MEK1100, vår 2021

Ioanna Maria Lazarou

Obligatorisk oppgave 1 av 2

March 11, 2021

Oppgave 1. Skalering

Ballen vil følge en bane gitt ved:

$x(t) = v_0 t cos(\theta)$ $\qquad$ $y(t) = v_0 t sin(\theta) - \frac{1}{2}gt^2$

(a) For å tiden t_m når ballen faller ned på bakken vi vet at $y(t) = 0$.

$$y(t) = 0 = v_0 t sin(\theta) - \frac{1}{2}gt^2$$
$$\frac{1}{2}gt^2 = v_0 t sin(\theta)$$
$$t^2 = \frac{2v_0 t sin(\theta)}{g}$$
$$t_m = \frac{2v_0 sin(\theta)}{g}$$

Setter vi uttrykket for t_m inn i $x(t)$ for å finne posisjonen $x(t_m) = x_m$:

$$x(t_m) = v_0\Big(\frac{2v_0 sin(\theta)}{g}\Big)cos(\theta)$$

$$= \frac{2v_0^2 sin(\theta)cos(\theta)}{g}$$

$$= \frac{v_0^2 sin(2\theta)}{g}$$

(b) Vi skal innføre dimensjonsløse variabler (x^*, y^*, t^*):

- $$x^* = \frac{x}{x_m} = \frac{g * v_0 t cos(\theta)}{2v_0^2 sin(\theta)cos(\theta)} = \frac{gt}{2v_0 sin(\theta)}$$

- $$y^* = \frac{y}{x_m} = \frac{g * (v_0 t sin(\theta) - \frac{1}{2}gt^2)}{v_0^2 2sin(\theta)cos(\theta)}$$

$$= \frac{gtv_0 sin(\theta)}{v_0^2 2sin(\theta)cos(\theta)} - \frac{\frac{1}{2}g^2t^2}{v_0^2 2sin(\theta)cos(\theta)}$$

$$= \frac{gt}{2v_0cos(\theta)} - \frac{g^2t^2}{4v_0^2sin(\theta)cos(\theta)}$$

$$= \frac{gt}{2v_0cos(\theta)} * \Big(1 - \frac{gt}{2v_0sin(\theta)}\Big)$$

men vi har at:

$$\frac{gt}{2v_0sin(\theta)} = x^*$$

derfor:

$$y^* = \frac{gt}{2v_0cos(\theta)} * (1 - x^*)$$

$$= \frac{sin(\theta)}{sin(\theta)} * \frac{gt}{2v_0cos(\theta)}(1 - x^*)$$

$$= \frac{gt}{2v_0sin(\theta)} * \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)}(1 - x^*)$$

$$= x^*tan(\theta)(1 - x^*)$$

og:

$$t^* = \frac{t}{t_m} = \frac{gt}{2v_0sin(\theta)} = x^*$$

Det ikke er behov for å skalere vinkelen θ fordi det er et forholdstall og alt er skalert for alle størrelser.

(c) Vi bruker Python for å tegne baner (x, y) for tre utkastvinkler θn, for n = 1, 2, 3. I figure 1 ser vi plottet av de tre banene i det samme koordinatsystemet ved forskjellige verdier av utfallsvinkelen θ. Verdiene kan brukes for alle verdier av g og v_0 fordi θ er den eneste variablen vi bruker for å beskrive grafen($x*$, $y*$, $t*$ er dimensjonsløse). Koden brukt er:

```
# oppgave 1.c)

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

n = 0
N = 1000

t = np.linspace(0, 1, N); x = np.zeros(N); y = np.zeros(N)

v0 = 1.0
theta = [np.pi/6, np.pi/4, np.pi/3]

for n in range(3):
    for i in range(N):
        x[i] = t[i]
        y[i] = x[i]*np.tan(theta[n])*(1-x[i])

    plt.plot(x, y)
```

```
plt.xlabel('x'); plt.ylabel('y')
plt.legend(['pi/6', 'pi/4', 'pi/3'])
plt.show()
```

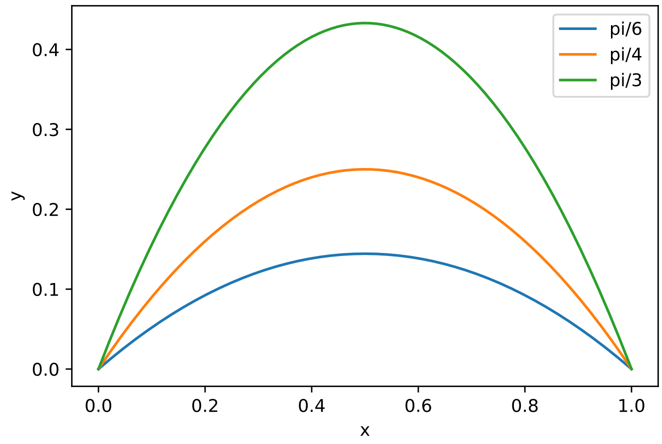

Figure 1: x* og y* for forskjellige verdier av θ

Oppgave 2. Strømlinjer til et todimensjonal hastighetsfelt

$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} = xy\vec{i} + y\vec{j}$

(a) $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{i}$
Ser vi påkryssproduktet $\vec{v} \times d\vec{r} = 0$, ettersom $\vec{v}$ og $d\vec{r}$ er parallelle.

$$\vec{v} \times d\vec{r} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ d_x & d_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} v_y & 0 \\ d_y & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} v_x & 0 \\ v_x & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} v_x & v_y \\ d_x & d_y \end{vmatrix} \vec{k} = (v_x d_y - v_y d_x)\vec{k} = 0$$

$$v_x d_y - v_y d_x = 0$$

$$v_x d_y = v_y d_x$$

Vi vet at $v_x = xy$ og $v_y = y$ (hastighetsfeltet):

$$xy\ d_y = y\ d_x$$

Vi deler med xy på begge sider:

$$\int dy = \int \frac{1}{x}\ dx$$

$$y = \ln|x| + C$$

Som viser at $x \neq 0$

Når $y = 0$ får vi x-aksen som løsning.

(b) I denne oppgaver tegner vi strømlinjene for hånd og identifiser stagnasjonspunktene(figur 2). Vi finner stagnasjonspunkter når $\vec{v} = 0$. Fordi $x = 0$ ikke kan være en løsning for $y = lnx + C$, vil vi finne stagnasjonspunktene når $y = 0$. Dette betyr at hele x-aksen er stagnasjonspunkter. Pilene indikerer retningen på strømmen.

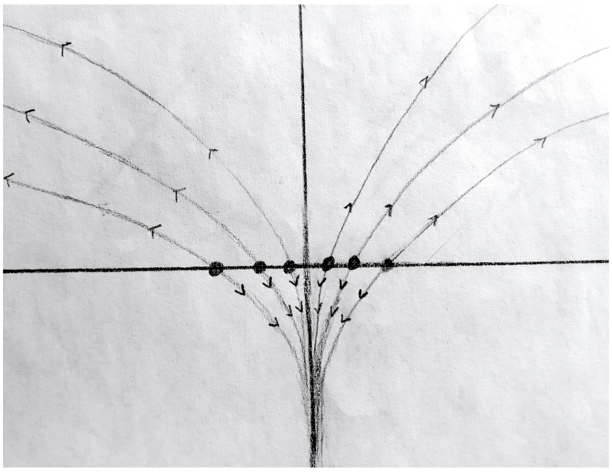

Figure 2: Strømlinjene for hånd

Vi bruker følgende Python-code for å få plottet vi ser i figur 3.

```
# oppgave 2.b)

N = 1000

x = np.linspace(-2, 2, N)
y = np.linspace(-2, 2, N)

x, y = np.meshgrid(x, y)
z = np.log(np.abs(x)) - y

plt.contour(x, y, z)
plt.show()
```

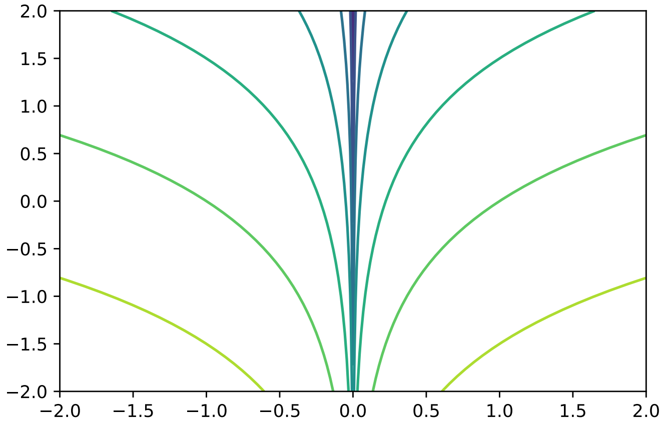

Figure 3: Strømlinjene

(c) Det er egenskapen av strømfunksjonen $\psi(x, y)$ at:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad og \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial xy}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = y + 1 \neq 0$$

I dette tilfellet er divergensen ikke null, derfor vet vi at en strømfunksjon ikke eksisterer.

Oppgave 3. Et annet todimensjonalt strømfelt

(a) Hastighetsfelt i xy-planet er git ved $\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$:

$$v_x = \cos x \sin y \quad og \quad v_y = -\sin x \cos y$$

Divergens:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\sin x \sin y \quad \text{og} \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = \sin x \sin y$$

Dermed:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \sin x \sin y - \sin x \sin y = 0$$

Vrivling:

$$\Big(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\Big)\vec{k}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\cos x \cos y \quad \text{og} \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \cos x \cos y$$

Dermed:

$$\nabla \times \vec{v} = (-\cos x \cos y - \cos x \cos y)\vec{k} = (-2\cos x \cos y)\vec{k}$$

(b) I denne oppgaven bruker vi Python for å tegn opp strømvektorer langs x og y aksen(figur 4).

```
# oppgave 3.b)

delta = 0.25
x, y = np.arange(-2, 2, delta), np.arange(-2, 2, delta)
vx, vy = np.meshgrid(np.cos(x) * np.sin(y), -np.sin(x) * np.cos(y))

plt.quiver(x, y, vx, vy)
plt.axis('equal')
plt.show()
```

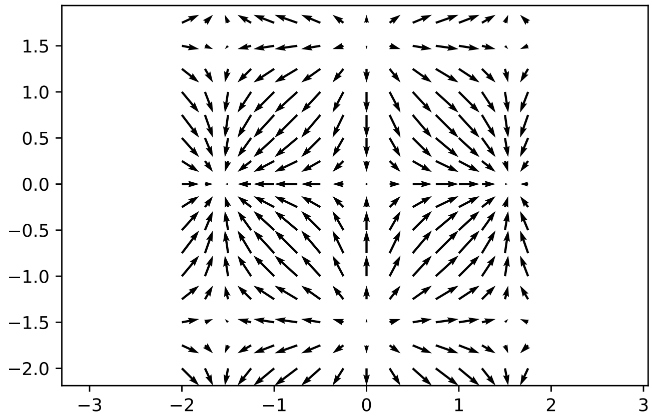

Figure 4: Strømvektorer langs x(horisontal) og y(vertikal) aksen

(c) For å finne sirkulasjonen om randa til kvadratet integrerer vi hastighetsfeltet over et kurveintegral. Vi deler opp kurven i fire sider(med parametriseringen $\vec{r_i}$ hvor i betegner siden).

Vi bruker den følgende formelen:

$$\int \vec{v} d\vec{r_i} = \int_a^b \vec{v}(\vec{r_i}(t)) * \vec{r_i}' dt$$

De paramentene for $a = -\frac{\pi}{2}$ og $b = \frac{\pi}{2}$ er:

- $\vec{r_1}(t) = (t, -\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \vec{r_1}'(t) = (1, 0)$
- $\vec{r_2}(t) = (\frac{\pi}{2}, t) \Rightarrow \vec{r_2}'(t) = (0, 1)$
- $\vec{r_3}(t) = (-t, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \vec{r_3}'(t) = (-1, 0)$
- $\vec{r_4}(t) = (-\frac{\pi}{2}, -t) \Rightarrow \vec{r_4}'(t) = (0, -1)$

Deretter regner vi ut formelen for alle sider i:

$$I1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{v}(\vec{r_1}(t)) * \vec{r_1}' dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos(t) sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big) dt = \Big[-sin(t)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2$$

$$I2 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{v}(\vec{r_2}(t)) * \vec{r_2}' dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big) cos(t) dt = \Big[-sin(t)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2$$

$$I3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{v}(\vec{r_3}(t)) * \vec{r_3}' dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -cos(-t) sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big) dt = \Big[sin(-t)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2$$

$$I4 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \vec{v}(\vec{r_4}(t)) * \vec{r_4}' dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -sin\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) cos(-t) dt = \Big[sin(-t)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -2$$

Ettersom får vi at sirkulasjonen om randa blir: $I1 + I2 + I3 + I4 = -8$

(d) I motsetning til forrige oppgave er dette feltet divergensfritt og dermed har feltet en strømfunksjon. Hvis $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ betyr det at det eksisterer en strømfunksjon $\psi(x, y)$

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x = -\cos(x)\sin(y) \Rightarrow \psi = \cos(x)\cos(y) + f(x)$$

$$v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y = -\sin(x)\cos(y) \Rightarrow \psi = \cos(x)\cos(y) + g(y)$$

Dermed strømfunksjonen kan skrives som $\psi = \cos(x)\cos(y)$.

(e) Taylorutviklingen av annen orden for ψ er definert ved:

$$\psi(x,y) \approx \psi(x_0,y_0)+\Big(\frac{\delta\psi}{\delta x}\Big)(x-x_0)+\Big(\frac{\delta\psi}{\delta y}\Big)(y-y_0)+\Big(\frac{\delta^2\psi}{2\delta x^2}\Big)(x-x_0)^2+\Big(\frac{\delta^2\psi}{2\delta y^2}\Big)(y-y_0)^2+\Big(\frac{\delta^2\psi}{\delta x\delta y}\Big)(x-x_0)(y-y_0)$$

Først regner vi ut de paritielderiverte til ψ:

- $\frac{\delta\psi}{\delta x} = -sin(x)cos(y) \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x}(0,0) = 0$
- $\frac{\delta\psi}{\delta y} = -cos(x)sin(y) \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x}(0,0) = 0$
- $\frac{\delta^2\psi}{\delta x^2} = -cos(x)cos(y) \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x}(0,0) = -1$
- $\frac{\delta^2\psi}{\delta y^2} = -cos(x)cos(y) \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x}(0,0) = -1$
- $\frac{\delta^2\psi}{\delta x\delta y} = -sin(x)sin(y) \qquad \frac{\delta\psi}{\delta x}(0,0) = 0$

Setter dette inn i formelen over for å få taylorekspansjonen nær origo$(x,y) = (0,0)$:

$$\begin{aligned}\psi(0,0) &\approx \psi(0,0) + \Big(\frac{\delta\psi}{\delta x}\Big)x + \Big(\frac{\delta\psi}{\delta y}\Big)y + \Big(\frac{\delta^2\psi}{2\delta x^2}\Big)x^2 + \Big(\frac{\delta^2\psi}{2\delta y^2}\Big)y^2 + \Big(\frac{\delta^2\psi}{\delta x\delta y}\Big)xy \\ &= 1 + 0 + 0 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y\end{aligned}$$

Oppgave 4. Strømlinjer og hastighetsfelt i Python

(a) Vi Bruk funksjonen streamfun i et skript, strlin.py, som plotter konturlinjer for ψ når $n = 5$ og for $n = 30$ og vi får henholdsvis plottene 5 og 6:

Koder brukt er:

```
# oppgave 4.a)

import matplotlib.pyplot as plt
from streamfun import streamfun

for n in(5, 30):
    (x, y, psi) = streamfun(n)
    plt.figure()
    plt.plot()
    plt.contour(x, y, psi)
    plt.title(f"n = {n}")
    plt.show()
```

Hvis vi sammenholder plottene med punkt e) i forrige problem, kan vi se at når n øker, blir tilnærmingen bedre og bedre. Tilnærmingen for $n = 30$(kurvene er jevnere) er bedre enn for $n = 5$.

(b) Først lager vi en funksjon som beregner hastigheter:

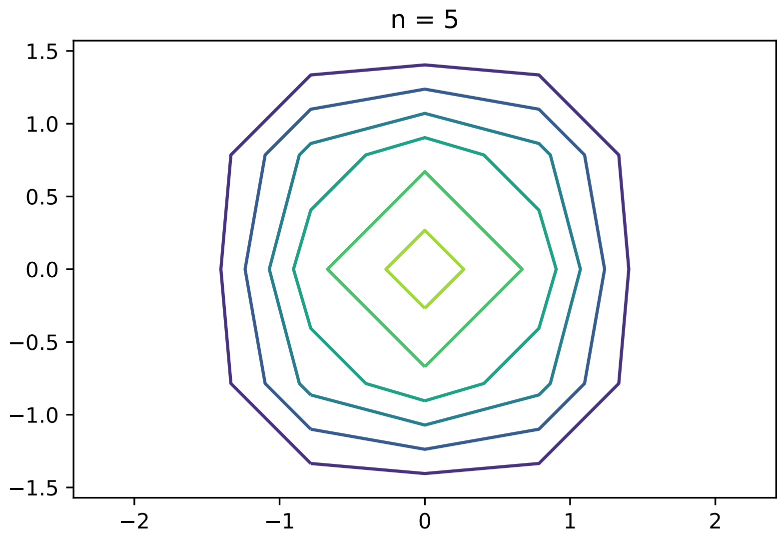

Figure 5: (i) Konturlinjer for ψ når $n = 5$

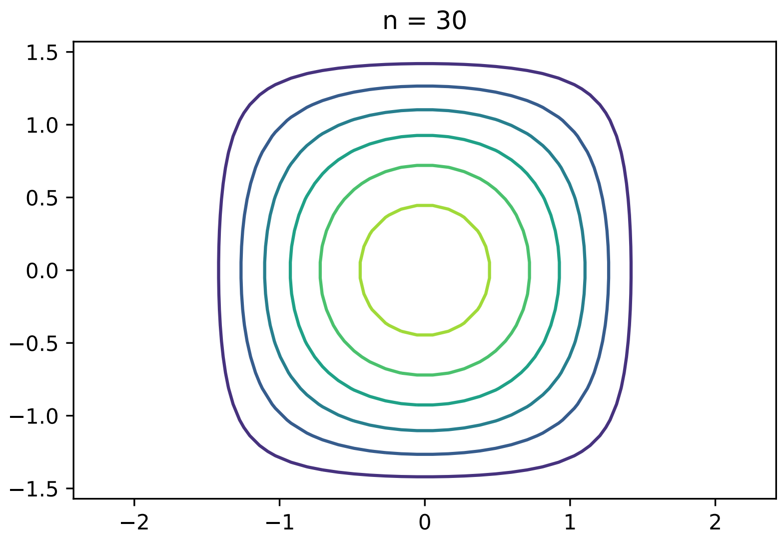

Figure 6: (ii) Konturlinjer for ψ når $n = 30$

```
# oppgave 4.b)

import numpy as np

def velfield(n):
    x = np.linspace(-0.5 * np.pi, 0.5 * np.pi, n)
    [x, y] = np.meshgrid(x, x)
    vx = np.cos(x) * np.sin(y)
    vy = -np.sin(x) * np.cos(y)

    return x, y, vx, vy
```

Neste er å bruk denne i et skript som tegner et vektorplott av hastighetsfeltet:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from velfield import velfield

n = 20

x, y, vx, vy = velfield(n)

plt.figure()
plt.quiver(x, y, vx, vy)
plt.axis('equal')
plt.show()
```

Vi kan velge $n = 20$ som et passende antall punkter for lesbarheten av plottet (figur 7).

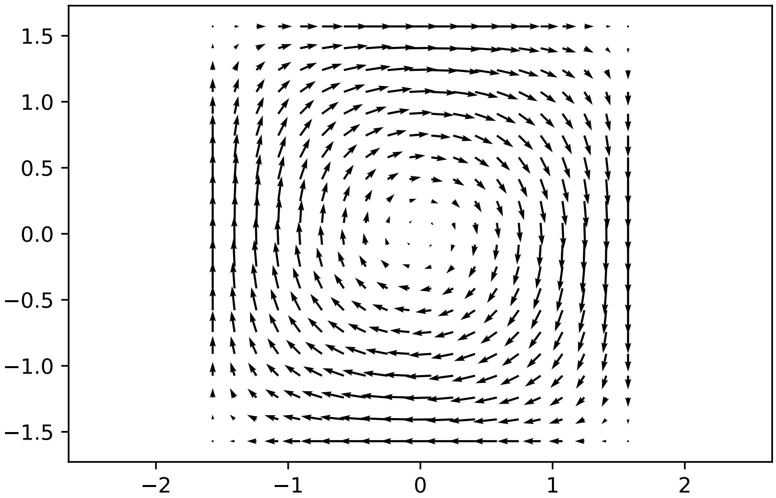

Figure 7: vektorplott av hastighetsfeltet for $n = 20$