Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. Arie M.C.A. Koster
Dipl.-Comp. Math. Stephan Lemkens

WS 2011/2012

4.Übungsblatt zur Vorlesung
OPTIMIERUNG B

Abgabe spätestens in der Übung am 11.11.11

Aufgabe 1: **1+1+1 Punkte**

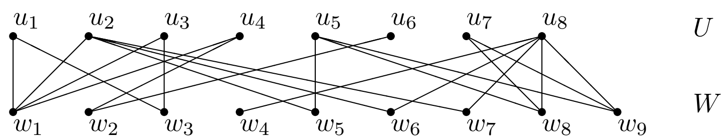
a) Zeige, dass ein k-regulärer bipartiter Graph ein perfektes Matching besitzt, wenn $k \geq 1$ gilt.

b) Folgere, dass ein k-regulärer bipartiter Graph k kantendisjunkte perfekte Matchings besitzt.

c) Gib für jedes $k > 1$ einen k-regulären Graphen an, der kein perfektes Matching besitzt.

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Bestimme im abgebildeten bipartiten Graphen $G = (U \cup W, E)$ ein Maximum Matching und eine Knotenüberdeckung minimaler Größe mit Hilfe des aus der Vorlesung bekannten Algorithmus. Starte mit dem Matching $M = \{u_5 w_5\}$ und wähle im Algorithmus stets denjenigen Knoten aus, der unter allen im vorigen Schritt neu markierten Knoten den kleinsten Index hat.



Aufgabe 3: **2 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph mit Farbklassen U und W und sei $b : V \mapsto \mathbb{Z}_+$ so dass $\sum\limits_{v \in U} b(v) = \sum\limits_{v \in W} b(v) =: t$ gilt.
Ein b-Matching ist eine Funktion $c : E \mapsto \mathbb{Z}_+$, so dass für jeden Knoten v von G gilt:

$$\sum_{e \in E, v \in e} c(e) = b(v).$$

Zeige, dass ein b-Matching genau dann existiert, wenn für jede Knotenüberdeckung X gilt:

$$\sum_{v \in X} b(v) \geq t.$$

Aufgabe 4: **1 Punkte**

Beweise, daß ein Baum höchstens ein perfektes Matching besitzt.

Aufgabe 5: **2 Punkte**

Es sei G ein Graph und M^* ein maximales Matching, d.h. es existiert keine Kante, die den Kanten des Matchings mehr hinzugefügt werden kann (nicht zu verwechseln mit einem Maximum Matching). Zeige die folgende Aussage:
Ist M ein beliebiges Matching von G, so gilt $|M| \leq 2|M^*|$.

Viel Erfolg!