

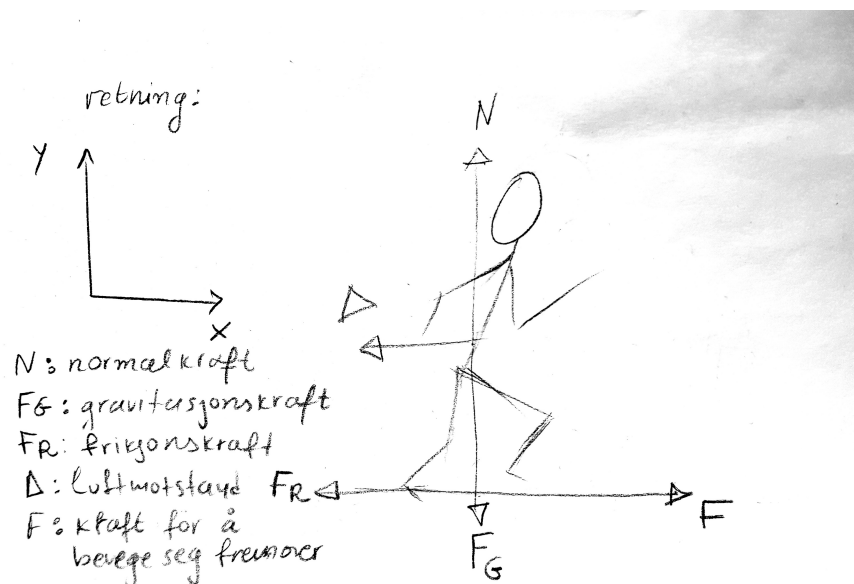
FYS-MEK1110 - Oblig 1

Ioanna Maria Lazarou

28. januar 2021

Modellering av et 100-metersløp

a



Figur 1: Frilegemediagram av sprinteren med kreftene som virker.

I figuren 1 kan vi se en tegning av et frilegemediagram av sprinteren med kreftene som virker.

b

For å finne sprinterens posisjon som en funksjon av tiden, $x(t)$, kan vi bruke Newtons andre lov til å finne et uttrykk for akselerasjon og deretter integrere det to ganger.

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m}$$

$$a = \frac{400N}{80kg} = 5m/s^2$$

$$a(t) = v'(t)$$

hastighet:

$$v(t) = \int a(t)dt$$

$$v(t) = \int 5dt \Rightarrow v(t) = 5t$$

posisjon:

$$x(t) = \int v(t)dt$$

$$x(t) = \int 5t dt \Rightarrow x(t) = 2.5t^2$$

c

$$x(t) = 2.5t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{x(t)}{2.5}}$$

$$t = \sqrt{\frac{100}{2.5}}$$

$$t = 6.3s$$

d

$$D = \frac{1}{2}\rho C_D A_0 (v - w)^2$$

$$F = 400N$$

For å finne et uttrykk for akselerasjonen a (m/s^2) til sprinteren:

$$\sum F_x = m * a \Rightarrow F - D = m * a$$

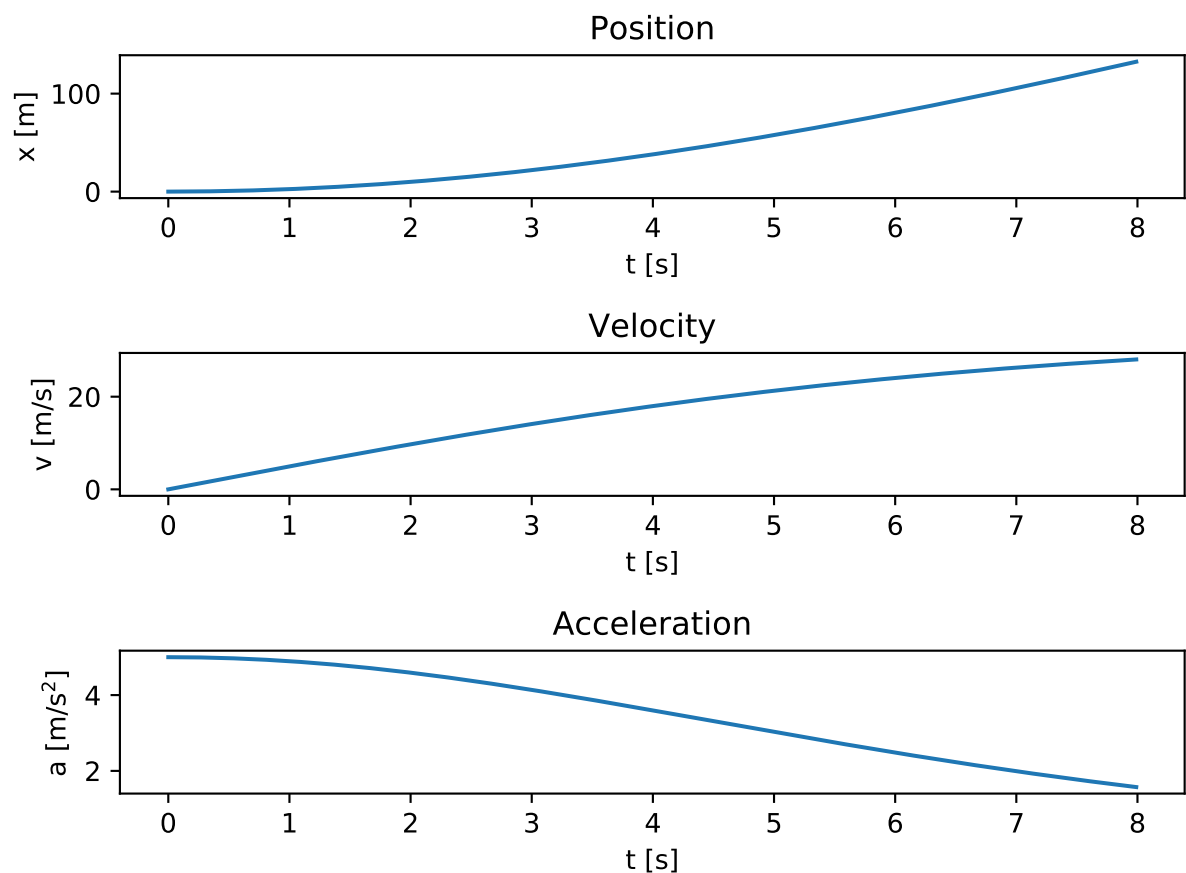
$$a = \frac{F - D}{m}$$

$$a = \frac{F}{m} - \frac{\frac{1}{2}\rho C_D A_0 (v - w)^2}{m}$$

$$a = \frac{400 - \frac{1}{2} * 1.293 * 1.2 * 0.45 * (v - 0)^2}{80}$$

$$a(t) = \frac{400}{80} - \frac{0.34911v(t)^2}{80}$$

$$a(t) = 5 - 0.004v(t)^2 [m/s^2]$$



Figur 2: Posisjon, hastighet og akselerasjon av sprinteren som en funksjon av tiden.

e

Vi bruke Euler-Cromer-metoden for å finne hastigheten som funksjon av tiden, $v(t)$, og posisjonen som funksjon av tiden, $x(t)$ for sprinteren. I figuren 2 kan vi se plott av posisjon, hastighet og akselerasjon av sprinteren som en funksjon av tiden.

Vi trenger en liten dt -verdi som oppnår et godt kompromiss mellom nøyaktighet av resultater og hastighet på simulering. Derfor bestemte jeg Δt å være små ($dt = \frac{1}{100}$) fordi plottene er mer nøyaktige da.

Koden brukt er:

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 time = 8 # s
5 dt = 1./100 # time steps
6 n = int(time/dt)
7
8 t = np.zeros(n, float); x = np.zeros(n, float);

```

```

9     v = np.zeros(n, float); a = np.zeros(n, float)
10
11     x[0] = 0.0 # m;
12     t[0] = 0.0 # s
13     v[0] = 0.0 # m/s
14     a[0] = 5.0 # m/s^2
15
16     #constants
17     F = 400.0 # N
18     m = 80.0 # kg
19     p = 1.293 # kg/m^3
20     Cd = 1.2
21     A0 = 0.45 # m^2
22     w = 0 # m/s
23
24     time_track = 0
25     # Euler-Cromer method
26     for i in range(n-1):
27         a[i+1] = (F - 0.5*p*Cd*A0*(v[i]-w)**2)/m
28         v[i+1] = v[i] + a[i]*dt
29         x[i+1] = x[i] + v[i+1]*dt
30         t[i+1] = t[i] + dt
31
32         #question (f)
33         if x[i+1] >= 100 and time_track == 0:
34             time_track = t[i+1]
35             print (f"Running time of the sprinter: {time_track} sec.")
36
37     plt.subplot(3,1,1)
38     plt.plot(t, x)
39     plt.xlabel('t [s]')
40     plt.ylabel('x [m]')
41     plt.title("Position")
42
43     plt.subplot(3,1,2)
44     plt.plot(t, v)
45     plt.xlabel('t [s]')
46     plt.ylabel('v [m/s]')
47     plt.title("Velocity")
48
49     plt.subplot(3,1,3)
50     plt.plot(t, a)
51     plt.xlabel('t [s]')
52     plt.ylabel('a [m/s^2]')
53     plt.title("Acceleration")
54
55     plt.tight_layout()
56     plt.savefig("taskE.pdf")
57     plt.show()
58
59     """
60     Running time of the sprinter: 6.789999999999999 sec.
61     """

```

f

Vi rruker resultatene i forrige deloppgave til å bestemme løpstiden til sprinteren. Den er 6.78 sec.

g

Siden akselerasjonen er null:

$$\sum F_x = ma \Rightarrow F - D = 0 \Rightarrow F = D$$

$$F = \frac{1}{2} \rho C_D A_0 v^2$$

$$2F = \rho C_D A_0 v^2$$

$$\frac{2F}{\rho C_D A_0} = v_T^2$$

$$v_T = \sqrt{\frac{2F}{\rho C_D A_0}}$$

h

```

1  from math import sqrt
2  U_T= sqrt((2*F)/(p*Cd*A0))
3  print(U_T)
4  33.85
5  33.85
6  33.849234466965406

```

Den numeriske verdien for terminalhastigheten $v_T \approx 33.85 \text{ m/s}$. Denne verdien er ikke realistisk.

Det er kjent at Bolts tid på 9.58 sekunder ble oppnådd ved å nå en terminalhastighet på 12.2 meter per sekund. Vi kan også beregne kort for $t = 9.58 \text{ sec}$, $x = 100 \text{ m}$: $u = 100 \text{ m} / 9.58 \text{ sec} \approx 10.44 \text{ m/s}$. Hvis vi bruker større x , kan vi se at hastigheten er små: for eksempel $u = 150 \text{ m} / 9.58 \text{ sec} \approx 15.65 \text{ m/s}$ som er mye mindre enn terminalhastigheten vi beregnet.

i

Vi har: $F_D = F - F_V$:

$$\sum F_D = ma \Rightarrow F - F_V = ma$$

$$400 - 25.8u = 0$$

$$u \approx 15.5 [\text{m/s}]$$

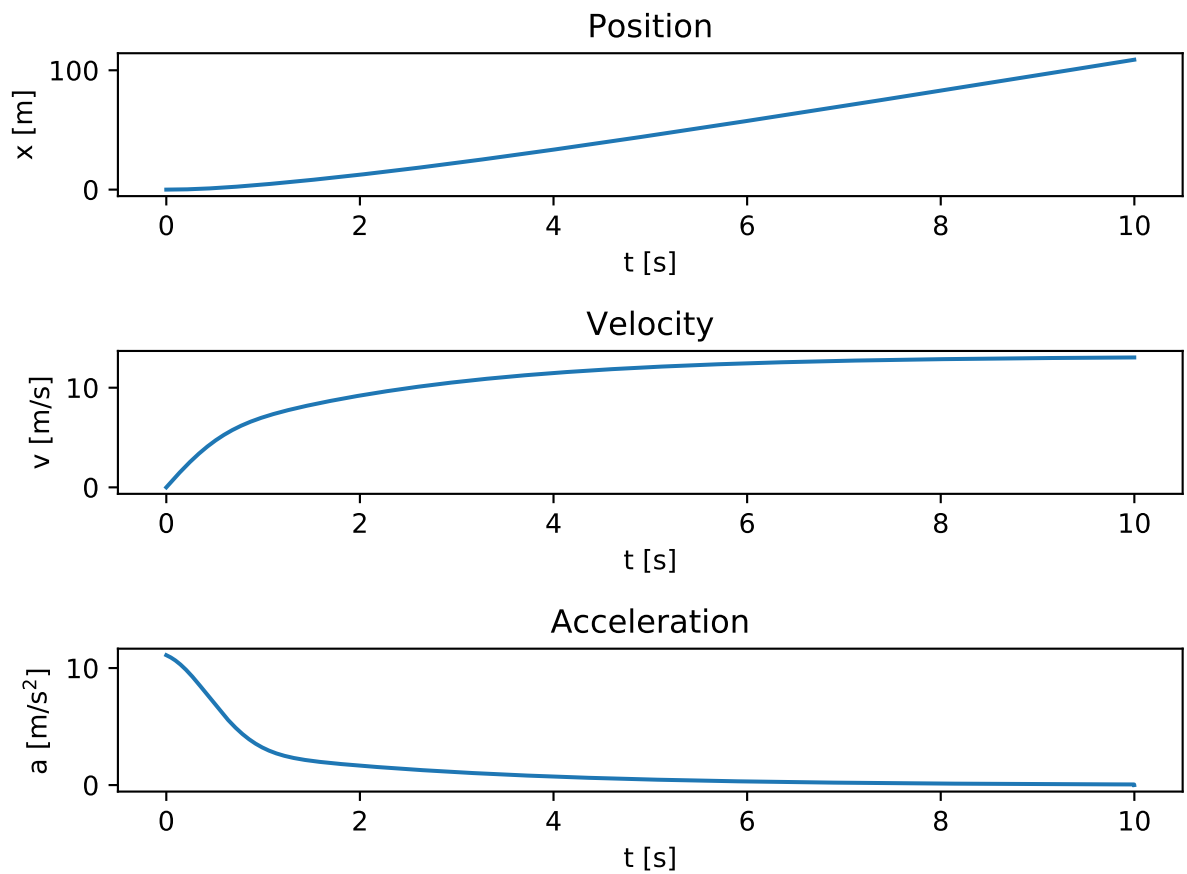
j

I figuren 3 kan vi se nye plott av posisjon, hastighet og akselerasjon av sprinteren som en funksjon av tiden. Disse simuleringene er mer realistiske.

```

1  time = 10 # s
2  dt = 1./1000
3  n = int(time/dt)
4
5  t = np.zeros(n, float); x = np.zeros(n, float);
6  v = np.zeros(n, float); a = np.zeros(n, float)
7
8  x[0] = 0.0 # m
9  t[0] = 0.0 # s
10 v[0] = 0.0 # m/s
11
12 #constants
13 F = 400.0 # N

```



Figur 3: Mer realistisk - Posisjon, hastighet og akselerasjon av sprinteren som en funksjon av tiden.

```

14     m = 80.0    # kg
15     p = 1.293  # kg/m^3
16     Cd = 1.2
17     A0 = 0.45  # m^2
18     w = 0      # m/s
19     fc = 488   # N
20     tc = 0.67  # s
21     fv = 25.8  # Ns/m
22
23     time_track = 0
24     # Euler-Cromer method
25     for i in range(n-1):
26
27         Fc = fc*np.exp(-(t[i]/tc)**2)
28         Fv = -fv*v[i]
29         D = 0.5*p*Cd*A0*(1 - 0.25*np.exp(-(t[i]/tc)**2))*(v[i]-w)**2
30
31         a[i] = (F + Fc + Fv - D)/m
32         v[i+1] = v[i] + a[i]*dt
33         x[i+1] = x[i] + v[i+1]*dt
34         t[i+1] = t[i] + dt
35
36         if x[i+1] >=100 and time_track == 0:

```

```

37         time_track = t[i+1]
38         print (f"Running time of the sprinter: {time_track} sec.")
39
40     plt.subplot(3,1,1)
41     plt.plot(t, x)
42     plt.xlabel('t [s]')
43     plt.ylabel('x [m]')
44     plt.title("Position")
45
46     plt.subplot(3,1,2)
47     plt.plot(t, v)
48     plt.xlabel('t [s]')
49     plt.ylabel('v [m/s]')
50     plt.title("Velocity")
51
52     plt.subplot(3,1,3)
53     plt.plot(t, a)
54     plt.xlabel('t [s]')
55     plt.ylabel('a [m/s^2]')
56     plt.title("Acceleration")
57
58     plt.tight_layout()
59     plt.savefig("taskJ.pdf")
60     plt.show()
61
62     """
63     Running time of the sprinter: 9.320000000000274 sec.
64     """

```

Sprinteren løper 100 meter på 9.32 sec. Denne verdien er mer realistisk med tanke på verdensrekorden som er 9.58 sec.