FYS-MEK1110 - Oblig 2

Ioanna Maria Lazarou

11. februar 2021

Ball som henger i en fjær

a

I figuren 1 vi kan se et frilegemediagramm med kreftene som virker på ballen, Gravitasjonskraften G og snordraget F_S.

b

$$\sum \vec{F} = \vec{G} + \vec{F_S}$$

Vi ser at Gravitasjonskraften **G** kun virker nedover og mot positiv retning, når vi skriver den over på vektor form blir:

$$\vec{G} = -mg\hat{j}$$

Snordraget F_S er avhengig av strikken og hvordan endringen strikken er underveis i bevegelsen.

$\Delta L = L - L_0$, der L_0 er equilibrium lengden til strikken. Posisjonen til pendelen er gitt ved $\vec{\mathbf{r}} = x\hat{i} + y\hat{j}$, så lengden av $\vec{\mathbf{r}}$ blir da lengden på det den strekte strikken derfor: $\mathbf{L} = |\vec{r}| = r \Rightarrow L = r$.

$$\vec{F_S} = k * \Delta L$$

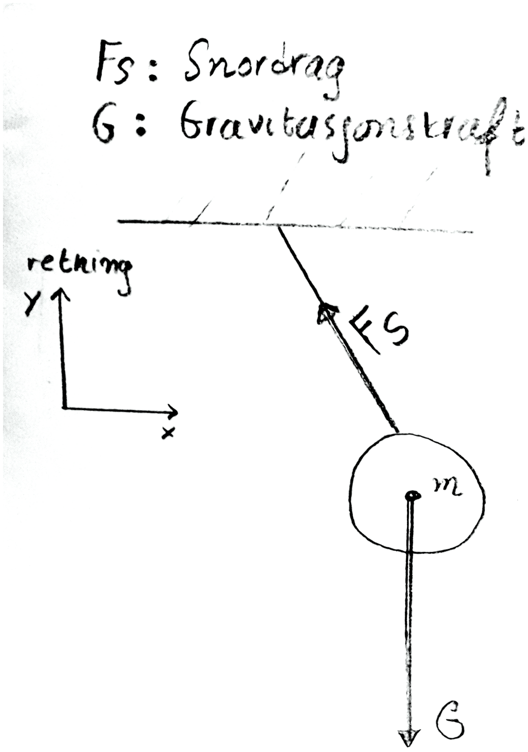
Vi kaller den enhetsvektoren som alltid peker i same retning som vektoren selv: $\vec{\mathbf{U}}_r$. Denne finner vi ved: $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r}$. Vi får da: $\vec{\mathbf{U}}_r = \frac{\vec{r}}{r}$.

For å forsikre oss at kreftene til strikken alltid virker i riktig retning fører vi også inn et minus tegn.

$$\vec{F_S} = -k(r - L_0)\frac{\vec{r}}{r}$$

Vi setter inn det vi nå har funnet i den opprinnelige ligningen. Den netto eksterne kraften som virker på ballen at kan skrives som:

$$\sum \vec{F} = -mg\hat{j} - k(r - L_0)\frac{\vec{r}}{r}$$



Figur 1: Frilegemediagram av ballen med kreftene som virker.

c

$$\vec{\mathbf{r}} = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$$
$$r = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

Setter dette inn i ligningen:

$$\sum \vec{F} = -mg\hat{\jmath} - k(r - L_0)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\sum \vec{F} = -mg\hat{\jmath} - k(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}})(x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath})$$

Sorterer ligningen slik at jeg får $\hat{\imath}$ samlet og $\hat{\jmath}$ samlet.

$$\sum \vec{F} = -k(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}})x(t)\hat{\imath} + (-mg - k(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}})y(t))\hat{\jmath}$$

Vi kan dele disse opp i:

$$\sum \vec{F_x} = -k(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}})x(t)$$

$$\sum \vec{F_y} = -mg\hat{\jmath} - k(1 - \frac{L_0}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}})y(t)$$

d

Vinkelen θ gir ikke tilstrekkelig beskrivelse av posisjonen.Vi behandler tauet som en fjær, og gir det slik at det kan endre lengden. Så for å finne posisjonen til ballen, trenger vi lengden på tauet på den tiden, så vel som vinkelen.

e

Hvis strikken er festet i origo og $\theta = 0$ og $v_0 = 0$ vil ballen henge vertikalt ned langs y-aksen. Nå er det kun gravitasjonskraften G som virker. Så her vil høyden langs y-aksen variere med fjærkonstanten k. Hvis fjærkonstanten er lav(slak) vil ballen henge lenger ned på y-aksen, enn om den er høy(stiv).

f

Bruker Newtons 2 lov for å finne akselerasjonen: $\sum \vec{F} = ma \Rightarrow a = \frac{\sum \vec{F}}{m}$. Bruker vi dette i ligningen får vi:

$$ma = -mg\hat{\jmath} - k(r - Lo)\frac{\vec{r}}{r}$$

Vector form:

$$a = \frac{\sum \vec{F}}{m} = -g\hat{\jmath} - \frac{k(r - L_0)}{m}\frac{\vec{r}}{r}$$

Component form:

$$a_x = -k\Big(\sqrt{x^2 + y^2} - L_0\Big)\frac{x(t)}{m\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{k(1 - \frac{Lo}{\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}})x(t)}{m}$$

$$a_y = -g - k\Big(\sqrt{x^2 + y^2} - L_0\Big)\frac{y(t)}{m\sqrt{x^2 + y^2}} = -g - \frac{k(1 - \frac{Lo}{\sqrt{x(t)^2+y(t)^2}})y(t)}{m}$$

g

Initial verdiene: $m = 0.1\text{kg}$, $L_0 = 1\text{m}$, $\theta = 30°$, $k = 200\frac{N}{m}$ Vi kan bruke uttrykket for akselerasjonen i x og y retning. Vi kan uttrykket dette ved hjelp av disse differensialligningene siden akselerasjonen er den dobbelt deriverte av posisjonen.

$$x(t) = -k\left(\sqrt{x^2+y^2} - L_0\right)\frac{x(t)}{m\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{og} \quad y(t) = -g - k\left(\sqrt{x^2+y^2} - L_0\right)\frac{y(t)}{m\sqrt{x^2+y^2}}$$

h

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

$$\vec{a}(t) = -g - \frac{k(r(t) - L_0)}{m}\frac{\vec{r(t)}}{r(t)}$$

$$\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \Delta t * \vec{a}(t)$$

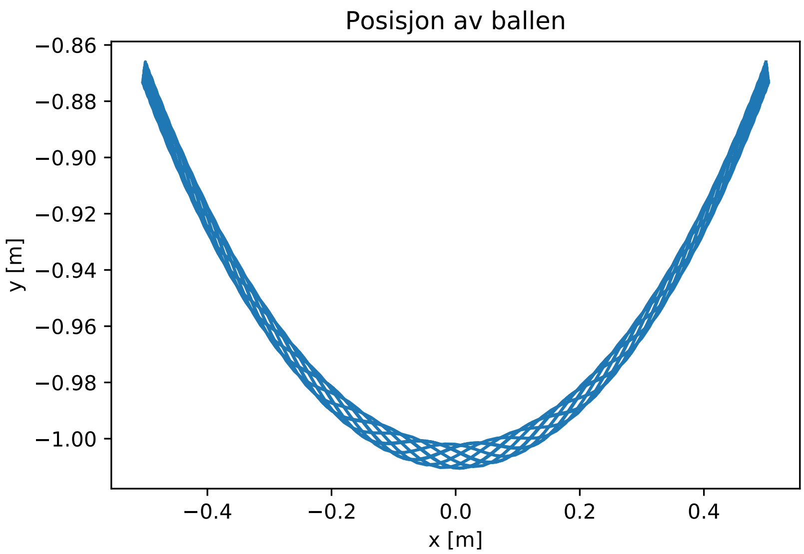
$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta t * \vec{v}(t + \Delta t)$$

Ligningene som varierer med tider er posisjonen og hastigheten (Δt er med i disse ligningene). Akselerasjons ligningen er avhengig av posisjonen til ballen.

i

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#Constants
g = 9.81        #m/s^2
m = 0.1         #kg
L0 = 1.0        #m
k = 200.0       #N/m
theta = np.radians(30.0) #radians

dt = 0.01       #time step - question i)
# dt = 0.1      #time step - question i) (checking different dt)
# dt = 0.001    #time step - question j)
T = 10.0        #time

n = int(round(T/dt))
t = np.zeros((n,1),float)
r = np.zeros((n,2),float)
v = np.zeros((n,2),float)
a = np.zeros((n,2),float)

v[0] = np.array([0,0])
r[0] = np.array([L0*np.sin(theta),-L0*np.cos(theta)])

for i in range(n-1):
    lr = np.sqrt(r[i,0]**2 + r[i,1]**2)
    a[i,:] = np.array([(-k*(1-L0/lr)*r[i,0])/m,-g-(k*(1-L0/lr)*r[i,1])/m])
    v[i+1,:] = v[i,:] + a[i,:]*dt
    r[i+1,:] = r[i,:] + v[i+1,:]*dt
    t[i+1] = t[i] + dt

```

```
        #plots

        #main
        plt.plot(r[:,0],r[:,1])
        plt.title('Posisjon av ballen')
        plt.xlabel('x [m]')
        plt.ylabel('y [m]')
        plt.show()

        #alternative plot
        plt.plot(t,r[:])
        plt.axis([0,5,-1.5,1.5])
        plt.xlabel('tid [s]')
        plt.ylabel('posisjon [m]')
        plt.legend(['x','y'])
        plt.title('Posisjon av ballen')
        plt.show()
```

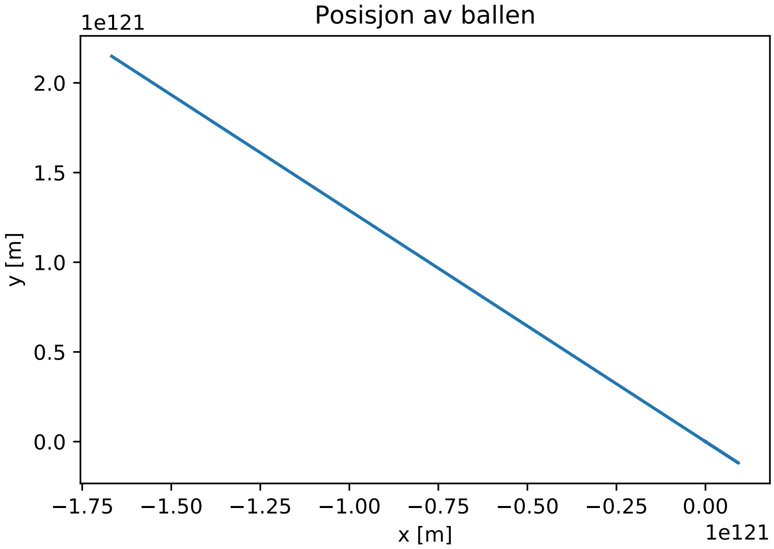


Figur 2: $\Delta t = 0.01$ - Posisjonen til ballen i xy-planet for de første 10 sekundene til bevegelsen.

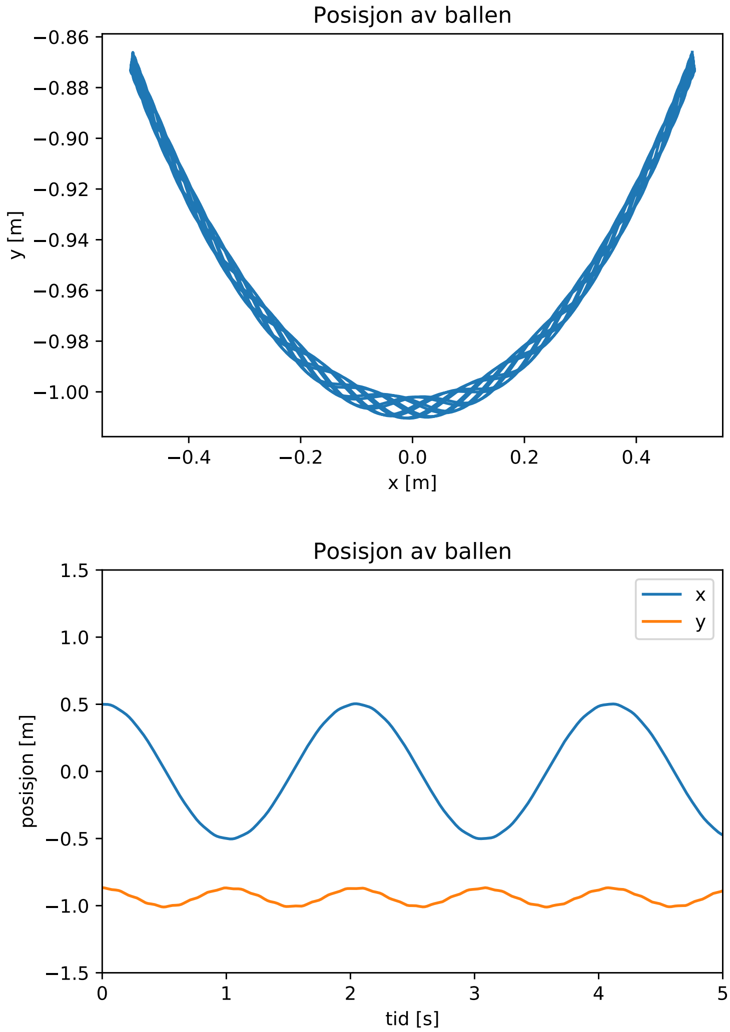
I figuren 2 kan vi se at ballen følger en parabolsk vei, med litt variasjon på grunn av det faktum at vi behandler tauet som en fjær. Vi kan se at feilen blir ekstremt stor når vi øker tidssteget fra 0.01s til 0.1s (fig. 3. Tilnærmingen i Euler-Cromer metoden er dårlig og vi får ikke nok punkter til å kunne beregne en god tilnærming.

j

I figuren 4 kan vi se hvordan ballen beveger seg og hvordan posisjonen oppførte seg langs tid t, både i x og y retning. Det var ikke så stor forandring i plottet av hvordan ballen beveget seg når jeg endret fra $\Delta t = 0.01$s til $\Delta t = 0.001$s. Siden linjen er tjukk tyder det på at ballen ikke beveger seg rett. Vi ser at ballen beveger seg litt ujevnt og det er nok fordi strikken har en lav fjærkoeffisient.



Figur 3: $\Delta t = 0.1$ - Posisjonen til ballen i xy-planet for de første 10 sekundene til bevegelsen.



Figur 4: $\Delta t = 0.001$ - Posisjonen til ballen i xy-planet for de første 10 sekundene til bevegelsen.