Calcul Numeric

Cursul 2

2019

Anca Ignat

Definiţie

$\boldsymbol{X}$ se numeşte *spaţiu vectorial (spaţiu liniar)*

$$+ : X \times X \to X \text{ şi } \cdot : K \times X \to X, \qquad (K = \mathbb{R})$$

astfel încât *(X , +)* este un grup comutativ :

$a + b = b + a$, $\forall a,b \in X$ – comutativitate,

$(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a,b,c \in X$ – asociativitate ,

$\exists 0 \in X$ **a. î.** $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in X$ - element neutru ,

$\forall a \in X$, $\exists -a \in X$ a.î. $a + (-a) = (-a) + a = 0$ – element opus.

iar pentru operaţia de înmulţire cu scalari au loc relaţiile:

$\boldsymbol{\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b}$, $\forall \lambda \in \boldsymbol{K}$, $\forall \boldsymbol{a,b} \in \boldsymbol{X}$,

$\boldsymbol{(\lambda + \mu)\, a = \lambda a + \mu a}$, $\forall \lambda,\mu \in \boldsymbol{K}$, $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}$,

$\boldsymbol{\lambda(\mu a) = (\lambda \mu) a}$, $\forall \lambda,\mu \in \boldsymbol{K}$, $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}$,

$\exists\, \boldsymbol{1} \in \boldsymbol{K}$ astfel încât $\boldsymbol{1 \cdot a = a}$, $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}$.

Definiţie

Fie X un spaţiu liniar. Spunem că vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_p \in X$ sunt *liniar independenţi* dacă:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + .. + \alpha_p x_p = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_p = 0, \alpha_i \in K$$

*Spaţiu*l vectorial X este *finit dimensional* dacă există p vectori liniar independenţi în X, $x_1, x_2, \ldots, x_p \in X$, şi orice mulţime de q elemente din X cu $q > p$ este liniar dependentă. În acest caz dimensiunea spaţiului X este p ($\dim X = p$).

Fie spaţiul vectorial $\boldsymbol{X}$ finit dimensional cu dim $\boldsymbol{X = p}$. Orice sistem de $\boldsymbol{p}$ vectori liniar independenţi din $\boldsymbol{X}$ se numeşte *bază* a spaţiului $\boldsymbol{X}$.

Fie $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_p} \in \boldsymbol{X}$ o bază pentru spaţiul $\boldsymbol{X}$. Atunci pentru $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, $\exists$ unice constantele $\boldsymbol{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \in K$ astfel încât

$$\boldsymbol{x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + .. + \alpha_p x_p = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, x_i} \, .$$

$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ este un spaţiu vectorial finit dimensional, dim $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ = $\boldsymbol{n}$ cu baza canonică:

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \ \dots \ , \ \boldsymbol{e}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{- poziţia } \boldsymbol{k}, \dots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Calcul matricial

Fie matricea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \;,\quad \boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{i=1\ldots m,\, j=1\ldots n}$$

Se defineşte ***matricea transpusă***:

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}^T = \left(a_{ji}\right)_{i=1\ldots m,\, j=1\ldots n} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

Pentru matricea:

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m\times n}, \boldsymbol{A} = \left(\boldsymbol{a}_{ij}\right)_{\substack{i=1\dots m\\ j=1\dots n}}$$

se defineşte ***matricea adjunctă*** $\boldsymbol{A^H}$:

$$\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}} = \overline{\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}} = \left(\overline{\boldsymbol{a}}_{ji}\right)_{\substack{j=1\dots n\\ i=1\dots m}}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \dots & \overline{a_{m1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \dots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

Pentru $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matricea adjunctă coincide cu transpusa,

$\boldsymbol{A^H} = \boldsymbol{A^T}$.

Fie vectorul $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, acesta este considerat vector coloană,

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \mathbf{1}}$:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x}^T = \left(\boldsymbol{x}_1 \ \boldsymbol{x}_2 \cdots \boldsymbol{x}_n \right)$$

Dacă facem înmulţirea matricială $\boldsymbol{Ae_j}$ obţinem coloana $\boldsymbol{j}$ a matricii $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{Ae_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_{\text{poziţia } j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{Ae_j}$ este coloana $\boldsymbol{j}$ a matricii $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{j=1,\dots,n}$;

$\boldsymbol{e_i^T A}$ este linia $\boldsymbol{i}$ a matricii $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{i=1,\dots,m}$.

Fie vectorii ***x*, *y***, cu ajutorul lor definim produsele scalare în $\mathbb{C}^n$ şi $\mathbb{R}^n$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \text{ , } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$$\left(x \text{ , } y \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = y^H x = \begin{pmatrix} \overline{y_1} & \overline{y_2} & \cdots & \overline{y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ , } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$(x , y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = y^T x = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Proprietăţile matricii $\boldsymbol{A^H}$	Proprietăţi ale matricii $\boldsymbol{A^T}$

1.	$(A + B)^H = A^H + B^H$	$(A + B)^T = A^T + B^T$
2.	$(A^H)^H = A$	$(A^T)^T = A$
3.	$(AB)^H = B^H A^H$	$(AB)^T = B^T A^T$
4.	$(A^{-1})^H = (A^H)^{-1}$	$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Propoziţie

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^{n}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^{m}$ atunci:

$$\left(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{C}^m} = \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^H \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{C}^n}.$$

Pentru cazul real avem:

$$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{m} \Rightarrow \left(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{R}^m} = \left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}\right)_{\mathbb{R}^n}$$

Demonstraţie

$$\boldsymbol{(Ax\,,\,y) = y^H\,(Ax) = y^H\,A\,x = y^H\,(A^H)^H\,x =}$$

$$\boldsymbol{= (A^H\,y)^H\,x = (x\,,\,A^H y).}$$

Tipuri de matrici

Definiţii

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se numeşte ***simetrică*** dacă $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$.

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se numeşte ***autoadjunctă*** dacă $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^H$.

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se numeşte ***unitară*** dacă $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^H = \boldsymbol{I}_n$.

O matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se numeşte ***ortogonală*** dacă

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}_n.$$

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A=(a_{ij})$ se numește matrice ***triunghiulară inferior*** (sau ***inferior triunghiulară***) dacă

$$a_{ij} = 0 \text{ pentru } j > i$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & a_{(n-1)3} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

O matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $A=(a_{ij})$ se numește matrice ***triunghiulară superior*** (sau ***superior triunghiulară***) dacă

$$a_{ij} = 0 \text{ pentru } j < i$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Notăm cu $\boldsymbol{I_n}$ matricea unitate:

$$\boldsymbol{I}_n \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Matrice diagonală $\boldsymbol{D}$=**diag**$[\boldsymbol{d_1}, \boldsymbol{d_2},\ldots,\boldsymbol{d_n}]$

$$\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Norme

Definiție

Fie $\boldsymbol{X}$ un spațiu vectorial real. Se numește ***normă*** aplicația:

$$\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$$

care îndeplinește condițiile:

$$\text{(1)}\ \ \|x\| \geq 0; \quad \|x\| = 0 \iff x = 0;$$

$$\text{(2)}\ \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall\, x, y \in X;$$

$$\text{(3)}\ \ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall\, x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vom numi ***norme vectoriale*** normele definite pe spațiile $\boldsymbol{X} = \mathbb{C}^n$ sau $\mathbb{R}^n$.

Exemple

Fie spațiile vectoriale $\mathbb{C}^n$ sau $\mathbb{R}^n$. Pe aceste spații următoarele aplicații sunt norme vectoriale:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|;$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2};$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i = 1..n\}.$$

Dacă $\|\cdot\|_v$ este o normă vectorială şi $\boldsymbol{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ este o matrice nesingulară atunci aplicația:

$$\|\cdot\|_{\boldsymbol{P}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{P}} = \|\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\|_v$$

este de asemenea o normă vectorială.

Definiție

Se numește ***produs scalar*** în spațiul vectorial ***X*** aplicația:

$$(\cdot\,,\cdot): X \times X \to K$$

care satisface condițiile :

$$(a)\ \ (x\,,x) \geq 0\,, \forall\ x \in X, \quad (x,x) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0;$$

$$(b)\ \ (x\,,y) = \overline{(y\,,x)}\,, \forall\ x\,,y \in X,$$

$$(c)\ \ (\lambda x\,,y) = \lambda(x\,,y), \forall\ x\,,y \in X\,, \forall \lambda \in K,$$

$$(d)\ \ (x + y\,,z) = (x\,,z) + (y\,,z), \forall\ x\,,y\,,z \in X\,.$$

Inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz:

$$\left|\left(x\,,\,y\right)\right| \leq \sqrt{\left(x\,,\,x\right)}\sqrt{\left(y,y\right)} \quad \forall x,y \in X$$

Într-un spațiu vectorial dotat cu produs scalar se poate induce o normă numită euclidiană:

$$\left\|x\right\|_2 = |\,x\,| := \sqrt{\left(x,x\right)}.$$

Reamintim definiția produselor scalare pe $\mathbb{C}^n$ şi pe $\mathbb{R}^n$ introduse anterior:

$$(x\,,\,y)_{\mathbb{C}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} \quad , \quad (x\,,\,y)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Obținem norma euclidiană (valabilă în ambele spaţii $\mathbb{C}^n$ şi $\mathbb{R}^n$):

$$\|x\|_2 = |\,x\,| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\,.$$

Norme matriciale

Definiție

Aplicația $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ se numește ***normă matricială*** dacă:

$$\textbf{(1)}\ \|\boldsymbol{A}\| \geq \mathbf{0}\ \forall\ \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}\ ;\ \|\boldsymbol{A}\| = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} = \mathbf{0}.$$

$$\textbf{(2)}\ \|\alpha \boldsymbol{A}\| = |\alpha|\,\|\boldsymbol{A}\|\ ,\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall\ \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

$$\textbf{(3)}\ \|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|, \forall\ \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

$$\textbf{(4)}\ \|\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B}\| \leq \|\boldsymbol{A}\| \cdot \|\boldsymbol{B}\|, \forall\ \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Exemple

Norma Frobenius definită de relația $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ este o normă matricială.

Aplicația $\|A\|_{\max} = \max\{|a_{ij}|;\, i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,n\}$ ***<u>NU</u>*** este o normă matricială.

Pentru $\boldsymbol{n = 2}$ fie:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, B = A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$A * B = I_2 \;, \|A\|_{\max} = \|B\|_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\|A * B\|_{\max} = 1 > \|A\|_{\max} \bullet \|B\|_{\max} = \frac{1}{2}.$$

Norme matriciale naturale

- $\|\cdot\|_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ o normă vectorială $\to \|\cdot\|_i : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}_+$ ***normă matricială naturală*** sau ***indusă***.

$$\|A\|_{\mathrm{i}} = \max\{ \frac{\|Ax\|_{\mathrm{v}}}{\|x\|_{\mathrm{v}}} ; x \in \mathbb{R}^n , x \neq 0\}$$

Definiţii echivalente :

$$\|A\|_{\mathrm{i}} = \max\{ \|Ax\|_{\mathrm{v}} ; x \in \mathbb{R}^n , \|x\|_{\mathrm{v}} \le 1\}$$

$$= \max\{ \|Ax\|_{\mathrm{v}} ; x \in \mathbb{R}^n , \|x\|_{\mathrm{v}} = 1\}$$

$\|A\|_{\mathrm{i}}$ se numeşte ***normă matricială naturală*** sau ***normă indusă*** de norma vectorială $\|\cdot\|_{v}$

Avem următoarea relaţie:

$$\|Ax\|_{\mathrm{v}} \le \|A\|_{\mathrm{i}}\,\|x\|_{\mathrm{v}}\ ,\forall\ A\in\mathbb{R}^{n\times n}\ ,\forall x\in\mathbb{R}^{n}.$$

Norma Frobenius $\|\cdot\|_{F}$ nu este o normă naturală.

$$\|I_n\|_{\mathrm{i}} = \max\{\frac{\|I_n x\|_{\mathrm{v}}}{\|x\|_{\mathrm{v}}};\, x\neq 0\} = 1,\ \ \forall\ \|\cdot\|_{i},$$

$$\|I_n\|_{F} = (1+1+\cdots+1)^{1/2} = \sqrt{n} \neq 1 \text{ pentru } \ n\ge 2.$$

Pentru $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ norma matricială indusă este:

$$\|A\|_1 = \max\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$$

Pentru $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|;\ i = 1, \ldots, n\}$ norma matricială indusă este:

$$\|A\|_\infty = \max\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|;\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

- $\|\cdot\|_{\mathbf{v}}$ şi $\|\cdot\|_{\mathbf{v,P}}$ - norme vectoriale $\rightarrow$ $\|\cdot\|_{\mathbf{i}}$ şi respectiv $\|\cdot\|_{\mathbf{i,P}}$

normele matriciale induse

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathbf{v,P}} = \|\boldsymbol{Px}\|_{\mathbf{v}} \quad \rightarrow \quad \|\boldsymbol{A}\|_{\mathbf{i,P}} = \left\|\boldsymbol{PAP}^{-1}\right\|_{\mathbf{i}}$$

Valori şi vectori proprii

Definiţii

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se numeşte ***valoare proprie*** (***autovaloare***) a matricii A un număr complex $\lambda \in \mathbb{C}$ pentru care există un vector nenul $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ a.î.:

$$Ax = \lambda x.$$

Vectorul x se numeşte ***vector propriu*** (***autovector***) asociat val. proprii λ.

$$Ax = \lambda x \iff (\lambda I_n - A)x = 0, x \neq 0 \iff \det(\lambda I_n - A) = 0$$

→ Matricea $\lambda I_n - A$ este singulară.

Polinomul:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2\lambda^{n-2} - \ldots - a_{n-1}\lambda - a_n$$

se numeşte ***polinom caracteristic*** asociat matricii ***A***.

→ **grad** $p_A = n$ → are n rădăcini care sunt valorile proprii ale matricii ***A***.

Se numeşte ***rază spectrală*** a matricii ***A***:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i|, i = 1,\ldots,n, \lambda_i - \text{valorile proprii ale matricii A}\}$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$ norma indusă este

$$\|A\|_2 = |A| = \sqrt{\rho(A^T A)}$$ se numeşte ***norma spectrală***.

Propoziţia 1

Fie $\|\cdot\|$ o normă matricială naturală. Atunci:

$$\rho(A) \le \|A\|, \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **,$\{A^k\}$ un şir de matrici.**

$$A^k \to 0_{n\times n}\,, k \to \infty \iff \left\| A^k \right\| \to 0\,, k \to \infty.$$

Propoziţia 2

Fie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Atunci:

$$A^k \to 0\,, k \to \infty \iff \rho(A) < 1.$$

Dacă există o normă matricială naturală pentru care **$\|A\| < 1$**

atunci:

$$A^k \to 0 \text{ pentru } k \to \infty.$$

$$(n = 1 \to a \in \mathbb{R}\,, a^k \to 0 \text{ pentru } k \to \infty \iff |a| < 1.)$$

Propoziţia 3

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$. Seria $\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{0}}^{\infty} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}$ converge dacă şi numai dacă raza spectrală a matricii $\boldsymbol{A}$ este subunitară:

$$\sum_{k=0}^{n} A^k = S \quad \Leftrightarrow \quad \rho(A) < 1.$$

Dacă există o normă a matricii A astfel încât $\|\boldsymbol{A}\| < \boldsymbol{1}$ atunci seria converge. În cazul convergenţei avem :

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = S = (I - A)^{-1}.$$

Propoziţia 4

Fie $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pentru care există o normă matricială naturală astfel ca $\|\boldsymbol{A}\| < \mathbf{1}$. Atunci există matricile $(\boldsymbol{I}_n \pm \boldsymbol{A})^{-1}$ şi avem evaluările:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \|\boldsymbol{A}\|} \leq \left\|(\boldsymbol{I} \pm \boldsymbol{A})^{-1}\right\| \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} - \|\boldsymbol{A}\|}.$$

Numere în format binar

În 1985 IEEE a publicat un raport numit Binary Floating Point Arithmetic Standard 754-1985 și o actualizare în 2008 IEEE 754-2008 care furnizează standarde pentru numere în virgulă mobilă binare și decimale, formate de interschimbare a tipului de date, algoritmi de rotunjire aritmetică, tratarea excepțiilor. Aceste standarde sunt respectate de toți fabricanții de calculatoare care folosesc arhitectura în virgulă mobilă.

O reprezentare binară pe 64 de biți a unui număr real se face în felul următor: primul bit este bitul de semn, următorii 11 biți reprezintă exponentul ***c*** iar următorii 52 de biți conțin informații despre partea fracționară, ***f***, numită și mantisă

$$\mathbf{(-1)^s\, 2^{c-1023}(1+f)}\ .$$

0 10000000011 1011100100010000000000000000000000000000000000000000 =
27.56640625

[27.5664062499999982236431605997495353221893310546875,
27.5664062500000017763568394002504646778106689453125).

Cel mai mic număr pozitiv care poate fi reprezentat este cu $\boldsymbol{s=0, c=1, f=0}$ adică

$$\boldsymbol{z = 2^{-1022}(1+0) \approx 0.22251\times 10^{-307}}$$

iar cel mai mare este pentru $\boldsymbol{s=0, c=2046, f=1-2^{-52}}$

$$\boldsymbol{Z = 2^{1023}(2-2^{-52}) \approx 0.17977\times 10^{309}}.$$

Numerele care apar în calcule și sunt mai mici decât $\boldsymbol{z}$ sunt setate în general la 0 (*underflow*) iar cele mai mari decât $\boldsymbol{Z}$ duc, de obicei, la oprirea calculelor (*overflow*).

Se observă că numărul 0 are două reprezetări: $s = 0, c = 1, f = 0$ și $s = 1, c = 1, f = 0$.

Reprezentarea zecimală

$\pm 0.d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n$ $1 \le d_1 \le 9$, $0 \le d_i \le 9$, $i = 2, ..., k$ - reprezentarea zecimală folosind k cifre. Orice număr real y:

$$y = 0.d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} d_{k+2} \ldots \times 10^n$$

poate fi reprezntat folosind k cifre printr-o simplă trunchiere

$$fl(y) = 0.d_1 d_2 \ldots d_k \times 10^n \ .$$

O altă metodă de a obține o reprezentare cu ***k*** cifre este prin rotunjire:

$$\boldsymbol{fl(y) = 0.\delta_1\delta_2 \ldots \delta_k \times 10^n}$$

Dacă $\boldsymbol{d_{k+1} \geq 5}$ se adaugă ***1*** la $\boldsymbol{d_k}$ pentru a obține ***fl(y)*** (*round up*),

altfel se face trunchierea la ***k*** cifre (*round down*).

Un număr $\boldsymbol{r^*}$ aproximează numărul $\boldsymbol{r}$ cu ***t*** cifre exacte dacă t este cel mai mare intreg nenegativ pentru care:

$$\boldsymbol{\frac{\left|r - r^*\right|}{|r|} \leq 5 \times 10^{-t}} \, .$$

În cazul trunchierii avem

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| \leq 10^{-k+1}$$

iar când se face rotunjirea:

$$\left|\frac{y - fl(y)}{y}\right| \leq 0.5 \times 10^{-k+1}.$$

Operațiile elementare

$$x +_c y = fl(fl(x) + fl(y))$$

$$x -_c y = fl(fl(x) - fl(y))$$

$$x \times_c y = fl(fl(x) \times fl(y))$$

$$x \div_c y = fl(fl(x) \div fl(y))$$

Surse de erori în calculule numerice

1. Erori în datele de intrare:
   - măsurători afectate de erori sistematice sau perturbaţii temporare,
   - erori de rotunjire: 1/3 , π , 1/7,…
2. Erori de rotunjire în timpul calculelor:
   - datorate capacităţii limitate de memorare a datelor, operaţiile nu sunt efectuate exact.

3. Erori de discretizare:

- limita unui şir , suma unei serii , funcţii neliniare aproximate de funcţii liniare, aproximarea derivatei unei funcţii

4. Simplificări în modelul matematic

- idealizări , ignorarea unor parametri.

5. Erori umane şi erori ale bibliotecilor folosite.

Eroare absolută , eroare relativă

a – valoarea exactă,

ã – valoarea aproximativă.

Eroare absolută : $a - \tilde{a}$ *sau* $|a - \tilde{a}|$ *sau* $\|a - \tilde{a}\|$

$$a = \tilde{a} \pm \Delta_a, \ |a - \tilde{a}| \le \Delta_a$$

Eroare relativă: $a \ne 0$ $\quad \frac{a - \tilde{a}}{a}$ **sau** $\frac{|a - \tilde{a}|}{|a|}$ **sau** $\frac{\|a - \tilde{a}\|}{\|a\|}$

$\frac{|a - \tilde{a}|}{|a|} \le \delta_a$ (δ_a se exprimă, de regulă, în %).

În aproximările 1kg ±5g, 50g±5g erorile absolute sunt egale dar pentru prima cantitate eroarea relativă este 0,5% iar pentru a doua eroarea relativă este 10%.

$$a_1 = \tilde{a}_1 \pm \Delta_{a_1},\ a_2 = \tilde{a}_2 \pm \Delta_{a_2},$$

$$a_1 \pm a_2 = (\tilde{a}_1 \pm \tilde{a}_2) \pm \left(\Delta_{a_1} \pm \Delta_{a_2}\right)$$

$$\Delta_{a_1 + a_2} \leq \Delta_{a_1} + \Delta_{a_2}.$$

a_1 cu eroare relativă δ_{a_1} şi a_2 cu eroare relativă δ_{a_2} :

$$a = a_1 * a_2 \text{ sau } \frac{a_1}{a_2} \text{ rezultă } \quad \delta_a = \delta_{a_1} + \delta_{a_2}.$$

Condiţionare ←→ stabilitate

Condiţionarea unei probleme caracterizează sensibilitatea soluţiei în raport cu perturbarea datelor de intrare, în ipoteza unor calcule exacte (independent de algoritmul folosit pentru rezolvarea problemei).

Fie $\boldsymbol{x}$ datele exacte de intrare, $\tilde{\boldsymbol{x}}$ o aproximaţie cunoscută a acestora, $\boldsymbol{P(x)}$ soluţia exactă a problemei şi $\boldsymbol{P(\tilde{x})}$ soluţia problemei cu $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ca date de intrare. Se presupune că s-au făcut calcule exacte la obţinerea soluţiilor $\boldsymbol{P(x)}$ şi $\boldsymbol{P(\tilde{x})}$.

O problemă se consideră a fi ***prost condiţionată*** dacă $\boldsymbol{P(x)}$ şi $\boldsymbol{P(\tilde{x})}$ diferă mult chiar dacă eroarea relativă $\dfrac{\|\boldsymbol{x-\tilde{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}$ este mică.

Condiţionarea numerică a unei probleme este exprimată prin amplificarea erorii relative:

$$k(x) = \frac{\dfrac{\| P(x) - P(\tilde{x}) \|}{\| P(x) \|}}{\dfrac{\| x - \tilde{x} \|}{\| x \|}} \quad \textbf{pentru } x \neq 0 \ \textbf{ si } P(x) \neq 0$$

O valoare mică pentru ***k(x)*** caracterizează o problemă bine-condiţionată.

Condiţionarea este o proprietate locală (se evaluează pentru diverse date de intrare ***x***). O problemă este bine-condiţionată dacă este bine-condiţionată în orice punct.

Se consideră polinomul Wilkinson:

$$\boldsymbol{w(x) = (x-1)(x-2)\cdots(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + P_{18}(x)}$$

Dacă se schimbă coeficientul (***-210)*** al lui $\boldsymbol{x^{19}}$ cu

$$\boldsymbol{-210 - 2^{-23} = -210.0000001192}$$

soluțiile (cu 5 zecimale exacte) noului polinom sunt:

$$\mathbf{1.00000\ 2.00000\ 3.00000\ 4.00000\ 5.00000\ 6.00001\ 6.99970\ 8.00727}$$
$$\mathbf{8.91725\ 20.84691\ 10.09527 \pm 0.64350}\boldsymbol{i}\ \mathbf{11.79363 \pm 1.65233}\boldsymbol{i}$$
$$\mathbf{13.99236 \pm 2.51883}\boldsymbol{i}\ \mathbf{16.73074 \pm 2.81262}\boldsymbol{i}\ \mathbf{19.50244 \pm 1.94033}\boldsymbol{i}$$

Pentru rezolvarea unei probleme $\boldsymbol{P}$, calculatorul execută un algoritm $\tilde{\boldsymbol{P}}$. Deoarece se folosesc numere în virgulă mobilă, calculele sunt afectate de erori:

$$\boldsymbol{P(x) \neq \tilde{P}(x)}$$

Stabilitatea numerică exprimă mărimea erorilor numerice introduse de algoritm, în ipoteza unor date de intrare exacte, $\| \boldsymbol{P(x) - \tilde{P}(x)} \|$ sau $\dfrac{\| \boldsymbol{P(x) - \tilde{P}(x)} \|}{\| \boldsymbol{P(x)} \|}$.

O eroare relativă de ordinul erorii de rotunjire caracterizează un ***algoritm numeric stabil***.

Un **algoritm numeric stabil** aplicat unei **probleme bine condiţionate** conduce la **rezultate cu precizie foarte bună**.

Un algoritm $\tilde{\boldsymbol{P}}$ destinat rezolvării problemei ***P*** este numeric stabil dacă este îndeplinită una din condiţiile:

1. $\tilde{P}(x) \approx P(x)$ pentru orice intrare x;

2. există $\tilde{x}$ apropiat de x, astfel ca $\tilde{P}(x) \approx P(\tilde{x})$

x = datele exacte,

$P(x)$ = soluţia exactă folosind date exacte,

$\tilde{P}(x)$ = soluţia „*calculată*” folosind algoritmul $\tilde{P}$ cu date exacte de intrare