Aufgabe 1

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Konstruiere einen Graphen $G = (V, E)$, für den ein Min-Cost-Flow das Problem löst. Sei B die Menge der Bahnhöfe und Z die Menge der (der offensichtlichen, natürlichen Ordnung unterliegenden) Uhrzeiten eines Tages. Sei nun X die Menge der Zughalte, also $X \subseteq B \times Z$ und $F \subseteq X \times X$ die in dem Fahrplan gegebene Menge der Fahrten, wobei die minimale Anzahl Waggons $W : F \to \mathbb{N}$ eingehalten werden muss. Aus der Anwendung ergibt sich, dass für jede Fahrt (x_1, x_2) die Uhrzeit von x_1 kleiner als die von x_2 sein sollte.

Als ausgezeichnete Mengen verwenden wir ausserdem X_- und X_+ als Mengen der zeitlich ersten und letzten Halte an jedem Bahnhof.

$$X_- = \{(b, z) \in X \mid \nexists (b, z_2) \in X : z_2 < z\}$$
$$X_+ = \{(b, z) \in X \mid \nexists (b, z_2) \in X : z_2 > z\}$$

Ausserdem definieren wir *next* als die Abbildung eines Halts auf den nächsten Halt am selben Bahnhof. Formal:

$$next(b, z) = (b, z_2) \text{ so dass } z_2 > z \wedge \ \nexists z' : (b, z') \in X \wedge z < z' < z_2$$

Nun konstruieren wir den Graphen G sowie die zu den Kanten gehörenden Kapazitäten und Kosten $c, w : E \to \mathbb{N}$ und den Wert des zu suchenden Flusses x.

$$\begin{aligned} V =& \{s, t\} \cup X \\ E =& \quad \{(s, t)\} \\ & \cup \{(s, (b, z)) \mid (b, z) \in X_-\} \\ & \cup \{((b, z), t) \mid (b, z) \in X_+\} \\ & \cup \{((b, z), next(b, z)) \mid (b, z) \in X\} \\ & \cup F_1 \end{aligned}$$

mit

$$F_1 := \{((b_1, z_1), (b_2, z_2)) \mid ((b_1, z_1), (b_2, z_2)) \in F\}$$

Für $c(e)$ gelte:

$$c(e) = \infty \quad \forall e \in E$$

Für $w(e)$ gilt:

$$w(e) = \begin{cases} 1 & \text{für } e \in \{(s, (b, z)) \mid (b, z) \in X_-\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$