Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. Arie M.C.A. Koster
Dipl.-Comp. Math. Stephan Lemkens

WS 2011/2012

9.Übungsblatt zur Vorlesung
OPTIMIERUNG B

Abgabe spätestens in der Übung am 13.01.12

3D-MATCHING:

I: Gegeben endliche und disjunkte Mengen X, Y und Z und eine Teilmenge $T \subseteq X \times Y \times Z$.

F: Enthält T ein 3-dimensionales Matching $M \subseteq T$ der Größe $q = |M|$, d.h. für je zwei verschiedene Tripel $(x_1, y_1, z_1) \in M$ und $(x_2, y_2, z_2) \in M$ gilt $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ und $z_1 \neq z_2$?

PARTITION:

I: Gegeben eine endliche Menge A und eine Kostenfunktion $c : A \to \mathbb{Z}_0^+$.

F: Gibt es eine Teilmenge $A' \subseteq A$, so dass gilt:

$$\sum_{a \in A'} c(a) = \sum_{a \in A \setminus A'} c(a) \text{ ?}$$

VERTEX-COVER:

I: Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine positive ganze Zahl $k \leq |V|$.

F: Existiert in G eine Knotenüberdeckung der Größe k oder kleiner?

INDEPENDENT-SET:

I: Gegeben ein Graph $G = (V, E)$ und eine positive ganze Zahl $j \leq |V|$.

F: Existiert in G eine unabhängige Menge der Größe j oder größer?

Aufgabe 1: **2+2 Punkte**

a) Zeige die NP-Vollständigkeit von **3DM** mittels einer Reduktion von **3-SAT**.

b) Beweise mit Hilfe von a), dass **PARTITION** NP-vollständig ist.

Aufgabe 2: **2+1 Punkte**

a) Zeige die NP-Vollständigkeit von **VERTEX-COVER** mittels einer Reduktion von **3-SAT**.

b) Beweise mit Hilfe von a), dass **INDEPENDENT-SET** NP-vollständig ist.

Aufgabe 3: **1 Punkte**

Eine Turingmaschine ist ein theoretisches Konstrukt zur mathematischen Analyse der Klasse der berechenbaren Funktionen und ist essentiell für den Beweis des Satzes von Cook. Sie entspricht einer Maschine, die auf einem unendlich langem Band arbeitet und dabei einen Lese/Schreibkopf besitzt, der stehts einen einzelnen Buchstaben auf dem Band lesen oder verändern kann und sich auf dem Band nach rechts und links bewegen kann.
Formal lässt sich eine (deterministische) Turingmaschine als 7-Tupel $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, q_F)$ darstellen:

- Q ist die Zustandsmenge

- Σ ist das Eingabealphabet
- Γ ist das endliche Bandalphabet mit $\Sigma \subset \Gamma$
- $\delta : (Q \backslash \{q_F\}) \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$ die Übergangsfunktion
- $q_0 \in Q$ ist der Anfangszustand
- $B \in \Gamma \backslash \Sigma$ steht für das leere Feld (Blank)
- q_F ist der akzeptierende Endzustand

Zu jedem Zeitpunkt befindet sich die Turingmaschine an genau einer Position und in genau einem Zustand, sie startet am ersten Buchstaben des Eingabewortes im Anfangszustand; ein Tripel aus Position, Zustand und Wort auf dem Band bezeichnet man als Konfiguration.
δ beschreibt den Ablauf einer Turingmaschine und den Wechsel zwischen zwei Konfigurationen. Für $\delta(q_i, \gamma) = (q_i', \gamma', \{L, N, R\})$ wird abhängig von dem eingelesenen Buchstaben γ und dem aktuellen Zustand q_i ein neuer Buchstabe γ' an die aktuelle Position geschrieben und in den Zustand q_i' gewechselt. Anschließend bewegt sich der Lesekopf nach $\{L\}$inks, $\{R\}$echts oder $\{N\}$icht.
Die Berechnung einer Turingmaschine ist eine endliche oder unendliche Folge von Konfigurationsschritten. Eine Turingmaschine akzeptiert ein durch die Startkonfiguration gegebenes Wort, wenn die Berechnung in dieser Startkonfiguration beginnt und in einer Konfiguration endet, in der die Turingmaschine im Zustand q_F ist. Endet die Berechnung in einer anderen Konfiguration, verwirft die Turingmaschine das Eingabewort. Ist die Berechnung der Turingmaschine unendlich, wird das Wort weder akzeptiert noch verworfen.

Betrachte die (deterministische) Turingmaschine $\mathcal{MAGIC} = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, q_F)$ mit Zustandsmenge $Q := \{q_i \,|\, i = 0, 1, \ldots, 6\} \cup \{q_F\}$, Alphabeten $\Gamma := \{B, 0, 1, \#\}$ und $\Sigma := \{0, 1\}$ und der folgenden Übergangsfunktion δ:

$q \in Q$	$\gamma \in \Gamma$	$\delta(q, \gamma)$
q_0	B	$(q_1, \#, R)$
q_0	0	$(q_0, 0, R)$
q_0	1	$(q_0, 1, R)$
q_1	B	$(q_2, 1, R)$
q_1	0	$(q_5, 0, R)$
q_1	1	$(q_1, 1, R)$
q_2	B	$(q_2, 0, N)$

$q \in Q$	$\gamma \in \Gamma$	$\delta(q, \gamma)$
q_2	0	$(q_3, 0, R)$
q_3	B	$(q_4, 1, R)$
q_3	0	$(q_F, 0, R)$
q_4	B	$(q_1, 0, L)$
q_5	B	$(q_5, 1, N)$
q_5	1	$(q_6, 1, R)$
q_6	B	$(q_3, 0, N)$

Bestimme für jeden Input $w \in \{0, 1\}^*$ (d.h. für jedes Wort beliebiger Länge [auch 0] bestehend aus $0-$en und $1-$en) die Endkonfiguration von $\mathcal{MAGIC}$. Beachte dabei, dass ein Wort immer von Blanks umgeben ist.

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Kantengewichten $w_e \geq 0$. Als eine $k-$*Knotenteilung* von G bezeichnet man das Partitionieren des Graphes wie folgt:
Wähle eine Teilmenge der Knoten $V' \subseteq V$ mit $|V'| \leq k$ und ersetze jeden Knoten $v \in V'$ durch $\deg(v)$ Kopien $v_1, \ldots, v_{\deg}(v)$. Jede Kopie wird anschließnd mit einer der zu v inzidenten Kanten verbunden, so dass

$$\bigcup_{i=1}^{\deg(v)} \{e \in E : e \in \delta(v_i)\} = \delta(v)$$

gilt. Bezeichne die Kantenmengen der so entstandenen S Zusammenhangskomponenten mit $E_1, \ldots, E_S$. Dann ist der Wert der Knotenteilung gegeben durch

$$W_{\max}(V') = \max_{1 \leq s \leq S} \sum_{e \in E_s} w_e$$

Das **TEILUNGS-PROBLEM** besteht darin, für ein gegebens $k \in \mathbb{N}$ eine $k-$Knotenteilung $V' \subseteq V$ von G zu bestimmen, so dass $W_{\max}(V')$ minimiert wird.

Zeige, dass das **TEILUNGS-PROBLEM** auf G in Polynomialzeit gelöst werden kann, wenn G ein Pfad ist.

Viel Erfolg!