

Calculabilitate si Complexitate

3 iunie 2022

1. Fie functia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) =$ prima cifra zecimala de dupa virgula a numarului real \sqrt{n} .
 - (a) Aratati ca functia f este calculabila.
 - (b) Aratati ca functia f este primitiv recursiva.

2. (a) Aratati ca pentru orice numar natural $n \geq 1$,

$$n + \frac{2}{5} < \sqrt{n(n+1)} < n + \frac{1}{2}.$$

- (b) O masina M porneste cu $n = 1$ si calculeaza prima cifra zecimala de dupa virgula a numarului real $\sqrt{n(n+1)}$. Daca aceasta zecimala este 4, il mareste pe n cu o unitate si repeta procedura. Daca zecimala nu este 4, se opreste. Aratati ca masina M nu se opreste niciodata.
3. (a) Aratati ca exista o gramatica G cu alfabet terminal $\Sigma = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ care genereaza scrierea zecimala a acelor numere naturale k astfel incat exista un numar natural n cu proprietatea $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Numerele diferite de 0 nu incep cu 0, iar $[x]$ semnifica partea intreaga a lui x .
 - (b) Aratati ca tipul maximal al limbajului de la punctul (a) este 3 (limbaj regulat).

4. Sa se decida daca urmatoarea formula propozitionala este satisfiabila sau nu:

$$(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \wedge (c \rightarrow d) \wedge (d \rightarrow \neg a) \wedge (\neg a \rightarrow e) \wedge \\ \wedge (e \rightarrow f) \wedge (f \rightarrow g) \wedge (g \rightarrow h) \wedge (h \rightarrow i) \wedge (i \rightarrow a)$$

Aici notatia $A \rightarrow B$ este o prescurtare pentru expresia propozitionala $\neg A \vee B$.

5. Considerati functia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, data de $f(m, n) = m + n$ cu conventia ca atat argumentele cat si rezultatul se dau (respectiv, se obtine) in scriere zecimala. Aratati ca f este calculabila in timp polinomial in masura de complexitate $c(m, n) = \max(l_{10}(m), l_{10}(n))$ unde $l_{10}(x)$ este lungimea cuvintului care il descrie pe x in scrierea zecimala.
6. Aratati ca problema $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ este prim}\}$ este in clasa coNP. Aici masura de complexitate este $l_2(n)$, adica lungimea cuvintului care il descrie pe n in scrierea binara.