Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. Arie M.C.A. Koster
Dipl.-Comp. Math. Stephan Lemkens

WS 2011/2012

8.Übungsblatt zur Vorlesung
Optimierung B

Abgabe spätestens in der Übung am 16.12.11

Aufgabe 1: **1 Punkte**

Beweise das folgende Lemma aus der Vorlesung:
Jeder augmentierende Kreis in D entspricht genau einem gerichteten Graphen in N mit äquivalenten Kosten.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Beweise den folgenden Satz:
Sei x ein zulässiger $(s,t)-$Fluss in D mit Wert f, der kostenminimal unter allen $(s,t)-$Flüssen mit Wert f ist und sei $N = (V, \overline{A}, \overline{c}, \overline{w})$ das zugehörige augmentierende Netzwerk.
Sei P ein $(s,t)-$ Weg in N mit minimalen Kosten $\overline{w}(P)$ und sei $\overline{x}$ ein zulässiger $(s,t)-$ Fluss in N, so dass $\overline{x}(\overline{a}) > 0$ für alle $\overline{a} \in P$ und $\overline{x}(\overline{a}) = 0$ für alle $\overline{a} \notin P$.

Dann ist der Vektor $x' \in \mathbb{R}^{|A|}$ definiert durch

$$x'(a) := x(a) + \overline{x}(a_1) - \overline{x}(a_2) \quad \forall a \in A$$

ein zulässiger $s-t-$Fluss in D mit Wert $f + \text{val}(\overline{x})$, der kostenminimal unter allen Flüssen dieses Wertes in D ist.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Gegeben sei das Minimum Cost Flow Problem (MCF) $\min c^t x$ s. t. $Bx = b$ und $0 \leq x \leq u$. Dabei ist B die Inzidenzmatrix des zugrunde liegenden Netzwerks $D = (V, A)$, $c \in \mathbb{R}^{|A|}$ der Zielfunktionsvektor, $b \in \mathbb{R}^{|V|}$ der Nachfrage- bzw. Verbrauchsvektor und $u \in (\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\})^{|A|}$ die Kapazitätsfunktion.
Zeigen Sie, dass das (MCF) genau dann eine nach unten beschränkte Zielfunktion hat, wenn es keinen gerichteten Kreis C im zugrunde liegenden Netzwerk $D = (V, A)$ gibt, dessen Bögen unbeschränkte Kapazität besitzen ($u_a = \infty$ für alle Bögen a des Kreises C) und bei dem die Summe $\sum_{\text{a Bogen von C}} c_a$ negativ ist.

Aufgabe 4: **2+1 Punkte**

Gegeben sei der tägliche Fahrplan in der Datei FahrplanAmsterdam-Rotterdam-Roosendaal-Vlissingen (hin und zurück, hierbei steht A für Amsterdam, R für Rotterdam, S für Roosendaal und V für Vlissingen). Dabei bedeuten z.B. A0935 R0950 3, dass ein Zug von Amsterdam nach Rotterdam um 09:35h in Amsterdam startet und um 09:50h in Rotterdam endet und dabei mindestens drei Waggons besitzen muss. Ziel ist es, die Anzahl der Waggons zu minimieren.
Hinweis: Ein Zug benötigt keine Wartezeit o.ä. an einem Bahnhof, er kann direkt wieder verwendet werden.

a) Formuliere das Problem als ein Minimum Cost Flow Problem.

b) Transformiere das Problem in ein lineares Programm, also in die Form:

$$\begin{array}{llcccc} \min & c^t x & & & & \\ \text{s.t.} & b & \leq & Ax & \leq & d \end{array}$$

Viel Erfolg!