FYS-MEK1110 - Oblig 6

Ioanna Maria Lazarou

30. april 2021

Kollisjon mellom atomer

Jeg vil ha tilbakemeldinger og kommentarer!

a

Massesenteret er definert som: $\vec{R} = \frac{\Sigma m_i \vec{r}_i}{\Sigma m_i}$ og hastigheten til massesenteret er definert: $\vec{V} = \frac{\Sigma m_i \vec{v}_i}{\Sigma m_i}$.
Før kollisjonen: $\vec{V} = \frac{\Sigma m_i \vec{v}_i}{\Sigma m_i} = \frac{m\vec{v}_0 + \vec{0}}{2m} = \frac{\vec{v}_0}{2}$
Det er ingen ytre krefter så bevegelsesmengde er bevart. M er total masse til hele systemet og V er hastigheten til massesenteret. Bevegelse i hele systemet:

$$\vec{P} = M\vec{V}$$

$$\vec{P}_{før} = \vec{P}_{etter} = M\vec{V}_{før} = M\vec{V}_{etter}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{før} = \vec{V}_{etter} = \frac{1}{2}\vec{v}_0$$

Siden bevegelsesmengden er bevart, må hastigheten til massesenteret før og etter kollisjonen være den samme.

b

Vi har ingen ytre krefter derfor trenger vi ikke å ta hensyn til potential energi i systemet. Vi sammelignee kinetisk energi. Vi vet at begge atomene er identiske og har samme masse m. Atomet A beveger seg me hastighet v_0 før kollisjonen og atomet B befinner seg i ro før kollisjonen som betyr at den har null kinetisk energi. Etter kollisjonen former de to atomene et molekyl som beveger seg me masse $2m$ og hastighet $\frac{1}{2}v_0$.
Kinetisk energi før kollisjon (K_0) og etter (K_1):

$$K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$K_1 = \frac{1}{2}(m+m)(\frac{1}{2}v_0)^2 = \frac{1}{4}mv_0^2$$

Kollisjonen er fullstendig med samme hastighet til massesenteret før og etter. Vi har kinetisk energi med hensyn til massesenteret før ($K_{\Delta cm_{før}}$) men ikke etter kollisjonnen ($K_{\Delta cm_{etter}}$) fordi den forsvinner når atomene kombineres.

$$K_{\Delta cm_{før}} = \frac{1}{4} m v_0^2$$
$$K_{\Delta cm_{etter}} = 0$$

c

Nå modellerer vi kraften mellom atomene som en fjærkraft som følger Hookes lov. Hastigheten til massesenteret før og rett etter atomene kobles sammen med fjæren er den samme fordi siden det er ingen ytre krefter er da bevegelsesmengden bevart. Så hastigheten til massesenteret er den samme som den vi hadde før uten fjæren.

Relativ til massesenteret:

$$K_{\Delta cm_{før}} = \frac{1}{4} m v_0^2 = K_{\Delta cm_{etter}}$$

Kinetisk energi er den samme før og etter atomene A og B som kobles fortsett å bevege seg relativ til massesenteret og derfor kinetisk energien ikke er tapt. Når komprimerer fjæren da går kinetisk energien over potential energien til fjæren. Den fjærkraften er konservativ og derfor er det ingen energi som er tapt.

d

Det er en fjærkraft som folger Hookes lov:

$$F = \pm k \Delta x$$

Vi har to atomene A i posisjonen x_a, B i posisjonen x_b og avstanden mellon dem er b. Δx defineres som forskjellen i posisjonene $x_b - x_a$ minus likevektslengden b:

$$\Delta x = x_b - x_a - b$$

Hvis $x_b - x_a = b$ så er Δx null og fjærkraften også null.

Hvis fjæren er kompriment ($x_b - x_a < 0$) og atomene dytter fra hverendre $\vec{F}_{AB}$ er på positiv retning og $\vec{F}_{BA}$ er på negativ. Derfor:

$$\vec{F}_{BA} = k(x_b - x_a - b)\hat{\imath}$$

Fra Newtons 3 Lov vi har at:

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

Fra Newtons 2 Lov:

$$\vec{F}_{BA} = m_A \vec{a}_A$$
$$\vec{F}_{AB} = m_B \vec{a}_B$$

Nå kan vi skrive differensialligningene som beskriver bevegelsen til atomene A og B:

$$a_A = \frac{\vec{F}_{BA}}{m_A} = \frac{d^2x_A}{dt^2} = \frac{k}{m_A}(x_B - x_A - b)$$

$$a_B = \frac{\vec{F}_{AB}}{m_B} = \frac{d^2x_B}{dt^2} = -\frac{k}{m_B}(x_B - x_A - b)$$

med initialbetingelsene ved tid $t = 0$:

Atomet A: $x_{0A} = -b$, $v_{0A} = u_0$
Atomet B: $x_{0B} = 0$, $v_{0B} = 0$

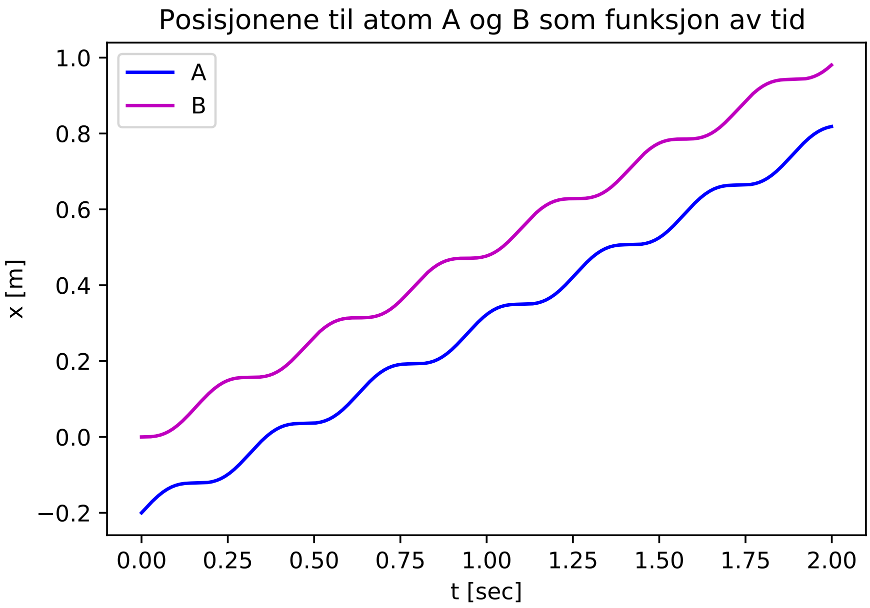
e

Vi skriver et program som plotter posisjonene til atomene som en funksjon av tid for de første 2 sekundene etter de blir sammenkoblet.

Koden:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

### e)

# konstanter
m = 0.1
k = 20.
b = 0.2
v0 = 1.

T = 2.
dt = 0.001
n = int(T/dt)

t = np.zeros((n,1),float)
xA = np.zeros((n,1),float)
xB = np.zeros((n,1),float)
vA = np.zeros((n,1),float)
vB = np.zeros((n,1),float)

# Initialbetingelsene
xA[0] = -b
xB[0] = 0
vA[0] = v0
vB[0] = 0

for i in range (n-1):
    F_BA = k*(xB[i] - xA[i] - b)
    aA = F_BA/m
    vA[i+1] = vA[i] +aA*dt
    xA[i+1] = xA[i] +vA[i+1]*dt

    F_AB = - k*(xB[i] - xA[i] - b)
    aB = F_AB/m
    vB[i+1] = vB[i] +aB*dt
    xB[i+1] = xB[i] +vB[i+1]*dt

    t[i+1] = t[i] +dt

plt.plot(t, xA, 'b', t, xB, 'm')
plt.title('Posisjonene til atom A og B som funksjon av tid ')
plt.legend(["A", "B"])
plt.xlabel('t [sec]')
```

```
plt.ylabel('x [m]')
# plt.savefig('e.pdf')
plt.show()

"""
(plot)
"""
```



Figur 1: Plott av posisjonene til atom A og B som funksjon av tid.

I figuren 1 kan vi se posisjonene til atom A og B som funksjon av tid. Atomene svinger mot hverendre.

f

Vi beregner den maksimale og minimale avstanden mellom atomene analytisk. Ved øyeblikket t_0 er atom A festes på fjæren og ved tid t_1 har atoemene minimal avstand. Det ikke virker noen ytre krefter så er den totale energien for systemet bevart.

Energien består av:
Kinetisk energi til massesenteret: K_{cm}
Kinetisk energi for bevegelsen i forhold til massesenteret: $K_{\Delta cm}$
Potensiel energi i fjæren: $U_{\Delta cm}$

Energibevaring gir at $E = K_{cm} + K_{\Delta cm} + U_{\Delta cm}$ er konstant.

Ved tid t_0:

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

Siden hastigheten til massesenteret er $V = \frac{1}{2}v_0$ er den kinetiske og potentiel energien til massesenterbevegelsen:

$$K_{0,cm} = \frac{1}{2}(2m)(\frac{1}{2}v_0)^2 = \frac{1}{4}mv_0^2$$
$$U_{0,\Delta cm} = 0$$

$$K_{0,\Delta cm} = E_0 - K_{0,cm} - U_{0,\Delta cm} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{4}mv_0^2 - 0 = \frac{1}{4}mv_0^2$$

Ved tid t_1:

$$K_{1,cm} = K_{0,cm}$$
$$K_{1,\Delta cm} = 0$$

Når atomene er i sin maksimale avstand har de ingen bevegelse relativt til massesenteret, og kun potensiell energi:

$$U_{1,\Delta cm} = \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

Energibevaring:

$$E_1 = E_0$$
$$K_{1,cm} + K_{1,\Delta cm} + U_{1,\Delta cm} = K_{0,cm} + K_{0,\Delta cm} + U_{0,\Delta cm}$$
$$U_{1,\Delta cm} = K_{0,\Delta cm}$$
$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{4}mv_0^2$$
$$\Delta x = \sqrt{\frac{mv_0^2}{2k}}$$

Vi setter in $m = 0.1$, $k = 20$, $b = 0.2$ og $v_0 = 1.0$:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{0.1 \cdot 1^2}{2 \cdot 20}} = \pm 0.05$$

Avstanden mellom atomene er:

$$x_B - x_A = b \pm \Delta x$$

Den maksimale avstanden:

$$x_B - x_A = 0.2 + 0.05 = 0.25$$

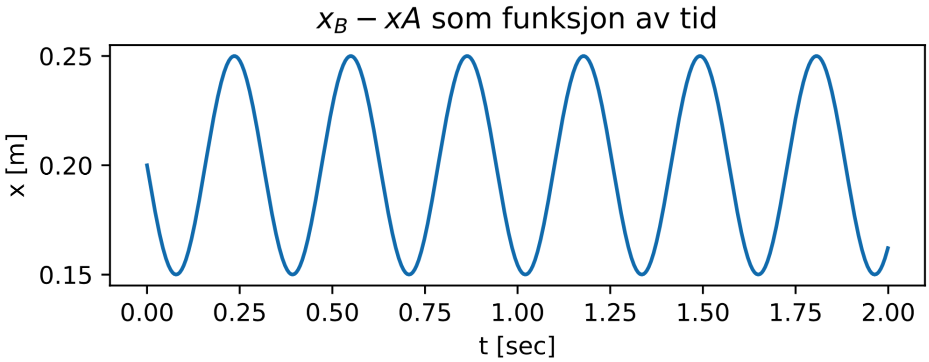
og den minimale:

$$x_B - x_A = 0.2 - 0.05 = 0.15$$

Vi sjekker at resultatet er konsistent med den numeriske beregningen med en ekstra plot:

Koden:

```
plt.subplot(2,1,1)
plt.plot(t, xB-xA)
plt.title('$x_B - xA$ som funksjon av tid')
plt.xlabel('t [sec]')
plt.ylabel('x [m]')
# plt.savefig('e_.pdf')
plt.show()

"""
(plot)
"""
```



Figur 2: Plott av avstanden mellon de to atomene som funksjon av tid.

I figuren 2 kan vi se avstanden $(x_B - x_A)$ mellon de to atomene A og B som funksjon av tid. Vi ser at den maksimale avstanden er 0.25 og den minimale er 0.15.

g

Hastigheten til massesenteret forblir derfor konstant gjennom kollisjonen fordi det virker ingen ytre krefter på systemet. Kraftmomentet av de ytre kreftene om massesenteret er dermed null. Fra Newtons andre lov for rotasjonsbevegelse følger det at spinnet om massesenteret er bevart.

y-posisjonen til massesenteret: $Y = \frac{b}{2}$
hastigheten relativt til massesenteret til atomet A: $v_{A,cm} = \frac{1}{2}v_0$
hastigheten relativt til massesenteret til atomet B $v_{B,cm} = -v_{A,cm}$

Massesentersystem: $L_0 = (\frac{1}{2}b\hat{j} \times \frac{1}{2}mv_0\hat{i}) + (-\frac{1}{2}b\hat{j}) \times (-\frac{1}{2}mv_0\hat{i})) = -\frac{1}{2}bmv_0\hat{k}$

Treghetsmoment: $I_{cm} = m(\frac{1}{2}b)^2 + m(\frac{1}{2}b)^2 = 2m(\frac{1}{2}b)^2 = \frac{1}{2}mb^2$

Etter kollisjonen roterer systemet som et stivt legeme om massesenteret. Spinnet er: $L_1 = I_{cm}\omega$. Vi bruker bevaring av bevegelsesspinn.

Vi finner vinkelhastigheten:

$$\omega = \frac{L_0}{I_{cm}} = \frac{-\frac{1}{2}bmv_0}{\frac{1}{2}mb^2} = -\frac{v_0}{b}$$

h

Vi har at: $\Delta r = |\Delta\vec{r}| = |\vec{r_B} - \vec{r_A}|$ og $\vec{F}_{BA} = k(\Delta r - b)\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta r}$

Atomet B er i ro i origoog siden $\vec{r_B} = \vec{0}$ er: $\Delta\vec{r} = -\vec{r_A}$ derfor $\Delta r = r_A$

Fjæren er bort fra origo(komprimert). Vi får at fjærkraften er:

$$\vec{F}_{BA} = k(r_A - b)\frac{(-\vec{r_A})}{r_A} = k(b - r_A)\frac{\vec{r_A}}{r_A}$$

Fjæren er komprimert så er $b > r_A$ derfor $b - r_A > 0$ og fortegnet til kraften er positiv(kraften pekker i retning til posisjonsvektoren r_A bort fra origo).

Fra Newtons 3 lov har vi at: $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$.

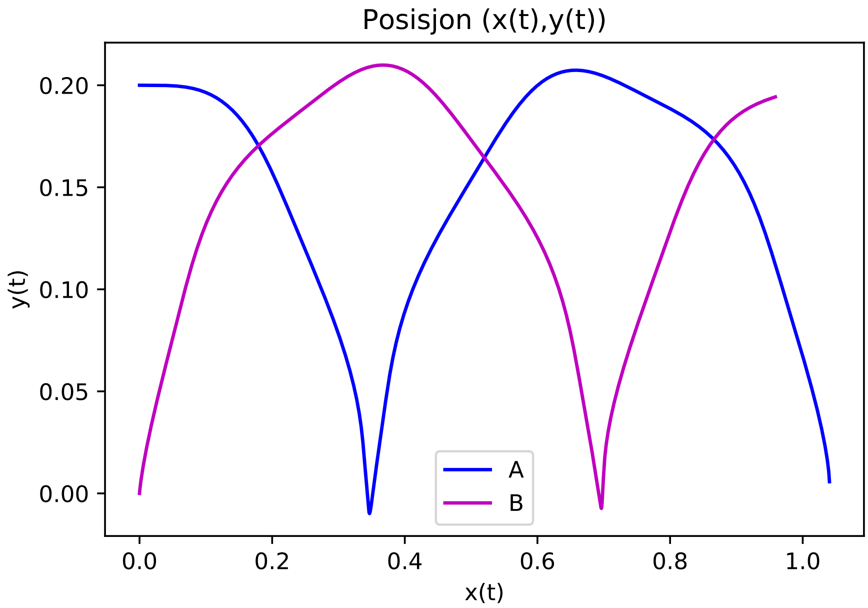
i

Vi skriver et programm for å beregne bevegelsen til de to atomene etter sammenkoblingen i den ikke-sentrale kollisjonen.

Koden:

```python
### i)

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

m = 0.1
k = 20.
b = 0.2
v0 = 1.

T = 2.
dt = 0.001
n = int(T/dt)

t = np.zeros((n,1),float)
rA = np.zeros((n,2),float)
rB = np.zeros((n,2),float)
vA = np.zeros((n,2),float)
vB = np.zeros((n,2),float)

rA[0,:] = [0,b]
rB[0,:] = [0,0]
vA[0,:] = [v0,0]
vB[0,:] = [0,0]

for i in range(n-1):
    Dr = rB[i,:] - rA[i,:]
    rn = np.sqrt(np.sum(Dr*Dr))
    F_BA = k*(rn -b)*Dr/rn
    aA = F_BA/m
    vA[i+1,:] = vA[i,:] + aA*dt
    rA[i+1,:] = rA[i,:] + vA[i+1,:]*dt

    F_AB = -F_BA
    aB = F_AB/m
    vB[i+1,:] = vB[i,:] + aB*dt
    rB[i+1,:] = rB[i,:] + vB[i+1,:]*dt
    t[i+1] = t[i] + dt

plt.plot(rA[:,0], rA[:,1], 'b', rB[:,0], rB[:,1], 'm')
plt.legend(["A", "B"])
plt.title('Posisjon (x(t),y(t))')
plt.xlabel('x(t)')
plt.ylabel('y(t)')
# plt.savefig('i.pdf')
plt.show()

"""
(plot)
"""
```

I figuren 3 kan vi se plottet av posisjonen (x(t), y(t)) for begge atomene A og B i en kort periode. Atomene roterer om hverandre og går opp og ned mange ganger men vi kan se at massesenteret beveger seg lineær(med konstant hastighet).



Figur 3: Posisjon (x(t), y(t)) for begge atomene. Atomet A vises med blå farge og atomet B med lilla.