FYS-MEK1110 - Oblig 5

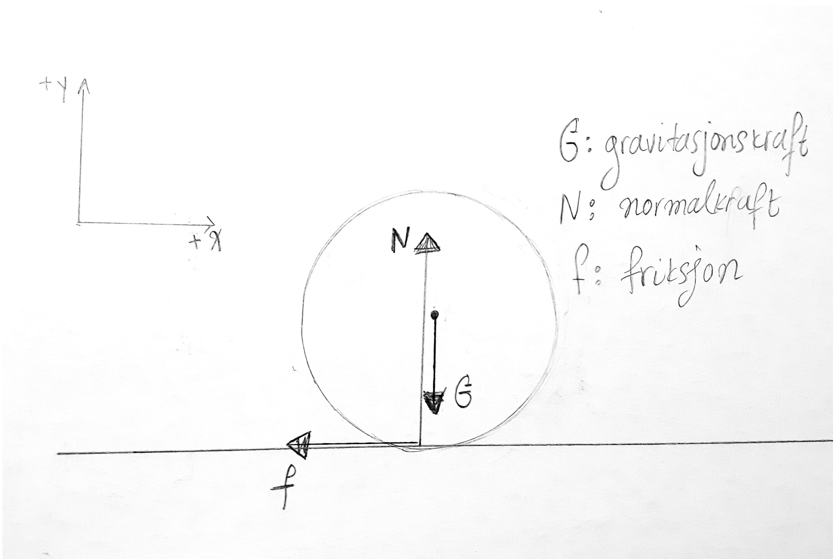
Ioanna Maria Lazarou

16. april 2021

En ball som spretter

Jeg vil ha tilbakemeldinger og kommentarer!

a



Figur 1: Frilegemediagram for ballen mens den er i kontakt med gulvet med kraftene som virker.

I figuren 1 kan vi se en tegning av et frilegemediagram til ballen mens den er i kontakt med gulvet med kraftene som virker.

b

Vi finner den vertikale komponenten av hastigheten, $v_y(t)$, og den vertikale posisjonen, $y(t)$, for ballen idet den er i kontakt med gulvet.

Nettokraften i vertikal retning er:

$$F_{net} = (N_0 - mg)\hat{j}$$

$$ma_y = (N_0 - mg)\hat{j}$$
$$a_y = \frac{(N_0 - mg)}{m}\hat{j}$$
$$a_y = (\frac{N_0}{m} - g)\hat{j}$$

Vi har at $v_y(t_0) = v_{0y}\hat{j}$. For å finne den vertikale komponenten av hastigheten setter det inn i formel (integralen av akselerasjonen):

$$v_y(t) = v_{0y} + \int_0^t a_y \, dt$$
$$v_y(t) = v_{0y}t + (\frac{N_0}{m} - g)t$$

For å finne den vertikale posisjonen, $y(t)$ bruker vi formen(integralen av hastigheten):

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(t) \, dt$$
$$y(t) = y_0 t + v_{0y}t + \frac{1}{2}(\frac{N_0}{m} - g)t^2$$

c

Ved punktet $t = 0$ da begynne første kontakt med gulvet. Ved tidspunktet t_1 det er hvor ballen snur og vi hat at hastigheten $v_y(t_1) = 0$.

Vi finner hvor mye tid det tar fra ballen å komme i kontakt med gulvet til den snurterningen:

$$v_y(t_1) = v_{0y}t + (\frac{N_0}{m} - g)t_1 = 0$$
$$t_1 = -\frac{v_{0y}m}{N_0 - g}$$

Vi har to konservative krefter i vertikal retning(N_0 og G) og derfor er energi bevart. Ballen vil sprette til samme høyde som før og den bevegelse(og snurretningen) vil gå oppover på samme måte som ballen bevege seg nedover. Det tar like mye tid fra det tidspunktet hvor ballens retningen snur til det tidspunktet hvor ballen mistet kontakten med gulvet som den tiden t_1 fra første kontakt til den snur. Det tar like mye tid opp som ned. Derfor er det:

$$t_c = 2t_1 = -\frac{2v_{0y}m}{N_0 - g}$$

d

Den eneste kraften som virker mot venstre er friksjonen: $f = -\mu N_0$. For å finne den horisontale komponenten til ballens hastighet som funksjon av tid, $v_x(t)$, mens ballen er i kontakt med gulvet:

$$\Sigma F_x = f = ma_x$$

$$-\mu N_0 = ma_x$$
$$a_x = -\frac{\mu N_0}{m}$$

$$v_x(t) = v_{0x} + \int_0^t a_x \, dt$$
$$v_x(t) = v_{0x} - \frac{\mu N_0}{m} t$$

For å finne den horisontale hastighetskomponenten, v_{1x}, ved tidspunket hvor ballen mister kontakt med gulvet(t_c) rett etter kollisjonen:

$$\begin{aligned} v_{1x} = v_x(t_c) &= v_{0x} - \frac{\mu N_0}{m} t_c \\ &= v_{0x} - \frac{\mu N_0}{m} * (-\frac{2v_{0y}m}{N_0 - mg}) \\ &= v_{0x} + \frac{2\mu N_0 v_{0y}}{N_0 - mg} \end{aligned}$$

Vi vet at v_{0y} er negativ so er den ledden $\frac{2\mu N_0 v_{0y}}{N_0 - mg}$ negativ. Så har vi at $v_{1x} < u_{0x}$.

e

Vi finner vinkelhastigheten som en funksjon av tid, $\omega(t)$, bruker vi Newton's andre lov for rotasjon:

$$\tau_z = I_z a_z$$
$$a_z = \tau_z / I_z$$

Vi hat at:

$$\vec{\tau_z} = r \times f = -R\hat{j} \times (-f)\hat{i} = -Rf\hat{k}$$

og vi vet at: $I - z = \frac{2}{3}mR^2$, derfor er det:

$$a_z = -\frac{Rf}{I_z} = -\frac{3R\mu N_0}{2mR^2} = -\frac{3\mu N_0}{2mR}$$

Vi vet at $\omega_0 = 0$. Vi bruker formen:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t a_z \, dt$$
$$\omega(t) = -\frac{3\mu N_0}{2mR} t$$

Ved tid t_1:

$$\omega_1 = \omega(t_c) = -\frac{3\mu N_0}{2mR} t_c$$
$$\omega_1 = -\frac{3\mu N_0}{2mR} (-\frac{2v_{0y}m}{N_0 - mg})$$
$$\omega_1 = \frac{3\mu N_0 v_{0y}}{R(N_0 - mg)}$$

Siden v_{0y} er negativ så er $\omega_1 < 0$.

f

Ballen er ikke påvirket av ingen eksterne krefter(vi neglisjere luftmotstand). Siden både gulvet og ballen er del av et system er friksjon også en del av systemet(intern kraft).

Energi er bevart så lenge det bare er konservative krefter som gjør arbeid. Friksjonen er ikke konservativ og så lenge det er glidefriksjon vil det gi en reduksjon av mekanisk energi. Så det må være energi tapt siden den ballen sklir lengs gulvet og den blir fra energi ut fra mekaniskenergien. Vi har bare konservtive krefter i vertical retning. Hvis vi se på hastigheten i y-retning i tidspunkt t_c:

$$v_y(t_c) = v_{0y} + (\frac{N_0 - mg}{m})(-\frac{2v_{0y}m}{N_0 - mg}) = -v_{0y}$$

Det betyr at i det øyeblikket hvor ballen mister kontakt med gulvet har den samme vertikal hastighet men med motsatt fortegn som i det øyeblikket som kommer i kontakt med gulvet. Det følger at kreftene er konservative. Derfor må ballen sprette opp så høyt som høyden hadde startet fra.

Ballen ville fortsette å sprette opp i samme høyde i det uendelige hvis det ikke var for friksjonen. Energi i vertikal retning er bevart men energi i horisontal retning er ikke bevart. Vi forvente at noe av den horisontal bevegelses energi blir tapt om til varme via friksjonen og noe av denne energien gå over til rorasjonsenergi. Den bevegelsen i horisontal retning bremser ganske fort.

g

Vi antar at kraften fra gulvet på ballen kan beskrives som $N = k(R-y)^{2/3}$ når ballen er i kontakt med gulvet, altså når $y < R$, hvor y er posisjonen til massesenteret til ballen. Når $y > R$, vi har at $N = 0$ fordi ballen er ikke i kontakt med gulvet og det er bare gravitasjon som virker.

Vi antar at deformasjonen er så liten at vi fortsatt kan tilnærme ballen som et stivt legeme. Vi bruke samme metode som i oppgave b) og d) for å finner uttrykker for akselerasjonene a_x og a_y til ballen når den er i kontakt med gulvet:

For $y < R$ nettokraften i vertikal retning er:

$$\Sigma F_y = (N - mg)$$

$$ma_y = k(R - y)^{2/3} - mg$$

$$a_y = \frac{k(R - y)^{2/3}}{m} - g$$

For $y < R$ nettokraften i horisontal retning er:

$$\Sigma F_x = -f = ma_x$$

$$-\mu N = ma_x$$

$$a_x = -\frac{\mu k(R - y)^{2/3}}{m}$$

h

Vi ser på kraftmomentene om massesenteret. Gravitasjonskraften angriper i massesenteret og gir ingen kraftmoment. Normalkraften er parallell med kraftarmen og gir ingen kraftmoment heller. Den eneste kraften som gir et kraftmoment er friksjonskraften:

Vi bruker Newton's andre lov for rotasjon:

$$\tau_z = I_z a_z$$

$$a_z = \tau_z / I_z$$

Vi har at:

$$\vec{\tau_z} = r \times f = -R\hat{j} \times (-f)\hat{i} = -Rf\hat{k}$$

og vi vet at: $f = \mu k(R-y)^{2/3}$ og $I_z = \frac{2}{3}mR^2$, derfor er det:

$$a_z = -\frac{Rf}{I_z} = -\frac{3R\mu N}{2mR^2} = -\frac{3\mu N}{2mR}$$

$$a_z = -\frac{3\mu k(R-y)^{2/3}}{2mR}$$

i

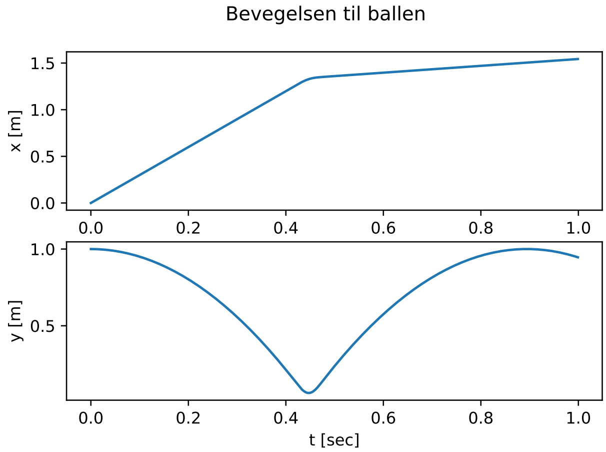
Vi skriver et program som regner ut bevegelsen til ballens massesenter som en funksjon av tid. Vi bruker programmet til å plotte bevegelsen og hastigheten til ballen som en funksjon av tid fra $t_0 = 0$ s til $t = 1$ s.:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Konstanter
g = 9.81     # tyngdeakselerasjon i m/s^2
m = 1.       # masse til ballen i kg
v0x = 3.     # initialhastighet i m/s
h = 1.
R = 0.15     # radius til ballen i m
k = 10000    # fjærkonstanten i N/m
mu = 0.3     # friksjonskoeffisienten

I = 2/3*m*R**2 # treghetsmomentet
T = 1.    # tid vi ser på i sekunder
dt = 0.001
n = int(T/dt)

t = np.zeros((n,1),float)
r = np.zeros((n,2),float)
v = np.zeros((n,2),float)
omega = np.zeros((n,1),float)

ux= np.array([1,0])       # enhetvektor i x-retning
uy= np.array([0,1])       # enhetvektor i y-retning

# Initialbetingelsene
r[0, 1] = h   # startposisjonen y-retning
v[0, 0] = v0x # initialhastighet

# Bevegelsen
for i in range (n-1):
```

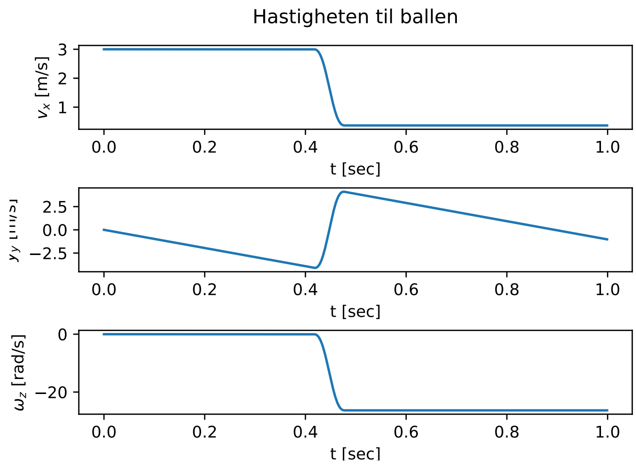
```
    if r[i, 1] < R:
        F_N = k*(R-r[i,1])**(1.5) # normalkraften
    else:
        F_N = 0
    f = -mu*F_N*np.sign(v[i,0])   #friksjon
    a = f/m*ux + (F_N/m-g)*uy
    az= R*f/I                       #vinkelakselerasjon
    # Euler-Cromer-metoden
    v[i+1, :] = v[i, :] + a*dt          #hastigheten
    r[i+1, :] = r[i, :] + v[i+1, :]*dt  #posisjonen
    omega[i+1] = omega[i] +az*dt        #vinkelhastigheten
    t[i+1] = t[i] + dt                  #tiden

#plots
f1 = plt.figure(1)
f1.suptitle('Bevegelsen til ballen')
plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(t, r[:,0])
plt.xlabel('t [sec]')
plt.ylabel('x [m]')
plt.subplot(2,1,2)
plt.plot(t, r[:,1])
plt.xlabel('t [sec]')
plt.ylabel('y [m]')
# plt.savefig('y.pdf')


f2 = plt.figure(2)
f2.suptitle('Hastigheten til ballen')
plt.subplot(3,1,1)
plt.plot(t, v[:,0])
plt.xlabel('t [sec]')
plt.ylabel('$v_x$ [m/s]')
plt.subplot(3,1,2)
plt.plot(t, v[:,1])
plt.xlabel('t [sec]')
plt.ylabel('$y_y$ [m/s]')
plt.subplot(3,1,3)
plt.plot(t, omega)
plt.xlabel('t [sec]')
plt.ylabel('$\omega_z$ [rad/s]')
# plt.savefig('v.pdf')
plt.show()


"""
(plots)

"""
```

Vi kan se i 2 at bevegelsen er linear i x-retning mens ballen faller ned og ballen følger en parabel-bane i y-retnimg mens den faller ned med konstant hastighet. Etter at ballen er i kontakt med gulvet den bevege seg med mindre hastighet i x-retning. Den spretter opp til samme høyden og hastighet fordi i den y-retningdet er bare posisjonsavhengig konservative krefter.

Ballen begynner med 3 m/s hastighet i x-retning og i figuren 3 ser vi at hastigheten går nesten til null etter 1 sekund fordi vi har friksjon og derfor tapper vi energi. Den energien kan ikke komme fra den vertikal retning fordi der vi har bare konservative krefter. I y-retning starter hastigheten negativ og når starter å snu den blir positiv og i løpet av et kortstid periode den går ned igjen. I tilegg får vi rotasjonsbevegelse i z-banen. Ballen begynne med null vinkelhastighet og får vi en negativ vinkelhastighet(roterer med klokka) etter mens ballen er i kontakt med gulvet. Når ballen er ikke lenge i kontakt så det er ikke friksjon. Ballen vil fortsette å rotere med samme vinkelhastighet.



Figur 2: Bevegelsen til ballens massesenter som en funksjon av tid.



Figur 3: Hastigheten til ballens massesenter som en funksjon av tid.

j

Den numeriske beregningen er ikke så realistisk fordi ballen spretter opp til samme høyden etter den kommer i kontakt med gulvet. Grunen til det er at vi har et normalkraften som er konservativ(posisjons avhengig) og vi får en elastisk kollisjon. Vi kan i stedet velge en normalkraft som ikke er konservativ, men være hastighetsavhengig for å få en uelastisk kollisjon. For en mer realistisk modell kan vi også inkludere luftmotstand. Å modifisering av friksjons koeffisienten kan kanskje ha en liten hastighetsendring.