FYS-MEK1110 - Oblig 3

Ioanna Maria Lazarou

28 Febuar 2021

Metallsylinderen og fjæren

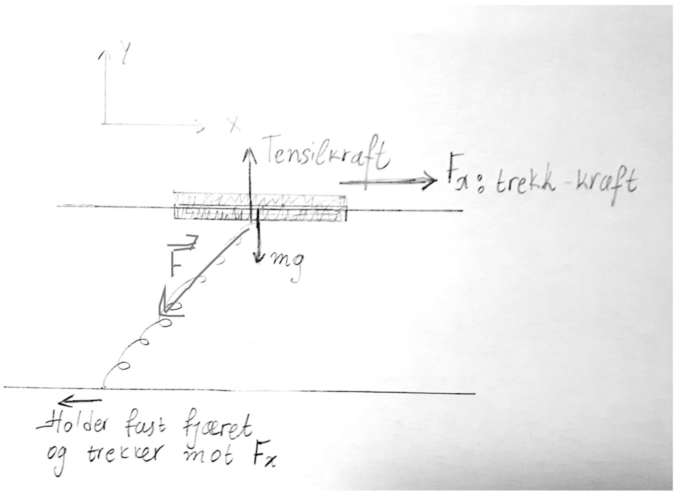
a

Om man tenker seg en trekant med side h, x_0 g l_0. Vil luttrykkes gjennom Pytagoras setning som: $l_0^2 = h^2 + x^2$, derfor $x_0 = \sqrt{(l_0^2 - h^2)} = \sqrt{0.5^2 - 0.3^3} = 0.4m$.

b

l kan uttrykkes gjennom pythagoras som: $l = \sqrt{h^2 + x^2}$.

c



Figur 1: Frilegemediagram av sylinderen med kreftene som virker.

I figuren 1 kan vi se en tegning av et frilegemediagram av sylinderen med kreftene som virker.

d

Fjærkraft er definert ved: $F = \pm k\Delta l$, der $\Delta l = l = l_0$. I oppgave b) fant vi et uttrykk for l: $l = \sqrt{x^2 + h^2}$. Da får vi:

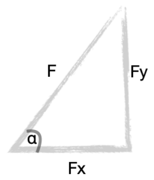
$$F = -k(\sqrt{x^2 + h^2} - l_0) = -k\sqrt{x^2 + h^2}(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + h^2}})$$

Dekomponerer vi kraften med hensyn på vinkel α får vi:

$$cos(\alpha) = \frac{x}{l} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

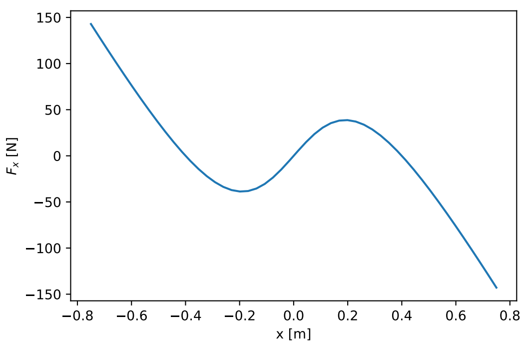
og den dekomponerte kraften:

$$F_x = -kx(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2 + h^2}})$$



Fjærkraften er kun avhengig av posisjonen, og ikke bevegelsesretningen. Minustegnet betyr at kraften alltid vil virke mot punktet der fjæren er i sin likevektslengde.

e



Figur 2: Den horisontalejærkraften som en funksjon av posisjonen til sylinderen ($x = -0.75$ til $x = +0.75$)

I figuren 2 ser vi et plott av den horisontale fjærkraften som en funksjon av posisjonen til sylinderen fra $x = -0.75$ til $x = +0.75$.

Koden brukt er:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

l = 0.5   #m
k = 500   #N/m
h = 0.3   #m

```

```python
x = np.linspace(-0.75, 0.75)
r = np.sqrt(x**2 + h**2)
F = lambda x: -k*x*(1-(l/r))

plt.plot(x,F(x))
plt.xlabel('x [m]')
plt.ylabel('$F_x$ [N]')
plt.show()
```

f

I denne oppgaven skriver vi et program som løser bevegelsesligningene numerisk ved bruk av Euler-Cromer-metoden, og plotter posisjon og hastighet til sylinderen for de første 10 sekundene av bevegelsen. Fx vil være den eneste kraften som virker(hvis vi ser på 1D) og den kan vi bruke N2L på og Euler Cromer.

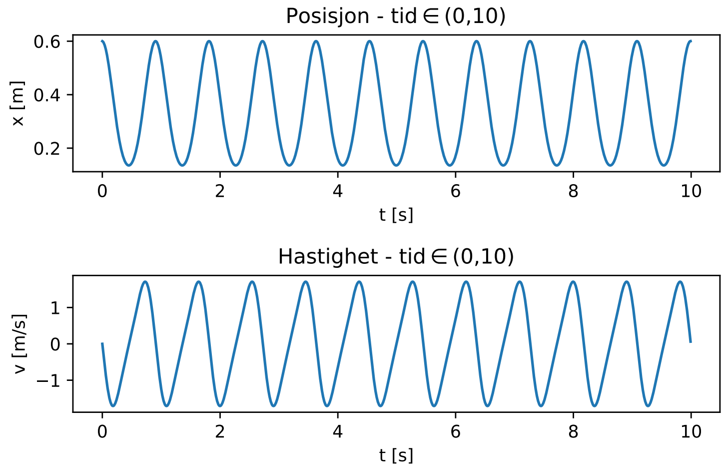
N2L for x aksen for å finne et uttryk for akselerasjonen:

$$\sum F_x = -kx(1 - \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + x^2}}) = ma$$

$$a = -\frac{k}{m}x(1 - \frac{l_0}{\sqrt{h^2 + x^2}})$$

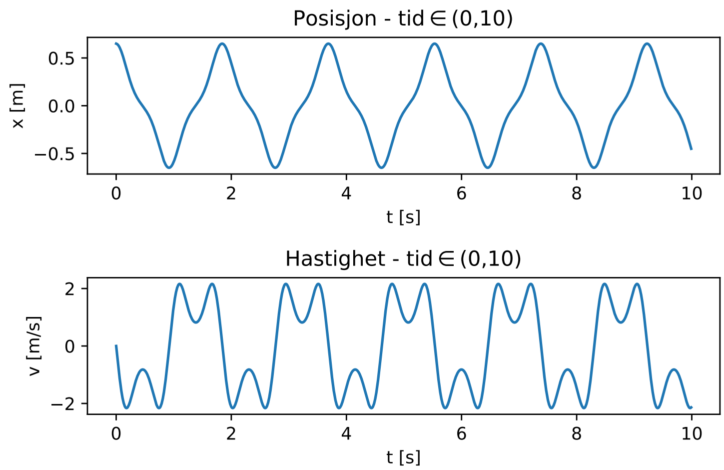
Koden brukt er:

```python
from math import sqrt

l = 0.5; k = 500; h = 0.3; m = 5.

time = 10      # s
dt   = 1./100 # time steps
n    = int(time/dt)

t = np.zeros(n,float); x = np.zeros(n,float)
v = np.zeros(n,float); a = np.zeros(n,float)

x[0] = 0.6
v[0] = 0
a[0] = 0

for i in range(n-1):
    r = sqrt(x[i]**2 + h**2)
    a[i+1] = -(k/m)*x[i]*(1 - l/r)
    v[i+1] = v[i] + dt*(a[i+1])
    x[i+1] = x[i] + dt*(v[i+1])
    t[i+1] = t[i] + dt

plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(t,x)
plt.xlabel('t [s]')
plt.ylabel('x [m]')
plt.title('Posisjon - tid$\in$(0,10)')

plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(t,v)
plt.xlabel('t [s]')
plt.ylabel('v [m/s]')
plt.title('Hastighet - tid$\in$(0,10)')

plt.tight_layout()
plt.show()
```



Figur 3: Posisjon og hastighet til sylinderen for de første 10 sekundene av bevegelsen - startposisjon $x_1 = 0.6$

I figuren 3 ser vi plott av posisjon og hastighet til sylinderen for de første 10 sekundene av bevegelsen. De følger begge en periodisk bevegelse(fordi det ikke er noe friksjon eller luftmotstand for å stoppe /bremse bevegelsen). Posisjonen går fra 0.6 til 0.1, før det går tilbake til opprinnelig posisjon. Hastigheten går fra -2 til 2 m/s som viser at det kan gå i begge retninger. Dette er fordi siden vi har en fjær festet til massen, noe som betyr at vi har ekstremer vi forholder oss til. Hvis man dytter på sylinderen, ikke bare slipper den, kan hastigheten fluktuere mye mer.



Figur 4: Posisjon og hastighet til sylinderen for de første 10 sekundene av bevegelsen - startposisjon $x_1 = 0.65$

g

I denne oppgaver modifiserer vi koden litt. Denne gangen er startposisjon $x_1 = 0.65$m. I figuren 4 ser vi plott av posisjon og hastighet som en funksjon av tid for de første 10 sekundene av bevegelsen. Begge plottene ser annerledes ut enn i forrige oppgave og bevegelsen er ikke så ren. Dessuten ser vi at bevegelsen går til venstre for likevektspunktet. Sylinderen svinger nesten periodisk frem og tilbake mellom samme avstand fra x=0 på x-aksen. Vi kan henvise at bevegelsen er ganske kraftig fordi det beveger seg lenger enn ved forrige oppgave.

h

Vi kan følge samme prosedyre som i oppgaven d). Da får vi:

$$F = -k\sqrt{x^2+h^2}(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2+h^2}})$$

Dekomponerer vi kraften med hensyn på vinkel α får vi:

$$sin(\alpha) = \frac{h}{l} = \frac{h}{\sqrt{x^2+h^2}}$$

Den vertikale dekomponerte komponenten til fjæra som virker på sylinderen er:

$$F_y = -kh(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2+h^2}})$$

i

Normalkraften N, som virker på sylinderen fra stangen når fjæren er i sin likevektslengde l_0, er oppgitt som tensilkraften som er definert ved: $N = T = mg$ i normale oppsett ettersom gravitasjonskraften G er oppgitt som: $G = -mg$.

j

Kreftene som virker i y-retning er normalkraften N, y-komponent til fjærkraften F (F_y) og gravitasjonskraften G. Normalkraften og y-komponenten til fjærkraften peker oppover og gravitasjonskraften trekker ned. Det gir at vi må ha en normalkraft som tar hensyn sil system og gravitasjonskraft.

Fra N2L i y-aksen har vi:

$\sum F_y = N + F_y + G = 0 \Rightarrow N = -F_y - G$

$$N(x) = kh(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2+h^2}}) + mg$$

Retningen er bestemt av F_y som er positiv for $l(x) < l_0$ og negative for $l(x) > l_0$.

k

Vi modifiser koden til å også inneholde friksjon.

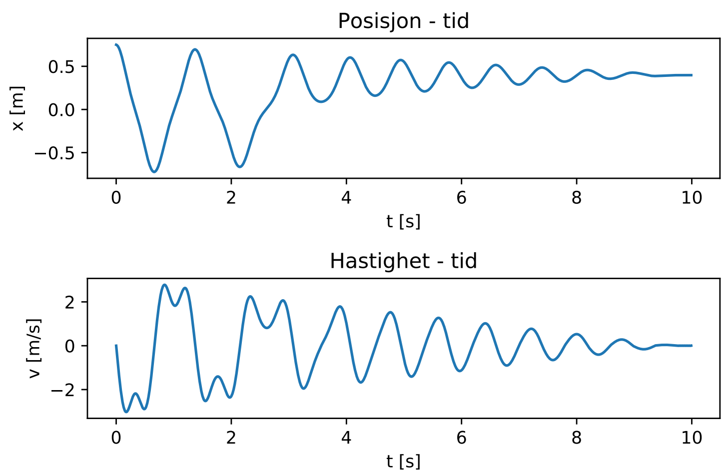
```
from math import sqrt

l = 0.5     #m
k = 500     #N/m
h = 0.3     #m
m = 5.      #kg
g = 9.81    #m/s^2
md = 0.05

time = 10       # s
dt   = 1./100 # time steps
n    = int(time/dt)

t = np.zeros(n,float); x = np.zeros(n,float);
v = np.zeros(n,float); a = np.zeros(n,float)

x[0] = 0.75
v[0] = 0
a[0] = 0

for i in range(n-1):
    Fd = -md*m*g*np.sign(v[i])  #friksjon

    r = sqrt(x[i]**2 + h**2)
    a[i+1] = -(k/m)*x[i]*(1 - l/r) + Fd/m
    v[i+1] = v[i] + dt*(a[i+1])
    x[i+1] = x[i] + dt*(v[i+1])
    t[i+1] = t[i] + dt

plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(t,x)
plt.xlabel('t [s]')
plt.ylabel('x [m]')
plt.title('Posisjon - tid')

plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(t,v)
plt.xlabel('t [s]')
plt.ylabel('v [m/s]')
plt.title('Hastighet - tid')

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Figuren 5 viser plot av posisjon og hastighet med friksjon og $x = 0.75$. Før vi introduserte friksjon var det et energibevarende system, nå er det ikke lenger det.

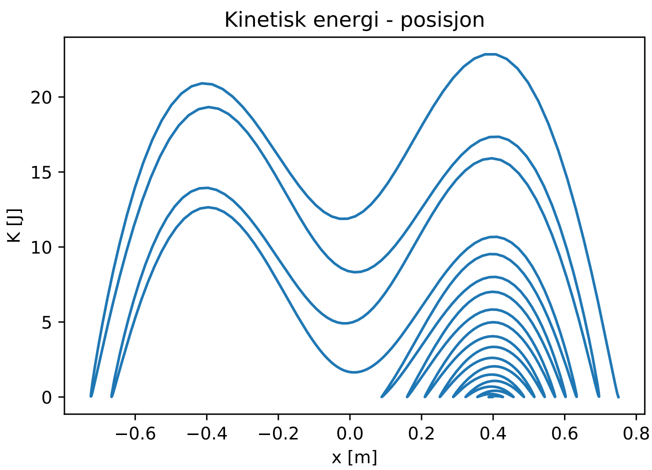
Om vi ser på posisjonsgrafen din ser vi at sylinderen svinger frem og tilbake forbi punktet $x = 0$, og til slutt klarer den ikke å komme seg over $x = 0$ lenger. Bevegelsen avtar samtidig som farten avtar som tiden går.

l

Vi plotter kinetisk energi vs posisjonen i de 10 første sekunder. Vi ser(fig. 6) at den avtar gradvis, og siden $K = \frac{1}{2}mv^2$, virker dette fornuftig, siden farten avtar gradvis. På grunn av farten kvadrert vil den kinetiske energien også alltid være positiv. Grunnen til at vi her kan observere to sykluser av kinetisk energi pr 1 svingning av sylinderen, er at den kinetiske energien har samme verdi både på vei til høyre, og på vei til venstre, ved samme x-verdi. Den kinetiske energien er lik null når man er i ekstrem-possisjonene.



Figur 5: Posisjon og hastighet som en funksjon av tid med friksjon - startposisjon $x_1 = 0.75$



Figur 6: Kinetisk energi og posisjon for de første 10 sekundene.

m

Fra forrige oppgave(figur. 6) kan vi observere at vi har både stabile og ustabile likevektspunkter ved å speile den kinetiske energien. Punktene at den kinetiske energien er null, toppen av en bakke og bunnen av en dal er likevektspunkter. Mer spesielt, de likevektspunktene ligger i x posisjon ± 0.4 og 0.0. Det er ingen horisontale krefter som virker på sylinderen på disse punktene. For eksempel, i punktet $x = 0$ vil fjæren være komprimert, altså mindre enn sin likevektslengde L_0. Er sylinderen akkurat i $x = 0$ vil fjæren bare dytte rett oppover, og sammen med N og G vil summen av kreftene på sylinderen her være null. Derfor $x = 0$ er et likevektspunkt.

Vi kan bekrefte at disse punktene er likevektspunktene hvis vi ser på forholdet mellom kinetisk og potensiell energi. Dersom er en minimum i den potentielle energien da har vi stabilt likevektspunkt(og vi vet at når vi har et maksimum i kinetisk energi er potensialet minimalt, og vi har maximum i kinetisk i $x = \pm 0.4$). Men hvis det er et maksimum i den potentielle energien hav vi ustabilt likevekts punkt(i $x = 0$).

Hvis kraften på hver side av et likevektspunkt har en motsatt retning fra den retningen av posisjonsendring, kalles likevekten ustabil. Hvis kraften på hver side av et likevektspunkt har samme retning som posisjonsendringsretningen, kalles likevekten stabil. Derfor i $x = 0.4$ har vi et likevektspunkt(bakketoppen)som er stabilt siden sylinderen beveger seg mot likevekten. Hvis noen skyver sylinderen litt slik at den når $x = 0.4001$, vil for eksempel fjæren, som prøver å strekke seg til likevektslengden, ha en vinkel som betyr at den nå kan skyve sylinderen mot $x = 0.4$. Hvis vi plasserer sylinderen litt til siden for hver av $x = -0,4$, vil sylinderen bevege seg mot likevektspunktet, og derfor er den også stabil. Men i $x = 0$ vi har et ustabilt likevektspunkt. Dersom noen skubber litt borti sylinderen slik at den for eksempel kommer seg til $x = 0.001$ altså ikke helt $x = 0$, vil fjæren, som prøver å strekke seg ut til sin likevektslengde, ha fått en vinkel som gjør at den nå kan dytte sylinderen bort fra $x = 0$. Siden sylinderen vil bevege seg bort fra $x = 0$ med en gang den har mulighet til det (altså med en gang fjæren har en vinkel som gjør at den kan dytte sylinderen bort), vil $x = 0$ være et ustabilt likevektspunkt.

Generelt, likevektsposisjonen endres fra null til 0.4 m, hvor den etter 10 sekunder slutter å bevege seg. Plottet fra oppgave k), figur. 5 og oppgave a) bekrefter det.