Les mots des graphes

À la fin de ce chapitre, je sais :

☞ utiliser des mots pour décrire les graphes
☞ énumérer quelques graphes remarquables
☞ distinguer un parcours d'une chaîne et d'un cycle
☞ distinguer un graphe orienté, non orienté, pondéré et un arbre

La théorie des graphes en mathématiques discrètes étudie les graphes comme objet mathématique. En informatique, en plus de les étudier, on a la chance de pouvoir les programmer, de jouer avec pour résoudre une infinité de problèmes. Les domaines d'application des graphes sont innombrables : les jeux, la planification, l'organisation, la production, l'optimisation, les programmes et modèles informatiques, les trajets dans le domaine des transports, le tourisme, la logistique ou tout simplement la géométrie... **Les graphes sont des objets simples que tout le monde peut dessiner.** Même s'il ne vous apparaît pas immédiatement que résoudre un sudoku est équivalent à la coloration d'un graphe, la pratique de ces derniers vous amènera à regarder le monde différemment.

A Typologie des graphes

■ **Définition 1 — Graphe.** Un graphe G est un couple $G = (V, E)$ où V est un ensemble fini et non vide d'éléments appelés sommets et E un ensemble de paires d'éléments de V appelées arêtes.

Vocabulary 1 — Graph ⇜⇝ Graphe

Vocabulary 2 — Vertex (plural : vertices) ⇜⇝ Sommet

Vocabulary 3 — Edge ⇜⇝ Arête

La notation $G = (V, E)$ dérive donc directement des premières lettres des mots anglais. La définition 1 est en fait celle des **graphes simples et non orientés : ce sont eux que l'on considèrera la plupart du temps.**

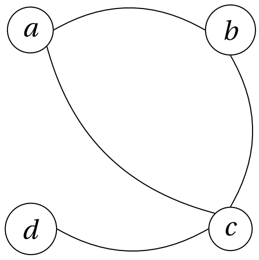

FIGURE 1 – Graphe simple

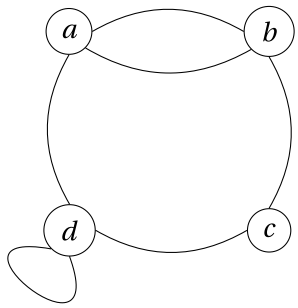

FIGURE 2 – Multigraphe à une boucle est deux arêtes parallèles

■ **Définition 2 — Boucle.** Une boucle est une arête reliant un sommet à lui-même.

■ **Définition 3 — Arêtes parallèles.** Deux arêtes sont parallèles si elles relient les mêmes sommets.

■ **Définition 4 — Graphe simple.** Un graphe simple est un graphe sans arêtes parallèles et sans boucles.

■ **Définition 5 — Multigraphe.** Un multigraphe est un graphe avec des boucles et des arêtes parallèles.

■ **Définition 6 — Graphe pondéré.** Un graphe $G = (V, E)$ est pondéré s'il existe une application $w : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Le poids de l'arête ab vaut $w(ab)$.

■ **Définition 7 — Graphe orienté.** Un graphe $G = (V, E)$ est orienté si ses arêtes sont orientées selon une direction. Les arêtes sont alors désignées par le mot arc.

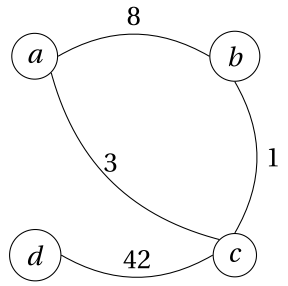

FIGURE 3 – Graphe pondéré

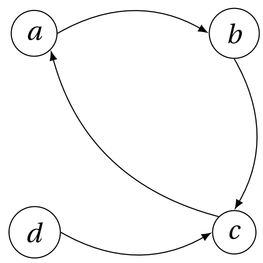

FIGURE 4 – Graphe orienté

■ **Définition 8 — Graphe complet.** Un graphe $G = (V, E)$ est complet si et seulement si une arête existe entre chaque sommet, c'est-à-dire si tous les sommets sont voisins.

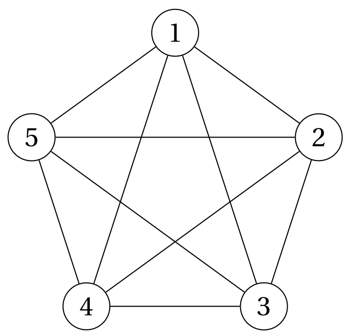

FIGURE 5 – Graphe complet K_5

En hommage à Kuratowski, on désigne les graphes complets par la lettre K_o indicée par l'ordre du graphe (cf. définition 12). La figure 5 représente le graphe complet d'ordre cinq K_5. Kuratowski a notamment démontré [**kuratowski_sur_1930**] que K_5 n'est pas planaire : quelle que soit la manière de représenter ce graphe sur un plan, des arêtes se croiseront. Le graphe de la figure 1 est planaire.

■ **Définition 9 — Graphe planaire.** Une graphe planaire est un graphe que l'on peut représenter sur un plan sans qu'aucune arête ne se croise.

■ **Définition 10 — Graphe biparti.** un graphe $G = (V, E)$ est biparti si l'ensemble V de ses sommets peut être divisé en deux sous-ensembles disjoints U et W tels que chaque arête de E ait une extrémité dans U et l'autre dans W.

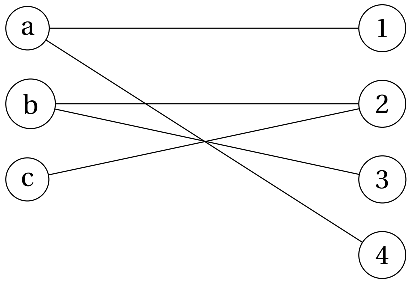

FIGURE 6 – Graphe biparti

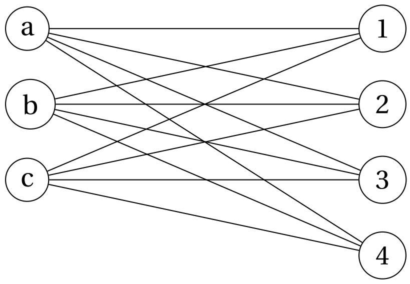

FIGURE 7 – Graphe biparti complet K_{34}

B Implémentation des graphes

On peut représenter graphiquement un graphe comme sur les figures précédentes 1, 3 ou 4. On peut également chercher à les implémenter sous la forme d'ensembles, de matrices ou de listes.

■ **Exemple 1 — Graphe et ensembles.** Le graphe de la figure 1 est un graphe simple que l'on peut noter $G = \{V = \{a, b, c, d\}, E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}\}$ ou plus simplement $G = \{V = \{a, b, c, d\}, E = \{ab, ac, bc, cd\}\}$.

■ **Définition 11 — Adjacent ou voisins.** Deux sommets a et b sont adjacents ou voisins ă si le graphe contient une arête ab. Deux arêtes sont adjacentes ou voisines s'il existe un sommet commun à ces deux arêtes.

■ **Exemple 2 — Graphe et matrice d'adjacence.** Grâce au concept d'adjacence, on peut représenter un graphe par une matrice d'adjacence. Pour construire une telle matrice, il faut d'abord ordonner arbitrairement les sommets du graphes. Par exemple, pour le graphe de la figure 1, on choisit l'ordre (a, b, c, d). Les coefficients m_{ij} de la matrice d'adjacence sont calculés selon la règle suivante :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe une arête entre le sommet } i \text{ et le sommet } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

Pour le graphe de la figure 1, on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

La matrice d'adjacence d'un graphe simple non orienté est de diagonale nulle (pas de boucles) et symétrique.

La matrice d'un graphe orienté n'est pas forcément symétrique.

Dans le cas d'un graphe pondéré, on peut remplacer le coefficient de la matrice par le poids de l'arête considérée.

En Python, on pourra utiliser une liste de liste ou un tableau numpy pour implémenter une matrice d'adjacence.

■ **Exemple 3 — Graphe et liste d'adjacence.** On peut représenter un graphe par la liste des voisins de chaque sommet. Par exemple, si on dénote les sommets a, b, c et d par les indices 1, 2, 3, et 4, alors le graphe de la figure 1 peut être décrit par la liste `[[2,3], [1,3], [1,2,4], [3]]`. Si on choisit d'utiliser un dictionnaire, alors on peut l'écrire : `{1:[2,3], 2:[1,3], 3:[1,2,4], 4:[3]}`.

Pour résumé, en Python, on a le choix de la représentation :

```python
G = [[2,3], [1,3], [1,2,4], [3]]
G = {1:[2,3], 2: [1,3], 3:[1,2,4], 4:[3]}
n = len(G)   # graph order
```

Par ailleurs, si le graphe est pondéré, la liste d'adjacence est une liste de listes de tuples, chaque tuple étant un couple (sommet, poids). Par exemple, en OCaml :

```ocaml
type adj_list_graph = (int * int) list list;;

let lcg = [[(2,1); (1,7)];
          [(3,4); (4,2); (2,5); (0,7)];
          [(5,7); (4,2); (1,5); (0,1)];
          [(4,5); (1,4)];
          [(5,3); (3,5); (2,2); (1,2)];
          [(4,3); (2,7)]];;
```

R Ni la représentation graphique de la figure 1, ni la matrice d'adjacence M de l'équation 2, ni les listes d'adjacence ne sont des représentations uniques. On peut tracer différemment le graphe ou choisir un autre ordre pour les sommets et obtenir une autre matrice ou une autre liste d'adjacence. Cela traduit l'isomorphisme des graphes.

R Le choix d'une implémentation ou d'une autre est avant tout lié aux choix des algorithmes que l'on va utiliser. La structure de donnée utilisée est souvent le facteur clef qui permet d'améliorer ou de détériorer les performances d'un algorithme.

C Caractérisation structurelle des graphes

■ **Définition 12 — Ordre d'un graphe.** L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets. Pour $G = (V, E)$, l'ordre du graphe vaut donc le cardinal de l'ensemble V que l'on note généralement $|V|$. On note parfois l'ordre d'un graphe $|G|$.

R Si $|V| = n$, alors une matrice d'adjacence de $G = (V, E)$ est de dimension $n \times n$. Une liste d'adjacence de G a pour taille n.

■ **Définition 13 — Taille d'un graphe.** La taille d'un graphe désigne le nombre de ses arêtes. On le note $|E|$ et parfois $||G||$

■ **Définition 14 — Voisinage d'un sommet.** L'ensemble de voisins d'un sommet a d'un graphe $G = (V, E)$ est le voisinage de ce sommet. On le note généralement $\mathcal{N}_G(a)$.

■ **Définition 15 — Incidence.** Une arête est dite incidente à un sommet si ce sommet est une des extrémités de cette arête

■ **Définition 16 — Degré d'un sommet.** Le degré $d(a)$ d'un sommet a d'un graphe G est le nombre d'arêtes incidentes au sommet a. C'est aussi $|\mathcal{N}_G(a)|$.

■ **Définition 17 — Degrés d'un graphe orienté.** Dans un graphe orienté G et pour un sommet a de ce graphe, on distingue :

- le degré entrant $d_+(a)$: le nombre d'arêtes incidentes à a et dirigées sur a,
- le degré sortant $d_-(a)$: le nombre d'arêtes incidentes qui sortent de a et qui sont dirigées vers un autre sommet.

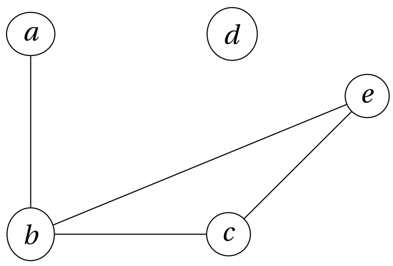

FIGURE 8 – Graphe d'ordre cinq, de taille quatre et de séquence `[0,1,2,2,3]`. Le sommet d est isolé. Ce graphe n'est ni complet ni connexe.

■ **Définition 18 — Sommet isolé.** Un sommet isolé est un sommet dont le degré vaut zéro.

■ **Définition 19 — Égalité de deux graphes.** Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont égaux si et seulement si $V = V'$ et $E = E'$.

■ **Définition 20 — Séquence des degrés.** La séquence des degrés d'un graphe G est la liste ordonnée par ordre croissant des degrés des sommets de G.

Sur la figure 8, on a représenté un graphe d'ordre cinq avec un sommet isolé. Ce graphe n'est pas connexe ni complet et sa séquence des degrés est `[0,1,2,2,3]`.

■ **Définition 21 — Graphe complémentaire.** Soit $G = (V, E)$ un graphe. On dit que $\overline{G} = (V, \overline{E})$ est le complémentaire de G si les arêtes de $\overline{G}$ sont les arêtes possibles qui ne figurent pas dans G. On note ces arêtes $\overline{E}$.

Par exemple, le complémentaire du graphe 8 est représenté sur la figure 9.

D Isomorphisme des graphes

Considérons les graphes des figures 10 et 11. Ils ne diffèrent que par les noms des sommets et la signification des arêtes. Si on ne prête pas attention aux noms des sommets ni à la signification des arêtes, ces deux graphes sont identiques, leurs caractéristiques sont les mêmes :

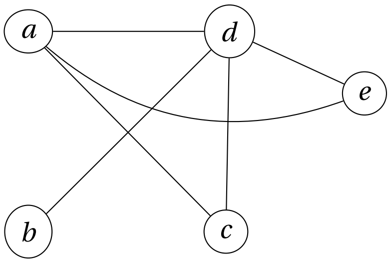

FIGURE 9 – Graphe complémentaire du graphe de la figure 8

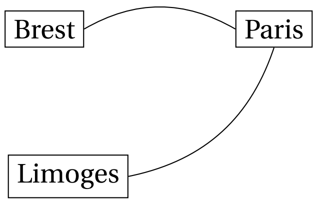

FIGURE 10 – Graphe d'ordre trois, de taille deux et de séquence [1,1,2]

ordre, degré, taille. On dit qu'ils sont isomorphes ou qu'ils sont identiques à un isomorphisme près. Finalement, c'est la structure du graphe telle qu'on peut la caractériser qui importe, pas son apparence.

■ **Définition 22 — Graphes isomorphes.** Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont isomorphes si et seulement s'il existe une bijection σ de V vers V' pour laquelle $\sigma(E) = E'$, c'est à dire qu'à chaque arête ab de E correspond une seule arête de E' notée $\sigma(a)\sigma(b)$.

■ **Exemple 4 — Isomorphes et bijection.** Considérons les deux graphes G et G' représentés sur les figures 12 et 13.

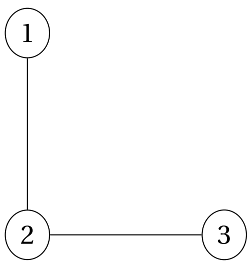

FIGURE 11 – Graphe d'ordre trois, de taille deux et de séquence [1,1,2]

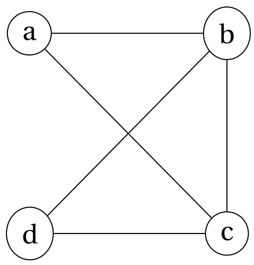

FIGURE 12 – Graphe d'exemple $G = (V = \{a, b, c, d\}, E = \{ab, ac, bc, bd, dc\})$

On peut les définir par des ensembles de la manière suivante :

$$G = (V = \{a, b, c, d\}, E = \{ab, ac, bc, bd, dc\}) \tag{3}$$
$$G' = (V' = \{1, 2, 3, 4\}, E' = \{12, 14, 24, 23, 43\}) \tag{4}$$

Formulé de la sorte, on pourrait croire que ces deux graphes ne sont pas isomorphes. Pourtant, c'est le cas. Comment le montrer ? En exhibant une bijection ad-hoc !

On cherche donc une bijection entre les deux graphes en comparant les degrés des sommets et en observant leurs arêtes.

On peut proposer la bijection $\sigma : V \longrightarrow V'$ telle que :

$$\sigma(a) = 1 \tag{5}$$
$$\sigma(b) = 2 \tag{6}$$
$$\sigma(c) = 4 \tag{7}$$
$$\sigma(d) = 3 \tag{8}$$

On a également la correspondance des arêtes :

$$\sigma(a)\sigma(b) = 12 \tag{9}$$
$$\sigma(a)\sigma(c) = 14 \tag{10}$$
$$\sigma(b)\sigma(c) = 24 \tag{11}$$
$$\sigma(b)\sigma(d) = 23 \tag{12}$$
$$\sigma(c)\sigma(d) = 43 \tag{13}$$

R On peut compter le nombre de graphes isomorphes pour un ordre donné. Par exemple, il y a deux graphes isomorphes d'ordre 2 et 8 d'ordre 3.

E Chaînes, cycles et parcours

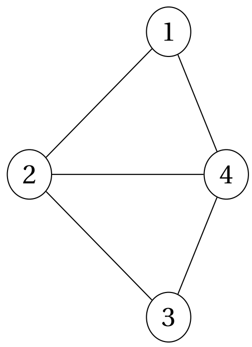

FIGURE 13 – Graphe d'exemple $G' = (V' = \{1, 2, 3, 4\}, E' = \{12, 14, 24, 23, 43\})$

■ **Définition 23 — Chaîne.** Une chaîne reliant deux sommets a et b d'un graphe non orienté est une suite finie d'arêtes consécutives reliant a à b. Dans le cas d'un graphe orienté on parle de chemin.

■ **Définition 24 — Chaîne élémentaire.** Une chaîne élémentaire ne passe pas deux fois par un même sommet : tous ses sommets sont distincts.

■ **Définition 25 — Chaîne simple.** Une chaîne simple ne passe pas deux fois par une même arête : toutes ses arêtes sont distinctes.

■ **Définition 26 — Longueur d'une chaîne.** La longueur d'une chaîne $\mathcal{C}$ est :

- le nombre d'arêtes que comporte la chaîne dans un graphe simple non pondéré,
- la somme des poids des arêtes de la chaîne, c'est à dire $\sum_{e \in \mathcal{C}} w(e)$, dans le cas d'un graphe simple pondéré dont la fonction de valuation est w.

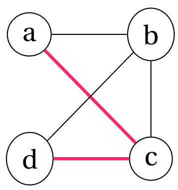

FIGURE 14 – Exemple de chaîne simple reliant a à d en rouge

■ **Définition 27 — Cycle.** Un cycle est une chaîne simple dont les deux sommets extrémités sont identiques.

La longueur d'un cycle est le nombre d'arêtes qu'il contient. Dans le cas des graphes orientés on parle de circuit.

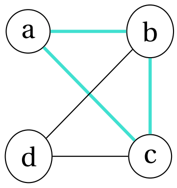

FIGURE 15 – Exemple de cycle en turquoise

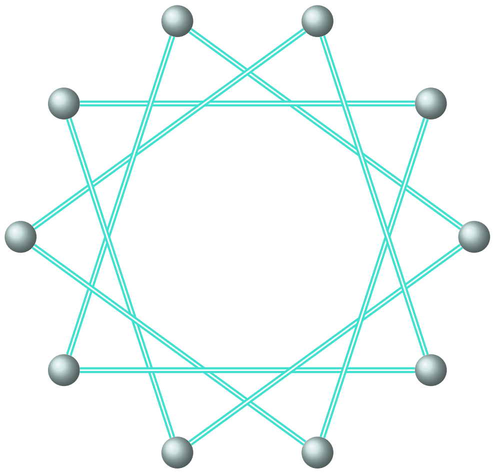

FIGURE 16 – Saurez-vous trouver le cycle eulérien de ce graphe ?

■ **Définition 28 — Chaîne eulérienne.** Une chaîne eulérienne est une chaîne simple qui passe par toutes les arêtes d'un graphe.

■ **Définition 29 — Cycle eulérien.** Un cycle eulérien est un cycle passant exactement une fois par chaque arête d'un graphe.

■ **Définition 30 — Cycle hamiltonien.** Un cycle hamiltonien est un sous-graphe couvrant qui est un cycle. Autrement dit, c'est un cycle qui passe par tous les sommets d'un graphe.

R Rowan Hamilton était un astronome irlandais qui a inventé le jeu icosien [a] en 1857.

a. The icosian game, jeu équivalent à l'icosagonal d'Édouard Lucas [**lucas_recreations_1883**]

R Les graphes complets K_n sont eulériens et hamiltoniens : ils possèdent à la fois un cycle eulérien et un cycle hamiltonien.

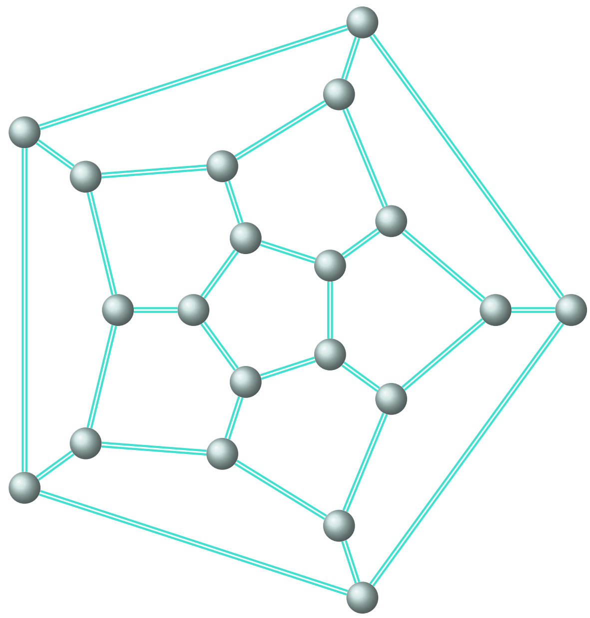

FIGURE 17 – Graphe du jeu icosien et du dodécahèdre (solide régulier à 12 faces pentagonales). C'est un graphe cubique car chaque sommet possède trois voisins. Ce graphe possède un cycle hamiltonien. Saurez-vous le trouver ?

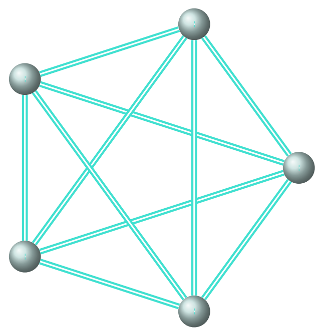

FIGURE 18 – Graphe K_5 : saurez-vous trouver des cycles hamiltonien et eulérien de ce graphe ?

R On peut également définir une chaîne comme le graphe d'ordre n isomorphe au graphe $P_n = \{V_n = \{1,2,\dots,n\}, E_n = \{\{1,2\},\{2,3\},\dots\{n-1,n\}\}\}$. Par convention, on pose $P_1 = \{V_1 = \{1\}\}$ et $E_1 = \emptyset$. Les extrémités de la chaînes sont les deux sommets de degré 1.

Avec la même approche et les mêmes notations, un cycle devient alors un graphe isomorphe au graphe $C_n = \{V_n, E'_n = E_n \cup \{n,1\}\}$, c'est à dire que la chaîne finit là où elle a commencé. L'ordre de C_n est supérieur ou égal à trois.

■ **Définition 31 — Parcours.** Un parcours d'un graphe G est une liste non vide et ordonnées de sommets de G telles que deux sommets consécutifs sont adjacents dans G. Il peut y avoir des répétitions de sommets dans un parcours, mais il n'y a pas de répétitions d'arêtes dans un cycle ou une chaîne simple.

Par exemple, $\pi = \{a, b, c, d, b\}$ est un parcours sur le graphe de la figure 15.

F Sous-graphes et connexité

■ **Définition 32 — Graphe connexe.** Un graphe $G = (V, E)$ est connexe si et seulement si pour tout couple de sommets (a, b) de G, il existe une chaîne d'extrémités a et b.

Par exemple, le graphe de la figure 1 est connexe, mais pas celui figure 8.

■ **Définition 33 — Sous-graphe.** Soit $G = (V, E)$ un graphe, alors $G' = \{V', E'\}$ est un sous-graphe de G si et seulement si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$.

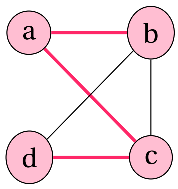

FIGURE 19 – Exemple de sous-graphe couvrant G en rouge : $G = (V = \{a, b, c, d\}, E = \{ab, ac, cd\})$

■ **Définition 34 — Sous-graphe couvrant.** G' est un sous-graphe couvrant de G si et seulement si G' est un sous-graphe de G et $V' = V$.

■ **Définition 35 — Sous-graphe induit.** Soit $S \subset V$ non vide. G' est un sous-graphe de G induit par S et on note $G[S]$ si et seulement si G' admet pour arêtes celles de G dont les deux extrémités sont dans S.

■ **Définition 36 — Clique.** Une clique est d'un graphe $G = (V, E)$ un sous-ensemble $C \subseteq V$ des sommets dont le sous-graphe induit $G[C]$ est complet.

Sur la figure 20, l'ensemble $S = \{b, c, d\}$ est un clique.

G Coloration de graphes

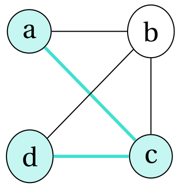

FIGURE 20 – Exemple de sous-graphe induit par les sommets $S = \{a, c, d\}$ en turquoise. $G[S] = (V = \{a, c, d\}, E = \{ac, cd\})$

■ **Définition 37 — Coloration.** Une coloration d'un graphe simple est l'attribution d'une couleur aux sommets de ce graphe.

■ **Définition 38 — Coloration valide.** Une coloration est valide lorsque deux sommets adjacents n'ont jamais la même couleur.

■ **Définition 39 — Nombre chromatique.** Le nombre chromatique d'un graphe G est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour obtenir une coloration valide de ce graphe. On le note généralement $\chi(G)$.

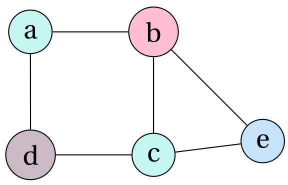

FIGURE 21 – Exemple de 4-coloration valide d'un graphe. Cette coloration n'est pas optimale.

■ **Définition 40 — k-coloration.** Lorsqu'une coloration de graphe utilise k couleurs, on dit d'elle que c'est une k-coloration.

■ **Définition 41 — Coloration optimale.** Une $\chi(G)$-coloration valide est une coloration optimale d'un graphe G.

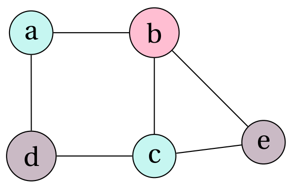

FIGURE 22 – Exemple de 3-coloration valide d'un graphe. Cette coloration est optimale.

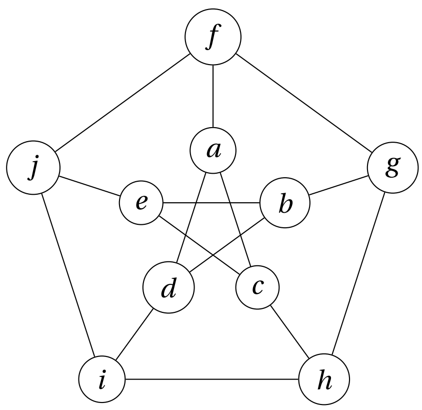

FIGURE 23 – Graphe de Petersen : saurez-vous proposer une coloration optimale de ce graphe sachant que son nombre chromatique vaut trois ?

H Distances

■ **Définition 42 — Distance dans un graphe simple non pondéré.** La distance d'un sommet a à un sommet b dans un graphe simple non pondéré G est la plus courte chaîne d'extrémités a et b. On la note $d_G(a,b)$.

R Cette définition coïncide avec la notion de distance en mathématiques. Pour les sommets a, b et c de G

- $d_G(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
- $d_G(a,b) = d_G(b,a)$
- $d_G(a,b) \leqslant d_G(a,c) + d_G(c,b)$

■ **Définition 43 — Valuation d'une chaîne dans un graphe pondéré.** La valuation d'une chaîne dans un graphe pondéré est la somme des poids de chacune de ses arêtes. Pour une chaîne P, on la note $v(P)$.

■ **Définition 44 — Distance dans un graphe pondéré.** La distance d'un sommet a à un sommet b dans un graphe pondéré G est la valuation minimum des chaînes d'extrémités a et b. On la note $d_{G,v}(a,b)$.

I Arbres

■ **Définition 45 — Arbre.** Un arbre est un graphe connexe et acyclique.

■ **Définition 46 — Feuilles.** Dans un arbre, les sommets de degré un sont appelés les feuilles.

■ **Définition 47 — Arbre recouvrant.** Un arbre recouvrant d'un graphe G est un sous-graphe couvrant de G qui est un arbre.

■ **Définition 48 — Arbre enraciné.** Parfois, on distingue un sommet particulier dans un arbre A : la racine r. Le couple (A,r) est un nommé arbre enraciné. On le représente un tel arbre verticalement avec la racine placée tout en haut comme sur la figure 24.

■ **Définition 49 — Arbre binaire.** Un arbre binaire est un graphe connexe acyclique pour lequel le degré de chaque sommet vaut au maximum trois. Le degré de la racine vaut au maximum deux.

■ **Définition 50 — Arbre binaire parfait.** Un arbre binaire parfait est un arbre dans lequel tous les niveaux sauf le dernier doivent être totalement remplis. Si le dernier n'est pas rempli totalement alors il doit être rempli de gauche à droite.

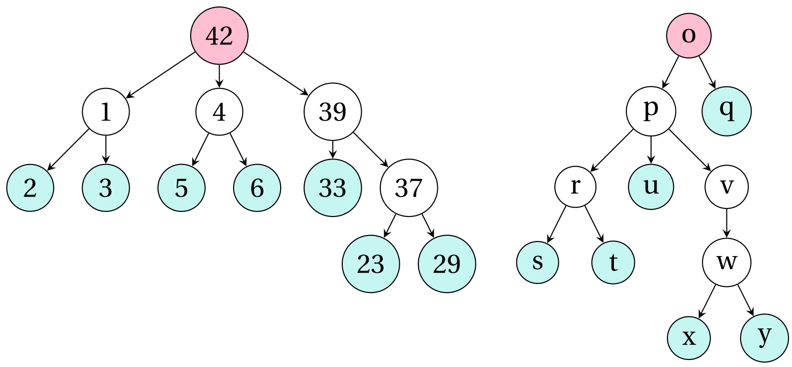

FIGURE 24 – Exemples d’arbres enracinés. Les racines des arbres sont en rouge, les feuilles en turquoise. Le tout forme une forêt.

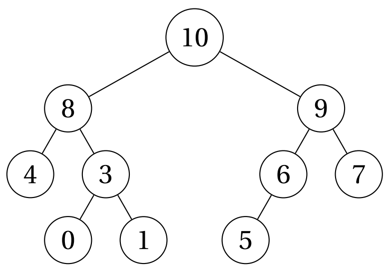

FIGURE 25 – Arbre binaire

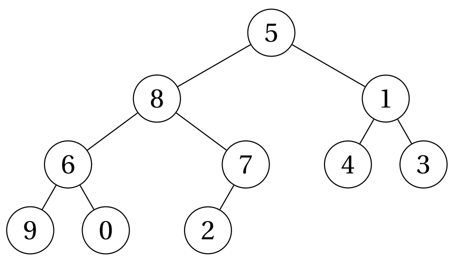

FIGURE 26 – Arbre binaire parfait

Ces arbres sont illustrés sur les figure 25 et 26.