

## Tema nr. 5

Fie  $p \in \mathbf{N}^*$  și  $n \in \mathbf{N}^*$  dimensiunile matricei  $A$ ,  $p \geq n$ ,  $\epsilon$  - precizia calculelor, matricea  $A \in \mathbf{R}^{p \times n}$ , vectorul  $b \in \mathbf{R}^p$ .

- Pentru  $p = n > 500$  să se genereze aleator o matrice pătratică, rară și simetrică ( $A = A^T$ ), cu elemente nenule pozitive, folosind schema de memorare cu liste descrisă în *Tema 3*. De asemenea, să se genereze structurile rare citind matricea din fișierul postat pe pagina cursului.
- Pentru  $p = n$  și  $A$  matrice simetrică ( $A = A^T$ ) și rară să se implementeze metoda puterii pentru aproximarea celei mai mari valori proprii a matricei  $A$  și a unui vector propriu asociat. După citirea matricei din fișier, să se verifice dacă matricea este simetrică. Să se afișeze valorile proprii de modul maxim approximate pentru matricea generată aleator și pentru cea din fișier.
- Cazul  $p > n$  (matrice clasice, nerare): utilizând descompunerea după valori singulare (**S**ingular **V**alue **D**ecomposition) din biblioteca folosită la *Tema 2*, să se calculeze și să se afișeze:
  - valorile singulare ale matricei  $A$ ,
  - rangul matricei  $A$ ,
  - numărul de condiționare al matricei  $A$ ,
  - pseudoinversa Moore-Penrose a matricei  $A$ ,  $A^I \in \mathbf{R}^{n \times p}$ ,

$$A^I = VSU^T$$

- vectorul  $x^I \in \mathbf{R}^n$ ,  $x^I = A^I b$  soluția sistemului  $Ax = b$  și norma:

$$\|b - Ax\|_2.$$

Pentru rangul și numărul de condiționare al matricei să se folosească relațiile descrise în acest fișier și de asemenea funcțiile din bibliotecă, funcții care calculează aceste valori.

## Vectori și valori proprii - definiții

Fie  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  o matrice reală de dimensiune  $n$ . Se numește *valoare proprie* asociată matricei  $A$ , numărul complex  $\lambda \in \mathbf{C}$ , pentru care există un vector nenul  $u \neq 0$  numit și *vector propriu* asociat valorii proprii  $\lambda$  pentru care:

$$Au = \lambda u$$

Valorile proprii ale matricei  $A$  pot fi definite și ca rădăcini ale polinomului caracteristic asociat matricei  $A$ ,  $p_A(\lambda)$ :

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$$

Polinomul caracteristic este un polinom de grad  $n$ , deci orice matrice de dimensiune  $n$  are  $n$  valori proprii (reale și/sau complex conjugate).

Despre matricele simetrice se poate arăta că au toate valorile proprii reale.

## Metoda puterii

Fie  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  o matrice simetrică. Se poate arăta că, pentru un vector  $x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0$ , șirul de vectori:

$$\frac{x}{\|x\|_2}, \frac{Ax}{\|Ax\|_2}, \frac{A^2x}{\|A^2x\|_2}, \frac{A^3x}{\|A^3x\|_2}, \dots \quad (1)$$

converge la vectorul propriu asociat valorii proprii de modul maxim.

Se definește *coeficientul Rayleigh* pentru un vector  $x \in \mathbf{R}^n$  ca fiind numărul real:

$$r(x) = \frac{x^T Ax}{x^T x} = \frac{(Ax, x)_{\mathbf{R}^n}}{\|x\|_2^2}$$

În relațiile de mai sus am notat cu  $\|\cdot\|_2, (\cdot, \cdot)_{\mathbf{R}^n}$  norma euclidiană a unui vector și respectiv produsul scalar a doi vectori.

Coeficientul Rayleigh are proprietatea că dacă  $x$  este vector propriu al matricei  $A$  asociat valorii proprii  $\lambda$  atunci  $r(x) = \lambda$ . Dacă, atunci când se calculează șirul (1), se calculează și coeficienții Rayleigh pentru vectorii din șir, obținem o metodă de aproximare a valorii proprii de modul maxim.

Ținând cont de observațiile de mai sus putem descrie metoda puterii astfel:

### Metoda puterii - schema algoritmului

se alege vectorul  $v^{(0)} \in \mathbf{R}^n$  aleator, dar cu  $\|v^{(0)}\|_2 = 1$ ;

$w = Av^{(0)}$ ;

$\lambda_0 = (w, v^{(0)})_{\mathbf{R}^n}$ ;

$k = 0$ ;

**do**

$v^{(k+1)} = \frac{1}{\|w\|_2} w$ ;

$w = Av^{(k+1)}$ ;

$\lambda_{k+1} = (w, v^{(k+1)})_{\mathbf{R}^n}$ ;

$k++$  ;

**while** ( $\|w - \lambda_k v^{(k)}\|_2 > n\epsilon$  și  $k \leq k_{max}$ );

(la introducerea datelor, se pot lua  $\epsilon \leq 10^{-9}$  și  $k_{max} = 1000000$ )

Dacă se iese din bucla *while* pe varianta  $k > k_{max}$  algoritmul nu a reușit să calculeze valoarea proprie de modul maxim și un vector propriu asociat. În acest caz se poate încerca mărirea valorii lui  $\epsilon$  și reluarea calculelor.

Dacă s-a ieșit pe cealaltă variantă, ( $\|Av^{(k)} - \lambda_k v^{(k)}\|_2 \leq n\epsilon$ ), în  $\lambda_{k+1}$  avem o aproximare a unei valori proprii de modul maxim a matricei  $A$ , iar în  $v^{(k+1)}$  o aproximare a unui vector propriu asociat acestei autovalori.

În algoritmul de mai sus nu este nevoie să alocăm șiruri pentru  $\lambda_k$  și  $v^{(k)}$  ci avem nevoie doar de un singur element pentru fiecare șir:  $\lambda \in \mathbf{R}$  pentru a memora valoarea lui  $\lambda_k$  și  $v \in \mathbf{R}^n$  pentru  $v^{(k)}$ .

Alegerea vectorului inițial  $v^{(0)}$  cu  $\|v^{(0)}\|_2 = 1$  se poate face pornind de la un vector nenul generat aleator,  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $x \neq 0$ , și punând:

$$v^{(0)} = \frac{1}{\|x\|_2} x$$

### Metoda puterii - schema algoritmului

se alege vectorul  $v \in \mathbf{R}^n$  aleator, de normă euclidiană 1,  $\|v\|_2 = 1$  ;

$$(v = \frac{1}{\|x\|_2} x, \ x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0)$$

$$w = Av ;$$

$$\lambda = (w, v)_{\mathbf{R}^n} ;$$

$$k = 0;$$

**do**

$$v = \frac{1}{\|w\|_2} w ;$$

$$w = Av ;$$

$$\lambda = (w, v)_{\mathbf{R}^n} ;$$

$$k++ \quad ;$$

**while** ( $\|w - \lambda v\|_2 > n\epsilon$  și  $k \leq k_{max}$ );

## Descompunerea după valori singulare

(Singular Value Decomposition)

Fie  $A \in \mathbf{R}^{p \times n}$ . Se numește descompunere după valori singulare a matricei:

$$A = USV^T \quad , \quad U \in \mathbf{R}^{p \times p} \quad , \quad S \in \mathbf{R}^{p \times n} \quad , \quad V \in \mathbf{R}^{n \times n}$$

cu  $U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_p]$  (vectorii  $u_i$  sunt coloanele matricei  $U$ ) și  $V = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$  matrice ortogonale iar  $S$  matrice de forma:

$$\text{pentru } p \leq n \quad S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_p & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{p \times n}$$

$$\text{pentru } p > n \quad S = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{p \times n}$$

unde numerele nenegative  $\sigma_i \geq 0, \forall i$  sunt valorile singulare ale matricei  $A$ .

Rangul matricei  $A$  este numărul de valori singulare strict pozitive:

$$\text{rang}(A) = \text{numărul de valori singulare } \sigma_i > 0.$$

Numărul de condiționare al matricei  $A$  este raportul dintre cea mai mare valoare singulară și cea mai mică valoare singulară strict pozitivă.

$$k_2(A) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad ,$$

$$\sigma_{\max} = \max\{\sigma_i; \sigma_i \text{ valoare singulară}\} \quad ,$$

$$\sigma_{\min} = \min\{\sigma_i; \sigma_i > 0 \text{ valoare singulară}\}$$

Pseudoinversa Moore-Penrose a matricei  $A$  se calculează folosind formula:

$$A^I = VS^IU^T.$$

Matricea  $S^I$  se calculează folosind formula descrisă mai jos. Presupunem că am calculat pentru matricea  $A \in \mathbf{R}^{p \times n}$  descompunerea după valori singulare. Fie  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r > 0$  valorile singulare strict pozitive ale matricei  $A$ ,  $r = \text{rang}(A)$ .

Matricea  $S^I \in \mathbf{R}^{n \times p}$  se definește astfel:

$$S^I = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sigma_r} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times p}.$$

Vectorul  $x^I = VS^IU^Tb$  poate fi considerat soluția sistemului  $Ax = b$  chiar și când  $p \neq n$  iar sistemul nu are soluție clasică. Când  $p = n$  și matricea  $A$  este nesingulară vectorul  $x^I$  coincide cu soluția clasică a sistemului  $Ax = b$ .