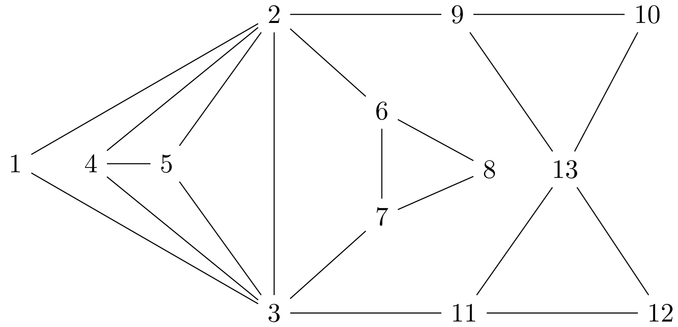
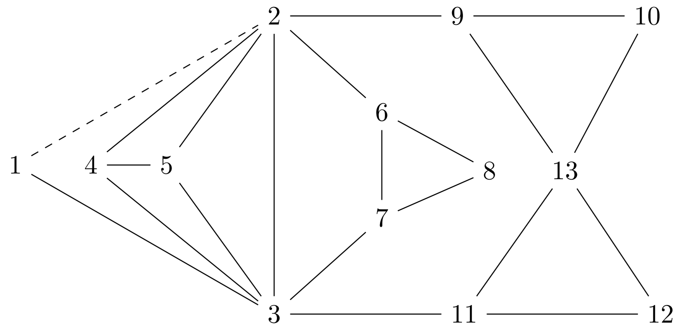
Aufgabe 1

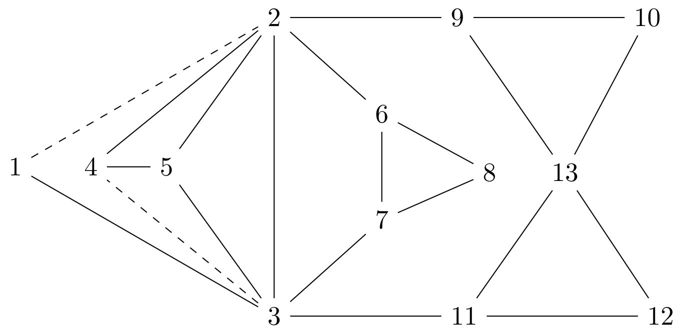
Der Graph zeigt jeweils den Zustand *vor* der rechts angegebenen Operation.



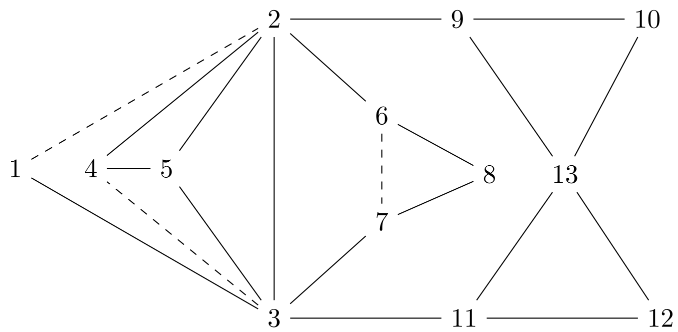
$M = \emptyset$
$W = V$.
Wähle als kürzesten M-alternierenden $W-W$-Weg
$P = 1, 2$.
P ist ein Pfad.
$M = \{(1,2)\}$.



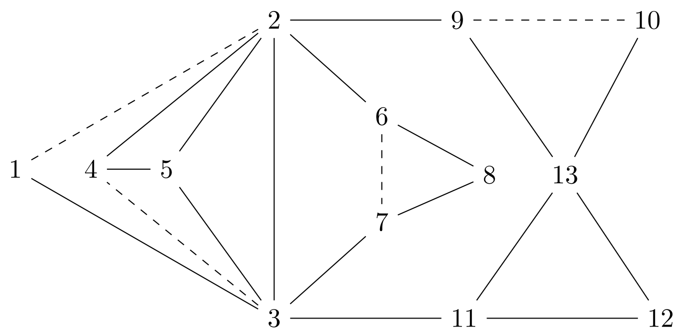
$M = \{(1,2)\}$
$W = V \setminus \{1,2\}$.
Wähle als kürzesten M-alternierenden $W-W$-Weg
$P = 3, 4$.
P ist ein Pfad.
$M = \{(1,2), (3,4)\}$.



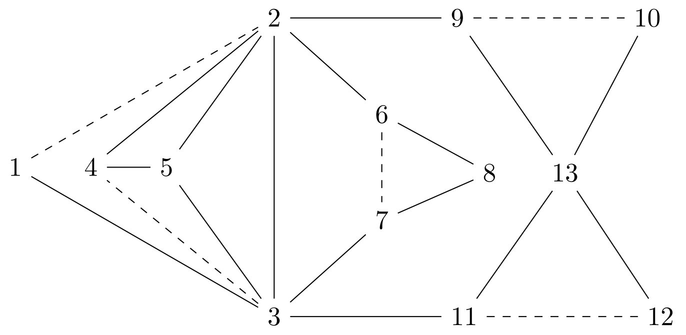
$M = \{(1,2), (3,4)\}$
$W = V \setminus \{1,2,3,4\}$.
Wähle als kürzesten M-alternierenden $W-W$-Weg
$P = 6, 7$.
P ist ein Pfad.
$M = \{(1,2), (3,4), (6,7)\}$.



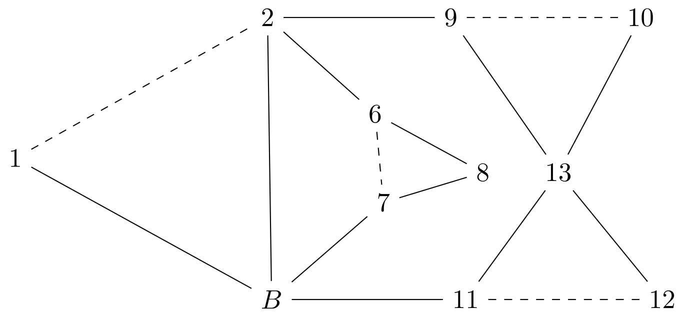
$M = \{(1,2), (3,4), (6,7)\}$
$W = V \setminus \{1,2,3,4,6,7\}$.
Wähle als kürzesten M-alternierenden $W-W$-Weg
$P = 9, 10$.
P ist ein Pfad.
$M = \{(1,2), (3,4), (6,7), (9,10)\}$.



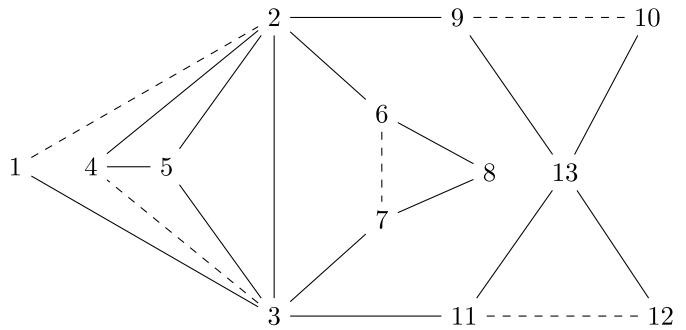
$M = \{(1,2), (3,4), (6,7), (9,10)\}$
$W = V \setminus \{1,2,3,4,6,7,9,10\}$.
Wähle als kürzesten M-alternierenden $W-W$-Weg
$P = 11, 12$.
P ist ein Pfad.
$M = \{(1,2), (3,4), (6,7), (9,10), (11,12)\}$.



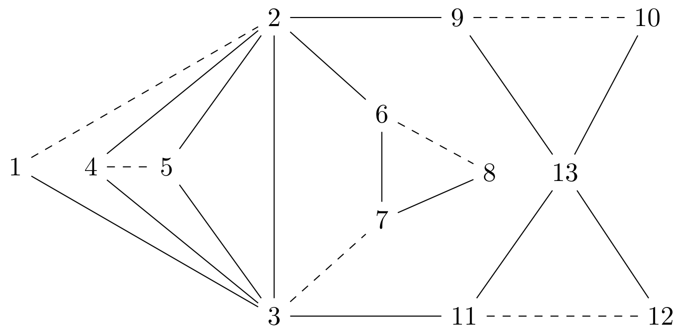
$M = \{(1,2),(3,4),(6,7),(9,10),(11,12)\}$
$W = V \setminus \{1,2,3,4,6,7,9,10,11,12\}$.
Wähle als kürzesten M-alternierenden $W-W$-Weg
$P = 5,3,4,5$.
P ist kein Pfad. Fasse Blossom zu einem Knoten zusammen und führe Algorithmus auf G/P aus.



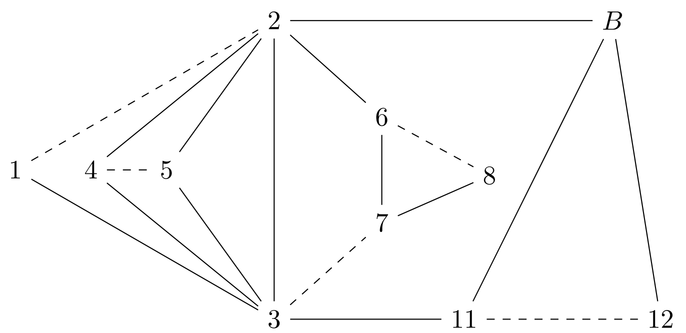
$M = \{(1,2),(6,7),(9,10),(11,12)\}$
$W = V \setminus \{1,2,6,7,9,10,11,12\}$.
Wähle als kürzesten M-alternierenden $W-W$-Weg
$P = B,7,6,8$.
P ist ein Pfad.
$M = \{(1,2),(B,7),(6,8),(9,10),(11,12)\}$



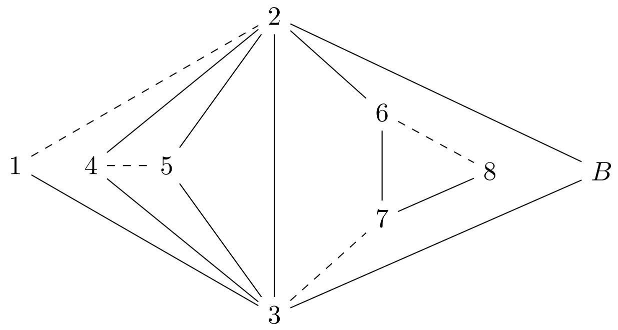
Ergebnis von rekursivem Aufruf:
$M_{rek} = \{(1,2),(B,7),(6,8),(9,10),(11,12)\}$
Wandle M_{rek} in Matching in G um:
$M = \{(1,2),(3,7),(4,5)(6,8),(9,10),(11,12)\}$



$M = \{(1,2),(3,7),(4,5)(6,8),(9,10),(11,12)\}$
$W = \{13\}$
Wähle als kürzesten M-alternierenden $W-W$-Weg
$P = 13,9,10,13$
P ist kein Pfad. Fasse Blossom zu einem Knoten zusammen und führe Algorithmus auf G/P aus.

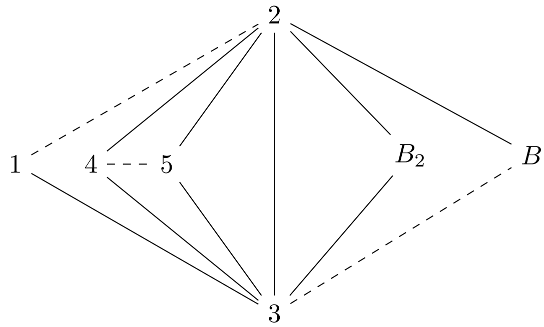


$M = \{(1,2),(3,7),(4,5)(6,8),(11,12)\}$
$W = \{B\}$
Wähle als kürzesten M-alternierenden $W-W$-Weg
$P = B,11,12,B$
P ist kein Pfad. Fasse Blossom zu einem Knoten zusammen und führe Algorithmus auf G/P aus.

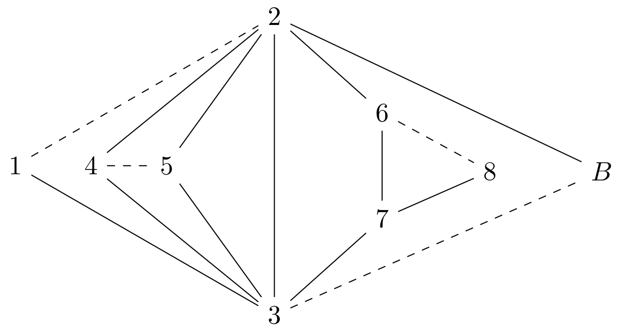


$M = \{(1,2),(3,7),(4,5)(6,8)\}$
$W = \{B\}$
Wähle als kürzesten M-alternierenden $W-W$-Weg
$P = B, 3, 7, 6, 8, 7, 3, B$
P ist kein Pfad. Tausche Matching-Kanten auf P vor Blossom.
$M = \{(1,2),(3,B),(4,5)(6,8)\}$

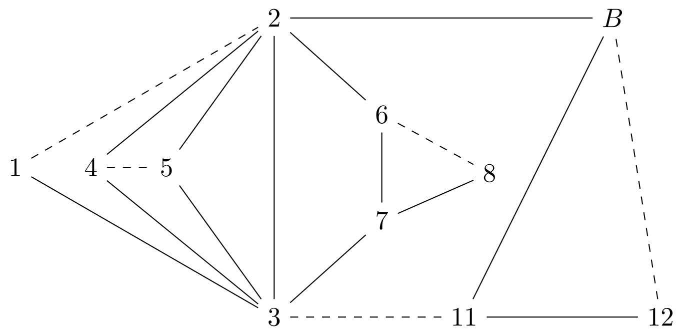
Fasse Blossom zu einem Knoten zusammen und führe Algorithmus auf G/P aus.



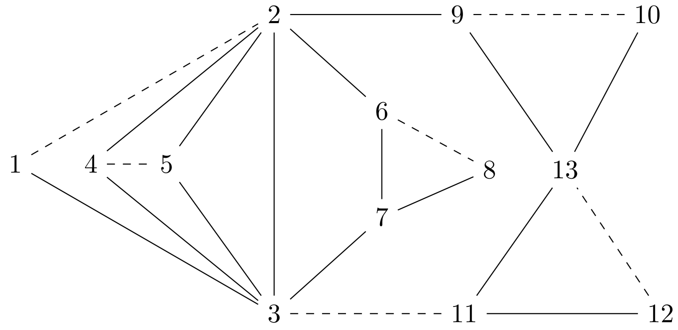
$M = \{(1,2),(3,7),(4,5)\}$
$W = \{B_2\}$
Es existiert kein M-alternierender $W-W$-Weg.
$\Rightarrow M$ ist maximum Matching.



Ergebnis von rekursivem Aufruf:
$M_{rek} = \{(1,2),(3,B),(4,5)\}$
Wandle M_{rek} in Matching in G um:
$M = \{(1,2),(3,B),(4,5),(6,8)\}$



Ergebnis von rekursivem Aufruf:
$M_{rek} = \{(1,2),(3,B),(4,5),(6,8)\}$
Wandle M_{rek} in Matching in G um:
$M = \{(1,2),(3,11),(4,5),(6,8),(12,B)\}$



Ergebnis von rekursivem Aufruf:
$M_{rek} = \{(1,2),(3,11),(4,5),(6,8),(12,B)\}$
Wandle M_{rek} in Matching in G um:
$M = \{(1,2),(3,11),(4,5)(6,8),(9,10),(12,13)\}$
Das maximale Matching ist M.

Aufgabe 2

Sei $G = (V, E)$ ohne isolierte Knoten. Dann gilt $\nu(G) + \rho(G) = |V|$. $\nu(G)$ ist hierbei die Paarungszahl.

Nach dem Satz von Tutte-Berge gilt

$$\nu(G) = \min_{U \subseteq V} \frac{1}{2}(|V| + |U| - odd(G - U))$$

Die Behauptung entspricht also

$$\begin{aligned}
\min_{U\subseteq V} \frac{|V| + |U| - odd(G-U)}{2} + \max_{U\subseteq V} \frac{|U| + odd(G[U])}{2} &= |V| \\
\Leftrightarrow \min_{U\subseteq V} \frac{|U| - odd(G-U)}{2} + \max_{U\subseteq V} \frac{|U| + odd(G[U])}{2} &= \frac{|V|}{2} \\
\Leftrightarrow \min_{U\subseteq V} |U| - odd(G-U) + \max_{U\subseteq V} |U| + odd(G[U]) &= |V|
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Tuttes 1-Faktor Theorem besagt für einen Graphen $G = (V, E)$:

$$\exists M \text{ perfektes Matching in } G \Leftrightarrow \forall S \subseteq V : |S| \geq odd(G - S)$$

Sei $G = (V, E)$ ein regulärer Graph ohne Brücken. Betrachte eine beliebige Knotenteilmenge $S \subseteq V$. Wir werden zeigen, dass $|S| \geq odd(G - S)$. Dann hat G ein perfektes Matching. Betrachte nun alle Zusammenhangskomponenten von $G - S$ mit ungeradem Grad. Wir nennen diese $C_i, i = 1...k$.

Da G 3-regulär, muss die Anzahl der ausgehenden Kanten von jedem C_i nach dem Handschlaglemma ungerade sein. Da ausserdem keine Brücken existieren, muss die Anzahl größer als 1 sein, also mindestens 3.

Die Anzahl der von S ausgehenden Kanten kann gleichzeitig maximal $3 \cdot |S|$ sein, da G 3-regulär. Die Anzahl der C_i ist also durch $3 \cdot |S|/3$ beschränkt, also $odd(G - S) \leq |S|$. □

Aufgabe 4

Aufgabe 5

Sei $G = (V, E)$ bipartit mit Farbklassen U, W sowie $M_1, M_2 \subseteq E$ Matchings in G gegeben. Konstruiere nun ein Matching $M \subseteq M_1 \cup M_2$ so dass M alle Knoten aus U überdeckt, die auch von M_1 überdeckt werden, und alle Knoten aus W überdeckt, die auch von M_2 überdeckt werden.

Betrachten wir zunächst $M' = M_1 \cup M_2$. Wir suchen nun eine Auswahl von Kanten $M \subseteq M'$, so das M die obigen Forderungen erfüllt. Wir wissen, da M_1, M_2 Matchings, dass M' nur aus zwei Typen von Zusammenhangskomponenten bestehen kann: aus Kreisen und aus Pfaden. Diese Komponenten können unabhängig voneinander betrachtet werden.

Im Falle eines Kreises K wählen wir oBdA $M = M_1 \cap K$. Da in einem Kreis stets abwechselnd Kanten aus M_1 und M_2 vorkommen, ist M ein Matching, falls wir alle Kanten aus M_1 wählen. Zudem sind damit alle Knoten des Kreises abgedeckt, insbesondere auch die von M_1 in U und von M_2 in W abgedeckten.

Im Falle eines Pfades P kommen auch hier abwechselnd Kanten aus M_1 und M_2 vor. Wir müssen zwischen Pfaden gerader und ungerader Länge unterscheiden. Bei Pfaden ungerader Länge können wir die Kanten in M so wählen, das alle Knoten auf dem Pfade überdeckt werden. Hier gilt wiederum $M = P \cap M_1$ oder $M = P \cap M_2$, je nachdem ob die erste Kante des Pfades zu M_1 oder M_2 gehört.

Hat der Pfad jedoch gerade Länge, so können nicht alle Knoten überdeckt werden, genauer können alle bis auf einen der Endpunkte überdeckt werden. Zunächst beobachten wir, dass die erste Kante zu M_1 und die letzte zu M_2 gehört (oder umgekehrt, oBdA betrachten wir diesen Fall). Wir müssen nun entscheiden, welchen der beiden Endpunkte wir nicht überdecken.

Da der Graph bipartit ist, muss ein Graph gerader Länge in der selben Farbklasse beginnen und enden. Also seien beide Endpunkte $v_1, v_2 \in U$ (wiederum oBdA, für $v_1, v_2 \in W$ gilt die Aussage analog). Dann wählen wir $M = P \cap M_1$, da so genau der Endpunkt herausfällt, der nicht von M_1 sondern von M_2 überdeckt ist. Da der Endpunkt aber in U, muss er von M auch nicht überdeckt werden.

So können wir für jede Zusammenhangskomponente einzeln ein geeignetes Matching erzeugen, das gesamte Matching M erhalten wir dann durch Vereinigung aller Matchings auf den Komponenten. □

Aufgabe 6

(a)

Die Tutte-Berge-Formel besagt, dass die Größe eines Maximum Matchings

$$\frac{1}{2} \min_{U \subseteq V} (|U| - odd(G - U) + |V|)$$

entspricht. Da kein perfektes Matching existieren soll, darf die folgende Gleichheit nicht erfüllt sein:

$$\begin{aligned} |V| &= \min_{U \subseteq V} (|U| - odd(G - U) + |V|) \\ &= \min_{U \subseteq V} (|U| - odd(G - U)) + |V| \\ \Leftrightarrow 0 &= \min_{U \subseteq V} (|U| - odd(G - U)) \end{aligned}$$

Es darf also kein $U \subseteq V$ existieren, so dass $|U| = odd(G - U)$.

(b)

Abbildung 1: Beispielgraph für $k = 3$

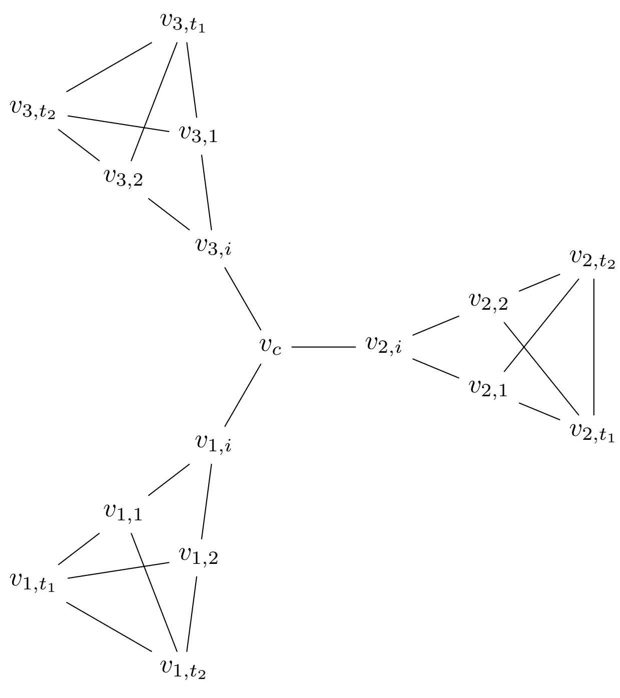


Abbildung 2: Beispielgraph für $k = 5$