Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. Arie M.C.A. Koster
Dipl.-Comp. Math. Stephan Lemkens

WS 2011/2012

10.Übungsblatt zur Vorlesung
Optimierung B

Abgabe spätestens in der Übung am 20.01.12

Als **kanonisches LP** bezeichnet man ein LP der Form

$$\max\left\{c^t x \mid Ax \leq b,\ x \in \mathbb{R}^n_+\right\},$$

das dazugehörige **duale LP** ist

$$\min\left\{b^t y \mid A^t y \geq c,\ y \in \mathbb{R}^n_+\right\}.$$

Das kanonische LP wird in diesem Zusammenhang auch das **primale LP** genannt.
Nach dem **schwachen Dualitätssatz** gilt für alle zulässigen Lösungen x und y des primalen bzw. dualen Problems:

$$c^t x \leq b^t y.$$

Besitzt eines der beiden LPs eine beschränkte Optimallösung x^* bzw. y^*, dann gilt nach dem **starken Dualitätssatz** die Gleichheit der optimalen Zielfunktionswerte

$$c^t x^* = b^t y^*.$$

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Bestimme zu den unten angegebenen LPs die dualen LPs. Vereinfache diese gegebenenfalls durch Zusammenfassen von Nebenbedingungen $ax \leq b$ und $ax \geq b$ zu $ax = b$, beziehungsweise von Variablen ohne Nichtnegativitätsbedingungen.

a) $$\begin{aligned} \max\ & 2x + y \\ \text{s.t.}\ & x + y \leq 4 \\ & x \leq 3 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \max\ & 2x + y \\ \text{s.t.}\ & x + y \leq 4 \\ & x \leq 3 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} \max\ & 2x + y \\ \text{s.t.}\ & x + y = 4 \\ & x \leq 3 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: **1 Punkte**

Beweise die folgende Aussage:

Das duale LP eines dualen LP ist das primale LP.

Verwende dazu ausschließlich die Transformationsregeln für LPs in kanonischer Form.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Betrachte das folgende LP P:

$$\begin{aligned} \max\ & tx \\ \text{s.t.}\ & rx \leq s \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

wobei r, s und t beliebige reelle Zahlen sind. Sei D das duale LP von P. Unter welchen Annahmen bezüglich r, s und t gelten die folgenden Behauptungen?

a) P und D haben optimale Lösungen mit endlichem Wert.

b) P ist zulässig, D aber nicht.

c) D ist zulässig, P aber nicht.

d) Weder D noch P sind zulässig.

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $M := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = b\}$.

Zeige: A ist nicht vollständig unimodular, aber M ist ganzzahlig für alle $b \in \mathbb{Z}^3$.

Aufgabe 5: **2 Punkte**

Eine $(0,1)$-Matrix A heißt $blanciert$, falls sie keine quadratische Untermatrix mit ungerader Zeilen-/Spaltenzahl besitzt, die genau zwei Einsen in jeder Zeile und Spalte enthält.

Zeige: Vollständig unimodulare $\{0,1\}$-Matrizen sind balanciert, aber balancierte $\{0,1\}$-Matrizen sind nicht zwangsläufig vollständig unimodular.

Viel Erfolg!