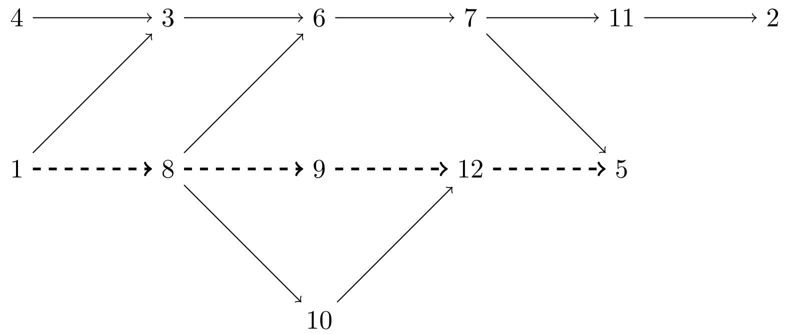
Aufgabe 1

(a)

Darstellung der Abhängigkeiten als Graph:



Der kritische Pfad ist gestrichelt markiert. Die kritischen Aufgaben sind also 1, 8, 9, 12 und 5.

Die minimale Zeit $t(a)$ zur Erledigung aller Aufgaben a_i beträgt somit $t(a_1) + t(a_8) + t(a_9) + t(a_12) + t(a_5) = 44 + 9 + 36 + 36 + 45 = 170$

Die folgende Tabelle zeigt für alle Aufgaben die frühesten und spätesten Startzeitpunkte, die eine optimale Gesamtdauer ermöglichen. Die kritischen Aufgaben sind unterstrichen.

	<u>1</u>	2	3	4	<u>5</u>	6	7	<u>8</u>	<u>9</u>	10	11	<u>12</u>
früheste Zeit	0	137	47	0	125	70	92	44	53	53	108	89
späteste Zeit	0	154	64	17	125	87	109	44	53	55	125	89

(b)

Die folgende Strategie soll iterativ zu beschleunigende Knoten nach einem Greedy-Verfahren auswählen.

Eine Beschleunigung bringt nur Vorteile, falls dadurch tatsächlich die Gesamtdauer verkürzt wird. Die Beschleunigung muss also auf eine Aufgabe im kritischen Pfad angewendet werden. Alle anderen Aufgaben können also ignoriert werden.

Offensichtlich ist es von Vorteil, wenn die Zeitersparnis an einem Knoten möglichst groß ist, während die Kosten möglichst klein bleiben. Es bietet sich also eine Auswahlfunktion wie $f(v) = t_{ersparnis}(v)/\$_{kosten}(v)$ an.

Zusätzlich scheint es sinnvoll, Knoten mit vielen eingehenden und ausgehenden Kanten zu bevorzugen, da hier mehr Pfade von der Ersparnis profitieren können.

Insgesamt könnte sich also $f(v) = t_{ersparnis}(v)/\$_{kosten}(v) \cdot \log(deg(v))$ ergeben.

Aufgabe 2

(a)

B	$f_1(b)$	$f_2(b)$	$f_3(b)$
1	1	1	1
2	3	2	2
3	4	4	3
4	5	5	4

$\Rightarrow$ Lösung: 5

(b)

B	$f_1(b)$	$f_2(b)$	$f_3(b)$
1	0.5	0.5	0.5
2	3	1	1
3	4	4	1.5
4	6	4.5	2
5	7	5	2.5

$\Rightarrow$ Lösung: 7

Aufgabe 3

Sei $S \subseteq V$ eine stabile Menge. Genau dann gilt für alle $(v, w) \in E : v \notin S \vee w \notin S$. Für das Komplement $V \setminus S$ gilt genau dann entsprechend für alle $(v, w) \in E : v \in V \setminus S \vee w \in V \setminus S$. $V \setminus S$ ist also eine Knotenüberdeckung.

Aufgabe 4

Ein Graph ist bipartit, falls $V = V_1 \cup V_2$ mit $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ und alle Kanten $e \in E$ die Form $e = \{v_1, v_2\}, v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ haben. Dies entspricht der 2-Färbbarkeit, wobei alle Knoten aus V_1 die eine und alle Knoten aus V_2 die andere Farbe erhalten.

Behauptung: Für einen Graph, dessen Kreise alle gerade Länge haben, kann mit einem simplen Greedy-Verfahren eine 2-Färbung bestimmt werden. Der Graph ist somit 2-Färbbar, also bipartit.

Beweis: Beginne mit der Menge $T_0 = \{v_i\}$, v_i einem beliebigen Knoten. Weise allen Knoten der Menge T_0 die Farbe 0 zu. Bestimme nun die Mengen $T_r = \{v_j \mid \exists \{v_j, v_k\} \in E, v_k \in T_{r-1}, v_j \notin T_{r \bmod 2} \cup T_{r \bmod 2+2} \cup ... \cup T_{r-2}\}$ und weise den Knoten aus T_r die Farbe $(r \mod 2) + 1$ zu. Terminiere, sobald $T_r = \emptyset$.

Falls sich so eine widerspruchsfreie Färbung ergibt – also keine Färbung eines Knotens durch eine andere Farbe überschrieben wird – ist der Graph bipartit.

Die Terminierung ergibt sich aus der Widerspruchsfreiheit: Da sich ein Widerspruch in dem Überschreiben einer Färbung durch eine andere Färbung ergibt, entsteht er genau dann, wenn ein Knoten zunächst in einem T_r mit geradem r und anschließend in einem ungeraden r (oder umgekehrt) enthalten ist. Ist dies nie der Fall, so wird kein gefärbter Knoten nochmals in einem späteren T_r enthalten sein und der Algorithmus terminiert.

Zu zeigen bleibt, dass auf einem Graphen mit Kreisen gerader Länge keine Widersprüche entstehen. Ein Widerspruch entsteht genau dann, falls ein Knoten gefärbt wird, und nach einer ungeraden Anzahl von Schritten erneut gefärbt wird. Dazu muss jedoch ein Pfad ungerader Länge existieren, der in diesem Knoten beginnt und dort wieder endet – also ein Kreis ungerader Länge. Dieser existiert nach Vorraussetzung nicht.

Somit ist gezeigt, dass kein Widerspruch entstehen kann und ein solcher Kreis stets gefärbt werden kann, der Graph also bipartit ist.

Sei der Graph nun zweifärbbar. Es ist zu zeigen, dass dieser dann auch nur Kreise gerader Länge enthählt. Sei K ein Kreis, auf dem Graphen G.

Angenommen $|K|$ sei ungerade. Sei $v_0 \in K$ und oBdA habe v_0 die Farbe 0. Folge dem Graphen nun $|K| - 1$ Schritte. Wegen der Zweifärbbarkeit (und der geraden Anzahl gegangener Schritte), hat der nun erreichte Knoten $v_{|K|-1}$ die Farbe 0. Also hat der Nachfolger $v_{|K|}$ die Farbe 1, was ein Widerspruch ist, da $v_{|K|} = v_0$ und v_0 die Farbe 0 hat.