Περιγραφή Αλγορίθμου Ανάκτησης Εικόνων μέσω Κατάταξης Πολλαπλότητας Βασισμένη σε Υπεργράφους

Κρόιτορ Καταρτζίου Ιωάν, Π21077
Βασιλείου Αλέξιος, Π21009
Ρούτσης Αλέξιος, Π21145

Φεβρουάριος 2025

1 Εξαγωγή Χαρακτηριστικών και Υπολογισμός Ομοιότητας

1.1 Διαδικασία Εξαγωγής Χαρακτηριστικών

Το περιεχόμενο της εικόνας κωδικοποιείται μέσω ενός μηχανισμού εξαγωγής χαρακτηριστικών, ο οποίος αναπαριστά κάθε εικόνα O_i ως διάνυσμα χαρακτηριστικών $\vec{v}_i$. Αυτή η διαδικασία μετασχηματίζει εικόνες σε αριθμητικές αναπαραστάσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για μετρήσεις ομοιότητας.

1.2 Ορισμός Περιγραφέα Εικόνας

Έστω Δ ένας περιγραφέας εικόνας που ορίζεται ως πλειάδα (ϵ, δ), όπου:

- $\epsilon : O_i \to \mathbb{R}^d$ είναι μια συνάρτηση που εξάγει ένα d-διάστατο διάνυσμα χαρακτηριστικών $\vec{v}_i$ από μια εικόνα O_i.
- $\delta : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$ είναι μια συνάρτηση που υπολογίζει την απόσταση μεταξύ δύο διανυσμάτων χαρακτηριστικών $\vec{v}_i$ και $\vec{v}_j$. Αυτό θα μπορούσε να είναι η Ευκλείδεια απόσταση ή οποιαδήποτε άλλη μετρική απόστασης:

$$\delta(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \|\vec{v}_i - \vec{v}_j\| \tag{1}$$

$$\delta(\epsilon(O_i), \epsilon(O_j)) = \delta(\vec{v}_i, \vec{v}_j) = \|\vec{v}_i - \vec{v}_j\| \tag{2}$$

1.3 Μέτρο Ομοιότητας

Το μέτρο ομοιότητας $p(O_i, O_j)$ προσδιορίζει την ομοιότητα μεταξύ των εικόνων O_i και O_j. Μια κοινή μορφή του μέτρου ομοιότητας μπορεί να προκύψει ως:

$$p(O_i, O_j) = \frac{1}{1 + \|\vec{v}_i - \vec{v}_j\|} \tag{3}$$

Αυτό διασφαλίζει ότι μικρότερες αποστάσεις αντιστοιχούν σε υψηλότερες τιμές ομοιότητας.

2 Ανάκτηση Εικόνων και Μοντέλο Κατάταξης

2.1 Συλλογή Εικόνων

Έστω $C = \{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$ μια συλλογή εικόνων.

2.2 Στόχος Ανάκτησης Εικόνων

Ο στόχος της ανάκτησης εικόνων είναι να προσδιοριστούν οι πιο σχετικές εικόνες από τη συλλογή C με βάση το περιεχόμενό τους και την ομοιότητά τους με μια δεδομένη εικόνα αναζήτησης.

2.3 Διαδικασία Κατάταξης

Δοθέντος ενός αντικειμένου ερωτήματος $O_q \in C$, η διαδικασία περιλαμβάνει την απόκτηση μιας διατεταγμένης λίστας $z_q = \{O_1, O_2, \ldots, O_n\}$ με βάση το μέτρο ομοιότητας $p(O_q, O_i)$. Η διατεταγμένη λίστα ταξινομείται έτσι ώστε οι εικόνες που είναι περισσότερο όμοιες με το ερώτημα να εμφανίζονται πρώτες.

2.4 Διατεταγμένη Λίστα z_q

Δοθέντος ενός αντικειμένου ερωτήματος $O_q \in \mathcal{C}$, ο στόχος της διαδικασίας ανάκτησης εικόνων είναι να κατατάξει τις εικόνες στο $\mathcal{C}$ με βάση την ομοιότητά τους με το O_q. Αυτό επιτυγχάνεται ορίζοντας μια **διατεταγμένη λίστα** z_q, η οποία είναι μια αναδιάταξη του συνόλου εικόνων $\mathcal{C}$. Η διατεταγμένη λίστα απεικονίζει κάθε εικόνα σε μια κατάταξη:

$$z_q : \mathcal{C} \to [n] \tag{4}$$

Εδώ, το $z_q(i)$ αναπαριστά το δείκτη της i-οστής περισσότερο όμοιας εικόνας στο O_q. Η κατάταξη ικανοποιεί:

$$z_q(i) < z_q(j) \implies p(O_q, O_i) \geq p(O_q, O_j) \tag{5}$$

Αυτό υποδεικνύει ότι το O_i είναι περισσότερο όμοιο με το αντικείμενο ερωτήματος O_q από το O_j με βάση το μέτρο ομοιότητας $p(O_q, O_i)$.

2.5 Επιλογή Υποσυνόλου για Αποδοτικό Υπολογισμό

Όταν το μέγεθος του συνόλου εικόνων n είναι μεγάλο, ο υπολογισμός της πλήρους διατεταγμένης λίστας για όλες τις εικόνες μπορεί να είναι υπολογιστικά δαπανηρός. Για να βελτιστοποιηθεί αυτό, ο αλγόριθμος εστιάζει σε ένα υποσύνολο z_q^L, όπου $L \ll n$, που αναπαριστά τις L περισσότερο όμοιες εικόνες:

$$z_q^L : \mathcal{C}_L \to [L] \tag{6}$$

Αυτό το υποσύνολο μειώνει την υπολογιστική πολυπλοκότητα διατηρώντας την ακρίβεια, εξετάζοντας μόνο τις πιο σχετικές εικόνες.

2.6 Διατεταγμένες Λίστες για Όλα τα Αντικείμενα

Κάθε αντικείμενο $O_i \in \mathcal{C}$ μπορεί να λειτουργήσει ως αντικείμενο ερωτήματος, παράγοντας τη δική του αντίστοιχη κατειλεγμένη λίστα. Η συλλογή όλων των διατεταγμένων λιστών συμβολίζεται ως:

$$\mathcal{T} = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \tag{7}$$

Αυτές οι διατεταγμένες λίστες αποτελούν τη βάση για περαιτέρω ανάλυση στη διαδικασία ανάκτησης, όπως τον ορισμό των πλησιέστερων γειτόνων και την κατασκευή του υπεργράφου.

2.7 Ορισμός k-Πλησιέστερων Γειτόνων

Για κάθε αντικείμενο ερωτήματος O_q, οι k-πλησιέστεροι γείτονες προσδιορίζονται με βάση την διατεταγμένη λίστα z_q. Οι γείτονες επιλέγονται από τις k περισσότερο όμοιες εικόνες:

$$N_k(q) = \{z_q(1), z_q(2), \ldots, z_q(k)\} \tag{8}$$

Το σύνολο των k-πλησιέστερων γειτόνων χρησιμοποιείται για τον ορισμό των υπερακμών στον υπεργράφο και αποτελεί ένα ουσιώδες συστατικό για τη σύλληψη της δομής πολλαπλότητας του χώρου των εικόνων.

Αυτό ολοκληρώνει τη φάση του **μοντέλου ανάκτησης και κατάταξης εικόνων**, η οποία οδηγεί απευθείας στην κατασκευή του υπεργράφου στο επόμενο στάδιο.

3 Κατάταξη Πολλαπλότητας

Ο στόχος της φάσης Κατάταξης Πολλαπλότητας είναι να εκμεταλλευτεί τη δομή ομοιότητας που είναι κωδικοποιημένη στο σύνολο των ταξινομημένων λιστών $\mathcal{T}$ για να συλλάβει τη δομή πολλαπλότητας του συνόλου δεδομένων. Αξιοποιώντας τις γεωμετρικές σχέσεις μεταξύ των σημείων των δεδομένων, αυτή η μέθοδος βελτιώνει τις ταξινομημένες λίστες για να ενισχύσει την ακρίβεια ανάκτησης εικόνων.

3.1 Στόχος της Κατάταξης Πολλαπλότητας

Ο κύριο στόχος είναι να μετασχηματίσει τις αρχικές ταξινομημένες λίστες $\mathcal{T}$ σε ένα πιο αποτελεσματικό σύνολο ταξινομημένων λιστών $\mathcal{T}_r$ χρησιμοποιώντας μια μη επιβλεπόμενη προσέγγιση μάθησης. Αυτός ο μετασχηματισμός ορίζεται ως:

$$\mathcal{T}_r = f(\mathcal{T}) \tag{9}$$

όπου $f(\cdot)$ είναι η συνάρτηση μετασχηματισμού που προσαρμόζει την κατάταξη ενσωματώνοντας πληροφορίες πολλαπλότητας.

3.2 Περιβάλλον Μη Επιβλεπόμενης Μάθησης

Σε αντίθεση με τα επιβλεπόμενα μοντέλα που βασίζονται σε επισημασμένα δεδομένα, η προσέγγιση κατάταξης πολλαπλότητας λειτουργεί χωρίς σαφείς ετικέτες, βελτιώνοντας την κατάταξη βασιζόμενη στις τοπικές δομές (γειτονιές) των δεδομένων.

4 Κατάταξη Πολλαπλότητας Βάση Υπεργράφηματος

4.1 Κανονικοποίηση Κατάταξης

Κανονικοποίηση των κατατάξεων που λαμβάνονται από το αρχικό στάδιο ανάκτησης για να εξασφαλιστεί μια ομοιόμορφη αναπαράσταση ομοιότητας μεταξύ των εικόνων.

4.2 Κατασκευή Υπεργράφου

Κατασκευή ενός υπεργράφου $G = (V, E, w)$, όπου οι κορυφές V αναπαριστούν αντικείμενα εικόνων, και οι υπερακμές E συνδέουν ομάδες k-πλησιέστερων γειτόνων.Το βάρος w κάθε υπερακμής προσδιορίζει τον βαθμό συσχέτισης μεταξύ των συνδεδεμένων κορυφών.

4.3 Ομοιότητες Υπερακμών

Υπολογισμός ομοιοτήτων μεταξύ υπερακμών λαμβάνοντας υπόψη τις κοινές τους κορυφές. Αυτό το μέτρο ομοιότητας είναι ουσιώδες για τη διάδοση πληροφοριών σχετικότητας σε όλο το σύνολο δεδομένων.

4.4 Καρτεσιανό Γινόμενο Στοιχείων Υπερακμών

Ορισμός ενός μέτρου ομοιότητας μεταξύ ζευγών υπερακμών μέσω του καρτεσιανού γινομένου των αντίστοιχων στοιχείων τους, επιτρέποντας μια λεπτομερή αξιολόγηση ομοιότητας.

4.5 Ομοιότητα με Βάση το Υπεργράφημα

Χρήση της δομής του υπεργράφου για τον υπολογισμό μιας τελικής βαθμολογίας ομοιότητας μεταξύ ζευγών εικόνων. Αυτή η βαθμολογία συλλαμβάνει τόσο άμεσες όσο και μεταβατικές σχέσεις εντός του συνόλου δεδομένων, παρέχοντας μια βελτιωμένη βάση για τις τελικές διατεταγμένες λίστες.

5 Κανονικοποίηση Κατάταξης

Η κανονικοποίηση κατάταξης είναι ουσιώδης για τον μετασχηματισμό των αρχικών κατατάξεων σε ένα πιο συμμετρικό μέτρο ομοιότητας, διασφαλίζοντας συνέπεια στις συγκρίσεις. Για οποιοδήποτε ζεύγος αντικειμένων εικόνας O_i και O_j, το κανονικοποιημένο μέτρο ομοιότητας $P\rho_n(O_i, O_j)$ ορίζεται ως:

$$\rho_n(O_i, O_j) = 2L - (z_i(j) + z_j(i)) \tag{10}$$

όπου:

- $z_i(j)$ δηλώνει την κατάταξη της εικόνας O_j στην αρχική λίστα κατάταξης αντικειμένων για την εικόνα O_i,
- L είναι το προκαθορισμένο όριο, διασφαλίζοντας ότι περιλαμβάνονται μόνο οι πιο σχετικοί γείτονες.

Αυτή η κανονικοποίηση εξασφαλίζει συμμετρία στη διαδικασία κατάταξης:

$$\rho_n(O_i, O_j) = \rho_n(O_j, O_i) \tag{11}$$

6 Κατασκευή Υπεργράφου

Η κατασκευή του υπεργράφου ξεκινά αναπαριστώντας κάθε αντικείμενο (εικόνα) O_i ως κορυφή $v_i \in V$. Οι υπερακμές $e_i \in E$ συνδέουν ομάδες σχετικών κορυφών με βάση την ομοιότητά τους, δημιουργώντας μια δομή που συλλαμβάνει σύνθετες σχέσεις πέραν των διμερών συνδέσεων.

6.1 Κορυφές και Υπερακμές

Κάθε κορυφή v_i αντιστοιχεί σε ένα αντικείμενο (εικόνα) O_i. Οι υπερακμές e_i ομαδοποιούν κορυφές με υψηλή ομοιότητα, που συνήθως προσδιορίζεται από την κατάταξη k-πλησιέστερων γειτόνων.

6.2 Αναπαράσταση Συμπτωτικού Πίνακα

Ένας υπεργράφος μπορεί να αναπαρασταθεί χρησιμοποιώντας έναν πίνακα συνάφειας H διαστάσεων $|E| \times |V|$, όπου:

$$h(e_i, v_j) = \begin{cases} 1 & \text{αν } v_j \in e_i \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{12}$$

Αυτός ο δυαδικός πίνακας κωδικοποιεί την συμμετοχή κορυφών σε υπερακμές.

6.3 Ορισμός της Υπερακμής

Κάθε υπερακμή e_i μπορεί να οριστεί ως:

$$e_i = \{v_j \in V : O_j \in N_k(O_i)\} \tag{13}$$

όπου $N_k()_i)$ είναι το σύνολο των k-πλησιέστερων γειτόνων της εικόνας O_i. Αυτό διασφαλίζει ότι μόνο στενά σχετικές κορυφές ομαδοποιούνται στην ίδια υπερακμή.

6.4 Πίνακας Συνάφειας W

Για να συλληφθεί η ισχύς της ομοιότητας μεταξύ κορυφών, εισάγεται ένα πιθανοτικό υπεργραφικό μοντέλο μέσω ενός πίνακα συσχέτισης $W \in \mathbb{R}^{|V|\times|V|}$, όπου:

$$W(i, j) \in [0, 1] \tag{14}$$

Αυτός ο πίνακας ποσοτικοποιεί τη σχέση μεταξύ ζευγών κορυφών με βάση τις κοινές τους υπερακμές.

6.5 Ανάθεση Βάρους σε Υπερακμές

Το βάρος μιας ακμής προκύπτει από τον τύπο:

$$w(i, j) = 1 - \log_{k+1}[z_i(j)] \tag{15}$$

όπου $Z_i(j)$ δηλώνει την κανονικοποιημένη κατάταξη. Αυτή η ανάθεση βάρους επιτρέπει τον ορισμό μιας μη-δυαδικής έκδοσης του πίνακα συνάφειας $h_c(e_i, v_j)$, ως:

$$h_c(e_i, v_j) = \begin{cases} w(e_i, v_j) & \text{αν } v_j \in e_i \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{16}$$

6.6 Σχηματισμός Υπερακμών e_i

Κάθε υπερακμή e_i σχηματίζεται συμπεριλαμβάνοντας τους k-πλησιέστερους γείτονες ενός αντικειμένου O_i, μαζί με το O_i το ίδιο. Έτσι, κάθε υπερακμή περιέχει ακριβώς k κορυφές:

$$|e_i| = k \tag{17}$$

Δεδομένου ότι κάθε υπερακμή e_i ορίζεται σε σχέση με την αντίστοιχη κορυφή της, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

$$|E| = |V| \tag{18}$$

Το βάρος $w(e_i)$ που αποδίδεται σε μια υπερακμή e_i μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το άθροισμα των επιμέρους βαρών $w(e_i, v_j)$ για όλες τις κορυφές v_j που ανήκουν στην υπερακμή:

$$w(e_i) = \sum_{v_j \in e_i} w(e_i, v_j) \tag{19}$$

7 Ομοιότητες Υπερακμών

Σε αυτό το βήμα, υπολογίζονται οι ομοιότητες μεταξύ υπερακμών και κορυφών για να μοντελοποιηθούν αποτελεσματικά οι δομικές σχέσεις εντός του υπεργράφου.

7.1 Ομοιότητα μεταξύ Υπερακμών

Η ομοιότητα S_h μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους υπερακμών e_i και e_j υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τα αντίστοιχα διανύσματα (από τον πίνακα συνάφειας H):

$$S_h = HH^T \tag{20}$$

όπου:

- H είναι ο πίνακας συνάφειας μεγέθους $|E| \times |V|$, που περιγράφει ποιες κορυφές ανήκουν σε ποιες υπερακμές.
- S_h έχει διαστάσεις $|E| \times |E|$ και καταγράφει την ομοιότητα μεταξύ υπερακμών μετρώντας τις κοινές κορυφές.

7.2 Ομοιότητα μεταξύ Κορυφών

Η ομοιότητα S_v μεταξύ οποιουδήποτε ζεύγους κορυφών v_i και v_j υπολογίζεται ως:

$$S_v = H^T H \tag{21}$$

όπου:

- S_v έχει μέγεθος $|V| \times |V|$ και μετρά το βαθμό συσχέτισης μεταξύ δύο κορυφών με κριτήριο τις κοινές υπερακμές που περιέχουν.

7.3 Συνδυασμένη Ομοιότητα Υπερακμών και Κορυφών

Η συνδυασμένη ομοιότητα S μεταξύ κορυφών και υπερακμών λαμβάνεται μέσω του γινομένου Χάνταμαρντ (στοιχειακού πολλαπλασιασμού) των S_h και S_v:

$$S = S_h \odot S_v \tag{22}$$

Το γινόμενο Χάνταμαρντ διασφαλίζει ότι τόσο η δομή του υπεργράφου (μέσω υπερακμών) όσο και οι σχέσεις κορυφών συνεισφέρουν στην τελική μήτρα ομοιότητας.

8 Καρτεσιανό Γινόμενο Στοιχείων Υπερακμών

8.1 Ορισμός του Καρτεσιανού Γινομένου

Το καρτεσιανό γινόμενο μεταξύ δύο υπερακμών e_q και e_p ορίζεται ως:

$$e_q \times e_p = \{(v_x, v_y) : v_x \in e_q \wedge v_y \in e_p\} \tag{23}$$

Αυτό το γινόμενο ουσιαστικά συνδυάζει κάθε κορυφή v_x του e_q με κάθε κορυφή v_y του e_p, σχηματίζοντας όλους τους δυνατούς συνδυασμούς ζευγών κορυφών.

8.2 Μέτρο Ομοιότητας Μεταξύ Ζευγών Κορυφών

Για κάθε ζεύγος κορυφών $(v_i, v_j) \in e_q \times e_p$, υπολογίζεται μια σχέση πρωτογενούς ομοιότητας ρ ως:

$$\rho(e_q, v_i, v_j) = w(e_q) + w(e_q, v_i) \cdot w(e_p, v_j) \tag{24}$$

Τα βάρη $w(e_q)$, $w(e_q, v_i)$ και $w(e_p, v_j)$ αποτυπώνουν τον βαθμό αλληλεπίδρασης των κορυφών στον υπέργραφο.

8.3 Συνδυασμένο Μέτρο Ομοιότητας

Το συνδυασμένο μέτρο ομοιότητας $C(v_i, v_j)$ υπολογίζεται συγκεντρώνοντας τις επιμέρους σχέσεις για κάθε ζεύγος υπερακμών:

$$C(v_i, v_j) = \sum_{e_q \in E(v_i, v_j)} \rho(e_q, v_i, v_j) \tag{25}$$

Αυτή η εξίσωση συναθροίζει αποτελεσματικά όλες τις επιρροές διαφορετικών υπερακμών στην ομοιότητα μεταξύ των κορυφών v_i και v_j (έμμεσες και άμεσες).

8.4 Συνολικός Πίνακας Βαρών

Ο νέος συνολικός πίνακας βαρών $\hat{W}$ μεταξύ ζευγών κορυφών (v_i, v_j) ορίζεται χρησιμοποιώντας τον συνδυασμό των πινάκων C και του υπάρχοντος πίνακα ομοιότητας S ως εξής:

$$\hat{W} = C \circ S \tag{26}$$

Εδώ, $\circ$ συμβολίζει το γινόμενο Χάνταμαρντ (στοιχειακό πολλαπλασιασμό), διασφαλίζοντας ότι τόσο οι ομοιότητες υπερακμών όσο και οι ομοιότητες κορυφών συνεισφέρουν στα τελικά βάρη.

9 Επαναληπτική Διαδικασία Κατάταξης

Η επαναληπτική διαδικασία κατάταξης αποτελεί θεμελιώδες στοιχείο για τη βελτίωση των σχέσεων ομοιότητας και την αύξηση της αποτελεσματικότητας ανάκτησης.

9.1 Δομή Επαναλήψεων

Η επαναληπτική διαδικασία ακολουθεί την ακολουθία:

$$\mathcal{T}^{(0)} \to \mathcal{T}^{(1)} \to ... \to \mathcal{T}^{(t)} \to \mathcal{T}^{(T)} \tag{27}$$

με αντίστοιχους πίνακες βαρών:

$$W^{(0)} \to W^{(1)} \to ... \to W^{(T)} \tag{28}$$

όπου:

- $\mathcal{T}^{(0)}$ είναι το αρχικό σύνολο λιστών κατάταξης
- $\mathcal{T}^{(t)}$ αναπαριστά τις λίστες κατάταξης στην επανάληψη τ
- $W^{(t)}$ είναι ο πίνακας βαρών στην επανάληψη τ
- Τ είναι ο συνολικός αριθμός επαναλήψεων

9.2 Διαδικασία Βελτίωσης

Σε κάθε επανάληψη τ:

1. Ενημέρωση δομής υπεργράφου:

$$G^{(t)} = (V, E^{(t)}, w^{(t)}) \tag{29}$$

2. Υπολογισμός νέων μέτρων ομοιότητας:

$$\hat{W}^{(t)} = C^{(t)} \circ S^{(t)} \tag{30}$$

3. Δημιουργία νέων κατατάξεων:

$$\mathcal{T}^{(t+1)} = f(\hat{W}^{(t)}) \tag{31}$$

9.3 Εξέλιξη Βαρών Υπερακμών

Κατά τη διάρκεια των επαναλήψεων, τα βάρη των υπερακμών εξελίσσονται:

$$w^{(t+1)}(e_i) = \sum_{j \in N_h(i,k)} h^{(t)}(i,j) \tag{32}$$

Η διαδικασία τερματίζεται όταν:

- Επιτευχθεί ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων T
- Οι κατατάξεις σταθεροποιηθούν
- Η βελτίωση της αποτελεσματικότητας πέσει κάτω από ένα κατώφλι

10 Παράδειγμα Κατασκευής Υπεργραφών

Στο παρακάτω παράδειγμα, έχουμε ένα σύνολο διαθέσιμων εικόνων $C = \{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\}$. Κάθε εικόνα o_i συνδέεται με μια κορυφή v_i του υπεργραφήματος. Το υπεργράφημα ορίζεται ως $G = (V, \mathcal{E}, w)$, όπου:

- $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$ είναι το σύνολο των κορυφών.
- $\mathcal{E}$ είναι το σύνολο των υπερακμών.
- w είναι το βάρος που συνδέεται με κάθε υπερακμή.

10.1 Αρχική Κατάσταση

Υποθέτουμε ότι οι αρχικές ταξινομημένες λίστες z_i για κάθε εικόνα σύμφωνα με τις αποστάσεις των χαρακτηριστικών τους δίνονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
z_1 &= \{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\} \\
z_2 &= \{o_2, o_3, o_1, o_5, o_6, o_4\} \\
z_3 &= \{o_3, o_1, o_4, o_2, o_5, o_6\} \\
z_4 &= \{o_4, o_1, o_3, o_5, o_2, o_6\} \\
z_5 &= \{o_5, o_6, o_4, o_1, o_2, o_3\} \\
z_6 &= \{o_6, o_5, o_4, o_1, o_2, o_3\}
\end{aligned}$$

10.2 Ορισμός Πλησιέστερων Γειτόνων

Υποθέτουμε ότι ο αριθμός των πλησιέστερων γειτόνων k είναι 3, οπότε οι λίστες $N_3(o_i)$ των πλησιέστερων γειτόνων διαμορφώνονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
N_3(o_1) &= \{o_1, o_2, o_3\} \\
N_3(o_2) &= \{o_2, o_3, o_1\} \\
N_3(o_3) &= \{o_3, o_1, o_4\} \\
N_3(o_4) &= \{o_4, o_3, o_5\} \\
N_3(o_5) &= \{o_5, o_6, o_4\} \\
N_3(o_6) &= \{o_6, o_5, o_4\}
\end{aligned}$$

Το βάρος της υπερακμής $w(o_i, o_j)$ υπολογίζεται ως:

$$w(o_i, o_j) = 1 - \log_{k+1} z_i(o_j) \tag{33}$$

10.3 Σχηματισμός Δομής Υπεργραφήματος

Η γραφική απεικόνιση παρουσιάζει τις συνδέσεις των κορυφών μέσω υπερακμών που κατασκευάζονται από τις παραπάνω πληροφορίες. Στη δομή του γραφήματος, οι υπερακμές $e_1, e_2, \ldots, e_6$ συνδέουν τα διάφορα σύνολα κορυφών, αντικατοπτρίζοντας τη σχέση γειτνίασης και την ομοιότητα μεταξύ των εικόνων.