Théorie des jeux

> Si deux ont proposé entre eux, de dire chacun l'un après l'autre alternativement un nombre à plaisir, qui toutefois ne surpasse pas un certain nombre précis, pour voir ajoutant ensemble les nombres qu'ils diront qui arrivera plutôt à quelque nombre prescrit ; faire si bien qu'on arrive toujours le premier au nombre destiné.
>
> Claude-Gaspar Bachet de Méziriac, 1612 [**bachet_problemes_1612**]

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ expliquer l'intérêt de la théorie des jeux
- ☞ expliquer le concept de jeu d'accessibilité
- ☞ coder le calcul des attracteurs

La théorie des jeux a été initiée par John Von Neumann pendant et après la seconde guerre mondiale. Dans un ouvrage resté célèbre[**von_neumann_theory_1944**], de nombreux problèmes très généraux sont abordés sous la perspective du jeu et de l'économie. Tout comme les algorithmes d'IA développés aujourd'hui, cette théorie a pour objectif d'aider à la décision lorsque l'environnement est incertain, c'est-à-dire complexe et imprévisible. Elle fait intervenir des joueurs considérés comme des individus rationnels, des règles et des contextes d'évolution du jeu.

Le programme de classe préparatoire n'aborde que les jeux d'accessibilité à deux joueurs que l'on peut modéliser avec un graphe orienté biparti. Néanmoins, cela permet de lever le voile sur une théorie puissante et fascinante.

A Introduction à la théorie des jeux

■ **Définition 1 — Jeu.** Dans le cadre de cette théorie, on considère qu'un jeu est une activité humaine définie dans le cadre d'un contexte et dont les participants doivent suivre les règles énoncées et faire des choix pour gagner en s'opposant ou résoudre un problème ensemble. Cette activité nécessite des compétences intellectuelles, des savoirs et incorpore le hasard.

Les jeux ainsi définis englobent donc la plupart des activités humaines : l'économie, la guerre, l'étude du vivant ou même la physique peuvent être le cadre de jeux qui servent alors de modèles pour découvrir, établir des stratégies ou simuler une réalité.

■ **Définition 2 — Jeu séquentiel.** Un jeu séquentiel est un jeu au cours duquel les joueurs décident de leur stratégie les uns après les autres et peuvent donc tenir compte des actions des joueurs précédents.

(R) Par opposition, certains jeux (non séquentiels) forcent les joueurs à jouer les coups simultanément.

■ **Définition 3 — Jeux coopératifs.** Un jeu coopératif permet la construction de coalitions entre joueurs. Cela suppose une concertation sur la stratégie à adopter et un engagement à coopérer.

■ **Définition 4 — Jeu à somme nulle.** Les jeux à somme nulle sont des jeux pour lesquels les gains de l'un sont strictement les pertes de l'autre. Si on utilise une fonction de gain pour évaluer les perspectives de gain de chaque joueur, alors la somme des gains des joueurs est nulle. Mathématiquement, si G_i est le gain du joueur i et si le jeu est à somme nulle alors $\sum_{i=1}^{n} G_i = 0$.

■ **Exemple 1 — Jouer à somme nulle.** Parmi les jeux les plus connus à somme nulle, on trouve :

— les échecs,

— le tarot ou le poker,

— shi-fu-mi.

(R) La plupart des situations de la vie quotidienne engendre des jeux à somme non nulle. Par exemple, le commerce est un jeu à somme non nulle plutôt positive : un marchand de voiture est gagnant lorsqu'il vend une voiture à un client. Le client a souscrit un crédit pour acheter et semble perdant mais peut utiliser sa voiture comme bon lui semble. Donc, les situations commerciales peuvent être gagnant-gagnant : si vous avez faim, vous serez content d'acheter de la nourriture qu'un marchand voudra bien vous vendre. Elles peuvent également être perdant-perdant...

■ **Définition 5 — Dilemme du prisonnier.** Le dilemme du prisonnier est un exemple fondamental[a] de la théorie des jeux. Il a été formalisé par Tucker en 1950 [**tweedale_william_1993**] pour pointer une insuffisance de la théorie des jeux de l'époque : deux individus rationnels ne coopèrent pas nécessairement[b]. Le principe est le suivant :

Deux membres d'un même gang criminel sont arrêtés et emprisonnés. Chaque prisonnier est mis à l'isolement : il ne peut pas communiquer avec l'autre. La police ne dispose pas de suffisamment de preuves pour les accuser formellement tous les deux et il est envisagé de les condamner à un an de prison tous les deux pour des charges moindres. Pour l'instant les deux prisonniers gardent le silence.

Néanmoins, la police propose à chaque prisonnier A et B un marché diabolique. En voici les termes :

1. Si A et B se dénoncent mutuellement, ils seront condamnés à deux ans de prisons.
2. Si A trahit B et que B demeure silencieux, A sera libéré et B sera condamné à trois ans.
3. Symétriquement, si A demeure silencieux et que B le dénonce, alors A fera trois ans et B sera libéré.
4. Enfin, si A et B demeurent silencieux, les deux feront un an de prison.

a. un paradigme
b. On trouve ici [**arte_dilemme_2021**] une fabuleuse introduction à ce dilemme dans la série Voyages au pays des maths d'Arte. À regarder absolument !

R Le dilemme du prisonnier illustre bien des situations (guerre commerciale par exemple) dans lesquelles les acteurs peuvent agir rationnellement, ne pas coopérer spontanément et perdre simultanément. L'incitation à tricher est naturellement au cœur du dilemme.

La **répétition** du jeu peut cependant amener à considérer d'autres stratégies : chaque joueur peut adapter son comportement par rapport à l'expérience passée et choisir de coopérer ou au contraire de se venger. Lorsque l'incitation à tricher est moins forte que les représailles potentielles, la coopération peut alors s'imposer et le jeu peut atteindre un équilibre de Nash.

B Nature de l'information des jeux

■ **Définition 6 — Jeu à information parfaite.** Un jeu est à information parfaite si chaque joueur est parfaitement informé des actions passées des autres joueurs avant de prendre sa décision : aucune action du jeu n'a été cachée. On se rappelle de tous les coups joués précédemment. Un jeu à information parfaite est un jeu séquentiel.

■ **Définition 7 — Jeu à information complète.** Un jeu à information est à information complète si tous les joueurs ont une connaissance totale des données du jeu : règles, pièces, actions possibles, fonction de gain, objectifs des autres joueurs.

R Les jeux à information incomplète sont appelés jeux bayésiens. Dans ce cas, les joueurs n'ont pas une connaissance commune du jeu : chacun n'a qu'une vision partielle des données du jeu.

La figure 1 met en évidence la caractérisation possible des jeux en fonction de la nature de l'information disponible sur le jeu :

— sur l'axe horizontal, l'information sur les règles du jeu varie d'incomplète à complète : cet axe concerne la connaissance de la structure du jeu.

— sur l'axe Vertical, l'information varie de imparfaite à parfaite : cet axe concerne le déroulement du jeu, l'historique des actions passées.

Ce cours traite principalement du quadrant Parfaite/Complète, c'est-à-dire les conditions d'informations pour lesquelles les algorithmes comme Minimax et ou les attracteurs sont les plus directs à appliquer.

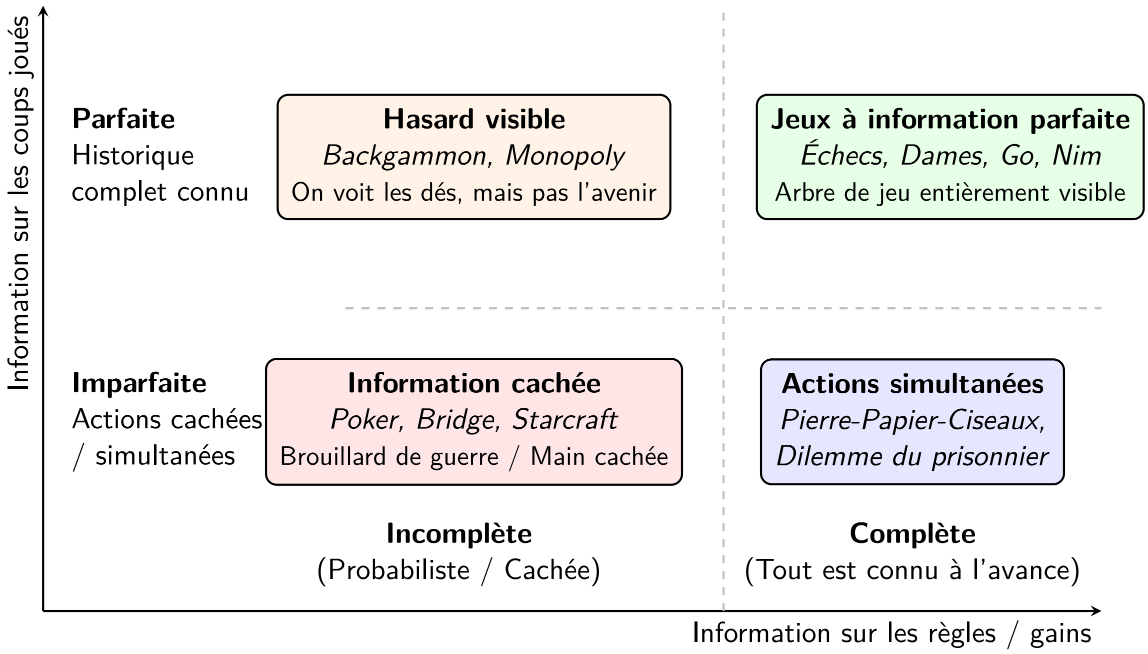


FIGURE 1 – Synthèse des catégories de jeu en fonction de la nature des informations

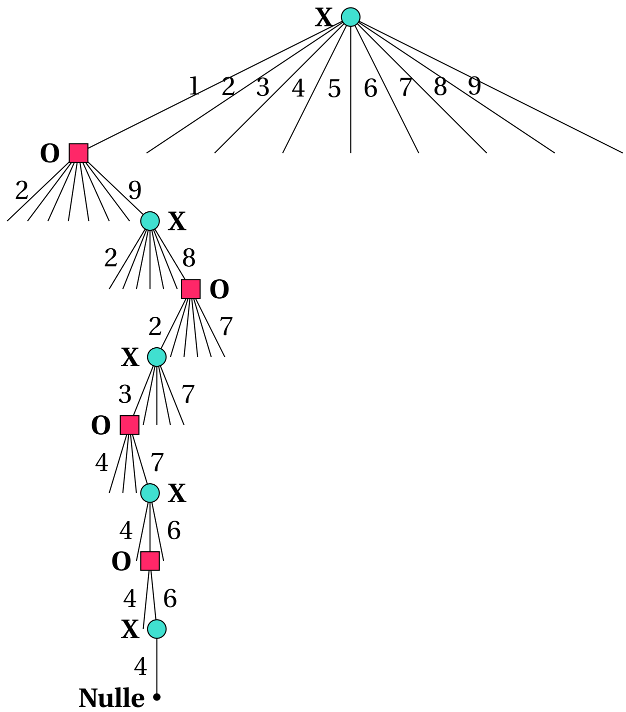
■ **Exemple 2 — Jouer à information (in)complète et (im)parfaite.** Aux échecs, s'il s'agit d'une partie d'échec classique, les joueurs évoluent dans un contexte d'information parfaite : chaque joueur a pu voir tous les coups joués précédemment au cours de la partie. De plus, les règles sont connues, toutes les pièces sont toutes visibles, le chronomètre aussi : alors l'information est complète également. Par contre, si une partie est prise en cours de route et que le joueur n'a pas connaissance des coups passés, l'information est imparfaite.

Les jeux de cartes comme le tarot, le bridge ou le poker sont des jeux à information imparfaite la distribution est inconnue (aléatoire et personne n'en a connaissance puisque les cartes sont retournées lors de la distribution) et incomplète car on ne connaît pas la main des adversaires lors du jeu ni les objectifs des joueurs.

C Forme extensive d'un jeu séquentiel (Arbre de jeu)

■ **Définition 8 — Arbre de jeu ou forme extensive.** La représentation d'un jeu séquentiel sous la forme d'un arbre est appelée forme extensive ou arbre de jeu. Les nœuds représentent les positions du jeu. Les nœuds d'un même niveau sont contrôles par un même joueur.

Un exemple d'arbre de jeu pour une partie de morpion est donné sur la figure 2.



X	O	X
X	X	O
O	X	O

FIGURE 2 – Représentation partielle d'un arbre de jeu d'une partie de morpion. La feuille de l'arbre indique le résultat de la partie (nulle). Chaque nœud interne de l'arbre représente une position de **X** ou de **O** au cours de la partie dans laquelle les joueurs doivent faire un choix. On considère que les cases sont numérotées de 1 à 9 en ligne et en partant du haut. La position finale est donnée sous l'arbre. Le joueur à la croix X joue en premier car il contrôle la racine de l'arbre.

D Jeux d'accessibilité

■ **Définition 9 — Jeu impartial.** Un jeu impartial est un jeu séquentiel à deux joueurs à information parfaite, sans hasard et pour lequel, à chaque position, les mêmes coups sont disponibles pour les deux joueurs.

■ **Définition 10 — Jeu d'accessibilité.** Un jeu d'accessibilité est un jeu impartial fini pour lequel les positions sont modélisées par un graphe orienté acyclique (DAG). Jouer un coup revient à suivre une des arêtes du graphe sont le nombre de sommets est fini. Le perdant est celui qui atteint une position sans successeur dans le graphe (convention *normale*).

R L'acyclicité du graphe orienté garantit la terminaison du jeu d'accessibilité en un nombre fini de coups. Sinon, les joueurs pourraient emprunter des cycles indéfiniment et ne jamais terminer une partie. L'acyclicité crée un ordre dans les sommets du graphe orienté.

R Selon la convention *misère* d'un jeu d'accessibilité, le gagnant est celui qui atteint une position sans successeur dans le graphe.

■ **Définition 11 — Jeu de Nim.** Un jeu de Nim est un jeu d'accessibilité particulier à base de plusieurs tas de jetons (allumettes, batonnets, graines...). Jouer un coup consiste à retirer au moins un jeton d'un seul tas, sans contrainte spatiale sur le tas. On ne peut pas fragmenter un tas ou le faire disparaître.

R Parmi les variantes les plus célèbres, on peut citer :

— le jeu de Marienbad (avec des cartes ou des allumettes) [**itemproductions_nim_2010**],

— le jeu des bâtonnets [a] [**fort-boyardfr_batonnets_2011**],

— le jeu de Grundy.

a. type Fort Boyard

■ **Exemple 3 — Graphe orienté acyclique d'une partie de jeu de Marienbad.** La figure 3 donne un exemple de jeu de Marienbad tel qu'il est présenté dans le film d'Alain Resnais. Chaque joueur peut retirer autant d'allumettes qu'il le veut sur une ligne seulement. Le perdant est celui qui retire la dernière allumette.

Ce jeu de Marienbad est modélisable par un graphe orienté comme l'indique la figure 4. Sur cette figure, on considère que les joueurs jouent alternativement en se déplaçant sur le graphe : un des joueurs est initialement sur la position de départ s, quatre allumettes sont reparties sur deux rangées. En suivant l'arête (s, b), le joueur fait l'action de retirer les deux alumettes d'une rangée. En suivant l'arête (s, a), le joueur fait l'action de retirer un allumette d'une rangée.

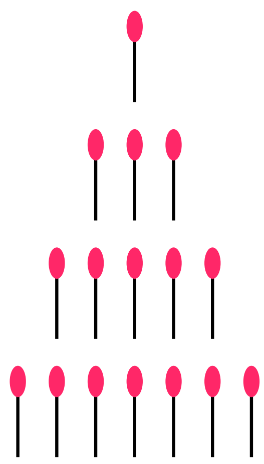


FIGURE 3 – Jeu de Marienbad avec des allumettes

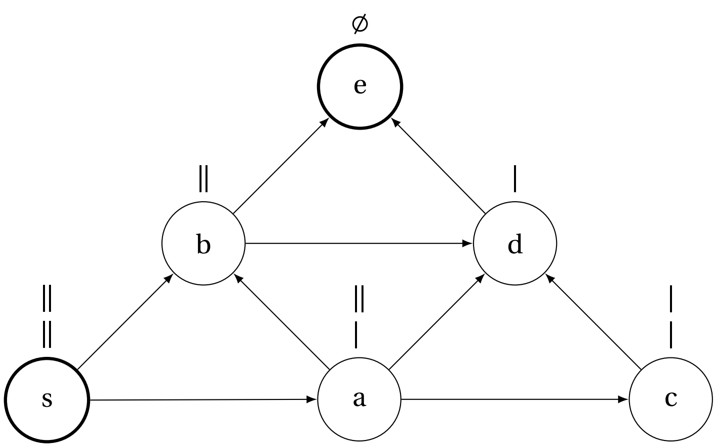


FIGURE 4 – Modélisation par graphe orienté acyclique (DAG) d'une partie de jeu de Marienbad avec deux rangées de deux allumettes au départ. On peut jouer dessus avec un pion placé en *s* au départ. Puis chaque joueur fait avancer le pion d'un saut sur le graphe en sélectionnant un successeur en suivant les arcs. Le joueur qui doit jouer en position *e* a perdu (convention normale).

E Noyau d'un graphe de jeu --→ Hors Programme

Déterminer une stratégie pour gagner au jeu de Nim revient à chercher à distinguer les positions gagnantes des positions gagnantes sur un graphe orienté acyclique comme celui de la figure 4. Cette distinction est intimement liée à la notion de **noyau** en théorie des graphes.

■ **Définition 12 — Noyau d'un graphe.** Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Un sous-ensemble de sommets $K \subset S$ est un **noyau** du graphe si :

— aucun sommet de K n'a de successeur dans K.

$$\forall s \in K, \forall (s, s') \in A \implies s' \notin K \text{ (stabilité interne)} \tag{1}$$

— tout sommet n'appartenant pas à K possède au moins un successeur dans K.

$$\forall s \notin K, \exists s' \in K \text{ tel que } (s, s') \in A \text{ (stabilité externe)} \tag{2}$$

Théorème 1 — Noyau et positions gagnantes. Pour un jeu d'accessibilité se terminant par une position sans successeur (convention normale) :

— les sommets du **noyau** correspondent aux **positions perdantes** (P-positions).

— les sommets hors du noyau correspondent aux **positions gagnantes** (N-positions).

M **Méthode 1 — Stratégie gagnante et noyau** Pour gagner, il suffit alors de répéter les opérations suivnates jusqu'à ce que l'adversaire se retrouve bloqué sur un sommet du noyau sans successeur :

— si le joueur est sur un sommet $s \notin K$, il existe un coup vers $s' \in K$ qu'il faut jouer.

— si l'adversaire se retrouve en $s' \in K$. Quel que soit son coup, il sera forcé d'aller vers un sommet hors du noyau ($s'' \notin K$).

■ **Exemple 4 — Application au jeu de Marienbad de la figure 4.** Pour identifier le noyau K du graphe, on procède en remontant depuis la fin :

— e est un sommet sans successeurs. Dans la convention de jeu normale (le dernier à jouer gagne, donc celui qui ne peut plus jouer a perdu), e est une position perdante. $e \in K$.

— d et b sont des sommets qui possèdent un arc vers e. Puisqu'ils peuvent atteindre le noyau, ce sont des positions gagnantes. $d, b \notin K$.

— Depuis le sommet c, les coups possibles mènent uniquement vers d. Comme d n'est pas dans le noyau, et qu'il n'y a pas d'autre option, le joueur en c ne peut pas atteindre le noyau. De plus, c ne peut pas atteindre e directement. Donc, $c \in K$.

— Depuis a il est possible d'aller vers c qui est dans le noyau. Donc $a \notin K$.

— Depuis s, on peut aller vers b ou a. Aucun de ces deux sommets n'est dans le noyau. Le joueur partant de s est forcé d'envoyer l'adversaire sur des positions gagnantes (a ou b). Par conséquent, $s \in K$.

On a donc $K = \{s, c, e\}$. Par conséquent, il n'est pas judicieux d'être le premier joueur... Si jamais le joueur est en a, il faut jouer vers c sinon, c'est perdu!

F Arène de jeu d'un jeu d'accessibilité

■ **Exemple 5 — Graphe orienté biparti d'un jeu de marienbad .** Une **autre** modélisation du jeu de Marienbad évoqué précédemment peut se faire en utilisant un **graphe orienté biparti** comme le montre la figure 5 :

— chaque sommet représente une position dans le jeu.

— chaque sommet est possédé par l'un des deux joueurs : si le jeu se trouve sur un sommet d'un joueur, cela signifie que c'est à lui de jouer.

— jouer un coup consiste à suivre un arc.

■ **Définition 13 — Arène de jeu.** Le graphe $G = (V_1, V_2, E)$ est nommé arène de jeu si est biparti si $G = (V = V_1 \cup V_2, E)$ est un graphe orienté biparti et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Sur cette arène, le joueurs se répartissent les sommets : le joueur J_1 contrôle[a] V_1, le joueur J_2 V_2.

a. cela signifie que c'est à lui de jouer

■ **Définition 14 — Partie.** Une partie est un chemin sur l'arène de jeu : à chaque tour, le joueur J_1 en $v_i \in V_1$ choisit une arête de E dont le premier sommet est v_i et le second un sommet $v_j \in V_2$. J_2 choisit ensuite à partir de v_j le sommet suivant dans V_1. Une partie en n coups s'écrit donc $(v_0, \ldots, v_i, \ldots, v_{n-1})$.

■ **Définition 15 — Condition de gain.** Une condition de gain pour un joueur J_i sur une arène de jeu $G = (V, E)$ est un sous-ensemble C_i^g de V_i. La partie est remportée par le joueur J_i si celui-ci visite un sommet de C_i^g en premier.

■ **Définition 16 — Condition de victoire.** Une condition de victoire d'un joueur J_i est un sous-ensemble de toutes les parties possibles $\mathcal{P}$ remportées par ce joueur. On la note :

$$C_i^v = \left\{\mathcal{P}, \mathcal{P} \text{ visite un sommet de } C_i^g\right\} \tag{3}$$

■ **Exemple 6 — Condition de gain et de victoire pour le jeu de Nim.** Pour le jeu de Nim de la figure 5 en choisissant la variante **misère** et J_1 comme premier joueur, alors $C_1^g = \{c_1\}$ est une condition de gain pour J_1. De plus, $C_1^v = \{(s_1, a_2, c_1)\}$ est la condition de victoire de J_1.

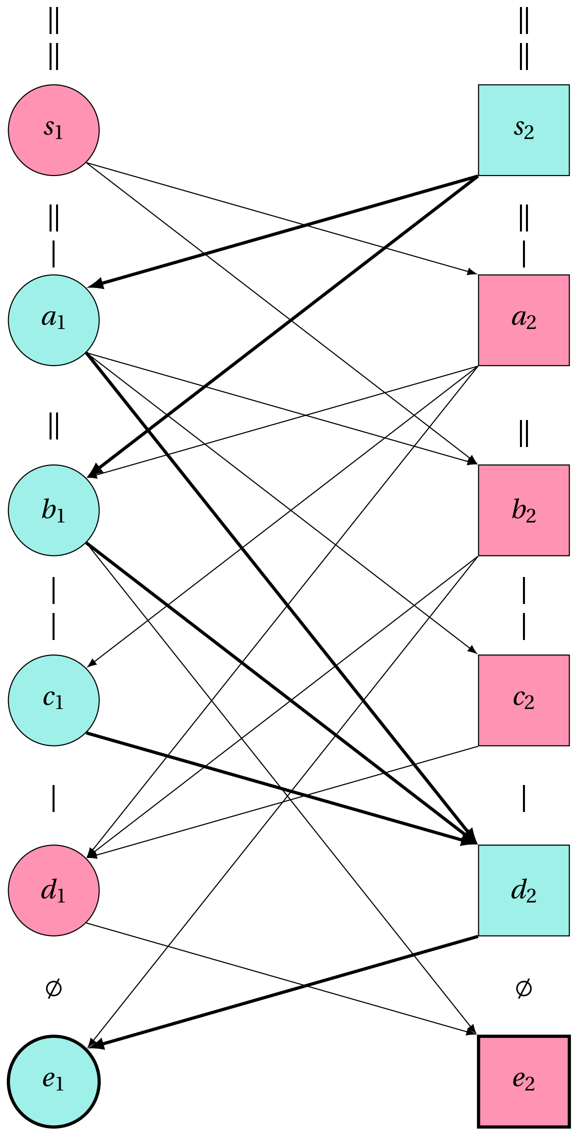


FIGURE 5 – Modélisation par graphe orienté biparti d'un jeu de Nim, variante **misère** : le dernier à jouer a perdu. Les sommets des joueurs 1 et 2 sont distingués par des cercles (1) et des carrés (2). La couleur cyan représente l'attracteur du joueur J_1 : $\mathcal{A}_1 = \{s_2, a_1, b_1, c_1, d_2, e_1\}$. On voit donc que 1 n'a pas intérêt à commencer à jouer dans cette configuration. Il en est de même pour le joueur 2 dont l'attracteur en rouge.

G Stratégies et positions

■ Définition 17 — Stratégie sans mémoire. Soit $G = (V, E)$ une arène de jeu. On note $V_i^{>0}$ l'ensemble des sommets contrôlés par le joueur $i \in \{1, 2\}$ de degré sortant non nul. Une stratégie est une application $\phi : V_i^{>0} \to V$ telle que :

$$\forall v \in V_i^{>0}, (v, \phi(v)) \in E \tag{4}$$

Cette stratégie est sans mémoire car elle ne dépend que du sommet courant et pas des sommets précédents de la partie.

R Une stratégie sans mémoire permet donc de calculer le prochain coup à jouer d'après la position courante. Le joueur J_i suit la stratégie ϕ lors d'une partie $\mathcal{P} = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ si $\forall j \in [\![0, n]\!], v_j \in V_i^{>0} \Longrightarrow v_{j+1} = \phi(v_j)$

■ Définition 18 — Stratégie gagnante. Une stratégie ϕ est gagnante pour le joueur J_i depuis le sommet $v_0 \in V_i$ si toute partie jouée depuis v_0 par J_i en suivant ϕ est gagnante pour J_i.

■ Définition 19 — Position gagnante. Soit $G = (V = V_1 \cup V_2, E)$ un jeu d'accessibilité à deux joueurs. Un sommet $v \in V_i$ est appelé position gagnante pour le joueur J_i si celui-ci possède une stratégie gagnante depuis v.

■ Exemple 7 — Position gagnante du jeu de Nim. Sur le jeu de la figure 5, le sommet a_1 est une position gagnante pour J_1. Reste à trouver la stratégie ϕ... Le sommet s_1 n'est pas une position gagnante pour J_1.

H Attracteurs

Pour gagner une partie d'un jeu d'accessibilité, il semble donc logique de chercher les positions gagnantes et une stratégie associée. La notion d'attracteur a été développée pour construire l'ensemble des positions gagnantes. L'idée est de construire cet ensemble en partant de la condition de gain, en remontant les arc du graphe à l'envers et en ne conservant que les positions gagnantes.

■ Définition 20 — Suite des ensembles attracteurs. Soit $G = (V = V_1 \cup V_2, E)$ une arène d'un jeu d'accessibilité. On définit par induction la suite des attracteurs $(\mathcal{A}_j^1)_{j \in \mathbb{N}}$ du joueur J_1, c'est-à-dire des ensembles des sommets de V à partir desquels le joueur J_1 peut forcer la partie à arriver en C_1^g, de la manière suivante :

$$\mathcal{A}_0^1 = C_1^g \quad \text{si } j = 0 \tag{5}$$

$$\mathcal{A}_{j+1}^1 = \mathcal{A}_j^1 \cup \{v \in V_1, \exists v' \in \mathcal{A}_j^1, (v,v') \in E\} \cup \{v \in V_2, \forall v' \in V_1, (v,v') \in E \Rightarrow v' \in \mathcal{A}_j^1\} \forall j \geqslant 0 \tag{6}$$

$$\tag{7}$$

Formulé simplement, le premier terme de cette suite est la condition de gain du joueur, c'est-à-dire les sommets qui lui donnent la victoire. Puis, le terme $j+1$ de la suite est l'union :

- du terme $\mathcal{A}_j^1$,
- des sommets de V_1 qu'un arc peut mener à une position gagnante de $\mathcal{A}_j^1$ dans V_2,
- des sommets de V_2 qui font obligatoirement aboutir à une position gagnante de V_1.

■ **Définition 21 — Attracteur du joueur J_i.** L'attracteur du joueur i est l'ensemble des sommets d'une arène de jeu défini par :

$$\mathcal{A}^i = \bigcup_0^{+\infty} \mathcal{A}_j^i. \tag{8}$$

Théorème 2 — L'attracteur du joueur J_i contient exactement toutes les positions gagnantes de J_i.

Démonstration. On procède par récurrence sur le rang d'un sommet de G, une fonction $r : V \to \mathbb{N}$ définie comme suit :

$$\forall v \in V, r(v) = \min\{j, v \in \mathcal{A}_j^i\} \tag{9}$$

Pour un sommet n'appartenant pas à l'attracteur $\mathcal{A}$, le rang est infini. Cette définition est possible car la suite $(\mathcal{A}_j^1)_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion.

La propriété à démontrer est la suivante : $\mathcal{P}_j$: *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, les sommets de rang j sont des positions gagnantes du joueur J_1.*

- Initialisation $\mathcal{P}_0$: pour $j = 0$, $\mathcal{A}_0^1 = C_1^g$, donc tous les sommets de $\mathcal{A}_0^1$ sont des positions gagnantes.
- Hérédité : on suppose que, pour un certain entier naturel j, l'ensemble $\mathcal{A}_j^1$ ne contient que des positions gagnantes de J_1 ($\mathcal{P}_j$ est vraie). Considérons maintenant un élément v de l'ensemble $\mathcal{A}_{j+1}$ de rang $j+1$. Supposons de plus[1] que v n'appartient pas à $\mathcal{A}_j^1$. Il reste alors deux possibilités :
  1. Si $v \in V_1$, alors par définition de l'ensemble, il existe un arc qui amène à une position gagnante de $\mathcal{A}_j^1$. Donc, v est une position gagnante.
  2. Si $v \in V_2$, alors par définition de l'ensemble, tous les arcs de l'arène l'amène vers une position gagnante de $\mathcal{A}_j^1$. C'est donc une position gagnante.

1. sinon c'est trivial

— Conclusion : comme le nombre de sommet du graphe est fini et que les ensembles $\mathcal{A}_j^1$ ne contiennent que des positions gagnantes, l'attracteur $\mathcal{A}$ ne possède donc que des positions gagnantes.

■

(R) On peut maintenant construire une stratégie **gagnante** en considérant la stratégie sans mémoire ϕ qui, au fur et à mesure de la partie, fait diminuer le rang de la position courante :

$$\forall v_j \in \mathcal{A}_j^1 \cap V_1, v_{j+1} = \phi(v_j), r(v_{j+1}) < r(v_j) \tag{10}$$

Celle-ci est gagnante, car, en choisissant de diminuer le rang de la position suivante, on se rapproche de la victoire.

★ I Solution des jeux de Nim et impartiaux --→ Hors Programme

Les jeux de Nim ont permis à Sprague et Grundy d'élaborer une théorie mathématique qui donnent la solution d'un jeu d'acessibilité en se ramenant à un jeu de Nim sans avoir à explorer tout l'arbre de jeu, comme on doit le faire pour calculer un attracteur.

L'intérêt du nombre de Grundy ou **nimber** est donc de permettre la détermination de la stratégie optimale sans avoir à explorer l'intégralité du graphe de jeu. Il suffit de connaître la position courante, par exemple les tailles respectives des n piles d'allumettes $(x_1,\dots,x_n)$.

La résolution d'un jeu d'accessibilité repose alors sur deux étapes clés :

— **Équivalence :** On montre que le jeu étudié est équivalent à un jeu de Nim dans une position donnée $(x_1,\dots,x_n)$.

— **Décomposition :** On considère ce jeu comme une *somme* de n jeux de Nim élémentaires, chacun composé d'une seule pile de taille x_i. On définit alors une règle d'addition spécifique pour calculer la valeur globale du jeu à partir de ses composantes.

Cette opération, introduite par Bouton en 1901, correspond mathématiquement à l'opérateur OU exclusif (XOR) bit à bit.

Théorème 3 — Bouton, 1901. Une position $(x_1,\dots,x_n)$ d'un jeu de Nim est une position perdante (P-position) si et seulement si la somme de Nim de ses composantes est nulle :

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n = 0 \tag{11}$$

À l'inverse, si cette somme est non nulle, la position est gagnante (N-position).

■ **Définition 22 — Nombre de Grundy d'un jeu de Nim.** Le nombre de Grundy est la somme $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$ du théorème 3 en utilisant le ou exclusif sur la position du jeu.

Mais on peut également le définir récursivement :

— si la pile du jeu de Nim est en position finale, le nombre de Grundy vaut 0,

— sinon, le nombre de Grundy d'une position donnée $(x_1, \ldots, x_n)$ est le plus petit entier positif ou nul qui n'apparaît pas dans la liste des nombres de Grundy des positions qui suivent immédiatement la position donnée.

Ceci s'écrit parfois :

$$\gamma = \operatorname{mex}(x_1, \ldots, x_n) \tag{12}$$

où la fonction mex (**m**inimum **ex**cluded) renvoie le plus petit entier naturel n'appartenant pas à une partie de $\mathbb{N}$.

■ **Exemple 8 — Fonction** mex. Les résultats suivants éclairent le fonctionnement de cette fonction :

— $\operatorname{mex}(1, 2) \to 0$

— $\operatorname{mex}(0, 1, 3, 7, 9) \to 2$

Théorème 4 — Sprague et Grundy . Tout jeu d'accessibilité $\mathcal{J}$ est équivalent à un jeu de Nim $\mathcal{N}$.

Pour une position de $\mathcal{J}$ donnée, il existe une position de $\mathcal{N}$ dont le nombre de Grundy est γ. Cette position est équivalente à celle d'un jeu de Nim à un seul tas comportant γ allumettes.

R Les théorèmes 3 et 4 induisent la stratégie gagnante pour gagner à un jeu d'accessibilité : il s'agit de celle qui consiste à choisir la position suivante de telle manière à ce que son nombre de Grundy soit nul.

■ **Exemple 9 — Utilisation du nombre de Grundy.** Ces théorèmes permettent d'affirmer que la position de départ de la figure 5 est une position perdante, car le nombre de Grundy est nul : $10_2 \oplus 10_2 = 00_2$. Il ne reste plus qu'à vous entraîner au calcul en binaire ;-)