|U|$.

Quindi la nostra funzione sarà del tipo:

$$f(t) = \begin{cases} Ue^{at}\|_{a=0} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$Ue^{at}\|_{a=0} = U\frac{1}{s}$$

Il gradino verrà indicato con:

$$U \cdot 1(t)$$

Se il simbolo $1(t)$ viene affiancato ad una funzione questo fungerà da "interruttore", se $t \geq 0$ allora la funzione sarà "attivata", altrimenti disattivata.

2.5.3 Risposta al gradino unitario di variabile s

Procediamo a trovare la risposta a gradino unitario, ricordando la formula ricavata nel precedente punto che lega la risposta forzata, con la funzione di transferimento e la trasformata di Laplace dell'ingresso del sistema:

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Dal momento che $U(s) = \mathscr{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$, allora:

$$Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$$

input:

$$Factor[G[s]LaplaceTransform[UnitStep[t], t, s]]$$

output:

$$\{\{\frac{36(-3+s)^2}{s(3+s)^2(1+3s)^2}\}\}$$

2.5.4 Divisione in fratti semplici (poli multipli)

Il risultato appena ottenuto è la risposta al gradino unitario, calcolata nel dominio della variabile complessa "s", quello che però stiamo cercando è una corrispondenza nel dominio del tempo; motivo per cui procediamo dividendo la funzione ottenuta in fratti semplici, che ci faciliterranno le cose, oltre a mettere in evidenza alcuni aspetti. Per farlo però bisogna tener conto di una cosa, difatti nelle precedenti richieste, erano stati trovati i poli della fdt, che corrispondono agli autovalori, e che quindi risultano essere reali e coincidenti, ci sarà quindi uno schema del tipo:

$$\boxed{F(s) = \frac{n_F(s)}{(s-p_1)^{v1}(s-p_2)^{v2} \ldots (s-p_r)^{vr}}}$$

Dove v_1, v_2, ..., v_r è la **molteplicità algebrica**

Esplicitando i fratti semplici otterremo:

$$\frac{C_{11}}{(s-p_1)} + \frac{C_{12}}{(s-p_1)^2} + \ \ldots \ + \frac{C_{1v_1}}{(s-p_1)^{v_1}} +$$
$$+\frac{C_{21}}{(s-p_2)} + \frac{C_{22}}{(s-p_2)^2} + \ \ldots \ + \frac{C_{2v_2}}{(s-p_2)^{v_2}} +$$
$$\ldots$$
$$+\frac{C_{r1}}{(s-p_r)} + \frac{C_{r2}}{(s-p_r)^2} + \ \ldots \ + \frac{C_{rv_r}}{(s-p_r)^{v_r}}$$

Ricordiamo che il numero di fratti semplici che otteniamo per ogni polo è pari alla sua molteplicità algebrica, dunque ci aspettiamo 4 fratti semplici per i poli, dunque relativi ai modi, che costituiranno il *transitorio* e poi quello relativo all'ingresso, chiamato anche *risposta a regime*.

Con la funzione Apart[$Y_f[s]$] vediamo la scomposizione dei fratti:

input:

$$Apart[G[s]/s]$$

output:

$$\{\{36/s - 27/(4(3+s)^2) - 81/(16(3+s)) - 675/(4(1+3s)^2) - 1485/(16(1+3s))\}\}$$

Con questa funzione però non è sempre possibile avere un'idea chiara di come sono suddivisi i fratti, vi sono infatti alcune casistiche(in cui otterremo poi dei risultati complessi e coniugati), in cui mathematica non va a spacchettare totalmente il denominatore, difatti si procederà "a mano".

Esplicito la divisione in fratti:

$$\frac{C_1}{s} + \frac{C_{11}}{s+3} + \frac{C_{12}}{(s+3)^2} + \frac{C_{21}}{s+\frac{1}{3}} + \frac{C_{22}}{(s+\frac{1}{3})^2}$$

2.5.5 Formula di Heaviside non semplificata

Per trovare $C_1, C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ utilizziamo la formula di Heaviside non semplificata(è detta tale in quanto vi è la presenza dei poli multipli, se così non fosse stato la formula sarebbe stata semplificata): prendiamo un indice i che va da 1 a r, e un indice j che va da 1 a v_i, avremo che:

$$C_{ij} = \frac{1}{(v_i - j)!} \cdot \lim_{s\to\ p_i} \frac{d^{v_{i-j}}}{ds^{v_{i-j}}} \cdot ((s-p_i)^{v_i} F(s))$$

Per evitare che vi siano ambiguità all'interno di Mathematica andremo a chiamare C_{ij} come D_{ij} per il resto rimarrà tutto invariato.

Per quanto riguarda D_1 non c'è bisogno di calcolare il limite, in quanto risulterebbe :

$$D_1 = \lim_{s\to 0} s \cdot Y_f(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} = G(0) = 36$$

Prima di passare al resto dei calcoli, è importante soffermarci sul risultato appena ottenuto, questo G(0) prende difatti il nome di **guadagno statico/guadagno in continua**, e lo si ricava da uno dei *teoremi asintotici*[6], ed è il **teorema del valore finale**:

TEO(VALORE FINALE)
Sia $f(t)$ continua e di classe $\mathscr{L}$ e che : $f_\infty = lim_{t\to+\infty} f(t)$ esista nel dominio del tempo e sia finito,
$\Rightarrow$ il valore finale risulterà essere $f_\infty = lim_{s\to 0} s \cdot f(s)$

partiamo dalla premessa di avere un sistema *bibo-stabile*(questo sitema lo è, ma per maggiori chiarimenti, l'argomento è affrontato nella sottosezione 2.9.1), ora l'operazione che andremo a fare sarà quella di calcolare la risposta forzata ad un gradino di ampiezza U, in questo caso U = 1, ma per trattarlo in maniera generale lasceremo in questa piccola trattazione U, che come già visto prima è $Y(s) = G(s) \cdot \frac{U}{s}$, applichiamo il teorema del valore finale, e quindi avremo che:

$$y_\infty = lim_{t\to+\infty} y(t) = lim_{s\to 0} s \cdot f(s) = lim_{s\to 0} s \cdot G(s)\frac{U}{s} = G(0) \cdot U$$

Questo valore ricavato lo indichiamo con Y che denota il livello dell'uscita forzata quando il transitorio è esaurito, se da $Y = G(0) \cdot U$ ricaviamo G(0) $\Rightarrow G(0) = \frac{Y}{U}$ e questo è proprio il **guadagno statico**, perché andiamo a fare il rapporto tra il livello di uscita forzata a transitorio finito e il livello del gradino in ingresso.

[6]i due teoremi asintotici sono: il teorema del valore iniziale e il teorema del valore finale, questi possono essere applicati sia nel continuo che nel discreto

Chiusa questa breve parentesi, riprendiamo con il calcolo dei coefficienti dei fratti, applicando Heaviside:

input:

$$D_{12} = Limit[(s+3)^2 Y_f[s], s \to -3]$$

output:

$$-\frac{27}{4}$$

input:

$$der = D[(s+3)^2 Y_f[s], s]$$

input:

$$D_{11} = Limit[der, s \to -3]$$

output:

$$-\frac{81}{16}$$

input:

$$D_{22} = Limit[(s+\frac{1}{3})^2 Y_f[s], s \to (\frac{1}{3})]$$

output:

$$-\frac{75}{4}$$

input:

$$der2 = D[(s+\frac{1}{3})^2 Y_f[s], s]$$

input:

$$D_{12} = Limit[der2, s \to -\frac{1}{3}]$$

output:

$$-\frac{495}{16}$$

A questo punto porto la risposta forzata a variabile complessa nel dominio del tempo, utilizzando l'antitrasformata di Laplace:

```
yf[t_] := D1 UnitStep[t] + D11 Exp[-3 t] × UnitStep[t] + D12 t Exp[-3 t] × UnitStep[t]
+D21 Exp[-(1/3) t] × UnitStep[t] + D22 t Exp[-(1/3) t]
```

In[156]:= `yf[t]`

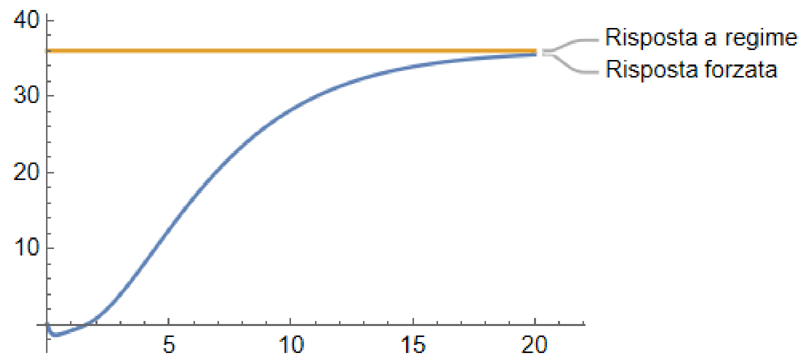
Out[156]= $\left\{\left\{-\frac{75}{4} e^{-t/3} t + 36\,\mathrm{UnitStep}[t] - \frac{81}{16} e^{-3t}\,\mathrm{UnitStep}[t] - \frac{495}{16} e^{-t/3}\,\mathrm{UnitStep}[t] - \frac{75}{4} e^{-3t} t\,\mathrm{UnitStep}[t]\right\}\right\}$

2.5.6 Grafici

Ora non ci resta altro che visionare i grafici:

```
Plot[{yf[t], 36}, {t, 0, 20}, PlotRange → All,
 PlotLabels → {"Risposta forzata", "Risposta a regime"}]
```

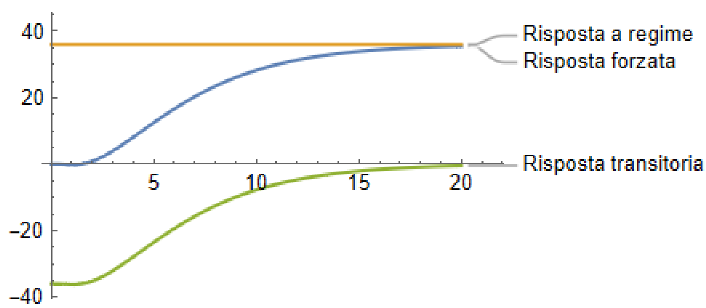
Out[157]=



$$\mathrm{Plot}\left[\left\{36 - \frac{81\, e^{-3t}}{16} - \frac{495}{16\,(e^{t})^{1/3}} - \frac{27}{4} e^{-3t}\, t - \frac{75\, t}{4\,(e^{t})^{1/3}},\ 36,\ -\frac{81\, e^{-3t}}{16} - \frac{495}{16\,(e^{t})^{1/3}} - \frac{27}{4} e^{-3t}\, t - \frac{75\, t}{4\,(e^{t})^{1/3}}\right\}\right.$$

```
, {t, 0, 20}, PlotRange → All, PlotLabels → {"Risposta forzata",
  "Risposta a regime", "Risposta transitoria"}]
```

Out[160]=



Nel secondo grafico possiamo notare bene la differenza tra risposta a regime, quindi la risposta relativa all'ingresso data da $36 \cdot 1(t)$, e la risposta transitoria, dunque la risposta legata ai modi naturali del sistema.

2.6 Risposta al segnale periodico

Se all'interno del precedente punto, abbiamo visto il comportamento della risposta forzata del sistema al gradino unitario, ora andremo ad analizzare il comportamento della risposta forzata al **segnale periodico**, un altro segnale/ingresso canonico, appartenente questa volta alla famiglia dei **periodici**, armoniche elementari che si presentano nel seguente modo:

$$Asin(\omega t + \psi)1(t)$$

$$Acos(\omega t + \psi)1(t)$$

Non dimentichiamo che parliamo sempre di funzioni *right-sided.* In particolar modo, possiamo avere libera scelta sulla determinazioni dei parametri quali:

1. ampiezza: A_m che in questo caso specifico è stata scelta pari a 1;
2. pulsazione: ω, anche questa pari a 1;
3. ψ pari a 0.

   Il nostro segnale sul quale calcoleremo la risposta forzata sarà del tipo:

   $$sin(t)$$

   Una volta che conosciamo il segnale, possiamo ricavare attraverso le formule di Eulero la *trasformata di Laplace*:

   $$sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

   nel nostro caso $\varphi = \omega$ t:

   $$\Rightarrow sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

   scomponiamo la frazione:

   $$\Rightarrow sin(\omega t) = \frac{1}{2j}e^{j\omega t} - \frac{1}{2j}e^{-j\omega t}$$

   scriviamo la trasformata di Laplace, ricordando le proprietà di linearità che presenta l'operatore:

   $$\Rightarrow \mathscr{L}[sin(\omega t)] = \frac{1}{2j} \cdot \mathscr{L}[e^{j\omega t}] - \frac{1}{2j} \cdot \mathscr{L}[e^{-j\omega t}]$$

   Ricordiamo che per quanto riguarda la trasformata di Laplace, $e^{at} = \frac{1}{s-a}$ dunque avremo che : $\mathscr{L}[e^{jwt}] = \frac{1}{s-j\omega}$ e $\mathscr{L}[e^{-jwt}] = \frac{1}{s+j\omega}$, sostituiamo i risultati appena derivati e avremo che:

$$\mathscr{L}[sin(\omega t)] = \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{s + j\omega}$$

Questa è una **combinazione lineare** che presenta come coefficienti dei numeri complessi, tuttavia possiano anche andare ad eliminare il termine "j" :

$$\frac{1}{2j}(\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}) = \frac{1}{2j}(\frac{(s + j\omega) - (s - j\omega)}{(s - j\omega)(s + j\omega)}) =$$

$$\boxed{= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}}$$

Ora possiamo passare a Mathematica per poter vedere questa risposta forzata sia a livello algebrico che a livello grafico.

Vado a caricare all'interno del programma i dati che mi servono, che sono stati già esplicati all'inizio di questo punto.

Calcolo la trasformata di Laplace:

input:

$$U[s\_] := LaplaceTrasform[A_m Sin[t] \times UnitStep[t], t, s]$$

U[s]

$$output : \frac{1}{1 + s^2}$$

Ed è esattamente come ci aspettavamo fosse, difatti grazie alla formula in precedenza calcolata, la trasformata di Laplace risultava essere: $\frac{\omega}{s^2+1}$, sostituendo la nostra $\omega = 1$ verrà proprio:

$$\frac{1}{1 + s^2}$$

.

La risposta forzata sarà data dal prodotto tra G[s] e U[s]:

$$Y_{for} = \{\{\frac{36(-3 + s)^2}{(1 + s^2)(3 + 10s + 3s^2)^2}\}\}$$

Se andassimo a richiamare la funzione Apart, otterremmo una scomposizione non del tutto semplificata, resterebbe infatti da spacchettare $(1+s^2)$ che dà origine a due denominatori complessi e coniugati: $(s-\imath), (s+\imath)$.

La scomposizione nei sei fratti risulterà essere:

$$\frac{F_1}{(s-\imath)} + \frac{F_2}{(s+\imath)} + \frac{F_{11}}{(s+3)} + \frac{F_{12}}{(s+3)^2} + \frac{F_{21}}{(s+\frac{1}{3})} + \frac{F_{22}}{(s+\frac{1}{3})^2}$$

Calcolando i coefficienti attraverso la formula di Heaviside non semplificata, avremo che i coefficienti saranno:

$$F_1 = \frac{27}{25} + \frac{36\imath}{25}$$

L'altro coefficiente complesso sarà il suo *coniugato*, dunque per trovarlo non si dovrà forzatamente fare il limite, basterà cambiare il segno della parte immaginaria:

$$F_2 = \frac{27}{25} - \frac{36\imath}{25}$$

Questi sono i coefficienti che formeranno poi la risposta a regime/*steady side*; Per il calcolo degli altri procederemo dall'ultimo a ritroso, così da poter applicare la formula di Heaviside non semplificata in maniera più lineare.

$$F_{22} = \frac{45}{8}$$

$$F_{21} = -\frac{135}{32}$$

$$F_{12} = \frac{81}{40}$$

$$F_{11} = \frac{1647}{800}$$

A questo punto esplicitiamo la *risposta steady side*(risposta a regime) attraverso l'utilizzo delle formule di Eulero, avremo infatti che $z(t) + \overline{z(t)} = 2Re(z(t))$

Su mathematica:

$$y_{ss1}[t\_] := 2ComplexExpand[Re[F_1 Exp[It]]]$$

output:

$$2(\frac{27Cos[t]}{25} - \frac{36Sin[t]}{25})$$

Calcoliamo ora l'antitrasformata di Laplace per la risposta forzata:

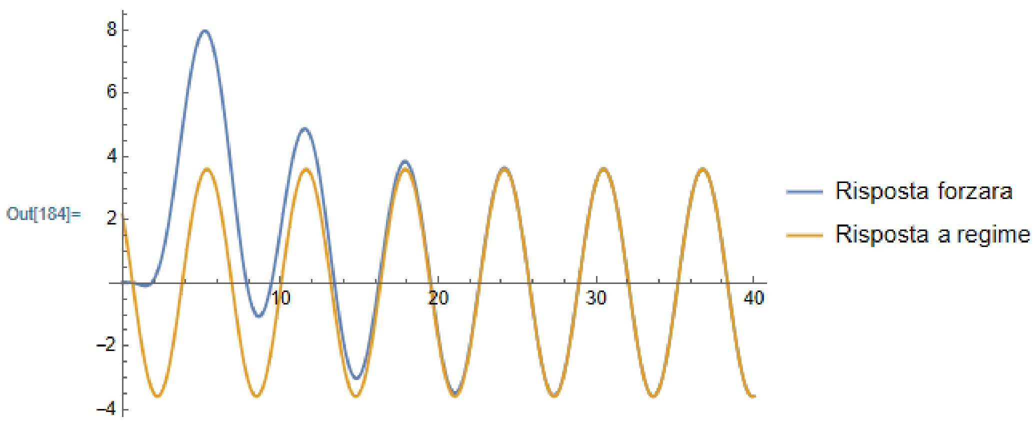
$$InverseLaplaceTrasform[Y_{for}[s], s, t][[1, 1]]$$

output:

$$\frac{9}{800}e^{-3t}(183 - 375e^{8\frac{t}{3}} + 180t + 500e^{8\frac{t}{3}}t + 192e^{3t}Cos[t] - 256e^{3t}Sin[t])$$

A questo punto andiamo a visionare il grafico:

```
Plot[{9/800 e^(-3 t) (183 - 375 e^(8 t/3) + 180 t + 500 e^(8 t/3) t + 192 e^(3 t) Cos[t] - 256 e^(3 t) Sin[t]),
  2 (27 Cos[t]/25 - 36 Sin[t]/25)}, {t, 0, 40}, PlotRange -> All,
 PlotLegends -> {"Risposta forzara", "Risposta a regime"}]
```



Riusciamo facilmente a notare come inizialmente risposta e risposta transitoria risultino essere ”sfasate”, e questo è dato dalla risposta transitoria, mentre quando il transitorio si esaurisce seguono lo stesso andamento, e quindi ci troviamo a regime. Un altro controllo che si potrebbe andare a fare è capire come sono variati l’ampiezza e la fase; per farlo andiamo a trovare la risposta a regime nella forma ampiezza fase, considerando t = 0:

$$\begin{cases} 2(\frac{27Cos(t)}{25} - \frac{36Sin(t)}{25}) = ASin(t+\varphi) \\ D[2(\frac{27Cos(t)}{25} - \frac{36Sin(t)}{25})] = D[ASin(t+\varphi)] \end{cases}$$

Dopo aver scritto la formula anche in Mathematica, quello che fuori è :

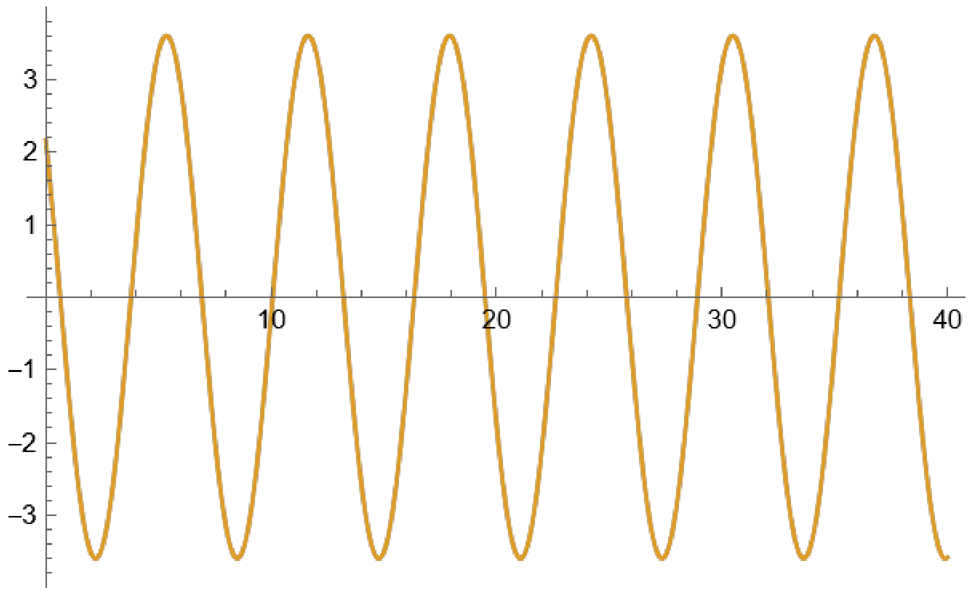
$$X = \frac{18}{5} = 3.6$$

$$\theta = 2Arctan[3] = 143.13$$

Dunque quello che abbiamo ottenuto è un ampliamento dell’ampiezza, e possiamo ancora meglio vedere questo con il calcolo di distorsione sull’ampiezza, e dello sfasamento relativo, difatti ora la risposta a regime si presenta nel seguente modo:

$$y_{ss} = 3.6Sin(\omega t + 143.13)$$

Difatti facendo la prova, il grafico è esattamente lo stesso:



Facendo il rapporto tra le ampiezze ricaviamo il **fattore di distorsione sull'ampiezza** che è esattamente 3.6 in quanto A = 1:

$$\frac{X}{A} = \frac{3.6}{1} = 3.6$$

e poi lo **sfasamento dell'uscita relativo all'ingresso** :

$$\theta - \varphi = 143.13 - 1 = 142.13$$

2.7 Modello ARMA e risposta alla rampa

In questo punto, viene chiesto di rappresentare il sistema, non più attraverso una rappresentazione di tipo I/S/U dunque ingresso, stato e uscita, come fino a questo momento era stato fatto, bensì con una rappresentazione I/U quindi ingresso uscita, e in particolare utilizzando il modello **ARMA**, acronimo che sta per Auto Regressive Moving Average, l'auto regressione indica che il risultato è dato dai risultati dell'uscita, mentre "moving average" indica un'operazione che si avvicina alla media, e specifichiamo moving perchè ad ogni passo i valori cambiano.

In seguito all'individuazione del modello arma, viene richiesto di trovare le condizioni iniziali sull'uscita compatibili con uno stato iniziale dato:

$$x_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Infine andrà valutata la risposta alla rampa unitaria.

2.7.1 Modello Arma

Procediamo con ordine e andiamo ad individuare il modello Arma che corrisponde al nostro sistema. La prima cosa che andremo a fare sarà quella di andare a prendere la funzione di trasferimento che abbiamo già avuto modo di vedere e di analizzare sotto alcuni aspetti nei precedenti punti:

$$G(s) = \frac{36(-3+s)^2}{(3+10s+3s^2)^2}$$

Per definizione la funzione di trasferimento è vista come rapporto tra $\frac{Y(s)}{U(s)}$, sfruttiamo proprio questa per riscrivere la funzione in modo da risultare un'identità:

$$G(s) = \frac{36(-3+s)^2}{(3+10s+3s^2)^2} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Ora, abbiamo un'identità[7], andiamo ad eliminare la frazione al primo e al secondo membro, e otterremo dunque Y(s) moltiplicato per il denominatore, mentre U(s) moltiplicato per il numeratore, una cosa che prima sarebbe comodo fare nel nostro caso specifico è quella di "spacchettare" numeratore e denominatore andando ad espandere la formula.

$$(9s^4 + 60s^3 + 118s^2 + 60s + 9)Y(s) = (36s^2 - 216s + 324)U(s)$$

Portiamo dentro Y(s) e U(s) e otteniamo:

$$9s^4Y(s) + 60s^3Y(s) + 118s^2Y(s) + 60sY(s) + 9Y(s) = 36s^2U(s) - 216sU(s) + 324U(s)$$

Adesso per andare nel dominio del tempo, sfruttiamo il risultato del teorema della derivata, e in particolare dovremo espanderlo alla derivata di ordine n :

[7] identità perché primo membro = secondo membro

TEO(DERIVATA)

Data f(t) di classe L, continua, F(s) = f(t) (F(s) è la trasformata di Laplace do f(t)) allora: $\mathscr{L}(f(t)) = sF(s) - F(0)$ Si supponga ora che f(t) sia di classe L e continua fino all'ordine "n - 1" e dunque f(t) = F(s) allora: $\mathscr{L}$(f$^{(n)}(t)$) =s^{n}F(s) - $s^{(n-1)}F(0) - s^{(n-2)}\dot{F}(0)$ - ... - $sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0)$

Ora, applichiamo la trasformata di Laplace all'equazione sopra scritta, e tenendo conto delle proprietà di linearità di cui questa gode e del risultato ottenuto nel teorema, possiamo scrivere:

$$9y^{(IV)}(t) + 60\,\dddot{y}(t) + 118\ddot{y}(t) + 60\dot{y}(t) + 9 = 36\ddot{u}(t) - 216\dot{u}(t) + 324$$

Ecco ottenuta la rappresentazione I/U con il modello **ARMA** nel dominio del tempo.

2.7.2 Condizioni iniziali

Ora, bisogna tenere a mente che questa equivalenza non vale anche per la risposta totale, o meglio non vale totalmente per questa, difatti dovremo andare a "collegare" le condizioni iniziali, in quanto lo stato tiene conto di queste condizioni iniziali che nella risposta forzata sono "nascoste".

Avremo quindi questo legame:

$$\begin{gathered} y(t) = Cx_0 \\ \dot{y}(t) = CAx_0 \\ \ddot{y}(t) = CA^2x_0 \\ \dddot{y}(t) = CA^3x_0 \end{gathered}$$

Adesso in mathematica eseguiremo tutti i calcoli necessari, ciò che otteniamo è:

$$\begin{gathered} y(t) = 224 \\ \dot{y}(t) = 76 \\ \ddot{y}(t) = -\tfrac{1208}{9} \\ \dddot{y}(t) = -\tfrac{34964}{27} \end{gathered}$$

Adesso passiamo nuovamente nel dominio della variabile complessa s andando ad utilizzare il teorema della derivata.

```
eqDiffL = Simplify[LaplaceTrasform[Armat,t,s]
/. LaplaceTrasform[y[t],t,s] →Y[s], LaplaceTrasform[u[t],t,s] → U[s], u[0]→0, u'[0]→0]
```

$$(3+10s+3s^2)^2Y[s] == 36(-3+s)^2U[s]+(60+118s+60s^2+9s^3)y[0]+118y'[0]+60sy'[0]+9s^2y'[0]+60y''[0]+9sy''[0]+9y'''[0]$$

Sostituiamo ciò che ci siamo trovati:

$$\frac{2700+297894s+14124s^2+2016s^3}{(3+10s+3s^2)^2}+\frac{(324-216s+36s^2)U[s]}{(3+10s+3s^2)^2}$$

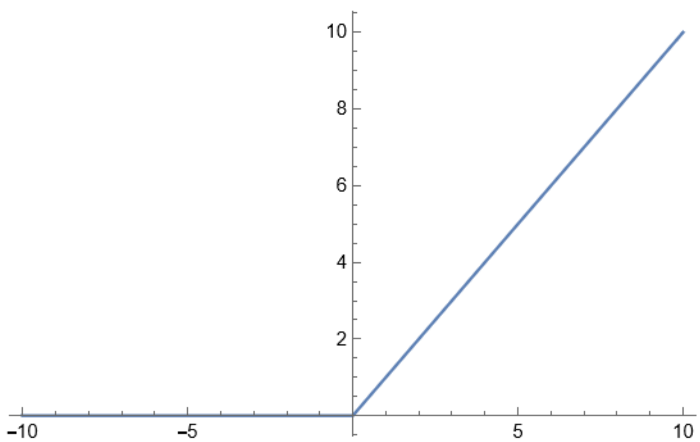
Quello che si può notare è che avremo ora la risposta del sistema, difatti la prima parte dipende dalle condizioni iniziali, ma non dall'ingresso, dunque è la risposta libera, la seconda espressione, che dipende dall'ingresso ma non dalle condizioni iniziali è la risposta forzata.

2.7.3 Risposta alla rampa unitaria

Adesso che abbiamo ottenuto quello che cercavamo, ci rimane da soddisfare l'ultima richiesta, quella relativa alla risposta alla **rampa unitaria**; così come avevamo visto per il gradino unitario, anche la rampa è un **ingresso canonico polinomiale**, ovviamente anche questa è right-sided e la indichiamo nel seguente modo:

$$u_{rampa}(t)=\begin{cases} t & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

Dunque il grafico sarà del tipo:



L'attributo **unitaria** associato alla rampa, indica che la sua pendenza è unitaria, definita anche come deriva costante. Una particolarità di questo segnale è la sua non limitatezza, difatti non presenterà un valore di picco finito

Calcoliamo la sua trasformata di Laplace

$$\frac{1}{(s-a)^n}=\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}e^{at}1(t)$$

dunque possiamo scrivere la rampa come:

$$\boxed{\tfrac{1}{s^2}=t\cdot 1(t)}$$

Applico il risultato appena ottenuto e lo sostituisco a U[s] nel modello ARMA che ho trovato, in particolare nella risposta forzata, e poi vado a distinguere risposta transitoria e a regime:

$$-264 + \frac{39e^{-3t}}{16} + \frac{4185e^{-t/3}}{16} + 36t + \frac{9}{4}e^{-3t}t + \frac{225}{4}e^{-t/3}t$$

La risposta a regime sarà:

$$-264 + 36t$$

La risposta transitoria invece:

$$\frac{39e^{-3t}}{16} + \frac{4185e^{-t/3}}{16} + \frac{9}{4}e^{-3t}t + \frac{225}{4}e^{-t/3}t$$

Se invece volessimo visionare la risposta totale, che tiene conto anche delle condizioni in precedenza ricavate avremmo:

$$\boxed{-264 - \frac{339e^{-3t}}{2} + \frac{1315e^{-t/3}}{2} + 36t - 216e^{-3t}t - \frac{100}{3}e^{-t/3}t}$$

2.8 Risposta al gradino che coincide con risposta a regime

L'ottavo punto consiste nel determinare le condizioni iniziali tali che la risposta sia uguale, per ogni istante, alla risposta a regime. Questo avviene se il sistema è **stabile**, proprietà di un sistema dinamico di mantenere una certa configurazione delle proprie variabili a fronte di *perturbazioni* che tendono ad alterare questa configurazione.

Dobbiamo andare a determinare le condizioni iniziali, dunque x_0; ricordando che la risposta è la somma di due contributi:

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x_0 + G(S)U(S)$$

x_0 sarà un vettore colonna composto da 4 elementi(nel nostro specifico caso, in generale è composto da n elementi dove n è il numero di righe/colonne della matrice A). Inizializziamo questo x_0 con tutti termini incogniti:

$$x_0 = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{pmatrix}$$

Determiniamo la risposta libera in s e la associo ad una variabile, in accordo con quello scritto in precedenza, per la risposta libera scriveremo:

$$C(sI-A)^{-1}x_0$$

su mathematica:

$$libera = Simplify[C1.Inverse[sIdentityMatrix[4]-A].x0]$$

Quello che viene fuori è una espressione che dipende da x1, x2, x3, x4.

Procediamo poi calcolando la risposta forzata, a regime e transitoria, e contrassegnamo tutte e tre con delle variabili:

$$forzata = Simplify[G[s]\cdot(\frac{1}{s})][[1,1]]$$

$$regime = (G[0]\cdot(\frac{1}{s}))[[1,1]]$$

$$transitoria = Factor[forzata - regime]$$

La risposta transitoria(ovvero quella che dipende dai modi naturali) la trovo come risposta forzata - risposta a regime, in quanto in un sistema LTI-TC, la risposta forzata è l'insieme della risposta transitoria e della risposta a regime.

Visioniamo i risultati:

libera :

$$-\frac{1}{(3+10s+3s^2)^2}\cdot 12((396+350s+88s^2+6s^3)x1-2(-189+47s+45s^2+9s^3)x2$$
$$+45x3+426sx3+181s^2x3+24s^3x3-171x4-17sx4+95s^2x4+21s^3x4)$$

forzata :

$$\frac{36(-3+s)^2}{s(3+10s+3s^2)^2}$$

regime :

$$\frac{36}{s}$$

transitoria :

$$-\frac{180(1+s)(2+s)(11+3s)}{(3+s)^2(1+3s)^2}$$

Ora che abbiamo ottenuto queste informazioni , dobbiamo metterci nelle condizioni per cui risposta libera e risposta nel transitorio risultino essere 0, dunque estraiamo il numeratore di *libera + transitoria* perchè vogliamo che risulti identicamente nullo.

Numerator[Simplify[Expand[libera + transitoria]]]

Prima di porlo uguale a 0, bisogna andare ad estrarre una lista di coefficienti del polinomio che si trova al numeratore, che però siano in relazione alla variabile s.

CoefficientList[Numerator[Simplify[Expand[lib + transitoria]]], s]

A questo punto possiamo utilizzare una funzione di mathematica che ci permetta di ricavare x1,x2,x3,x4 ponendolo == 0:

Solve[CoefficientList[Numerator[Simplify[Expand[lib + transitoria]]], s] == {0, 0, 0, 0}, {x1, x2, x3, x4}]

I coefficienti che vengono fuori sono:

$$\{x1 \to -2, x2 \to 1, x3 \to 1, x4 \to -1\}$$

Possiamo, tuttavia, essere certi dei risultati ottenuti se risultano essere uguali la risposta a regime del sistema, e(tramite un'apposita funzione di mathematica), la risposta del sistema poste le condizioni x1,x2,x3,x4 quelle trovate in precedenza:

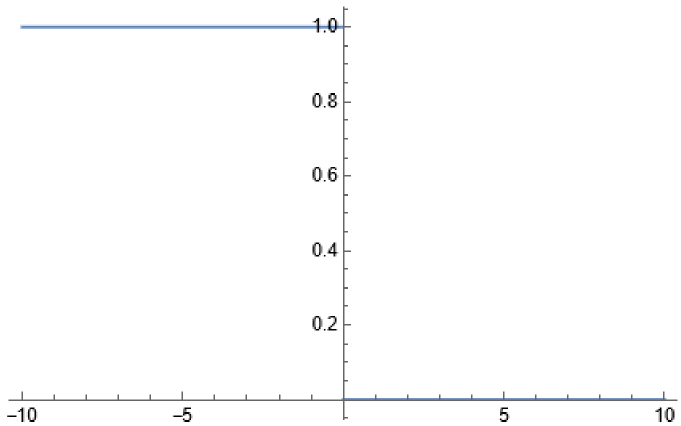
OutputResponse{Σ, {-2, 1, 1, -1}}, 1, t]

Quello che viene fuori è proprio **36** dunque la risposta a regime nel dominio t.

Dunque abbiamo trovato la configurazione iniziale che permette di annullare la risposta libera e la risposta transitoria, facendo in modo di ottenere la **risposta del sistema** esattamente equivalente alla **risposta a regime**.

2.9 Risposta al segnale u(t) = 1(-t)

Ultima richiesta relativa al sistema dinamico LTI-TC è quella della risposta al segnale u(t) = 1(-t), questo segnale è come se fosse un gradino unitario con l'ascissa "ribaltata", il grafico risulterà essere:



Come si può notare, l'ingresso è applicato nel *passato remoto*, talmente remoto da non riuscire a vederlo, il passato remoto rispetto a un qualsiasi t preso sull'asse delle ascisse, si trova a $-\infty$.

Non ha però sempre senso andare a calcolare la risposta al segnale preso in considerazione; difatti ha senso solo se il sistema è **BIBO STABILE**.

2.9.1 Quando un sistema è bibo stabile?

Un sistema LTI-TC è detto tale se per ogni *ingresso limitato*, la corrispondente *uscita forzata* è limitata.

In particolare il criterio di bibo stabilità nel dominio del tempo, afferma che un sistema LTI-TC è BIBO STABILE **se e solo se** la sua risposta all'impulso(ovvero la funzione peso nella convoluzione) è **assolutamente integrabile** :

$$\int_0^{+\infty} |g(t)|dt < \infty$$

Questa condizione di bibo stabitità deve essere presente, in quanto vi sarà un istante di tempo "t" il cui il transitorio risulterà essere numericamente esaurito, ne consegue che RISPOSTA LIBERA + RISPOSTA TRANSITORIA = 0; e che quindi per il principio di *sovrapposizione degli effetti*, l'unica risposta sarà quella a **regime** che andremo ad indicare con y_{ss}[8];

[8]risposta a regime conosciuta anche come risposta steady-state, che si riferisce al costante comportamento che assume il sistema a transitorio esaurito

$$y(t) = \begin{cases} y_{ss}(t) & t < 0 \\ y_{"libera"}(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

Nel sistema vi è la presenza di una specie di "risposta libera" che è virgolettato perché, quando t = 0 è come se avvenisse un'interruzione, la quale però non è immediata, difatti si distinguerà prima un transitorio, legato quindi ai modi naturali del sistema.

A questo punto seguiamo due step :

1. Valutazione della la risposta per $t < 0$.
2. Valutazione della la risposta per $t \geq 0$.

2.9.2 Risposta per t $<$ 0

Come già prima enunciato per $t < 0$ avremo la risposta a regime. Per trovare la risposta a regime andiamo a calcolare la funzione di trasferimento del sistema (fdt) e poi la valutiamo in G[0]:

$$y_{neg} = G[0]$$

Il risultato è 36, ovviamente questo calcolo era già stato fatto in precedenza, ma per un punto differente.

2.9.3 Risposta per t $\geq$ 0

Questa è la risposta del sistema in assenza di ingresso, ma a partire dalle condizioni iniziali legate alla commutazione da 1 a 0. Per continuità valgono le seguenti relazioni:

$$y(0^-) = y(0^+)$$

$$y'(0^-) = y'(0^+)$$

$$...$$

Possiamo esprimere le condizioni iniziali sull'uscita, dobbiamo solo settare $y(0^+)$, in quanto le derivate saranno costanti.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Il nostro sistema determina la presenza di 4 stati, e 4 condizioni iniziali sull'uscita, un modo per risolvere il problema è associare:

$$y(0) = Cx_0$$

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) + D\dot{u}(t) = C(Ax(t) + Bu(t)) + D\dot{u}(t)$$

Uguagliando avremo :

$$y(0) = Cx_0$$

$$\dot{y}(0) = CAx_0$$

$$\ddot{y}(0) = CA^2x_0$$

Dal momento che parliamo di vettori otterremo l'uguaglianza sotto riportata, che permetterà di distinguere una matrice di osservabilità:

$$\begin{pmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \\ \dddot{y}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix} \cdot x_0$$

2.9.4 Matrice di osservabilità

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix}$$

Arrivati a questo punto mi sposto su mathematica e calcolo la matrice sopra riportata, avvalendomi della sua definizione.

$$Ob = \{C1[[1]], (C1.A)[[1]], (C1.A.A)[[1]], (C1.A.A.A)[[1]]\}$$

Dal momento che vogliamo trovare x_0, dobbiamo assicurarci che la matrice di osservabilità sia invertibile, e dunque che il suo determinante sia diverso da 0, questa matrice risulta avere un determinante pari a -40 960 000, quindi può essere invertita:

$$x_0 = Inverse[Ob].\{G[0]\}, \{0\}, \{0\}, \{0\}\}$$

lo stato iniziale che si ricava è il seguente:

$$x_0 = \{\{-\frac{3947}{2000}\}, \{\frac{2089}{2000}\}, \{\frac{9383}{1000}\}, \{-\frac{19}{20}\}\}$$

2.9.5 Risposta libera

Una volta che disponiamo dello stato iniziale possiamo trovare la risposta "libera", nella variabile complessa s, successivamente la passeremo nel dominio del tempo e poi uniremo le due risposte in un oggetto chiamato *piecewise*[9].

Andando in ordine troviamo i fratti, sfruttando anche qui la formula di Heaviside non semplificata e otteniamo:

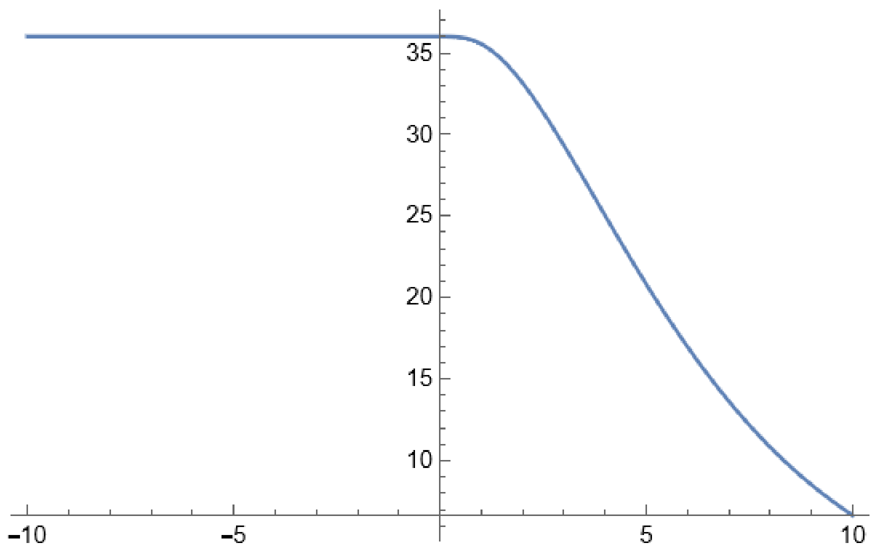
$$P_{12} = \frac{27}{16}, P_{11} = \frac{117}{64}, P_{22} = \frac{243}{16}, P_{21} = \frac{2187}{64}$$

Risposta libera in t:

$$\boxed{\frac{9}{64}e^{-3t}(13 + 12t + 27e^{8\frac{t}{3}})(9 + 4t))}$$

2.9.6 Grafico

Ora che siamo in possesso sia della y_neg che della y_{libera} possiamo unire il tutto e graficare:



3 Sistema LTI-TD proprio

Andiamo ora a trattare un altro sistema **lineare, tempo invariante**, questa volta però a **tempo discreto** dunque nell'insieme dei numeri naturali, anche questo è un sistema proprio, dunque senza la presenza della matrice D, scriviamo la rappresentazione I/S/U(Ingresso, stato, uscita):

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

Definiamo le matrici del sistema:

[9]oggetto in mathematica che serve per definire una funzione a tratti

- **Matrice dinamica**

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{17}{36} & -\frac{7}{18} & -\frac{7}{18} \\ \frac{17}{72} & \frac{25}{36} & \frac{43}{36} \\ -\frac{55}{72} & -\frac{11}{36} & \frac{7}{36} \end{pmatrix}$$

- **Matrice degli ingressi**

$$B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- **Matrice delle uscite**

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le proprietà di **linearità**, **tempo invarianza**, e **SISO** sono analoghe a quelle viste per il sistema a tempo continuo, adattate al tempo discreto.

3.1 Modi naturali del sistema:

Anche qui la prima richiesta, risulta essere quella dei modi naturali del sistema, che come già in precedenza mostrato per il tempo continuo, descrivono l'evoluzione del sistema; nel corso della trattazione di questo punto, e anche di alcuni punti che si presenteranno successivamente, molte cose saranno equivalenti al tempo continuo, dunque non verranno ripetute, per evitare ridondanza. Un punto che differenzia il continuo e il discreto all'interno dei modi naturali, è che questi possono essere *pseudo-oscillatori* e *polinomial-potenza*.

Cominciamo con il calcolo dell'*autostruttura* del sistema con il comando Eigenvalues[A] su Mathematica(che verrà utilizzato anche per l'ispezione di questo sistema) :

$$\lambda = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$$

Possiamo subito notare che a differenza del primo caso, gli autovalori risultano differenti tra loro, e ciò implica **diagonalizzabilità** della matrice A, e questa informazione è molto utile, difatti quello che va tovato ora sono i modi naturali e li otteniamo elevando a k gli autovalori, ma per ispezionare tutti i passaggi, andiamo come prima cosa a diagonalizzare la matrice, perché per una particolare proprietà, l'elevazione a k della matrice diagonale, sarà una matrice che sulla diagonale principale presenta esattamente i modi naturali.

Per passare alla matrice diagonale si dovrà effettuare un **cambiamento di base**, attraverso la matrice di cambiamento di base **"T"**, tale che:

$$AT = T\Lambda$$

Dove T rappresenta la matrice degli autovettori di A, su mathematica però andremo a fare la trasposta, in quanto non vengono presentati per riga ma per colonna :

$$T = \begin{pmatrix} 4 & \frac{14}{11} & \frac{14}{11} \\ -11 & -\frac{16}{11} & -\frac{37}{11} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice Λ invece rappresenta la matrice diagonale:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Possiamo già notare gli autovalori presenti sulla diagonale, ora andiamo a elevare a k la matrice appena ottenuta:

$$\Lambda^k = \begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^k & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{1}{3})^k & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{4})^k \end{pmatrix}$$

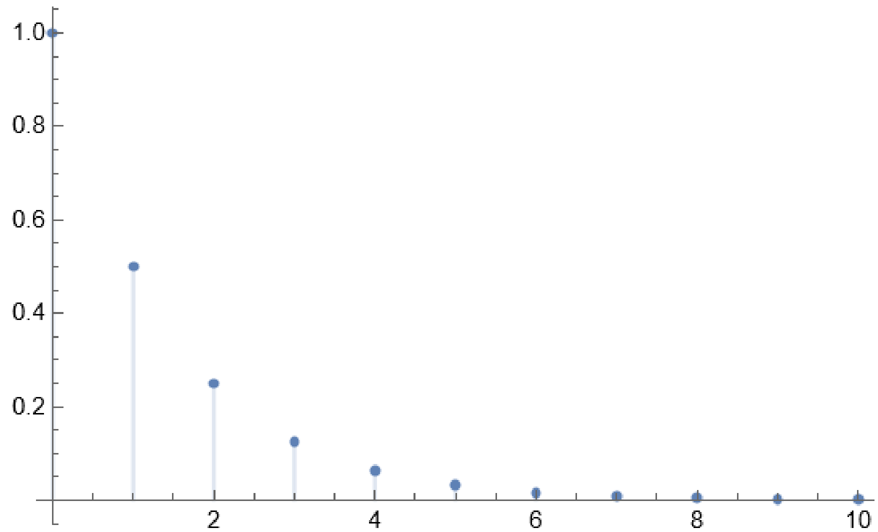
Quelli sulla diagonale sono proprio i **modi naturali del sistema**:

- primo modo: $(\frac{1}{2})^k$
- secondo modo: $(-\frac{1}{3})^k$
- terzo modo: $(\frac{1}{4})^k$

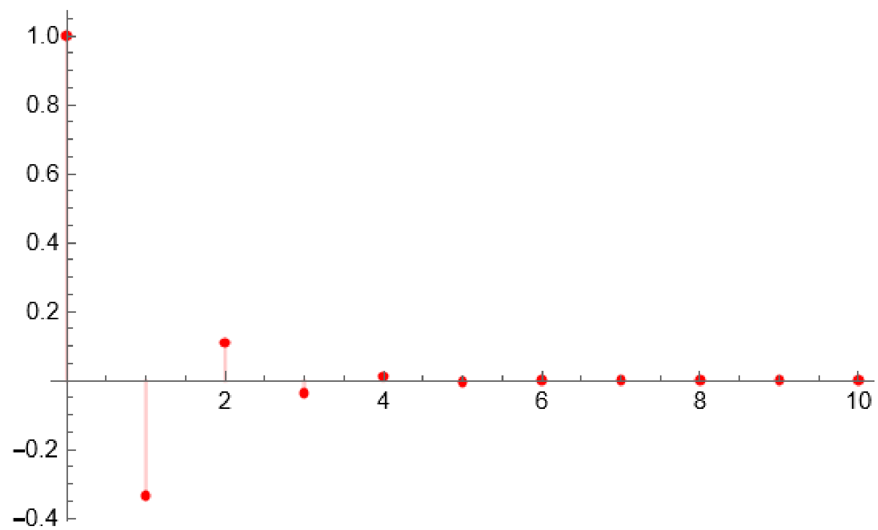
3.1.1 Grafici

A questo punto non ci resta che rappresentarli:

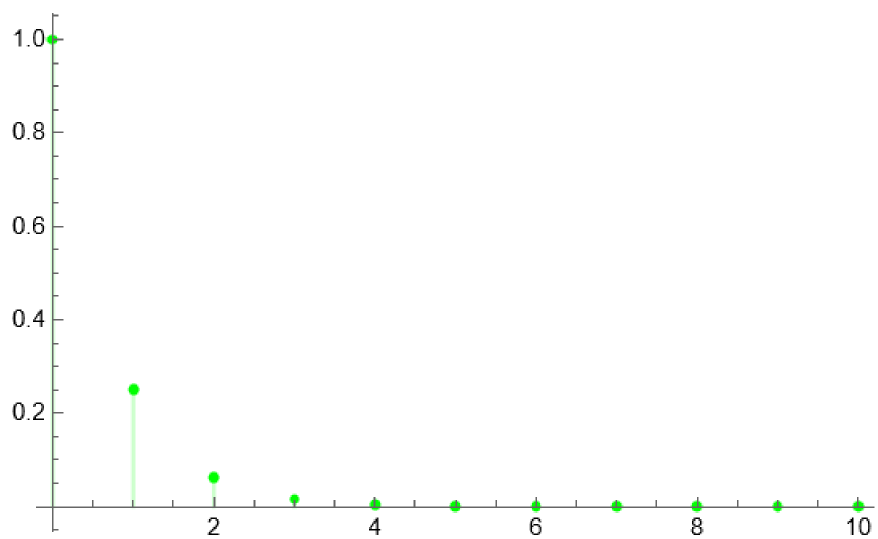
primo modo naturale:



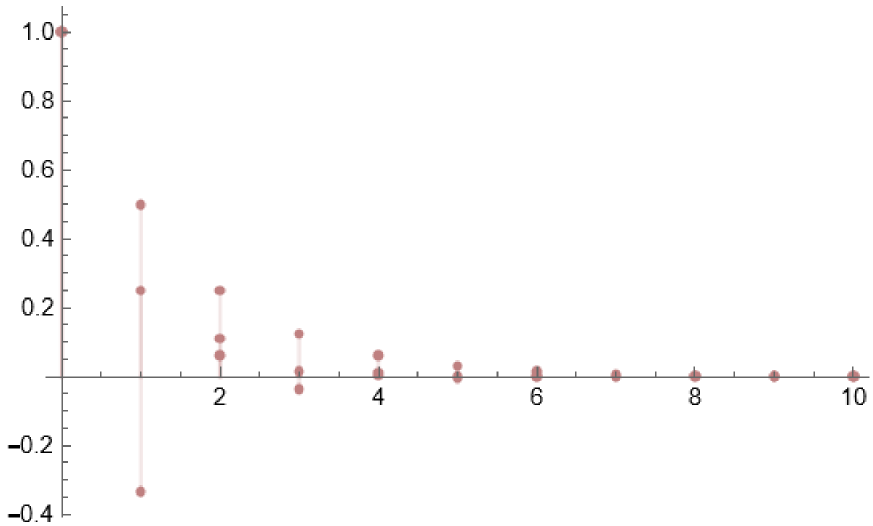
secondo modo naturale:



terzo modo naturale:



tutti i modi naturali:



3.1.2 Osservazioni sui grafici

Se notiamo bene, il modo naturale che ha la base negativa, ovvero il secondo, con base $-\frac{1}{3}$, ha un andamento **pseudo-oscillatorio**, lo definiamo "pseudo", in quanto non mantiene l'ampiezza. Il primo e il terzo invece mantengono un andamento monotono, la convergenza invece è per tutti e tre a 0, in quanto il modulo è strettamente minore di 1: $|\lambda_i| < 1$ In particolare, possiamo anche individuare il modo dominante, ovvero quello che ha convergenza più "lenta", in questo caso il primo : $\frac{1}{2}$. Se rappresentassimo i modi all'interno del piano di Gauss[10], i modi dominanti sarebbero quelli più vicini alla circonferenza unitaria(massima distanza dall'origine, minima distanza dal bordo).

3.2 Risposta libera

Le condizioni iniziali con le quali viene richiesto il calcolo della risposta in evoluzione libera sono:

$$x_0 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Per trovare la risposta libera, andiamo come prima cosa a calcolare z_0 ovvero la proiezione delle condizioni iniziali lungo le colonne della matrice di cambiamento di base.

$$z_0 = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{110}{21} \\ \frac{451}{42} \end{pmatrix}$$

la risposta libera sarà strutturata nel seguente modo:

[10]sistema di assi cartesiani utilizzato per la rappresentazione dei numeri complessi, con ascissa la parte reale e ordinata la parte immaginaria

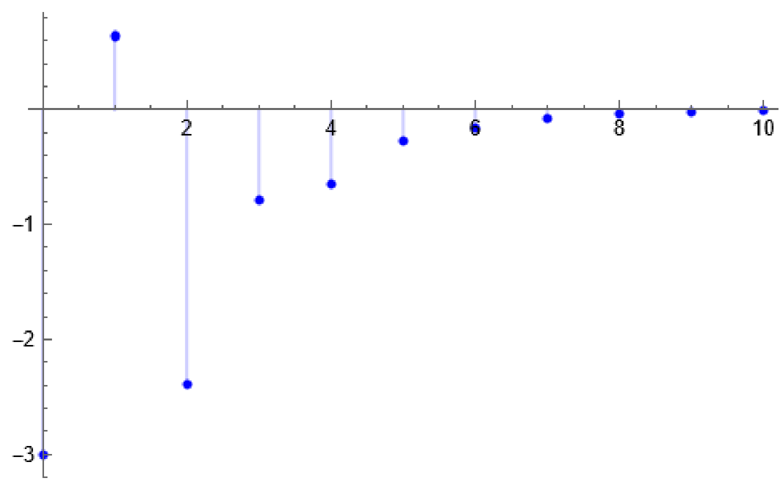
$$x_l(k) = \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \lambda_i^k \cdot z_{0i}$$

Questa è la **decomposizione modale** nel caso in cui gli autovalori siano reali e distinti(dunque il nostro caso).

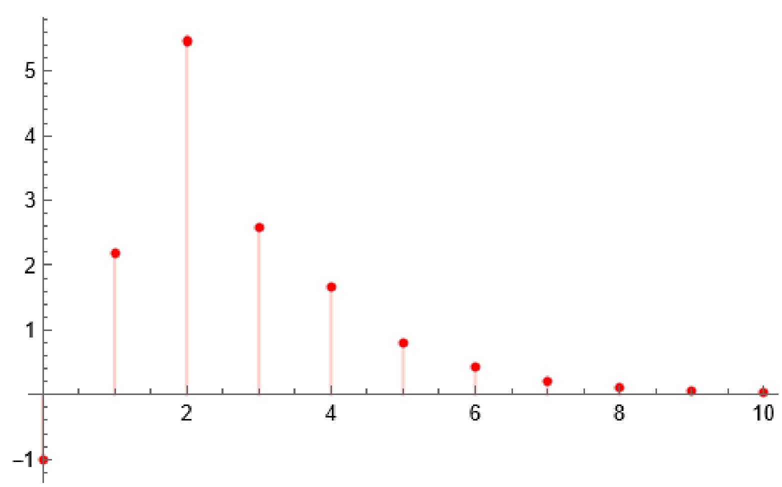
$$x_l(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(-20(-\frac{1}{3})^k - 15 \cdot 2^{1-k} + 41 \cdot 4^{-k}) \\ \frac{1}{42}(320(-\frac{1}{3})^k - 1155 \cdot 2^{-k} - 1517 \cdot 4^{-k}) \\ \frac{1}{42}(-220(-\frac{1}{3})^k - 105 \cdot 2^{-k} + 451 \cdot 4^{-k}) \end{pmatrix}$$

3.2.1 Grafici

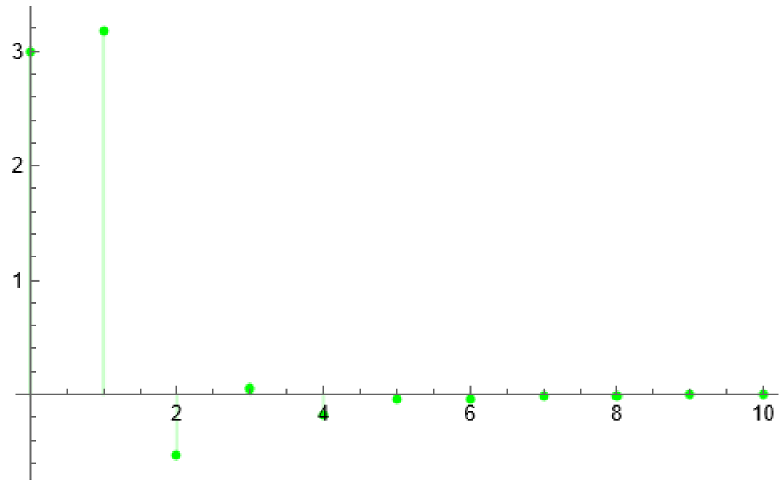
primo modo naturale:



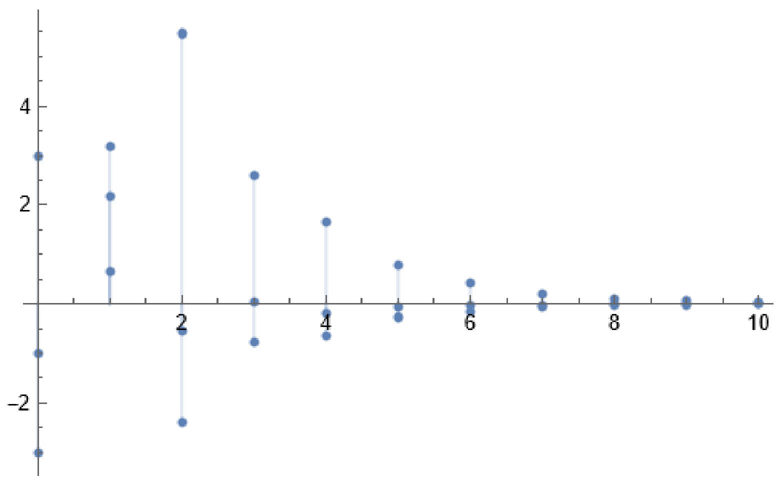
secondo modo naturale:



terzo modo naturale:



tutti i modi naturali:



3.3 Configurazione stati iniziali

Così come era già stato possibile all'interno del tempo continuo, anche all'interno nel dominio discreto andremo a vedere la configurazione degli stati iniziali che attivano alcuni modi naturali; per attuare questa ricerca dovremo servirci della matrice di cambiamento di base T, per la quale vale la relazione $\mathrm{AT} = \mathrm{T}\Lambda$, che contiene gli autovettori relativi agli autovalori della matrice A, a differenti autovalori corrispondono differenti autovettori; nel nostro caso la matrice A ha tutti autovalori distinti e reali, così saranno anche gli autovettori:

$$T = \begin{pmatrix} 4 & \frac{14}{11} & \frac{14}{11} \\ -11 & -\frac{16}{11} & -\frac{37}{11} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.3.1 Ingresso che attiva il primo modo

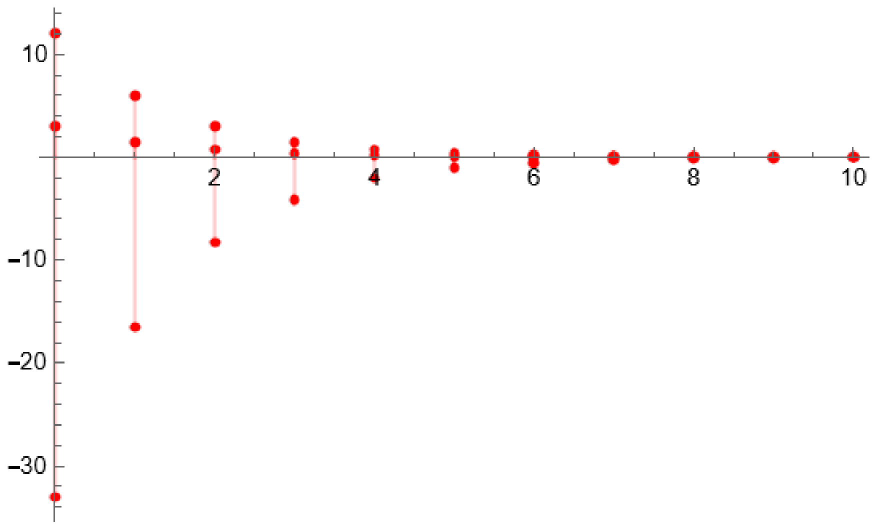
Mettiamo per esempio di voler andare ad attivare il primo modo naturale, la prima operazione da andare a fare sarà quella di prendere un x_1 equivalente al prodotto tra un numero e la prima colonna della matrice T, nel seguente modo:

$$x_1 = 3 \times T[[All, 1]]$$

Ricavato questo x_1 che corrisponde a {12, -33, 3}, cerchiamo anche z_1 relativa, ovvero la proiezione delle condizioni iniziali lungo le colonne della matrice di cambiamento di base:

$$z_1 = Inverse[T].x_1$$

Otterremo {3,0,0} questo perché stiamo attivando solo il primo. A questo punto non rimane altro da fare che andare a calcolare la risposta libera e vedere cosa viene fuori graficamente:



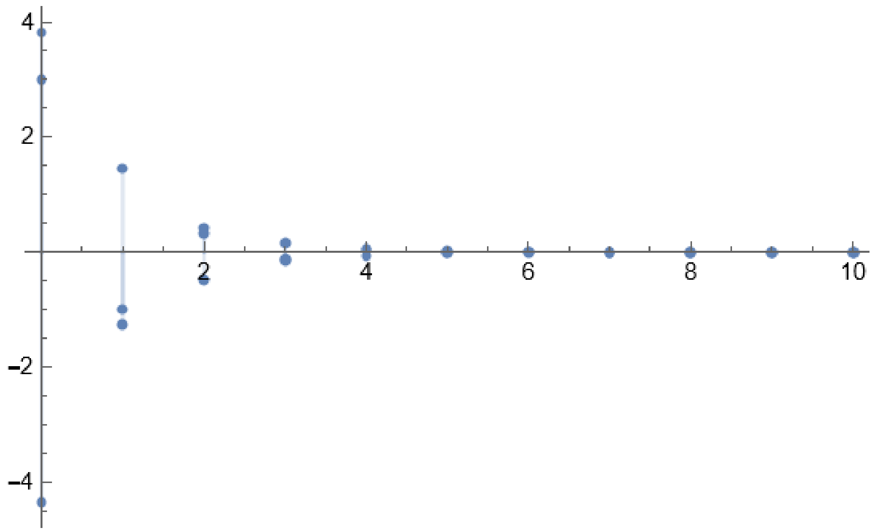
Questa operazione può essere fatta anche per gli altri modi naturali.

3.3.2 Ingresso che attiva il secondo modo

Quello che è stato fatto nella precedente sottosezione relativamente al primo modo vale anche per il secondo, e otterremo una risposta libera del tipo:

$$\{\frac{14}{11}(-1)^k 3^{(1-k)}, -\frac{16}{11}(-1)^k 3^{(1-k)}, (-1)^k 3^{(1-k)}\}$$

Grafico:



3.3.3 Ingresso che attiva il terzo modo

Facciamolo anche per il terzo:

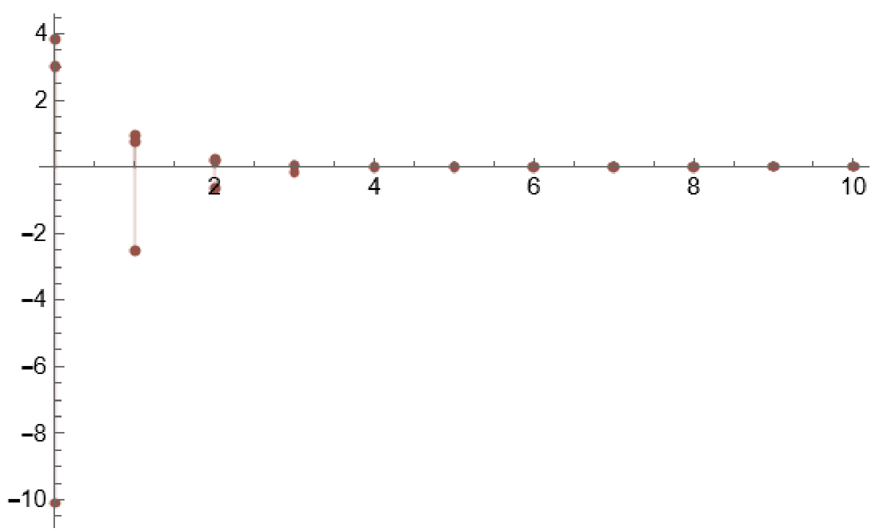
$$x_3 = 3T[[All, 3]]$$

$$z_3 = Inverse[T].x_3$$

La risposta libera che viene fuori:

$$\{\frac{21}{11} \cdot 21 - 2k, -\frac{111 \times 4^{-k}}{11}, 3 \times 4^{-k}\}$$

Grafico:



3.4 Funzione di trasferimento, poli e zeri

La **funzione di trasferimento del sistema** è quella funzione di variabili complesse G(z), tale che moltiplicata algebricamente per la Z-trasformata dell'ingresso restituisce la Z-trasformata della **risposta forzata**; dunque la definizione, e anche la formula è analoga a quella del tempo continuo, ovviamente a cambiare è la trasformata che viene utilizzata, e la variabile complessa di riferimento.

$$Y_f(z) = G(z)U(z)$$

Ne deriva che:

$$G(z) = \frac{Y_f(z)}{U(z)}$$

E dunque:

$$G(z) = C(zI - A)^{-}1 \cdot B$$

Passo al calcolo su Mathematica:

$$G(z) = -\frac{24}{1 - 3z - 10z^2 + 24z^3}$$

3.4.1 Poli del sistema

Per **Polo** della *funzione di trasferimento* si intende quel numero complesso ρ tale che:

$$\lim_{s \to \rho} G(z) = +\infty$$

corrispondono dunque a quelli che sono gli *zeri del denominatore.*

I poli del denominatore della funzione di trasferimento risultano essere:

$$\{z \to -\frac{1}{3}, z \to \frac{1}{4}, z \to \frac{1}{2}\}$$

Esattamente corrispondenti ai modi naturali del sistema.

3.4.2 Zeri del sistema

Uno **zero** della funzione di trasferimento è un numero complesso ζ tale che:

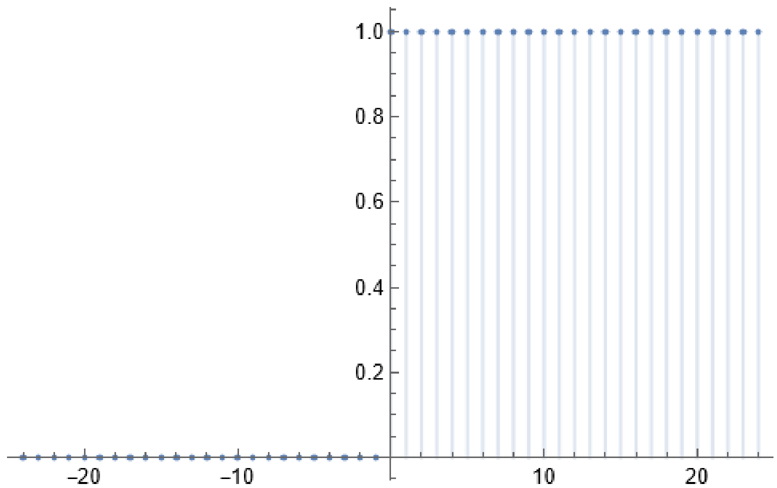
$$(G(\zeta) = 0)$$

dunque parliamo degli zeri del numeratore.

Il numeratore in questo caso è una costante, dunque la funzione di trasferimento non avrà zeri.

3.5 Risposta al gradino unitario e grafico

Visioniamo il grafico del gradino unitario nel tempo discreto, come era stato già visto nel tempo continuo:



$$\begin{cases} 0 & k < 0 \\ 1 & k \geq 0 \end{cases}$$

Per trovare la risposta forzata al gradino unitario, richiamiamo la formula già citata nel corso della relazione per cui

$$Y_f(z) = G(z)U(z)$$

G(z) già la conosciamo, quello che non conosciamo è U(z) ovvero la trasformata zeta del gradino unitario. Prima di calcolarla facciamo apriamo una piccola parentesi riguardante proprio la $\mathscr{Z} - Trasformata$.

La trasformata Zeta, così come abbiamo già visto con la trasformata di Laplace, un operatore, che permette di semplificare un problema, in questo caso ricorsivo, rendendolo un problema algebrico; lavora su funzioni right-sided, dunque così definite:

$$f : T \rightarrow \mathscr{R}(\mathscr{R}^n, \mathscr{C}, \mathscr{C}^n)$$

$$T = \mathscr{Z}, f(k)k < 0$$

La trasformata sarà questa serie di potenze:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) z^{-k}$$

con $z \in \mathscr{C}, z = \rho e^{j\theta}$

Chiusa questa parentesi, calcolando la trasformata del gradino unitario, risulta essere:

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

.

Andando ad applicare la formula, otteniamo la seguente risposta forzata nel dominio della variabile complessa z:

$$y_f[z] = -\frac{24z}{(-1+z)(1-3z-10z^2+24z^3)}$$

Questo non è il solo modo per trovare la risposta forzata, difatti un altro valido metodo sarebbe stato quello della **somma di convoluzione**[11].

3.5.1 Divisione in fratti

Ora dobbiamo passarlo nel dominio del tempo, e per farlo, come abbiamo già avuto modo di constatare all'interno del tempo continuo, utilizziamo la formula di Heaviside, questa volta, data la presenza di autovalori distinti, sarà semplificata.

Capiamo chi sono i fratti, aiutandoci anche con la funzione Apart[y_f[z]] di Mathematica :

Apart[y_f[z]]

$$y_f[z] = -\frac{2}{-1+z} + \frac{48}{5(-1+2z)} - \frac{54}{35(1+3z)} - \frac{64}{7(-1+4z)}$$

il fratto (-1 + z) indica il fratto relativo alla risposta a regime, il suo coefficiente è possibile trovarlo come G[1], anche qui, questo risultato lo possiamo ottenere mediante l'applicazione del teorema **valore finale** :

TEO(VALORE FINALE)

Sia $f(k)$ z-trasformabile e che : $f_\infty = lim_{k\to+\infty} f(k)$ esista e sia finito,

$\Rightarrow$ il valore finale risulterà essere $f_\infty = lim_{z\to 1}(z-1)\cdot f(z)$

Applichiamo questa soluzione: per farlo ci accertiamo che il sistema sia BIBO-STABILE, sappiamo già che è asintoticamente stabile, perchè i modi naturali si trovano a sinistra rispetto all'asse di convergenza, e allora dato che l'asintotica stabilità è un controllo sui modi, e la bibo un controllo sui poli(sottoinsieme dei modi), potremo dire che è anche Bibo-stabile.

[11] $y_f(k) = \sum_{n=0}^{k} g(n) \times u(n-k)$

$$y_\infty = lim_{k\to+\infty} y(k) = lim_{z\to1}(z-1)\cdot y(z) = lim_{z\to1}(z-1)\cdot G(z)\frac{Uz}{(z-1)} = G(1)\cdot U$$

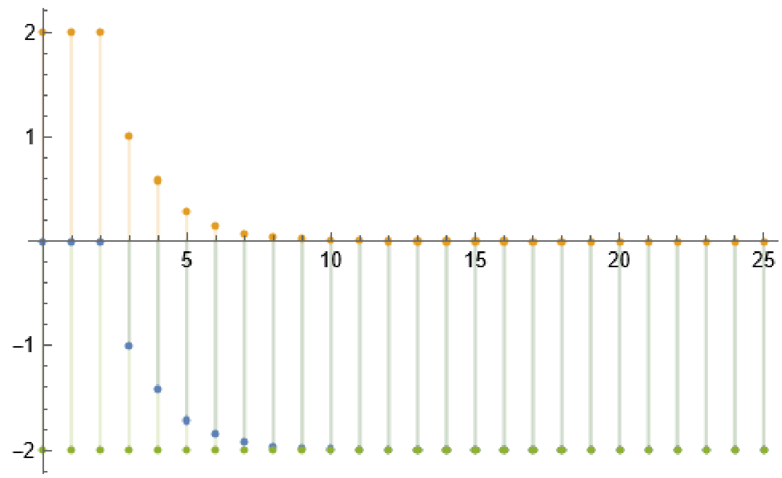
$$G(1) = \frac{Y}{U}$$

G(1) è definito **guadagno statico**

Cerchiamo gli altri coefficienti, tenendo conto però di una cosa, data la trasformata di laplace del gradino nel discreto che ricordiamo essere $\frac{z}{z-1}$, nel limite dovremo andare a dividerla per z, solo successivamente, quando andremo ad unire i risultati ri-moltiplicheremo:

$$C_2 = \frac{48}{5}, C_3 = \frac{54}{35}, C_4 = -\frac{64}{7}$$

3.5.2 Grafico



La successione in blu rappresenta la risposta forzata, quella in arancione la risposta nel transitorio e quella verde la risposta a regime, possiamo notare che la risposta forzata è 0 per i primi 3 istanti, si può verificare che 3 è proprio la differenza tra il numero dei poli e il numero degli zeri. Altra osservazione può essere fatta sulla convergenza, data la presenza di poli con il modulo inferiore strettamente all'unità.

3.6 Modelli arma equivalenti

Passiamo ora alle rappresentazioni I/U, questa volta, le rappresentazioni ARMA saranno due, in quanto avremo il modello ARMA ad **anticipi** e a **ritardi**; Andiamo però con ordine e rammentiamo il concetto di modello ARMA precedentemente espresso per il continuo, e nella definizione attuiamone le necessarie modifiche che si adattino al tempo discreto; ARMA è l'acronimo di Auto Regressive Moving Average, ed è una rappresentazione I/U che presuppone lo stato come un elemento non esplicito, dunque la sola visibilità di ingresso e uscita.

Anche in questo caso, partiamo prendendo la funzione di trasferimento in precedenza ricavata

$$G(z) = -\frac{24}{1 - 3z - 10z^2 + 24z^3}$$

E scriviamo l'identità:

$$G(z) = -\frac{24}{1 - 3z - 10z^2 + 24z^3} = \frac{Y[z]}{U[z]}$$

Moltiplichiamo il numeratore per $U[z]$ e il denominatore per $Y[z]$, in Mathematica vado a farlo con il seguente comando:

$$Armaz = Expand[Denominator[G_{armz}[z]] \times Y[z] == Numerator[G_{armaz}[z]] \times U_1[z]]$$

Viene fuori la seguente rappresentazione nel dominio della variabile complessa z:

$$Y[z] - 3zY[z] - 10z^2Y[z] + 24z^3Y[z] == -24U_1[z]$$

3.6.1 Modello Arma ad anticipi

A questo punto, così come avevamo fatto per il tempo continuo, dobbiamo cambiare dominio, e rappresentarlo nel discreto, quindi nel dominio di k, ovviamente essendo nel discreto non utilizzeremo più il teorema della derivata, bensì quello dell'**anticipo elementare** su anticipi di ordine n:

TEO(ANTICIPO ELEMENTARE)

Z[f(k + 1)] = z F(z) - f(0)

esteso agli anticipi di ordine n $\mathscr{Z}$[f(k + n)] = z^nF(z) - z^nF(0) - $z^{n-1}F(1) - ... - zF(n-1)$

Si noti bene che il teorema per come è stato applicato si riferisce all'anticipo, successivamente verrà fatto quello a ritardo.

Per fare questo in mathematica andiamo a prendere il modello in z precedentemente trovato, e sostituiamo le corrispondenti seguendo il teorema:

$$Armak = Armaz/.\{Y[z] \to y[k], zY[z] \to y[k+1], z^2Y[z] \to y[k+2], z^3Y[z] \to y[k+3], U_1[z] \to u_1[k]\}$$

E otterremo:

y[k] - 3 y[1 + k] - 10 y[2 + k] + 24 y[3 + k] == -24 u_1[k]

3.6.2 Modello Arma a ritardi

Per poter rappresentare il modello ARMA a ritardi, dobbiamo apportare una piccola modifica al modello arma ottenuto nell'anticipo:

y[k] - 3 y[1 + k] - 10 y[2 + k] + 24 y[3 + k] == -24 u_1[k]

Facciamo una sostituzione, prendiamo una nuova variabile che chiamiamo k' e la poniamo uguale a k + 3, in questo modo k + 3 sarà il nostro presente, e di conseguenza k + 2 e k + 1 saranno il passato.

$$Armak = Armaz/.\{Y[z] \to y[k'-3], zY[z] \to y[k'-2], z^2Y[z] \to y[k'-1], z^3Y[z] \to y[k'], U_1[z] \to u_1[k'-3]\}$$

y[k' - 3] - 3 y[k' - 2] - 10 y[k' - 1] + 24 y[k'] == -24 u_1[k' - 3]

3.6.3 Condizioni iniziali

Trovato il modello arma(che sia ad anticipi o a ritardi), adesso ci viene assegnato uno stato iniziale per cui andare a trovare le condizioni iniziali sull'uscita compatibili con questo:

$$x_{01} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Troviamoci le nostre condizioni iniziali nel seguente modo:

$$y(k) = Cx_{01}$$
$$y(k+1) = CAx_{01}$$
$$y(k+2) = CA^2x_{01}$$

e otteniamo:

$$y_0 = -2$$
$$y_1 = -3$$
$$y_2 = 4$$

Riporto tutto nel dominio della variabile z e sostituisco le condizioni iniziali che ho appena trovato:

$$EqDifz = (ZTransform[Armak, k, z])/.$$

$$\{\text{ZTransform[y[k], k, z]} \to Y[z], ZTransform[u_1[k], k, z] \to U_1[z]\}$$

Quello che cerchiamo è la risposta, e per ottenerla dobbiamo andare a "isolare" Y[z] e lo facciamo con il seguente comando:

$$ris = Solve[Eqdifz, Y[z]][[1,1]][[2]]$$

$$\text{Y}_{dif}[z\_] := Collect[ris, U_1[z]]$$

Questa è la nostra risposta, risposta libera + risposta forzata :

$$\frac{(-3zy[0] - 10z^2y[0] + 24z^3y[0] - 10zy[1] + 24z^2y[1] + 24zy[2])}{(1 - 3z - 10z^2 + 24z^3)} - \frac{(24U_1[z])}{(1 - 3z - 10z^2 + 24z^3)}$$

Sostituiamo :

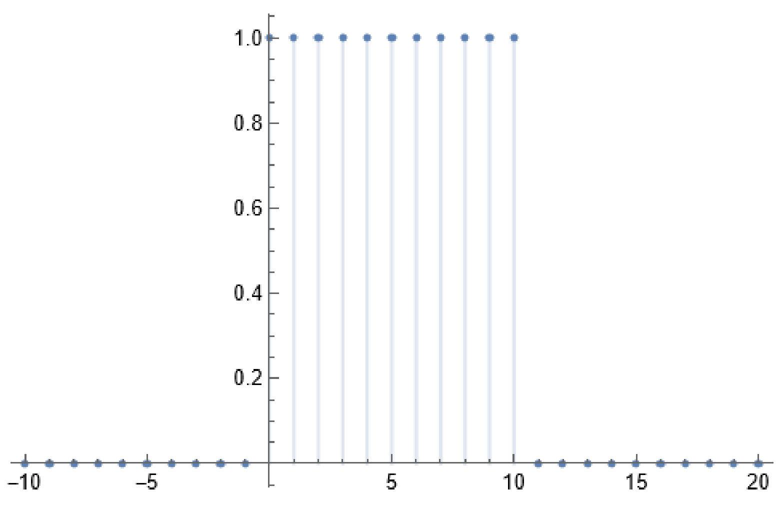
$$\frac{123z - 52z^2 - 48z^3}{1 - 3z - 10z^2 + 24z^3} - \frac{24U_1[z]}{1 - 3z - 10z^2 + 24z^3}$$

3.6.4 Risposta all'ingresso di un segnale dato

In questo punto, partendo dal modello arma ricavato, andremo a trovate la risposta a un segnale costituito nel seguente modo:

$$u(k) = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq 10 \\ 0 & k > 10 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

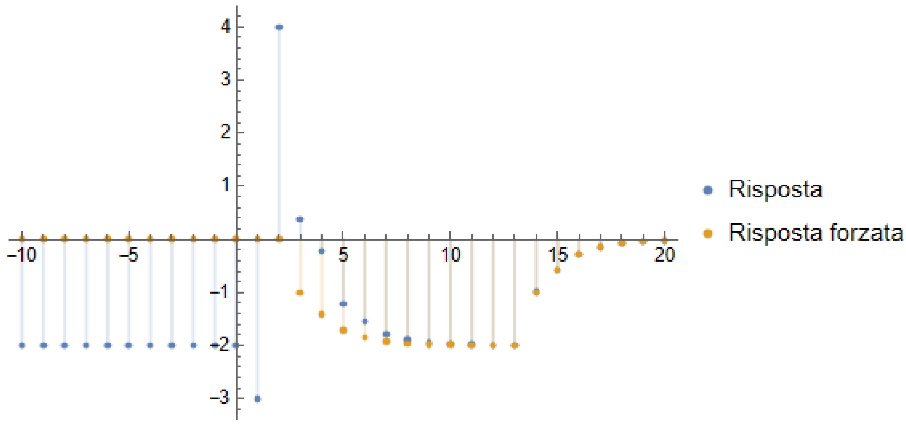
Per aiutarci nella visualizzazione del segnale facciamo anche il grafico:



A questo punto la prima cosa che andremo a fare sarà quella di andare a calcolare la $\mathscr{Z}Trasformata$ del segnale, e avere dunque la ZTrasformata nel dominio della variabile z, così da poterla poi sostituire alla risposta prima trovata.

$$U_{seg}[z] = \frac{(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 + z^8 + z^9 + z^{10})}{z^{10}}$$

E ora basterà sostituire anche questa informazione e ottenere così quello che cercavamo, graficando anche il risultato:



3.7 Condizioni iniziali tali che risposta al gradino = risposta a regime

L'ultimo punto che verrà trattato, riguardante il sistema dinamico a tempo discreto, è quello che vede la ricerca di uno stato iniziale, che permetta al sistema di avere la risposta a gradino uguale alla risposta a regime, dunque, la risposta di un sistema, se questo possiede la proprietà di linearità, si divide in risposta libera(o in evoluzione libera), la quale sottointende la presenza di un ingresso identicamente nullo, e di una risposta forzata(o in evoluzione forzata), che invece possiede le condizioni iniziali identicamente nulle.

Come già si è potuto appurare dai precedenti punti, la risposta forzata è divisa a sua volta(sempre tenendo a mente le ipotesi iniziali), in risposta a regime e risposta a transitorio.

Dunque per far si che la risposta totale sia uguale alla risposta a regime, questa deve essere la sola presente, dovremo dunque andare ad agire su queste due risposte.

Non partiremo però dal modello ISU, bensì dalla rappresentazione ARMA, che avevamo già in precedenza ricavato, andranno solamente sostituite le varie informazioni che permetteranno di trovare le condizioni iniziali.

La prima cosa che andremo a fare sarà quella di creare uno stato iniziale, che però avrà le componenti per il momento incognite:

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Adesso, questo vettore, lo sfrutteremo per trovare come nei casi precedenti y_0, y_1, y_2

$$y_0 = C1.x_0 y_1 = C1.A.x_0 y_2 = C1.A.A.x_0$$

Quello che otterremo saranno delle combinazioni lineari di x_1, x_2, x_3, ovviamente perchè ancora non sono state trovate.

Ora quello che manca per poter effettuare la sostituzione all'interno del modello arma, è la trasformata Zeta del gradino unitario, ma questo era già in precedenza stato calcolato e corrisponde a :

$$U_{grad}(z) = \frac{z}{z-1}$$

Adesso che siamo arrivati a questo punto, prendiamo il modello ARMA

$$\frac{(-3zy[0] - 10z^2y[0] + 24z^3y[0] - 10zy[1] + 24z^2y[1] + 24zy[2])}{(1 - 3z - 10z^2 + 24z^3)} - \frac{(24U_1[z])}{(1 - 3z - 10z^2 + 24z^3)}$$

e sostituiamo $y[0] \to y_0, y[1] \to y_1, y[2] \to y_2$ e anche per l'ingresso $U_1 = U_{grad}(z)$, quello che otteniamo, è questo:

$$libera = \frac{(z((-34 + 24z)x_1 + (-13 + 14z + 24z^2)x_2 + (17 + 34z - 24z^2)x_3))}{(1 - 3z - 10z^2 + 24z^3)}$$

per quanto riguarda la risposta libera, mentre per la risposta forzata avremo:

$$forzata = -\frac{24}{((-1 + z)(1 - 3z - 10z^2 + 24z^3)))}$$

Dalla risposta forzata andiamo a ricavare la risposta a regime e quella a transitorio, ricordando che la risosta a regime è quella che dipende dall'ingresso, mentre quella a transitorio dipende dai modi naturali del sistema.

Una volta separate tutte le risposte, andiamo a trovare:

$$Solve[CoefficientList[Numerator[Simplify[Expand[y_{libero} + trans]]], z] == 0, 0, 0, 0, \{x_1, x_2, x_3\}]$$

I coefficienti che abbiamo sono:

$$x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = -\frac{8}{3}, x_3 = -\frac{2}{3}$$

Ora, per capire se il risultato ottenuto è effettivamente quello corretto, andremo a calcolarci $y_0, y_1, y2$ con le nuove x_1, x_2, x_3 che abbiamo, le sostituiremo con l'ingresso al gradino al modello arma e quello che dovremo trovare sarà esattamente la risposta a regime, dunque nel dominio k = -$\frac{2z}{z-1}$ e nel dominio z = -2.

Viene proprio la risposta a regime, dunque il punto è stato svolto con successo.

4 Catena di Markov TD

L'ultimo argomento che verrà analizzato in questa relazione è la catena di Markov a tempo discreto, che indichiamo con l'espressione:

$$x(k+1) = Ax(k)$$

Prima di addentrarci nell'ipotesi di Markov, è utile però avere del contesto relativo al modello che andremo a considerare; difatti si parlerà di **modello di transizione**, in questo si fa riferimento agli *attributi* di una data grandezza, dunque la probabilità che questa grandezza presenti un determinato attributo in un certo istante di tempo.

Lo *stato* di questo sistema sarà dato dunque da tutti i possibili attributi.

Si noti però che la probabilità che una grandezza presenti un attributo non è isolata, dipende dalla storia precedente.

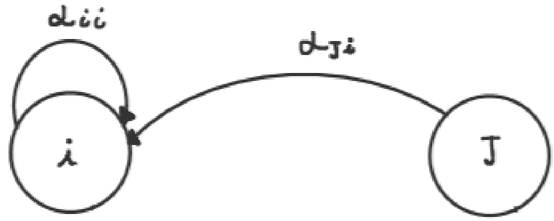
Dal momento che si parla di probabilità devono valere le seguenti condizioni:

1. $0 \leq x_i(k) \leq 1 \ \forall i, k$
2. $\sum_{i=1}^{n} x_i(k) = 1 \ \forall k$

Se valgono queste due allora parleremo di **stato stocastico**.

Indichiamo ora $x_j(l)$ con $j = 1...n$ con j che indica i vicini e $l = k-1, k-2, ...$ che indica il passato.

Markov afferma dunque che $x_i(k)$ dipende da $x_j(k-1)$, l'indipendenza è lineare, utilizzo un grafo per la descrizione dell'ipotesi, mi concentro sul nodo e considero il vicino:



dunque:

$$x_i(k+1) = \alpha_{ii}x_i(k) + \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \alpha_{ji}x_j(k)$$

Dove α_{ji} è la probabilità di trovarsi nella configurazione i-esima al passo k + 1 *condizionata* dalla probabilità di essere nella configurazione j-esima al passo k.

Quello di cui parliamo è dunque la catena di Markov:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_n(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21}. & . & . & .\alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}. & . & . & .\alpha_{n2} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n}. & . & . & .\alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_n(k) \end{pmatrix}$$

La matrice prenderà il nome di **matrice di transizione della catena di Markov** e la indicheremo con $A \in \mathscr{R}$, questa matrice ha la particolarità di essere stocastica per colonna, difatti andando a sommare gli elementi per ogni colonna la somma risulterà essere equivalente a 1.

Prendiamo come esempio questa matrice di transizione di Markov a tempo discreto:

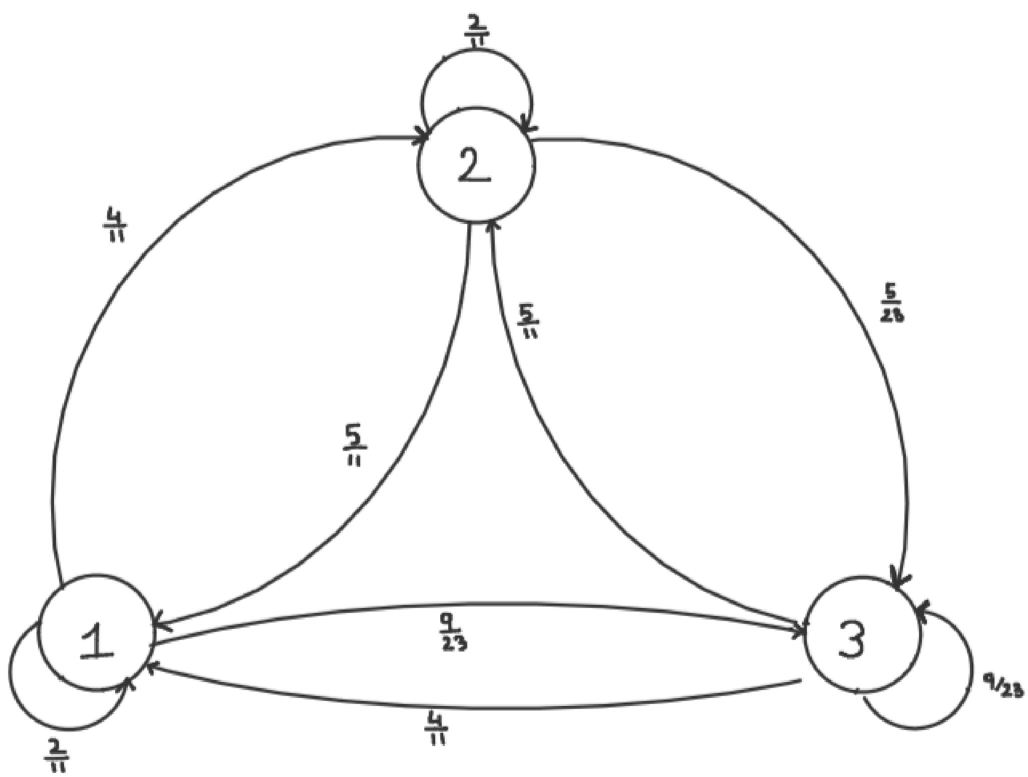
$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} & \frac{4}{11} & \frac{9}{23} \\ \frac{5}{11} & \frac{2}{11} & \frac{5}{23} \\ \frac{4}{11} & \frac{5}{11} & \frac{9}{23} \end{pmatrix}$$

Facendo una veloce analisi della matrice, riusciamo subito a vedere che la matrice è stocastica per colonna, difatti:

$$\frac{2}{11} + \frac{5}{11} + \frac{4}{11} = 1$$
$$\frac{4}{11} + \frac{2}{11} + \frac{5}{11} = 1$$
$$\frac{9}{23} + \frac{5}{23} + \frac{9}{23} = 1$$

4.1 Grafo di transizione

Ora, partendo dalla matrice che ci è stata data, andiamo a delineare un grafo pesato, andando ad inserire un numero di nodi pari a n, inoltre questo grafo sarà pesato, presenterà sopra gli archi i coefficienti della matrice A, che mettono in collegamento uno stato con l'altro:



4.2 Stato stazionario della catena

Ora che abbiamo ottenuto il grafo, è bene sapere che indipendentemente dallo stato scelto la funzione tenderà a uno stato limite, parleremo infatti di **distribuzione di probabilità stazionaria**, in particolare in questo punto andremo a calcolare lo stato stazionario della catena in due differenti modi; il primo utilizzando uno stato iniziale pseudo-casuale e un numero di passi sufficientemente grande, e il secondo sfruttando una particolare relazione.

4.2.1 Ricorsione numerica a partire da uno stato iniziale pseudo-casuale

Gran parte di questo punto verrà svolta all'interno del linguaggio di programmazione python, che eviterà di fare a mano particolari calcoli. Inizialmente importiamo tutte le librerie che ci serviranno, come per esempio numpy, che permetterà di utilizzare in maniera più agevolata strumenti quali ad esempio le matrici, difatti subito dopo aver importato le librerie, riportiamo la matrice di transizione che ci è stata fornita.

Il secondo passaggio che andremo a compiere sarà quello di generare uno stato iniziale in maniera pseudo-casuale, tramite il comando *np.random.rand(1,3)*, questo comando permette di creare una matrice di dimensioni (3,1) dunque 3 righe, 1 colonna (3 perchè è la dimensione della matrice che ci viene fornita), formata da numeri casuali che si trovano tra 0 e 1, di per sè però non è un vettore stocastico, e a noi serve tale, dunque andremo a normalizzarlo, dividendolo per la sua somma.

Adesso scelgo un numero di passi tale da garantirmi la convergenza della catena, e poi eseguo un'operazione di moltiplicazione matriciale iterativa "npassi" volte.

```python

import numpy as np
import math
from scipy import signal
import matplotlib.pyplot as plt

a = 2/11
b = 5/11
c = 4/11
d = 9/23
e = 5/23

A = np.array([[a, c, d], \
              [b, a, e],\
              [c, b, d]])

#condizione iniziale random

x0 = np.random.rand(3,1)

#non vettore stocastico di principio

x0 = x0/np.sum(x0)
npassi = 99

for i in range(npassi):
    x0 = A@x0
```

```
print("stato dopo 99 passi:", x0)
```

L'output del codice è il seguente:

stato dopo 100 passi: [[0.31706621] [0.28253425] [0.40039954]]

Quindi il seguente vettore colonna:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0.31706621 \\ 0.28253425 \\ 0.40039954 \end{pmatrix}$$

La somma degli elementi nel vettore è 1, dal momento che è uno stato stocastico.

4.2.2 Calcolo in forma chiusa

Passiamo ora al secondo modo, e andiamo a considerare $\pi \in \mathscr{R}^3$ tale che :

$$\pi = A\pi$$

portiamo $A\pi$ al primo membro, e quindi otteniamo al secondo membro un vettore nullo di dimensioni 3×1:

$$(\pi - A\pi) = O_{3\times 1}$$

raccogliamo a destra π, ricordandoci sempre che è un vettore, quindi $\pi \times I = \pi$:

$$(I - A)\pi = O_{3\times 1}$$

secondo la definizione di nucleo(kernel) di una matrice, questo è l'insieme di tutti i vettori che moltiplicati per la matrice restituiscano il vettore nullo, la matrice in questione è (I - A), e il vettore è π, abbiamo dunque ottenuto che se moltiplicato per la matrice, da come risultato il vettore nullo, quindi fa parte del nucleo:

$$\pi \in ker(I - A)$$

e in aggiunta è un vettore stocastico.

Ora però affinché il tutto riesca, dobbiamo capire se il vettore è anche unico, per farlo, prendiamo la matrice A, calcolando, e poi costruiamo I - A; la particolarità di questa matrice è che sulla sua diagonale i coefficienti sono i complementi dei coefficienti di A, una condizione necessaria e sufficiente alla presenza della distribuzione di probabilità stazionaria, è che il rango di (I - A) sia proprio n - 1; andando ad utilizzare le tecniche apposite viene fuori che il rango è 2 = 3 - 1, dunque ammette distribuzione di probabilità stazionaria:

$$I_3 - A = \begin{pmatrix} \frac{9}{11} & -\frac{4}{11} & -\frac{9}{23} \\ -\frac{5}{11} & \frac{9}{11} & -\frac{5}{23} \\ -\frac{4}{11} & -\frac{5}{11} & \frac{14}{23} \end{pmatrix}$$

Scriviamo e risolviamo il sistema lineare:

$$\begin{cases} \frac{9}{11}x_1 - \frac{4}{11}x_2 - \frac{9}{23}x_3 = 0 \\ -\frac{5}{11}x_1 \frac{9}{11}x_2 - \frac{5}{23}x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Nel sistema non è presente una riga in quanto, la terza riga è la somma delle prime due cambiata di segno, dunque era linearmente dipendente, ora abbiamo un sistema di sole equazioni linearmente indipendenti.

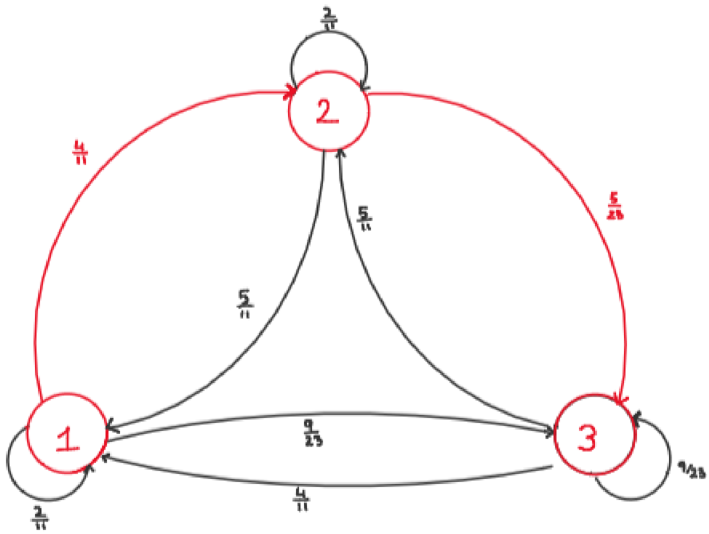
Risolvendo il sistema lo stato stocastico che viene fuori è proprio:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0.31706621 \\ 0.28253425 \\ 0.40039954 \end{pmatrix}$$

4.3 Spanning tree

Uno spanning tree viene definito come un sottografo che contiene tutti i nodi del grafo, ma non contiene cicli.

In questo grafo ve ne sono diversi, quello evidenziato in rosso è uno di questi:


2/11
2
4/11
5/23
5/11
5/11
1
9/23
3
9/23
4/11
2/11