Aufgabe 1

Aufgabe 2

(a)

Sei φ eine Formel in 3-KNF mit Literalen L und k Klauseln und habe die Form

$$\varphi = (x_{11} \vee x_{12} \vee x_{13}) \wedge (x_{21} \vee x_{22} \vee x_{23})...$$

Dabei sind $x_{ij} \in \{l, \neg l \mid l \in L\}$.

Sei nun $G(\varphi) = (V, E, K = 2k + |L|)$ ein Graph mit

$$V = \{l, \neg l \mid L \in L\} \cup \{x_{ij}\}$$

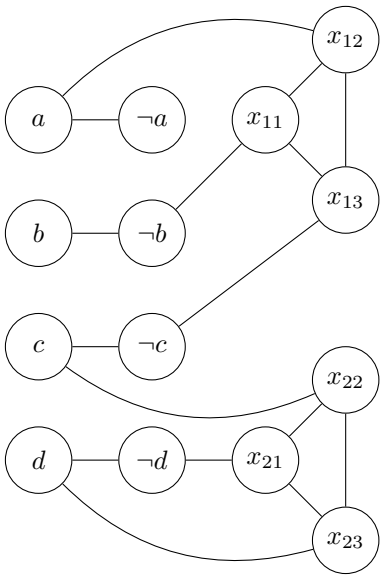
– wobei die Knoten aus L *Literalknoten* und die Knoten x_{ij} *Klauselknoten* heißen – und

$$E = \{(x_{i1}, x_{i2}), (x_{i1}, x_{i3}), (x_{i2}, x_{i3}) \mid i = 1...k\} \cup \{(L(x_{ij}), x_{ij})\}$$

wobei $L(x_{ij})$ das Literal (oder die Negation des Literals) von x_{ij} darstellt. Die i Dreiecke aus Klauselknoten nennen wir *Cluster*.

Auf $G(\varphi)$ muss ein VertexCover der Größe K gefunden werden.

Für die Formel $\varphi = (\neg b \vee a \vee \neg c) \wedge (\neg d \vee c \vee d)$ ergibt sich also der Graph



Behauptung: `VertexCover` hat auf $G(\varphi)$ genau dann eine Lösung, wenn φ erfüllbar ist (`3-SAT` hat eine Lösung).

Beweis:

$\Leftarrow$:

Wir konstruieren ein Vertex Cover $W \subseteq V$ der Größe K. Seien L_1 die Literale, denen in der Lösung von 3-Sat der Wahrheitswert wahr zugewiesen wird. Dann sind alle $l \in L_1$ auch in W. Wähle nun aus jeder 3-Clique, die eine Klausel beschreibt, zwei beliebige Knoten, so dass der verbleibende mit einem bereits markierten Literal-Knoten verbunden ist. So ein Knoten muss existieren, da mindestens ein Literal (oder eine Negation eines Literals) in einer Klausel wahr sein muss, ein Knoten also mit einem bereits markierten Knoten verbunden sein muss.

$\Rightarrow$:

Beobachtung: Jedes Vertex Cover in $G(\varphi)$ muss mindestens einen Literalknoten jedes Literals sowie mindestens zwei Klauselknoten enthalten. Ein Vertex Cover der Größe $K = 2k + |L|$ enthält somit genau einen Literalknoten jedes Literals sowie genau zwei Klauselknoten jedes Dreiecks. Seien nun L_1 die Literalknoten des Vertex Covers und wie in $\Leftarrow$ die Menge der Literale mit dem Wahrheitswert wahr. Die entsprechende Formel φ ist dann erfüllbar, da jedem Literal ein Wahrheitswert zugewiesen ist und jede Klausel erfüllbar ist: Jede Klausel enthält genau einen Knoten, der nicht im Vertex Cover enthalten ist, dessen Kante mit einem Literalknoten aber abgedeckt ist. Der inzidente Literalknoten muss daher im Vertex Cover enthalten sein, das zum Klauselknoten gehörende Literal also wahr sein. □

(b)

Behauptung: $C \subseteq V$ ist genau dann ein `VertexCover`, wenn $I = V \setminus C$ ein `IndependentSet` ist.

Aus der Behauptung folgt sofort die Äquivalenz der Problem hinsichtlich NP-Vollständigkeit.

Beweis:
$\Rightarrow$:

Ist $C \subseteq V$ ein Vertex Cover, so sind alle Kanten des Graphen zu mindestens einem Knoten in C adjazent. Somit gibt es keine Kante, die zu zwei Knoten aus $I = V \setminus C$ adjazent ist. Also gibt es keine zwei inzidenten Knoten in I.

$\Leftarrow$:

Ist $I \subseteq V$ ein Independent Set, so existiert keine Kante im Graphen zwischen zwei Knoten in I. Jede Kante ist somit zu mindestens einem Knoten in $C = V \setminus I$ adjazent. Also deckt C alle Kanten ab. □

Aufgabe 3

Betrachte den Lauf für eine beliebige Eingabe der Länge n. Sei α_i mit $i \in \mathbb{Z}$ das Zeichen an der $i$ten Bandposition. Sei δ_k die $k$te Transitionsregel. Der Unterstrich markiert die aktuelle Bandposition.

Die TM startet in q_0 auf einer beliebigen Eingabe

$$q_0\text{␣}\texttt{\$INPUT\$}\text{␣}$$

Solange das aktuelle Zeichen kein Blank-Symbol ist, geht die TM nach rechts, ohne etwas zu verändern (δ_1, δ_2).

Hat die TM das Ende des Wortes erreicht, so erscheint das erste Blanksymbol:

$$\text{␣}\texttt{\$INPUT\$}q_0\text{␣}$$

Die TM wechselt nun nach q_1, schreibt ein # und geht nach rechts:

$$\text{␣}\texttt{\$INPUT\$\#}q_1\text{␣}$$

Ein Blank: Sie wechselt nach q_2, schreibt eine 1 und geht nach rechts:

$$\text{␣}\texttt{\$INPUT\$\#1}q_2\text{␣}$$

Ein Blank: Sie bleibt in q_2 und schreibt eine 0:

$$\text{␣}\texttt{\$INPUT\$\#1}q_2\texttt{0}$$

Eine 0: Sie wechselt nach q_3 und geht nach rechts:

$$\text{␣}\texttt{\$INPUT\$\#10}q_3\text{␣}$$

Ein Blank: Sie schreibt eine 1, wechselt nach q_4 und geht nach rechts:

$$\text{␣}\texttt{\$INPUT\$\#101}q_4\text{␣}$$

Ein Blank: Sie wechselt nach q_1, schreibt eine 0 und geht nach links:

$$\text{␣}\texttt{\$INPUT\$\#10}q_1\texttt{10}\text{␣}$$

Eine 1: Sie geht nach rechts:

$$\text{␣}\texttt{\$INPUT\$\#101}q_1\texttt{0}\text{␣}$$

Eine 0: Sie geht nach rechts und wechselt nach q_5:

$$\text{␣}\texttt{\$INPUT\$\#1010}q_5\text{␣}$$

Ein Blank: Sie schreibt eine 1:

$$\text{␣}\texttt{\$INPUT\$\#1010}q_5\texttt{1}$$

Eine 1: Sie wechselt nach q_6 und geht nach rechts:

$$\text{␣\$INPUT\$\#10101}q_6\text{␣}$$

Ein Blank: Sie wechselt nach q_3 und schreibt eine 0:

$$\text{␣\$INPUT\$\#10101}q_3\text{0}$$

Eine 0: Sie wechselt nach q_F und geht nach rechts:

$$\text{␣\$INPUT\$\#101010}q_F\text{␣}$$

Die Endkonfiguration der TM ist also für jedes Eingabewort die folgende: Sie endet im Zustand q_F, an die Eingabe wurden die Zeichen `#101010` angehängt und der Lesekopf befindet sich beim ersten Blank hinter diesen Zeichen.

Aufgabe 4

Sei $G = (V, E)$ der Graph mit $V = \{v_i \mid i = 1...n\}$ und $W = \sum_{i=1}^{n} w_i$.

Beobachtungen:
Ist G ein Pfad mit n Knoten, so gibt es nur $n - 2$ (sinnvolle) Knoten, die in V' enthalten sein können: Alle bis auf die Endknoten.
Das Partitionieren entspricht dem Aufteilen des Pfades in $(k + 1)$ Abschnitte.
Weiterhin kann ein zusätzlicher Knoten in V' nie von Nachteil sein, o.B.d.A. wird V' also stets k Knoten enthalten.

Algorithmus: Seien $x_j \in \{1, ..., n\}$ die k Positionen der Knoten in V' und bezeichne $sum(i)$ die Summe der Kantengewichte aller Kanten im $i$ten Abschnitt. Ein Abschnitt (oder seine Summe) heißt *maximal*, falls kein Abschnitt Kanten mit größerem Gesamtgewicht hat.

```
1 x_i = i # fuer alle i
2 while sum(1) nicht maximal:
3         j = maximaler Abschnitt
4         if x_j - x_{j-1} == 1:
5                 return x_i
6         x_{j-1} = x_{j-1} + 1
7         compare(x_i)
```

Bei der ersten Partitionierung sind die ersten k Abschnitt minimal (je nur eine Kante), der Rest ist im letzten Abschnitt enthalten.

Nun wird der maximale Abschnitt verkleinert, indem die erste Kante dieses Abschnitts in den vorherigen Abschnitt verschoben wird. Hat der maximale Abschnitt nur eine Kante, so ist die aktuelle Partitionierung optimal: Kleiner als die größte Kante kann es nicht werden.

Sobald der erste Abschnitt maximal ist, kann die Partitionierung nicht mehr besser werden. Die beste Partitionierung wurde somit bereits betrachtet und ist unter den mittels `compare` miteinander verglichenen.

Da jeder der $k < n$ Schnitte maximal $n - k$ mal verschoben werden kann, werden maximal $k \cdot (n - k) < n^2$ Schritte durchgeführt.

Die optimale Partitionierung muss betrachtet worden sein, da in jedem Schritt versucht wird, die Zielfunktion – den Wert des maximalen Abschnitts – zu verkleinern und am Ende eine besserer Zielwert nicht mehr erreicht werden kann.