Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. Arie M.C.A. Koster
Dipl.-Comp. Math. Stephan Lemkens

WS 2011/2012

2.Übungsblatt zur Vorlesung
OPTIMIERUNG B

Abgabe spätestens in der Übung am 28.10.11

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, $c : E \to \mathbb{R}^+$ eine Bewertung seiner Kanten und T ein MST bezüglich c. Sei ferner $X \subset V$.

a) Ist T im allgemeinen auch ein MST bezüglich $c' : E \to \mathbb{R}^+$ mit

$$c'(e) = c^2(e) \quad ?$$

b) Ist T im allgemeinen auch ein MST bezüglich $c'' : E \to \mathbb{R}^+$ mit

$$c''(e) = \begin{cases} 2c(e) & \text{falls } e = (v, w) \text{ mit } v \in X, w \in V \backslash X \\ c(e) & \text{sonst} \end{cases} \quad ?$$

c) Ist T im allgemeinen auch ein MST bezüglich $c''' : E \to \mathbb{R}^+$ mit

$$c'''(e) = \begin{cases} c(e) + 2 & \text{falls } e = (v, w) \text{ mit } v, w \in X \\ c(e) & \text{sonst} \end{cases} \quad ?$$

Beweise deine Antworten.

Aufgabe 2: **1 Punkte**

Ein einfacher und bewerteter Digraph mit den 8 Ecken $x_1, ..., x_8$ sei durch folgende Bewertungsmatrix gegeben:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
x_1	–	2	5	4	3	8	2	1
x_2	∞	–	1	6	7	∞	5	3
x_3	3	2	–	5	3	4	2	3
x_4	7	4	5	–	3	6	4	2
x_5	6	2	∞	6	–	∞	5	3
x_6	1	3	1	6	3	–	2	∞
x_7	5	2	4	3	3	∞	–	3
x_8	4	3	5	4	3	2	5	–

Dabei bedeutet ein Eintrag a an der Stelle (i, j) für $a < \infty$, dass ein Bogen mit Bewertung a vom Knoten x_i zum Knoten x_j führt. Ist $a = \infty$, so existiert dieser Bogen nicht. Führen Sie den Dijstra-Algorithmus ausgehend von der Ecke $s := x_1$ durch.

Aufgabe 3: **1 Punkte**

Führen Sie den Algorithmus von Moore, Bellman und Ford an dem Digraphen mit Bewertungsmatrix

$$\begin{pmatrix} - & 2 & 5 & 4 \\ \infty & - & -1 & 6 \\ 3 & 2 & - & -5 \\ 7 & 7 & 5 & - \end{pmatrix}$$

durch und wählen Sie $s := x_3$.

Aufgabe 4: **2+3 Punkte**

Stell dir vor, du möchtet kürzeste Wege zwischen Start- und Zielknoten s und t in gerichteten Graphen G finden, die Straßennetze darstellen. Insbesondere sind alle Knoten eines Graphen mit Koordinaten der Form (x, y) versehen, und die Länge einer Kante $c(v, w)$ zwischen Knoten v und w entspricht ihrer euklidischen Entfernung $d(v, w)$.
Ein Kommilitone schlägt folgenden Algorithmus vor:

- Berechne modifizierte Kantengewichte c' wie folgt:

$$c'(v, w) := c(v, w) + d(w, t) - d(v, t)$$

- Benutze den Dijkstra-Algorithmus, um kürzeste Wege bezüglich c' zu berechnen.

a) Berechnet der Algorithmus kürzeste Wege bezüglich c'? Berechnet der Algorithmus kürzeste Wege bezüglich c? Beweise deine Aussagen. Was könnte ein Vorteil dieses Algorithmus gegenüber eines normalen Dijkstra-Algorithmus sein?

b) Betrachte folgende allgemeinere Version des Algorithmus: Sei $\alpha : V(G) \to \mathbb{R}$ eine Knotenbewertung. Berechne nun modifizierte Kantengewichte c' wie folgt:

$$c'(v, w) := c(v, w) - \alpha(w) + \alpha(v)$$

Nun benutze entweder den Floyd- oder den Dijkstra-Algorithmus, um kürzeste Wege bezüglich c' zu berechnen. Sind kürzeste Wege bezüglich c' auch kürzeste Wege bezüglich c? Sind zusätzliche Forderungen an α notwendig, damit der Floyd bzw. der Dijkstra-Algorithmus benutzt werden kann? Wenn ja, welche? Beweise deine Aussagen.

Viel Erfolg!