Niklas Fischer 298418
Gereon Kremer 288911

Aufgabe 1

(a)

Gesucht ist ein Kreis $K = v_0 e_1 v_1 ... e_n v_n$ im ungerichteten Graphen $G = (V, E)$, so dass $E = \{e_1, ..., e_n\}$, wobei das Gewicht $g = min \sum_{i=1}^{n} \delta(e_n)$ minimal ist.

(b)

In einem eulerschen Graphen existiert ein Eulerkreis. Der Postbote muss dann keinen Weg doppelt laufen und es gilt $g = \sum_{e \in E} \delta(e)$.

(c)

1. Sei $V_{odd} \subseteq V$ die Menge der Knoten mit ungeradem Grad.
2. Sei E_{odd} eine Menge von Kanten mit $(v_1, v_2) \in E_{odd}$ für alle $v_1, v_2 \in V_{odd}$ und $\delta^*(v_1, v_2)$ die Länge des kürzesten Pfades zwischen v_1 und v_2.
3. Berechne ein (optimales, perfektes) Matching M auf $G_{odd} = (V_{odd}, E_{odd})$.
4. Für jedes $m = (u_m, v_m) \in M$: Füge neuen Knoten r_m in V_{odd} und Kanten $(u_m, r_m), (r_m, v_m)$ in E_{odd} mit $\delta(u_m, r_m) = \delta^*(u_m, v_m)$, $\delta(r_m, v_m) = 0$.
5. Berechne Eulertour auf dem so ergänzten Graphen.
6. Ersetze vorher ergänzte Kanten und Knoten durch den kürzesten Pfad zwischen den beiden Knoten.
7. Gebe den so erzeugten Kreis zurück.

Beweis der Korrektheit:

In der optimalen Tour müssen alle Kanten mindestens einmal enthalten sein. Sei V_{odd} die Menge der Knoten mit ungeradem Grad. Ist $V_{odd} = \emptyset$, so existiert eine Eulertour, die automatisch optimal ist, da jede Kante nur einmal enthalten ist. Der Algorithmus liefert in diesem Fall genau eine solche Tour zurück.

Falls $V_{odd} \neq \emptyset$ so ist $|V_{odd}|$ gerade. Da der erzeugte Graph (V_{odd}, E_{odd}) vollständig ist, existiert stets ein optimales, perfektes Matching. Es bleibt zu zeigen, dass die mithilfe des Matchings konstruierte Eulertour optimal ist.

Da jeder Knoten in einem Kreis zu gerade vielen Kanten des Kreises inzident ist, müssen bei jedem Knoten in V_{odd} ungerade viele Kanten, also insbesondere mindestens eine Kante, doppelt verwendet werden, um eine Eulertour zu erhalten.

Wir betrachten nun die von den doppelt verwendeten Kanten induzierten Pfade. Von jedem Knoten in V_{odd} startet ein solcher Pfad p. Würde p in einem Knoten aus $V \setminus V_{odd}$ enden, so hätte dieser Knoten dann ungeraden Grad, was der Anforderung widerspricht, am Ende eine Eulertour im erweiterten Graphen zu berechnen. Daher muss der Pfad fortgeführt werden und ein einem Knoten aus V_{odd} enden.

Es müssen also Pfade zwischen je zwei Knoten aus V_{odd} existieren, deren Kanten doppelt verwendet werden. Offensichtlich müssen diese Pfade möglichst kurz gehalten werden. Dies wird durch die Berechnung eines optimalen Matchings erreicht.

Aufgabe 4

Beweis:

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit $\deg(v) \geq \delta \; \forall v \in V$. Laut Vorlesung ist G ein einfacher Graph, er enthält also keine Schlingen oder parallele Kanten.

Beginne an beliebigen Knoten $v_0 \in V$. Es existieren dann mindestens δ Kanten von v_0 aus, insbesondere also eine Kante $e_0 = \{v_0, v_1\}$.

Da G einfach und $\deg(v_i) \geq \delta$ existiert von jedem Knoten v_i aus mindestens eine Kante, die nicht zu einem Knoten in $\{v_{\max(i-\delta+1,0)}, ..., v_i\}$ führt. Führt diese Kante zu einem bereits besuchten Knoten, so ist direkt ein Kreis der gewünschten Länge gefunden.

Da G endlich muss aber nach endlich vielen Schritten ein letzter Knoten v_k gefunden werden und dessen Kanten allesamt zu bereits besuchten Knoten führen. Da insbesondere auch $\deg(v_k) \geq \delta$, muss mindestens eine Kante zu einem Knoten in $\{v_0, ..., v_{k-\delta}\}$ führen und einen Kreis der Länge mindestens $\delta + 1$ schließen.

Ist der letzte Knoten v_k mit einer Kante $e_k = \{v_k, v_j\}$ mit $j \in \{0, ..., k - \delta - 1\}$, so ist der Pfad $v_j e_j ... e_{i-1} v_i e_i v_j$ ein Kreis der Länge $L > \delta$, insbesondere also $L \geq \delta + 1$.