

Informatique commune

Olivier Reynet

23-08-2022

Table des matières

I Introduction	13
1 Comment lire ce cours?	15
2 Au commencement, des concepts	17
A Algorithmes, programmes et processus	17
B Langages, compilateurs et machines --> HORS PROGRAMME	19
C Des paradigmes différents --> HORS PROGRAMME	23
D Systèmes d'exploitations --> HORS PROGRAMME	24
E Bibliothèques logicielles	28
II Semestre 1	31
3 Types et opérateurs	33
A Types	33
B Opérateurs	35
C Opérateurs sur les chaînes de caractères	38
D Une variable Python est une référence	38
E Mots-clefs du langage	39
4 Structurons!	43
A Anatomie d'un programme Python	43
B Programmation structurée	44
C Fonctions Python	49
D Conventions de nommage	51
5 Listes Python	53
A Constructeurs de listes	53
B Opérations sur une liste	55
C Concaténation et démultiplication de listes	56
D Des listes indiçables	56

E	Des listes itérables	56
F	Des listes tronçonnables	57
G	Les algorithmes simples mais incontournables	57
H	Listes, copies et références	59
I	Listes, paramètres et fonctions	59
J	Tuples	60
6	Trier et rechercher	63
A	Comment caractériser un algorithme de tri?	64
B	Trier un tableau	64
C	Recherche séquentielle	66
D	Recherche dichotomique	66
E	Compter les opérations	68
F	Trier avec les fonctions natives de Python	72
7	Récursivité	73
A	Principes	73
B	Types de récursivité	75
C	Du récursif à l'itératif	77
8	Diviser pour régner	79
A	Diviser pour régner	79
B	Exemple de la recherche dichotomique	82
C	Exemple de l'exponentiation rapide	83
D	Exemple du tri fusion	84
9	Algorithmes gloutons	87
A	Principe	87
B	Modélisation	88
C	Exemple du sac à dos	91
D	Gloutonnerie et dynamisme	92
10	Introduction à Numpy	93
A	Importation	94
B	Créer des vecteurs, des matrices ou des tableaux	94
C	Accéder aux éléments d'un tableau	95
D	Opérations élément par élément	97
E	Opérations matricielles	97
F	Types de données	98
G	Autres fonctions	98

III Semestre 2	99
11 Les mots des graphes	101
A Typologie des graphes	101
B Représentation des graphes	105
C Caractérisation structurelle des graphes	106
D Isomorphisme des graphes	108
E Chaînes, cycles et parcours	110
F Sous-graphes et connexité	113
G Coloration de graphes	113
H Distances	116
I Arbres	116
12 Propriétés des graphes	119
A Des degrés et des plans	119
B Caractérisation des chaînes, des cycles et des graphes	120
C Graphes acycliques et connexes	121
D Coloration, graphes planaires et nombre chromatique	121
E Principe d'optimalité et plus court chemin dans un graphe	122
13 Algorithmes et graphes	123
A Parcours d'un graphe	123
B Trouver un chemin dans un graphe	126
C Plus courts chemins dans les graphes pondérés	126
D Arbres recouvrants	136
E Arbres binaires	137
F Graphes bipartis et couplage maximum	138
G Coloration	138
IV Semestre 3	139
14 Structures de données --> HORS PROGRAMME	141
A Type abstrait de données et structure de données	141
B TAD tableaux et listes	143
C Implémentation des tableaux	144
D Implémentations des listes	145
E Bilan de complexités des structures listes et tableaux	148
15 Dictionnaires	149
A Types abstraits de données (TAD)	149
B Constructeurs de dictionnaires	151
C Opérations sur un dictionnaire	152
D Fusionner des dictionnaires	154
E Des dictionnaires itérables	154

F	Implémentation d'un TAD dictionnaire	154
G	Tables de hachage	155
16 Programmation dynamique		161
A	Motivations	161
B	Principes de la programmation dynamique	163
C	Exemples simples de programmation dynamique	164
D	Le retour du sac à dos	167
E	Programmation dynamique itérative	169
F	Programmation dynamique récursive : mémoïsation	171
17 Bases de données relationnelles		173
A	Pourquoi?	173
B	Données et gestion des données	174
C	De la conception à l'implémentation physique	175
D	Le modèle relationnel	181
E	Traduction des associations dans le modèle relationnel	182
F	Du modèle physique à la création des tables --> HORS PROGRAMME	188
18 Modèle relationnel et langage SQL		191
A	Requêtes SQL	191
B	Projection : SELECT ...FROM	194
C	Sélection : WHERE	195
D	Jointure : JOIN ...ON	197
E	Agréger, grouper et filtrer des résultats	200
F	Opérations ensemblistes	201
G	Requêtes imbriquées --> HORS PROGRAMME	202
H	De belles requêtes SQL	203
19 Et la machine apprit		205
A	Principes	205
B	Apprentissage supervisé : k plus proches voisins	208
C	Apprentissage non supervisé : k moyennes	214
20 Théorie des jeux		215
A	Introduction à la théorie des jeux	215
B	Jeux d'accessibilité, l'exemple des jeux de Nim	219
C	Modélisation d'un jeu d'accessibilité	222
D	Stratégies et positions	222
E	Attracteurs	223
F	Algorithme de calcul de l'attracteur	224

TABLE DES MATIÈRES

7

V Annexes	225
Bibliographie	227
Articles	227
Livres	228
Vidéos	228
Sites web	228

Liste des algorithmes

1	Produit de deux nombres	18
2	Produit de deux nombres entiers avec boucle inconditionnelle	46
3	Produit de deux nombres entiers avec boucle inconditionnelle	47
4	Tri par sélection	65
5	Tri par insertion	65
6	Tri par comptage	66
7	Recherche séquentielle d'un élément dans un tableau	66
8	Recherche d'un élément par dichotomie dans un tableau trié	68
9	Recherche d'un élément par dichotomie dans un tableau trié, renvoyer l'indice minimal en cas d'occurrences multiples.	69
10	Recherche séquentielle d'un élément dans un tableau	70
11	Tri par insertion, calcul du nombre d'opérations	70
12	Factoriel récursif	74
13	Recherche récursive d'un élément par dichotomie dans un tableau trié	76
14	Est-il mon aïeul?	76
15	Factoriel récursif terminal	76
16	Algorithme récursif terminal	77
17	Version itérative d'un algorithme récursif terminal	77
18	Factoriel itératif	77
19	Diviser, résoudre et combiner (Divide And Conquer)	80
20	Recherche récursive d'un élément par dichotomie dans un tableau trié	82
21	Exponentiation naïve a^n	83
22	Exponentiation rapide a^n	84
23	Exponentiation rapide a^n (version itérative)	84
24	Tri fusion	85
25	Fusion de sous-tableaux triés	86
26	Principe d'un algorithme glouton	89
27	Réservation d'une place au port de Brest	89
28	Problème du sac à dos	92
29	Parcours en largeur d'un graphe	124

30	Parcours en profondeur d'un graphe	125
31	Parcours en profondeur d'un graphe (version récursive)	125
32	Longueur d'une chaîne via un parcours en largeur d'un graphe pondéré	127
33	Algorithme de Dijkstra, plus courts chemins à partir d'un sommet donné	129
34	Algorithme de Bellman-Ford, plus courts chemins à partir d'un sommet donné . .	133
35	Algorithme de Floyd-Warshall, plus courts chemins entre toutes les paires de sommet	135
36	Algorithme de Kruskal, arbre recouvrant	137
37	Algorithme de Prim, arbre recouvrant	137
38	Fibonacci récursif	166
39	Fibonacci itératif, sans calculs redondants.	166
40	KP(n, π) par programmation dynamique, de bas en haut	171
41	KP(n, π) par programmation récursive brute	171
42	KP(n, π) par programmation dynamique et mémoïsation	172
43	k plus proches voisins (KNN)	212
44	k moyennes (k-means)	214

Liste des Codes

2.1	Un exemple de programme en Python - traduction de l'algorithme produit	19
2.2	Importer un module et l'utiliser	28
2.3	Importer toutes les fonctions d'un module et en utiliser certaines	28
2.4	Importer quelques fonctions d'un module et les utiliser	29
3.1	Types simples	34
3.2	Affectations de type immuable	40
3.3	Affectations de type mutable	40
4.1	Anatomie d'un programme Python (variables globales, fonctions, indentation, blocs, programme principal)	43
4.2	blocs conditionnels	45
4.3	Expression conditionnelle	46
4.4	Boucle inconditionnelle for	46
4.5	Utilisation de range	47
4.6	Boucle inconditionnelle while	47
4.7	Fonction Python à un paramètre renvoyant un entier	50
4.8	Procédure Python	50
4.9	Fonction avec paramètre optionnel et plusieurs chemin d'exécution avec valeur retour	50
5.1	Algorithmes simples et incontournables	57
5.2	Passage en paramètre d'un type mutable et d'un type immuable à une fonction	60
10.1	Créer des tableaux Numpy	94
10.2	Accéder aux éléments d'un tableau numpy	96
10.3	Opérer élément par élément	97
10.4	Calcul matriciel	97
10.5	Types de données numpy	98
17.1	Création du modèle physique d'une base de données	189
18.1	Structure de base d'une requête SQL : projection et sélection	192
18.2	Exemples de projections	194
18.3	Sélections	195
18.4	Sélections - ordre des résultats - projection non redondante	196

18.5 Exemples de jointures	198
18.6 Exemples d'utilisation des fonctions d'agrégation	200
18.7 Exemple d'utilisation de <code>GROUP BY</code>	201
18.8 Exemple d'utilisation de <code>GROUP BY ... HAVING</code>	201
18.9 Exemple d'opération ensembliste	202
18.10 Requêtes imbriquées	202

Première partie

Introduction

Comment lire ce cours?

Raisonner sur la matière et l'énergie, et raisonner sur l'information, c'est très différent.

Gérard Berry

À la fin de ce chapitre, je sais :

 lire ce cours

■ **Définition 1 — Informatique.** L'informatique est la science du traitement automatique et rationnel de l'information par un système concret ou abstrait.

L'informatique traitant de l'information, il y est naturellement question de langages. Comment parler de l'information sans utiliser et maîtriser le langage en général? Comment maîtriser un langage connaître le sens des mots? La plupart des difficultés de l'informatique peuvent être dépassées si l'on maîtrise la définition des concepts. C'est pourquoi elles sont bien mises en évidence dans ce cours.

 Certains paragraphes commencent par ce symbole P dans un rond turquoise : cela signifie qu'ils traitent plus particulièrement du langage Python. Si vous voulez aller vite, vous pouvez vous concentrer dans un premier temps sur leur lecture.

Certains de ces paragraphes sont essentiels pour bien réussir les épreuves d'informatique commune des concours. Ceux-ci finissent la plupart du temps ainsi :

 Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

R D'autres remarques d'ordre plus général figurent ainsi, dans un paragraphe commençant par un R dans un rond.

R Certaines sections marquées → HORS PROGRAMME présentent des notions hors programme officiel. Néanmoins, elles ont souvent un grand intérêt pour la compréhension de l'informatique en général et certaines épreuves de concours se jouent à la frontière du programme.

R Certaines sections sont marquées d'une étoile signifiant que le contenu de la section est davantage destiné aux élèves qui suivent l'option informatique. La lecture de ce paragraphe est certainement intéressante pour comprendre en profondeur mais pas nécessaire pour l'épreuve d'informatique commune.

M **Méthode 1 — Méthode** Certains paragraphes sont identifiés comme étant des méthodes. Ils sont à connaître car utiles pour progresser efficacement.

Le français est la langue privilégiée de ce cours, celle qui permet d'expliquer et de comprendre. Mais, les codes informatiques présentés privilègient l'anglais : la raison principale de ce choix réside dans le fait qu'il est beaucoup plus difficile pour un être humain d'appréhender un mélange de langues plutôt que d'en lire un seule à la fois. C'est pourquoi j'essaie de ne pas mélanger les langues, tout en les pratiquant toutes.

L'influence de la langue anglaise étant malgré tout très forte dans le domaine de l'informatique, je précise les correspondances avec le français et les nuances terminologiques dans des paragraphes dédiés nommés *vocabulary*.



Vocabulary 1 — Word ↗ mot.

Si au cours de votre lecture, vous trouvez des erreurs ou des coquilles, n'hésitez pas à me les signaler!

Au commencement, des concepts

Swamp King : One day all this will be yours!

Herbert : What, the curtains ?

The Holy Grail, Monty Python

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ Distinguer les concepts d'algorithme, de programme et de processus
- ☒ Lister les grandes caractéristiques du langage Python
- ☒ Importer des fonctions d'une bibliothèque (module Python)

Ce premier chapitre n'explique pas dans le détail tous les concepts présentés. Cependant les TP du premier semestre permettent d'approfondir ces concepts et complémentent cette lecture.

Parler d'informatique nécessite de parler de l'information et des langages informatiques qui véhiculent ces informations. Parler des langages, c'est tenter de décrire les mots de ce langage, de la structure qui relie ces mots entre eux et de leur pouvoir. Pour parler de mots, il faut tout d'abord se mettre d'accord sur le sens de ces mots.

A Algorithmes, programmes et processus

- **Définition 2 — Informatique.** L'informatique est la science du traitement automatique et rationnel de l'information par un système concret ou abstrait.



Vocabulary 2 — Computer Sciences and Computer Engineering ↗ Les anglo-

saxons font une distinction entre l'informatique comme science abstraite (Computer Sciences) et l'informatique comme science concrète appliquée (Computer Engineering). En français, l'informatique désigne les deux, ce qui est important, l'une n'allant pas sans l'autre. Que ferait-on de la physique théorique sans l'expérience ?

L'informatique, tout comme la physique ou la chimie, fait appel aux mathématiques pour **modéliser** un problème et démontrer des propriétés. Mais à la différence des mathématiques qui se permettent souvent de manipuler des objets qu'on ne sait pas construire, l'informatique est une science **constructiviste** : lorsqu'on résout un problème en informatique, on construit la solution à l'aide d'un algorithme.

■ **Définition 3 — Algorithme.** Un algorithme est une méthode pour résoudre un problème donné. Cette méthode est constituée d'une suite d'instructions qui permet de trouver une solution au problème.

■ **Exemple 1 — Produit de deux nombres.** L'algorithme 1 calcule le produit de deux nombres.

Algorithme 1 Produit de deux nombres

1: Fonction PRODUIT(a, b)	$\triangleright a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$.
2: $p \leftarrow 0$	
3: $c \leftarrow 0$	$\triangleright c$ est un entier.
4: tant que $c < a$ répéter	
5: $p \leftarrow p + b$	
6: $c \leftarrow c + 1$	
7: renvoyer p	

On s'efforce généralement :

- de rendre un algorithme non ambigu,
- d'identifier clairement les entrées et les sorties ,
- de décrire un algorithme avec suffisamment d'abstraction afin de rendre de son implémentation indépendante du langage de programmation choisi.

R L'élaboration d'un algorithme n'est pas un exercice théorique. Au contraire c'est dessinant au brouillon, en émettant des hypothèses simplificatrices, en bricolant et en tâtonnant que l'on parvient généralement à écrire un algorithme qui fonctionne.

Le développement de l'informatique s'appuie fortement sur la logique, la théorie des graphes, la théorie des langages et des automates. Ces théories contribuent à la fois à son développement théorique et à son développement concret, c'est à dire électronique.

■ **Définition 4 — Programme.** Un programme est un ensemble d'instructions dans un langage de programmation donné.

R Il est important de savoir passer de l'expression d'un algorithme à un programme et, dans le cadre des épreuves des concours, à un programme en Python! L'expression de l'algorithme dans les épreuves est le plus souvent sous la forme d'un texte, c'est à dire qu'on décrit l'algorithme avec des **phrases**^a. Le code 2.1 traduit l'algorithme 1 en Python.

a. ce qui ne simplifie pas la tâche du candidat qui doit savoir lire et interpréter...

Code 2.1 – Un exemple de programme en Python - traduction de l'algorithme produit

```

1 def produit(a, b):    # une fonction
2     p = 0          # Un commentaire
3     c = 0
4     while c < a:
5         p = p + b
6         c = c + 1
7     return p
8
9
10 # Debut du programme principal
11 print("Le produit de 2 par 21 vaut :", produit(21, 2))

```

R Si un algorithme est abstrait, un programme est concret, c'est à dire qu'il est interprétable soit par un processeur directement, soit par un interpréteur (machine virtuelle). On peut donc demander à une machine d'exécuter un programme, mais on ne peut pas lui demander d'exécuter directement un algorithme.

■ **Définition 5 — Processus.** Un processus est un programme en cours d'exécution sur une machine, c'est à dire un processeur muni d'une mémoire et d'un système d'exploitation.

B Langages, compilateurs et machines --> HORS PROGRAMME

■ **Définition 6 — Langage de programmation.** Un langage de programmation est une notation normée dont l'objectif est d'implémenter des algorithmes.

■ **Exemple 2 — Langages de programmation.** Parmi les langages de programmation les plus utilisés actuellement on peut citer : C, C++, Java, Python ou Javascript. On choisit un langage plutôt qu'un autre en fonction de l'application visée. Javascript est par exemple un langage plutôt orienté web. C est plutôt dédié aux systèmes embarqués et bas niveau.

■ **Définition 7 — Compilateur.** Un compilateur est un logiciel qui transforme un langage en un autre. Le langage des données d'entrée est dit *langage source* et celui des données de sortie *langage cible*.

■ **Définition 8 — Langage machine.** Le langage machine est le langage d'un processeur. Il est composé d'instructions très élémentaires de type :

- mettre une donnée dans une case mémoire,
- modifier le contenu d'une case mémoire (opérations arithmétiques et logiques),
- tester la valeur d'une case mémoire,
- effectuer des branchements et des sauts dans le code,
- appeler une routine de calcul.

Ces instructions élémentaires sont exécutées par le processeur à une fréquence très élevée^a.

a. de l'ordre du GHz dans les processeurs actuels.

■ **Définition 9 — Langage compilé.** Un langage compilé^a est un langage muni d'un compilateur capable de générer du langage machine à partir du code source.

a. On devrait dire compilable, mais les anglicismes et les traductions littérales sont légions dans le domaine informatique.

■ **Exemple 3 — Quelques compilateurs.** Les compilateurs sont ubiquitaires dans tous les domaines de l'ingénierie et la plupart du temps invisibles. On trouve :

- **gcc** est un compilateur capable de compiler de nombreux langages dont le langage C. Il permet de traduire des instructions en langage C en langage machine, c'est à dire le langage d'un processeur.
- **javac** est un compilateur capable de traduire du code java en bytecode java.
- **pdflatex** est un compilateur capable de traduire du code latex en PDF et de créer les pages que vous lisez.

■ **Définition 10 — Langage interprété.** Un langage interprété est un langage muni d'un interpréteur capable de l'exécuter sur une machine concrète.

■ **Définition 11 — Interpréteur ou machine virtuelle.** Un interpréteur^a ou machine virtuelle est un **logiciel** qui permet d'interpréter des instructions dans un langage généralement désigné par le terme Bytecode. Ce logiciel est exécuté par un processeur, ce qui explique le qualificatif virtuel : on ne programme pas un processeur mais un interpréteur.

a. On devrait dire interprète mais il s'agit encore une fois d'un anglicisme.

■ **Exemple 4 — Machines virtuelles.** Quelques exemples d'interpréteurs :

- Java Virtual Machine (JVM) est un interpréteur de code Java.
- Python Virtual Machine (PVM) est un interpréteur de code Python.
- Ocaml dispose d'un interpréteur et d'un compilateur en langage machine.

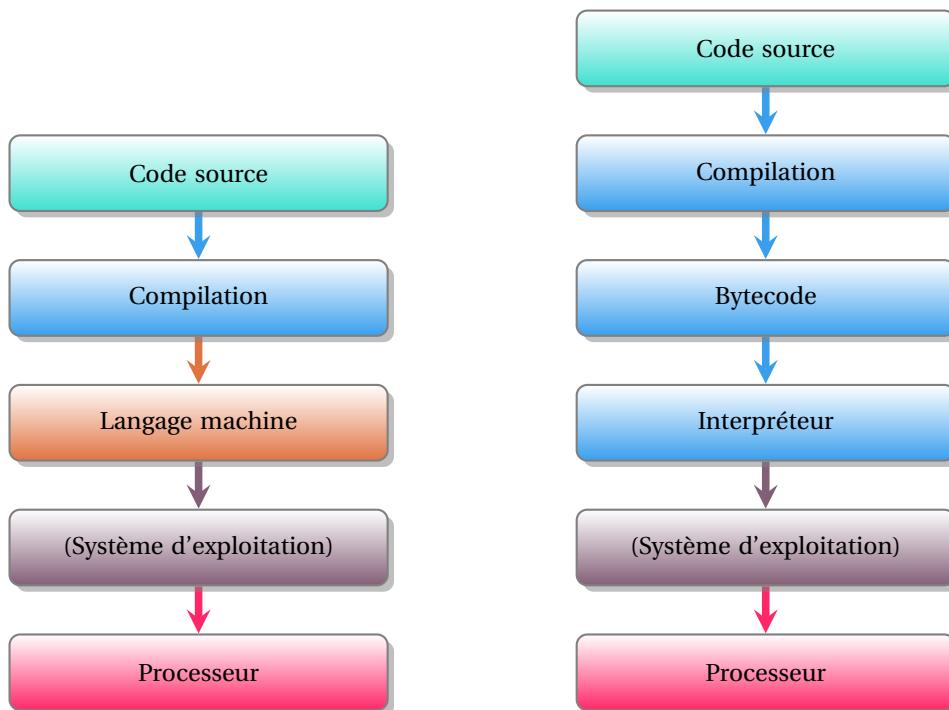


FIGURE 2.1 – Comparaison des chaînes d'exécution des langages compilés (à gauche) et des langages interprétés (à droite)

■ **Définition 12 — Bytecode.** Un bytecode est un langage intermédiaire entre un langage de programmation (de haut niveau) et les langages de plus bas niveau (proche du processeur). Il est exécuté par un interpréteur.

R Si un bytecode est indépendant de la machine sur laquelle il sera exécuté, un interpréteur dépend au contraire de la machine concrète sur laquelle il s'exécute c'est à dire du processeur et du système d'exploitation.

Le code Python, avant d'être exécuté par une machine virtuelle, c'est à dire un logiciel, est compilé dans un langage nommé Bytecode par la PVM.

P Python est donc un langage interprété.

Le figure 2.2 donne, à titre d'illustration, le bytecode du programme 2.1. On perçoit bien la nature élémentaires des instructions impératives qui ressemblent beaucoup à celle d'un langage machine. Sauriez-vous l'interpréter à votre tour?

0 LOAD_CONST	1 (0)
2 STORE_FAST	2 (p)
4 LOAD_CONST	1 (0)
6 STORE_FAST	3 (c)
8 LOAD_FAST	3 (c)
10 LOAD_FAST	0 (a)
12 COMPARE_OP	0 (<)
14 POP_JUMP_IF_FALSE	20 (to 40)
16 LOAD_FAST	2 (p)
18 LOAD_FAST	1 (b)
20 BINARY_ADD	
22 STORE_FAST	2 (p)
24 LOAD_FAST	3 (c)
26 LOAD_CONST	2 (1)
28 BINARY_ADD	
30 STORE_FAST	3 (c)
32 LOAD_FAST	3 (c)
34 LOAD_FAST	0 (a)
36 COMPARE_OP	0 (<)
38 POP_JUMP_IF_TRUE	8 (to 16)
40 LOAD_FAST	2 (p)
42 RETURN_VALUE	

FIGURE 2.2 – Bytecode Python du code 2.1 de la fonction produit.

C Des paradigmes différents → HORS PROGRAMME

Tout comme il existe une multitude de langages humains, il existe une grande diversité de langages informatiques. Pour mieux cerner leurs différences, on utilise la notion de paradigme de programmation.

- **Définition 13 — Paradigme de programmation.** Un paradigme de programmation est un ensemble de formes et de figures qui constitue un modèle propre à un langage.

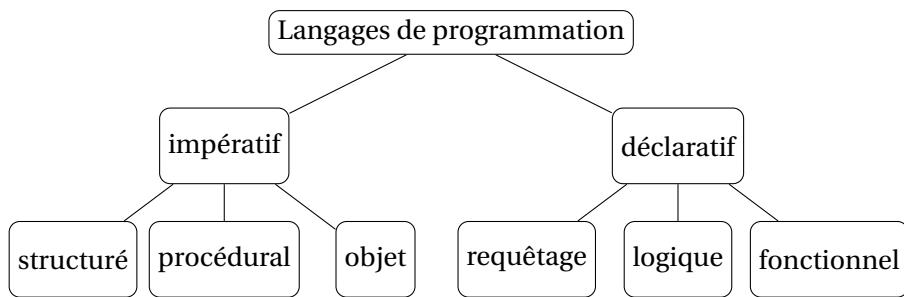


FIGURE 2.3 – Paradigmes des langages de programmation

- **Définition 14 — Paradigme impératif.** Le paradigme impératif s'attache à décrire des séquences d'instructions (ordres) qui agissent sur un état interne de la machine (contexte). L'impératif explicite le *comment procéder* pour exécuter un programme. Cette programmation se rapproche de la logique électronique des processeurs.

- **Définition 15 — Paradigme procédural.** Ce paradigme est une déclinaison de l'impératif et propose de regrouper des éléments réutilisables de code dans des routines. Ces routines sont appelées procédures (si elles ne renvoient rien) ou fonctions (si elles renvoient un résultat).

- **Définition 16 — Paradigme objet.** Ce paradigme est une déclinaison de l'impératif et propose de décrire un programme comme l'interaction entre des objets à définir. Une classe est un type d'objet qui possède des attributs et des comportements. Ces caractéristiques sont encapsulées et peuvent être masquées à l'utilisateur d'un objet : cela permet de protéger l'intégrité de l'objet et de garantir une cohérence dans la manipulation des données.

- **Définition 17 — Paradigme déclaratif.** Le paradigme déclaratif est une syntaxe qui s'attache à décrire le *quoi*, c'est à dire *ce que le programme doit faire*, non pas comment il doit le faire. Un langage déclaratif ne dépend pas de l'état interne d'une machine (contexte). Cette programmation se rapproche de la logique mathématique et délègue au compilateur la délicate question du *comment procéder*.

■ **Définition 18 — Paradigme fonctionnel.** Le paradigme fonctionnel est une déclinaison du déclaratif qui considère qu'un programme n'est qu'un calcul et qu'un calcul est le résultat d'une fonction. Le mot fonction est ici à prendre au sens mathématique du terme (lambda calcul) : une fonction appelée avec les mêmes paramètres produit le même résultat en toute circonstance.

Comme on peut le constater sur la figure 2.2, les langages de types Bytecode sont impératifs. L'objectif est de se rapprocher des langages machines qui sont également impératifs à cause de l'architecture des processeurs de type Von Neumann.

P Python est un langage multiparadigme : impératif, objet et fonctionnel.

■ **Exemple 5 — Langages et paradigmes.** La plupart des langages contemporains sont multiparadigmes, c'est à dire qu'ils permettent de programmer de différentes manières.

- C : impératif, structuré et procédural,
- C++ : impératif, structuré, procédural, objet et fonctionnel,
- Java : impératif, objet, fonctionnel,
- Javascript : fonctionnel, objet (prototype), script,
- Smalltalk : objet,
- Prolog : logique,
- SQL : déclaratif, requête,
- Ocaml : fonctionnel, impératif et objet,
- Haskell : fonctionnel pur.

D Systèmes d'exploitations --> HORS PROGRAMME

■ **Définition 19 — Système d'exploitation.** Un système d'exploitation est un ensemble de logiciels qui forme une interface abstraite entre les applications et la machine. Un système d'exploitation accède directement au matériel de l'ordinateur, c'est à dire les systèmes électroniques constitutifs comme le processeur, les mémoires et les périphériques (écran, clavier, trackpad...).

Les autres applications de l'ordinateur s'appuient sur le système d'exploitation pour accéder au matériel.

 **Vocabulary 3 — Operating System (OS)** ⇔ Système d'exploitation.

Un système d'exploitation :

- garantit ainsi l'intégrité et la cohérence de la machine,
- masque la complexité du matériel aux utilisateurs, aux développeurs et aux applications en présentant une abstraction du matériel,

- gère le matériel en appliquant certaines stratégies prédéfinies (allocation mémoire, ordonnancement des processus),
- isole les applications les unes des autres.



FIGURE 2.4 – Positionnement du système d'exploitation et des bibliothèques logicielles entre les éléments logiciels et le matériel électronique

Vocabulary 4 — Software, hardware ↪ En anglais, on distingue les logiciels (software) du matériel électronique qui lui permet de fonctionner (hardware).

Un système d'exploitation est composé (cf. figure 2.4) :

- d'un système de fichiers (file system),
- de pilotes (drivers) spécifiques aux matériels électroniques,
- d'un ordonneur (scheduler) de processus,
- d'un gestionnaire de mémoire.

L'ordonneur et le gestionnaire de mémoire appliquent des stratégies sophistiquées afin de garantir une certaine équité entre les processus qui s'exécutent, l'accès aux ressources de la machine et l'allocation de l'espace mémoire.

Un système d'exploitation offre la plupart du temps deux modes de fonctionnement différents :

- Le mode utilisateur, non privilégié : dans cet espace, l'utilisateur peut utiliser les ressources du système et l'interface du système d'exploitation. Cependant, il n'accède à aucun matériel de manière privilégiée. C'est l'espace de développement et de fonctionnement des applications et des services. Cet espace garantit que tout accès au système logiciel/matériel est légal, car contrôlé par le système d'exploitation.
- Le mode administrateur, super-utilisateur, privilégié (KERNEL SPACE) : dans cet espace, l'administrateur peut programmer le système d'exploitation, le modifier et accéder au matériel, sans restrictions.

■ **Exemple 6 — Quelques systèmes d'exploitation.** Parmi les plus courants, on peut citer :

- Windows,
- Mac OS X,
- Linux,
- la famille de Unix BSD.

Dans des domaines plus spécifiques, comme l'informatique temps réel ou les systèmes embarqués, on peut trouver d'autres systèmes d'exploitation comme Windows CE, FreeRTOS ou Xenomai.

■ **Définition 20 — Système de fichier.** Un système de fichier est une organisation hiérarchique des fichiers mis en œuvre par un système d'exploitation. Cette organisation se présente sous la forme d'un arbre (systèmes Unix) ou d'une forêt (systèmes Windows).

Lorsqu'on travaille sur un ordinateur, il est toujours important de savoir où l'on se trouve et où l'on peut aller dans un système de fichiers.

■ **Définition 21 — Chemin.** Un chemin est une chaîne de caractères qui permet de décrire la position d'un fichier ou d'un répertoire dans un système de fichier.

On peut lire directement un chemin sur l'arborescence de la figure 2.5. **La racine de l'arbre est dénotée /.** Ainsi, le chemin vers le répertoire personnel d'Olivier est `/home/olivier/`. Le sous-répertoire `python/tp1/` est désigné par le chemin absolu `/home/olivier/Desktop/python/tp1/`.

■ **Définition 22 — Chemin absolu.** Un chemin absolu est un chemin qui décrit la ressource désigné sans équivoque possible depuis la racine du système de fichier. Un chemin absolu commence par `/`. Par exemple, `/home/olivier/`.

■ **Définition 23 — Chemin relatif.** Un chemin relatif est un chemin qui est désigne une ressource par rapport à l'endroit où l'on se trouve dans le système de fichiers. Il ne commence pas par un `/`. Par exemple, `python/tp1/`.

Lorsque l'on ouvre un environnement de développement comme Pyzo, celui-ci se place dans un répertoire de travail. C'est dans ce répertoire que sont lancés les commandes et les scripts Python. Il dépend de la configuration du système sur lequel on travaille. On peut éventuellement en changer si besoin, mais tout d'abord quel est-il ?

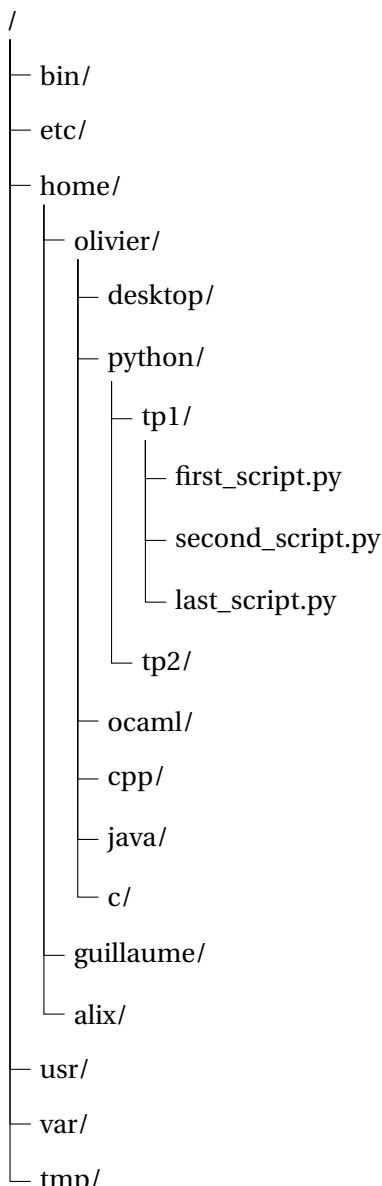


FIGURE 2.5 – Arborescence typique d'un système de fichier Unix/Linux/Mac OS X

Le module `os` est une bibliothèque qui permet d'interagir avec le système d'exploitation d'un ordinateur. La commande `import os` permet d'utiliser les commandes de ce module.

Par exemple pour connaître le répertoire dans lequel on se trouve on utilise l'instruction `os.getcwd()`. Il faut remarquer la notation pointée qui permet d'accéder à une fonction en particulier du module `os`, le nom de la fonction qui signifie *get current working directory* ainsi que les parenthèses qui permettent d'exécuter la fonction. Dans un script Python, pour afficher le résultat, il est nécessaire d'appeler la commande `print` de la manière suivante `print(os.getcwd()`

). L'affichage est automatique dans le shell interactif.

E Bibliothèques logicielles

Tous les langages modernes possèdent des bibliothèques logicielles qui permettent d'accélérer le développement. Ce sont des collections de fonctions ou de classes réutilisables directement par le développeur. Il s'agit de gagner du temps et de ne pas réinventer la poudre. Elles permettent souvent d'adresser un domaine particulier de l'informatique (calcul, traitement des images, création de graphiques) ou de simplifier les interfaces (interagir avec un système d'exploitation ou un périphérique (image, son, réseaux)).

Comme de nombreux langages, Python possède un grand nombre de bibliothèques¹. Les épreuves des concours se basent sur le cœur du langage et quelques bibliothèques. Parmi elles on peut citer :

- math,
- random,
- numpy.

P Il faut bien faire à attention à **respecter les consignes des épreuves** de concours car ces épreuves peuvent être de nature légèrement différente selon les concours. Si le sujet précise qu'on ne doit pas utiliser numpy, alors il ne faut pas l'utiliser. Si le sujet précise qu'on doit utiliser une fonction d'une bibliothèque, alors il faut l'utiliser!

 Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

P En python, on peut choisir d'utiliser tout ou partie d'une bibliothèque et plusieurs syntaxes sont possibles. Il faut les connaître (cf. codes 2.2, 2.3 et 2.4) et **ne pas les mélanger** : au concours, ces points sont faciles à obtenir, alors faites attention !

 Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

Code 2.2 – Importer un module et l'utiliser

```
1 import math
2
3 a = math.sqrt(math.log(7))
```

Code 2.3 – Importer toutes les fonctions d'un module et en utiliser certaines

```
1 from math import *
2
3 a = sqrt(log(7))
```

1. On parle de l'Application Program Interface (API) Python

Code 2.4 – Importer quelques fonctions d'un module et les utiliser

```
1 from math import sqrt, log  
2  
3 a = sqrt(log(7))
```

R D'un point de vue mémoire, la dernière syntaxe est plus parcimonieuse puisqu'elle n'importe en mémoire que les fonctions dont le code a besoin.

Deuxième partie

Semestre 1

Types et opérateurs

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ Utiliser et identifier les types simples (int, float, boolean, complex)
- ☞ Utiliser les opérateurs en lien avec les types simples numériques
- ☞ Utiliser une variable de type simple
- ☞ Reconnaître les principaux mots-clefs du langage Python

A Types

L'informatique traite l'information. Dans ce but, il faut être capable de stocker l'information sous une forme accessible au traitement informatique. Selon la nature de l'information, un type de données différent est choisi pour la représenter.

■ **Définition 24 — Typage.** Le typage désigne l'action de choisir une représentation à une donnée selon ses caractéristiques. Cette représentation est nommée type. Le typage est effectué soit par le programmeur, soit par le compilateur soit par l'interpréteur.

■ **Définition 25 — Type simple.** Les types simples correspondent à des informations comme les nombres, des constantes ou les valeurs booléennes.

Les types simples en Python sont :

- `int` permet de représenter un sous-ensemble des entiers relatifs,
- `float` permet de représenter un sous-ensemble des décimaux,
- `complex` permet de représenter un sous-ensemble des nombres complexes,
- `bool` permet de représenter une valeur booléenne, vrai ou faux.

Les codes 3.1 donnent des exemples d'usage de ces types en Python. Il faut noter que , comme de nombreux langages modernes, Python est un langage multiparadigme. Il implémente notamment le paradigme objet, c'est pourquoi les types simples sont des classes d'objet.

Code 3.1 – Types simples

```
1 print(type(42))      # <class 'int'> an integer
2 print(type(2.37))    # <class 'float'> a floating point number
3 print(type(3-2j))    # <class 'complex'> a complex number
4 print(True, type(True))  # True <class 'bool'>
5 print(False, type(False)) # False <class 'bool'>
```

■ **Définition 26 — Inférence de type .** L'inférence de type est une action d'un compilateur ou d'un interpréteur qui permet de typer une données automatiquement d'après sa nature.

■ **Définition 27 — Typage explicite .** Un langage est dit à typage explicite s'il exige de toute donnée qu'elle soit déclarée selon un type. Le contraire est un typage **implicite**.

■ **Définition 28 — Typage dynamique .** Un langage est dit à typage dynamique si une variable peut changer de type au cours de l'exécution du programme. Inversement, on parle de typage **statique**.

Dans l'exemple ci-dessus, Python fait donc de l'inférence de type, puisque la donnée 42 est interprétée comme un `int`, 2.37 comme un `float`...

 Python est un langage à typage implicite et dynamique.

■ **Définition 29 — Transtypage.** Transtyper une variable c'est modifier son type en opérant une conversion de la donnée.

 **Vocabulary 5 — Type Casting ↪** En anglais, le transtypage est désigné par les termes *type casting* ou *type conversion*.

 En Python, on peut transtyper une variable numérique en utilisant un constructeur numérique `int` ou `float`. Par exemple :

```
1     b = float(3)
2     print(b, type(b))    # 3.0 <class 'float'>
3     c = int(3.56)
4     print(c, type(c))    # 3 <class 'int'>
```

■ **Définition 30 — Types composés.** Un type composé est un type de données qui agrège des types simples dans un objet homogène (tableau, énumération) ou inhomogène (structure, union). Dans les types composés (in)homogènes, les données (ne) sont (pas) toutes du même type.

P En Python les types composés sont les chaînes des caractères, les tuples, les listes, les ensembles et les dictionnaires.

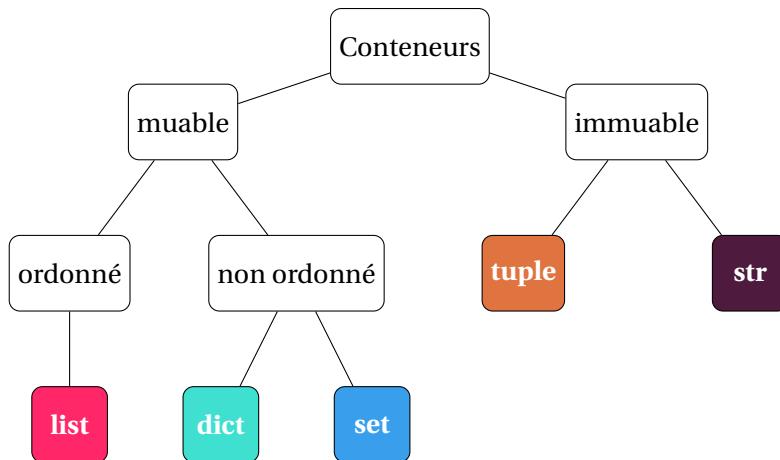


FIGURE 3.1 – Types de données composés du langage Python : les conteneurs

B Opérateurs

Les opérateurs peuvent être classés en catégories selon la nature de leur action, le type d'opérandes ou le nombre d'opérandes dont ils ont besoin.

a Opérateurs arithmétiques

Ce sont les transpositions informatiques des opérateurs mathématiques : ils agissent sur des représentations de nombre en machine, les types numériques.

- `a + b` l'addition,
- `a - b` la soustraction,
- `a * b` la multiplication,
- `a // b` la division entière,
- `a % b` l'opération modulo,
- `a / b` la division,
- `a ** n` l'élévation à la puissance `n` ou exponentiation.


Vocabulary 6 — Arithmetic operators ↗ En anglais, on les désigne par :

- Addition,
- Subtraction,
- Multiplication,
- Floor division,
- Modulus,
- Division,
- Exponentiation.

Merci le latin et Guillaume le Conquérant.

P Les opérateurs `+`, `-` et `*` s'appliquent indifféremment aux types `int` et `float`. Néanmoins, le résultat d'une opération entre `int` sera un `int`. Le résultat est un `float` si l'une des deux opérandes au moins en est un. On parle alors de transtypage implicite, les `int` sont transtypés par l'interpréteur en `float` pour réaliser l'opération, de manière transparente.

L'opérateur de division `/` renvoie en un `float` alors que `//` renvoie un `int` : c'est en fait le quotient de la division euclidienne ou la partie entière du résultat de `/`, d'où le nom en anglais.

L'opérateur `**` s'applique aux `int` et aux `float` et renvoie un `float`.

L'opérateur `%` renvoie généralement le reste de la division euclidienne de `a` par `b`. Cependant, lorsque les deux opérandes sont négatives, le modulo résulte en nombre négatif afin d'avoir également $a = (a//b)* b + a\%b$.

Tous les langages n'adoptent pas forcément les mêmes conventions que Python, il faut donc rester vigilant.

La syntaxe infixe de ces opérateurs fait qu'il peut être ambigu d'écrire certaines expressions. Par exemple, comment interpréter `2 + 3 * 4`? Doit-on calculer d'abord l'addition `2+3` puis multiplier le résultat? Ou bien doit-on effectuer la multiplication d'abord? Le résultat ne sera pas le même. Quelle est la bonne opération? Quel opérateur doit-on appliquer en premier? Sans parenthèses, cette ambiguïté demeure à moins qu'on ne décide d'attribuer une priorité différente aux opérateurs. C'est ce qui est fait par la plupart des langages.

P La priorité des opérateurs en Python est définie comme indiqué sur le tableau 3.1. C'est pourquoi l'expression `2 + 3 * 4` est évaluée en 14^a. De plus, lorsque le degré de priorité est identique, on associe en priorité de la gauche vers la droite. Ainsi, l'expression `15 / 5 * 2` est évaluée en 6^b.

a. et non pas 24

b. et non pas 1.5

R Attention : certains opérateurs apparaissent identiques syntaxiquement mais se comporte différemment selon le type de donnée. Par exemple `*` ou `+` sont des opérateurs qui peuvent

Priorité	Opérateurs	Description
1	<code>()</code>	parenthèses
2	<code>**</code>	exponentiation
3	<code>+x -x ~x</code>	plus et moins unaire, négation bits à bits
4	<code>* / // %</code>	multiplication, division division entière, modulo
5	<code>+ -</code>	addition, soustraction
6	<code><< >> >>= <<=</code>	décalage binaire
7	<code>&</code>	et bits à bits
8	<code>^</code>	ou exclusif bits à bits
9	<code> </code>	ou bits à bits
10	<code>==, != >, >=, <, <= is, is not, in, not in</code>	identité comparaison appartenance
11	<code>not</code>	négation logique
12	<code>and</code>	et logique
13	<code>or</code>	ou logique

TABLE 3.1 – Priorités des opérateurs en Python : dans l'ordre d'apparition, du plus prioritaire (1) au moins prioritaire (13)

également agir sur les chaînes de caractères ou sur les listes. Dans ce cas, ils possèdent une autre signification. On dit qu'on a surchargé ces opérateurs.

b Opérateurs logiques

■ **Définition 31 — Opérateur logique.** Les opérateurs logiques produisent une valeur booléenne à partir d'autres valeurs booléennes en les combinant. Ils prennent le plus souvent deux opérandes.

Les opérateurs logiques Python sont :

- `a and b` la conjonction, renvoie `True` si `a` et `b` sont tous les deux à vrais,
- `a or b` la disjonction, renvoie `True` si `a` ou `b` sont vrais,
- `not a` la négation, renvoie `True` si `a` est faux, `False` sinon.

P En Python les valeurs booléennes sont `True` et `False`. Ce sont deux objets qui peuvent être interprétées numériquement par 0 ou 1.

Il faut noter également que d'autres objets peuvent être interprétés comme `False` :

- `None` qui est un l'objet qui représente *rien*,
- les représentations de zéro pour les types numériques dont `int, float`,

- les séquences et collections vides : "", (), [], , `set()`, `range(0)`

M **Méthode 2 — Tester un booléen** Pour tester la valeur d'un booléen `a`, on n'écrit jamais `if a == True`, mais simplement `if a`. De même, pour tester le cas faux, on écrira `if not a`.

c Opérateurs d'affectation

■ **Définition 32 — Affectation.** L'affectation est l'opération qui consiste à assigner une valeur à une variable et donc de modifier son état en mémoire.

Le fait que l'affectation soit une instruction est caractéristique des langages impératifs. En Python, il existe plusieurs opérateurs d'affectation :

- `a = 3` affectation simple,
- `a += 3` affectation simple combinée avec une addition équivalent à `a = a + 3`,
- `a -= 3` affectation simple combinée avec une soustraction équivalent à `a = a - 3`.

L'affectation combinée évite à l'interpréteur de créer une variable intermédiaire pour le calcul. L'opération se fait en place, c'est à dire sur l'espace mémoire même associé à la variable.

C Opérateurs sur les chaînes de caractères

Les chaînes de caractères sont des objets immuables en Python. Leurs valeurs sont initialisées en utilisant les guillemets `"`. Certains symboles sont utilisés pour désigner plusieurs opérateurs différents. C'est le cas par exemple de `+` et `*` qui peuvent désigner des opérateurs sur les chaînes de caractères. C'est ce qu'illustre l'exemple suivant

```
1  s = "Z comme "
2  print(s + " Zorglub")      # Z comme Zorglub
3  print(s + "42")           # Z comme 42
4  print(s*3)                # Z comme Z comme Z comme
```

 **Vocabulary 7 — Double and simple quotes ↴** Les guillemets `"` correspondent au mot anglais *double quote*. Il existe aussi le symbole apostrophe `'`, *simple quote* en anglais, qui permet également d'initialiser des chaînes de caractères.

D Une variable Python est une référence

Tout est dans le titre de la section, mais je vais l'écrire comme une règle d'or :

P En Python, une variable est une référence vers l'adresse d'un objet en mémoire.

■ **Définition 33 — Type immuable.** Un type immuable est un type de donnée que l'on peut modifier. Inversement, un type mutable est un type dont on peut modifier la valeur.

P En Python, les types immuables sont :

- les types simples numériques : `int`, `float`, `bool`,
- les `str`,
- les `tuple`.

Les types mutables sont :

- les listes `list`,
- les dictionnaire `dict`,
- les ensembles `set`.

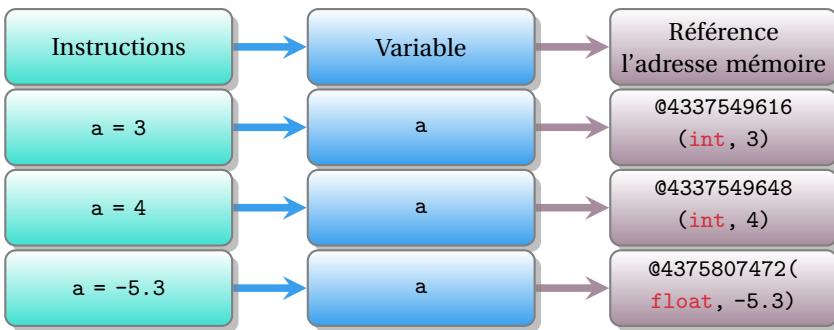
Ces types mutables et immuables combinés à la règle d'or précédente permettent d'expliquer énormément de codes qui peuvent parfois sembler très peu clairs au débutant. C'est par exemple ce qui explique pourquoi l'affectation ne se comporte pas de la même manière avec toutes les variables, ce que l'on observera au cours des TP de l'année.

■ **Exemple 7 — Affectation d'immuables.** Un entier est une donnée immuable : on ne peut pas en modifier la valeur, 42 vaut 42. De même pour un nombre flottant ou un booléen, vrai reste vrai et faux, faux... En Python, une variable à qui on a affecté une donnée référence un objet d'un certain type représentant cette donnée en mémoire. Si on affecte une nouvelle donnée à une variable immuable, le type étant immuable, c'est donc à la référence de changer. L'interpréteur alloue donc un nouvel espace mémoire à cette donnée et la variable référence ce nouvel objet. C'est ce qu'illustrent les figures 3.2 et 3.3 avec un type `int` immuable et un type `list` mutable.

L'ancienne valeur peut demeurer un moment en mémoire, jusqu'à ce que le ramasse-miette de l'interpréteur (Garbage Collector) désalloue cet espace mémoire pour libérer la mémoire, si cette valeur n'est plus référencée par aucune variable.

E Mots-clefs du langage

Les mots-clefs d'un langage sont des mots réservés, c'est à dire qu'on ne peut et qu'on ne doit pas les utiliser pour nommer des variables pour des fonctions. Ils sont rassemblés sur le tableau 3.2.

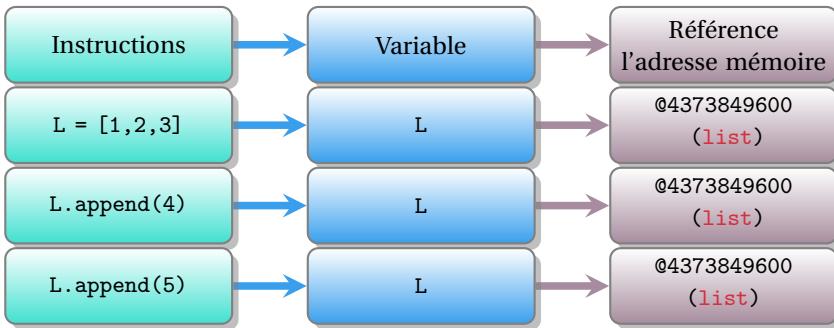
**Code 3.2 – Affectations de type immuable**

```

1 a = 3
2 print(a, id(a)) #3 4337549616
3 a = 4
4 print(a, id(a)) #4 4337549648
5 a = -5.3
6 print(a, id(a)) #-5.3 4375807472

```

FIGURE 3.2 – Variable de type immuable, affectation et référencement en mémoire (à gauche) et programme Python pour la visualisation des adresses en mémoire (à droite)

**Code 3.3 – Affectations de type mutable**

```

1 L = [1, 2, 3]
2 print(L, id(L))
3 # [1, 2, 3] 4373849600
4 L.append(4)
5 print(L, id(L))
6 # [1, 2, 3, 4] 4373849600
7 L.append(5)
8 print(L, id(L))
9 # [1, 2, 3, 4, 5] 4373849600

```

FIGURE 3.3 – Variable de type mutable, affectation et référencement en mémoire (à gauche) et programme Python pour la visualisation des adresses en mémoire (à droite)

Mot-clef	Usage
<code>if</code> <code>elif</code> <code>else</code> <code>for</code> <code>while</code> <code>break</code> <code>continue</code> <code>pass</code>	structure conditionnelle structure conditionnelle structure conditionnelle pour créer une boucle pour pour créer une boucle tant que sortir d'une boucle continuer la boucle pour ne rien faire
<code>and</code> <code>not</code> <code>or</code> <code>False</code> <code>True</code> <code>assert</code> <code>None</code> <code>in</code> <code>is</code>	et logique négation logique ou logique valeur booléenne faux valeur booléenne vrai créer une assertion en programmation défensive constante pour représenter le rien pour vérifier si une valeur est présente dans une séquence pour tester l'égalité de deux variables
<code>from</code> <code>import</code> <code>as</code>	pour importer tout ou partie d'un module pour importer un module pour créer un alias
<code>def</code> <code>return</code> <code>lambda</code>	pour définir une fonction pour sortir d'une fonction et renvoyer une valeur pour créer des fonctions anonymes
<code>raise</code> <code>try</code> <code>except</code> <code>finally</code> <code>with</code>	pour lever une exception pour gérer les exceptions pour gérer les exceptions pour gérer les exceptions pour gérer les exceptions
<code>class</code> <code>del</code> <code>global</code> <code>nonlocal</code> <code>yield</code>	définir une classe pour supprimer un objet pour déclarer une variable globale et l'utiliser pour déclarer une variable non locale pour créer une coroutine (hors programme)

TABLE 3.2 – Mots-clefs du langage Python

Structurons !

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ lire et interpréter un code Python structuré
- ☞ indenter et enchaîner correctement les blocs Python
- ☞ coder une structure conditionnelle (et l'expression conditionnelle)
- ☞ coder une boucle avec un range sur l'intervalle d'entiers ouvert $[0, n[$
- ☞ coder une boucle tant que en précisant la condition de sortie
- ☞ coder une fonction (paramètres formels, effectifs, retour)

A Anatomie d'un programme Python

■ **Définition 34 — Instruction.** Une instruction dans un programme informatique est un mot qui explique à l'ordinateur l'action qu'il doit exécuter.

■ **Définition 35 — Programme informatique.** Un programme informatique est une suite d'instructions.

Un programme informatique se présente sous la forme d'un fichier texte organisé en parties et sous-parties, comme le montre le code 4.1.

Code 4.1 – Anatomie d'un programme Python (variables globales, fonctions, indentation, blocs, programme principal)

```
1 from random import randint
2
3 N = 42                      # Global variables
4
5 def produit(a, b):      # BEGIN BLOC :
```

```

6      p = 0          # INDENTATION local variable
7      c = 0          # INDENTATION local variable
8      while c < a:   # INDENTATION instruction BEGIN BLOC :
9          p = p + b  # INDENTATION INDENTATION instruction
10         c = c + 1  # INDENTATION INDENTATION instruction
11     return p       # INDENTATION instruction
12
13
14
15 if __name__ == "__main__":    # MAIN PROGRAM
16     length = 10
17     results = []
18     while len(results) < length:
19         p = produit(randint(1, N), randint(1, N))
20         if p > N:
21             results.append(p)
22     print(results)
23 # --> [168, 280, 261, 740, 150, 507, 242, 288, 99, 84]

```

P Une des caractéristiques principales du langage Python est de donner un sens à l'indentation dans le code, c'est à dire que **les espaces en début de ligne ont une signification** : ils désignent un bloc d'instructions.

■ **Définition 36 — Bloc d'instructions Python.** Une suite d'instructions indentées au **même niveau** constituent un bloc d'instructions.

■ **Définition 37 — Programme principal.** Le programme principal est le point d'entrée de l'exécution d'un programme informatique : c'est par là que tout commence.

P En Python le programme principal s'appelle `__main__`. Il peut être introduit par les instructions `if __name__=="__main__":`. L'intérêt de cette instruction est de permettre au fichier de se comporter soit comme un programme à exécuter, soit comme un module que l'on peut alors importer dans un autre programme sans exécuter le programme principal.

B Programmation structurée

■ **Définition 38 — Programmation structurée.** Dans le cadre de la programmation structurée, un programme informatique peut-être développé à partir de trois structures :

1. les séquences d'instructions,
2. les structures alternatives,
3. les structures itératives.

Ce paradigme de programmation est une déclinaison du paradigme impératif. Il est proche du fonctionnement des processeurs actuels.

a Séquences d'instructions

Tous les langages de programmation dispose d'un moyen pour exprimer une séquence d'instruction. La plupart du temps on utilise des accolades (en Java, en C), parfois des délimiteurs de type begin ... end (Ocaml). En Python, le point virgule ; et l'indentation (cf. définition 36) permettent de constituer une séquence d'instruction.

b Structures conditionnelles

■ **Définition 39 — Instruction de test ou test.** Une instruction de test est une opération dont le résultat est un booléen.

■ **Définition 40 — Instruction conditionnelle.** L'exécution d'une instruction conditionnelle est soumise à la validité d'un test effectué en amont de l'instruction.

P En Python, il existe deux structures alternatives : le bloc `if` `then` `elif` `else` ou bien l'évaluation sous condition d'une expression `expr if then else`.

Bloc conditionnel en Python

Le code 4.2 recense les syntaxes possibles.

R Lorsqu'on utilise les structures conditionnelles, il est nécessaire d'être vigilant à ce que les conditions s'excluent mutuellement. Dans le cas contraire, c'est le premier test validé qui déclenche le branchement et l'exécution d'une instruction conditionnelle. On peut utiliser `if` sans `else` ou/et sans `elif`, mais il faut être logique dans l'élaboration des conditions pour que l'exécution aboutisse à un algorithme cohérent.

Dans l'exemple 4.2, il n'est pas souhaitable par exemple que les tests soient écrits ainsi `if age <= 50:` et `elif 50 <= age <= 60:`. Logiquement, cela signifierait que si `age` valait 50, on devrait afficher "Still young!" et "Has to work...". Or, seule la première chaîne de caractères sera affichée dans ce cas.

Code 4.2 – blocs conditionnels

```

1 age = 57
2 if age < 50:
3     print("Great !")
4
5 if age < 50:
6     print("Still young !")
7 else:
8     print("Not dead yet !")
9
10 if age < 50:
11     print("Still young !")
12 elif 50 <= age <= 67:
13     print("Has to work...")

```

```
14 else:
15     print("Get some rest !")
```

Expressions conditionnelles en Python

Cette syntaxe est à rapprocher du paradigme fonctionnel. Elle permet de conditionner l'évaluation d'une expression. Le code 4.3 décrit la syntaxe Python.

Code 4.3 – Expression conditionnelle

```
1 autruche = True
2 age = 45 if autruche else 46
3 print(age) # 45
```

c Structures itératives

■ **Définition 41 — Structures itératives ou boucles.** Les structures itératives ou boucles permettent de répéter une séquence d'instructions un certain nombre de fois.

On distingue les boucles conditionnelles des boucles inconditionnelles.

Boucles inconditionnelles POUR

Les boucles inconditionnelles permettent de répéter une séquence d'instructions un nombre explicite de fois. Cela signifie que, lorsqu'on programme une boucle inconditionnelle, on connaît ce nombre et on peut donc l'écrire dans le code.

Algorithme 2 Produit de deux nombres entiers avec boucle inconditionnelle

1: <i>a</i> ← 3 2: <i>b</i> ← 4 3: <i>p</i> ← 0 4: pour <i>k</i> de 0 à <i>b</i> - 1 répéter 5: <i>p</i> ← <i>p</i> + <i>b</i>	> <i>b</i> est un entier.
--	-------------------------------------

Code 4.4 – Boucle inconditionnelle for

```
1 a = 3
2 b = 4
3 p = 0
4 for k in range(b):
5     p += a
6 print(p) # 12
```

P En Python, la fonction `range` permet d'exprimer la plage de variation de la variable de boucle. **Les paramètres de cette fonction sont des entiers** et il faut être vigilant car ceci est une source majeure de pertes de points à l'épreuve d'informatique commune. Le résultat est une séquence immuable.

La signature de cette fonction est `range(start, stop[, step])`. Si on omet de préciser `start`, alors on commence la séquence par zéro. Si on omet de préciser `step`, le pas par défaut vaut un. **La valeur stop est toujours exclue de la séquence.** Donc `range(10)` va renvoyer une séquence `[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]` contenant **dix** éléments, comme le montre le code 4.5.

 Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

Code 4.5 – Utilisation de range

```

1 print("Simple range")
2 for i in range(10):
3     print(i, end="\t")      # 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
4
5 print("\nStart Stop range")
6 for i in range(3, 10):
7     print(i, end="\t")      # 3 4 5 6 7 8 9
8
9 print("\nStart Stop Step range")
10 for i in range(1, 10, 2):
11     print(i, end="\t")      # 1 3 5 7 9

```

Boucles conditionnelles TANT QUE

Les boucles conditionnelles permettent de conditionner la répétition d'une séquence d'instructions à une condition exprimée par un test. Cela signifie que, lorsqu'on programme une boucle conditionnelle, on ne sait pas nécessairement le nombre de répétitions à exécuter. Mais, on sait exprimer la condition d'arrêt des répétitions.

Algorithme 3 Produit de deux nombres entiers avec boucle inconditionnelle

```

1: a ← 3
2: b ← 4
3: k ← 0
4: p ← 0
5: tant que k < b répéter
6:   p ← p + b

```

Code 4.6 – Boucle inconditionnelle while

```

1 a = 3
2 b = 4
3 p = 0

```

```

4 for k in range(b):
5     p += a
6 print(p) # 12

```

R D'une manière générale, on privilégiera l'utilisation des boucles `for`. On choisira une boucle `while` dans les cas où :

- l'on ne peut pas exprimer simplement le nombre de répétitions nécessaires,
- les conditions d'arrêt mettent en jeux des nombres flottants,
- on doit à la fois balayer tout un ensemble et respecter une certaine condition d'arrêt.

d Pourquoi compte-t-on à partir de 0 en informatique? → HORS PROGRAMME

Cette question mérite qu'on s'y attarde un peu car, de nouveau, ceci est à l'origine de pertes de points significatives lors de l'épreuve d'informatique commune. Cette question est liée à une autre : pourquoi spécifie-t-on le paramètre `stop` dans la fonction `range` comme la borne supérieure plutôt que le maximum de la séquence ? Deux questions qui peuvent empêcher de dormir...

Dans une lettre restée célèbre [5], Dijkstra¹ explique les raisons théoriques qui ont poussé les informaticiens à adopter cette convention, car il s'agit bien là d'une convention, on aurait pu choisir de procéder différemment.

La convention choisie pour délimiter les bornes d'une séquence de nombres entiers est la suivante : $\min \leq i < \sup$, le minimum étant inclus et la borne supérieure exclue. Par exemple, la séquence $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$ est exprimée $0 \leq i < 13$.

Tout d'abord, Dijkstra observe qu'une séquence de nombres entiers naturels possède toujours un plus petit élément par lequel on commence ou finit. Donc l'exclure n'est pas judicieux. Ceci justifie le choix du symbole \leq . Ensuite, il observe qu'on pourrait très bien commencer à indexer les séquences par l'élément numéro 1. Mais si on adopte cette convention, alors la plage des indices s'exprime $1 \leq i < N + 1$, ce qui n'est pas très élégant et ne donne pas d'embrée la longueur de la séquence. Par contre, si on commence à zéro, alors cette plage des indices s'écrit $0 \leq i < N$ ce qui présente à la fois l'avantage :

- d'indiquer directement la longueur de la séquence (N),
- de ne pas à avoir à ajouter en permanence $+1$ pour préciser les plages d'indices.

Une autre raison, plus électronicienne, milite pour commencer à zéro. Un tableau en mémoire commence à une case numérotée. Quand on va chercher dans la mémoire le premier élément du tableau, on va donc récupérer cette case. Si on souhaite récupérer le second élément, on incrémente le numéro de la case mémoire de un. Le premier élément se trouve donc à l'indice 0 et le second à l'indice 1.

C'est pourquoi, comme Dijkstra, il faut considérer zéro comme le nombre entier le plus naturel pour commencer à dénombrer ! D'ailleurs, le mot *zéro* vient de l'italien *zefiro* et qui

1. prononcer DailleKeStra

provient lui-même de l'arabe *sifr* qui signifie à l'origine le vide, le néant. Quoi de plus naturel que le vide pour commencer ?

C Fonctions Pythons

Dans un programme, il est inutile voire dangereux de répéter du code déjà écrit : cela nuit à la fiabilité², à la lisibilité³ et à la générativité. C'est pour éviter cela que le paradigme procédural a été inventé.

■ **Définition 42 — Paradigme procédural.** Le paradigme procédural incite à regrouper dans un même code les fonctionnalités importantes d'un programme dans un but d'intelligibilité et de réutilisabilité du code écrit. Les fonctionnalités sont regroupées dans des routines ou des procédures.

 En Python, les routines sont appelées fonctions. On les appellera donc ainsi par la suite.

■ **Définition 43 — Fonctions Python.** Une fonction Python est caractérisée par :

- son nom,
- ses paramètres formels,
- une valeur de retour (optionnelle).

■ **Définition 44 — Appel d'une fonction.** Appeler une fonction, c'est demander son exécution. Cela s'effectue en respectant le prototype de la fonction.

■ **Définition 45 — Prototype d'une fonction.** Le prototype d'une fonction sert de mode d'emploi au développeur. Dans la plupart des langages, le prototype d'une fonction est constitué du nom de la fonction, des paramètres formels qu'elle accepte et de la valeur renvoyée.

■ **Définition 46 — Paramètres formels.** Ce sont les paramètres qui sont utilisés pour écrire la fonction. Ils sont situés dans le prototype. Ils sont formellement exigés par la fonction pour opérer.

■ **Définition 47 — Paramètres effectifs.** Ce sont les paramètres qui apparaissent lors de l'appel d'un fonction, c'est à dire lorsqu'on utilise la fonction. Il sont effectivement transmis à la fonction.

2. car on peut se tromper en recopiant
3. car cela allonge le code inutilement

■ **Exemple 8 —** . Le code 4.7 donne un exemple très simple de fonction. Sur cet exemple, on peut noter :

- le prototype de la fonction : `square(a)`,
- le paramètre formel `a`,
- la valeur renvoyée `x`,
- le paramètre effectif `3`.

Code 4.7 – Fonction Python à un paramètre renvoyant un entier

```

1 def square(a):      # prototype, a is a formal parameter
2     x = a * a        # function body
3     return x         # returned value
4
5 nine = square(3)    # 3 is an effective parameter (argument)
6 print(f"Squaring three gives {nine}") # Squaring three gives 9

```

 **Vocabulary 8 — Parameters - arguments** ⇔ En anglais, les paramètres formels sont désignés par le terme *parameters*, les paramètres effectifs par *arguments*. Certains emploient ces mots en français également.

Le code 4.8 montre un exemple de procédure, c'est à dire une fonction qui ne renvoie rien. Elle ne fait, en apparence seulement, aucun calcul qu'on puisse sauvegarder. Par contre, elle interagit avec la console pour faire afficher des chaînes de caractères⁴.

Code 4.8 – Procédure Python

```

1 def say_hello(name, n):    # prototype
2     for i in range(n):    # function body
3         print(f"Hello {name} !", end="\t")
4         # no returned value
5
6 say_hello("Olivier", 2) # Hello Olivier ! Hello Olivier !

```

Le code 4.9 montre un exemple de fonction avec paramètre optionnel. Si le paramètre `capitalized` n'est pas fourni lors de l'appel de la fonction alors celui-ci se voit attribuer la valeur `True`. S'il existe un paramètre effectif lors de l'appel, c'est celui-ci qui est utilisé.

Ce code montre également qu'avec une structure conditionnelle, il peut exister plusieurs chemins d'exécution avec une valeur retour différente.

Code 4.9 – Fonction avec paramètre optionnel et plusieurs chemin d'exécution avec valeur retour

```

1 def say_my_name(name: str, capitalized=True):
2     # signature with optional parameter
3     if capitalized:
4         return name.capitalize()    # returned value

```

4. ce que l'on appellera un effet au second semestre.

```

5     else:
6         return name.upper()          # returned value
7
8 my_name = say_my_name("olivier")    # calling function
9 print(my_name)                   # Olivier
10 my_name = say_my_name("olivier", False)  # calling function
11 print(my_name)                  # OLIVIER

```

D Conventions de nommage

■ **Définition 48 — Conventions.** Règles de conduite adoptées à l'intérieur d'un groupe social. Exemple : en mathématiques, l'inconnue c'est x .

D'une manière générale, en informatique contemporaine, on préfère les conventions aux configurations⁵, car cela fait gagner un temps précieux. Respecter des conventions dans l'écriture des programmes permet leur traitement automatique par d'autres outils pour générer d'autres programmes (tests, vérification, documentation, mise en ligne, interfaçage). Cela permet également aux développeurs de comprendre plus rapidement un code.

L'intelligibilité est certainement la plus grande qualité qu'on puisse exiger d'un code. Aujourd'hui, dans la plupart des entreprises, des normes de codage sont appliquées afin de rendre le travail collaboratif plus efficace. Pour le langage Python, un ensemble de recommandations a été produit (cf. Python Enhancement Proposals - PEP 8). Donc, si vous ne savez pas trop comment faire, il est toujours possible de s'y référer. Les IDE actuels implémentent ces recommandations et peuvent formater ou proposer des changements conformes aux Python Enhancement Proposals.

M Méthode 3 — Choisir un nom de variable ou de fonction *Mal nommer les choses c'est ajouter au malheur de ce monde^a*. Alors tâchons de bien les nommer.

À faire :

- choisir des noms de variables et de fonctions en minuscules,
- si plusieurs mots sont nécessaires, mettre un _ entre les mots,
- préférer un verbe pour les fonctions,
- appeler un chat un chat.

À ne pas faire :

- utiliser les lettres l,O ou I pour un nom de variables. Elles sont confondues avec 1 ou 0.
- utiliser autre chose que les caractères ASCII (par exemple des lettres accentuées, des lettres grecques ou des kanjis),

5. c'est à dire des arrangements spécifiques.

- appeler une variable d'après un mot clef du langage Python (lambda, list, dict, set, global, try, True...)

a. citation apparemment de Brice Parrain dans une réflexion sur l'étranger d'Albert Camus. À vérifier cependant.

■ **Exemple 9 — Noms courants de variables.** Voici des noms possibles et courants pour :

- les types `int` : `i, j, k, m, n, p, q, a, b`
- les types `float` : `x, y, z, u, v, w`
- les accumulateurs : `acc, s, somme, prod, produit, product`
- les pas^a : `dt, dx, dy, step, pas,`
- les chaînes de caractères : `c, ch, s,`
- les listes : `L, results, values,`
- les dictionnaires : `d, t, ht,`
- les constantes en majuscules : `MAX_SIZE.`

a. c'est à dire la distance entre chaque élément d'un vecteur temporel par exemple

M Méthode 4 — Faire un commentaire Un commentaire peut être utile dans une copie pour détailler un point du code ou expliquer un choix d'implémentation que vous avez fait. Mais d'une manière générale, il n'est pas forcément nécessaire, pourvu que votre code soit intelligible. Le choix des noms des variables, le respect de l'indentation et des conventions sont les clefs d'un code intelligible.

Que peut-il arriver de pire à quelqu'un qui raconte une blague? Devoir l'expliquer. Il en est de même du commentaire. Le commentaire peut être utile à l'intelligibilité mais il peut lui nuire également. Par ailleurs, dans le temps, un commentaire peut faire référence à une ligne modifiée ou une variable dont le nom a changé. Dans ce cas là, le commentaire nuit à la compréhension.

On s'attachera donc à :

- n'inscrire que des commentaires utiles et brefs,
- s'assurer qu'ils sont cohérents avec le code,
- à ne pas paraphraser le code.

On préfèrera écrire un code directement lisible. Sur le site de ce cours, vous trouverez des exemples de copies de concours que je vous aide à analyser. Bien écrire et bien nommer permet de gagner des points.

Listes Python

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ créer une liste simplement ou en compréhension
- ☞ manipuler une liste pour ajouter, ôter ou sélectionner des éléments
- ☞ tester l'appartenance d'un élément à une liste
- ☞ utiliser la concaténation et le tronçonnage sur une liste
- ☞ itérer sur les éléments d'une liste avec une boucle for
- ☞ coder les algorithmes incontournables (count, max, min, sum, avg)

La liste Python est une collection très¹ pratique. Elle est à la base de quasiment tous les algorithmes que l'on demande d'implémenter lors des épreuves de concours. C'est une liste **mutable** implémentée par un tableau dynamique²

A Constructeurs de listes

Cette section s'intéresse à la manière dont on peut créer des listes en Python.

a Crochets

À tout seigneur tout honneur, les crochets sont la voie royale pour créer une liste.

```
1     L = [] # Empty list
2     print(L, type(L)) # []
3     L = [1, 2, 3]
4     print(L) # [1, 2, 3]
```

1. trop?
2. au programme du deuxième semestre.

```

5      L = [True, False, False]
6      print(L) # [True, False, False]
7      L = ["cours", "td", "tp"]
8      print(L) # ['cours', 'td', 'tp']
9      L = [[2.3, 4.7], [5.9, 7.1], [1.8, 3.9]] # Nested List !
10     print(L) # [[2.3, 4.7], [5.9, 7.1], [1.8, 3.9]]

```

L'exemple précédent montre que :

- On peut créer des listes de n'importe quel type de donnée. Une liste est un conteneur avant toute chose.
- On peut créer des listes imbriquées (nested list), c'est à dire des listes de listes. Ces dernières sont très appréciées par les créateurs d'épreuves de concours.

b Constructeur list

La fonction `list()`³ permet également de créer une liste à partir de n'importe quel objet itérable. Elle s'utilise le plus souvent pour convertir un autre objet itérable⁴ en liste.

```

1      L = List() # Empty list
2      print(L, type(L)) # [] <class 'list'>
3      L = list("Coucou !")
4      print(L) # ['C', 'o', 'u', 'c', 'o', 'u', ' ', '!']
5      L = list(range(10))
6      print(L) # [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]

```

c Définir une liste en compréhension

Tout comme les ensembles en mathématiques, les listes peuvent être construites à partir d'une description compréhensible des éléments de la liste. Cette méthode de création de liste est à rapprocher du paradigme fonctionnel.

```

1      L = [ i for i in range(10) ]
2      print(L) # [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
3      L = [ i for i in range(10) if i %2 == 0]
4      print(L) # [0, 2, 4, 6, 8]

```

 Cette méthode de création de liste est puissante mais est très délicate à manipuler. C'est pourquoi il est préférable de ne l'utiliser que si on est vraiment sûr de soi, sinon c'est une perte de points assurée au concours. On peut l'éviter avec une boucle `for` et un `append` et ainsi assurer des points.



Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

-
3. On appelle cette fonction le **constructeur** des objets de type `list`.
 4. un dictionnaire ou une chaîne de caractères par exemple

B Opérations sur une liste

a Longueur d'une liste

La fonction `len` renvoie la longueur d'une séquence. Elle s'utilise donc aussi pour les listes.

```
1     L = [ 1, 2, 3]
2     print(len(L)) # 3
```



En Python, on peut tester si une liste est vide avec la fonction `len`.

```
1     L = [ 1, 2, 3]
2     while len(L) > 0:
3         print(L.pop()) # 3 2 1
```

b Appartenance à une liste

Les mots-clefs `in` et `not in` permettent de tester l'appartenance à une liste et renvoient les booléens correspondants.

```
1     L = [ 1, 2, 3]
2     print(2 in L) # True
3     print(42 in L) # False
4     print(42 not in L) # True
```

c Ajouter un élément à une liste

La méthode `append` de la classe `list` permet d'ajouter un élément à la fin d'une liste. Cette méthode modifie la liste.

```
1     L = [ 1, 2, 3]
2     L.append(4)
3     print(L) # [1, 2, 3, 4]
4     L.append(5)
5     print(L) # [1, 2, 3, 4, 5]
```

d Retirer le dernier élément d'une liste

La méthode `pop` de la classe `list` permet de retirer le dernier élément ajouté.

```
1     L = [ 1, 2, 3 ]
2     L.pop()
3     print(L) # [1, 2 ]
```

C Concaténation et démultiplication de listes

L'opérateur `+` permet de concaténer une liste à une autre liste pour en créer une nouvelle, c'est à dire de créer une nouvelle liste en fusionnant leurs éléments.

```

1      L = [1, 2, 3]
2      M = [4, 5, 6]
3      N = L + M
4      print(N) # [1, 2, 3, 4, 5, 6]
```

L'opérateur `*` permet de démultiplier un élément dans une liste.

```

1      L = [1] * 10
2      print(L) # [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
```

Il existe également l'opérateur de concaténation et d'affectation `+=` ainsi que l'opérateur de démultiplication et d'affectation `*=`.

```

1      L = [1, 2]
2      L += [3]
3      L *= 4
4      print(L) # [1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3]
```

D Des listes indicables

L'intérêt des listes Python est qu'elles permettent d'accéder à un élément particulier en temps constant⁵. Pour cela, il suffit de connaître l'indice de l'élément dans la liste. Naturellement, comme expliqué dans le cours précédent :

- le premier élément d'une liste est l'élément d'indice 0,
- le dernier élément d'une liste est l'élément d'indice `len(L)-1`.

Tout comme les chaînes de caractères, les listes autorisent également les indices négatifs pour identifier un élément à partir de la fin de la chaîne.

```

1      L = [ 1, 2, 3 ]
2      print(L[0]) # 1
3      print(L[len(L) - 1]) # 3
4      print(L[-2]) # 2
```

E Des listes itérables

Une liste Python est itérable, c'est à dire qu'elle peut être l'objet d'une itération via une boucle `for`.

5. C'est parce qu'elles sont implémentées par des tableaux dynamiques.

```

1     L = [ 1, 2, 3 ]
2     for elem in L:
3         print(elem)      # 1 2 3    elem

```

Naturellement, on peut parcourir une liste d'après ses indices :

```

1     L = [ 1, 2, 3 ]
2     for i in range(len(L)):
3         print(L[i])      # 1 2 3

```

L'intérêt de la première syntaxe est qu'on ne peut pas se tromper sur les indices. Le premier inconvénient est que l'on ne peut pas modifier l'élément `elem`. Le second inconvénient est qu'on ne dispose pas l'indice alors qu'on pourrait en avoir besoin...

On choisira donc l'une ou l'autre syntaxe selon qu'il est nécessaire ou pas de disposer de l'indice ou de modifier les éléments.

F Des listes tronçonnables



Vocabulary 9 — Slicing ↽ Tronçonnage

Tout comme les chaînes de caractères, les listes sont tronçonnables.

```

1     L = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
2     print(L[1:3])      # slicing start stop --> [2, 3]
3     print(L[-3:-1])    # negative slicing --> [4, 5]
4     print(L[::-1])     # reverse list --> [6, 5, 4, 3, 2, 1]
5     print(L[0:-1:2])   # slicing start stop step --> [1, 3, 5]

```

G Les algorithmes simples mais incontournables

Les listes Python sont très souvent utilisées pour agréger des éléments différents d'un même type. Lors d'un traitement automatisé des données, il est naturel de vouloir :

- compter les éléments d'un certain type,
- trouver le maximum ou le minimum des éléments s'il y en a un, ou trouver l'indice de cet extrémum,
- calculer une somme, une moyenne ou un écart type, si les éléments de la liste sont numériques.

Le code 5.1 implémente ces algorithmes incontournables en Python.

Code 5.1 – Algorithmes simples et incontournables

```

1 def count_elem_if(L, value):
2     c = 0
3     for elem in L:
4         if elem == value:

```

```
5             c += 1
6     return c
7
8
9 def max_elem(L):
10    if len(L) > 0:
11        m = L[0]
12        for elem in L:
13            if elem > m:
14                m = elem
15        return m
16    else:
17        return None
18
19
20 def min_elem(L):
21    if len(L) > 0:
22        m = L[0]
23        for elem in L:
24            if elem < m:
25                m = elem
26        return m
27    else:
28        return None
29
30
31 def sum_elem(L):
32     acc = 0
33     for elem in L:
34         acc += elem
35     return acc
36
37
38 def avg_elem(L):
39    if len(L) > 0:
40        acc = 0
41        for elem in L:
42            acc += elem
43        return acc / len(L)
44    else:
45        return None
46
47 if __name__=="__main__":
48     L = ["words", "letters", "words", "sentences", "words"]
49     print(count_elem_if(L, "words")) # 3
50     L = [ 13, 19, -7, 23, -29, 5, -3, 41]
51     print(max_elem(L), min_elem(L), sum_elem(L), avg_elem(L)) # 41 -29 62
52     7.75
53     L = []
54     print(max_elem(L), min_elem(L), sum_elem(L), avg_elem(L)) # None None
55     0 None
56     L = list("Anticonstitutionnellement")
57     print(max_elem(L), min_elem(L)) # u A
```

P En Python, il existe une fonction :

- `sum` pour calculer la somme des éléments d'une liste,
- `max` et `min` pour trouver le maximum et le minimum d'une liste.

```
1     L = [1, 2, 3]
2     print(sum(L), max(L), min(L)) # 6, 3, 1
```

Avant de les utiliser, lisez attentivement le sujet de l'épreuve. Il se peut qu'elles ne soient pas autorisées.

 Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

H Listes, copies et références

En manipulant les listes, il faut rester vigilant lorsqu'on souhaite partager des éléments ou copier des éléments. Il faut avoir en mémoire la règle d'or Python⁶.

P L'affection simple d'une liste à une autre ne recopie pas les éléments de la liste mais copie la référence de la liste. Sur l'exemple suivant, M et L désigne le même objet en mémoire. Si on modifie l'un, on modifie l'autre.

```
1     L = [1, 2, 3]
2     M = L
3     print(id(M) == id(L)) # True
4     M[0] = 42
5     print(L) # [42, 2, 3]
```

Il n'y a donc pas recopie des éléments dans ce cas.

Par contre, l'instruction suivante permet de recopier une liste, c'est à dire dupliquer ses éléments en mémoire. On dispose alors de deux références vers deux objets différents. L'un ne modifie pas l'autre.

```
1     L = [1, 2, 3]
2     M = L[:]
3     print(id(M) == id(L)) # False
4     M[0] = 42
5     print(L) # [1, 2, 3]
```

I Listes, paramètres et fonctions

Cette section s'intéresse au cas où une liste est un paramètre d'une fonction. Que se passe-t-il dans ce cas ?

6. Toute variable Python est une référence vers un objet en mémoire.

La liste étant une séquence mutable, lorsqu'une fonction utilise une liste qu'elle a reçue en paramètre, les opérations sont directement effectuées sur la liste en mémoire comme le montre le code 5.2. Ceci explique pourquoi on n'a pas besoin de renvoyer une liste modifiée par une fonction si celle-ci a été transmise en paramètre. **C'est ce qu'on appelle un passage par référence d'un type mutable.**

Comme le montre l'exemple 5.2, pour une variable immuable comme un `int`, le passage en paramètre n'accorde pas plus de droits sur l'objet : celui-ci est toujours immuable. Donc, d'autres références sont créées pour enregistrer les calculs. Si la dernière référence créée contenant le résultat n'est pas renvoyée par la fonction en utilisant `return`, le calcul est perdu.

On fera donc attention à utiliser `return` lorsqu'il le faut !

Code 5.2 – Passage en paramètre d'un type mutable et d'un type immuable à une fonction

```

1 def f(L):
2     print("inside f start :", id(L), L)
3     for i in range(len(L)):
4         L[i] = L[i] + 100
5     print("inside f end :", id(L), L)
6
7
8 def g(a):
9     print("inside g start :", id(a), a)
10    for i in range(3):
11        a = 10 * a
12    print("inside g end : ", id(a), a)
13
14
15 if __name__ == "__main__":
16     M = [1, 2, 3]
17     f(M)
18     print("main M", id(M), M)
19
20     b = 2
21     g(b)
22     print("main b", id(b), b)
```

Voici le résultat de l'exécution de ce code :

```

1   inside f start : 4374619648 [1, 2, 3]
2   inside f end : 4374619648 [101, 102, 103]
3   main M 4374619648 [101, 102, 103]
4   inside g start : 4373872912 2
5   inside g end : 4373887856 2000
6   main b 4373872912 2
```

J Tuples

Les tuples Python sont des séquences immuables que l'on construit avec les parenthèses `()`. On peut les manipuler comme des listes : ils sont indéchirables, itérables et tronçonnables. Il

ne faut juste pas tenter de modifier leurs éléments!

```
1     T = (1, 2, 3, 4, 5)
2
3     for elem in T:
4         print(elem)
5
6     for i in range(len(T)):
7         print(T[i])
8
9     print(T[-1])
10    print(T[::-1])
11    print(T[1:4:2])
```

Trier et rechercher

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ expliquer le fonctionnement d'algorithmes de tri simple,
- ☒ compter le nombre d'opération élémentaires nécessaire à l'exécution d'un algorithme,
- ☒ caractériser un tri (comparatif, en place, stable, en ligne)
- ☒ rechercher un élément dans un tableau trié par recherche dichotomique

Trier est une activité que nous pratiquons dès notre plus jeune âge : les couleurs, les formes, les tailles sont autant d'entrées possibles pour cette activité. Elle est également omniprésente dans l'activité humaine, dès l'instant où il faut rationaliser une activité. Dans le cadre du traitement de l'information, on y a si souvent recours qu'on n'y prête quasiment plus attention. C'est pourquoi les algorithmes de tri ont été intensément étudiés et raffinés à l'extrême : il s'agit d'être capable de trier n'importe quel jeu de données pourvu qu'un ordre puisse être défini et de sélectionner le tri le plus efficace selon le tri à effectuer.

Lors du traitement des informations, le tri est souvent associé à une autre activité : la recherche d'un élément dans un ensemble trié. En effet, la recherche dichotomique permet d'accélérer grandement la recherche d'un élément, pourvu que celui-ci soit trié.

Ce chapitre esquisse donc quelques algorithmes de tri simples à coder puis aborde la recherche recherche dichotomique dans un tableau trié.

Dans tout le chapitre, on considère :

- un tableau noté t , indiqué avec des crochets, c'est à dire que l'on peut accéder à un élément en écrivant $t[i]$,
- des éléments à trier dont le type importe peu, pourvu qu'on dispose d'un ordre sur ces éléments,

On donnera au cours de l'année une définition précise d'une relation d'ordre, mais, pour

l'instant, on considère juste qu'il est possible de comparer deux éléments entre eux. C'est à dire qu'on peut réaliser un test de type $t[i] < t[j]$ et récupérer une réponse booléenne à ce test. C'est d'ailleurs ainsi que la plupart des contexte informatique définissent un ordre dans un type de donnée.

 En Python, on implémentera ces tableaux par des listes.

A Comment caractériser un algorithme de tri?

Pour distinguer les différents algorithmes de tri, on dispose de nombreux qualificatifs. Les définitions suivantes en expliquent quelques uns parmi les plus courants.

■ **Définition 49 — Tri par comparaisons.** Un tri par comparaison procède en comparant les éléments deux à deux^a.

a. ce qui sous-entend que certains algorithmes, comme l'algorithme de tri par comptage, procèdent différemment.

■ **Définition 50 — Tri en place.** Un tri est dit en place s'il peut être directement effectué dans le tableau initial et ne nécessite pas l'allocation d'une nouvelle structure en mémoire de la taille du tableau initial^a.

a. Cette propriété est importante car la mémoire est un paramètre très couteux des systèmes électroniques, tant sur le plan énergétique que sur le plan financier.

■ **Définition 51 — Tri incrémental ou en ligne.** Il s'agit d'un tri capable de commencer le tri avant même d'avoir reçu l'intégralité des données^a.

a. Cette propriété est très intéressante dans le cadre pour le traitement en temps réel des systèmes dynamiques (qui évoluent dans le temps)

■ **Définition 52 — Tri stable.** Un tri est dit stable s'il préserve l'ordonnancement initial des éléments que l'ordre considère comme égaux mais que l'on peut distinguer^a.

a. par exemple, dans un jeu de cartes, deux valets (même type de carte) de couleurs différentes.

B Trier un tableau

a Tri par sélection

Le tri par sélection est un tri par comparaisons et échanges, en place, non stable et hors ligne.

Son principe est le suivant. On cherche le plus petit élément dans le tableau (de droite) et on l'insère à la fin tableau trié de gauche. Au démarrage de l'algorithme, on cherche le plus petit élément du tableau et on l'insère à la première place. Puis on continue avec le deuxième plus petit élément du tableau que l'on ramène à la deuxième place et ainsi de suite.

Algorithme 4 Tri par sélection

```

1: Fonction TRIER_SELECTION(t)
2:   n ← taille(t)
3:   pour i de 0 à n – 1 répéter
4:     min_index ← i                                ▷ indice du prochain plus petit
5:     pour j de i + 1 à n – 1 répéter             ▷ pour tous les éléments non triés
6:       si t[j] < t[min_index] alors
7:         min_index ← j                            ▷ c'est l'indice du plus petit non trié!
8:       échanger(t[i], t[min_index])                ▷ c'est le plus grand des triés!

```

b Tri par insertion

Le tri par insertion est un tri par comparaison, stable et en place. De plus, si les données ne sont pas toutes présentes au démarrage de l'algorithme, le tri peut quand même commencer, ce qui n'est pas le cas du tri par sélection. C'est donc un tri en ligne également.

Son principe est le suivant : on considère deux parties gauche (triée) et droite (non triée) du tableau. Puis, on cherche à insérer le premier élément non trié (du tableau de droite) dans le tableau trié (de gauche) à la bonne place.

Algorithme 5 Tri par insertion

```

1: Fonction TRIER_INSERTION(t)
2:   n ← taille(t)
3:   pour i de 1 à n-1 répéter
4:     à_insérer ← t[i]
5:     j ← i
6:     tant que t[j-1] > à_insérer et j>0 répéter      ▷ faire monter les éléments
7:       t[j] ← t[j-1]
8:       j ← j-1
9:     t[j] ← à_insérer                                ▷ insertion de l'élément

```

c Tri par comptage

Le tri par comptage est un tri par dénombrement de valeurs entières. Il ne porte donc que sur des tableaux contenant des entiers. C'est un tri non comparatif, en place, stable et hors ligne.

Le principe du tri par comptage est de compter le nombre d'occurrences de chaque valeur entière, de les cumuler puis de construire un nouveau tableau à partir de ce cumul.

R Ce tri est certes non comparatif car il n'utilise pas explicitement de comparaisons. Mais l'ordre des entiers est utilisé lors de la création de l'histogramme.

Algorithme 6 Tri par comptage

```

1: Fonction TRIER_COMPTAGE( $t, v_{max}$ )            $\triangleright v_{max}$  est le plus grand entier à trier
2:    $n \leftarrow \text{taille}(t)$ 
3:    $\text{comptage} \leftarrow$  un tableau de taille  $v_{max} + 1$  initialisé avec des zéros
4:    $\text{résultat} \leftarrow$  un tableau de taille  $n$ 
5:   pour  $i$  de 0 à  $n - 1$  répéter            $\triangleright$  dénombrer chaque valeur du tableau.
6:      $\text{key} \leftarrow t[i]$ 
7:      $\text{comptage}[\text{key}] \leftarrow \text{comptage}[\text{key}] + 1$             $\triangleright$  création d'un histogramme.
8:   pour  $i$  de 1 à  $v_{max}$  répéter            $\triangleright$  cumuler les décomptes.
9:      $\text{comptage}[i] \leftarrow \text{comptage}[i] + \text{comptage}[i-1]$ 
10:  pour  $i$  de 0 à  $n - 1$  répéter            $\triangleright$  créer le tableau trié à partir des cumuls.
11:     $\text{key} \leftarrow t[i]$ 
12:     $\text{résultat}[\text{comptage}[\text{key}] - 1] \leftarrow \text{key}$ 
13:     $\text{comptage}[\text{key}] \leftarrow \text{comptage}[\text{key}] - 1$ 
14:  renvoyer output

```

C Recherche séquentielle

Rechercher d'un élément dans un tableau est une opération nécessaire pour de nombreux algorithmes. Il est donc important de disposer d'algorithmes rapides pour exécuter cette tâche. La recherche séquentielle est l'algorithme le plus naïf pour réaliser cette tâche. L'algorithme 7 rappelle la recherche séquentielle d'un élément dans un tableau.

Algorithme 7 Recherche séquentielle d'un élément dans un tableau

```

1: Fonction RECHERCHE_SÉQUENTIELLE( $t, \text{elem}$ )
2:    $n \leftarrow \text{taille}(t)$ 
3:   pour  $i$  de 0 à  $n - 1$  répéter
4:     si  $t[i] = \text{elem}$  alors
5:       renvoyer  $i$             $\triangleright$  élément trouvé, on renvoie sa position dans  $t$ 
6:   renvoyer l'élément n'a pas été trouvé

```

Dans le pire des cas, c'est à dire si l'élément recherché n'appartient pas au tableau, la recherche séquentielle nécessite un nombre d'instructions proportionnel à n , la taille du tableau. On dit que sa complexité est en $O(n)$.

D Recherche dichotomique

Si le tableau dans lequel la recherche est à effectuer est trié, alors la recherche dichotomique à privilégier. Celle-ci est illustrée sur la figure 6.1.

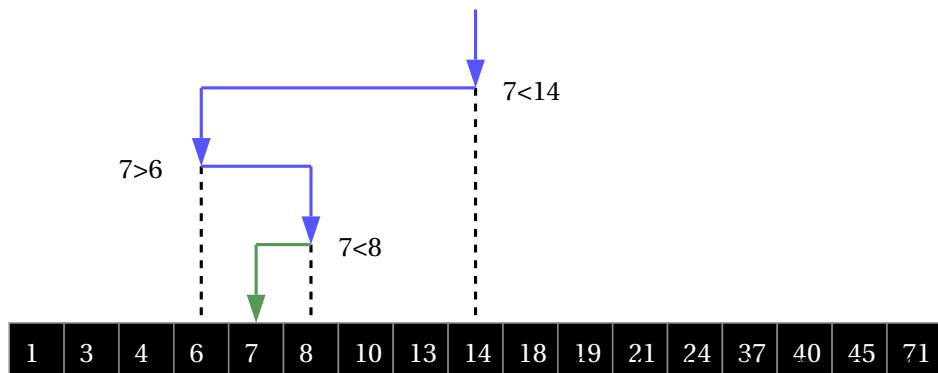


FIGURE 6.1 – Illustration de la recherche dichotomique de la valeur 7 dans un tableau trié
(Source : Wikimedia Commons)

■ **Définition 53 — Recherche dichotomique.** La recherche dichotomique recherche un élément dans un tableau trié en éliminant à chaque itération la moitié du tableau qui ne contient pas l'élément. Le principe est le suivant :

- comparer la valeur recherchée avec l'élément **médian** du tableau,
- si les valeurs sont égales, la position de l'élément dans le tableau a été trouvée,
- sinon, il faut poursuivre la recherche dans la moitié du tableau qui contient l'élément à coup sûr.

Si l'élément existe dans le tableau, alors l'algorithme renvoie son indice dans le tableau. Sinon, l'algorithme signifie qu'il ne l'a pas trouvé.

Le mot dichotomie vient du grec et signifie couper en deux. En prenant l'élément médian du tableau, on opère en effet une division de la taille du tableau en deux parties. On ne conserve que la partie qui pourrait contenir l'élément recherché.

À chaque tour de boucle, l'algorithme 8 divise par deux la taille du tableau considéré. Dans le pire des cas, le dernier tableau considéré comporte un seul élément. Supposons que la taille du tableau est une puissance de deux : $n = 2^p$. On a alors $1 = \frac{n}{2^k} = \frac{2^p}{2^k}$, si k est le nombre d'itérations effectuées pour en arriver là. C'est pourquoi le nombre d'itérations peut s'écrire : $k = \log_2 2^p = p \log_2 2 = p = \log_2(n)$. La complexité de cet algorithme est donc logarithmique en $O(\log_2(n))$, ce qui est bien plus efficace qu'un algorithme de complexité linéaire.

R Si le tableau contient plusieurs occurrences de l'élément à chercher, alors l'algorithme 8 renvoie un indice qui n'est pas celui de la première occurrence de l'élément. C'est pourquoi, l'algorithme 9 propose une variation qui renvoie l'indice de la première occurrence de l'élément.

L'algorithme de la recherche dichotomique peut s'écrire de manière récursive, comme on le verra dans le chapitre suivant.

Algorithme 8 Recherche d'un élément par dichotomie dans un tableau trié

```

1: Fonction RECHERCHE_DICHOTOMIQUE(t, elem)
2:   n ← taille(t)
3:   g ← 0
4:   d ← n-1
5:   tant que g ≤ d répéter                                ▷ ≤ cas où valeur au début, au milieu ou à la fin
6:     m ← (g+d)//2                                         ▷ Division entière : un indice est un entier!
7:     si t[m] < elem alors
8:       g ← m + 1                                         ▷ l'élément devrait se trouver dans t[m+1, d]
9:     sinon si t[m] > elem alors
10:    d ← m - 1                                         ▷ l'élément devrait se trouver dans t[g, m-1]
11:   sinon
12:     renvoyer m                                       ▷ l'élément a été trouvé
13:   renvoyer l'élément n'a pas été trouvé

```

R Attention à ne pas confondre cet algorithme avec la recherche de zéro d'une fonction par dichotomie. Le principe est le même. Cependant, dans le cas de la recherche dichotomique, on s'intéresse à des indices de tableaux, donc à des nombres entiers. C'est pourquoi on choisit de prendre le milieu via la division entière $//$. Lorsqu'on cherche les zéros d'une fonction mathématique, on s'intéresse à des nombres réels représentés par des flottants en machine. C'est pourquoi lorsqu'on prend le milieu, on choisit alors la division de flottants $/$.

R Le milieu d'un segment $[a, b]$ vaut $m=(a+b)/2$, **non pas** $m=(b-a)/2$.

E Compter les opérations

Pour comparer l'efficacité des algorithmes, on compte le nombre d'opérations élémentaires nécessaire à leur exécution en fonction de la taille des données d'entrée. Dans notre cas, la taille des données d'entrée est souvent la taille du tableau à trier. Que se passe-t-il lorsque cette taille augmente? Le temps d'exécution de l'algorithme augmente-t-il? Et de quelle manière? Linéairement, exponentiellement ou logarithmiquement par rapport à la taille?

Dans ce qui suit, on suppose qu'on dispose d'une machine pour tester l'algorithme. On fait l'hypothèse réaliste que les opérations élémentaires suivantes sont réalisées en des temps constants par cette machine :

- opération arithmétique $+, -, *, /, //, \%$, coûts associé c_{op} ,
- tests $==, !=, <, >$, coûts associé c_t ,
- affectation \leftarrow , coût associé c_{\leftarrow}
- accès à un élément indicé $t[i]$, coût associé c_a
- structures de contrôles (structures conditionnelle et boucles), coût associé négligé,
- échange de deux éléments dans le tableau, coût c_e ,

Algorithme 9 Recherche d'un élément par dichotomie dans un tableau trié, renvoyer l'indice minimal en cas d'occurrences multiples.

```

1: Fonction RECHERCHE_DICHOTOMIQUE_INDICE_MIN(t, elem)
2:   n ← taille(t)
3:   g ← 0
4:   d ← n-1
5:   tant que g < d répéter                                ▷ attention au strictement inférieur!
6:     m ← (g+d)//2                                         ▷ Un indice de tableau est un entier!
7:     si t[m] < elem alors
8:       g ← m + 1                                         ▷ l'élément devrait se trouver dans t[m+1, d]
9:     sinon
10:    d ← m                                              ▷ l'élément devrait se trouver dans t[g, m]
11:   si t[g] = elem alors
12:     renvoyer g
13:   sinon
14:     renvoyer l'élément n'a pas été trouvé

```

- accès à la longueur d'un tableau, coût c_l .

■ **Exemple 10 — Compter le nombres d'opération élémentaires de la recherche séquentielle.** Sur l'algorithme 10, on a reporté les coûts pour chaque instruction. On peut donc maintenant calculer le coût total. Ce coût C va dépendre de la taille du tableau que l'on va noter n . Il va également dépendre du chemin d'exécution : est-ce que le test ligne 4 est valide ou non ? On choisit de se placer dans le pire des cas, c'est à dire qu'on suppose que le test est invalidé à toutes les itérations ^a. Dans ce cas, on peut dénombrer les coûts élémentaires :

$$C(n) = c_{\leftarrow} + \sum_{i=0}^{n-1} c_a + c_t \quad (6.1)$$

$$= c_{\leftarrow} + (c_a + c_t)n \quad (6.2)$$

Dans le pire des cas, on observe donc que le coût de la recherche séquentielle est proportionnel à n . On notera cette au deuxième semestre $C(n) = O(n)$, signifiant par là que le coût est dominé asymptotiquement par n . Lorsque n augmente, le coût de la recherche séquentielle dans le pire des cas n'augmente pas plus vite que n .

Si on se place dans le meilleur des cas, c'est à dire lorsque l'élément recherché se situe dans la première case du tableau, on obtient un coût total de $C(n) = c_{\leftarrow} + c_a + c_t$, c'est à dire un coût qui ne dépend pas de n . On le notera $C(n) = O(1)$ et on dira que ce coût est constant.

^a. i.e. l'élément cherché n'est pas dans le tableau.

Algorithme 10 Recherche séquentielle d'un élément dans un tableau

```

1: Fonction RECHERCHE_SÉQUENTIELLE(t, elem)
2:   n ← taille(t)                                     ▷ affectation : ca
3:   pour i de 0 à n – 1 répéter                   ▷ répéter n fois
4:     si t[i] = elem alors                         ▷ accès, test : ca + ct
5:       renvoyer i
6:   renvoyer l'élément n'a pas été trouvé

```

R L'analyse des calculs précédents montre qu'on peut simplifier notre approche du décompte des opérations. Étant donné que ce qui nous intéresse, c'est l'évolution du coût en fonction de la taille du tableau, les valeurs des constantes de coût des opérations élémentaires importent peu, pourvu que celles-ci soient constantes. **C'est pourquoi, on supposera désormais qu'on dispose d'une machine de test pour nos algorithmes telle que chaque instruction élémentaire possède un coût constant que l'on notera c.**

Algorithme 11 Tri par insertion, calcul du nombre d'opérations

```

1: Fonction TRIER_INSERTION(t)
2:   n ← taille(t)                                     ▷ affectation : ca
3:   pour i de 1 à n-1 répéter                   ▷ affectation : ca
4:     à_insérer ← t[i]                                ▷ accès, affectation : 2c
5:     j ← i                                         ▷ affectation : ca
6:     tant que t[j-1] > à_insérer et j>0 répéter ▷ accès, tests : 3c
7:       t[j] ← t[j-1]                                ▷ accès, affectation : 3c
8:       j ← j-1                                       ▷ affectation : ca
9:     t[j] ← à_insérer                               ▷ accès, affectation : 2c

```

■ **Exemple 11 — Compter le nombre d'opérations élémentaires pour le tri par insertion.** Sur l'algorithme 11, on a reporté les coûts pour chaque instruction. On peut donc maintenant calculer le coût total. On choisit de se placer dans le pire des cas, c'est à dire lorsqu'on insère l'élément systématiquement au début du tableau ^a. La boucle *tant que* est donc exécutée $i - 1$ fois.

$$C(n) = c + \sum_{i=1}^{n-1} (2c + c + (i - 1)(3c + c) + 2c) \quad (6.3)$$

$$= c + c \sum_{i=1}^{n-1} (1 + 4i) \quad (6.4)$$

$$= c + c(n - 1) + 4 \frac{n(n - 1)}{2} \quad (6.5)$$

$$= (c - 2)n + 2n^2 \quad (6.6)$$

Dans le pire des cas, le coût total du tri par insertion est donc en $O(n^2)$.

Le meilleur des cas, pour l'algorithme de tri par insertion, c'est lorsque l'élément à insérer n'a jamais à être déplacé^b. Alors la condition de sortie de la boucle *tant que* est valide dès le premier test. Le coût total devient alors :

$$C(n) = c + \sum_{i=1}^{n-1} (2c + c + 3c) \quad (6.7)$$

$$= c + 6c(n - 1) \quad (6.8)$$

$$= -5c + 6cn \quad (6.9)$$

Dans le meilleur des cas, on a donc un coût du tri par insertion en $O(n)$.

- a. Le tableau est donné en entrée dans l'ordre inverse à l'ordre souhaité.
- b. Le tableau donné en entrée est déjà trié!

■ **Exemple 12 — Compter le nombre d'opérations élémentaires pour le tri par comptage.** Si on observe l'algorithme 6, on se rend compte qu'il est composé d'une suite de trois boucles, dont deux dépendent de la taille du tableau n et une de la valeur maximale des entiers qu'on chercher à trier v_{max} . On peut compter le nombre d'opérations et procéder de la même manière que précédemment mais en tenant compte de ces deux paramètres.

On note que pour cette algorithme, le nombre d'itérations est connu dès le départ, il n'y a pas de pire ou de meilleur cas.

$$C(n, v_{max}) = cv_{max} + c + \sum_{i=0}^{n-1} 6c + \sum_{i=1}^{v_{max}} 3c + \sum_{i=0}^{n-1} 5c \quad (6.10)$$

$$= cv_{max} + c + 6cn + 3c(v_{max} - 1) + 5cn \quad (6.11)$$

$$= c(v_{max} - 2) + 3cv_{max} + 11cn \quad (6.12)$$

$$= O(v_{max} + n) \quad (6.13)$$

$$= O(\max(v_{max}, n)) \quad (6.14)$$

Le coût total de l'algorithme de tri par comptage est donc linéaire par rapport aux deux paramètres d'entrée. Il est donc raisonnable de l'utiliser lorsque n est du même ordre que v_{max} . Par contre, il nécessite la création d'un tableau de même taille n ^a, ce qui peut avoir des conséquences sur la mémoire du système.

a. ce tri n'est pas en place

F Trier avec les fonctions natives de Python

P

Il existe deux solutions natives pour trier une liste en Python :

1. appeler la fonction `sorted` sur une liste ou un dictionnaire. Cette fonction renvoie une nouvel objet trié sans modifier l'original. Par exemple, `T = sorted(L)`. Dans le cas d'un dictionnaire, ce sont les clefs qui sont triées.
2. appeler la méthode `sort` de la classe List. Cette méthode effectue un tri en place sur une liste et la modifie. Par exemple, `L.sort()`. Cette méthode n'existe pas pour les dictionnaires.

Les tris opérés par ces fonctions sont garantis stables. Cela signifie que lorsque plusieurs enregistrements on la même clef, leur ordre original est préservé.

La documentation Python est à consulter ici pour les usages plus spécifiques de ces fonctions. On peut notamment spécifier :

- un tri ascendant ou descendant à l'aide du paramètre optionnel booléen `reverse`,
- à la fonction l'élément à utiliser pour le tri (en cas d'élément multiple) et même le comparateur à l'aide du paramètre optionnel `key`.

P

Par défaut, Python trie les n-uplets dans l'ordre lexicographique.

Récursivité

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ expliquer le principe d'un algorithme récursif
- ☞ imaginer une version récursive d'un algorithme
- ☞ trouver et coder une condition d'arrêt à la récursivité
- ☞ coder des algorithmes à récursivité simple et multiple en Python
- ☞ identifier le type de récursivité d'un algorithme

A Principles

La récurrence est une méthode à la fois simple et puissante pour définir un objet ou résoudre un problème mathématique. La récursivité, c'est la projection de cette méthode en informatique. La plupart des langages contemporains sont récursifs, c'est à dire qu'ils permettent de programmer récursivement.

■ **Définition 54 — Algorithme récursif.** Un algorithme \mathcal{A} qui résout un problème \mathcal{P} est dit récursif si, où au cours de son exécution, il s'utilise lui-même pour résoudre le problème \mathcal{P} avec des données d'entrées différentes.

■ **Définition 55 — Appel récursifs d'une fonction.** On désigne par le terme appel récursif l'utilisation d'une fonction dans la définition de la fonction elle-même.

■ **Définition 56 — Pile d'exécution.** La pile d'exécution d'un processus est un emplacement mémoire destiné à mémoriser les appels de fonction, les paramètres, les variables locales ainsi que l'adresse de retour^a de chaque fonction en cours d'exécution.

^a. c'est à dire la case mémoire qui va contenir la valeur renvoyée par la fonction.

**Vocabulary 10 — Call stack** ⇔ Pile d'exécution

L'algorithme 12 est un algorithme récursif qui permet de calculer la fonction factorielle d'un entier naturel. La ligne 5 contient l'appel récursif. À la lecture de cet algorithme, on peut être pris d'un vertige : cela va-t-il se terminer ? Est-il possible de s'appeler soi-même pour résoudre un problème ? Comment gérer en mémoire les appels successifs ?

Algorithme 12 Factoriel récursif

1: Fonction FACT(n)	
2: si n <= 1 alors	▷ Condition d'arrêt
3: renvoyer 1	
4: sinon	
5: renvoyer n × FACT(n-1)	▷ Appel récursif

Pour calculer, cet algorithme procède comme suit : il suspend momentanément le calcul du résultat de la fonction à la réception du résultat de l'appel récursif en empilant l'appel récursif sur la pile d'exécution. La pile d'exécution est donc une zone mémoire essentielle qui garantit le bon déroulement des appels successifs des fonctions récursives ou non.

■ **Exemple 13 — Calculer 3! récursivement.** Dans le cas de 3!, l'exécution se présente ainsi :

1. appel de FACT(3),
2. attente du résultat de FACT(2) qui est empilé sur la pile d'exécution,
3. attente du résultat de FACT(1) qui est empilé sur la pile d'exécution,
4. FACT(1) renvoie 1, on dépile,
5. 1 est multiplié par 2, 2 est renvoyé par FACT(2), on dépile,
6. 2 est multiplié par 3 et 6 est renvoyé par FACT(3).

La figure 7.1 illustre ce fonctionnement.

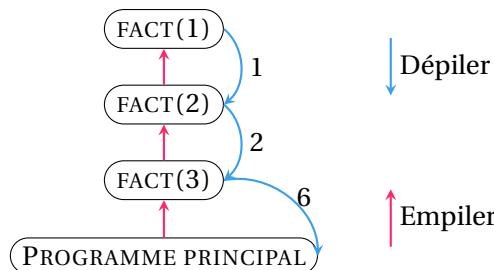


FIGURE 7.1 – Vision de la pile d'exécution de l'algorithme factoriel récursif 12 pour le calcul de 3!

R Comme toute zone mémoire, la pile d'exécution est limitée, ce qui a des conséquences concrètes en programmation : on ne peut pas effectuer une infinité d'appels récursif. Une limite existe à la profondeur de la récursivité : la nature est têtue, notre monde physique demeure fini.

R La définition 54 ne garantit pas le bon fonctionnement d'un algorithme récursif. Pour qu'un algorithme récursif aboutisse correctement, il est nécessaire que le nombre d'appels récursifs soit fini. Dans le cas contraire, la pile d'exécution explose en mémoire : il n'y a plus assez de place pour la stocker et le système s'effondre.

M **Méthode 5 — Formuler correctement un algorithme récursif** Afin d'éviter les appels récursifs infinis, il est nécessaire d'être vigilant lors de l'écriture des algorithmes récursifs. Il faut :

1. distinguer au moins un cas sans appel récursif qui permet de terminer l'algorithme, c'est à dire **une condition d'arrêt**,
2. appeler récursivement avec des données **plus proches** des données qui satisfont la condition d'arrêt.

Dans le cas de l'algorithme 12, la condition d'arrêt est la ligne 2. Par ailleurs, on voit bien que l'appel récursif stipule paramètre $n - 1$ qui se rapproche de cette condition d'arrêt. Une formulation plus correcte et plus théorique repose sur l'induction et la notion d'ordre bien fondé.

B Types de récursivité

■ **Définition 57 — Récursivité simple.** La récursivité est dite simple si une exécution de l'algorithme aboutit à un seul appel récursif.

■ **Exemple 14 — Algorithmes simplement récursifs.** L'algorithme factoriel récursif 12 est une récursivité simple. Il est possible de formuler l'algorithme de recherche dichotomique récursivement (cf. algorithme 13). Cet algorithme est également de récursivité simple : chaque chemin d'exécution n'opère qu'un seul appel récursif.

■ **Définition 58 — Récursivité multiple.** La récursivité est dite multiple si une exécution de l'algorithme aboutit à plusieurs appels récursifs.

■ **Exemple 15 — Algorithmes à récursivité multiple.** Les algorithmes calculant la suite de Fibonacci, la solution au jeu des tours d'Hanoi ou l'exemple 14 sont à récursivité multiples. L'algorithme 14 est à récursivité multiple car la fonction est appelée deux fois à la ligne sept.

Algorithme 13 Recherche récursive d'un élément par dichotomie dans un tableau trié

```

1: Fonction REC_DICH(t, g, d, elem)
2:   si g = d alors                                ▷ Condition d'arrêt
3:     si t[g] = elem alors
4:       renvoyer g
5:     sinon
6:       renvoyer l'élément n'a pas été trouvé
7:   sinon
8:     m ← (g+d)//2
9:     si t[m] < elem alors
10:      REC_DICH(t, m+1, d, elem)                  ▷ Appel récursif
11:    sinon
12:      REC_DICH(t, g, m, elem)                    ▷ Appel récursif

```

Algorithme 14 Est-il mon aïeul?

```

1: Fonction EST_AIEUL(p1, p2)
2:   si p1 est un des parents de p2 alors
3:     renvoyer Vrai
4:   sinon si p1 est plus jeune que p2 alors
5:     renvoyer Faux
6:   sinon
7:     renvoyer EST_AIEUL(p1, mère(p2)) ou EST_AIEUL(p1, père(p2))

```

■ **Définition 59 — Récursivité terminale.** Un algorithme est dit à récursivité terminale s'il renvoie directement le résultat de l'appel récursif sans opération supplémentaire. Cette propriété rend l'opération de dépilement de la pile d'exécution très efficace puisqu'on n'a pas à faire de calculs supplémentaires.

■ **Exemple 16 — Factoriel récursif terminal.** On peut transformer l'algorithme 12 pour qu'il présente une récursivité terminale (cf. 15)

Algorithme 15 Factoriel récursif terminal

```

1: Fonction FACT(n, acc)                           ▷ on ajoute un accumulateur
2:   si n <= 1 alors                            ▷ Condition d'arrêt
3:     renvoyer acc
4:   sinon
5:     renvoyer FACT(n-1, n × acc )            ▷ Appel récursif avec accumulateur

```

C Du récursif à l'itératif

Dans la pratique, un algorithme est souvent énoncé récursivement car l'expression est plus puissante, plus intelligible et plus facile à trouver¹. Cependant, on convertit la plupart du temps l'algorithme récursif en itératif afin d'être plus performant : il s'agit d'éviter d'avoir à effectuer les appels récursifs successifs qui ralentissent souvent l'exécution sur les machines concrètes.

M Méthode 6 — Du récursif à l'itératif La formulation d'un algorithme sous la forme d'un algorithme récursif **terminal** permet de facilement en déduire une version itérative. Le principe est expliqué par les algorithmes 16 et 17.

En appliquant la méthode décrite par ces algorithmes, on peut retrouver facilement la version itérative de factorielle (cf. algorithme 18).

Algorithme 16 Algorithme récursif terminal

```

1: Fonction REC_TERM(n)
2:   si ARRÊTER(n) alors
3:     renvoyer SOLUTION(n)
4:   sinon
5:     CALCULER_AVEC(n)
6:     renvoyer REC_TERM(MODIFIER(n))

```

Algorithme 17 Version itérative d'un algorithme récursif terminal

```

1: Fonction ITER(n)
2:   tant que non ARRÊTER(n) répéter
3:     CALCULER_AVEC(n)
4:     n ← MODIFIER(n)
5:   renvoyer SOLUTION(n)

```

Algorithme 18 Factoriel itératif

```

1: Fonction FACT(n)
2:   acc ← 1
3:   tant que n > 1 répéter
4:     acc ← n × acc
5:     n ← n - 1
6:   renvoyer acc

```

1. parfois...

R Programmer récursivement est une manière de penser très structurante. Elle repose sur le principe d'induction^a. Les algorithmes proposés en TP permettent de développer cette compétence importante.

a. exposé en option informatique

Diviser pour régner

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ énoncer le principe d'un algorithme de type diviser pour régner
- ☒ distinguer les cas d'utilisation de ce principe (sous-problèmes indépendants)
- ☒ évaluer la complexité d'un algorithme diviser pour régner

A Diviser pour régner

■ **Définition 60 — Algorithme de type diviser pour régner.** L'idée centrale d'un algorithme de type diviser pour régner est de décomposer le problème étudié en plusieurs sous-problèmes de taille réduite. Ces algorithmes peuvent éventuellement être exprimés récursivement et sont souvent très efficaces.

On distingue trois étapes lors de l'exécution d'un tel algorithme :

1. la division du problème en sous-problèmes qu'on espère plus simples à résoudre,
2. la résolution des sous-problèmes, c'est à cette étape que l'on peut faire appel à la récursivité,
3. la combinaison des solutions des sous-problèmes pour construire la solution au problème.



On devrait donc logiquement nommer ces algorithmes diviser, résoudre et combiner!



Vocabulary 11 — Divide and conquer ⇔ diviser pour régner.

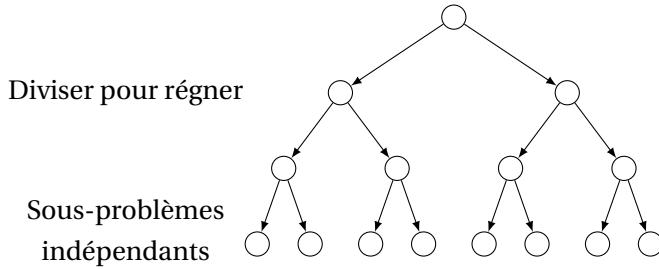


FIGURE 8.1 – Principe de la décomposition d'un problème en sous-problèmes indépendants pour un algorithme de type diviser pour régner.

Très souvent¹, les algorithmes de type diviser pour régner sont exprimés récursivement. À partir d'une taille de problème \mathcal{P} de taille n , la division en sous-problèmes aboutit soit à $n = 1$ soit à $n = s$, s étant alors une taille pour laquelle on sait résoudre le problème facilement et efficacement. Les étapes 7 et 9 de l'algorithme 19 sont facilement descriptibles à l'aide d'un arbre, comme le montre la figure 8.2. La hauteur de cet arbre peut être appréciée et quantifiée. Elle sert notamment à calculer la complexité liée aux algorithmes récursifs.

Algorithme 19 Diviser, résoudre et combiner (Divide And Conquer)

1: Fonction DRC(\mathcal{P}) 2: $r \leftarrow$ un entier ≥ 1 3: $d \leftarrow$ un entier > 1 4: si $n < s$ alors 5: renvoyer RÉSOUDRE(n) 6: sinon 7: $(\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r) \leftarrow$ Diviser \mathcal{P} en r sous problèmes de taille n/d . 8: pour i de 1 à r répéter 9: $S_i \leftarrow$ DRC(\mathcal{P}_i) 10: renvoyer COMBINER(S_1, \dots, S_r)	$\triangleright \mathcal{P}$ est un problème de taille n \triangleright pour générer r sous-problèmes à chaque étape \triangleright on divise par d la taille du problème \triangleright Condition d'arrêt, s est un seuil à déterminer \triangleright Appels récursifs
--	---

Sur la figure 8.2, on a choisi de représenter un algorithme de type diviser pour régner dont le problème associé \mathcal{P} est de taille n . L'étape de division en sous-problèmes divise par d le problème initial et nécessite r appels récursifs. Si $D(n)$ est la complexité de la partie division et $C(n)$ la complexité de l'étape de combinaison des résultats, alors on peut décrire la complexité $T(n)$ d'un tel algorithme par la relation de récurrence $T(n) = rT(n/d) + D(n) + C(n)$ et $T(s)$ une constante. Sur la figure 8.2 on a choisi $r = 3$ pour la représentation graphique.

1. mais pas toujours

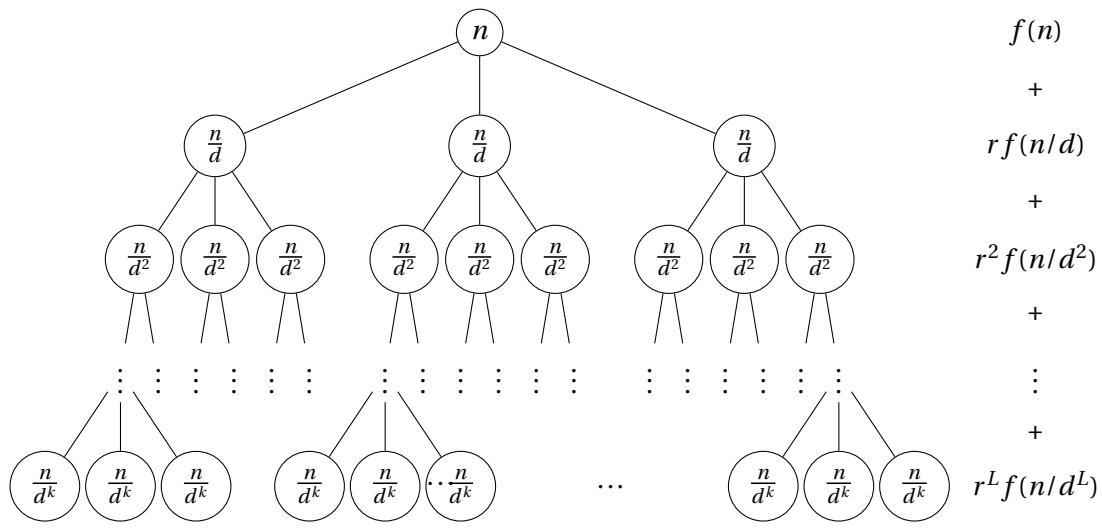


FIGURE 8.2 – Structure d’arbre et appels récursifs pour la récurrence : $T(n) = rT(n/d) + f(n)$ ET $n/d^k = s$. On a choisi $r = 3$ pour l’illustration, c’est à dire chaque nœud possède trois enfants au maximum : on opère trois appels récursifs à chaque étape de l’algorithme.

B Exemple de la recherche dichotomique

■ **Exemple 17 — Recherche dichotomique.** L'algorithme de recherche dichotomique 20 est un exemple d'algorithme de type diviser pour régner : la division du problème en sous-problèmes est opérée via la ligne 8. La résolution des sous-problèmes est effectuée par des appels récursifs. La combinaison des résultats n'est pas explicite mais s'effectue sur le tableau lui-même grâce aux indices g et d.

(R) La recherche dichotomique est donc bien un cas particulier d'algorithme diviser pour régner avec $r = 1$ et $d = 2$, c'est à dire un seul appel récursif par chemin d'exécution et une division de la taille du problème par deux.

Algorithme 20 Recherche récursive d'un élément par dichotomie dans un tableau trié

```

1: Fonction REC_DICH(t, g, d, elem)
2:   si g = d alors                                ▷ Condition d'arrêt
3:     si t[g] = elem alors
4:       renvoyer g
5:     sinon
6:       renvoyer l'élément n'a pas été trouvé
7:   sinon
8:     m ← (g+d)//2                                ▷ Diviser
9:     si t[m] < elem alors
10:    REC_DICH(t, m+1, d, elem)                  ▷ résoudre
11:   sinon
12:     REC_DICH(t, g, m, elem)                  ▷ résoudre

```

Grâce à la figure 8.3, on peut calculer le nombre d'opérations élémentaires $T(n)$ nécessaires à l'exécution de l'algorithme 20. On fait l'hypothèse que, hors appel récursif, la fonction REC_DICH nécessite un nombre constant d'opérations c . On peut expliciter formellement la relation de récurrence qui existe entre $T(n)$ et $T(n/2)$: on a $T(n) = T(n/2) + c$. on peut donc écrire :

$$T(n) = T(n/2) + c \quad (8.1)$$

$$= T(n/4) + c + c = T(n/4) + 2c \quad (8.2)$$

$$= T(n/8) + 3c \quad (8.3)$$

$$= \dots \quad (8.4)$$

$$= T(n/2^k) + kc \quad (8.5)$$

$$\therefore T(1) + kc \quad (8.6)$$

D'après l'algorithme 20, la condition d'arrêt s'effectue en un nombre constant d'opérations : $T(1) = O(1)$. Donc on a $T(n) = O(k)$. Or, on a $\frac{n}{2^k} = 1$. Donc $k = \log_2 n$ et $T(n) = O(\log n)$.

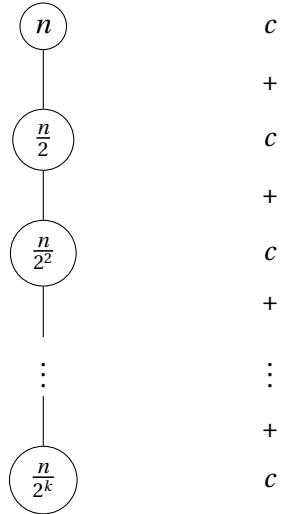


FIGURE 8.3 – Structure d’arbre et appels récursifs pour la récurrence de la recherche dichotomique : $T(n) = T(n/2) + c$ et $\frac{n}{2^k} = 1$. Hors appel récursif, la fonction opère un nombre constant d’opérations c .

C Exemple de l'exponentiation rapide

L'algorithme naïf de l'exponentiation (cf. algorithme 21) qui permet d'obtenir a^n en multipliant a par lui-même n fois n'est pas très efficace : sa complexité étant en $O(n)$.

Algorithme 21 Exponentiation naïve a^n

```

1: Fonction EXP_NAIVE(a,n)
2:   api ← 1
3:   pour i de 0 à n – 1 répéter
4:     api ← api × a
5:   renvoyer api

```

Or, l'exponentiation est une opération très récurrente qu'il est nécessaire de pouvoir exécuter le plus rapidement possible. L'exponentiation rapide (cf. algorithme 22) propose une version récursive de type diviser pour régner dont la complexité est en $O(\log n)$.

L'analyse de l'algorithme 22 montre que :

- c'est un cas particulier d'algorithme diviser pour régner avec $r = 1$ et $d = 2$, c'est à dire un seul appel récursif par chemin d'exécution et une division de la taille du problème par deux²,
- l'évolution du coût ne dépend pas de a mais de n , c'est à dire l'exposant.

On peut procéder de la même manière qu'avec l'algorithme 20 pour calculer la complexité et s'appuyer sur l'arbre de la figure 8.3. Pour simplifier le calcul, on peut considérer que la taille

2. à un près si n est pair

Algorithme 22 Exponentiation rapide a^n

```

1: Fonction EXP_RAPIDE(a,n)
2:   si n = 0 alors                               ▷ Condition d'arrêt
3:     renvoyer 1
4:   sinon si n est pair alors
5:     p ← EXP_RAPIDE(a, n//2)                   ▷ Appel récursif
6:     renvoyer p × p
7:   sinon
8:     p ← EXP_RAPIDE(a, (n-1)//2)              ▷ Appel récursif
9:     renvoyer p × p × a

```

du problème est divisée par deux. Le coût hors appel récursif est constant car il s'agit de multiplications. On a donc $T(n) = O(\log n)$.

R L'algorithme 22 n'est pas à récursivité terminale. Sa version itérative est moins évidente. Celle-ci est détaillée par l'algorithme 23

Algorithme 23 Exponentiation rapide a^n (version itérative)

```

1: Fonction EXP_RAPIDE_ITE(a, n)                  ▷ a et n sont des entiers naturels
2:   si n = 0 alors
3:     renvoyer 1
4:   p ← a
5:   m ← 1
6:   nit ← ⌊log2(n)⌋
7:   pour i de 1 à nit répéter
8:     m ← n//2nit-i
9:     si m est pair alors
10:    p ← p × p
11:   sinon
12:    p ← p × p × a
13:   renvoyer p

```

D Exemple du tri fusion

Les tris génériques abordés jusqu'à présent, par sélection ou insertion, présentent des complexités polynomiales en $O(n^2)$ dans le pire des cas. L'algorithme de tri fusion a été inventé par John von Neumann en 1945. C'est un bel exemple d'algorithme de type diviser pour régner avec $r = 2$ et $d = 2$, c'est à dire deux appels récursifs par chemin d'exécution et une division de la taille du problème par deux (cf. figure 8.4). Il permet de dépasser cette limite et d'obtenir un tri générique de complexité logarithmique. Ce tri est comparatif, il peut s'effectuer en place et

les implémentations peuvent être stables.

Son principe (cf. algorithmes 24 et 25) est simple : transformer le tri d'un tableau à n éléments en sous-tableaux ne comportant qu'un seul élément³ puis les recombiner en un seul tableau en conservant l'ordre. L'algorithme est divisé en deux fonctions :

- TRI_FUSION qui opère concrètement la division et la résolution des sous-problèmes,
- FUSION qui combine les solutions des sous-problèmes en fusionnant deux sous-tableaux triés.

Pour le calcul de la complexité, on a la relation de récurrence $T(n) = 2T(n/2) + f(n)$ où $f(n)$ représente le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour fusionner deux sous-tableaux. La condition d'arrêt de la récursivité est atteinte pour $\frac{n}{2^k} = 1$ c'est à dire pour $k = \log_2 n$. Par ailleurs, on remarque que $T(1) = c$ est une opération à coût constant, suite à la condition d'arrêt on ne fait que retourner le tableau non modifié.

$$T(n) = 2T(n/2) + f(n) \quad (8.7)$$

$$= 4T(n/4) + 2f(n) \quad (8.8)$$

$$= 8T(n/8) + 8f(n) \quad (8.9)$$

$$= \dots \quad (8.10)$$

$$= 2^k T(1) + 2^k f(n) \quad (8.11)$$

$$= c \log_2 n + f(n) \log_2 n \quad (8.12)$$

Dans le pire des cas, l'étape de combinaison effectue la combinaison de deux sous-tableaux de dimension $n/2$ et les trois boucles de la fonction FUSION effectue $n/2$ tours. On a alors $f(n) = O(n)$. C'est pourquoi, la complexité du tri fusion vaut $T(n) = O(\log_2 n + n \log_2 n) = O(n \log n)$

Algorithme 24 Tri fusion

```

1: Fonction TRI_FUSION(t, g, d)
2:   si d = g alors
3:     renvoyer t
4:   m ← (g+d)//2
5:   TRI_FUSION(t, g, m)
6:   TRI_FUSION(t, m+1, d)
7:   FUSION(t, g, m, sup)

```

3. et donc déjà triés!

Algorithme 25 Fusion de sous-tableaux triés

```

1: Fonction FUSION(t, g, m, d)
2:   i ← m - g + 1
3:   j ← d - m
4:   G, D deux tableaux de taille i et j
5:   pour k de 1 à i répéter
6:     G[k] ← t[g + k - 1]
7:   pour k de 1 à i répéter
8:     D[k] ← t[m + k ]
9:   G[i + 1] ← None
10:  D[j + 1] ← None
11:  p ← 1
12:  q ← 1
13:  pour v de g à d répéter
14:    si G[p] < D[q] alors
15:      t[v] ← G[p]
16:      p ← p + 1
17:    sinon
18:      t[v] ← D[q]
19:      q ← q + 1

```

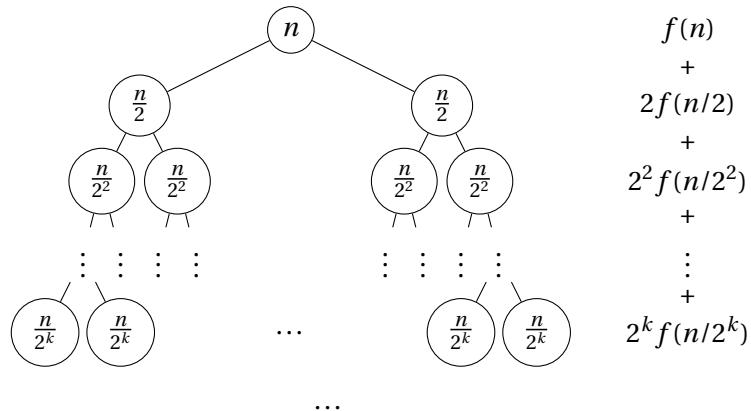


FIGURE 8.4 – Structure d’arbre et appels récursifs pour le tri fusion : $T(n) = 2T(n/2) + f(n)$ et $\frac{n}{2^k} = 1$. La fonction FUSION opère un nombre d’opérations $f(n)$.

Algorithmes gloutons

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ expliquer le principe d'un algorithme glouton
- ☒ citer des cas d'utilisation classiques de ce principe
- ☒ coder un algorithme glouton en Python

A Principie

■ **Définition 61 — Optimisation.** Un problème d'optimisation \mathcal{P} nécessite de déterminer les conditions dans lesquelles ce problème présente une caractéristique optimale au regard d'un critère.

■ **Exemple 18 — Problèmes d'optimisation.** La plupart des problèmes de tous les jours sont des problèmes d'optimisation :

- comment répartir équitablement des tâches selon certains critères ?
- comment choisir le plus court chemin pour aller d'un point à un autre ?
- comment choisir ses actions pour optimiser un portefeuille et son rendement ?
- comment choisir le régime moteur pour économiser un maximum de carburant ?
- comment choisir des articles dans un supermarché en respectant un budget et d'autres contraintes simultanément ?
- comment faire ses valises en emportant à la fois le plus d'affaires possibles et le plus de valeur possible au global ?

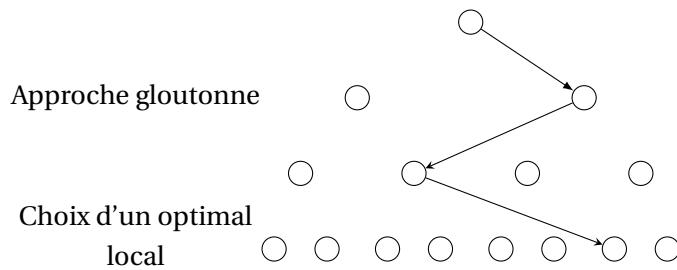


FIGURE 9.1 – Étape de résolution d'un problème par décomposition en sous-problèmes et approche gloutonne.

■ **Définition 62 — Algorithme glouton.** Un algorithme glouton décompose un problème en sous-problèmes et le résout en :

1. construisant une solution partielle en effectuant à chaque étape le meilleur choix local,
2. espérant que ces choix locaux conduiront à un résultat global optimal.



Vocabulary 12 — Greedy algorithms ↗ les algorithmes gloutons

La figure 9.1 illustre le fonctionnement d'un algorithme glouton. Un problème de décomposition devient une suite de choix optimaux localement.

(R) La plupart du temps, un algorithme glouton est appliqué à un problème d'optimisation. Le résultat n'est pas toujours optimal. Mais l'espoir fait vivre : certains algorithmes gloutons obtiennent une solution optimale! Comme ils sont souvent assez simples à implémenter par rapport aux autres algorithmes d'optimisation, ils représentent une solution précieuse.

■ **Définition 63 — Glouton optimal.** On dit qu'un algorithme glouton est optimal s'il produit une solution optimale au problème d'optimisation associé.

■ **Exemple 19 — Algorithmes gloutons optimaux.** Parmi les algorithmes au programme, il existe des algorithmes gloutons optimaux :

- Dijkstra (plus court chemin),
- Prim et Kruskal (arbres recouvrants),
- codage d'Huffman.

B Modélisation

On considère un ensemble \mathcal{E} d'éléments parmi lesquels on doit faire des choix pour optimiser le problème \mathcal{P} . On construit une solution \mathcal{S} séquentiellement via un algorithme glouton en

suivant la procédure décrite sur l'algorithme 26. Il ne reste plus qu'à préciser, selon le problème considéré :

- le choix de l'élément optimal localement dans \mathcal{E} ,
- le test d'une solution pour savoir si celle-ci est complète ou partielle,
- l'ajout d'un élément à une solution.

Algorithme 26 Principe d'un algorithme glouton

```

1: Fonction GLOUTON( $\mathcal{E}$ )                                 $\triangleright \mathcal{E}$  un ensemble d'éléments
2:    $\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$ 
3:   tant que  $\mathcal{S}$  pas complète et  $\mathcal{E}$  pas vide répéter
4:      $e \leftarrow \text{CHOISIR\_UN\_ÉLÉMENT}(\mathcal{E})$            $\triangleright$  le meilleur localement!
5:     si l'ajout de  $e$  à  $\mathcal{S}$  est une solution possible alors
6:        $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} + e$ 
7:     Retirer  $e$  de  $\mathcal{E}$                                  $\triangleright$  Si pas déjà fait en 4
8:   renvoyer  $\mathcal{S}$ 
  
```

a Modélisation de l'occupation de la place au port

On désigne par \mathcal{E} l'ensemble des demandes des clients. Pour toute demande $e \in \mathcal{E}$, on a la possibilité d'accéder à la date de début $d(e)$ de la demande ainsi qu'à la date de fin $f(e)$. On cherche donc à trouver un sous-ensemble de \mathcal{E} constitué de demandes compatibles et de cardinal maximum.

On dénote l'intervalle de temps d'occupation associé à une demande e par $[d(e), f(e)]$. La compatibilité de deux demandes e_i et e_j peut alors être formalisée ainsi :

$$]d(e_i), f(e_i)[\cap]d(e_j), f(e_j)[= \emptyset \quad (9.1)$$

L'algorithme glouton 27 permet de résoudre ce problème de planning.

Algorithme 27 Réservation d'une place au port de Brest

```

1: Fonction GÉRER_LA_PLACE( $\mathcal{E}$ )                       $\triangleright \mathcal{E}$  un ensemble de demandes  $e_i$ 
2:    $\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$ 
3:   Trier  $\mathcal{E}$  pas ordre de valeurs  $f(e_i)$  croissantes       $\triangleright$  Dates de fin croissantes
4:   Ajouter à  $\mathcal{S}$  la demande qui se termine le plus tôt.
5:   tant que  $\mathcal{E}$  pas vide répéter
6:      $e \leftarrow$  retirer l'élément de  $\mathcal{E}$  qui se termine le plus tôt
7:      $s \leftarrow$  dernier élément ajouté dans  $\mathcal{S}$ 
8:     si  $d(e) \geqslant f(s)$  alors                             $\triangleright$  Est-ce une solution ?
9:       Ajouter  $e$  à  $\mathcal{S}$ 
10:  renvoyer  $\mathcal{S}$ 
  
```

Cet algorithme est bien glouton car :

1. la construction de l'ensemble $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_k\}$ s'effectue de manière séquentielle,
2. le choix effectué à chaque tour de boucle est le meilleur en terme de compatibilité : les demandes peuvent éventuellement s'enchaîner grâce à la ligne 8.

L'ensemble \mathcal{S} étant constitué de demandes compatibles, l'algorithme aboutit à une solution. Cependant, on peut se demander si celle-ci est optimale, c'est à dire de cardinal maximum : a-t-on satisfait un maximum de clients ? Ne peut-on faire mieux ?

b Preuve de l'optimalité → HORS PROGRAMME

Théorème 1 — L'algorithme 27 aboutit à une solution optimale.

Démonstration par induction sur les ensembles solutions $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_j\}, j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. On suppose qu'on peut ordonner les ensembles \mathcal{E} et \mathcal{S} par date de fin croissante et qu'il y a une date à laquelle on a démarré le service de location¹. Pour un ensemble de demandes $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_r\}$ ainsi ordonné, les demandes $\delta_1, \dots, \delta_r$ sont compatibles si et seulement si :

$$d(\delta_1) < f(\delta_1) \leq d(\delta_2) < f(\delta_2) \leq \dots \leq d(\delta_r) < f(\delta_r) \quad (9.2)$$

On procède en deux temps en montrant :

1. d'abord qu'il existe une solution optimale $\mathcal{O} = \{o_1, \dots, o_m\}$ telle que les premiers éléments de $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_k\}$ coïncident avec ceux de \mathcal{O} ,
2. puis que $\mathcal{S} = \mathcal{O}$.

Initialisation : pour $j = 1$, on a $\mathcal{S} = s_1$, s_1 étant la demande qui se termine le plus tôt. Par rapport à la solution optimale $\mathcal{O} = \{o_1, \dots, o_m\}$, on a nécessairement $f(s_1) \leq f(o_1)$ et donc :

$$d(s_1) < f(s_1) \leq d(o_2) < f(o_2) \leq \dots \leq d(o_m) < f(o_m) \quad (9.3)$$

On en conclut que $\{s_1, o_2, \dots, o_m\}$ est compatible avec \mathcal{O} . Pour $j = 1$ et \mathcal{S} est donc optimale.

Pour l'hérédité, on suppose que la solution $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_j\}$ est compatible avec $\mathcal{O} = \{o_1, \dots, o_m\}$, c'est à dire que : $\{s_1, s_2, \dots, s_j, o_{j+1}, \dots, o_m\}$ est optimale. L'algorithme 27 assure que s_{j+1} est choisi dans $\mathcal{E} \setminus \{s_1, \dots, s_j\}$, de telle manière que la date de fin est minimale. D'après notre hypothèse, o_{j+1} est choisi dans $\mathcal{E} \setminus \{s_1, \dots, s_j\}$, de telle manière que la date de fin est minimale. Donc $f(s_{j+1}) \leq f(o_{j+1})$. On en conclut que $\{s_1, s_2, \dots, s_j, s_{j+1}, o_{j+2}, \dots, o_m\}$ est compatible avec \mathcal{O} et donc optimale.

Par induction, on peut donc affirmer que \mathcal{S} est optimale, quelque soit $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Est-ce que les deux solutions optimales \mathcal{S} et \mathcal{O} coïncident ? C'est à dire, est-ce que $k = m$? Si ce n'était pas le cas, c'est à dire $k > m$, alors on pourrait choisir dans $\mathcal{E} \setminus \{s_1, \dots, s_k\}$ une demande dont la date de fin serait compatible avec la solution optimale. Cette solution ne serait donc plus optimale, ce qui est une contradiction. ■

Cet algorithme glouton est donc optimal, mais cela est essentiellement dû aux contraintes qu'on a mise sur l'optimisation : tous les clients ne seront pas satisfaits. On cherche juste à en satisfaire un maximum.

1. sous-entendu, on ne pourra pas choisir une date plus petite que celle-ci pour le début et la fin de la location.

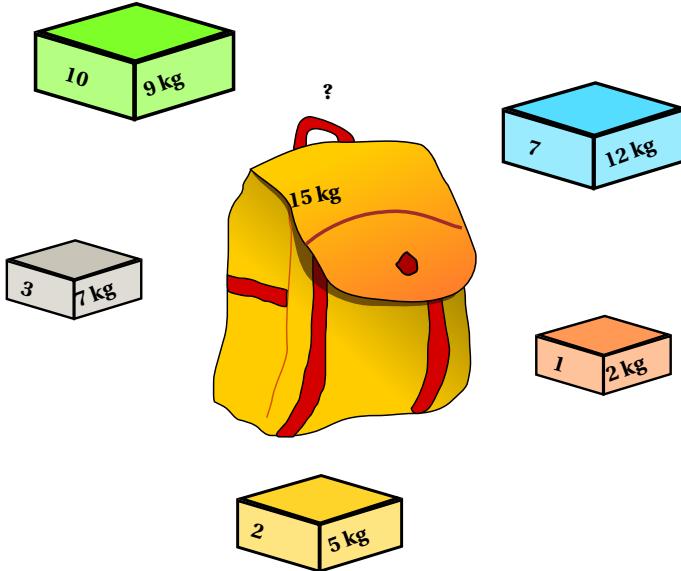


FIGURE 9.2 – Illustration du problème du sac à dos (d'après Wikipedia). On a cinq objets de poids 9, 12, 2, 7 et 5 kg et de valeur 10, 7, 1, 3 et 2 . Le poids total admissible dans le sac est 15kg.

C Exemple du sac à dos

On cherche à remplir un sac à dos comme indiqué sur la figure 9.2. Chaque objet que l'on peut insérer dans le sac est **insécable**² et possède une valeur et un poids connus. On cherche à maximiser la valeur totale emportée dans le sac à dos tout en limitant³ le poids à π .



Vocabulary 13 — Knapsack problem ↗ Le problème du sac dos.

On peut chercher à résoudre le problème du sac à dos de manière gloutonne en utilisant un algorithme glouton (cf. algorithme 28).

En terme de complexité, l'algorithme 28 est plutôt intéressant puisqu'en $O(n)$. Cependant, la solution trouvée n'est pas nécessairement optimale : cet algorithme est donc un point de départ mais pas la solution définitive à ce problème.

R Intuitivement, on comprend bien qu'on ne pourra trouver de solution optimale que si on peut compléter le sac à dos au maximum. Il faut donc que les objets qui restent à mettre dans le sac après le plus valué soient :

- de la bonne taille, ce qui revient à invoquer la chance,
- ou sécable afin de se conformer à l'espace restant et l'optimiser. Or on a choisi des objets insécables.

2. Soit on le met dans le sac, soit on ne le met pas. Mais on ne peut pas en mettre qu'une partie.

3. On accepte un poids total inférieur ou égal à π .

Algorithme 28 Problème du sac à dos

```

1: Fonction SAC_À_DOS( $\mathcal{E}, \pi$ ) ▷  $\mathcal{E} = \{(v_1, p_1), \dots, (v_n, p_n)\}$ 
2:    $\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$ 
3:    $p_{total} \leftarrow 0$ 
4:    $v_{total} \leftarrow 0$ 
5:   Trier  $\mathcal{E}$  pas ordre de valeurs  $v_i$  décroissantes ▷ le choix sera facile
6:   tant que  $p_{total} \leq \pi$  et  $\mathcal{E}$  pas vide répéter
7:      $v, p \leftarrow$  retirer l'élément de  $\mathcal{E}$  le plus valué ▷ choix de  $v$  maximale
8:     si  $p_{total} + p \leq \pi$  alors ▷ Est-ce une solution?
9:       Ajouter  $(v, p)$  à  $\mathcal{S}$ 
10:  renvoyer  $\mathcal{S}$ 

```

D'une manière plus générale, le problème du sac à dos reflète un problème d'allocation de ressources pour lequel le temps (ou le budget) est fixé et où l'on doit choisir des éléments indivisibles parmi un ensemble tâches (ou de projets).

D Gloutonnerie et dynamisme

Tenter sa chance est le plus souvent payant! Si un algorithme glouton donne une solution rapidement alors que l'algorithme donnant la solution optimale est de complexité exponentielle $O(2^n)$ alors tenter sa chance en *gloutonnant* permet souvent de progresser vers une solution acceptable.

R La programmation dynamique qui sera étudiée au semestre trois permet de résoudre les problèmes d'optimisation sur lesquels butent certains algorithmes gloutons. Elle est souvent pertinente lorsque les sous-problèmes générés se recoupent, cas pour lesquels les algorithmes gloutons échouent.

Introduction à Numpy

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☛ importer la bibliothèque Numpy
- ☛ utiliser un tableau Numpy mono et multidimensionnel
- ☛ écrire des opérations élément par élément

P Numpy est une bibliothèque logicielle Python dédiée au calcul numérique. Elle n'est pas explicitement au programme. Certaines épreuves de concours en interdisent son usage quand d'autres l'exigent explicitement. Il faut rester vigilant à la lecture de l'épreuve.

 **Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!**

Numpy est très utilisé dans le monde entier. Les raisons principales sont les suivantes :

1. Numpy est open source,
2. Numpy est optimisée avec un cœur compilé en langage C (compilé, pas interprété donc plus rapide),
3. Numpy s'interface facilement avec d'autres langages de calcul scientifique (C et Fortran notamment),
4. Numpy procure les `array`, une structure de données de type tableau multidimensionnel de dimensions fixes. Cela complète habilement le langage Python qui ne propose que des listes qui sont implémentées par des tableaux dynamiques.
5. Numpy propose des opérations sur les tableaux élément par élément. Cela permet à la fois d'éviter d'écrire des boucles et de paralléliser les opérations.
6. Numpy permet l'écriture de calculs matriciels.

7. Ces deux derniers points font que les formules mathématiques apparaissent écrites quasi-naturellement dans le code.

A Importation

On peut importer comme on le désire la bibliothèque Numpy. Cependant une convention très utilisée fait qu'on l'importe souvent comme ceci :

```
1 import numpy as np
2
3 t = np.zeros(42)
```

B Créer des vecteurs, des matrices ou des tableaux

■ **Définition 64 — Vecteur numpy.** Le terme *vecteur* désigne des `array` numpy de dimension 1.

■ **Définition 65 — Matrice numpy .** Le terme *matrice* désigne les `array` numpy de dimension deux.

Lorsque le tableau possède plus de deux dimensions, on parle de tableau.

On peut créer, comme le code 10.1 le montre, un vecteur, une matrice ou un tableau numpy à partir :

- du constructeur `np.array()`,
- d'une liste ou d'une liste imbriquée,
- de fonctions spéciales en précisant les dimensions du tableau et la valeur d'initialisation des cases du tableau,
- d'un tableau existant : la tableau créé aura les mêmes dimensions. On précise la valeur à laquelle on veut initialiser les cases.

Code 10.1 – Crée des tableaux Numpy

```
1 import numpy as np
2
3 v1 = np.array([1, 2, 3])
4 print(v1.shape, v1) # (3,) [1 2 3]
5 v2 = np.array([[10], [20], [30]])
6 print(v2.shape, v2) # (3, 1) [[10] [20] [30]]
7
8 v3 = np.zeros((1, 3))
9 print(v3.shape, v3) # (1, 3) [[0. 0. 0.]]
10 v4 = np.ones((1, 7))
11 print(v4.shape, v4) # (1, 7) [[1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.]]
12
13 m1 = np.zeros((5, 5))
```

```

14 print(m1.shape, m1)
15 # (5, 5)
16 # [[0. 0. 0. 0. 0.]
17 # [0. 0. 0. 0. 0.]
18 # [0. 0. 0. 0. 0.]
19 # [0. 0. 0. 0. 0.]
20 # [0. 0. 0. 0. 0.]]
21
22 m1 = np.ones((2, 3))
23 print(m1.shape, m1)
24 # (2, 3)
25 # [[1. 1. 1.]
26 # [1. 1. 1.]]
27
28 t0 = np.zeros((42, 21, 84, 3))
29 print(t0.shape) # (42, 21, 84, 3)
30
31 t1 = np.zeros_like(v1)
32 print(t1.shape, t1) # (3,) [0 0 0]
33 t2 = np.ones_like(v3)
34 print(t1.shape, t1) # (1, 3) [[1. 1. 1.]]
35 t3 = np.full_like(m1, 42)
36 print(t1.shape, t1)
37 # (2, 3)
38 # [[42. 42. 42.]
39 # [42. 42. 42.]]
40
41 s = np.zeros((4, 4, 500)).shape
42 print(s[0], s[1], s[2]) # 4 4 500
43
44 r = np.arange(0, 1, 0.1) # like range but for float !
45 print(r) # [0. 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9]
46 time = np.linspace(0, 1, 11)
47 print(time) # [0. 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1. ]

```

P Comme le montre la fin du code 10.1, la fonction `shape` renvoie un tuple qui spécifie les dimensions du tableau. Comme c'est un tuple, on peut accéder à la taille de chaque dimension par l'opérateur `[]`. Pour un matrice, par exemple, on obtient le nombre de lignes et le nombre de colonnes.

C Accéder aux éléments d'un tableau

Les cases d'un array numpy sont numérotées à partir de zéro, comme pour les listes Python. Le tronçonnage ainsi que l'indexage négatif sont également disponibles comme le montre le code 10.2.

P Cependant, la syntaxe de la manipulation des tableaux multidimensionnels est diffé-

rente de celle des listes imbriquées : une virgule sépare les indices des dimensions différentes. Il faut rester vigilant et ne pas confondre ces syntaxes.



Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

Code 10.2 – Accéder aux éléments d'un tableau numpy

```

1 import numpy as np
2
3 m = np.array([[1, 2], [3, 4]])
4 print(m)
5 # [[1 2]
6 #  [3 4]]
7 print(m[0, 0], m[0, 1], m[1, 0], m[1, 1]) # 1 2 3 4
8 # slicing
9 print(m[:, 0]) # [1 3]
10 print(m[:, 1]) # [2 4]
11 print(m[0, :]) # [1 2]
12 print(m[1, :]) # [3 4]
13
14 # negative indexing
15 print(m[-1, -1])
16 # reversing
17 print(m[::-1])
18 # assignment
19 m[0, :] = 42
20 print(m)
21 # [[42 42]
22 #  [ 3  4]]
23
24 # resizing
25 m = m.reshape((1, 4))
26 print(m) # [[1 2 3 4]]

```

P Comme on peut le voir à la fin du code 10.2, on peut facilement redimensionner un tableau, avec ses éléments dedans. Cela vient du fait que numpy stocke toujours les éléments d'un tableau de manière contiguë en mémoire et ce, quelle que soit les dimensions du tableau.

La bibliothèque stocke aussi avec le tableau ses dimensions apparentes pour l'utilisateur. L'accès aux éléments au travers ses dimensions `t[3,2]` n'est donc qu'une commodité (du sucre syntaxique) fournie par le génie logiciel de la bibliothèque. Un indice réel est calculé par numpy à partir de `[3,2]` pour accéder à la case l'élément dans la zone contiguë en mémoire.

 **Vocabulary 14 — Syntactic sugar ↗** Sucre syntaxique. Élément de la syntaxe d'un langage visant à faciliter l'utilisation, l'écriture et la lecture associées à un concept. Cela adoucit le travail humain.

D Opérations élément par élément

On a très souvent besoin d'appliquer les mêmes formules à tous les éléments d'un tableau, à toute une série de données. Par exemple, pour filtrer un signal, le moyennner, pour changer de couleur tous les pixels d'une image ou tout simplement pour calculer tous le prix TTC de tous les éléments d'une liste de prix HT.

Le succès de numpy repose principalement sur la capacité à opérer des calculs sur un tableau comme si on les effectuait sur une variable scalaire (cf. code 10.3). **Il devient alors inutile de faire une boucle pour traiter tous les éléments du tableau** et l'écriture et la lecture des formules physiques et mathématiques s'en trouvent facilitées :

Code 10.3 – Opérer élément par élément

```

1 import numpy as np
2
3 x = np.ones(4)
4 print(x + x) # [2. 2. 2. 2.]
5 print(x - x) # [0. 0. 0. 0.]
6 print(4 * x * x / 5) # [0.8 0.8 0.8 0.8]
7 print(x / x) # [1. 1. 1. 1.]
8
9 r = np.arange(0, 1, 0.3)
10 print(r) # [0. 0.3 0.6 0.9]
11 s = np.pi * r ** 2
12 print(s) # [0. 0.28274334 1.13097336 2.54469005]
13
14 time = np.linspace(0, 1, 11)
15 print(time) # [0. 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1. ]
16 signal = 5 * np.cos(2 * np.pi * 7 * time)
17 print(signal)
18 # [ 5.          -1.54508497 -4.04508497  4.04508497  1.54508497 -5.
19 #   1.54508497  4.04508497 -4.04508497 -1.54508497  5.          ]
```

 Les opérateurs arithmétiques `+, -, *, /, *` utilisés dans le code 10.3 sont des opérateurs qui agissent sur des tableaux numpy. En informatique, on dit alors qu'on a surchargé les opérateurs `+, -, *, /, *` pour qu'ils puissent agir sur d'autres données que les `int` ou les `float`.

E Opérations matricielles

Numpy possède également la multiplication matricielle comme le montre le code 10.4. C'est l'opérateur `@` qui permet de réaliser cette opération. Il est également très facile de faire de l'algèbre linéaire¹ avec le module `numpy.linalg`.

Code 10.4 – Calcul matriciel

```
1 import numpy as np
```

-
1. Calculer une matrice inverse par exemple.

```

2
3 A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
4 X = np.array([[.2], [.1]])
5 B = np.array([[.1, .2, .3], [.4, .5, .6]])
6 U = np.array([[0.1], [0.2], [0.3]])
7
8 Xp = A @ X + B @ U
9 print(Xp.shape) # (2, 1)
10 print(Xp)
11 # [[0.54]
12 # [1.32]]

```

F Types de données

La bibliothèque numpy fournit également des types de données supplémentaires à Python. Ce sont en fait des types utilisés par le langage C qui sous-tend les calculs. On y trouve notamment les types `int` non signés désignés par `uint` ou les `float` sur 32 bits.

De nombreuses données concrètes sont représentées par des entiers non signés. C'est le cas par exemple des pixels d'une image dont on code généralement l'intensité sur huit bits, c'est à dire par une valeur comprise entre 0 et $2^8 - 1 = 255$. Numpy propose le type `np.uint8` pour représenter ce type de données.

Code 10.5 – Types de données numpy

```

1 import numpy as np
2
3 unsigned_integer = np.uint8(42)
4 print(unsigned_integer) # 42
5 image = np.zeros((1024, 512), dtype=np.uint8)
6 image[:] = 237
7 print(image)
8 # [[237 237 237 ... 237 237 237]
9 # [237 237 237 ... 237 237 237]
10 # [237 237 237 ... 237 237 237]
11 # ...
12 # [237 237 237 ... 237 237 237]
13 # [237 237 237 ... 237 237 237]
14 # [237 237 237 ... 237 237 237]]

```

R Utiliser le type de données le plus adapté à la nature de la donnée est très important : cela permet d'économiser radicalement l'espace mémoire et d'accélérer les calculs.

G Autres fonctions

Numpy regorge de fonctionnalités. N'hésitez pas à consulter la documentation en ligne. Cette bibliothèque est complétée par `scipy`, bibliothèque scientifique.

Troisième partie

Semestre 2

Les mots des graphes

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☛ utiliser des mots pour décrire les graphes
- ☛ énumérer quelques graphes remarquables
- ☛ distinguer un parcours d'une chaîne et d'un cycle
- ☛ identifier un arbre

La théorie des graphes en mathématiques discrètes étudie les graphes comme objet mathématique. En informatique, en plus de les étudier, on a la chance de pouvoir les programmer, de jouer avec pour résoudre une infinité de problèmes. Les domaines d'application des graphes sont innombrables : les jeux, la planification, l'organisation, la production, l'optimisation, les programmes et modèles informatiques, les trajets dans le domaine des transports, le tourisme, la logistique ou tout simplement la géométrie... **Les graphes sont des objets simples que tout le monde peut dessiner.** Même s'il ne vous apparaît pas immédiatement que résoudre un sudoku est équivalent à la coloration d'un graphe, la pratique de ces derniers vous amènera à regarder le monde différemment.

A Typologie des graphes

■ **Définition 66 — Graphe.** Un graphe G est un couple $G = (V, E)$ où V est un ensemble fini et non vide d'éléments appelés sommets et E un ensemble de paires d'éléments de V appelées arêtes.



Vocabulary 15 — Graph ↪ Graphe

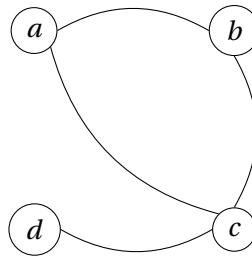


FIGURE 11.1 – Graphe simple

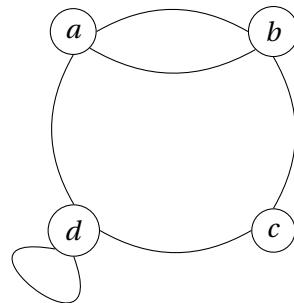


FIGURE 11.2 – Multigraphe à une boucle est deux arêtes parallèles

Vocabulary 16 — Vertex (plural : vertices) \leadsto Sommet

Vocabulary 17 — Edge \leadsto Arête

La notation $G = (V, E)$ dérive donc directement des premières lettres des mots anglais. La définition 66 est en fait celle des **graphes simples et non orientés** : ce sont eux que l'on considérera la plupart du temps.

- **Définition 67 — Boucle.** Une boucle est une arête reliant un sommet à lui-même.
- **Définition 68 — Arêtes parallèles.** Deux arêtes sont parallèles si elles relient les mêmes sommets.
- **Définition 69 — Graphe simple.** Un graphe simple est un graphe sans arêtes parallèles et sans boucles.
- **Définition 70 — Multigraphe.** Un multigraphe est un graphe avec des boucles et des arêtes parallèles.

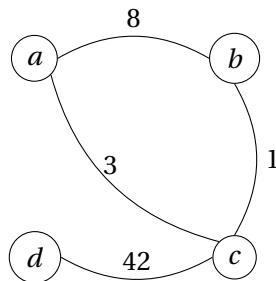


FIGURE 11.3 – Graphe pondéré

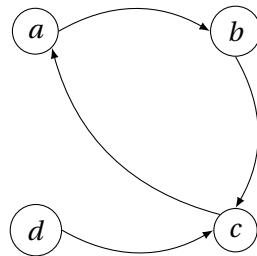


FIGURE 11.4 – Graphe orienté

■ **Définition 71 — Graphe pondéré.** Un graphe $G = (V, E)$ est pondéré s'il existe une application $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. Le poids de l'arête ab vaut $w(ab)$.

■ **Définition 72 — Graphe orienté.** Un graphe $G = (V, E)$ est orienté si ses arêtes sont orientées selon une direction. Les arêtes sont alors désignées par le mot arc.

■ **Définition 73 — Graphe complet.** Un graphe $G = (V, E)$ est complet si et seulement si une arête existe entre chaque sommet, c'est à dire si tous les sommets sont voisins.

En hommage à Kuratowski, on désigne les graphes complets par la lettre K_o indicée par l'ordre du graphe (cf. définition 77). La figure 11.5 représente le graphe complet d'ordre cinq K_5 . Kuratowski a notamment démontré [15] que K_5 n'est pas planaire : quelle que soit la manière de représenter ce graphe sur un plan, des arêtes se croiseront. Le graphe de la figure 11.1 est planaire.

■ **Définition 74 — Graphe planaire.** Une graphe planaire est un graphe que l'on peut représenter sur un plan sans qu'aucune arête ne se croise.

■ **Définition 75 — Graphe biparti.** un graphe $G = (V, E)$ est biparti si l'ensemble V de ses sommets peut être divisé en deux sous-ensembles disjoints U et W tels que chaque arête de E ait une extrémité dans U et l'autre dans W .

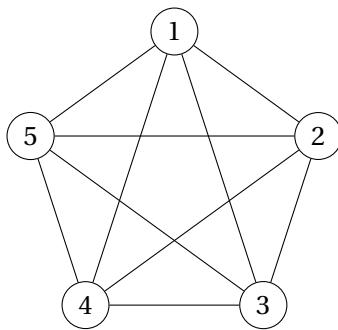
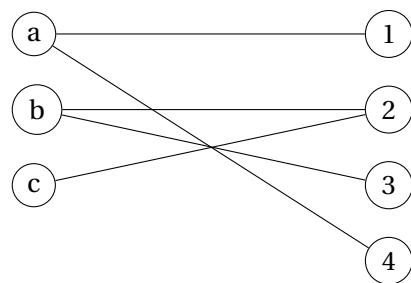
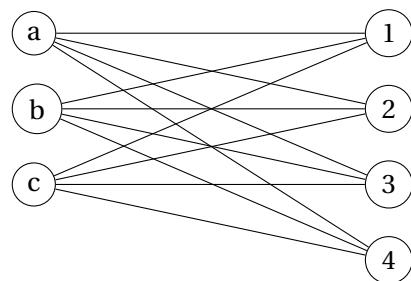
FIGURE 11.5 – Graphe complet K_5 

FIGURE 11.6 – Graphe biparti

FIGURE 11.7 – Graphe biparti complet K_{34}

B Représentation des graphes

On peut représenter graphiquement un graphe comme sur les figures précédentes 11.1, 11.3 ou 11.4. On peut également chercher à les représenter sous la forme d'ensembles, de matrices ou de listes.

■ **Exemple 20 — Graphe et ensembles.** Le graphe de la figure 11.1 est un graphe simple que l'on peut noter $G = \{V = \{a, b, c, d\}, E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}\}$ ou plus simplement $G = \{V = \{a, b, c, d\}, E = \{ab, ac, bc, cd\}\}$.

■ **Définition 76 — Adjacent ou voisins.** Deux sommets a et b sont adjacents ou voisins si le graphe contient une arête ab . Deux arêtes sont adjacentes ou voisines s'il existe un sommet commun à ces deux arêtes.

■ **Exemple 21 — Graphe et matrice d'adjacence.** Grâce au concept d'adjacence, on peut représenter un graphe par une matrice d'adjacence. Pour construire une telle matrice, il faut d'abord ordonner arbitrairement les sommets du graphes. Par exemple, pour le graphe de la figure 11.1, on choisit l'ordre (a, b, c, d) . Les coefficients m_{ij} de la matrice d'adjacence sont calculés selon la règle suivante :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe une arête entre le sommet } i \text{ et le sommet } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (11.1)$$

Pour le graphe de la figure 11.1, on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11.2)$$

La matrice d'adjacence d'un graphe simple non orienté est de diagonale nulle (pas de boucles) et symétrique.

La matrice d'un graphe orienté n'est pas forcément symétrique.

Dans le cas d'un graphe pondéré, on peut remplacer le coefficient de la matrice par le poids de l'arête considérée.

En Python, on pourra utiliser une liste de liste ou un tableau numpy pour implémenter une matrice d'adjacence.

■ **Exemple 22 — Graphe et liste d'adjacence.** On peut représenter un graphe par la liste des voisins de chaque sommet. Par exemple, si on dénote les sommets a , b , c et d par les indices 1, 2, 3, et 4, alors le graphe de la figure 11.1 peut être décrit par la liste $[[2, 3], [1, 3], [1, 2, 4], [3]]$. Si on choisit d'utiliser un dictionnaire, alors on peut l'écrire : $\{1: [2, 3], 2: [1, 3], 3: [1, 2, 4], 4: [3]\}$.

Pour résumé, en Python, on a le choix de la représentation :

```

1      G = [[2,3], [1,3], [1,2,4], [3]]
2      G = {1:[2,3], 2: [1,3], 3:[1,2,4], 4:[3]}
3      n = len(G)    # graph order

```

R Ni la représentation graphique de la figure 11.1, ni la matrice d'adjacence M de l'équation 11.2, ni les listes d'adjacence ne sont des représentations uniques. On peut tracer différemment le graphe ou choisir un autre ordre pour les sommets et obtenir une autre matrice ou une autre liste d'adjacence. Cela traduit l'isomorphisme des graphes.

C Caractérisation structurelle des graphes

■ **Définition 77 — Ordre d'un graphe.** L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets. Pour $G = (V, E)$, l'ordre du graphe vaut donc le cardinal de l'ensemble V que l'on note généralement $|V|$. On note parfois l'ordre d'un graphe $|G|$.

R Si $|V| = n$, alors une matrice d'adjacence de $G = (V, E)$ est de dimension $n \times n$. Une liste d'adjacence de G a pour taille n .

■ **Définition 78 — Taille d'un graphe.** La taille d'un graphe désigne le nombre de ses arêtes. On le note $|E|$ et parfois $||G||$

■ **Définition 79 — Voisinage d'un sommet.** L'ensemble de voisins d'un sommet a d'un graphe $G = (V, E)$ est le voisinage de ce sommet. On le note généralement $\mathcal{N}_G(a)$.

■ **Définition 80 — Incidence.** Une arête est dite incidente à un sommet si ce sommet est une des extrémités de cette arête

■ **Définition 81 — Degré d'un sommet.** Le degré $d(a)$ d'un sommet a d'un graphe G est le nombre d'arêtes incidentes au sommet a . C'est aussi $|\mathcal{N}_G(a)|$.

■ **Définition 82 — Degrés d'un graphe orienté.** Dans un graphe orienté G et pour un sommet a de ce graphe, on distingue :

- le degré entrant $d_+(a)$: le nombre d'arêtes incidentes à a et dirigées sur a ,
- le degré sortant $d_-(a)$: le nombre d'arêtes incidentes qui sortent de a et qui sont dirigées vers un autre sommet.

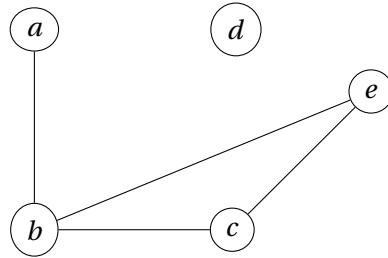


FIGURE 11.8 – Graphe d'ordre cinq, de taille quatre et de séquence $[0,1,2,2,3]$. Le sommet d est isolé. Ce graphe n'est ni complet ni connexe.

■ **Définition 83 — Sommet isolé.** Un sommet isolé est un sommet dont le degré vaut zéro.

■ **Définition 84 — Égalité de deux graphes.** Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont égaux si et seulement si $V = V'$ et $E = E'$.

■ **Définition 85 — Séquence des degrés.** La séquence des degrés d'un graphe G est la liste ordonnée par ordre croissant des degrés des sommets de G .

Sur la figure 11.8, on a représenté un graphe d'ordre cinq avec un sommet isolé. Ce graphe n'est pas connexe ni complet et sa séquence des degrés est $[0,1,2,2,3]$.

■ **Définition 86 — Graphe complémentaire.** Soit $G = (V, E)$ un graphe. On dit que $\bar{G} = (V, \bar{E})$ est le complémentaire de G si les arêtes de \bar{G} sont les arêtes possibles qui ne figurent pas dans G . On note ces arêtes \bar{E} .

Par exemple, le complémentaire du graphe 11.8 est représenté sur la figure 11.9.

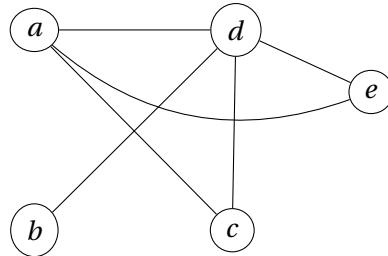


FIGURE 11.9 – Graphe complémentaire du graphe de la figure 11.8

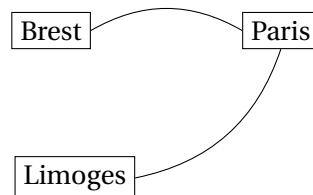


FIGURE 11.10 – Graphe d'ordre trois, de taille deux et de séquence [1,1,2]

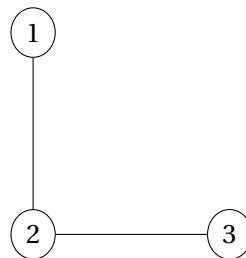


FIGURE 11.11 – Graphe d'ordre trois, de taille deux et de séquence [1,1,2]

D Isomorphisme des graphes

Considérons les graphes des figures 11.10 et 11.11. Ils ne diffèrent que par les noms des sommets et la signification des arêtes. Si on ne prête pas attention aux noms des sommets ni à la signification des arêtes, ces deux graphes sont identiques, leurs caractéristiques sont les mêmes : ordre, degré, taille. On dit qu'ils sont **isomorphes** ou qu'ils sont identiques à un isomorphisme près. Finalement, c'est la structure du graphe telle qu'on peut la caractériser qui importe, pas son apparence.

■ **Définition 87 — Graphes isomorphes.** Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont isomorphes si et seulement s'il existe une bijection σ de V vers V' pour laquelle $\sigma(E) = E'$, c'est à dire qu'à chaque arête ab de E correspond une seule arête de E' notée $\sigma(a)\sigma(b)$.

■ **Exemple 23 — Isomorphes et bijection.** Considérons les deux graphes G et G' représentés sur les figures 11.12 et 11.13.

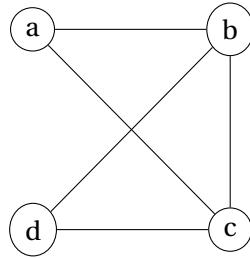
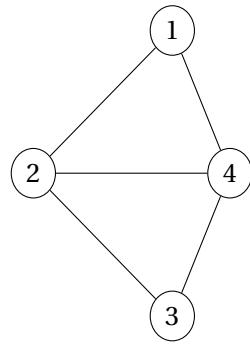
On peut les définir par des ensembles de la manière suivante :

$$G = (V = \{a, b, c, d\}, E = \{ab, ac, bc, bd, dc\}) \quad (11.3)$$

$$G' = (V' = \{1, 2, 3, 4\}, E' = \{12, 14, 24, 23, 43\}) \quad (11.4)$$

Formulé de la sorte, on pourrait croire que ces deux graphes ne sont pas isomorphes. Pourtant, c'est le cas. Comment le montrer? En exhibant une bijection ad-hoc!

On cherche donc une bijection entre les deux graphes en comparant les degrés des som-

FIGURE 11.12 – Graphe d'exemple $G = (V = \{a, b, c, d\}, E = \{ab, ac, bd, dc\})$ FIGURE 11.13 – Graphe d'exemple $G' = (V' = \{1, 2, 3, 4\}, E' = \{12, 14, 24, 23, 43\})$

mets et en observant leurs arêtes.

On peut proposer la bijection $\sigma : V \longrightarrow V'$ telle que :

$$\sigma(a) = 1 \quad (11.5)$$

$$\sigma(b) = 2 \quad (11.6)$$

$$\sigma(c) = 4 \quad (11.7)$$

$$\sigma(d) = 3 \quad (11.8)$$

On a également la correspondance des arêtes :

$$\sigma(a)\sigma(b) = 12 \quad (11.9)$$

$$\sigma(a)\sigma(c) = 14 \quad (11.10)$$

$$\sigma(b)\sigma(c) = 24 \quad (11.11)$$

$$\sigma(b)\sigma(d) = 23 \quad (11.12)$$

$$\sigma(c)\sigma(d) = 43 \quad (11.13)$$

R On peut compter le nombre de graphes isomorphes pour un ordre donné. Par exemple, il y a deux graphes isomorphes d'ordre 2 et 8 d'ordre 3.

E Chaînes, cycles et parcours

■ **Définition 88 — Chaîne.** Une chaîne reliant deux sommets a et b d'un graphe non orienté est une suite finie d'arêtes consécutives reliant a à b . Dans le cas d'un graphe orienté on parle de chemin.

■ **Définition 89 — Chaîne élémentaire.** Une chaîne élémentaire ne passe pas deux fois par un même sommet : tous ses sommets sont distincts.

■ **Définition 90 — Chaîne simple.** Une chaîne simple ne passe pas deux fois par une même arête : toutes ses arêtes sont distinctes.

■ **Définition 91 — Longueur d'une chaîne.** La longueur d'une chaîne \mathcal{C} est :

- le nombre d'arêtes que comporte la chaîne dans un graphe simple non pondéré,
- la somme des poids des arêtes de la chaîne, c'est à dire $\sum_{e \in \mathcal{C}} w(e)$, dans le cas d'un graphe simple pondéré dont la fonction de valuation est w .

R La longueur d'une chaîne, c'est le nombre d'arêtes qu'elle contient ou si on prend la seconde définition la taille du graphe.

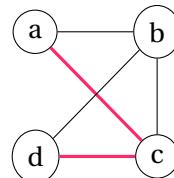


FIGURE 11.14 – Exemple de chaîne simple reliant a à d en rouge

■ **Définition 92 — Cycle.** Un cycle est une chaîne simple dont les deux sommets extrémités sont identiques.

La longueur d'un cycle est le nombre d'arêtes qu'il contient. Dans le cas des graphes orientés on parle de circuit.

■ **Définition 93 — Chaîne eulérienne.** Une chaîne eulérienne est une chaîne simple qui passe par toutes les arêtes d'un graphe.

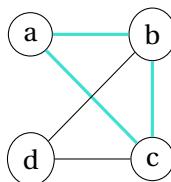


FIGURE 11.15 – Exemple de cycle en turquoise

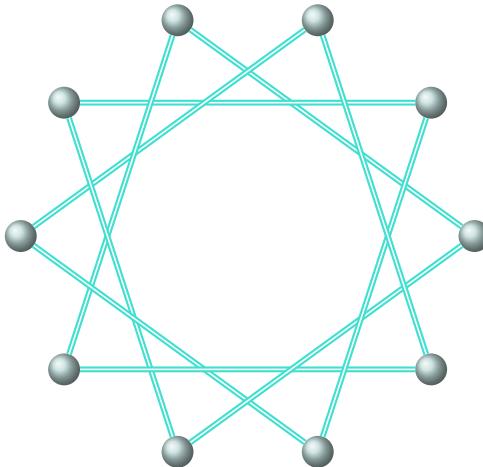


FIGURE 11.16 – Saurez-vous trouver le cycle eulérien de ce graphe?

■ **Définition 94 — Cycle eulérien.** Un cycle eulérien est un cycle passant exactement une fois par chaque arête d'un graphe.

■ **Définition 95 — Cycle hamiltonien.** Un cycle hamiltonien est un sous-graphe couvrant qui est un cycle. Autrement dit, c'est un cycle qui passe par tous les sommets d'un graphe.

R Rowan Hamilton était un astronome irlandais qui a inventé le jeu icosien^a en 1857.

^a. The icosian game, jeu équivalent à l'icosagonal d'Édouard Lucas [16]

R Les graphes complets K_n sont eulériens et hamiltoniens : ils possèdent à la fois un cycle eulérien et un cycle hamiltonien.

R On peut également définir une chaîne comme le graphe d'ordre n isomorphe au graphe $P_n = \{V_n = \{1, 2, \dots, n\}, E_n = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}\}$. Par convention, on pose $P_1 = \{V_1 = \{1\}\}$

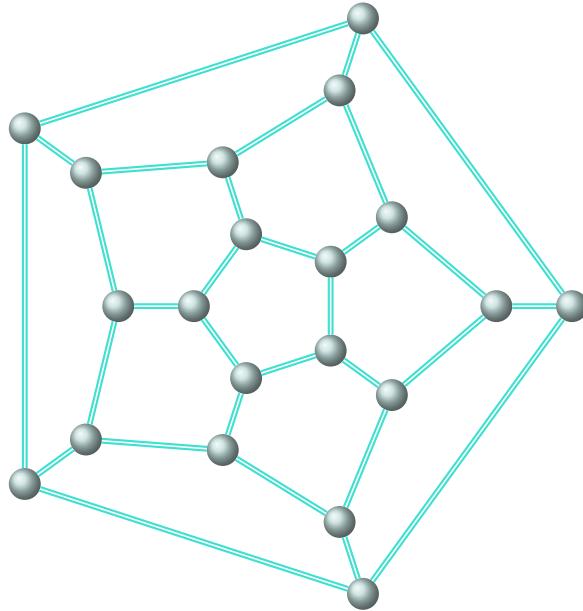


FIGURE 11.17 – Graphe du jeu icosien et du dodécaèdre (solide régulier à 12 faces pentagonales). C'est un graphe cubique car chaque sommet possède trois voisins. Ce graphe possède un cycle hamiltonien. Saurez-vous le trouver?

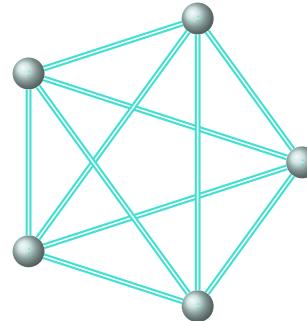


FIGURE 11.18 – Graphe K_5 : saurez-vous trouver des cycles hamiltonien et eulérien de ce graphe?

et $E_1 = \emptyset$. Les extrémités de la chaînes sont les deux sommets de degré 1.

Avec la même approche et les mêmes notations, un cycle devient alors un graphe isomorphe au graphe $C_n = \{V_n, E'_n = E_n \cup \{n, 1\}\}$, c'est à dire que la chaîne finit là où elle a commencé. L'ordre de C_n est supérieur ou égal à trois.

■ **Définition 96 — Parcours.** Un parcours d'un graphe G est une liste non vide et ordonnées

de sommets de G telles que deux sommets consécutifs sont adjacents dans G . Il peut y avoir des répétitions de sommets dans un parcours, mais il n'y a pas de répétitions d'arêtes dans un cycle ou une chaîne simple.

Par exemple, $\pi = \{a, b, c, d, b\}$ est un parcours sur le graphe de la figure 11.15.

F Sous-graphes et connexité

■ **Définition 97 — Graphe connexe.** Un graphe $G = (V, E)$ est connexe si et seulement si pour tout couple de sommets (a, b) de G , il existe une chaîne d'extrémités a et b .

Par exemple, le graphe de la figure 11.1 est connexe, mais pas celui figure 11.8.

■ **Définition 98 — Sous-graphe.** Soit $G = (V, E)$ un graphe, alors $G' = (V', E')$ est un sous-graphe de G si et seulement si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$.

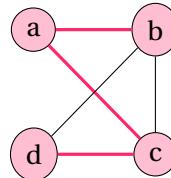


FIGURE 11.19 – Exemple de sous-graphe couvrant G en rouge : $G = (V = \{a, b, c, d\}, E = \{ab, ac, cd\})$

■ **Définition 99 — Sous-graphe couvrant.** G' est un sous-graphe couvrant de G si et seulement si G' est un sous-graphe de G et $V' = V$.

■ **Définition 100 — Sous-graphe induit.** Soit $S \subset V$ non vide. G' est un sous-graphe de G induit par S et on note $G[S]$ si et seulement si G' admet pour arêtes celles de G dont les deux extrémités sont dans S .

■ **Définition 101 — Clique.** Une clique est d'un graphe $G = (V, E)$ un sous-ensemble $C \subseteq V$ des sommets dont le sous-graphe induit $G[C]$ est complet.

Sur la figure 11.20, l'ensemble $S = \{b, c, d\}$ est un clique.

G Coloration de graphes

■ **Définition 102 — Coloration.** Une coloration d'un graphe simple est l'attribution d'une couleur aux sommets de ce graphe.

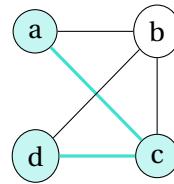


FIGURE 11.20 – Exemple de sous-graphe induit par les sommets $S = \{a, c, d\}$ en turquoise. $G[S] = (V = \{a, c, d\}, E = \{ac, cd\})$

■ **Définition 103 — Coloration valide.** Une coloration est valide lorsque deux sommets adjacents n'ont jamais la même couleur.

■ **Définition 104 — Nombre chromatique.** Le nombre chromatique d'un graphe G est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour obtenir une coloration valide de ce graphe. On le note généralement $\chi(G)$.

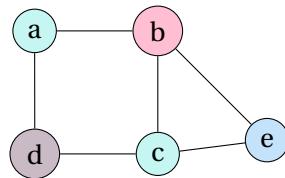


FIGURE 11.21 – Exemple de 4-coloration valide d'un graphe. Cette coloration n'est pas optimale.

■ **Définition 105 — k-coloration.** Lorsqu'une coloration de graphe utilise k couleurs, on dit d'elle que c'est une k -coloration.

■ **Définition 106 — Coloration optimale.** Une $\chi(G)$ -coloration valide est une coloration optimale d'un graphe G .

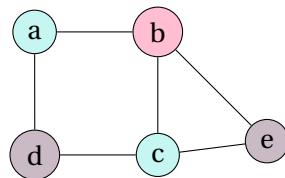


FIGURE 11.22 – Exemple de 3-coloration valide d'un graphe. Cette coloration est optimale.

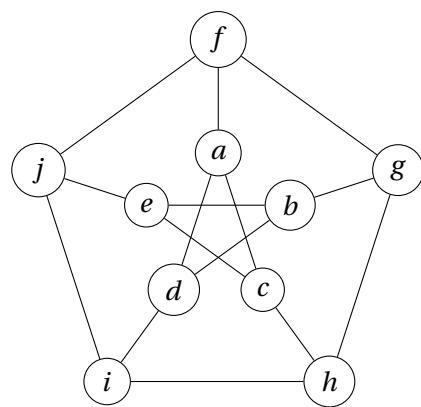


FIGURE 11.23 – Graphe de Petersen : saurez-vous proposer une coloration optimale de ce graphe sachant que son nombre chromatique vaut trois ?

H Distances

■ **Définition 107 — Distance dans un graphe simple non pondéré.** La distance d'un sommet a à un sommet b dans un graphe simple non pondéré G est la plus courte chaîne d'extrémités a et b . On la note $d_G(a, b)$.

R Cette définition coïncide avec la notion de distance en mathématiques. Pour les sommets a , b et c de G

- $d_G(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
- $d_G(a, b) = d_G(b, a)$
- $d_G(a, b) \leq d_G(a, c) + d_G(c, b)$

■ **Définition 108 — Valuation d'une chaîne dans un graphe pondéré.** La valuation d'une chaîne dans un graphe pondéré est la somme des poids de chacune de ses arêtes. Pour une chaîne P , on la note $\nu(P)$.

■ **Définition 109 — Distance dans un graphe pondéré.** La distance d'un sommet a à un sommet b dans un graphe pondéré G est la valuation minimum des chaînes d'extrémités a et b . On la note $d_{G,\nu}(a, b)$.

I Arbres

■ **Définition 110 — Arbre.** Un arbre est un graphe connexe et acyclique.

■ **Définition 111 — Feuilles.** Dans un arbre, les sommets de degré un sont appelés les feuilles.

■ **Définition 112 — Arbre recouvrant.** Un arbre recouvrant d'un graphe G est un sous-graphe couvrant de G qui est un arbre.

■ **Définition 113 — Arbre enraciné.** Parfois, on distingue un sommet particulier dans un arbre A : la racine r . Le couple (A, r) est un nommé arbre enraciné. On le représente un tel arbre verticalement avec la racine placée tout en haut comme sur la figure 11.24.

■ **Définition 114 — Arbre binaire.** Un arbre binaire est un graphe connexe acyclique pour lequel le degré de chaque sommet vaut au maximum trois. Le degré de la racine vaut au maximum deux.

■ **Définition 115 — Arbre binaire parfait.** Un arbre binaire parfait est un arbre dans lequel tous les niveaux sauf le dernier doivent être totalement remplis. Si le dernier n'est pas rempli totalement alors il doit être rempli de gauche à droite.

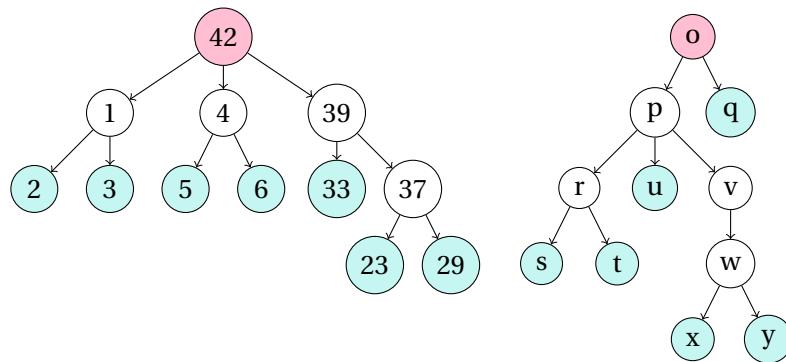


FIGURE 11.24 – Exemples d’arbres enracinés. Les racines des arbres sont en rouge, les feuilles en turquoise. Le tout forme une forêt.

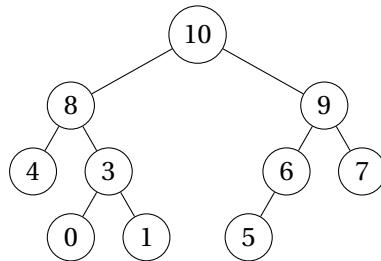


FIGURE 11.25 – Arbre binaire

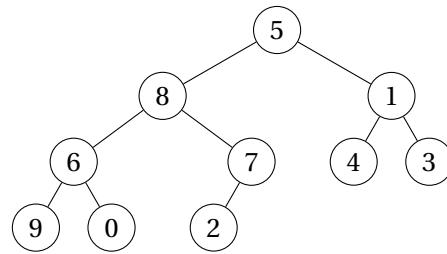


FIGURE 11.26 – Arbre binaire parfait

Ces arbres sont illustrés sur les figure 11.25 et 11.26.

Propriétés des graphes

À la fin de ce chapitre, je sais :



A Des degrés et des plans

Théorème 2 — Somme des degrés d'un graphe. Le nombre d'arêtes d'un graphe simple est égale à la moitié de la somme des degrés de sommets de ce graphe.

Plus formellement, soit $G = (V, E)$ un graphe simple alors on a :

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \quad (12.1)$$

R On appelle souvent ce théorème le lemme des poignées de mains car il peut se traduire par le fait que dans un graphe il y a toujours un nombre pair de sommets de degré impair.

Théorème 3 — Formule d'Euler pour les graphes planaires. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. G est planaire si le nombre de régions du plan qu'il délimite R vaut :

$$R = 2 + |E| - |V| \quad (12.2)$$

R Pour vérifier cette formule, il ne faut pas oublier la région extérieur au graphe qui compte également.

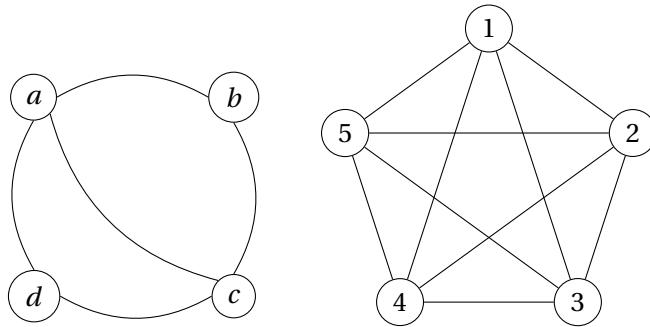


FIGURE 12.1 – Sur ces graphes, on peut vérifier les théorèmes de caractérisation des chaînes eulériennes et des cycles eulériens

B Caractérisation des chaînes, des cycles et des graphes

Théorème 4 — Caractérisation d'une chaîne eulérienne. Il existe une chaîne eulérienne dans un graphe lorsque seuls les sommets de départ et d'arrivée sont de degré impair.

Théorème 5 — Caractérisation d'un cycle eulérien. Il existe un cycle eulérien dans un graphe si tous les sommets sont de degré pair.

Pour bien visualiser ces caractérisations, on peut s'entraîner sur les graphes de la figure 12.1. Le graphe d'ordre quatre possède une chaîne eulérienne mais pas de cycle eulérien. Le graphe complet K_5 possède les deux.

Théorème 6 — Chaînes extraites et existence de chaînes. S'il existe un parcours d'un sommet a vers un sommet b dans un graphe G alors il existe une chaîne de a vers b dont les arêtes sont des arêtes du parcours.

Par transitivité, s'il existe une chaîne de a à b et une de a à c alors il existe une chaîne de b à c .

On appelle graphe hamiltonien un graphe qui possède un cycle hamiltonien (cf. définition 95). Un graphe hamiltonien :

- est connexe,
- d'ordre supérieur ou égal à trois,
- n'a pas de sommets de degré un.

Théorème 7 — Condition nécessaire pour un graphe non hamiltonien. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Soit $A \subseteq V$ un ensemble de sommets de G . Si le nombre de composantes connexes de $G - A$ est strictement supérieur au nombre de sommets de A , alors G n'est pas hamiltonien.

Théorème 8 — Condition nécessaire pour un graphe hamiltonien. Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre supérieur ou égal à deux. Si pour toute paire de sommets a et b de G on a :

$$d(a) + d(b) \geq |V| \quad (12.3)$$

alors G est hamiltonien.

C Graphes acycliques et connexes

Théorème 9 — Condition nécessaire d'acyclicité d'un graphe. Soit un graphe $G = (V, E)$ possédant au moins une arête et acyclique alors G possède au moins deux sommets de degré un et on a :

$$|E| \leq |V| - 1 \quad (12.4)$$

Théorème 10 — Condition nécessaire de connexité d'un graphe. Si un graphe $G = (V, E)$ est connexe alors on a :

$$|E| \geq |V| - 1 \quad (12.5)$$

R On déduit des deux théorèmes précédents qu'un arbre (cf. définition 110) possède exactement $|V| - 1$ arêtes.

D Coloration, graphes planaires et nombre chromatique

Théorème 11 — Trois couleurs. Si tous les degrés des sommets d'un graphe planaire sont pairs, alors trois couleurs suffisent pour obtenir une coloration valide.

Théorème 12 — Quatre couleurs. Le nombre chromatique d'un graphe planaire ne dépasse jamais quatre.

On peut chercher à encadrer le nombre chromatique d'un graphe. Dans une premier temps, on peut remarquer que :

- $\chi(G) \leq |V|$, autrement dit, l'ordre d'un graphe est supérieur ou égal au nombre chromatique. L'égalité est atteinte pour les graphes complets : tous les sommets étant reliés les uns aux autres, on ne peut qu'utiliser des couleurs différentes pour chaque sommet.
- Pour un sous-graphe G' de G , on a $\chi(G') \leq \chi(G)$.

■ **Définition 116 — Degré maximum des sommets d'un graphe.** On note $\Delta(G)$ le degré maximum des sommets d'un graphe G .

■ **Définition 117 — Ordre du plus grand sous-graphe complet d'un graphe.** On note $\omega(G)$ l'ordre du plus grand sous-graphe **complet** d'un graphe G .

Théorème 13 — Encadrement du nombre chromatique. Pour un graphe G , on a :

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \quad (12.6)$$

E Principe d'optimalité et plus court chemin dans un graphe

Théorème 14 — Optimalité et plus court chemin dans graphe. Si $a \rightsquigarrow b$ est le plus court chemin passant par un sommet c , alors les sous-chemins $a \rightsquigarrow c$ et $c \rightsquigarrow b$ sont des plus courts chemins.

Démonstration. Soit $a \rightsquigarrow b$ le plus court chemin passant par un sommet c dans un graphe G . Si $a \rightsquigarrow c$ n'est pas le plus court chemin, alors il suffit de prendre le plus court chemin entre a et c et de le joindre à $c \rightsquigarrow b$ pour obtenir un chemin plus court de a vers b . Ce qui est en contradiction avec notre hypothèse que $a \rightsquigarrow b$ est le plus court chemin. ■

Algorithmes et graphes

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ parcourir un graphe en largeur et en profondeur
- ☒ utiliser une file ou un pile pour parcourir un graphe
- ☒ énoncer le principe de l'algorithme de Dijkstra (plus court chemin)
- ☒ expliquer ce qu'est un arbre recouvrant
- ☒ expliquer l'intérêt d'un graphe biparti

A Parcours d'un graphe

a Parcours en largeur

Parcourir en largeur un graphe signifie qu'on cherche à visiter tous les voisins situé à une même distance d'un sommet avant de parcourir le reste du graphe.

 **Vocabulary 18 — Breadth First Search ↗** Parcours en largeur

Le parcours en largeur d'un graphe (cf. algorithme 29) est un algorithme à la base de nombreux développements comme l'algorithme de Dijkstra et de Prim (cf. algorithmes 33 et 37). Il utilise une file FIFO¹ afin gérer la découverte des voisins dans l'ordre de la largeur du graphe.

Pour matérialiser le parcours en profondeur, on opère en repérant les sommets à visiter. Lorsqu'un sommet est découvert, il intègre l'ensemble des éléments à visiter, c'est à dire la file F. Lorsque le sommet a été traité, il quitte la file. Il est donc également nécessaire de garder la trace du passage sur un sommet afin de ne pas traiter plusieurs fois un même sommet : si un sommet a été visité alors il intègre l'ensemble des éléments visités. En Python, cet ensemble v

1. First In First Out

peut être implémenté par un type `list` ou un type `set`.

Au fur et à mesure de sa progression, cet algorithme construit un arbre de parcours en largeur dans le graphe. La racine de cet arbre est l'origine du parcours. Comme un sommet de cet arbre n'est découvert qu'une fois, il a au plus un parent. L'algorithme 29 ne renvoie rien mais garde la trace du parcours dans cet arbre dans une structure de type liste (c) qui enregistre le chemin parcouru.

Algorithme 29 Parcours en largeur d'un graphe

```

1: Fonction PARCOURS_EN_LARGEUR( $G, s$ )                                 $\triangleright s$  est un sommet de  $G$ 
2:    $F \leftarrow$  une file FIFO vide                                          $\triangleright F$  comme file FIFO
3:    $V \leftarrow$  un ensemble vide                                            $\triangleright V$  comme visités
4:    $C \leftarrow$  une liste vide                                             $\triangleright C$  comme chemin
5:   ENFILER( $F, s$ )
6:   AJOUTER( $V, s$ )
7:   tant que  $F$  n'est pas vide répéter
8:      $v \leftarrow$  DÉFILER( $F$ )
9:     AJOUTER( $C, v$ )
10:    pour chaque voisin  $x$  de  $v$  dans  $G$  répéter                          $\triangleright x$  n'a pas encore été découvert
11:      si  $x \notin V$  alors
12:        AJOUTER( $V, x$ )
13:        ENFILER( $F, x$ )
14:    renvoyer  $C$                                                   $\triangleright$  Facultatif, on pourrait traiter chaque sommet  $v$  en place

```

La complexité de cet algorithme est lié, comme toujours, aux structures de données utilisées. Soit G un graphe d'ordre n et de taille m implémenté par une liste d'adjacence. On a choisi une file FIFO pour laquelle les opérations ENFILER et DÉFILER sont en $O(1)$. On parcourt tous les sommets et chaque liste d'adjacence est parcourue une fois. Ces opérations sont donc en $O(n + m)$.

R Si l'on avait choisi un type tableau dynamique (typiquement le type `list` en Python) au lieu d'une file FIFO pour implémenter F , alors l'opération DÉFILER ferait perdre du temps : en effet, le tableau serait réécrit dans sa totalité à chaque fois qu'une opération DÉFILER aurait lieu car on retirerait alors le premier élément du tableau et il faudrait donc allouer un autre espace mémoire à ce nouveau tableau.

R L'ensemble V n'est pas indispensable dans l'algorithme 29. On pourrait se servir du dictionnaire qui enregistre le parcours. Néanmoins, son utilisation permet de bien découpler la sortie de l'algorithme (le chemin C) de son fonctionnement interne.

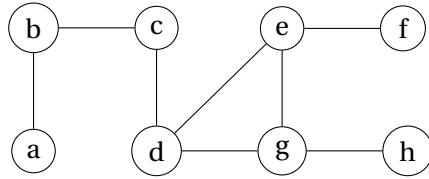


FIGURE 13.1 – Exemple de parcours en largeur au départ de a : a → b → c → d → e → g → f → h.

b Parcours en profondeur

Parcourir en profondeur un graphe signifie qu'on cherche à emprunter d'abord les arêtes du premier sommet trouvé avant de parcourir les voisins de ce sommet et le reste du graphe.



Vocabulary 19 — Depth First Search ↽ Parcours en profondeur

Le parcours en profondeur d'un graphe (cf. algorithme 30) est un algorithme qui utilise une pile P afin gérer la découverte des voisins dans l'ordre de la profondeur du graphe. Il peut aussi s'exprimer récursivement (cf. algorithme 31).

Algorithme 30 Parcours en profondeur d'un graphe

1: Fonction PARCOURS_EN_PROFONDEUR(G, s) 2: $P \leftarrow$ une file vide 3: $V \leftarrow$ un ensemble vide 4: $C \leftarrow$ un liste vide 5: EMPILER(P, s) 6: AJOUTER(V, s) 7: tant que P n'est pas vide répéter 8: $v \leftarrow$ DÉPILER(P) 9: AJOUTER(C, v) 10: pour chaque voisin x de v dans G répéter 11: si $x \notin V$ alors ▷ x n'a pas encore été découvert 12: AJOUTER(V, x) 13: EMPILER(P, x) 14: renvoyer C ▷ Facultatif, on pourrait traiter chaque sommet v en place	▷ s est un sommet de G ▷ P comme pile ▷ V comme visités ▷ C comme chemin
---	---

Algorithme 31 Parcours en profondeur d'un graphe (version récursive)

1: Fonction REC_PARCOURS_EN_PROFONDEUR(G, s, V) 2: AJOUTER(V, s) 3: pour chaque voisin x de s dans G répéter 4: si $x \notin V$ alors ▷ x n'a pas encore été découvert 5: REC_PARCOURS_EN_PROFONDEUR(G, x, V)	▷ s est un sommet de G ▷ s est marqué visité ▷ x n'a pas encore été découvert
---	---

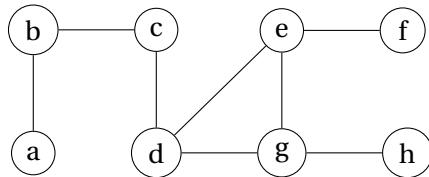


FIGURE 13.2 – Exemple de parcours en profondeur au départ de a : a → b → c → d → g → h → e → f

La complexité de cet algorithme est lié, comme toujours, aux structures de données utilisées. Soit G un graphe d'ordre n et de taille m implémenté par une liste d'adjacence. On a choisi une pile LIFO pour laquelle les opérations **EMPILER** et **DÉPILER** sont en $O(1)$. On parcourt tous les sommets et chaque liste d'adjacence est parcourue une fois. Ces opérations sont donc en $O(n + m)$.

B Trouver un chemin dans un graphe

On peut modifier l'algorithme 29 de parcours en largeur d'un graphe pour trouver un chemin reliant un sommet à un autre et connaître la longueur de la chaîne qui relie ces deux sommets. Il suffit pour cela de :

- garder la trace du prédécesseur (parent) du sommet visité sur le chemin,
- sortir du parcours dès qu'on a trouvé le sommet cherché (early exit),
- calculer le coût du chemin associé.

Le résultat est l'algorithme 32. Opérer cette recherche dans un graphe ainsi revient à chercher dans toutes les directions, c'est à dire sans tenir compte des distances déjà parcourues.

R Il faut noter néanmoins que le chemin trouvé et la distance associée issue de l'algorithme 32 n'est pas nécessairement la meilleure, notamment car on ne tient pas compte de la distance parcourue jusqu'au sommet recherché.

R Si le graphe n'est pas pondéré, cet algorithme fonctionne néanmoins, il suffit de compter le nombre de sauts pour évaluer la distance (la fonction de valuation vaut toujours 1).

C Plus courts chemins dans les graphes pondérés

R Un graphe non pondéré peut-être vu comme un graphe pondéré dont la fonction de valuation vaut toujours 1. La distance entre deux sommets peut alors être interprétée comme le nombre de sauts nécessaires pour atteindre un sommet.

Algorithme 32 Longueur d'une chaîne via un parcours en largeur d'un graphe pondéré

```

1: Fonction CD_PEL( $G, a, b$ )           ▷ Trouver un chemin de  $a$  à  $b$  et la distance associée
2:    $F \leftarrow$  une file FIFO vide          ▷  $F$  comme file FIFO
3:    $V \leftarrow$  un ensemble vide            ▷  $V$  comme visités
4:    $P \leftarrow$  un dictionnaire vide        ▷  $P$  comme parent
5:   ENFILER( $F, s$ )
6:   AJOUTER( $V, s$ )
7:   tant que  $F$  n'est pas vide répéter
8:      $v \leftarrow$  DÉFILER( $F$ )
9:     si  $v$  est le sommet  $b$  alors          ▷ Objectif atteint, early exit
10:    sortir de la boucle
11:    pour chaque voisin  $x$  de  $v$  dans  $G$  répéter
12:      si  $x \notin V$  alors                  ▷  $x$  n'a pas encore été découvert
13:        AJOUTER( $V, x$ )
14:        ENFILER( $F, x$ )
15:         $P[x] \leftarrow v$                    ▷ Garder la trace du parent
16:       $c \leftarrow 0$                       ▷ Coût du chemin
17:       $s \leftarrow b$ 
18:      tant que  $s$  est différent de  $a$  répéter
19:         $c \leftarrow c + w(s, P[s])$           ▷  $w$  est la fonction de valuation du graphe  $G$ 
20:        sommet  $\leftarrow P[s]$               ▷ On remonte à l'origine du chemin
21:      renvoyer  $c$ 

```

Théorème 15 — Existence d'un plus court chemin. Dans un graphe pondéré **sans pondérations négatives**, il existe toujours un plus court chemin.

Démonstration. Un graphe pondéré possède un nombre fini de sommets et d'arêtes (cf. définition 66). Il existe donc un nombre fini de chaînes entre les sommets du graphe. Comme les valuations du graphe ne sont pas négatives, c'est à dire que $\forall e \in E, w(e) \geq 0$, l'ensemble des longueurs de ces chaînes est une partie non vide de \mathbb{N} : elle possède donc un minimum. Parmi ces chaînes, il en existe donc nécessairement une dont la longueur est la plus petite, le plus court chemin. ■

■ **Définition 118 — Plus court chemin entre deux sommets d'un graphe.** Le plus court chemin entre deux sommets a et b d'un graphe G est une chaîne \mathcal{C}_{ab} qui relie les deux sommets a et b :

- et qui comporte un minimum d'arêtes si G est un graphe non pondéré,
- et dont le poids cumulé est le plus faible, c'est à dire $\min_{\mathcal{C}_{ab} \in G} \left(\sum_{e \in \mathcal{C}_{ab}} w(e) \right)$, dans le cas d'un graphe pondéré de fonction de valuation w .

■ **Définition 119 — Distance entre deux sommets.** La distance entre deux sommets d'un graphe est la longueur d'un plus court chemin entre ces deux sommets. Pour deux sommets a et b , on la note δ_{ab} . On a enfin :

$$\delta_{ab} = \min_{\mathcal{C}_{ab} \in G} \left(\sum_{e \in \mathcal{C}_{ab}} w(e) \right) \quad (13.1)$$

On se propose maintenant d'étudier les algorithmes les plus célèbres qui illustrent, dans différentes configurations, le concept de plus court chemin dans un graphe. La majorité de ces algorithmes reposent sur le principe d'optimalité de Bellman et la programmation dynamique (cf définition 127) que l'on peut énoncer ainsi : **toute sous-chaîne entre p et q d'un plus court chemin entre a et b est un plus court chemin entre p et q** .

a Algorithme de Dijkstra

L'algorithme de Dijkstra²[4] s'applique à des **graphes pondérés** $G = (V, E, w)$ **dont la valuation est positive**, c'est à dire que $\forall e \in E, w(e) \geq 0$. C'est un algorithme glouton optimal (cf. définition 63) qui trouve les plus courts chemins entre un sommet particulier $a \in V$ et tous les autres sommets d'un graphe. Pour cela, l'algorithme classe les différents sommets par ordre croissant de leur distance minimale au sommet de départ. Dans ce but, il **parcourt en largeur le graphe en choisissant les voisins les plus proches en premier**.

2. à prononcer "Dijkstra"

Algorithme 33 Algorithme de Dijkstra, plus courts chemins à partir d'un sommet donné

```

1: Fonction DIJKSTRA( $G = (V, E, w)$ ,  $a$ )       $\triangleright$  Trouver les plus courts chemins à partir de  $a \in V$ 
2:    $\Delta \leftarrow a$                        $\triangleright \Delta$  est l'ensemble des sommets dont on connaît la distance à  $a$ 
3:    $\Pi \leftarrow$  un dictionnaire vide     $\triangleright \Pi[s]$  est le parent de  $s$  dans le plus court chemin de  $a$  à  $s$ 
4:    $d \leftarrow$  l'ensemble des distances au sommet  $a$ 
5:    $\forall s \in V, d[s] \leftarrow w(a, s)$            $\triangleright w(a, s) = +\infty$  si  $s$  n'est pas voisin de  $a$ , 0 si  $s = a$ 
6:   tant que  $\bar{\Delta}$  n'est pas vide répéter       $\triangleright \bar{\Delta}$  : sommets dont la distance n'est pas connue
7:     Choisir  $u$  dans  $\bar{\Delta}$  tel que  $d[u] = \min(d[v], v \in \bar{\Delta})$ 
8:      $\Delta = \Delta \cup \{u\}$                        $\triangleright$  On prend la plus courte distance à  $a$  dans  $\bar{\Delta}$ 
9:     pour  $x \in \bar{\Delta}$  répéter       $\triangleright$  Ou bien  $x \in N_G(u) \cap \bar{\Delta}$ , pour tous les voisins de  $u$  dans  $\bar{\Delta}$ 
10:    si  $d[x] > d[u] + w(u, x)$  alors
11:       $d[x] \leftarrow d[u] + w(u, x)$            $\triangleright$  Mises à jour des distances des voisins
12:       $\Pi[x] \leftarrow u$                    $\triangleright$  Pour garder la tracer du chemin le plus court
13:   renvoyer  $d, \Pi$ 

```

R Il faut remarquer que les boucles imbriquées de cet algorithme peuvent être comprises comme deux étapes successives de la manière suivante :

1. On choisit un nouveau sommet u de G à chaque tour de boucle *tant que* qui est tel que $d[u]$ est la plus petite des valeurs accessibles dans $\bar{\Delta}$. C'est le **voisin d'un sommet de $\bar{\Delta}$ le plus proche de a** . Ce sommet u est alors inséré dans l'ensemble Δ : c'est la **phase de transfert** de u de $\bar{\Delta}$ à Δ .
2. Lors de la boucle *pour*, on met à jour les distances des voisins de u qui n'ont pas encore été découverts. En effet, si x n'est pas un voisin de u , alors il n'existe pas d'arête entre u et x et $w(u, x) = +\infty$. La mise à jour de la distance n'a donc pas lieu, on n'a pas trouvé une meilleure distance à x . C'est la **phase de mise à jour des distances** des voisins de u .

L'algorithme de Dijkstra procède donc de proche en proche.

■ **Exemple 24 — Application de l'algorithme de Dijkstra.** On se propose d'appliquer l'algorithme 33 au graphe représenté sur la figure 13.3. Le tableau 13.1 représente les distances successivement trouvées à chaque tour de boucle *tant que* de l'algorithme. En rouge figurent les distances les plus courtes à a à chaque tour. On observe également que certaines distances sont mises à jour sans pour autant que le sommet soit sélectionné au tour suivant.

À la fin de l'algorithme, on note donc que les distances les plus courtes de a à b, c, d, e, f sont $[5, 1, 8, 3, 6]$. Le chemin le plus court de a à b est donc $a \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow b$. Le plus court de a à f est $a \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow f$. C'est la structure de données Π qui garde en mémoire le prédécesseur (parent) d'un sommet sur le chemin le plus court qui permettra de reconstituer les chemins.

Δ	a	b	c	d	e	f	$\bar{\Delta}$
{}	0	7	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	{a, b, c, d, e, f}
{a}	.	7	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	{b, c, d, e, f}
{a, c}	.	6	.	$+\infty$	3	8	{b, d, e, f}
{a, c, e}	.	5	.	8	.	6	{b, d, f}
{a, c, e, b}	.	.	.	8	.	6	{d, f}
{a, c, e, b, f}	.	.	.	8	.	.	{d}
{a, c, e, b, f, d}	{}

TABLE 13.1 – Tableau d des distances au sommet a successivement trouvées au cours de l'algorithme de Dijkstra appliqué au graphe de la figure 13.3

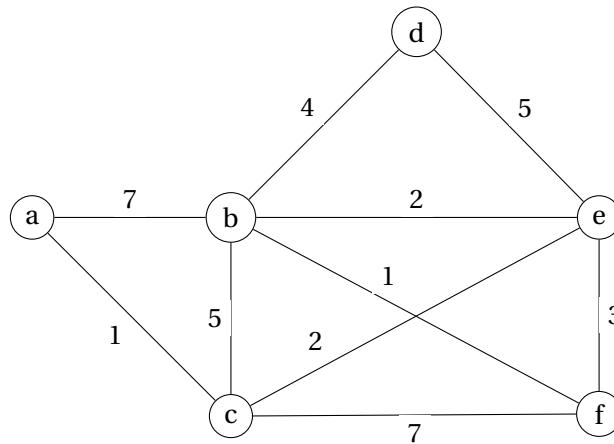


FIGURE 13.3 – Graphe pondéré à valeurs positives pour l'application de l'algorithme de Dijkstra.

Théorème 16 — L'algorithme de Dijkstra se termine et est correct.

Démonstration. Correction de l'algorithme : à chaque étape de cet algorithme, on peut distinguer deux ensembles de sommets : l'ensemble Δ est constitué des éléments dont on connaît la distance la plus courte à a et l'ensemble complémentaire $\bar{\Delta}$ qui contient les autres sommets.

On raisonne en utilisant l'invariant de boucle suivant : à la fin de chaque tour de boucle tant que (lignes 6-12), les itérations précédentes sont correctes, c'est à dire que d contient les distances vers tous les sommets de Δ . D'après le principe d'optimalité, tout chemin plus court vers un sommet de $\bar{\Delta}$ passera nécessairement par un sommet de Δ . On peut formuler ceci ainsi :

$$\forall u \in \Delta, d[u] = \delta_{au} \quad (13.2)$$

$$\forall u \in \bar{\Delta}, d[u] = \min(d[v] + w[v, u], v \in \Delta) \quad (13.3)$$

À l'entrée de la boucle, l'ensemble Δ ne contient que le sommet de départ a . On a $d[a] = 0$, ce qui est la distance minimale. On peut donc affirmer que d contient les distances entre a et tous les sommets de Δ .

On se place maintenant à une étape quelconque de la boucle. Notre hypothèse d'induction \mathcal{H} est que toutes les itérations précédentes sont correctes. On dispose donc d'un ensemble Δ et d'un dictionnaire d tel que d contient toutes les distances de a vers tous les éléments de Δ . On sélectionne alors le sommet s dans $\bar{\Delta}$ dont la distance à a est la plus petite et on le **transfert** dans Δ .

Soit $u \in \bar{\Delta}$ et voisin de s ³. On distingue alors trois possibilités :

1. u est déjà dans Δ . Alors on a $d[u] = \delta_{au}$ par hypothèse.
2. u n'entre pas dans Δ et appartient donc toujours à $\bar{\Delta}$. $d[u]$ est éventuellement modifiée et respecte la condition de l'invariant $d[u] = \min(d[v] + w[v, u], v \in \Delta)$ grâce à la condition de la ligne 10 de l'algorithme qui garantit qu'on choisit toujours le plus court sur le moment.
3. u entre dans Δ , c'est à dire que $u \in \bar{\Delta}$ et $\forall v \in \bar{\Delta}, d[u] \leq d[v]$, c'est le plus court chemin de a à u . Il s'agit alors de montrer que $d[u] = \delta_{au}$. Considérons le plus court chemin de a à u et prenons le premier sommet v de $\bar{\Delta}$ par lequel ce chemin passe⁴. D'après le principe d'optimalité et comme les pondérations sont positives, $\delta_{uv} \geq 0$ et on peut écrire :

$$\delta_{au} = \delta_{av} + \delta_{vu} \quad (13.4)$$

$$\delta_{au} \geq \delta_{av} \quad (13.5)$$

Par ailleurs, comme v appartient à $\bar{\Delta}$, il vérifie l'hypothèse d'induction. On a donc :

$$d[v] = \min(d[x] + w[x, v], x \in \Delta) \quad (13.6)$$

$$= \min(\delta_{ax} + w[x, v], x \in \Delta) \quad (13.7)$$

$$= \delta_{av} \quad (13.8)$$

la deuxième ligne étant obtenu grâce à l'hypothèse d'induction également. Comme u entre dans Δ , on a vu qu'on avait $\forall u \in \bar{\Delta}, d[u] \leq d[v]$. Par conséquent :

$$d[u] \leq d[v] = \delta_{av} \quad (13.9)$$

$$\leq \delta_{av} \quad (13.10)$$

$$\leq \delta_{au} \quad (13.11)$$

Or, $d[u]$ ne peut pas être plus petit que la distance de a à u . On a donc finalement $d[u] = \delta_{au}$.

d contient donc les distances vers tous les sommets à la fin de l'exécution de l'algorithme.

Terminaison de l'algorithme : avant la boucle *tant que*, $\bar{\Delta}$ possède $n - 1$ éléments, si $n \in \mathbb{N}^*$ est l'ordre du graphe. À chaque tour de boucle *tant que*, l'ensemble $\bar{\Delta}$ décroît strictement d'un élément et atteint donc nécessairement zéro. Le cardinal de $\bar{\Delta}$ est donc un variant de boucle. L'algorithme se termine lorsque le cardinal de $\bar{\Delta}$ atteint zéro. ■

3. Si u n'est pas voisin de s , il n'y a pas de mise à jour de la distance $d[u]$.

4. on peut avoir $v = u$!

La complexité de l'algorithme de Dijkstra dépend de l'ordre n du graphe considéré et de sa taille m . La boucle *tant que* effectue exactement $n - 1$ tours. La boucle *pour* effectue à chaque fois un nombre de tour égal au nombre d'arêtes non découvertes qui partent du sommet u considéré et vont vers un sommet voisin de $\bar{\Delta}$. On ne découvre une arête qu'une seule fois, puisque le sommet u est transféré dans Δ au début de la boucle. Au final, on exécute donc la mise à jour des distances un nombre de fois égal à la taille m du graphe, c'est à dire son nombre d'arêtes. En notant la complexité du transfert c_t et la complexité de la mise à jour des distances c_d et en déroulant la boucle *tant que*, on peut écrire :

$$C(n, m) = (n - 1)c_t + mc_d \quad (13.12)$$

Les complexités c_d et c_t dépendent naturellement des structures de données utilisées pour implémenter l'algorithme.

Si on choisit une implémentation de d par un tableau, alors on a besoin de rechercher le minimum des distances pour effectuer le transfert : cela s'effectue au prix d'un tri du tableau au minimum en $c_t = O(n \log n)$. Un accès aux éléments du tableau pour la mise à jour est en $c_d = O(1)$. On a donc $C(n) = (n - 1)O(n \log n) + mO(1) = O(n^2 \log n)$.

Si d est implementée par une file à priorités (un tas) comme le propose Johnson [12], alors on a $c_t = O(\log n)$ et $c_d = O(\log n)$. La complexité est alors en $C(n) = (n + m) \log n$. Cependant, pour que le tas soit une implémentation pertinente, il est nécessaire que $m = O(\frac{n^2}{\log n})$, c'est à dire que le graphe ne soit pas complet, voire un peu creux!

Si d est codé par

R Si on remplace la file F de l'algorithme 32 par une file de priorités (tas min), le résultat sera la distance (du plus court chemin) entre a et b .

■ **Exemple 25 — Usage de l'algorithme de Dijkstra .** Le protocole de routage OSPF implémente l'algorithme de Dijkstra. C'est un protocole qui permet d'automatiser le routage sur les réseaux internes des opérateurs de télécommunication. Les routeurs sont les sommets du graphe et les liaisons réseaux les arêtes. La pondération associée à une liaison entre deux routeurs est calculée à partir des performances en termes de débit de la liaison. Plus liaison possède un débit élevé, plus la distance diminue.

OSPF est capable de relier des centaines de routeurs entre eux, chaque routeur relayant les paquets IP de proche en proche en utilisant le plus court chemin de son point de vue^a. Le protocole garantit le routage des paquets par les plus courts chemins en temps réel. Chaque routeur calcule ses propres routes vers toutes les destinations, périodiquement. Si une liaison réseau s'effondre, le routeurs en sont informés et recalculent d'autres routes immédiatement. La puissance de calcul nécessaire pour exécuter l'algorithme sur un routeur, même dans le cas d'un réseau d'une centaine de routeur, est relativement faible car la plupart des réseaux de télécommunications sont des graphes relativement creux. Ce n'est pas rentable de créer des graphes de télécommunications complets, même si ce serait intéressant pour le consommateur et très robuste!

^a. Cela fonctionne grâce au principe d'optimalité de Bellman!

b Algorithme de Bellman-Ford

L'algorithme de Bellman-Ford calcule les plus courts chemins depuis un sommet de départ, comme l'algorithme de Dijkstra. Cependant, il s'applique à des **graphes pondérés et orientés dont les pondérations peuvent être négatives mais sans cycles de longueur négative**[3, 9, 18].

Algorithme 34 Algorithme de Bellman-Ford, plus courts chemins à partir d'un sommet donné

```

1 : Fonction BELLMAN_FORD( $G = (V, E, w)$ ,  $a$ )
2:    $\Pi \leftarrow$  un dictionnaire vide       $\triangleright \Pi[s]$  est le parent de  $s$  dans le plus court chemin de  $a$  à  $s$ 
3:    $d \leftarrow$  ensemble des distances au sommet  $a$ 
4:    $d[s] \leftarrow w(a, s)$                    $\triangleright w(a, s) = +\infty$  si  $s$  n'est pas voisin de  $a$ , 0 si  $s = a$ 
5:   pour _ de 1 à  $|V| - 1$  répéter            $\triangleright$  Répéter  $n - 1$  fois
6:     pour  $(u, v) = e \in E$  répéter          $\triangleright$  Pour toutes les arêtes du graphe
7:       si  $d[v] > d[u] + w(u, v)$  alors         $\triangleright$  Si le chemin est plus court par là...
8:          $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$            $\triangleright$  Mises à jour des distances des voisins
9:          $\Pi[v] \leftarrow u$                        $\triangleright$  Pour garder la tracer du chemin
10:    renvoyer  $d, \Pi$ 
```

■ **Exemple 26 — Application de l'algorithme de Bellman-Ford.** On se propose d'appliquer l'algorithme 34 au graphe pondéré et orienté représenté sur la figure 13.4. On note qu'il contient une pondération négative de b à f mais pas de cycle à pondération négative. Le tableau 13.2 représente les distances successivement trouvées à chaque itération.

On observe que le chemin de a à f emprunte bien l'arc de pondération négative.

Il faut noter que l'algorithme a convergé avant la fin de l'itération dans cas. C'est un des axes d'amélioration de cet algorithme.

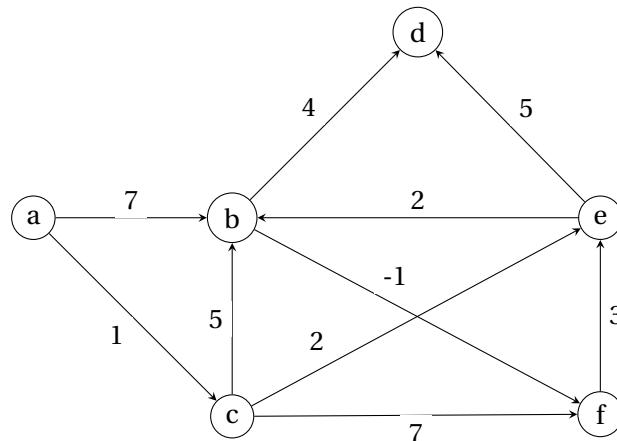


FIGURE 13.4 – Graphe pondéré et orienté à valeurs positives et négatives pour l'application de l'algorithme de Bellman-Ford.

N° d'itération	a	b	c	d	e	f
1	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
2	0	5	1	8	3	6
3	0	5	1	8	3	4
4	0	5	1	8	3	4
5	0	5	1	8	3	4

TABLE 13.2 – Tableau d des distances au sommet a successivement trouvées au cours de l'algorithme de Bellman-Ford appliqué au graphe de la figure 13.4

La complexité de l'algorithme 34 est en $O(nm)$ si n est l'ordre du graphe et m sa taille.

■ **Exemple 27 — Protocole de routage RIP.** Le protocole de routage RIP utilise l'algorithme de Bellman-Ford pour trouver les plus courts chemins dans un réseau de routeur. Il est moins adapté que OSPF pour les grands réseaux.

c Algorithme de Floyd-Warshall

L'algorithme de Floyd-Warshall [8, 20, 23] est l'application de la programmation dynamique à la recherche du **plus court chemin entre toutes les paires de sommets d'un graphe orienté et pondéré**. Les pondérations du graphe peuvent être négatives mais on exclut tout circuit de poids strictement négatif.

Soit un graphe orienté et pondéré $G = (V, E, w)$. G peut être modélisé par une matrice d'adjacence M :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, |V| \rrbracket, M = \begin{cases} w(v_i, v_j) & \text{si } (v_i, v_j) \in E \\ +\infty & \text{si } (v_i, v_j) \notin E \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (13.13)$$

Un exemple de graphe associé à sa matrice d'adjacence est donné sur la figure 13.5.

Pour trouver le plus court chemin entre deux sommets, on essaye tous les chemins de toutes les longueurs possibles et on ne garde que les plus courts. Chaque étape p de l'algorithme de Floyd-Warshall est donc constitué d'un allongement **éventuel** du chemin par le sommet v_p . À l'étape p , on associe une matrice M_p qui contient la longueur des chemins les plus courts d'un sommet à un autre passant par des sommets de l'ensemble $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. On construit ainsi une suite de matrice finie $(M_p)_{p \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ avec $M_0 = M$.

Supposons qu'on dispose de M_p . Considérons un chemin \mathcal{C} entre v_i et v_j dont la longueur est minimale et dont les sommets intermédiaires sont dans $\{v_1, v_2, \dots, v_{p+1}\}$, $p \leq n$. Pour un tel chemin :

- soit \mathcal{C} passe par v_{p+1} . Dans ce cas, \mathcal{C} est la réunion de deux chemins dont les sommets sont dans $\{v_1, v_2, \dots, v_{p+1}\}$: celui de v_i à v_{p+1} et celui de v_{p+1} à v_j .
- soit \mathcal{C} ne passe pas par v_{p+1} .

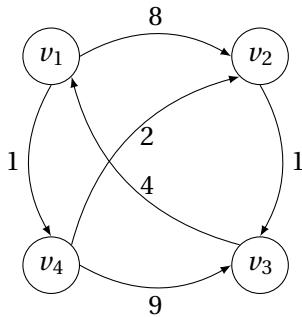


FIGURE 13.5 – Exemple de graphe orienté et valué. La matrice d'adjacence de ce graphe $G = (S, A, V)$ vaut : $M = \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & +\infty & 0 & +\infty \\ +\infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$. Sur cet exemple, le chemin le plus court de v_4 à v_3 vaut 3 et passe par v_2 .

Entre ces deux chemins, on choisira le chemin le plus court.

Disposer d'une formule de récurrence entre M_{p+1} et M_p permettrait de montrer que le problème du plus court chemin entre deux sommets d'un graphe orienté et pondéré est à sous-structure optimale. On pourrait alors utiliser la programmation dynamique pour résoudre le problème. Or, on peut traduire notre explication ci-dessus par la relation de récurrence suivante :

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, M_{p+1}(i, j) = \min(M_p(i, j), M_p(i, p+1) + M_p(p+1, j)) \quad (13.14)$$

L'algorithme de Floyd-Warshall 35 n'est que le calcul de la suite de ces matrices. C'est un bel exemple de programmation dynamique.

Algorithme 35 Algorithme de Floyd-Warshall, plus courts chemins entre toutes les paires de sommet

```

1: Fonction FLOYD_WARSHALL( $G = (V, E, w)$ )
2:    $M \leftarrow$  la matrice d'adjacence de  $G$ 
3:   pour  $p$  de 1 à  $|V|$  répéter
4:     pour  $i$  de 1 à  $|V|$  répéter
5:       pour  $j$  de 1 à  $|V|$  répéter
6:          $M(i, j) = \min(M(i, j), M(i, p+1) + M(p+1, j))$ 
7:   renvoyer  $M$ 
```

R Cet algorithme effectue le même raisonnement que Bellman-Ford mais avec un vision globale, à l'échelle du graphe tout entier, pas uniquement par rapport à un sommet de départ.

■ **Exemple 28 — Application de l'algorithme de Floyd-Warshall.** Si on applique l'algorithme au graphe de la figure 13.5, alors on obtient la série de matrices suivantes :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & +\infty & 0 & +\infty \\ +\infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad (13.15)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ +\infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad (13.16)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ +\infty & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (13.17)$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (13.18)$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (13.19)$$

d A*

D Arbres recouvrants

Les arbres recouvrants sont des éléments essentiels de l'industrie, notamment du point de vue de l'efficacité, de la robustesse et de l'optimisation. En ce sens, ils sont également indispensables à toute vision durable de notre développement. L'idée d'un arbre recouvrant est de ne sélectionner que certaines arêtes dans un graphe pondéré afin de garantir un service optimale (en fonction des pondérations). Les arbres recouvrants sont donc utilisés dans les domaines des réseaux d'énergie, des télécommunications, des réseaux de fluides mais également en intelligence artificielle et en électronique. Les deux algorithmes phares pour construire des arbres recouvrants sont l'algorithme de Kruskal [14] et l'algorithme de Prim [19].

a Algorithm de Kruskal

L'algorithme de Kruskal est un algorithme glouton optimal qui s'applique aux graphes pondérés. Le graphe peut ne pas être connexe et dans ce cas on obtient un forêt d'arbres recouvrants. Pour construire l'arbre et effectuer un choix d'arête, il ordonne les arêtes du graphe par

ordre de pondération croissante.

Algorithme 36 Algorithme de Kruskal, arbre recouvrant

```

1 : Fonction KRUSKAL( $G = (V, E, w)$ )
2:    $T \leftarrow \emptyset$                                 $\triangleright$  la sortie : l'ensemble des arêtes de l'arbre recouvrant
3:   pour  $k$  de 1 à  $|E|$  répéter
4:      $e \leftarrow$  l'arête de pondération la plus faible de  $E$             $\triangleright$  Choix glouton!
5:     si  $(S, T \cup \{e\}, w)$  est un graphe acyclique alors
6:        $T \leftarrow T \cup \{e\}$ 
7:   renvoyer  $T$ 
  
```

Si on utilise une structure de tas ainsi La complexité de cet algorithme est en $O(m \log m)$ si $m = |E|$ est le nombre d'arêtes du graphe.

b Algorithme de Prim

L'algorithme de Prim est un algorithme glouton optimal qui s'applique aux graphes pondérés connexe. Pour construire l'arbre, l'algorithme part d'un sommet et fait croître l'arbre en choisissant un sommet dont la distance est la plus faible et n'appartenant pas à l'arbre, garantissant ainsi l'absence de cycle.

Algorithme 37 Algorithme de Prim, arbre recouvrant

```

1 : Fonction PRIM( $G = (V, E, w)$ )
2:    $T \leftarrow \emptyset$                                 $\triangleright$  la sortie : l'ensemble des arêtes de l'arbre recouvrant
3:    $S \leftarrow s$  un sommet quelconque de  $V$ 
4:   tant que  $S \neq V$  répéter
5:      $(u, v) \leftarrow \min(w(u, v), u \in S, v \in E)$             $\triangleright$  Choix glouton!
6:      $S \leftarrow S \cup \{v\}$ 
7:      $T \leftarrow T \cup \{(u, v)\}$ 
8:   renvoyer  $T$ 
  
```

La complexité de cet algorithme, si l'on utilise un tas binaire, est en $O(m \log n)$.

E Arbres binaires

a Recherche dans un arbre binaire

Recherche dans un arbre binaire / complexité

b Codage d'Huffman

Codage d'Huffman - lien gloutonnerie / complexité / utilisation d'un tas

F Graphes bipartis et couplage maximum

couplage
couplage maximal et maximum
chemin alternant
chemin augmentant
Théorème
algorithme de recherche d'un couplage maximum complexité

G Coloration

coloration gloutonne autres approches

Quatrième partie

Semestre 3

Structures de données

--> HORS PROGRAMME

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ distinguer les différentes structures de données
- ☞ choisir une structure de données adaptée à un algorithme

Écrire un programme optimal en terme de complexité nécessite l'identification des structures de données utilisées très tôt dans le développement. En effet, le choix d'une structure de données plutôt qu'une autre, par exemple choisir une liste à la place d'un tableau ou d'un dictionnaire, peut rendre inefficace un algorithme selon le choix effectué.

Ce chapitre a pour but d'approfondir la définition des structures de données afin de permettre un choix éclairé. C'est pourquoi on définit d'abord ce qu'est un type de données abstrait en illustrant ce concept sur les listes, les tableaux, les piles et les files. Puis on fait le lien avec les implémentations possibles de ces types en structures de données, notamment en langage Python.

A Type abstrait de données et structure de données

■ **Définition 120 — Type abstrait de données (TAD).** Un type de données abstrait est une abstraction d'une structure de données qui ne se préoccupe pas de son implémentation sur une machine : sa structure interne est indiscernable, le type abstrait est vu de l'extérieur comme une boîte noire.

Un TAD spécifie le quoi, c'est à dire le type de données contenues ainsi que les opérations qu'on faire dessus. Par contre, il ne spécifie pas comment dont les données sont stockées ni comment les opérations sont implémentées.

■ **Définition 121 — Structure de données.** Une structure de données est une mise en œuvre concrète d'un type abstrait, une implémentation d'un type abstrait sur dans un langage de programmation.

■ **Exemple 29 — Un entier.** Un entier est un TAD qui :

- contient une suite de chiffres ^a éventuellement précédés par un signe – ou +,
- fournit les opérations +, –, ×, //, % .

Selon le langage, ce TAD entier est implémenté en machine par un type concret différent :

- `int` en Python,
- `Integer` ou `int` en Java,
- `char`, `short`, `int`, `uint`, `long` `int` en C,
- `int` en OCaml.

a. peu importe la base pour l'instant...

■ **Exemple 30 — Un booléen.** De la même manière, on peut définir un TAD qui désigne un booléen. Un booléen est un TAD qui :

- se note Vrai ou Faux,
- fournit les opérations logiques ET, OU, NON...

Selon le langage, ce TAD booléen est implémenté en machine par un type concret différent :

- `bool` valant `True` OU `False` en Python,
- `boolean` valant `true` ou `false` en Java,
- `bool` valant 1 ou 0 en C,
- `bool` valant `true` ou `false` en OCaml.

R Un type abstrait de données est à une structure de donnée ce qu'un algorithme est à un programme. On spécifie un algorithme ou un type abstrait de données, mais on implémente un programme ou une structure de données.

Les exemples précédents de types abstraits de données étaient limités à des types simples. Mais il est possible de définir des types abstraits de données composés.

■ **Exemple 31 — Types abstraits de données composés.** Voici quelques types abstraits composés parmi les plus courants :

- liste,
- file,
- pile,
- arbre binaire,

- dictionnaire ou tableau associatif,
- ensemble,
- graphe.

R Il faut faire attention, car si les objets de type `list` en Python implémentent le TAD liste, ce n'est pas la seule implémentation possible.

B TAD tableaux et listes

Pour les informaticiens, les listes et les tableaux sont avant tout des TAD qui permettent de stocker de façon ordonnée des éléments.

■ **Définition 122 — TAD tableau.** Un TAD tableau représente une structure finie indiquable par des entiers. Cela signifie qu'on peut accéder à la lecture ou à l'écriture de n'importe quel élément directement en utilisant un indice, par exemple `t[3]`.

On peut décliner le TAD tableau de manière :

- statique : la taille du tableau est fixée, on ne peut pas ajouter ou enlever d'éléments.
- évolutive : la taille du tableau peut varier, on peut ajouter ou enlever des éléments. Dans ce cas, on parle de tableau dynamique.

■ **Définition 123 — TAD liste.** Un TAD liste représente une séquence finie d'éléments d'un même type qui possède un rang dans la séquence. Les données sont traitées séquentiellement, dans l'ordre du rang.

Un TAD liste est évolutif, c'est à dire qu'on peut ajouter ou enlever n'importe quel élément.

Les opérations sur un TAD liste sont :

- l'ajout ou suppression en début et/ou en fin de liste,
- l'accès à la fin de la liste.

La longueur d'une liste est le nombre d'éléments qu'elle contient. On dit qu'une liste est vide si elle ne contient aucun élément, sa longueur vaut zéro. Le début de la liste est désigné par le terme tête de liste (head), le dernier élément de la liste par la fin de la liste (tail).

Ce chapitre détaille les implémentations de trois du TAD : les tableaux (vus cette fois-ci comme structure de données concrète), les listes chaînées et les tableaux dynamiques (ou vecteurs, ou encore listes-tableaux).

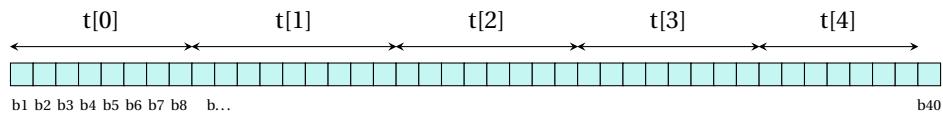


FIGURE 14.1 – Représentation d'un tableau statique en mémoire. Il peut représenter un tableau t de cinq entiers codés sur huit bits. On accède directement à l'élément i en écrivant $t[i]$.

C Implémentation des tableaux

a Implémentation d'un tableau statique

Dans sa version statique, un TAD tableau de taille fixe n est implémenté par un bloc de mémoire contiguë contenant n cases. Ces cases sont capables d'accueillir le type d'élément que contient le tableau.

Par exemple, pour un TAD tableau statique de cinq entiers codés sur huit bits, on alloue un espace mémoire de 40 bits subdivisés en cinq octets comme indiqué sur la figure 14.1. Dans la majorité des langages, l'opérateur `[]` permet alors d'accéder aux éléments, par exemple $t[3]$. Les éléments sont numérotés à partir de zéro : $t[0]$ est le premier élément.

On peut estimer les coûts associés à l'utilisation d'un tableau statique comme le montre le tableau 14.1.

Opération	Complexité	Raison
Accès à un élément au début	$O(1)$	
Accès à un élément à la fin	$O(1)$	
Accès à un élément au milieu	$O(1)$	
Ajout d'un élément au début	$O(n)$	créer un nouveau tableau
Ajout d'un élément à la fin	$O(n)$	créer un nouveau tableau
Suppression d'un élément au début	$O(n)$	créer un nouveau tableau
Suppression d'un élément à la fin	$O(n)$	créer un nouveau tableau

TABLE 14.1 – Coût associés à l'utilisation d'un tableau statique.

b Implémentation d'un tableau dynamique

Un tableau dynamique est implémenté par un tableau statique de taille n_{max} supérieur à la taille nécessaire pour stocker les données. Les n données contenues dans un tel tableau le sont donc simplement entre les indices 0 et $n - 1$. Si la taille n_{max} n'est plus suffisante pour stocker toutes les données, on crée un nouveau tableau statique plus grand de taille kn_{max} et on recopie les données dedans.

Toute la subtilité des tableaux dynamiques réside dans la manière de gérer les nouvelles allocations mémoires lorsque le tableau doit être modifié.

R Les tableaux dynamiques sont parfois appelés vecteurs.

R Comme le montre le tableau 14.2, l'intérêt majeur du tableau dynamique est de proposer un accès direct constant comme dans un tableau statique tout en évitant les surcouits liés à l'ajout d'éléments.

Opération	Complexité	Raison
Accès à un élément au début	$O(1)$	
Accès à un élément à la fin	$O(1)$	
Accès à un élément au milieu	$O(1)$	
Ajout d'un élément au début	$O(n)$	décaler tous les éléments contigus
Ajout d'un élément à la fin	$O(1)$	amorti : il y a de la place ou pas
Suppression d'un élément au début	$O(n)$	décaler tous les éléments contigus
Suppression d'un élément à la fin	$O(1)$	amorti : il y a de la place, parfois trop

TABLE 14.2 – Coût associés à l'utilisation d'un tableau dynamique.

R Le coût amorti signifie généralement le coût est constant. Mais, lorsqu'il n'y a plus de place, il faut bien créer la nouvelle structure adaptée au nombre d'éléments et cela a un coût linéaire $O(n)$. Donc ce coût amorti en $O(1)$ signifie c'est constant la plupart du temps mais que parfois cela peut être linéaire.

P En python le type `list` est implémenté par un tableau dynamique mais se comporte bien comme un TAD liste!

Cela a pour conséquence que :

- `L.pop()` et `L.append()` sont de complexité $O(1)$, donc supprimer ou ajouter en fin ne coûte pas cher,
- alors que `L.pop(0)` et `L.insert(0, elem)` sont de complexité $O(n)$ et donc supprimer ou ajouter en tête coûte cher.

Lorsqu'un algorithme doit supprimer ou ajouter en tête, il vaut mieux utiliser une autre structure de données qu'une `list` Python. Dans la bibliothèque `collections`, le type `deque` représente une liste sur laquelle les opérations d'ajout et de suppression en tête ou en fin sont en $O(1)$.

D Implémentations des listes

a Listes simplement chaînées

Un élément d'une liste simplement chaînée est une cellule constituée de deux parties :

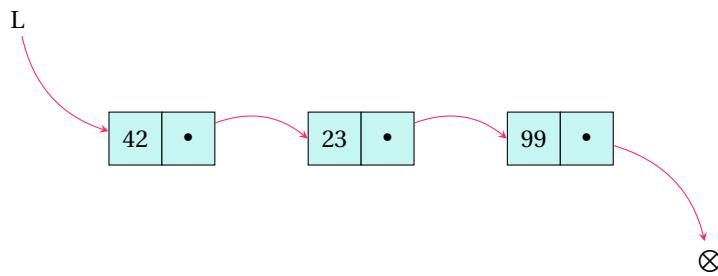


FIGURE 14.2 – Représentation d'une liste simplement chaînée d'entiers L. L pointe sur le premier élément de la liste. Le dernier pointeur ne pointe sur rien.

- la première contient une donnée, par exemple un entier pour une liste d'entiers,
- la seconde contient un pointeur, c'est à dire une adresse mémoire, vers un autre élément (l'élément suivant) ou rien.

Une liste simplement chaînée se présente donc comme une succession d'éléments composites, chacun pointant sur le suivant et le dernier sur rien.

En général, la variable associée à une liste simplement chaînée n'est qu'un pointeur vers le premier élément.

Opération	Complexité	Raison
Accès à un élément au début	$O(1)$	L pointe sur le premier élément
Accès à un élément à la fin	$O(n)$	accès séquentiel
Accès à un élément au milieu	$O(n)$	accès séquentiel
Ajout d'un élément au début	$O(1)$	L pointe sur le premier élément
Ajout d'un élément à la fin	$O(n)$	accès séquentiel
Suppression d'un élément au début	$O(1)$	L pointe sur le premier élément
Suppression d'un élément à la fin	$O(n)$	accès séquentiel

TABLE 14.3 – Coût associés à l'utilisation d'une liste simplement chaînée.

b Listes doublement chaînées

Un élément d'une liste doublement chaînée est une cellule constituée de trois parties :

- la première contient un pointeur vers l'élément précédent,
- la deuxième contient une donnée,
- la troisième contient un pointeur vers l'élément suivant.

Une liste doublement chaînée enregistre dans sa structure un pointeur vers le premier élément et un pointeur vers le dernier élément. Ainsi on peut toujours accéder directement à la

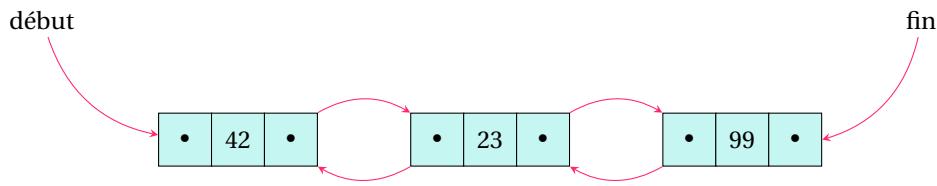


FIGURE 14.3 – Représentation d'une liste doublement chaînée d'entiers L. On conserve un pointeur sur le premier élément et un autre sur le dernier élément de la liste.

tête et à la fin de liste. Par contre, c'est un peu plus lourd en mémoire et plus difficile à implémenter qu'une liste simplement chaînée. Le tableau 14.4 recense les coûts associés aux opérations sur les listes doublement chaînées.

Opération	Complexité	Raison
Accès à un élément au début	$O(1)$	pointeur sur le premier élément
Accès à un élément à la fin	$O(1)$	pointeur sur le dernier élément
Accès à un élément au milieu	$O(n)$	accès séquentiel
Ajout d'un élément au début	$O(1)$	pointeur sur le premier élément
Ajout d'un élément à la fin	$O(1)$	pointeur sur le dernier élément
Suppression d'un élément au début	$O(1)$	pointeur sur le premier élément
Suppression d'un élément à la fin	$O(1)$	pointeur sur le dernier élément

TABLE 14.4 – Coût associés à l'utilisation d'une liste doublement chaînée.

E Bilan de complexités des structures listes et tableaux

Opération	Tableau statique	Liste chaînée	Liste doublement chaînée	Tableau dynamique
Accès à un élément au début	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$
Accès à un élément à la fin	$O(1)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$
Accès à un élément au milieu	$O(1)$	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$
Ajout d'un élément au début	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$
Ajout d'un élément à la fin	$O(n)$	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$ amorti
Suppression d'un élément au début	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(n)$
Suppression d'un élément à la fin	$O(n)$	$O(1)$	$O(1)$	$O(1)$ amorti

TABLE 14.5 – Coût associés à l'utilisation des listes et des tableaux.

Dictionnaires

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ décrire le TAD dictionnaire
- ☒ créer et utiliser un dictionnaire en Python
- ☒ expliquer l'implémentation d'un dictionnaire par une table de hachage

A Types abstraits de données (TAD)

La définition d'un TAD est donnée dans le chapitre précédent (cf. définition 120)

■ **Définition 124 — TAD Dictionnaire.** Un dictionnaire est une extension du TAD tableau dont les éléments \mathcal{V} , au lieu d'être indicés par un entier sont indicés par des clefs appartenant à un ensemble \mathcal{K} . Soit $k \in \mathcal{K}$, une clef d'un dictionnaire \mathbb{D} . Alors $\mathbb{D}[k]$ est la valeur v de \mathcal{V} qui correspond à la clef k .

On dit qu'un dictionnaire est un **tableau associatif** qui associe une clef k à une valeur v .

Les opérations sur un dictionnaire sont :

1. rechercher la présence d'une clef dans le dictionnaire,
2. accéder à la valeur correspondant à une clef,
3. insérer une valeur associée à une clef dans le dictionnaire,
4. supprimer une valeur associée à une clef dans le dictionnaire.

P Un dictionnaire relie donc directement une clef, qui n'est pas nécessairement un entier, à une valeur : pas besoin d'index intermédiaire pour rechercher une valeur comme dans une liste ou un tableau. Considérons l'exemple donné sur l'exemple de la figure 15.2. On sup-

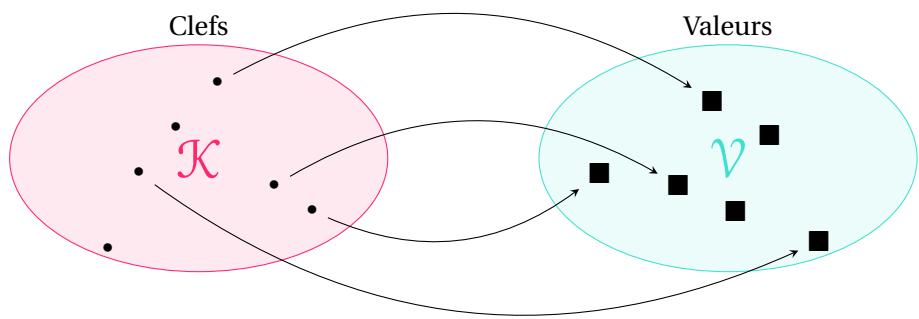


FIGURE 15.1 – Illustration du concept de dictionnaire

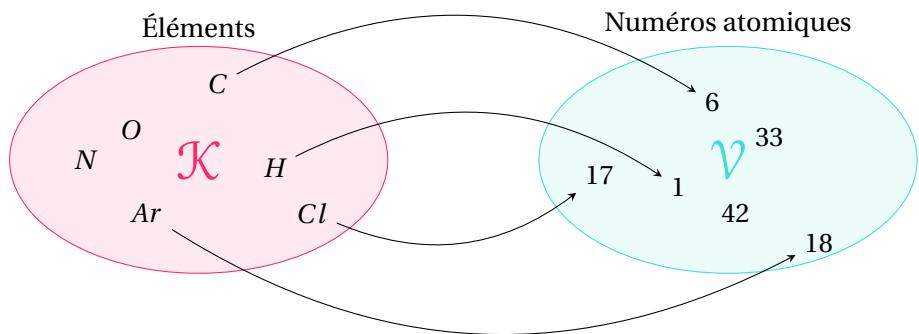


FIGURE 15.2 – Illustration du concept de dictionnaire, ensembles concrets

pose que les éléments chimiques sont enregistrés via une chaîne de caractères : "C", "O", "H", "Cl", "Ar", "N". Soit *d*, un dictionnaire correspondant à la figure 15.2. Accéder au numéro atomique de l'élément *c* s'écrit : *d*["C"].

R Un dictionnaire n'est pas une structure ordonnée, à la différence des listes ou des tableaux (cf. 3.1).

■ **Exemple 32 — Usage des dictionnaires.** Les dictionnaires sont utiles notamment dans le cadre de la programmation dynamique pour la mémoïsation, c'est à dire l'enregistrement des valeurs d'une fonction selon ses paramètres d'entrée. Par exemple :

- a-t-on déjà rencontré un sommet lorsqu'on parcourt un graphe?
- a-t-on déjà calculé la suite de Fibonacci pour $n = 4$?

Répondre à ces questions exige de savoir si pour une clé donnée il existe une valeur.

Si on utilise une liste pour stocker ces informations, par exemple (*n*, fibo(*n*)), les performances de l'exécution d'un algorithme peuvent être mauvaises : en effet, rechercher un élément dans une liste peut présenter dans le cas le pire une complexité linéaire (cf. tableau 14.5). Si on implémente bien un dictionnaire, tester l'appartenance à un dictionnaire peut être de complexité constante, ce qui peut accélérer grandement l'exécution d'un algorithme.

B Constructeurs de dictionnaires

Cette section s'intéresse à la manière dont on peut créer des dictionnaires en Python.

a Accolades

À tout seigneur tout honneur, les accolades sont la voie royale pour créer un dictionnaire.

```

1  d = {} # Empty dict
2  print(d, type(d)) # {} <class 'dict'>
3  d = {"Ar": 18, "Na": 11, "Cl": 17, "H": 1}
4  # keys are strings, values integers
5  print(d) # {'Ar': 18, 'Na': 11, 'Cl': 17, 'H': 1}
6
7  d = {("Alix", 14): True, ("Guillaume", 7): False, ("Hannah", 24): 17}
8  print(d, type(d)) # keys are tuples, values booleans
9  # {('Alix', 14): True, ('Guillaume', 7): False, ('Hannah', 24): 17} <
     class 'dict'>
10
11
12 d = {13: [1, 3], 219: [2, 1, 9], 42: [4, 2]}
13 print(d, type(d)) # keys are integers, values lists
14 # {13: [1, 3], 219: [2, 1, 9], 42: [4, 2]} <class 'dict'>
```

L'exemple précédent montre que :

- Les clefs d'un dictionnaire sont nécessairement constituées de types **immuables**, c'est à dire ni une liste ni un dictionnaire par exemple. Si la clef était muable, alors on ne saurait plus identifier la valeur associée ou bien celle-ci changerait.
- Les valeurs peuvent être de n'importe quel type de données.

b Constructeur dict

La fonction `dict()` permet également de créer un dictionnaire à partir de n'importe quel objet itérable. Elle s'utilise le plus souvent pour convertir un liste de tuples en dictionnaire.

```

1  d = dict() # Empty dict
2  print(d, type(d)) # {} <class 'dict'>
3  d = dict([('Ar', 18), ('Na', 11), ('Cl', 17), ('H', 1)])
4  # keys are strings, values integers
5  print(d) # {'Ar': 18, 'Na': 11, 'Cl': 17, 'H': 1}
6  d = dict(zip(['Alix', 'Guillaume', 'Hannah'], [14, 7, 24]))
7  # zip is really useful here !
8  print(d) # {'Alix': 14, 'Guillaume': 7, 'Hannah': 24}
```

c Définir un dictionnaire en compréhension

Tout comme les ensembles en mathématiques, les dictionnaires peuvent être construits à partir d'une description compréhensible de ses éléments. Cette méthode de création de dictionnaires est à rapprocher du paradigme fonctionnel.

```

1  pairs = [('Alix', 14), ('Guillaume', 7), ('Hannah', 24)]
2  d = {name: age for name, age in pairs} # comprehension dictionary
3  print(d) # {'Alix': 14, 'Guillaume': 7, 'Hannah': 24}
```

 Cette méthode de création de dictionnaire est puissante mais est très délicate à manipuler. C'est pourquoi il est préférable de ne l'utiliser que si on est vraiment sûr de soi, sinon c'est une perte de points assurée au concours. On peut l'éviter avec une boucle `for` et ainsi assurer des points.



Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

C Opérations sur un dictionnaire

a Nombes d'éléments d'un dictionnaire

La fonction `len` renvoie le nombre d'éléments associés d'un dictionnaire.

```

1  d = dict([('Ar', 18), ('Na', 11), ('Cl', 17), ('H', 1)])
2  print(len(d)) # 4
```

P En Python, on peut tester si un dictionnaire est vide avec la fonction `len`.

```

1  empty_dict = {}
2  if not empty_dict:      # direct
3      print("Dictionary is empty!")
4  else:
5      print("Dictionary is not empty!")
6
7  if len(empty_dict) == 0: # nb of elements
8      print("Dictionary is empty!")
9  else:
10     print("Dictionary is not empty!")
11
12 if empty_dict == {}: # compare to an empty dict
13     print('Dictionary is empty!')
14 else:
15     print('Dictionary is not empty!')
```

b Appartenance à un dictionnaire

Les mots-clés `in` et `not in` permettent de tester l'appartenance à un dictionnaire et renvoient les booléens correspondants.

```

1  d = {"Ar": 18, "Na": 11, "Cl": 17, "H": 1}
2  if "Ar" in d:
3      print("Ar", d["Ar"]) # Ar 18
4  if "O" not in d:
5      print("O is not in d") # O is not in d
```

c Ajouter et supprimer un élément sur un dictionnaire

L'opérateur `[]` est nécessaire pour ajouter un élément. On peut ajouter plusieurs éléments avec `update`. Enfin, les fonctions et méthodes qui retirent un élément modifient le dictionnaire en place.

```

1  d = {"Ar": 18, "Na": 11, "Cl": 17, "H": 1}
2  d["O"] = 8
3  print(d) # {'Ar': 18, 'Na': 11, 'Cl': 17, 'H': 1, 'O': 8}
4  del d["Ar"]
5  print(d) # {'Na': 11, 'Cl': 17, 'H': 1, 'O': 8}
6  d.pop("Na")
7  print(d) # {'Cl': 17, 'H': 1, 'O': 8}
8  d.update({"F": 9, "Br": 35})
9  print(d) # {'Cl': 17, 'H': 1, 'O': 8, 'F': 9, 'Br': 35}
```

D Fusionner des dictionnaires

Pour fusionner deux dictionnaires, on peut soit utiliser la méthode `update` qui modifie le dictionnaire en place, soit utiliser un syntaxe dépendante des version de Python.

```

1   d1 = {"Ar": 18, "Na": 11, "Cl": 17, "H": 1}
2   d2 = {"F": 9, "Br": 35}
3   d1.update(d2) # simple, in place
4   print(d1) #{'Cl': 17, 'H': 1, 'O': 8, 'F': 9, 'Br': 35}
5
6   d1 = {"Ar": 18, "Na": 11, "Cl": 17, "H": 1}
7   d2 = {"F": 9, "Br": 35}
8   d = {**d1, **d2} # Python 3.5
9   print(d) #{'Ar': 18, 'Na': 11, 'Cl': 17, 'H': 1, 'F': 9, 'Br': 35}
10
11
12  d1 = {"Ar": 18, "Na": 11, "Cl": 17, "H": 1}
13  d2 = {"F": 9, "Br": 35}
14  d = d1 | d2 # Python 3.9
15  print(d) #{'Ar': 18, 'Na': 11, 'Cl': 17, 'H': 1, 'F': 9, 'Br': 35}
```

E Des dictionnaires itérables

Un dictionnaire Python est itérable, c'est à dire qu'il peut être l'objet d'une itération via une boucle `for`.

```

1   d = {"Ar": 18, "Na": 11, "Cl": 17, "H": 1}
2
3   for atom in d:
4       print(atom, d[atom])
5
6   for atom, number in d.items():
7       print(atom, number)
8
9   # Same result :
10  # Ar 18
11  # Na 11
12  # Cl 17
13  # H 1
14  # F 9
15  # Br 35
```

F Implémentation d'un TAD dictionnaire

On peut implémenter efficacement un TAD dictionnaire à l'aide

1. des tables de hachage,
2. des arbres rouges et noirs,

Opération	Table de hachage	Arbre de recherche équilibré
Ajout (pire des cas)	$O(n)$	$O(\log n)$
Accès (pire des cas)	$O(n)$	$O(\log n)$
Ajout (en moyenne)	$O(1)$	$O(\log n)$
Accès (en moyenne)	$O(1)$	$O(\log n)$

TABLE 15.1 – Coût associés à l'utilisation des tables de hachage ou des arbres pour implémenter un TAD dictionnaire. Les coûts indiqués sont dans le pire des cas ou en moyenne.

3. d'arbres binaires de recherche.

Il existe de nombreuses implémentations possibles du TAD dictionnaire. On peut, par exemple, les implémenter avec des listes, mais l'efficacité n'est pas au rendez-vous. C'est pourquoi, dans la suite ce chapitre, on s'intéresse aux tables de hachage pour implémenter un TAD dictionnaire.

G Tables de hachage

a Principale

■ **Définition 125 — Table de hachage.** Une table de hachage est constituée d'un tableau t et d'une fonction de hachage h . Elle implémente un dictionnaire sur un ensemble de clefs \mathcal{K} et un ensemble de valeurs \mathcal{V} .

Pour tout élément k de \mathcal{K} , $h(k)$ est l'indice de la case du tableau t auquel on stocke la valeur v , ce qui peut s'exprimer ainsi :

$$\forall (k, v) \in (\mathcal{K} \times \mathcal{V}), t[h(k)] \leftarrow v \quad (15.1)$$

La figure 15.3 illustre l'implémentation d'un dictionnaire par une table de hachage.

■ **Définition 126 — Fonction de hachage.** Un fonction de hachage prend une clef en entrée et génère un index entier associé à cette clef.

Plus formellement, si \mathcal{K} est l'un ensemble des clefs (non nécessairement numériques) et \mathcal{V} l'ensemble des valeurs associées aux clefs de cardinal n , on peut définir une fonction de hachage :

$$h : \mathcal{K} \longrightarrow \llbracket 0, n - 1 \rrbracket \quad (15.2)$$

$$k \longmapsto i \quad (15.3)$$

Soit k le cardinal de \mathcal{K} , c'est à dire le nombre de clefs possibles. On pourrait représenter un TAD dictionnaire à l'aide d'un tableau de dimension k et une fonction bijective $h : \mathcal{K} \longrightarrow \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. L'accès aux éléments et l'ajout d'un élément seraient en $O(1)$, le temps de calculer la valeur de la fonction bijective pour une clef donnée. Néanmoins, d'un point de vue complexité

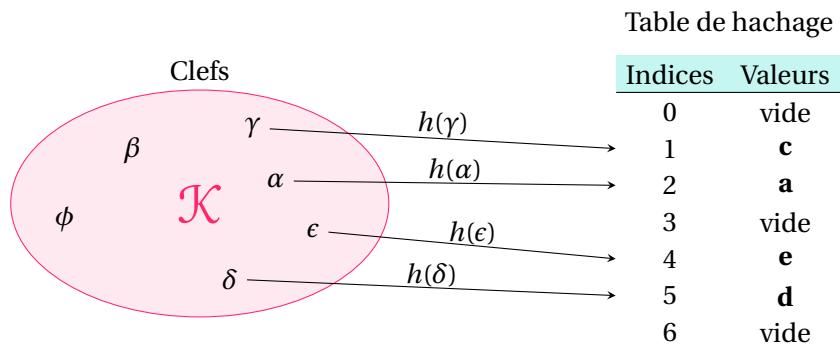


FIGURE 15.3 – Illustration de l’implémentation d’un dictionnaire par table de hachage. La fonction de hachage h permet de calculer les indices du tableau. **La valeur a associée à α se trouve à la case $h(\alpha)$ du tableau.** Toutes les clefs n’ont pas forcément de valeur associée à un moment donné de l’algorithme. Dans ce cas, à l’indice associé à cette clef, le tableau est vide.

mémoire, cette solution n’est pas réalisable : le nombre de clefs possibles est souvent immense alors que les clefs effectivement utilisées sont moins nombreuses. Ce qui nous amènerait à réserver un espace mémoire bien supérieur aux besoins réels.

On adopte donc l’hypothèse réaliste suivante : la taille m du tableau qu’on utilise est petite devant le nombre de clefs possibles, c’est à dire $m \ll c$. En procédant ainsi, on renonce à l’injectivité de la fonction de hachage et donc à sa bijectivité, car on engendre des collisions : il pourra exister des clefs différentes pour lesquelles le code calculé par la fonction de hachage sera le même. Tout dépend du nombre de clefs utilisées et de la fonction de hachage.

b Choix d’une fonction de hachage

Le choix d’une fonction de hachage n’est pas évident. Ces fonctions doivent permettre de générer un index dont la taille est inférieure à celle du tableau, tout en distinguant au mieux les clefs, tout en évitant le plus possible les collisions. On recherche donc des fonctions de hachage qui possèdent les caractéristiques suivantes :

1. son calcul doit être rapide,
2. pour une même clef, on obtient un même code (**cohérence**),
3. pour des clefs différentes, on obtient des codes différents (**injectivité**). Dans le cas contraire, on obtient un **collision** qu’on cherchera à minimiser.
4. pour des clefs qui se ressemblent, les codes obtenus doivent être très différents. D’une manière générale, les codes doivent présenter une distribution uniformément répartie sur l’espace des indices (**répartition uniforme**).

Pour minimiser les collisions, c’est à dire lorsque la fonction de hachage appliquée à deux clefs différentes c_1 et c_2 produit le même résultat $h(c_1) = h(c_2)$, on cherche à répartir uniformément les clefs dans les différentes cases du tableau. Ceci revient à faire en sorte que la probabilité qu’une valeur v associée à une clef c occupe la case i du tableau devrait être proche de $1/m$,

si la taille de ce tableau est m . En faisant cette hypothèse, si on suppose qu'on utilise g clefs, alors la probabilité p d'obtenir des codes différents lors du calcul des g clefs par la fonction de hachage vaut :

$$p = \frac{m(m-1)\dots(m-g+1)}{m^g} = \frac{m!}{(m-g)!m^g} \quad (15.4)$$

On en déduit la probabilité de collision p_c :

$$p_c = 1 - \frac{m(m-1)\dots(m-g+1)}{m^g} = \frac{m!}{(m-g)!m^g} \quad (15.5)$$

g/m	5000	10000	100000	1000000
100	0,63	0,39	0,05	0,005
500	0,99	0,99	0,71	0,12
1000	1	1	0,99	0,39
1500	1	1	0,99	0,68
2000	1	1	0,99	0,86
2500	1	1	0,99	0,96

TABLE 15.2 – Probabilité de collision p_c dans l'hypothèse d'une répartition uniforme des valeurs dans le tableau d'une table de hachage. Même dans le cas d'un tableau à un million d'éléments, la probabilité de collision est quasi-certaine dès que la taille des clefs utilisées est supérieure à 2500. C'est le paradoxe des anniversaires.

Une rapide évaluation de cette probabilité est donnée sur le tableau 15.2. On en conclut que, quelle que soit la taille du tableau, les collisions existeront. Il faut donc trouver un moyen de les gérer.

c Fonctions de hachages possibles

Une fonction de hachage h peut procéder en deux étapes :

1. une fonction h_e qui encode la clef d'entrée,
2. et une fonction h_c qui compresse le code dans l'ensemble des indexes.

Plus formellement, on la fonction de hachage comme une fonction composée :

$$h_e : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{N} \quad (15.6)$$

$$h_c : \mathbb{N} \longrightarrow [\![0, n-1]\!] \quad (15.7)$$

et

$$h = h_e \circ h_c \quad (15.8)$$

■ **Exemple 33 — Fonctions d'encodage des clefs.** Pour compresser une clef, il faut d'abord l'encoder, c'est à dire la convertir en un nombre entier. Dans ce but, on peut par exemple :

- si le type de la clef est un objet quelconque, utiliser son adresse en mémoire,
- si la clef est une chaîne de caractères $c_0c_1\dots c_{k-1}$, utiliser le code ascii associé à un caractère $\text{ascii}(c_i)$ pour calculer $\sum_{i=0}^{k-1} \text{ascii}(c_i)127^i$. On verra en TP que faire juste la somme des valeurs ascii des caractères n'est pas forcément une bonne idée.

L'important est que l'encodage génère un même code pour une même clef et un code vraiment différent si les clefs sont différentes.

■ **Exemple 34 — Fonctions de compression des clefs.** Pour compresser et obtenir un code inférieur à la taille du tableau, on peut :

- prendre le code module la taille du tableau,
- faire une combinaison linéaire du code modulo la taille du tableau.

■ **Exemple 35 — Hachage par modulo simple.** Si la taille du tableau de la table de hachage est m , on peut choisir la fonction $h : c \longrightarrow c \bmod m$. Le choix de m mérite néanmoins quelques points d'attention : on évitera de prendre des nombres du type 2^q ou 2^{q-1} . On choisit généralement un nombre premier éloigné pas trop proche d'une puissance de 2 pour garantir une bonne répartition des clefs.

■ **Exemple 36 — Hachage par multiplication et modulo .** On peut également choisir la fonction $h : c \longrightarrow \lfloor (\phi c \bmod 1) \times m \rfloor$. Si ϕ est le nombre d'or, cette méthode garantit une bonne répartition des clefs sans restreindre les valeurs de m .

d Gestion des collisions

Deux grandes méthodes permettent de gérer les collisions :

1. **par chainage** : stocker valeurs associées aux collisions dans une même case sous la forme d'une liste comme l'illustre la figure ?? . Cette solution induit une augmentation de la complexité car en cas de collision, on n'accède plus à l'élément directement : il faut le chercher dans une liste. C'est ce qui explique le $O(n)$ dans le pire des cas sur le tableau 15.1.
2. **par adressage ouvert** : chercher une place vide dans le tableau en le sondant et placer la valeur dedans. Cela induit que le nombre de clefs utilisées est inférieur à la taille du tableau et ralentit l'accès à un élément. Lorsque le tableau est trop petit, on peut en changer pour un plus grand : cela a un coût également.

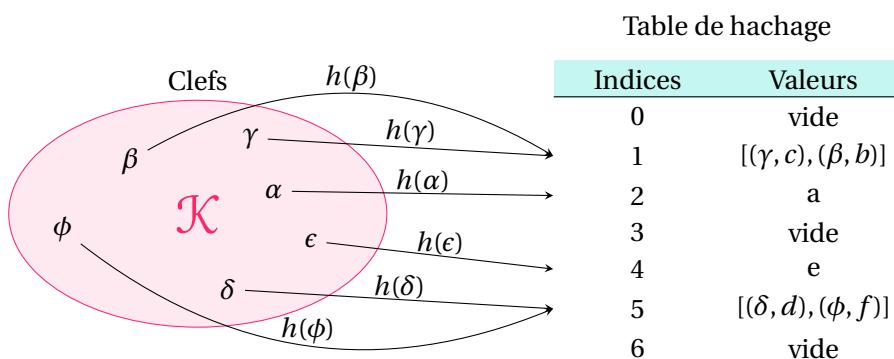


FIGURE 15.4 – Illustration de l'implémentation d'un dictionnaire par table de hachage avec chainage. Les clefs β et ϕ , engendrent des collisions. On stocke donc les valeurs possibles pour un même code (indice) dans une liste.

e Implémentation des dict en Python

L'implémentation du TAD dictionnaire en Python fait l'objet de travaux et d'évolutions en permanence et c'est un sujet complexe. En résumé, pour implémenter les `dict`, Python utilise des tables de hachage en adressage ouvert dont la taille évolue dynamiquement (comme le type `list`).

Programmation dynamique

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ énoncé les principes de la programmation dynamique
- ☞ distinguer cette méthode des approches gloutonnes et diviser pour régner
- ☞ formuler récursivement le problème du sac à dos

A Motivations

Dans la famille des algorithmes de décomposition, c'est à dire les algorithmes qui cherchent à décomposer un problème en sous-problèmes afin de le résoudre, on distingue trois grandes familles :

1. les algorithmes gloutons (cf. chapitre 9),
2. les algorithmes de type diviser pour régner (cf. chapitre ??)
3. la programmation dynamique.

La figure 16.1 schématisse ces trois approches sous la forme d'arbres de décomposition de problèmes en sous-problèmes. Les algorithmes de type gloutons ou de type diviser pour régner ont des limites :

1. même s'il existe des algorithmes gloutons optimaux¹, c'est à dire qui produisent une solution optimale au problème, la plupart du temps ce n'est pas le cas.
2. même si l'approche diviser pour régner est très efficace pour de nombreux problèmes², elle nécessite que les sous-problèmes soient indépendants. Or, parfois, il n'en est rien,

1. On peut citer notamment : la planification de tâches dans le temps qui ne se chevauchent pas, l'algorithme de Prim ou de Huffmann.

2. On peut citer notamment : la transformée de Fourier rapide (FFT), l'exponentiation rapide, les approches dichotomiques.

certains sous-problèmes ont des sous-problèmes en commun, ils ne sont pas indépendant, ils se chevauchent. Dans ce cas, l'approche diviser pour régner devient inefficace puisqu'elle résout plusieurs fois les mêmes sous-problème.

Afin de dépasser ces limites, on étudie la programmation dynamique.

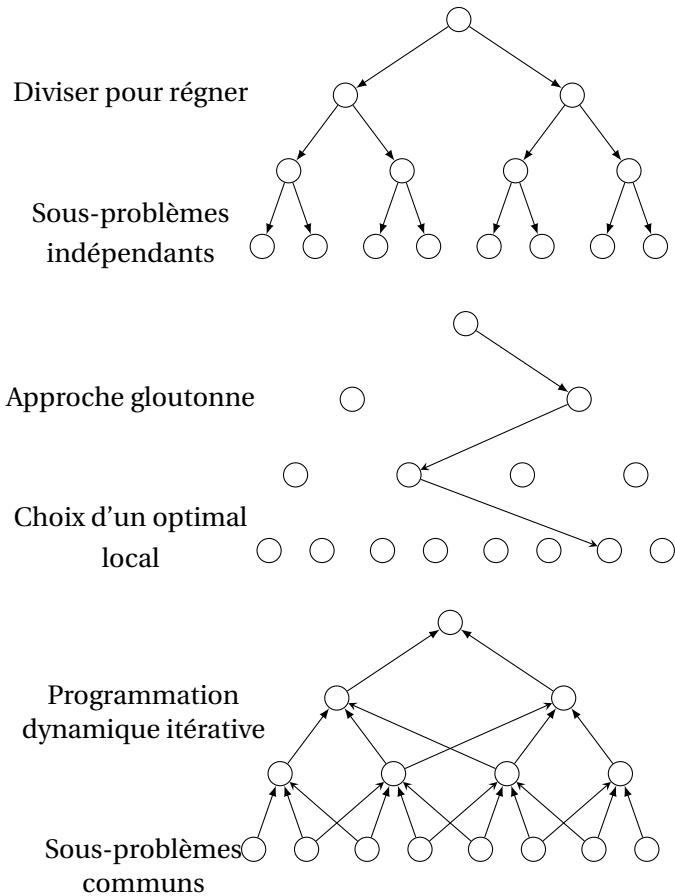


FIGURE 16.1 – Schématisation des différentes approches des algorithmes de décomposition d'un problème en sous-problèmes : diviser pour régner, approche gloutonne et programmation dynamique itérative.

B Principles de la programmation dynamique

■ **Définition 127 — Programmation dynamique.** La programmation dynamique est une méthode de construction des solutions par combinaison des solutions des sous-problèmes. Certaines combinaisons sont implicitement rejetées si elles appartiennent à un sous-ensemble qui n'est pas intéressant : on ne construit que les solutions utiles à la solution optimale. Cette approche :

- divise le problème \mathcal{P} en sous-problèmes de taille moindre,
- ne résout un sous-problème qu'une seule fois.

En général, le cadre de l'application de la programmation dynamique sont les problèmes d'optimisation combinatoire dont la sous-structure est optimale. Pour ce genre de problèmes, il y a de nombreuses solutions possibles³. Chaque solution possède une valeur propre que l'on peut quantifier. On cherche alors soit à la minimiser soit à la maximiser, dans tous les cas, on cherche au moins une valeur optimale.

M Méthode 7 — Développement d'un algorithme de programmation dynamique Pour créer un algorithme de programmation dynamique répondant à un problème, il faut :

1. Formuler récursivement le problème en sous-problèmes ordonnés non indépendants,
2. Créer et initialiser un tableau de résolution,
3. Compléter ce tableau du bas vers le haut en calculant les solutions des sous-problèmes dans l'ordre croissant de la récurrence trouvée.

■ **Définition 128 — Principe d'optimalité de Bellman.** La solution optimale à un problème d'optimisation combinatoire présente la propriété suivante : quelque soit l'état initial et la décision initiale prise, les décisions qui restent à prendre pour construire une solution optimale forment une solution optimale par rapport à l'état qui résulte de la première décision^a.

a. PRINCIPLE OF OPTIMALITY. An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decisions are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decisions[2].

■ **Définition 129 — Sous-structure optimale.** En informatique, un problème présente une sous-structure optimale si une solution optimale peut être construire à partir des solutions optimales à ses sous-problèmes.

Le principe d'optimalité et la notion de sous-structure optimale sont illustrés par la figure 16.2 qui représente le problème du plus court chemin dans un graphe. Résoudre ce problème via la programmation dynamique suppose qu'on a un problème à sous-structure optimale, ce qui est le cas.

On peut exprimer le plus court chemin récursivement en fonction du premier chemin choisi et du reste du graphe. Cela peut s'écrire formellement mathématiquement ou, plus simple-

3. Penser au problème du sac à dos par exemple.

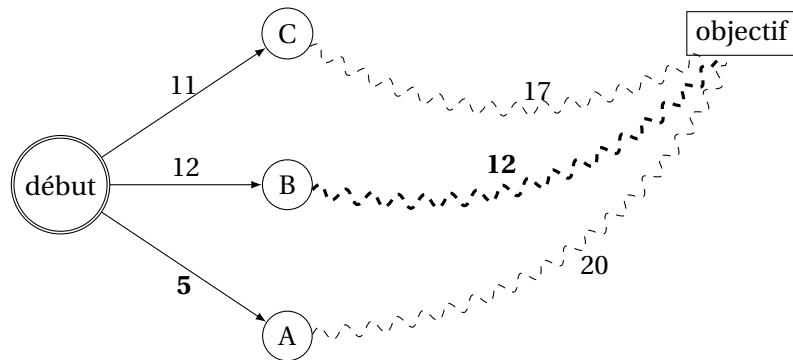


FIGURE 16.2 – Illustration du principe d'optimalité et de sous-structure optimale : trouver le plus court chemin dans ce graphe. Les nombres représentent la longueur d'un chemin. Les lignes droites sont des arrêtes. Les lignes ondulées indiquent les plus courts chemins dans le graphe : il faut imaginer qu'on n'a pas représenté tous les sommets.

ment, comme suit :

Le plus court chemin est le chemin le plus court à choisir parmi :

- le chemin qui passe par A suivi par le chemin le plus court de A à l'objectif,
- le chemin qui passe par B suivi par le chemin le plus court de B à l'objectif,
- le chemin qui passe par C suivi par le chemin le plus court de C à l'objectif.

La résolution du problème amènera à choisir le chemin qui passe par B.

C Exemples simples de programmation dynamique

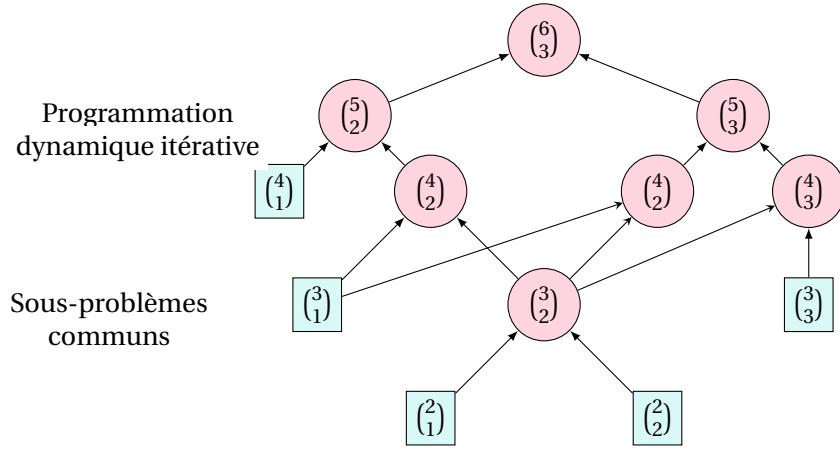
■ **Exemple 37 — Construction des solutions du calcul de $\binom{n}{k}$.** La formule de récurrence

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ 1 & \text{si } k = n \text{ ou } k = 0 \\ n & \text{si } k = 1 \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{sinon} \end{cases} \quad (16.1)$$

permet de construire le triangle de Pascal (cf. tableau 16.1). On peut considérer ce triangle comme le tableau de résolution du problème du calcul de $\binom{n}{k}$ par une méthode de programmation dynamique (cf. figure 16.3).

■ **Exemple 38 — Algorithme de calcul des termes de la suite Fibonacci.** On considère la suite de Fibonacci : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Pour calculer le u_n , on peut procéder de plusieurs manières différentes comme le montre les algorithmes 38 et 39. Cependant, ces deux approches n'ont pas la même efficacité. La

FIGURE 16.3 – Programmation dynamique du calcul de $\binom{6}{3}$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
6	1	6	15	20	15	6	1
5	1	5	10	10	5	1	0
4	1	4	6	4	1	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0

TABLE 16.1 – Triangle de Pascal : valeurs de $\binom{n}{k}$. En couleur apparaissent les éléments nécessaires pour calculer $\binom{6}{3}$ qu'il faut mettre en parallèle de la figure 16.3. On a représenté le triangle du bas vers le haut afin de montrer le lien avec la programmation dynamique.

première est une approche récursive multiple descendante. Les appels multiples montrent qu'on se trouve dans le cadre d'un problème pour lequel **les sous-problèmes ne sont pas indépendants**. Dans ce cas, l'algorithme 38 calcule inutilement plusieurs fois les mêmes termes et est inefficace. Par exemple, pour calculer u_4 selon cette approche on doit calculer $u_3 + u_2$. Mais le calcul de u_3 va lancer le calcul $u_2 + u_1$. On va donc calculer deux fois u_2 .

L'algorithme 39 propose une version itérative ascendante dans l'ordre des termes : on calcule d'abord le premier terme puis le second et ainsi il n'y a pas de calculs redondants. Cette approche est dans l'esprit de la programmation dynamique : on cherche à calculer du bas vers le haut comme indiqué sur la figure 16.1 pour éviter les calculs redondants. On pourrait construire un graphe similaire à celui de la figure 16.3.

Algorithme 38 Fibonacci récursif

```

1: Fonction REC_FIBO(n)
2:   si n = 0 alors                                     ▷ Condition d'arrêt
3:     renvoyer 0
4:   sinon si n =1 alors                               ▷ Condition d'arrêt
5:     renvoyer 1
6:   sinon
7:     renvoyer REC_FIBO(n-1) + REC_FIBO(n-2)          ▷ Appels récursifs multiples
  
```

Algorithme 39 Fibonacci itératif, sans calculs redondants.

```

1: Fonction ITE_FIBO(n)
2:   si n = 0 alors
3:     renvoyer 0
4:   sinon si n =1 alors
5:     renvoyer 1
6:   sinon
7:      $u_0 \leftarrow 0$ 
8:      $u_1 \leftarrow 1$ 
9:     pour i de 2 à n répéter
10:      tmp  $\leftarrow u_0$ 
11:       $u_0 \leftarrow u_1$ 
12:       $u_1 \leftarrow \text{tmp} + u_1$ 
13:    renvoyer  $u_1$ 
  
```

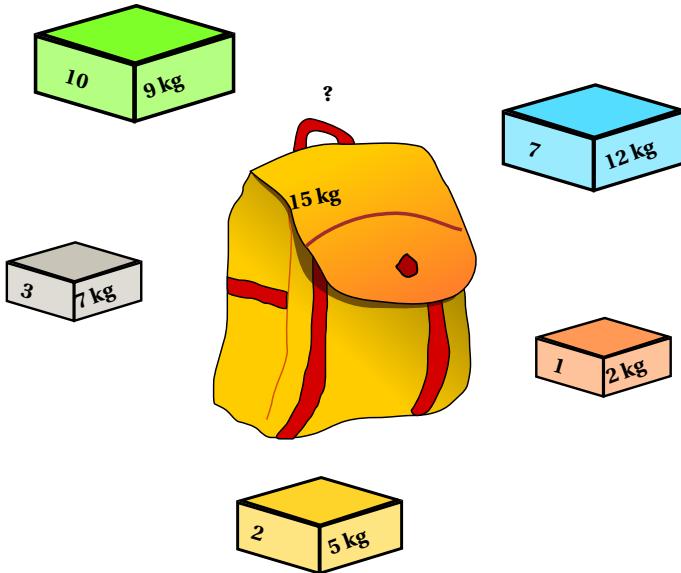


FIGURE 16.4 – Illustration du problème du sac à dos (d'après Wikipedia). On a cinq objets de poids 9, 12, 2, 7 et 5 kg et de valeur 10, 7, 1, 3 et 2 . Le poids total admissible dans le sac est 15kg.

D Le retour du sac à dos

a Position du problème

On cherche à remplir un sac à dos comme indiqué sur la figure 16.4. Chaque objet que l'on peut insérer dans le sac est **insécable**⁴ et possède une valeur et un poids connus. On cherche à maximiser la valeur totale emportée dans la sac à dos tout en limitant⁵ le poids à π .

On a vu au chapitre 9 que l'approche gloutonne ne donnait pas toujours le résultat optimal. On se propose donc de résoudre le problème par la programmation dynamique en appliquant la méthode 7.

b Modélisation du problème

Soit un ensemble $\mathcal{O}_n = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ de n objets de valeurs v_1, v_2, \dots, v_n et de poids respectifs p_1, p_2, \dots, p_n . Soit un sac à dos n'admettant pas un poids emporté supérieur à π . On note également qu'on peut mettre au plus n objets dans le sac.

Les objets sont rangés dans une liste et dans un ordre quelconque. Ils sont indicés par i variant de 1 à n . Un objet o_i possède une valeur v_i et un pèse p_i .

Avec ces notations, on peut formuler le problème du sac à dos comme suit.

4. Soit on le met dans le sac, soit on ne le met pas. Mais on ne peut pas en mettre qu'une partie.

5. On accepte un poids total inférieur ou égal à π .

■ **Définition 130 — Problème du sac à dos.** Comment remplir un sac à dos en maximisant la valeur totale emportée $V = \sum_{i=1}^n v_i$ tout en ne dépassant pas le poids maximal admissible par le sac à dos, c'est à dire en respectant la contrainte $\sum_{i=1}^n p_i \leq \pi$? On note ^a le problème du sac à dos KP(n, π) et une solution optimale à ce problème S(n, π).

^a en anglais, ce problème est nommé Knapsack Problem, d'où le KP.

c Formulation récursive du problème en sous-problèmes non indépendants

Pour chaque objet o_i , si $p_i \leq \pi$, on peut le mettre dans le sac. La formulation récursive s'énonce alors ainsi :

- Soit l'objet o_i fait partie d'une solution optimale. Alors la fonction à maximiser vaut la valeur de l'objet o_i plus la valeur maximale atteignable avec les $n-1$ objets restants, sachant qu'on ne peut plus mettre que $\pi - p_i$ kg dans le sac.
- Soit l'objet o_i ne fait pas partie d'une solution optimale. Alors la fonction à maximiser vaut la valeur maximale atteignable avec les $n-1$ objets restants une fois cet objet o_i écarté. On peut toujours mettre π kg dans le sac.

Formellement, on exprime cette récursivité ainsi :

$$S(n, \pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou si } \pi = 0 \\ \max(v_i + S(n-1, \pi - p_i), S(n-1, \pi)) & \text{si } p_i \leq \pi \\ S(n-1, \pi) & \text{sinon} \end{cases} \quad (16.2)$$

Cette formulation prouve que **le problème du sac à dos possède une sous-structure optimale et que les problèmes se chevauchent** : pour un poids π maximal donné, **calculer une solution optimale de KP(\mathcal{O}_n, π) nécessite de savoir calculer une solution optimale pour les $n-1$ premiers objets de la liste et pour des poids π et $\pi - p_i$** . Schématiquement, on peut représenter cette démarche comme sur la figure 16.5.

R Attention au sens des notations : $S(i, P)$ est une solution au problème KP(i, P). Pour ce problème, on ne peut prendre que les i premiers objets de la liste et le poids maximum admissible est P . Si on considère $S(i-1, P - p_i)$, alors on ne peut prendre que les $i-1$ premiers objets de la liste et le poids maximal admissible est $P - p_i$. Les objets sont rangés dans un ordre quelconque.

d Crédit et initialisation du tableau de résolution

On cherche donc maintenant à créer un tableau à double entrée qui recense toutes les solutions optimales nécessaires à la résolution du problème KP(\mathcal{O}_n, π). Ce tableau a pour dimension $(n+1, \pi+1)$:

- le nombre i d'objets dans le sac d'un côté à valeur dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. La valeur pour $i = 0$ est nulle, on ne prend pas d'objet.

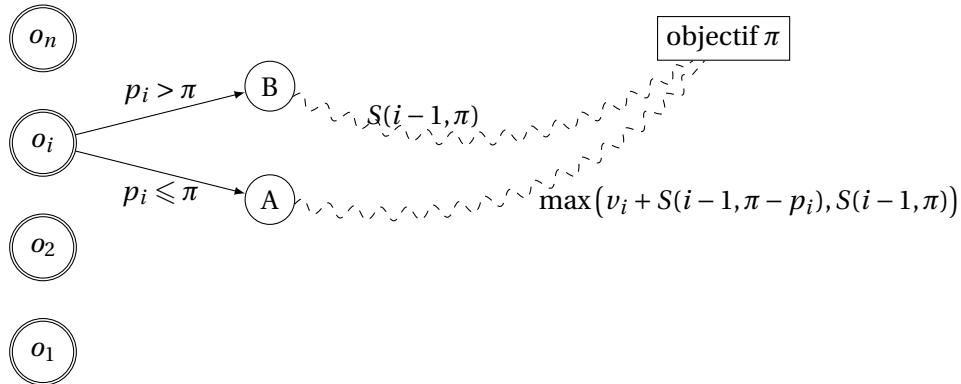


FIGURE 16.5 – Formulation récursive du problème du sac à dos.

Indice i de l'objet	1	2	3	4	5
valeur ()	10	7	1	3	2
poids (kg)	9	12	2	7	5

TABLE 16.2 – Synthèse des informations relatives au problème de la figure 16.4.

- les poids P atteignables de l'autre à valeur dans $\llbracket 0, \pi \rrbracket$. La valeur pour $P = 0$ est nulle, on ne prend pas d'objet.

La valeur d'une case du tableau est $S(i, P)$.

e Complémentation du tableau par résolution dans l'ordre croissant des sous-problèmes

On considère la liste d'objets décrite sur le tableau 16.2 et qui correspond au problème décrit sur la figure 16.4. L'ordre des objets est **arbitraire**. Le résultat du calcul est donné sur le tableau 16.3. On a construit ce tableau du bas vers le haut en suivant l'algorithme 40.

Naturellement, sur l'exemple donné sur la figure 16.4, il est possible de calculer à la main les valeurs du tableau. Ce n'est guère le cas dans des situations réalistes, c'est pourquoi il faut maintenant écrire l'algorithme qui va permettre de compléter ce tableau dans l'ordre et ainsi de résoudre notre problème.

R Pour bien comprendre, il peut être utile de reproduire la figure 16.3 pour l'exemple du sac à dos KP(5, 7) par exemple!

E Programmation dynamique itérative

L'algorithme 40 donne la procédure de résolution de $KP(n, \pi)$ par programmation dynamique, de bas en haut et de manière itérative. Aucun calcul redondant n'est effectué puisqu'on

Indice i																
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	0	0	1	1	1	2	2	3	3	10	10	11	11	11	12	12
4	0	0	1	1	1	1	1	3	3	10	10	11	11	11	11	11
3	0	0	1	1	1	1	1	1	1	10	10	11	11	11	11	11
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10	10	10	10	10	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10	10	10	10	10	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Poids (kg) →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

TABLE 16.3 – Tableau de résolution du sac à dos dans le cas de la figure 16.4 donnant les valeurs de $S(i, P)$, avec $i \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$ et $P \in \llbracket 0, 15 \rrbracket$.

0	$S(n, 1)$	$S(n, \pi)$
0
0	$S(i, 1)$	$S(i, P)$
0	$S(i - 1, 1)$...	$S(i - 1, P - p_i)$...	$S(i - 1, P)$
0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

FIGURE 16.6 – Schéma de remplissage du tableau pour le problème KP(n, π). Pour calculer $S(i, P)$ on a besoin de $S(i - 1, P)$ et de $S(i - 1, P - p_i)$.

complète le tableau de bas en haut.

Algorithme 40 KP(n, π) par programmation dynamique, de bas en haut

```

1: Fonction KP_DP( $p, v, \pi, n$ )                                $\triangleright p$  la liste de poids,  $v$  celle des valeurs
2:    $S \leftarrow$  un tableau d'entiers de taille  $(n + 1, \pi + 1)$ 
3:   pour  $i$  de 0 à  $n$  répéter                                 $\triangleright$  de bas en haut
4:     pour  $P$  de 0 à  $\pi$  répéter                             $\triangleright$  d bas en haut
5:       si  $i = 0$  ou  $P = 0$  alors
6:          $S[i, P] \leftarrow 0$ 
7:       sinon si  $p_i \leqslant P$  alors
8:          $S[i, P] \leftarrow \max(v_i + S[i - 1, P - p_i], S[i - 1, P])$ 
9:       sinon
10:       $S[i, P] \leftarrow S[i - 1, P]$ 
11:   renvoyer  $S[n, \pi]$ 
  
```

Les complexités temporelle et spatiale de l'algorithme 40 sont en $O(n\pi)$.

F Programmation dynamique récursive : mémoïsation

Il est possible de résoudre le problème du sac à dos de manière récursive comme le montre l'algorithme 41. Néanmoins, comme les sous-problèmes se chevauchent, de nombreux calculs redondants sont effectués. Pour des valeurs importantes de n et π , cet algorithme est totalement inefficace.

Algorithme 41 KP(n, π) par programmation récursive brute

```

1: Fonction KP_REC( $p, v, \pi, n$ )                                $\triangleright p$  la liste de poids,  $v$  celle des valeurs
2:   si  $i = 0$  ou  $P = 0$  alors
3:     renvoyer 0
4:   sinon si  $p[i] \leqslant P$  alors
5:     renvoyer  $\max(v_n + \text{KP\_REC}(p, v, \pi - p_n, n - 1), \text{KP\_REC}(p, v, \pi, n - 1))$ 
6:   sinon
7:     renvoyer KP_REC( $p, v, \pi, n - 1$ )
  
```

■ **Définition 131 — Mémoïsation.** La mémoïsation est une approche récursive de la programmation dynamique qui stocke les résultats intermédiaires dans un tableau et qui, avant chaque appel récursif, vérifie si le calcul à faire récursivement a déjà été effectué. Si c'est le cas, la solution stockée dans le tableau est utilisée. Sinon la récursivité s'exécute.

L'algorithme 42 donne la procédure de résolution de KP(n, π) par mémoïsation. Cette technique récursive est une approche de la programmation dynamique récursive.

Algorithme 42 KP(n, π) par programmation dynamique et mémoïsation

```

1: Fonction KP_MEM( $p, v, \pi, n, S$ )            $\triangleright S$  est un tableau d'entiers de taille  $(n + 1, \pi + 1)$ 
2:   si  $i = 0$  ou  $P = 0$  alors
3:     renvoyer 0
4:   sinon
5:     si la solution  $S[n, P]$  a déjà été calculée alors
6:       renvoyer  $S[n, P]$ 
7:     sinon si  $p_n \leq \pi$  alors
8:        $S[n, P] \leftarrow \max(v_n + \text{KP\_MEM}(p, v, \pi - p_n, n - 1, S), \text{KP\_MEM}(p, v, \pi, n - 1, S))$ 
9:       renvoyer  $S[n, P]$ 
10:    sinon
11:       $S[n, P] \leftarrow \text{KP\_MEM}(p, v, \pi, n - 1)$ 
12:      renvoyer renvoyer  $S[n, P]$ 

```

R La mémoïsation est une technique qui se prête bien à l'usage de dictionnaires : on peut stocker chaque solution déjà calculée dans un dictionnaire dont la clef est le couple (i, P) et la valeur la solution au problème KP(i, P). L'accès à la solution est rapide, en $O(1)$.

Bases de données relationnelles

Flight reservation systems decide whether or not you exist. If your information isn't in their database, then you simply don't get to go anywhere.

Arthur Miller

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ faire la différence entre une base de données et un SGBD
- ☒ modéliser des entités relatifs à une réalité simple
- ☒ modéliser une association simple entre deux entités en précisant les cardinalités
- ☒ traduire une association dans un modèle relationnel
- ☒ interpréter un modèle relationnel de base de données

A Pourquoi ?

L'ubiquité de l'information n'est plus une vue de l'esprit aujourd'hui. La vie contemporaine n'est parfois qu'une suite ininterrompue de sollicitations de systèmes d'information qui ne cessent de générer des opérations sur des bases de données via des systèmes de gestion de bases de données. Par exemple :

- prendre un train, un bus, un avion, un bateau, une autoroute,
- louer un vélo, une voiture, une place de stationnement,
- réserver un hôtel, un article d'un magasin, un activité sportive ou culturelle, recevoir un colis,
- consulter un médecin, acheter des médicaments en pharmacie, faire des analyses médicales,

- payer ses impôts, demander une aide à la CAF, chercher un texte légal en vigueur dans le journal officiel,
- prendre une photo ou une vidéo sur son smartphone, envoyer un message à un proche, partager des informations via une application,
- jouer à un jeu en ligne, démarcher des clients ou chercher des collaborateurs via un réseau social...

Ces systèmes interagissent¹ entre eux à la suite de nos actions, souvent à l'insu même de l'instigateur. La plupart des requêtes sont tellement rapides qu'elles sont imperceptibles à l'être humain, à moins d'analyser finement ce que l'on est en train de faire et l'information que l'on manipule. Nous produisons collectivement et à travers eux des quantités inimaginables d'information.

■ **Exemple 39 — Quantité d'information sur les serveurs à l'échelle mondiale.** À l'échelle mondiale, on estime actuellement la quantité d'information créée et sauvegardée annuellement^a à une centaine de Zio (zebiocets), soit 100×2^{70} octets. Pour se donner une idée, si on estime qu'un machine personnelle possède en standard un disque dur de 128 Gio, cela représente 858993459200 disques durs, soit environ 858 milliards. Nous sommes pour l'instant moins de 8 milliards d'habitants sur Terre... Gageons que ces données créées, sauvegardées, diffusées et recopiées sont toujours utiles!?

a. Ces données ne tiennent pas compte des machines personnelles (ordinateurs ou smartphones) ni des objets connectés.

🇬🇧 **Vocabulary 20 — bit ↪** bit Unité binaire de l'information. Une information est pour l'instant représentée en machine par un ensemble de symboles binaires généralement notées 0 et 1.

🇬🇧 **Vocabulary 21 — Byte ↪** octet. Un octet est constitué de huit bits.

Les bases de données étaient déjà au cœur des systèmes d'information, même avant l'ère informatique. Elles sont présentes aujourd'hui dans les systèmes d'exploitation, les applications des smartphones et même sur les objets connectés.

Ce chapitre traite de la modélisation de l'information pour les bases de données. Car, avant de pouvoir manipuler concrètement l'information de manière cohérente, il faut dégager un modèle qui décrit la réalité qu'on est en train de manipuler pour lui donner un sens. C'est l'enjeu de la modélisation conceptuelle et logique et du modèle relationnel associé.

B Données et gestion des données

■ **Définition 132 — Base de données.** Une base de données est un ensemble de données enregistré représentant une partie du monde ou une activité humaine.

1. Les canadiens parlent d'infonuagique pour l'informatique dans le cloud.

Il est de l'intérêt du concepteur et de l'utilisateur de limiter le périmètre d'une base de données. Par exemple, on s'intéressera aux documents d'une médiathèque, aux pneumatiques distribués en France, aux légumes cultivables en agriculture biologique ou aux dossiers scolaires des étudiants.

Une base de données est une idée que l'on peut concrétiser en écrivant sur des cahiers ou en programmant des ordinateurs selon ce que l'on veut en faire.

■ **Définition 133 — Système de Gestion de Base de Données (SGBD).** Un système de gestion de base de données est un ensemble logiciel dont le but est de gérer une base de données stockées sur support informatique. Il s'agit de garantir l'accès, la lecture, l'écriture, l'interrogation ou la modification de la base de données d'une manière cohérente et efficace.

■ **Exemple 40 — SGBD.** Parmi les SGBD les plus utilisés, on peut citer Oracle, MySQL, PostgreSQL, SQLite ou Microsoft SQL Server.

L'interaction avec les SGDB contemporains a été standardisée et on peut aujourd'hui utiliser le langage SQL pour interagir avec la plupart des SGBD. Au-delà de la manipulation des données, un SGBD doit pouvoir veiller à la cohérence et à l'intégrité des informations toute en garantissant des transactions rapides.

■ **Définition 134 — Structured Query Language.** SQL est un langage informatique normalisé servant à interagir avec des bases de données relationnelles. Il permet de manipuler (rechercher, ajouter ou supprimer, modifier) des informations, mais aussi de créer et de contrôler l'intégrité des données et des transactions sur une base de données relationnelle.

C De la conception à l'implémentation physique

La réalisation d'une base de données n'est pas une agrégation brute de données : c'est la réalisation d'une structure cohérente avec un contexte. Pour que les recherches s'effectuent simplement et efficacement, il est nécessaire de décrire, au-delà des données elles-mêmes, les liens sémantiques qui existent et qui relient les données entre elles, mais également la manière dont on stocke logiquement et physiquement les données ainsi que les transactions possibles.

La conception d'une base de données s'effectue la plupart du temps en trois étapes :

1. on établit d'abord un modèle **conceptuel** de la réalité à modéliser,
2. puis on choisit une représentation **logique** de ce modèle (généralement le modèle relationnel)
3. enfin, on implémente **physiquement** la base de données à l'aide d'un SGBD.

R Un modèle de base de données n'est pas unique. Selon le degré des exigences spécifiées par les utilisateurs de la base, différents modèles peuvent convenir. Les modèles proposés

par la suite sont donc toujours perfectibles. C'est normal. En général en ingénierie, on peut parvenir à des solutions différentes pour résoudre un même problème. On parle alors d'équifinalité.

a Modélisation conceptuelle

L'étape de modélisation conceptuelle s'affranchit de toute considération d'implémentation de la base de données pour se concentrer sur la **description sémantique de la réalité à modéliser**, c'est à dire le sens de cette réalité. Un réalité consiste le plus souvent en une activité humaine décrite simplement par un texte comme le montre l'exemple 44. L'analyse de ce texte et des mots le composant permet de dégager les éléments à modéliser. Cette modélisation est donc avant tout une activité du *langage* et une activité d'*abstraction*². Elle s'appuie généralement sur le modèle entité-association ou le langage Unified Modeling Language (UML).

■ **Définition 135 — Entité ou classe.** Une entité est un concept qui représente une abstraction d'un ensemble de données que l'on peut regrouper et caractériser par des attributs communs

■ **Exemple 41 — La voiture, une entité simple.** Une voiture est une entité : elle représente les véhicules à quatre roues motorisés. Elle est caractérisée d'être d'une marque particulière et par le fait de posséder quatre roues, des portes, un moteur, un poste de pilotage.

■ **Exemple 42 — Un conducteur de voiture, une entité simple.** Un conducteur est une entité : elle représente la personne qui conduit un véhicule. Elle est caractérisée un nom et un numéro de permis.

■ **Définition 136 — Association.** Une association entre entités définit un ensemble de liens entre ces entités. Généralement, une association est représentée par un verbe. Elle est pondérée par des cardinalités qui précisent le nombre d'entités mises en jeu dans cette association. Une association peut réunir une, deux ou trois entités, on dit alors qu'elle est unaire, binaire ou ternaire.

à

■ **Exemple 43 — Conduire, une association simple.** Conduire est une association binaire : elle relie une entité conducteur à une entité véhicule. Selon la réalité à modéliser, on pourra pondérer cette association différemment. Par exemple, une personne peut ne conduire qu'une seule voiture. Mais certains conducteurs conduisent plusieurs voitures. De la même manière, une voiture peut être conduite par un ou plusieurs conducteurs selon la situation.

■ **Définition 137 — Modèle entité-association.** Le modèle entité-association cherche à représenter sur un même schéma des entités et des associations identifiables dans une réalité à modéliser.

2. Il n'y a pas que les mathématiques dans la vie, il y a le langage aussi!

■ **Exemple 44 — Une réalité à modéliser.** Afin d'illustrer le modèle entité-association, on a capturé une réalité à modéliser. Cette capture se fait la plupart du temps grâce à des entretiens avec les personnes impliquées dans le contexte. Voici le texte décrivant la réalité à modéliser :

Une société de production recense les concerts donnés par des orchestres sur une saison. Chaque orchestre est décrit par son nom. Elle qualifie les orchestres en catégories selon leur style (baroque, symphonique, chambre, jazz, expérimental), sachant qu'un même orchestre ne peut faire partie que d'une seule catégorie. Un orchestre est dirigé par un chef d'orchestre dont on connaît le nom et le prénom. Au cours d'une même saison, un même orchestre peut accueillir plusieurs chefs différents. De la même manière, un chef peut diriger plusieurs orchestres. La résidence d'un orchestre définit son lieu de répétition. Une résidence est occupée par un seul orchestre mais un orchestre peut ne pas avoir de résidence. Elle est caractérisée par une ville et un pays.

On souhaite disposer d'une base de données pour accéder facilement à :

- *la liste des chefs d'un orchestre,*
- *la liste des pays de résidence des orchestres,*
- *la liste des orchestres de même style.*

La réalité décrite dans l'exemple 44 peut être modélisée et représentée graphiquement comme sur la figure 17.1. L'intérêt de cette modélisation n'est pas uniquement son intelligibilité pour l'être humain : des outils³ capables de transformer ce modèle graphique en modèle logique voire physique⁴ existent et sont couramment utilisés.

Sur la figure 17.1, les cardinalités viennent quantifier le nombre d'entités qui participent à une association. Le premier nombre quantifie la cardinalité minimale de l'association, le second la cardinalité maximale.

■ **Définition 138 — Types d'association.** On définit plusieurs types d'association en fonction des cardinalités **maximales** qu'elles mettent en jeu :

1. de un à un,
2. de un à plusieurs,
3. de plusieurs à plusieurs.

■ **Exemple 45 — Interprétations des cardinalités des associations de l'exemple 44.** La notation 0 – 1 à droite de l'association *occupe* sur la figure 17.1 signifie qu'un orchestre occupe zéro ou une seule résidence, conformément à l'énoncé de l'exemple 44.

Le 1 – 1 au-dessous de l'association *occupe* signifie qu'une résidence est occupée au plus par un orchestre et au moins par un orchestre, c'est à dire exactement par un orchestre, conformément à l'énoncé.

Cette association **occupe est de type un à un**, car de chaque côté la cardinalité maximale

3. des compilateurs

4. c'est à dire en base de données concrète et utilisable

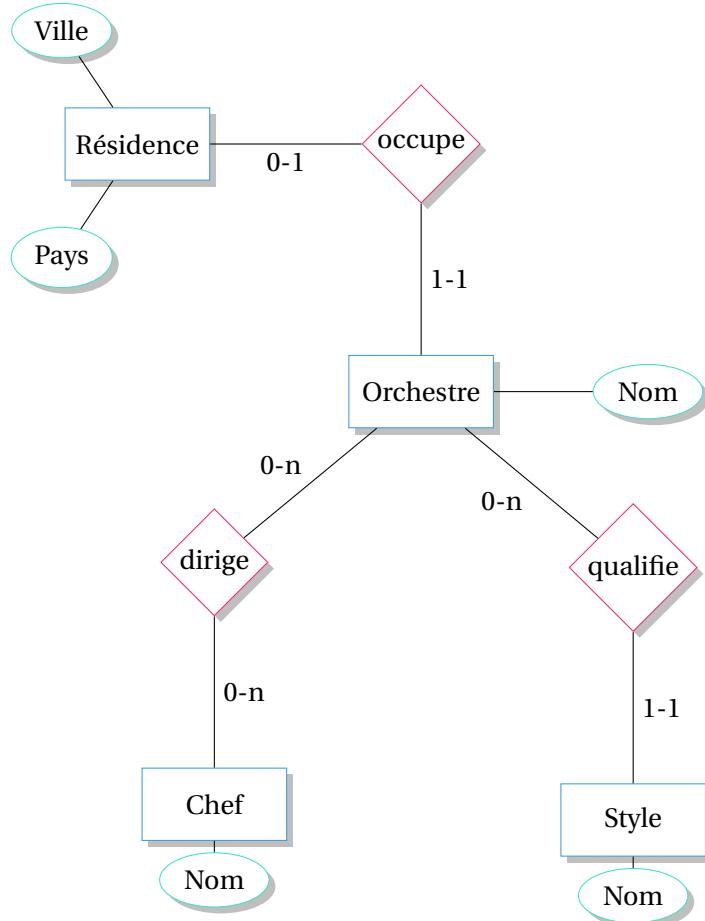


FIGURE 17.1 – Un modèle conceptuel de type entité-association associé à la réalité de l'exemple 44. Les entités sont inscrites dans des rectangles, les attributs des entités dans des ovales et les associations entre les entités dans des losanges. Des cardinalités sont précisées sur les arcs qui relient les entités aux associations

vaut un.

La notation $0-n$ au dessus de l'association ***qualifie*** sur la figure 17.1 signifie qu'un style qualifie zéro ou plusieurs orchestres.

Le $1-1$ au-dessous de l'association ***qualifie*** signifie qu'un orchestre est qualifié exactement par un style.

Cette association ***qualifie est de type un à plusieurs***, car la cardinalité maximale de part et d'autre de l'association vaut un et n.

La notation $0-n$ au dessus de l'association ***dirige*** sur la figure 17.1 signifie qu'un chef d'orchestre peut diriger zéro ou plusieurs orchestres. Le zéro laisse la possibilité à un chef d'être libre de tout engagement.

Le $0-n$ au dessous de l'association ***dirige*** signifie qu'un orchestre peut être dirigé par zéro ou plusieurs chefs. Le zéro laisse la possibilité à un orchestre de ne pas avoir de chef.

L'association ***dirige est de type plusieurs à plusieurs***, car la cardinalité maximale de chaque côté de l'association vaut n.

R Pour comprendre les cardinalités sur la figure 17.1, une bonne maîtrise de la voix active et de la voix passive en français est nécessaire. On lit une association dans un sens à la voix active et dans l'autre sens à la voix passive. L'interprétation des cardinalités découle de cette lecture à double voix.

b Modélisation logique

■ **Définition 139 — Modèle logique.** Un modèle logique s'élabore à partir d'un modèle conceptuel. Il explique comment sont structurées les données dans le logiciel de base de données. Il ne dit pas comment implémenter les structures mais spécifie :

- le type de structure qui enregistre les entités et les associations,
- le type de données des attributs et les valeurs possibles,
- les clefs qui identifient les entités,
- les contraintes référentielles liées à l'intégrité entre les éléments du modèle.

R Par essence, une base de données est partagée entre plusieurs utilisateurs^a. Certains utilisateurs ont plus de droits que d'autres. Par exemple, ils peuvent avoir le droit d'insérer des nouveaux enregistrements. Il n'est pas rare de trouver dans les bases de données mal conçues :

- des doublons,
- des valeurs aberrantes,
- des valeurs incohérentes.

Pour remédier à ceci, on impose des contraintes sur la modèle logique de la base de données.

^a. voirie des millions...

■ **Définition 140 — Contrainte d'unicité.** Une contrainte d'unicité précise qu'un attribut ou un ensemble d'attributs d'une entité est unique dans la base de données. On ne peut donc plus insérer deux informations différentes dont ces attributs seraient identiques. Cela permet d'éviter l'insertion d'informations redondantes. Elle est réalisée grâce à une clef primaire.

■ **Définition 141 — Clef primaire.** Une clef primaire est un attribut ou ensemble d'attributs d'une entité qui permet de distinguer un représentant de cette entité d'un autre dans une base de données. C'est un identifiant.

■ **Exemple 46 — Identifier une voiture et un conducteur.** L'identifiant choisi pour une entité voiture est généralement sa plaque d'immatriculation qui est unique au moins à l'échelle d'un pays. Ainsi, on ne pourra pas confondre deux voitures. De même, pour un conducteur, le plus sûr est de choisir son numéro de permis de conduire. On pourrait imaginer utiliser la combinaison de son nom et de sa date de naissance. Cela peut malheureusement ne pas suffire dans certaines situations^a.

a. Un conducteur nommé Jean Martin, étant donné qu'il porte le prénom et le nom les plus courants en France, peut avoir un homonyme né le même jour. Ce n'est pas exclu.

Si la contrainte d'unicité protège des doublons, elle ne protège pas des valeurs aberrantes ou incohérentes.

■ **Définition 142 — Contrainte référentielle.** Une contrainte référentielle spécifie qu'un attribut d'une entité faisant référence à une autre doit nécessairement référencer l'autre entité en question pour ne pas dupliquer les informations^a. Ce référencement se fait via une clef étrangère.

a. et les rendre incohérente par la même occasion...

■ **Définition 143 — Clef étrangère.** Une clef étrangère est un attribut ou ensemble d'attributs d'une entité qui permet de faire référence à un représentant d'une autre entité dans une base de données. C'est, le plus souvent, la clef primaire d'une autre entité dans la base.

Construire un modèle logique d'une base de données, c'est donc se poser de nombreuses questions sur les données et ce qu'on peut ou doit en faire. Toutes les réponses formulées ont un impact sur la structure logique de la base de données.

Le modèle logique généralement utilisé dans le domaine des bases de données est le modèle relationnel qui est décrit à la section D.

c Modélisation physique

■ **Définition 144 — Modèle physique.** Un modèle physique est l'implémentation d'un modèle logique dans un SGBD.

Pour implémenter ce modèle physique en mémoire, le SGBD crée alors :

- la base de données (sur un serveur ou dans un fichier),
- toutes les structures de données nécessaires pour enregistrer les données,
- les contraintes logicielles d'unicité et de référencement,
- des vues pour simplifier la visualisation des données,
- des index pour accélérer l'exécution des requêtes.

D Le modèle relationnel

Cette section décrit plus précisément le modèle relationnel qui est au programme de l'épreuve d'informatique commune. C'est à partir de ce modèle que l'on peut effectuer des requêtes sur des bases de données.

Le modèle relationnel repose sur l'algèbre relationnelle, de solides fondements mathématiques qui ne sont pas exposés ici, mais qui justifient pleinement son adoption massive comme modèle logique de référence.

■ **Définition 145 — Modèle relationnel.** Le modèle relationnel est un modèle logique de base de données pour lequel :

- l'information est structurée en tableaux à deux dimensions : les relations.
- les entités décrites dans ces tableaux doivent l'être indépendamment des associations qui les relient.

Un exemple de modèle relationnel est donné sur la figure 17.2 : on y retrouve les définitions données ci-dessous.

■ **Définition 146 — Relation.** Une relation est tableau à deux dimensions constitué :

1. d'un entête qui contient la liste des noms des attributs associés à leur domaine,
2. d'un corps qui est un ensemble de lignes dont les éléments sont des valeurs qui appartiennent aux domaines des attributs correspondant dans l'entête.

Les attributs d'une relation relèvent toutes d'une entité commune.

■ **Définition 147 — Enregistrement.** Un enregistrement est une ligne dans le corps d'une relation. Un enregistrement représente une instance d'une entité. Généralement on parle de ligne au niveau logique et d'enregistrement au niveau physique.

R Au niveau physique, on désigne une relation par le terme **table**, ce qui est légitime car son implémentation est un tableau. Les **lignes** d'une relation sont les enregistrements de la table. Les colonnes d'une table sont les attributs de la relation.

■ **Définition 148 — Domaine d'un attribut.** Le domaine d'un attribut est l'ensemble des valeurs qu'il peut prendre.

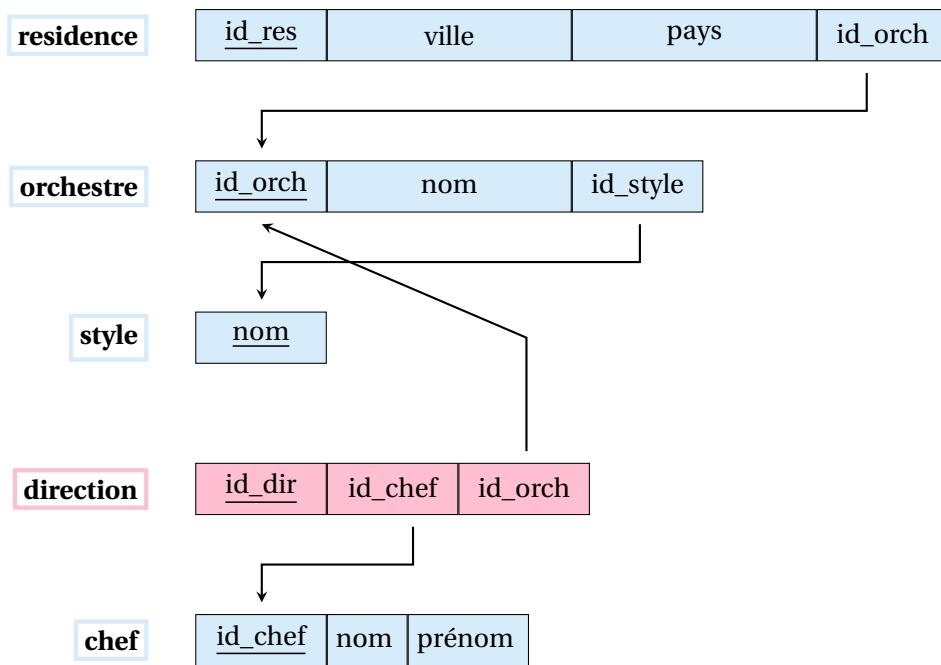


FIGURE 17.2 – Modèle relationnel construit à partir du modèle conceptuel 17.1. Seules les entêtes de colonne des relations sont représentées. Les associations du modèle conceptuel ont été intégrées aux tables en ajoutant des colonnes qui contiennent les clefs primaires et les clefs étrangères nécessaires ou en créant une nouvelle table (direction). Les flèches mettent en évidence ces associations.

■ **Exemple 47 — Domaine d'un attribut *paiement*.** Si l'attribut d'une entité *paiement* est une monnaie, alors le domaine associé à cet attribut est l'ensemble de toutes monnaies possibles : euro, dollar, rouble, yen, livre sterling...

R Certains SGBD n'utilisent pas le modèle relationnel, on parle de systèmes NoSQL. Ils sont souvent utilisés lorsque les modèles de données à gérer varient rapidement.

La représentation des entités du modèle conceptuel est naturel dans le modèle relationnel : une entité est représentée par une table. Par contre, représenter une association demande un travail supplémentaire.

E Traduction des associations dans le modèle relationnel

Cette section s'attache à décrire comment on peut traduire les associations d'un modèle conceptuel dans un modèle relationnel.

M Méthode 8 — Transformation d'une association de un à un Une association de un à un se traduit par l'apparition d'une clef étrangère dans une des deux tables du modèle relationnel.

Par exemple, sur le modèle conceptuel de la figure 17.1, la relation *occupe* est une association de un à un. Concrètement, au niveau des tables du modèle relationnel, on peut ajouter une colonne à la table *résidence*, colonne de même type que la clef primaire de la table *orchestre*. Cette colonne de la table *résidence* devient une clef étrangère qui référence la table *orchestre*, signifiant ainsi qu'une résidence est occupée par un orchestre comme le montre la figure 17.3.

R Les colonnes ajoutées aux tables et représentant des clefs étrangères portent souvent le même nom que la clef primaire à laquelle elles se réfèrent. C'est une bonne pratique. Cependant, il est possible de leur donner des noms différents.

R Les cardinalités minimales sont généralement traduites dans le modèle relationnel par des contraintes qui n'apparaissent pas sur les schémas mais dans la manière de compléter les colonnes des clefs étrangères.

Pour une association dont la cardinalité est minimale est 1, on impose à la clef étrangère d'être définie : par exemple, pour le modèle de la figure 17.1, le fait qu'une résidence soit nécessairement occupée par un orchestre implique que le SGBD doit vérifier qu'à chaque nouvelle insertion d'une résidence, cette clef soit présente et référence un orchestre en particulier.

Pour une cardinalité minimale 0, lors de l'insertion d'un nouvel enregistrement, une clef étrangère peut ne pas être définie.

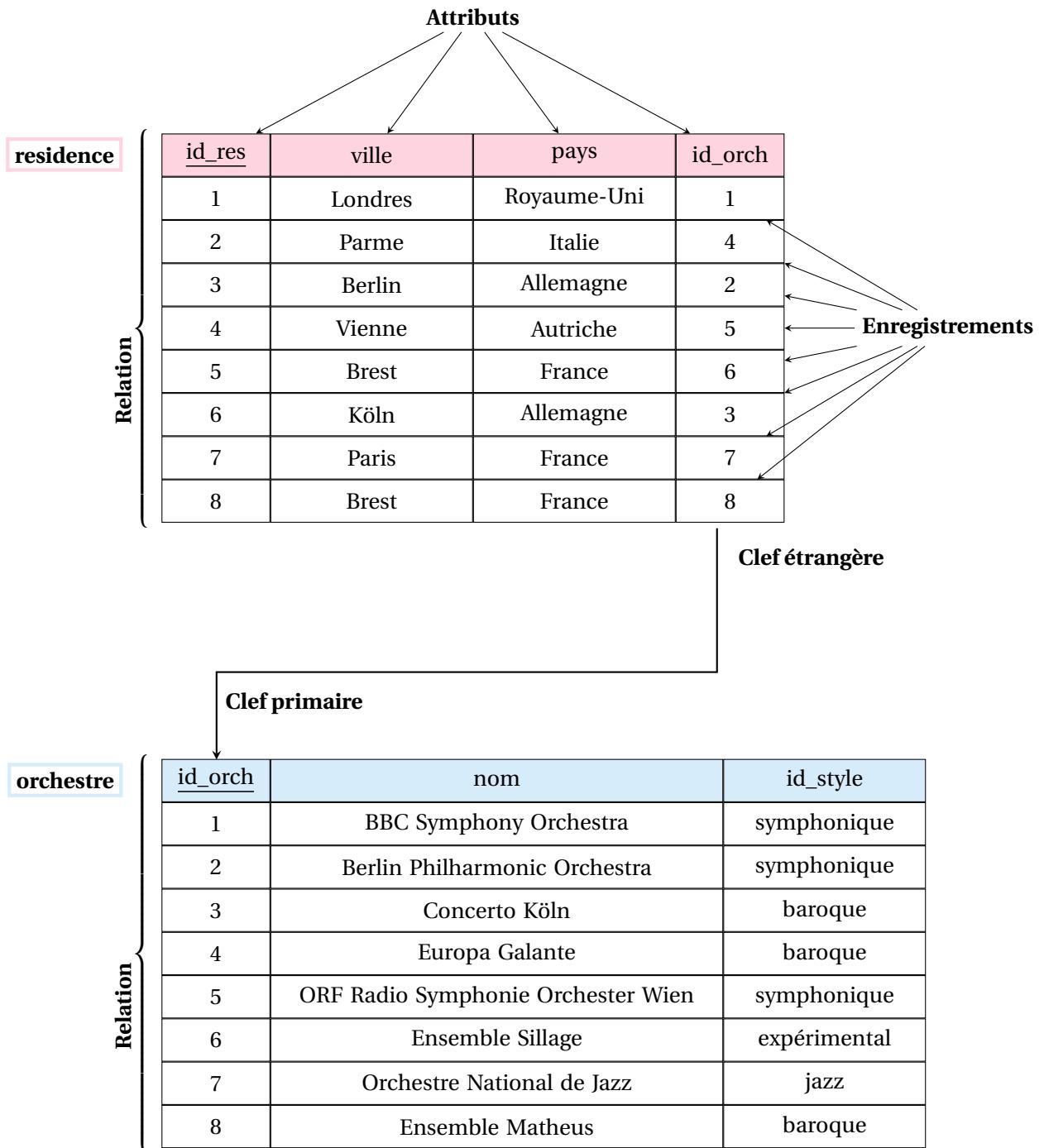


FIGURE 17.3 – Traduction d'une association de un à un dans un modèle relationnel. Modèle relationnel spécifiant les tables résidence et orchestre du modèle relationnel de la figure 17.2.

M Méthode 9 — Transformation d'une association de un à plusieurs Une association de un à plusieurs se traduit par l'apparition d'une clef étrangère dans la table dont la cardinalité maximale vaut un.

Par exemple, sur le modèle conceptuel de la figure 17.1, la relation *qualifie* est une association de un à plusieurs. Concrètement, au niveau des tables du modèle relationnel, on peut ajouter une colonne à la table *orchestre*, colonne de même type que la clef primaire de la table *style*. Cette colonne de la table *orchestre* devient une clef étrangère qui référence la table *style*, signifiant ainsi qu'un orchestre est qualifié par un style, comme le montre comme le montre la figure 17.4.

orchestre

<u>id_orch</u>	nom	<u>id_style</u>
1	BBC Symphony Orchestra	symphonique
2	Berlin Philharmonic Orchestra	symphonique
3	Concerto Köln	baroque
4	Europa Galante	baroque
5	ORF Radio Symphonie Orchester Wien	symphonique
6	Ensemble Sillage	expérimental
7	Orchestre National de Jazz	jazz
8	Ensemble Matheus	baroque

style

<u>nom</u>
symphonique
chambre
jazz
expérimental
baroque

Clef étrangère

Clef primaire

FIGURE 17.4 – Traduction d'une association de un à plusieurs dans un modèle relationnel. Modèle relationnel spécifiant les tables *orchestre* et *style* du modèle relationnel de la figure 17.2.

M Méthode 10 — Transformation d'une association de plusieurs à plusieurs Une association de plusieurs à plusieurs se traduit par la création d'une nouvelle table dans la base de données. On choisit généralement de nommer cette table d'après le nom de l'association. Cette nouvelle table contient deux clefs étrangères, chacune pointant vers une extrémité différente de l'association.

Par exemple, sur le modèle conceptuel de la figure 17.1, la relation *dirige* est une association de plusieurs à plusieurs. Concrètement, au niveau des tables du modèle relationnel, on ajoute une table nommée direction. Cette table comporte au moins deux colonnes, deux clefs étrangères : l'une pointe vers la clef primaire de la table orchestre et l'autre vers la clef primaire de la table chef. Une direction est le fait qu'au cours de la saison, un chef dirige un orchestre. La figure 17.5 montre comment transformer une relation de plusieurs à plusieurs dans le cas du modèle conceptuel de la figure 17.1.

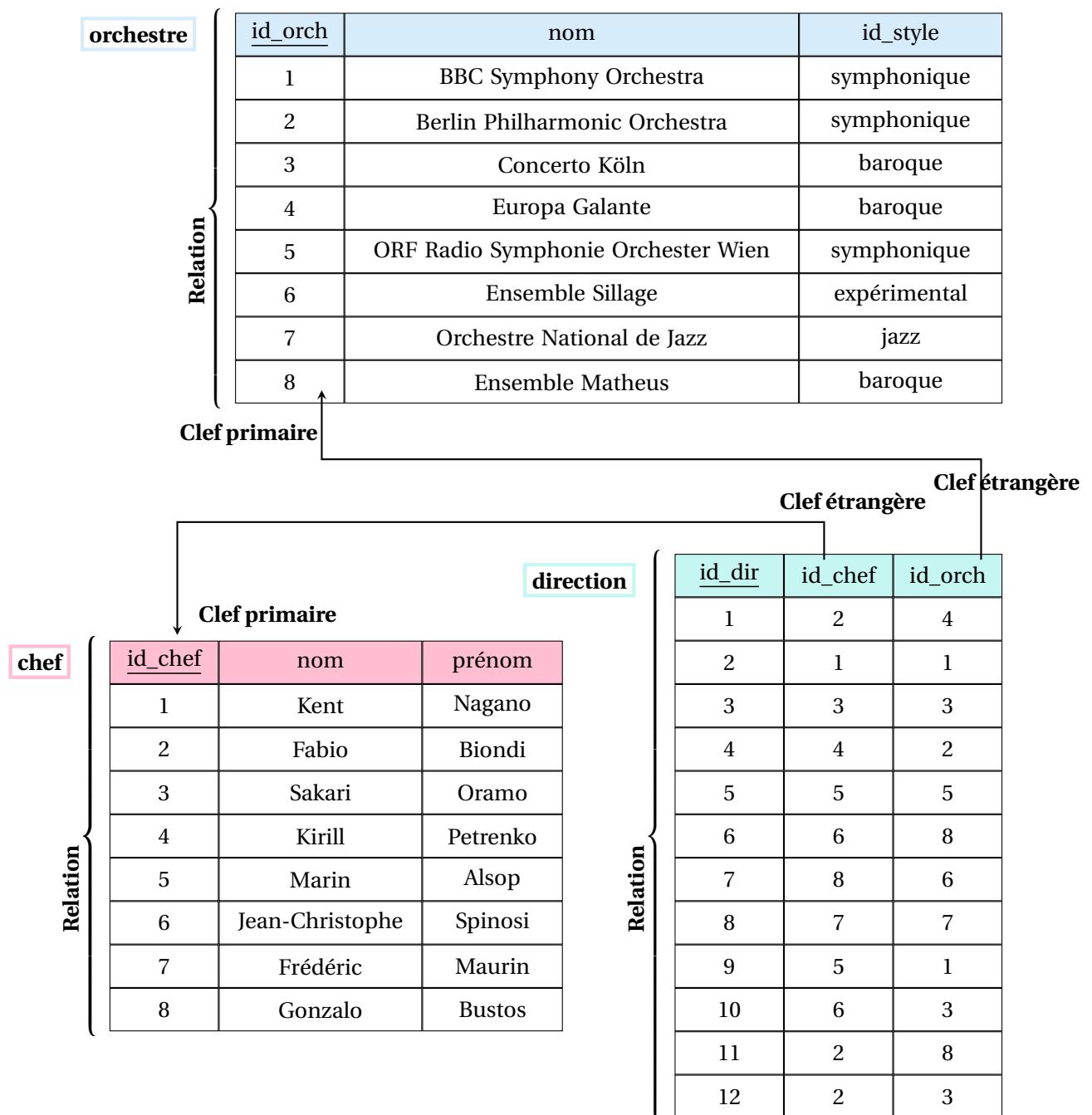


FIGURE 17.5 – Traduction d'une association de plusieurs à plusieurs dans un modèle relationnel. Modèle relationnel spécifiant les tables orchestre, direction et chef qui implémente l'association *dirige* du modèle conceptuel de la figure 17.1.

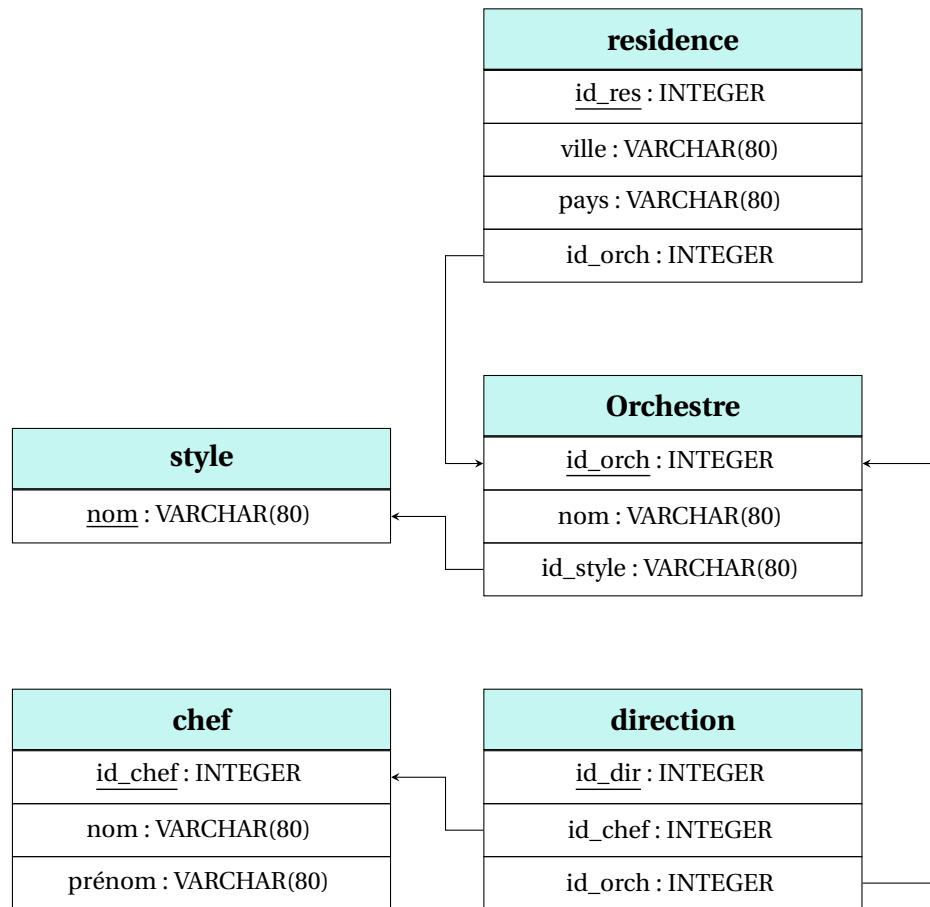


FIGURE 17.6 – Modèle physique de la base de données du modèle relationnel 17.2.

F Du modèle physique à la création des tables

--> HORS PROGRAMME

Il existe donc trois types de modèle pour décrire les base de données selon que l'on se place au niveau :

1. conceptuel,
2. relationnel (logique),
3. ou physique.

Ci-dessous sur la figure 17.6, on donne le modèle physique associé au modèle relationnel de la figure 17.2 et au modèle conceptuel de la figure 17.1.

Sur ce modèle physique sont notamment précisés les types des attributs en essayant de minimiser la taille en mémoire de chaque attribut.

Le langage SQL permet la création de ce modèle physique. Le code 17.1 montre comment créer les tables concrètes associées au modèle physique de la figure 17.6 dans la base de don-

nées. En plus des types des attributs y figurent également les contraintes de clefs primaires et étrangères.

Code 17.1 – Création du modèle physique d'une base de données

```

1   CREATE TABLE "chef"
2   (
3       "id_chef"  INTEGER,
4       "nom"      VARCHAR(80),
5       "prenom"    VARCHAR(80),
6       PRIMARY KEY ("id_chef")
7   );
8
9   CREATE TABLE "style"
10  (
11      "nom"      VARCHAR(80),
12      PRIMARY KEY ("nom")
13  );
14
15  CREATE TABLE "orchestre"
16  (
17      "id_orch"   INTEGER,
18      "nom"      VARCHAR(80),
19      "id_style"  VARCHAR(80),
20      PRIMARY KEY ("id_orch"),
21      FOREIGN KEY ("id_style") REFERENCES "style"
22  );
23
24  CREATE TABLE "residence"
25  (
26      "id_res"    INTEGER,
27      "ville"     VARCHAR(80),
28      "pays"      VARCHAR(80),
29      "id_orch"   INTEGER,
30      PRIMARY KEY (id_res),
31      FOREIGN KEY ("id_orch") REFERENCES orchestre (id_orch)
32  );
33
34
35  CREATE TABLE "direction"
36  (
37      "id_dir"    INTEGER,
38      "id_chef"   INTEGER,
39      "id_orch"   INTEGER,
40      PRIMARY KEY ("id_dir"),
41      FOREIGN KEY ("id_chef") REFERENCES chef (id_chef),
42      FOREIGN KEY ("id_orch") REFERENCES orchestre (id_orch)
43  );

```

Modèle relationnel et langage SQL

Did you really name your son ROBERT') ; DROP TABLE
students;--?

Exploits of a Mom, XKCD

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ interpréter et utiliser un modèle relationnel de base de données
- ☒ utiliser les opérateurs de projection et de sélection sur un modèle simple (select from, where)
- ☒ utiliser les clefs primaires et étrangères dans une requête simple
- ☒ opérer une jointure interne entre plusieurs tables (join on)
- ☒ utiliser les fonctions d'agrégation pour un calcul simple (min, max, sum, avg, count)
- ☒ filtrer des agrégations d'après un critère (having)
- ☒ utiliser des opérateurs ensemblistes (intersect, union, except)

A Requêtes SQL

SQL est le langage de manipulation et de création du modèle relationnel. Il implémente les opérations de l'algèbre relationnelle. De type déclaratif, ce langage décrit donc ce que l'on veut faire sur la base de données, pas comment on veut le faire car le SGBD s'en charge.

Les épreuves d'informatique commune proposent essentiellement de rédiger des requêtes SQL sur un base de données proposée. C'est un sous-ensemble de possibilité du langage qui permet déjà de se divertir un peu!

■ **Définition 149 — Requête SQL.** Une requête SQL consiste à extraire des données issues d'une base de données relationnelle en utilisant les opérateurs relationnels. Ces opérateurs sont :

- SELECT ...FROM
- WHERE
- GROUP BY
- HAVING
- ORDER BY

S'ajoutent à ces opérateurs, les opérations ensemblistes (union, intersection et différence) ainsi que l'opérateur de jointure (JOIN).

La structure générique d'une requête SQL est donnée sur la figure 18.1.

Code 18.1 – Structure de base d'une requête SQL : projection et sélection

```
1  -- Commentaire
2  SELECT nom          -- OPERATEUR attribut
3  FROM ville          -- OPERATEUR table
4  WHERE nom_pays = "France"; --OPERATEUR condition
```

Dans tout le chapitre, on considère qu'on manipule le modèle relationnel donné sur la figure 18.1 via le langage SQL.

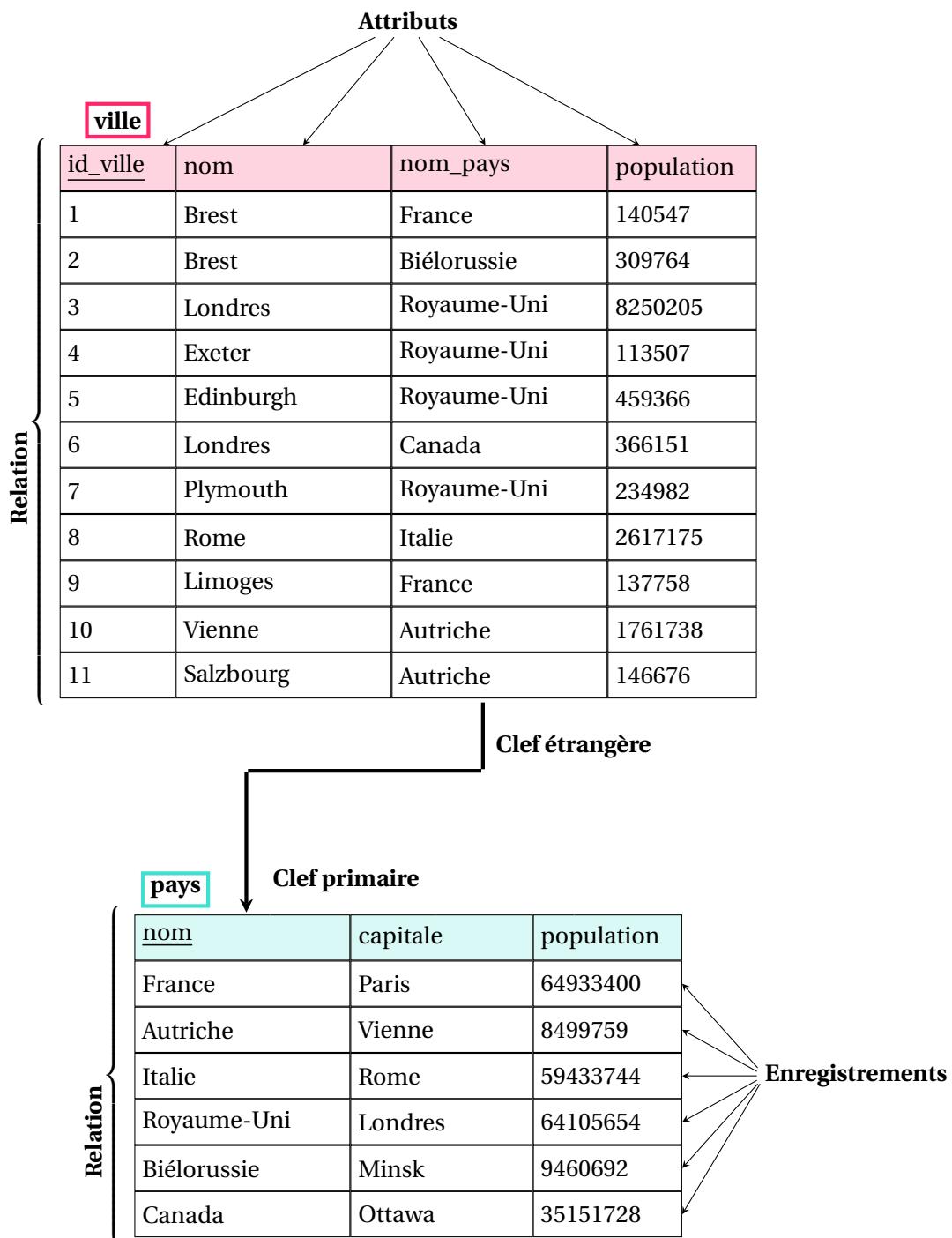


FIGURE 18.1 – Modèle relationnel utilisé pour les exemples de projection et de sélection.

B Projection : SELECT ...FROM

■ **Définition 150 — Projection.** Une projection est une opération qui consiste à sélectionner des colonnes (attributs) dans une table. En langage SQL, la projection est effectuée grâce aux mots clefs **SELECT** et **FROM**.

Code 18.2 – Exemples de projections

```

1   SELECT nom          -- la colonne nom
2   FROM ville;        -- de la table ville
3   -- SORTIE DU SGBD :
4   -- Brest
5   -- Brest
6   -- Londres
7   -- Exeter
8   -- Edinburgh
9   -- Londres
10  -- Plymouth
11  -- Rome
12  -- Limoges
13  -- Vienne
14  -- Salzbourg
15
16  SELECT *          -- toutes les colonnes
17  FROM ville;       -- de la table ville
18  -- SORTIE DU SGBD :
19  -- 1 Brest France 140547
20  -- 2 Brest Bielorussie 309764
21  -- 3 Londres Royaume-Uni 8250205
22  -- 4 Exeter Royaume-Uni 113507
23  -- 5 Edinburgh Royaume-Uni 459366
24  -- 6 Londres Canada 366151
25  -- 7 Plymouth Royaume-Uni 234982
26  -- 8 Rome Italie 2617175
27  -- 9 Limoges France 137758
28  -- 10 Vienne Autriche 1761738
29  -- 11 Salzbourg Autriche 146676
30
31  SELECT nom, nom_pays -- la colonne nom et la colonne nom_pays
32  FROM ville;         -- de la table ville
33  -- SORTIE DU SGBD :
34  -- Brest France
35  -- Brest Bielorussie
36  -- Londres Royaume-Uni
37  -- Exeter Royaume-Uni
38  -- Edinburgh Royaume-Uni
39  -- Londres Canada
40  -- Plymouth Royaume-Uni
41  -- Rome Italie
42  -- Limoges France
43  -- Vienne Autriche
44  -- Salzbourg Autriche

```

C Sélection : WHERE ...

■ **Définition 151 — Sélection.** Une sélection est une opération qui consiste à sélectionner des lignes (enregistrements) dans une table. En langage SQL, la sélection est effectuée grâce au mot clef **WHERE** suivi d'une condition.

Code 18.3 – Sélections

```

1   SELECT nom          -- la colonne nom
2   FROM ville         -- de la table ville
3   WHERE nom_pays = "France";
4   -- condition de selection : les lignes dont la colonne nom_pays vaut "
5   -- France"
6   -- SORTIE DU SGBD :
7   -- Brest
8   -- Limoges
9
9   SELECT nom          -- la colonne nom
10  FROM ville        -- de la table ville
11  WHERE nom_pays = "France" OR nom_pays = "Royaume-Uni";
12  -- condition de selection : les lignes dont la colonne nom_pays vaut "
13  -- France" ou du "Royaume Uni"
14  -- SORTIE DU SGBD :
15  -- Brest
16  -- Londres
17  -- Exeter
18  -- Edinburgh
19  -- Plymouth
20  -- Limoges

```

Une fois la projection et la sélection effectuée, on peut préciser la manière dont les résultats s'affichent : on peut ordonner les résultats selon un attribut en particulier, c'est la vocation des mots-clefs **ORDER BY**. L'ordre suivi par le SGBD sera l'ordre alphabétique ou numérique en fonction du type de données par rapport auquel on souhaite ordonner. Si on souhaite ordonner par un attribut de type texte, c'est l'ordre lexicographique qui est utilisé. Si on souhaite ordonner par un attribut du type entier, c'est l'ordre numérique qui sera choisi.

On peut également indiquer qu'on veut une projection sans redondance, c'est à dire ne garder qu'un seul exemplaire de chaque résultat (cf. code 18.4) grâce aux mots-clefs **SELECT DISTINCT**.

L'opérateur **LIMIT n** permet de limiter le nombre de réponses aux n premières. L'opérateur **OFFSET n** permet d'écarter les n premières réponses. En combinant les deux, on peut sélectionner n'importe quelle plage de la réponse.

Code 18.4 – Sélections - ordre des résultats - projection non redondante

```

1   SELECT nom          -- la colonne nom
2   FROM ville          -- de la table ville
3   WHERE nom_pays = "France" OR nom_pays = "Royaume-Uni"
4   ORDER BY nom_pays;
5   -- condition de selection : colonne nom_pays vaut "France" ou du "Royaume
6   -- Uni"
7   -- ordonner par nom_pays
8   -- SORTIE DU SGBD :
9   -- Brest
10  -- Londres
11  -- Exeter
12  -- Edinburgh
13  -- Plymouth
14  -- Limoges
15
16  SELECT DISTINCT nom_pays    -- la colonne nom_pays
17  FROM ville                -- de la table ville
18  ORDER BY nom_pays;
19  -- projection : les pays des villes sans redondance DISTINCT
20  -- ordonner par nom_pays
21  -- SORTIE DU SGBD :
22  -- Autriche
23  -- Bielorussie
24  -- Canada
25  -- France
26  -- Italie
27  -- Royaume-Uni
28
29  SELECT nom, population    -- la colonne population
30  FROM ville                -- de la table ville
31  ORDER BY nom_pays         -- regrouper par pays
32  LIMIT 3;                  -- les trois premiers resultats
33  -- SORTIE DU SGBD :
34  -- Vienne 1761738
35  -- Salzbourg 146676
36  -- Brest 309764
37
38  SELECT nom, population
39  FROM pays
40  ORDER BY population
41  LIMIT 3                   -- les trois premiers resultats
42  OFFSET 2;                 -- on ecarte les 5 premieres
43  -- SORTIE DU SGBD :
44  -- Canada 35151728
45  -- Italie 59433744
46  -- Royaume-Uni 64105654

```

R Il est possible qu'il existe une ambiguïté dans le nom des attributs. Par exemple, la table *ville* possède un champ nom, tout comme la table *pays*. Parfois, cette ambiguïté n'a pas de conséquence, comme dans le code 18.10 : on a deux commandes `SELECT nom` qui désignent deux attributs différents, mais cela reste intelligible pour le SGBD, car ces commandes font parties de deux projections différentes, les `FROM` sont différents.

Cependant, il arrive que le SGBD ne puisse pas lever l'ambiguïté des noms utilisés. Dans ce cas, on peut soit :

- utiliser le préfixe du nom de la table suivi d'un point pour désigner un attribut. Par exemple, pour ne pas confondre la population d'une ville et la population d'un pays, on peut écrire les deux expressions `ville.population` et `pays.population`.
- renommer les tables, les attributs ou les champs calculés grâce à l'opérateur de renommage `AS` comme dans le code 18.5.

D Jointure : JOIN ...ON ...

Il est possible d'effectuer une requête SQL sur plusieurs tables simultanément, soit en utilisant le produit cartésien de tables soit en effectuant un jointure interne. Celle-ci est la syntaxe à privilégier pour cette opération.

■ **Définition 152 — Jointure.** En langage SQL, une jointure est un moyen d'utiliser plusieurs tables dans une même requête en créant une liaison entre les tables. Pour associer deux tables dans une jointure, il est nécessaire d'utiliser les mots-clefs `JOIN` et `ON`. Après `JOIN` on précise quelles tables sont à joindre, après `ON` on explicite la condition qui crée la liaison entre les tables.

■ **Exemple 48 — Exemples de jointures.** Le code 18.5 présente deux jointures de type différent.

La première jointure est une jointure entre deux tables différentes. La condition de jointure est que les lignes des deux tables qui sont à joindre doivent porter les mêmes noms de pays. La figure 18.2 détaille les étapes de cette requête.

La seconde est une autojointure, c'est à dire qu'on relie la table à elle-même pour faire une requête. Dans cet exemple, on joint deux à deux les lignes des villes qui font parties d'un même pays, puis on sélectionne les lignes dont la première ville possède une population plus grande que la seconde.

Code 18.5 – Exemples de jointures

```

1   SELECT ville.nom, pays.population
2   FROM ville
3   JOIN pays
4   ON ville.nom_pays = pays.nom
5   WHERE pays.population < 60000000;
6   -- Jointure de ville et pays d'apres les noms des pays
7   -- Condition : les pays comportent moins de 60 millions d'habitants
8   -- Sortie du SGBD
9   -- Brest 9460692
10  -- Londres 35151728
11  -- Rome 59433744
12  -- Vienne 8499759
13  -- Salzbourg 8499759
14
15
16  SELECT v.nom, w.nom, v.population-w.population
17  FROM ville as v
18  JOIN ville as w
19  ON v.nom_pays = w.nom_pays
20  WHERE v.population > w.population;
21  -- Projection avec renommage v
22  -- Autojointure avec renommage w
23  -- La condition de jointure est que le nom du pays des deux villes doit
   etre le meme.
24  -- La selection ne retient que les couples de villes tels que la
   premiere ville est plus peuplee
25  -- On calcule la difference de population entre les deux villes
26  -- SORTIE DU SGBD :
27  -- Exeter Edinburgh 345859
28  -- Exeter Londres 8136698
29  -- Exeter Plymouth 121475
30  -- Edinburgh Londres 7790839
31  -- Plymouth Edinburgh 224384
32  -- Plymouth Londres 8015223
33  -- Limoges Brest 2789
34  -- Salzbourg Vienne 1615062

```

ă

Étape 1 : jointure des tables ville et pays d'après les noms des pays.

id_ville	nom	nom_pays	population	nom	capitale	population
1	Brest	France	140547	France	Paris	64933400
2	Brest	Biélorussie	309764	Biélorussie	Minsk	9460692
3	Londres	Royaume-Uni	8250205	Royaume-Uni	Londres	64105654
4	Exeter	Royaume-Uni	113507	Royaume-Uni	Londres	64105654
5	Edinburgh	Royaume-Uni	459366	Royaume-Uni	Londres	64105654
6	Londres	Canada	366151	Canada	Ottawa	35151728
7	Plymouth	Royaume-Uni	234982	Royaume-Uni	Londres	64105654
8	Rome	Italie	2617175	Italie	Rome	59433744
9	Limoges	France	137758	France	Paris	64933400
10	Vienne	Autriche	1761738	Autriche	Vienne	8499759
11	Salzbourg	Autriche	146676	Autriche	Vienne	8499759

Étape 2 : sélection des pays de moins de 60 millions d'habitants.

id_ville	nom	nom_pays	population	nom	capitale	population
2	Brest	Biélorussie	309764	Biélorussie	Minsk	9460692
6	Londres	Canada	366151	Canada	Ottawa	3515172
8	Rome	Italie	2617175	Italie	Rome	59433744
10	Vienne	Autriche	1761738	Autriche	Vienne	8499759
11	Salzbourg	Autriche	146676	Autriche	Vienne	8499759

Étape 3 : projection du nom de la ville et de la population du pays.

nom	population
Brest	9460692
Londres	3515172
Rome	59433744
Vienne	8499759
Salzbourg	8499759

FIGURE 18.2 – Représentation des étapes de la requête `SELECT ville.nom, pays.population FROM ville JOIN pays ON ville.nom_pays = pays.nom WHERE pays.population < 60000000;` du code 18.5 qui opère une jointure entre les tables ville et pays. Étape 1 : les lignes des deux tables sont mises côte à côte d'après le critère de jointure. Étape 2 : seules les lignes qui respecte la condition de sélection sont gardées. Étape 3 : la projection sélectionne les colonnes résultats. à

E Agréger, grouper et filtrer des résultats

a Fonctions d'agrégation : SUM, COUNT, AVG, MAX, MIN

■ **Définition 153 — Fonction d'agrégation.** Une fonction d'agrégation effectue des opérations statistiques sur un ensemble de registres. Elle s'applique à plusieurs lignes en même temps et permettent :

- **COUNT** : de compter les éléments projetés et sélectionnés.
- **MIN** et **MAX** : de trouver le minimum ou le maximum des éléments,
- **SUM** : de calculer la somme des éléments,
- **AVG** : de calculer la moyenne des éléments.

R On peut utiliser les fonctions d'agrégation avec l'opérateur de projection **SELECT** ou l'opérateur **HAVING**. Par contre, **on n'utilise jamais** de fonctions d'agrégation avec l'opérateur de sélection **WHERE**. La raison est que pour pouvoir agréger des lignes, il faut d'abord sélectionner ces lignes des tables.



Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

Code 18.6 – Exemples d'utilisation des fonctions d'agrégation

```

1  SELECT COUNT(nom_pays)
2  FROM ville
3  WHERE population > 1000000;
4  -- On compte les pays qui ont des villes de plus de 5 millions d'
   -- habitants.
5  -- SORTIE DU SGBD :
6  -- 3
7
8  SELECT MAX(population), nom
9  FROM ville
10 WHERE nom_pays = "Royaume-Uni";
11 -- On détermine le nom de la ville du Royaume-Uni qui possède le plus
   -- grand nombre d'habitants.
12 -- SORTIE DU SGBD :
13 -- 8250205 Londres
14
15 SELECT MIN(nom)
16 FROM pays;
17 -- On détermine le nom du pays le premier dans l'ordre lexicographique.
18 -- SORTIE DU SGBD :
19 -- Autriche
20
21 SELECT AVG(population), MIN(population), MAX(population)
22 FROM ville;
23 -- On détermine la moyenne, le minimum et la maximum de la population des
   -- villes.
24 -- SORTIE DU SGBD :
```

```
25      -- 1321624.45454545 113507 8250205
```

b Regrouper : GROUP BY ...

L'opérateur **GROUP BY** permet de créer des groupes dans la réponse. L'intérêt principal est que les fonctions d'agrégation peuvent calculer leurs statistiques non plus sur l'ensemble des réponses mais sur chacun de ces groupes.

Code 18.7 – Exemple d'utilisation de **GROUP BY**

```
1  SELECT nom_pays , SUM(population)
2  FROM ville
3  WHERE population > 200000
4  GROUP BY nom_pays;
5  -- On fait la somme des populations des villes de plus de 200000
     habitants par pays.
6  -- SORTIE DU SGBD :
7  -- Autriche 1761738
8  -- Bielorussie 309764
9  -- anada 366151
10 -- Italie 2617175
11 -- Royaume-Uni 8944553
```

c Filtrer des résultats regroupés : GROUP BY ... HAVING...

SQL permet de filtrer les groupes créés par **GROUP BY**. En effet, l'opérateur **WHERE** a déjà sélectionné les lignes, les groupes ont été créés à partir de ces lignes. Si on souhaite filtrer les groupes, il faut donc un autre opérateur. C'est le rôle de **HAVING**.

Code 18.8 – Exemple d'utilisation de **GROUP BY...HAVING**

```
1  SELECT nom_pays , SUM(population)
2  FROM ville
3  WHERE population > 200000
4  GROUP BY nom_pays
5  HAVING COUNT(nom) > 2;
6  -- On fait la somme des populations des villes de plus de 200000
     habitants par pays
7  -- si seulement le pays en possède au moins 3.
8  -- SORTIE DU SGBD :
9  -- Royaume-Uni 8944553
```

F Opérations ensemblistes

SQL définit également des opérateurs ensemblistes : un opérateur d'union, d'intersection et de différence. Ils sont principalement utiles lorsqu'on dispose de plusieurs tables cohérentes,

voire qui représente la même entité, et qu'on souhaite extraire des informations de ces deux tables simultanément. Il est nécessaire que les projections génèrent le même nombre de colonnes pour pouvoir mener une opération ensembliste. Les opérateurs sont `UNION`, `INTER` et `EXCEPT`.

Code 18.9 – Exemple d'opération ensembliste

```

1  SELECT nom, population
2  FROM ville
3  WHERE nom = "Londres"
4  UNION
5  SELECT nom, population
6  FROM ville
7  WHERE population < 200000;
8  -- SORTIE DU SGBD :
9  -- Brest 140547
10 -- Exeter 113507
11 -- Limoges 137758
12 -- Londres 366151
13 -- Londres 8250205
14 -- Salzbourg 146676

```

G Requêtes imbriquées --> HORS PROGRAMME

■ **Définition 154 — Sous-requête ou requête imbriquée.** Une requête imbriquée est une requête incluse dans une requête. Son résultat devient le champ de recherche d'une autre requête.

Vocabulary 22 — Nested request ⇔ Requête imbriquée

Comme le montre le code 18.10, il est possible d'utiliser les opérateurs de comparaison `=`, `<`, `<=`, `>`, `>=` pour créer une condition qui dépend de la requête imbriquée, si celle-ci ne renvoie qu'une seule valeur. Mais ce n'est pas toujours le cas. Dans le cas contraire, la sous-requête résulte en une liste de valeur, alors il est nécessaire d'utiliser les mots-clefs `IN` ou `NOT IN` pour tester l'appartenance du critère à la liste de valeurs retournée par la requête imbriquée.

Code 18.10 – Requêtes imbriquées

```

1  SELECT nom
2  FROM ville
3  WHERE ville.pays = ( SELECT nom
4                        FROM pays
5                        WHERE capitale = "Paris");
6  -- Requete imbriquee : le noms du pays dont la capitale est Paris
7  -- Sortie du SGBD
8  -- Brest
9  -- Limoges
10

```

```

11  SELECT nom
12  FROM ville
13 WHERE pays IN ( SELECT nom
14   FROM pays
15   WHERE population < 60000000);
16 -- Requête imbriquée : la liste des noms des pays qui comportent moins de
17   60 millions d'habitants
18 -- Sortie du SGBD
19 -- Brest
20 -- Londres
21 -- Rome
22 -- Vienne
23 -- Salzbourg

```

H De belles requêtes SQL

Comme vous l'aurez observé tout au long de ce chapitre, on n'écrit pas n'importe comment les requêtes SQL. Les codes qui vont sont présentés respectent certaines conventions.

M Méthode 11 — Écriture de requêtes SQL et conventions Afin de garantir une bonne lisibilité des requêtes SQL, il est nécessaire de bien les écrire. Même s'il ne s'agit de convention, il est important :

- d'écrire en majuscules pour les opérateurs SQL,
- d'écrire en minuscules les relations (tables) et les attributs (champs),
- de revenir à la ligne après chaque opération : projection, sélection, regroupement, agrégation, ordonnancement.



Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

Opérateurs	Action
<code>SELECT ... FROM ...</code>	Sélection des colonnes d'une table
<code>SELECT DISTINCT ... FROM ...</code>	Idem mais sans redondance, sans doublons
<code>WHERE ...</code>	Condition de sélection des lignes
<code>GROUP BY ...</code>	Créer des regroupements des résultats
<code>HAVING ...</code>	Filtrer les regroupements de résultats
<code>ORDER BY ... ASC/DESC</code>	Ordonner les résultats
<code>LIMIT n</code>	Limiter le nombre de résultats aux n premiers
<code>OFFSET n</code>	Écarter les n premiers résultats
<code>UNION, INTERSECT, EXCEPT</code>	Opérations ensemblistes

TABLE 18.1 – Synthèse des opérateurs SQL au programme

Et la machine apprit

L'intelligence artificielle n'existe pas.

Luc Julia [13]

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ définir les termes intelligence artificielle et apprentissage automatique
- ☞ expliquer et utiliser l'algorithme d'apprentissage supervisé des k plus proches voisins (KNN)
- ☞ expliquer et utiliser l'algorithme d'apprentissage non supervisé des k moyennes (Kmeans)

A Principles

■ **Définition 155 — Intelligence artificielle.** L'intelligence artificielle est un mot valise qui désigne des systèmes électroniques et informatiques capables de percevoir, de comprendre, d'apprendre et d'agir pour atteindre un but précis.

Cette définition pose de nombreux problèmes car elle repose sur le concept d'intelligence qu'il est bien difficile de définir. D'après le Larousse, l'intelligence est un *ensemble des fonctions mentales ayant pour objet la connaissance conceptuelle et rationnelle*. La machine aurait-elle des fonctions mentales? C'est à dire des fonctions cognitives, exécutives et langagières? De nombreuses personnes [13] insiste sur l'absurdité du mot intelligence artificielle qui a fait naître de nombreux fantasmes depuis son invention en 1955 par John McCarthy[17]. C'est pourquoi, dans ce chapitre, on s'intéressera davantage aux algorithmes d'**apprentissage** automatique, terme plus précis, plus pragmatique, qui pose moins de problèmes métaphysiques.

**Vocabulary 23 — Machine Learning** ⇔ Apprentissage automatique

■ **Définition 156 — Apprentissage automatique.** L'apprentissage automatique est un ensemble de techniques qui ont pour but d'automatiser les prises de décision en créant des systèmes capables, à partir d'un jeu de données, de découvrir, d'identifier et de classifier des motifs récurrents. Ces systèmes peuvent en plus être capables d'améliorer leurs performances au fur et à mesure de leur utilisation.

Les données d'entrée peuvent être de nature très différente : langage, nombres, images, sons... Les motifs récurrents identifiés par la machine ne sont généralement pas perceptibles à l'être humain ce qui donne à ces techniques une apparence de boîte noire. Cependant ces motifs identifiés le sont grâce à une analyse rationnelle du problème de décision considéré : rien d'ésotérique là dedans.

L'apprentissage automatique est considéré comme un sous-ensemble de l'intelligence artificielle.

Les données jouent un rôle central dans l'apprentissage automatique. Avant de se lancer dans l'apprentissage automatique, il est nécessaire d'extraire, de sélectionner et de transformer les données pour constituer un jeu de données utilisable. C'est ce jeu de données qui constitue l'entrée d'un algorithme.

Les données peuvent être **étiquetées** : on peut indiquer ainsi au système les caractéristiques qu'il va devoir apprendre à identifier. Elles peuvent aussi être **non étiquetées** et le système devra alors repérer et extraire les motifs récurrents sans indications.

Il existe deux grands objectifs à l'apprentissage automatique : la régression et la classification. Parfois un même algorithme peut permettre d'effectuer une régression ou une classification.

■ **Définition 157 — Régression.** Un algorithme dont la sortie est une régression génère un résultat sous la forme d'une valeur continue. Par exemple un prix, une température ou le cours d'une action.

■ **Définition 158 — Classification.** Un algorithme dont la sortie est une classification génère un résultat sous la forme d'une valeur discrète qui permet de trier un ensemble de données selon plusieurs catégories. Par exemple un masculin ou féminin, vrai ou faux, spam ou pas spam, carotte, navet ou pomme de terre si on considère des légumes à trier, pierre, sable, végétal ou eau si l'on considère la nature d'un sol à identifier.

On distingue plusieurs types d'algorithmes d'apprentissage automatique : l'apprentissage supervisé, non supervisé et l'apprentissage par renforcement. Seules deux approches sont au programme : une supervisée (KNN), l'autre non supervisée (K-means).

■ **Définition 159 — Apprentissage supervisé.** Un algorithme d'apprentissage supervisé s'appuie sur un jeu de données étiquetées pour s'entraîner à produire des résultats corrects. Au fur et à mesure que les données sont lues, il ajuste les poids du modèle afin de coller au mieux aux étiquettes (phase d'entraînement). On réserve généralement une partie du jeu

de données pour vérifier la validité du modèle ainsi obtenu (phase de test).

■ **Définition 160 — Matrice de confusion.** La matrice de confusion est un outil qui permet de visualiser les performances d'un algorithme de classification. Chaque case contient le nombre ^a de cas d'une classe *donnée* qui a été **prédit** par l'algorithme comme appartenant à une certaine classe.

La matrice de confusion est donc organisée comme suit :

- les lignes représentent les classes données (par le jeu de données),
- les colonnes les classes estimées par l'algorithme.

Les résultats peuvent être classés en quatre catégories :

- les vrais positifs : la prédiction et la classe donnée coïncident et c'est vrai.
- les vrais négatifs : la prédiction et la classe donnée ne coïncident pas et c'est vrai.
- les faux positifs : la prédiction et la classe donnée coïncident et c'est faux,
- les faux négatifs : la prédiction et la classe donnée ne coïncident pas et c'est faux.

a. ou le pourcentage

■ **Exemple 49 — Matrice de confusion.** On considère un algorithme de traitement automatique des messages instantanés : on cherche à classer les messages en différentes catégories (peur (P), joie (J), amour (A), tristesse (T), violence (V)) en fonction de leur contenu. On dispose d'un jeu de données étiquetées dont on utilise une partie pour l'apprentissage de l'algorithme et une partie pour le test de l'algorithme ^a. La matrice ci-dessous représente les résultats obtenus par l'algorithme sur le jeu de données de test.

	P	J	A	T	V	
P	55	6	4	30	5	
J	10	75	2	11	2	
A	3	1	91	5	1	
T	25	15	1	58	1	
V	4	1	2	0	93	
	P	J	A	T	V	

Prédiction

On peut lire la première ligne de la matrice ainsi : sur la centaine de messages de test étiquetés P (peur), 55 ont été effectivement prédisits comme tels par l'algorithme. Mais, 6 ont été prédisits joie, 4 amour, 30 tristesse et 5 violence. Notre algorithme engendre donc une

certaine confusion entre la peur et la tristesse ^b, confusion qui est explicite lorsqu'on affiche cette matrice! Lorsqu'un algorithme fonctionne correctement, les valeurs sur la diagonale sont maximales et les éléments non diagonaux mimimaux.

- a. Généralement on sélectionne 70% des données pour l'apprentissage et 30% pour le test.
- b. à moins que ce ne soit notre jeu de données et les classes choisies qui ne sont pas pertinentes!

R Il existe de nombreux algorithmes pour la régression et/ou la classification en apprentissage automatique. Le TP associé à ce cours est l'occasion d'illustrer les performances de plusieurs algorithmes confrontés à des jeux de données différents. Le choix d'un algorithme plutôt qu'un autre en apprentissage automatique est un compromis issu de l'expérience.

Parmi les algorithmes les plus utilisés on note :

1. l'analyse en composantes principales (Principal Component Analysis) pour réduire les dimensions du jeu de données,
2. les k-moyennes et les k plus proches voisins,
3. les arbres de décisions (Decision Trees),
4. les séparateurs à vaste marge (Support Machine Vector),
5. les réseaux de neurones (ANN),
6. les réseaux de neurones convolutionnels (CNN) pour l'apprentissage profond.

R La visualisation des caractéristiques d'un jeu de données et des résultats de l'apprentissage est un élément déterminant pour l'analyse des performances des algorithmes. Un exemple de visualisation des données brutes produit par les bibliothèques Scikit-Learn et Seaborn Python est donné sur la figure 19.1 : il s'agit des paramètres d'un jeu de données sur les manchots. Un exemple de projection des résultats de l'algorithme KNN sur le jeu de données iris selon toutes les dimensions est donné sur la figure 19.2.

B Apprentissage supervisé : k plus proches voisins

 **Vocabulary 24 — K-Nearest Neighbours (KNN) Algorithm** ⇔ Algorithme des k plus proches voisins

L'algorithme des k plus proches voisins [7] est un algorithme relativement simple, supervisé et encore très utilisé aujourd'hui pour effectuer des régressions ou des classifications. Il ne présente pas à proprement parlé de phase d'entraînement qui est confondue avec la phase de prédiction : il utilise toutes les données à chaque calcul¹. Plus le jeu de données grandit, plus KNN devient inefficace². Il est cependant couramment utilisé pour les systèmes de recommandation simples, la reconnaissance de modèle, la fouille de données, les prévisions des

-
- 1. On dit que l'algorithme est paresseux.
 - 2. Ce problème est souvent désigné en IA par la malédiction de la dimension d'un problème.

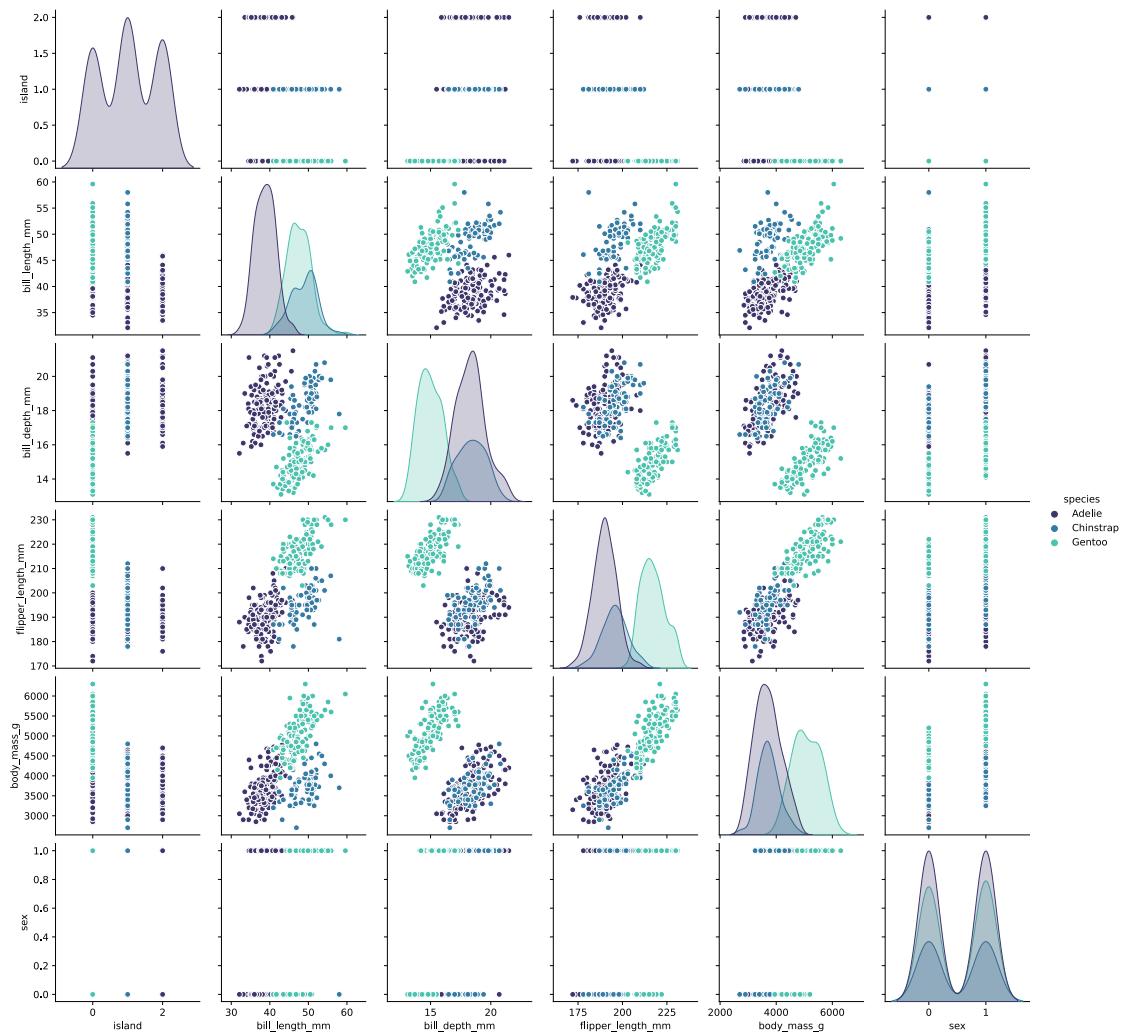


FIGURE 19.1 – Visualisation de la dispersion des paramètres sur le jeu de données des manchots répartis sur trois îles et en trois espèces

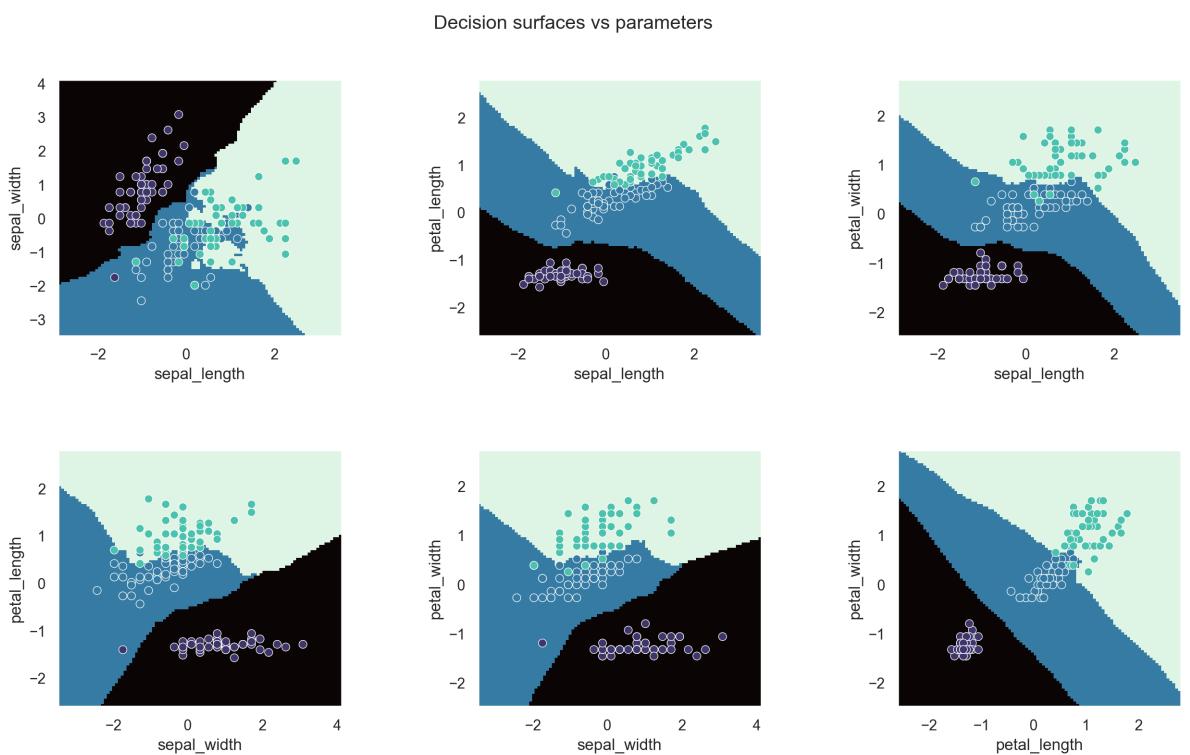


FIGURE 19.2 – Résultats de l'apprentissage de l'algorithme KNN sur le jeu de données de l'iris. Les régions de décisions du classificateur sont superposées au valeurs vraies des espèces d'iris.

marchés financiers ou la détection d'intrusion.

Pour les problèmes de classification, l'étiquette de classe est affectée à l'échantillon analysé sur la base d'un vote à la majorité : on utilise l'étiquette de la classe la plus fréquemment représentée autour de l'échantillon. Pour les problèmes de régression et une certaine fonction f à valeur continue, on procède de la même manière mais on calcule la prédiction sur la valeur de la moyenne de f sur les k plus proches voisins.

Pour expliquer cet algorithme simplement, on considère un problème de classification dans \mathbb{R}^d . C'est à dire qu'on dispose d'un ensemble d'échantillons étiquetés \mathcal{E} dont les éléments sont des couples composés d'un vecteur de \mathbb{R}^d et d'une étiquette désignant la classe à laquelle appartient l'échantillon. On note l'ensemble des classes possibles \mathcal{C} . On cherche donc à déterminer la classe d'autres échantillons non étiquetés.

a Principe de KNN pour la classification

Pour un échantillon $x \in \mathbb{R}^d$, l'algorithme KNN détermine dans un premier temps les k voisins les plus proches dans les données étiquetées \mathcal{E} . Puis, dans un deuxième temps, il décide de la classe de l'échantillon de e à partir d'un vote majoritaire : il choisit l'étiquette de la classe la plus fréquemment représentée autour de l'échantillon.

b Distances

Pour savoir si un voisin est proche, il faut être capable de mesurer sa distance. L'algorithme KNN utilise donc une distance dont la définition varie selon le problème considéré : distance euclidienne, de manhattan, de levenshtein ou de hamming...

c Comment choisir k ?

Si n est la dimension du problème, c'est à dire que le jeu de données est constitué de n échantillons, alors il faut nécessairement choisir k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Choisir un k trop grand amènera à classer la majorité des échantillons dans la classe dominante. Choisir un k trop petit ne permettra pas de conclure précisément.

d Algorithmes des n plus proches voisins

On note $\mathcal{E} = \{(e_i, c_i), i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i \in \mathbb{R}^d, c_i \in \mathcal{C}\}$, l'ensemble des données étiquetées dont on dispose. On cherche à trouver la classe de $e \in \mathbb{R}^d$. On dispose d'une distance δ sur \mathbb{R}^d .

La figure 19.3 illustre le résultat de l'algorithme 43 sur le très célèbre jeu de données de l'iris [6]. Les résultats montrent clairement que l'algorithme est capable de discriminer plusieurs variétés d'iris en connaissant uniquement les paramètres morphologiques des pétales et des sépals. On remarque essentiellement une légère confusion entre Versicolor et Virginica. Certaines Virginica sont prises pour des Versicolor. Cet apprentissage est effectué en TP.

Les étapes de l'algorithme 43 des lignes 4 à 6 nécessitent un tri de l'ensemble Δ . On peut imaginer effectuer un tri en ligne au fur et à mesure par insertion, un tri fusion ou utiliser un tas min.

Algorithme 43 k plus proches voisins (KNN)

```

1: Fonction KNN( $D, x, k, \delta$ )
2:    $n \leftarrow |D|$ 
3:    $\Delta \leftarrow \emptyset$                                  $\triangleright$  Distances à calculer
4:   pour chaque échantillon étiqueté  $e \in \mathcal{E}$  répéter
5:     Ajouter  $\delta(c, e)$  à  $\Delta$ 
6:   Sélectionner les  $k$  voisins les plus proches de  $x$  en utilisant  $\Delta$ 
7:   Compter le nombre d'occurrences de chaque classe des  $k$  voisins de  $x$ 
8:   renvoyer la classe  $c$  la plus représentée parmi les  $k$  plus proches voisins

```

Pour détecter la classe majoritaire, il est possible d'utiliser les fonctionnalités de base de Python3, Numpy ou l'algorithme de BoyerMoore.

En cas d'égalité, plusieurs solutions sont possibles : prendre un voisin de plus ou bien tirer au sort la classe renvoyée. Certaines variantes de l'algorithme pondèrent le vote majoritaire à l'aide de la distance.

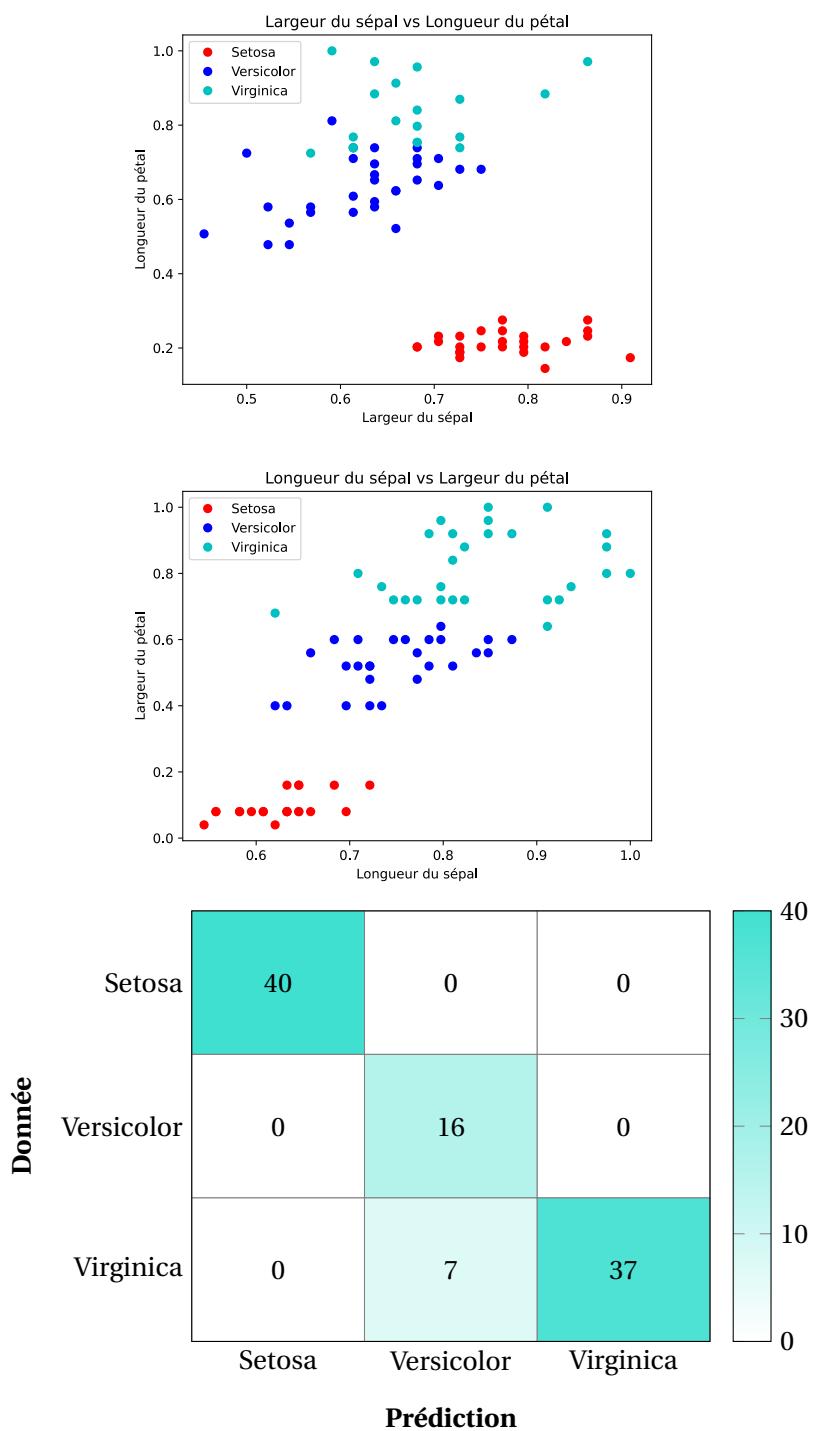


FIGURE 19.3 – Illustration de l'algorithme KNN appliqué à la distinction de trois variétés d'iris : Setosa, Versicolor et Virginica. Les paramètres d'entrées sont les largeurs et longueurs des pétales et sépals. Les figures représentent certains paramètres du jeu de données l'un en fonction de l'autre. Le résultat de l'algorithme se lit au travers des couleurs. Le résultat est correct dans plus de 90% des cas comme le montre la matrice de confusion.

C Apprentissage non supervisé : k moyennes



Vocabulary 25 — k-means \rightsquigarrow Algorithmes des k-moyennes

On ne dispose pas toujours d'un jeu de données étiquetées, c'est à dire des échantillons dont on connaît la classe. C'est pourquoi certaines algorithmes d'apprentissage automatique développent une approche non supervisée. L'absence d'échantillons de vérification fait qu'il est parfois plus difficile d'évaluer la performance de ces algorithmes.

On considère de nouveau un problème de **classification**. On suppose qu'on dispose d'un ensemble d'échantillons $\mathcal{E} = \{e_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i \in \mathbb{R}^d\}$. Il s'agit de créer une partition de \mathcal{E} selon k classes.

Algorithme 44 k moyennes (k-means)

```

1: Fonction KMEANS( $\mathcal{E}, k, \delta$ )
2:    $P \leftarrow \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$  une partition quelconque de  $\mathcal{E}$  en  $k$  classes
3:   tant que des échantillons changent de partition répéter
4:      $(b_1, b_2, \dots, b_k) \leftarrow \text{BARYCENTRE}(P_1, P_2, \dots, P_k)$ 
5:     pour chaque échantillon  $e$  de  $\mathcal{E}$  répéter
6:       Trouver l'ensemble  $P_i$  tel que  $d(e, m_i)$  soit minimale
7:       Ajouter  $e$  à la partition  $P_i$  trouvée
8:   renvoyer  $(P_1, P_2, \dots, P_k)$ 
```

La cœur de cet algorithme est la construction des partitions de l'ensemble du jeu de données. L'algorithme crée donc des catégories, autant qu'on lui en demande. Si l'utilisateur n'a pas d'idée précise du nombre de catégories à créer, il est nécessaire de tâtonner. Par ailleurs, le lien sémantique entre les données et le résultat est à la charge de l'utilisateur de l'algorithme : K-means se contente de créer des partitions, il ne leur attribue aucun sens particulier. On est loin de l'intelligence artificielle qui fait fantasmer les foules!



La fonction BARYCENTRE utilise la distance.



La condition de convergence (ligne 3 de l'algorithme 44) doit être adaptée selon la nature des données.



--> HORS PROGRAMME On peut démontrer que cet algorithme termine en considérant la fonction de coût $\sum_{i=1}^k \sum_{e \in \mathcal{E}} d(e, m_i)$. On peut montrer que cette fonction prend un nombre fini de valeur et qu'elle est strictement décroissante, à chaque tour de boucle.

Théorie des jeux

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ expliquer l'intérêt de la théorie des jeux
- ☒ expliquer le concept de jeu d'accessibilité
- ☒ coder le calcul des attracteurs
- ☒ expliquer la notion d'heuristique
- ☒ appliquer les algorithmes A* et minimax

La théorie des jeux a été initié par John Von Neumann pendant et après la seconde guerre mondiale. Dans un ouvrage resté célèbre[22], de nombreux problèmes très généraux sont abordés sous la perspective du jeu et de l'économie. Tout comme les algorithmes d'IA développés aujourd'hui, cette théorie s'inscrit dans l'objectif d'aider à la décision lorsque l'environnement est incertain, c'est à dire complexe et imprévisible. Elle fait intervenir des joueurs considérés comme des individus rationnels, des règles et des contextes d'évolution du jeu.

Le programme de classe préparatoire n'aborde que les jeux d'accessibilité à deux joueurs que l'on peut modéliser avec un graphe orienté biparti. Néanmoins, cela permet de lever le voile sur une théorie puissante et fascinante.

A Introduction à la théorie des jeux

■ **Définition 161 — Jeu.** Dans le cadre de cette théorie, on considère qu'un jeu est une activité humaine définie dans le cadre d'un contexte et dont les participants doivent suivre les règles énoncées et faire des choix pour gagner en s'opposant ou résoudre un problème ensemble. Cette activité nécessite des compétences intellectuelles, des savoirs et incorpore le hasard.

Les jeux ainsi définis englobent donc la plupart des activités humaines : l'économie, la guerre, l'étude du vivant ou même la physique peuvent être le cadre de jeux qui servent alors de modèles pour découvrir, établir des stratégies ou simuler une réalité.

■ **Définition 162 — Jeux coopératifs.** Un jeu coopératif permet la construction de coalitions entre joueurs. Cela suppose une concertation sur la stratégie à adopter et un engagement à coopérer.

■ **Définition 163 — Jeu à somme nulle.** Les jeux à somme nulle sont des jeux à deux joueurs pour lesquels les gains de l'un sont strictement les pertes de l'autre. Si on utilise une fonction de gain pour évaluer les perspectives de gain de chaque joueur, alors la somme des deux fonctions de gain est nulle.

■ **Exemple 50 — Jouer à somme nulle.** Parmi les jeux les plus connus à somme nulle, on trouve :

- les échecs,
- les jeux de carte comme la belote, le tarot ou le poker,
- shi-fu-mi.

(R) La plupart des situations de la vie quotidienne engendrent des jeux à somme non nulle. Par exemple, le commerce est un jeu à somme non nulle plutôt positive : un marchand de voiture est gagnant lors qu'il vend une voiture à un client et son gain n'est pas égal à l'inverse du crédit qu'a souscrit l'acheteur... Néanmoins, cela ne signifie pas qu'ils ont perdu pour autant, les situations commerciales peuvent être gagnant-gagnant : si vous avez faim, vous serez content d'acheter de la nourriture qu'un marchant voudra bien vous vendre.

■ **Définition 164 — Dilemme du prisonnier.** Le dilemme du prisonnier est un exemple fondamental^a de la théorie des jeux. Il a été formalisé par Tucker en 1950 [21] pour pointer une insuffisance de la théorie des jeux de l'époque : deux individus rationnels ne coopèrent pas nécessairement^b. Le principe est le suivant :

Deux membres d'un même gang criminel sont arrêtés et emprisonnés. Chaque prisonnier est mis à l'isolement : il ne peut pas communiquer avec l'autre. La police ne dispose pas de suffisamment de preuves pour les accuser formellement tous les deux et il est envisagé de les condamner à un an de prison tous les deux pour des charges moindre. Pour l'instant les deux prisonniers gardent le silence.

Néanmoins, la police propose à chaque prisonnier A et B un marché diabolique. En voici les termes :

1. Si A et B se dénoncent mutuellement, il seront condamnés à deux ans de prisons.
2. Si A trahit B et que B demeure silencieux, A sera libéré et B sera condamné à trois ans.
3. Symétriquement, si A demeure silencieux et que B le dénonce, alors A fera trois ans et

B sera libéré.

4. Enfin, si A et B demeurent silencieux, les deux feront un an de prison.

a. un paradigme

b. On trouve ici [1] une fabuleuse introduction à ce dilemme dans la série Voyages au pays des maths d'Arte.

À regarder absolument!

R Le dilemme du prisonnier illustre bien des situations (guerre commerciale par exemple) dans lesquelles les acteurs peuvent agir rationnellement, ne pas coopérer spontanément et perdre simultanément. L'incitation à tricher est naturellement au cœur du dilemme.

La répétition du jeu peut cependant amener à considérer d'autres stratégies : chaque joueur peut adapter son comportement par rapport à l'expérience passée et choisir de coopérer ou au contraire de se venger. Lorsque l'incitation à tricher est moins forte que les représailles potentielles, la coopération peut alors s'imposer et le jeu peut atteindre un équilibre de Nash.

■ **Définition 165 — Jeu séquentiel.** Un jeu séquentiel est un jeu au cours duquel les joueurs décident de leur stratégie les uns après les autres et peuvent donc tenir compte des actions des joueurs précédents.

■ **Définition 166 — Jeu à information parfaite.** Un jeu est à information parfaite si chaque joueur est parfaitement informé des actions passées des autres joueurs avant de prendre sa décision : aucune action du jeu n'a été cachée. On se rappelle de tous les coups joués précédemment. Un jeu à information parfaite est un jeu séquentiel.

■ **Définition 167 — Jeu à information complète.** Un jeu à information est à information complète si tous les joueurs ont une connaissance totale des données du jeu : règles, pièces, actions possibles, fonction de gain, objectifs des autres joueurs.

R Les jeux à information incomplète sont appelés jeux bayésiens. Dans ce cas, les joueurs n'ont pas une connaissance commune du jeu : chacun n'a qu'une vision partielle des données du jeu.

■ **Exemple 51 — Jouer à information (in)complète et (im)parfaite.** Aux échecs, s'il s'agit d'une partie d'échec classique, les joueurs évoluent dans un contexte d'information parfaite : chaque joueur a pu voir tous les coups joués précédemment au cours de la partie. De plus, les règles sont connues, toutes les pièces sont toutes visibles, le chronomètre aussi : alors l'information est complète également. Par contre, si une partie est pris en cours de route et que le joueur n'a pas connaissance des coups passés, l'information est imparfaite.

Les jeux de cartes comme le bridge ou le poker sont des jeux à information imparfaite la distribution est inconnue (aléatoire et personne n'en a connaissance puisque les cartes sont retournées lors de la distribution) et incomplète car on ne connaît pas la main des

adversaires lors du jeu.

Les aventuriers du rail est un exemple de jeu de plateau à information incomplète car on ne connaît pas les objectifs des autres joueurs mais parfaite car toutes les actions passées sont connues.

■ **Définition 168 — Arbre de jeu ou forme extensive.** La représentation d'un jeu séquentiel sous la forme d'un arbre est appelée forme extensive ou arbre de jeu.

Un exemple d'arbre de jeu pour une partie de morpion est donné sur la figure 20.1.

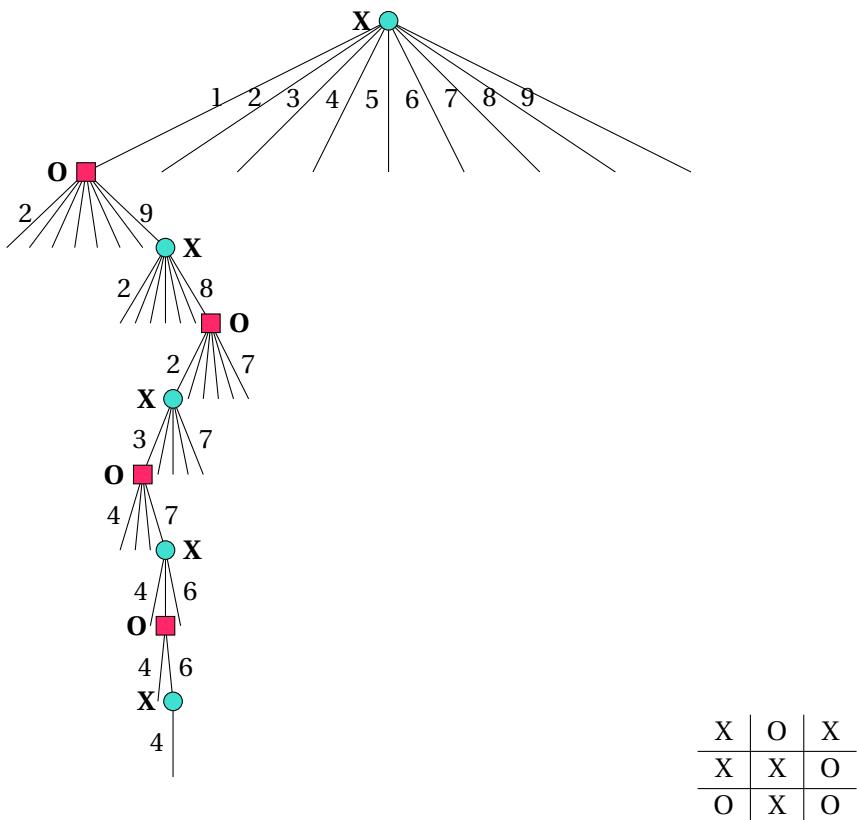


FIGURE 20.1 – Arbre de jeu d'une partie de morpion, partie nulle. On considère que les cases dont numérotées de 1 à 9 en ligne et en partant du haut. La position finale est donnée sous l'arbre.

La représentation arborescente est fondamentale pour la plupart des raisonnements sur les jeux et en général pour l'exploration d'un ensemble de possibilités.

B Jeux d'accessibilité, l'exemple des jeux de Nim

■ **Définition 169 — Jeu d'accessibilité.** Un jeu d'accessibilité est un jeu à deux joueurs, à information complète et parfaite, séquentiel et pour lequel il n'y a pas de hasard. Ces jeux peuvent être modélisés par un graphe orienté biparti.

■ **Définition 170 — Jeu de Nim.** Le jeu de Nim est un jeu d'accessibilité dont il existe de nombreuses variantes. Il s'agit de déplacer, de poser ou de retirer un certain nombre d'objets simples (pièces, allumettes, graines, des billes...). Le dernier à jouer gagne ou perd (variante misère). Le jeu de Nim fait donc nécessairement un perdant et un gagnant.

■ **Exemple 52 — Variantes du jeu de Nim.** Parmi les variantes les plus célèbres, on peut citer :

- le jeu de Marienbad (avec des cartes ou des allumettes)[11],
- le jeu des bâtonnets^a [10],
- le jeu de Grundy.

La figure 20.2 donne un exemple de jeu de Marienbad tel qu'il est présenté dans le film d'Alain Resnais. Chaque joueur peut retirer autant d'allumettes qu'il le veut sur une ligne seulement. Le perdant est celui qui retire la dernière allumette.

Ce jeu est modélisable par un graphe orienté comme l'indique la figure 20.3. Sur cette figure, on considère que les joueurs jouent alternativement en se déplaçant sur le graphe : un des joueurs est initialement sur la position start, quatre allumettes sont reparties sur deux rangées.

Une modélisation plus exacte peut se faire en utilisant un graphe biparti comme le montre la figure 20.4. Ces deux figures illustrent la même position de départ. Le graphe biparti distingue en couleur les sommets des joueurs. Sur ce graphe, on peut jouer tous les cas : le joueur rouge est le premier ou le joueur cyan est premier.

^a. type Fort Boyard

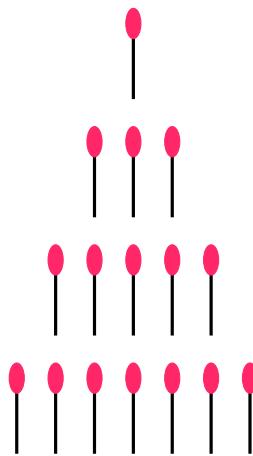


FIGURE 20.2 – Jeu de Marienbad avec des allumettes

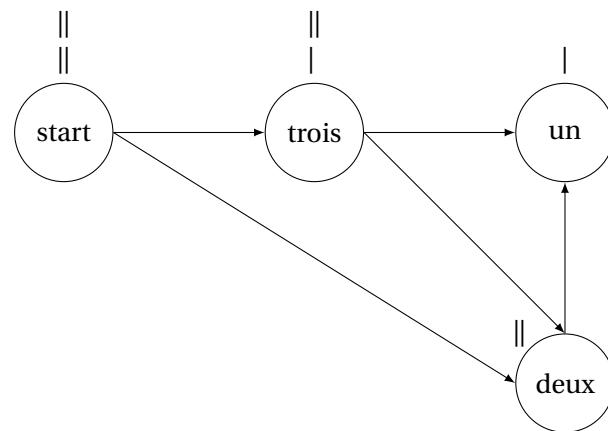


FIGURE 20.3 – Modélisation par graphe orienté d'une partie de jeu de Nim

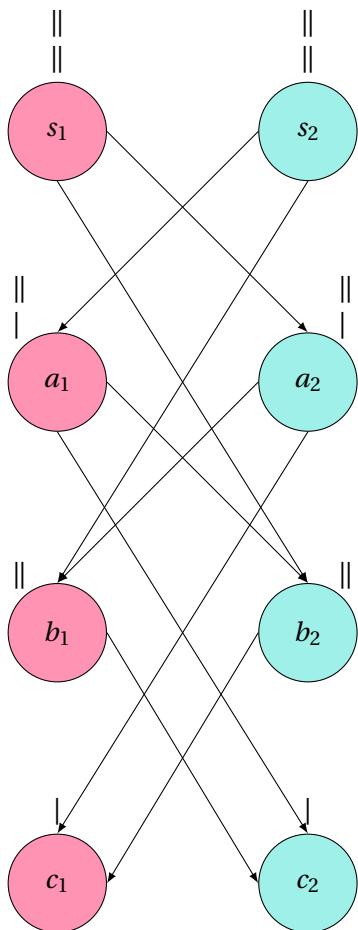


FIGURE 20.4 – Modélisation par graphe orienté biparti d'un jeu de Nim. Les joueurs sont distingués par les couleurs de ses sommets depuis lesquels il peut joueră.

C Modélisation d'un jeu d'accessibilité

■ **Définition 171 — Arène de jeu.** Le graphe $G = (V_1, V_2, E)$ est nommé arène de jeu si est biparti si $G = (V = V_1 \cup V_2, E)$ est un graphe orienté biparti et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Sur cette arène, le joueurs se répartissent dont les sommets : le joueur J_1 contrôle V_1 , le joueur J_2 V_2 .

■ **Définition 172 — Partie.** Une partie est un chemin sur l'arène de jeu : à chaque tour, le joueur J_1 en $v_i \in V_1$ choisit une arête de E dont le premier sommet est v_i et le second un sommet $v_j \in V_2$. J_2 choisit ensuite à partir de v_j le sommet suivant dans V_1 . Une partie en n coups s'écrit donc $(v_0, \dots, v_i, \dots, v_n)$.

■ **Définition 173 — Condition de gain.** Une condition de gain pour un joueur J_i sur une arène de jeu $G = (V, E)$ est un sous-ensemble C_i^g de V_i . La partie est remportée par le joueur J_i si celui-ci visite un sommet de C_i^g en premier.

■ **Définition 174 — Condition de victoire.** Une condition de victoire d'un joueur J_i est un sous-ensemble de toutes les parties possibles \mathcal{P} remportées par ce joueur. On la note :

$$C_i^\nu = \{\mathcal{P} : \mathcal{P} \text{ visite un sommet de } C_i^g\} \quad (20.1)$$

■ **Exemple 53 — Condition de gain et de victoire pour le jeu de Nim.** Pour le jeu de Nim de la figure 20.4, $C_1^g = \{c_1\}$ est une condition de gain pour J_1 . De plus, $C_1^\nu = \{(s_1, b_2, c_1), (s_1, a_2, c_1)\}$ est la condition de victoire de J_1 .

D Stratégies et positions

■ **Définition 175 — Stratégie sans mémoire.** Soit $G = (V, E)$ une arène de jeu. On note $V_i^{>0}$ l'ensemble des sommets contrôlés par le joueur $i \in \{1, 2\}$ de degré sortant non nul. Une stratégie est une application $\phi : V_i^{>0} \rightarrow V$ telle que :

$$\forall v \in V_i^{>0}, (v, \phi(v)) \in E \quad (20.2)$$

Cette stratégie est sans mémoire car elle ne dépend que du sommet courant et pas des sommets précédents de la partie.

R Une stratégie permet donc de calculer le coup à jouer. Le joueur J_i suit la stratégie ϕ lors d'une partie $\mathcal{P} = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ si $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, v_j \in V_i^{>0} \implies v_{j+1} = \phi(v_j)$

■ **Définition 176 — Stratégie gagnante.** Une stratégie ϕ est gagnante pour le joueur J_i depuis le sommet $v_0 \in V_i$ si toute partie jouée depuis v_0 par J_i en suivant ϕ est gagnante pour J_i .

■ **Définition 177 — Position gagnante.** Soit $G = (V = V_1 \cup V_2, E)$ un jeu d'accessibilité à deux joueurs. Un sommet $v \in V_i$ est appelé position gagnante pour le joueur J_i si celui-ci possède une stratégie gagnante depuis v .

■ **Exemple 54 — Position gagnante du jeu de Nim.** Sur le jeu de la figure 20.4, le sommet a_1 est une position gagnante pour J_1 . Reste à trouver la stratégie $\phi \dots$ Le sommet b_1 n'est pas une position gagnante pour J_1 .

E Attracteurs

Pour gagner une partie d'un jeu à deux joueurs, il semble donc logique de chercher les positions gagnantes et une stratégie associée. La notion d'attracteur a été développée pour construire l'ensemble des positions gagnantes.

■ **Définition 178 — Suite des ensembles attracteurs.** Soit $G = (V = V_1 \cup V_2, E)$ une arène d'un jeu d'accessibilité. On définit par induction la suite des attracteurs $(\mathcal{A}_j^1)_{j \in \mathbb{N}}$ du joueur J_1 , c'est à dire des ensembles des sommets de V à partir desquels le joueur J_1 peut forcer la partie à arriver en C_1^g , de la manière suivante :

$$\mathcal{A}_0^1 = C_1^g \quad \text{si } j = 0 \tag{20.3}$$

$$\mathcal{A}_{j+1}^1 = \mathcal{A}_j^1 \cup \{v \in V_1, \exists v' \in \mathcal{A}_j^1, (v, v') \in E\} \cup \{v \in V_2, \forall v' \in V, (v, v') \in E \Rightarrow v' \in \mathcal{A}_j^1\} \quad \forall j \geq 0 \tag{20.4}$$

$$(20.5)$$

Formulé simplement, le premier terme de cette suite est la condition de gain du joueur, c'est à dire les sommets qui lui donnent la victoire. Puis, le terme $j + 1$ de la suite est l'union :

- du terme \mathcal{A}_j^1 ,
- des sommets de V_1 qu'un arc peut mener à une position gagnante de \mathcal{A}_j^1 de V_2 ,
- des sommets de V_2 qui font obligatoirement aboutir à une position gagnante de V_1 .

■ **Définition 179 — Attracteur du joueur J_i .** L'attracteur du joueur i est l'ensemble des sommets d'une arène de jeu défini par :

$$\mathcal{A}^i = \bigcup_0^{+\infty} \mathcal{A}_j^i. \tag{20.6}$$

Théorème 17 — L'attracteur du joueur J_i contient exactement toutes les positions gagnantes de J_i .

Démonstration. On procède par récurrence sur le rang d'un sommet de G , une fonction $r : V \rightarrow \mathbb{N}$ définie comme suit :

$$\forall v \in V, r(v) = \min\{j, v \in \mathcal{A}_j^i\} \tag{20.7}$$

Pour un sommet n'appartenant pas à l'attracteur \mathcal{A} , le rang est infini. Cette définition est possible car la suite $(\mathcal{A}_j^1)_{j \in \mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion.

L'hypothèse de récurrence est la suivante : \mathcal{H}_j : Pour tout $j \in \mathbb{N}$, les sommets de rang j sont des positions gagnantes du joueur J_1 .

- Initialisation \mathcal{H}_0 : pour $j = 0$, $\mathcal{A}_0^1 = C_1^g$, donc tous les sommets de \mathcal{A}_0^1 sont des positions gagnantes.
- Héritage : on suppose que, pour un certain entier naturel j , l'ensemble \mathcal{A}_j^1 ne contient que des positions gagnantes de J_1 . Considérons maintenant un élément v de rang $j + 1$. Supposons de plus¹ que v n'appartient pas à \mathcal{A}_j^1 . Il reste alors deux possibilités :
 1. Si $v \in V_1$, alors par définition de l'ensemble, il existe un arc qui amène à une position gagnante. Donc, v est une position gagnante.
 2. Si $v \in V_2$, alors par définition de l'ensemble, tous les arcs de l'arène l'amènent vers une position gagnante. C'est donc une position gagnante.
- Conclusion : on peut donc conclure que les ensembles \mathcal{A}_j^1 ne contiennent que des positions gagnantes. L'attracteur \mathcal{A} ne possède donc que des positions gagnantes.

■

R On peut maintenant construire une stratégie **gagnante** : la stratégie sans mémoire ϕ qui, au fur et à mesure de la partie, fait diminuer le rang de la position courante, $\forall v_j \in \mathcal{A}_j^1 \cap V_1, v_{j+1} = \phi(v_j), r(v_{j+1}) < r(v_j)$ est gagnante. En effet, en choisissant de diminuer le rang de la position suivante, on se rapproche de la victoire.

F Algorithme de calcul de l'attracteur

Pour trouver l'attracteur d'un joueur, il faut parcourir l'arène de jeu en changeant l'orientation des arcs, c'est à dire en le transposant. Ainsi, en partant de la conditions de gain C_i^g et en remontant les arcs, on parvient à trouver \mathcal{A} .

1. sinon c'est trivial

Cinquième partie

Annexes

Bibliographie

Articles

- [2] Richard BELLMAN. "The theory of dynamic programming". In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 60.6 (1954), pages 503-515 (cf. page 163).
- [3] Richard BELLMAN. "On a routing problem". In : *Quarterly of applied mathematics* 16.1 (1958), pages 87-90 (cf. page 133).
- [4] E. W. DIJKSTRA. "A note on two problems in connexion with graphs". In : *Numerische Mathematik* 1.1 (1^{er} déc. 1959), pages 269-271. ISSN : 0945-3245. DOI : 10.1007/BF01386390. URL : <https://doi.org/10.1007/BF01386390> (visité le 27/07/2022) (cf. page 128).
- [6] Ronald A FISHER. "The use of multiple measurements in taxonomic problems". In : *Annals of eugenics* 7.2 (1936). Publisher : Wiley Online Library, pages 179-188 (cf. page 211).
- [8] Robert W FLOYD. "Algorithm 97 : shortest path". In : *Communications of the ACM* 5.6 (1962). Publisher : ACM New York, NY, USA, page 345 (cf. page 134).
- [12] Donald B JOHNSON. "Efficient algorithms for shortest paths in sparse networks". In : *Journal of the ACM (JACM)* 24.1 (1977). Publisher : ACM New York, NY, USA, pages 1-13 (cf. page 132).
- [14] Joseph B KRUSKAL. "On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem". In : *Proceedings of the American Mathematical society* 7.1 (1956). Publisher : JSTOR, pages 48-50 (cf. page 136).
- [15] Casimir KURATOWSKI. "Sur le probleme des courbes gauches en topologie". In : *Fundamenta mathematicae* 15.1 (1930), pages 271-283 (cf. page 103).
- [17] John MCCARTHY et al. "A proposal for the dartmouth summer research project on artificial intelligence, august 31, 1955". In : *AI magazine* 27.4 (2006), pages 12-12 (cf. page 205).
- [19] Robert Clay PRIM. "Shortest connection networks and some generalizations". In : *The Bell System Technical Journal* 36.6 (1957). Publisher : Nokia Bell Labs, pages 1389-1401 (cf. page 136).

- [20] Bernard ROY. "Transitivité et connexité". In : *Comptes Rendus Hebdomadaires Des Séances De L'Academie Des Sciences* 249.2 (1959). Publisher : GAUTHIER-VILLARS/EDITIONS ELSEVIER 23 RUE LINOIS, 75015 PARIS, FRANCE, pages 216-218 (cf. page 134).
- [21] Geoffrey TWEEDALE. "William Poundstone, Prisoner's Dilemma : John von Neumann, Game Theory, and the Puzzle of the Bomb. Oxford : Oxford University Press, 1992. Pp. xi+ 290. ISBN 0-19-286162-X.\pounds 7.99 (paperback edition)." In : *The British Journal for the History of Science* 26.3 (1993). Publisher : Cambridge University Press, pages 375-376 (cf. page 216).
- [23] Stephen WARSHALL. "A theorem on boolean matrices". In : *Journal of the ACM (JACM)* 9.1 (1962). Publisher : ACM New York, NY, USA, pages 11-12 (cf. page 134).

Livres

- [13] Luc JULIA. *L'intelligence artificielle n'existe pas*. First, 2019 (cf. page 205).
- [16] Édouard LUCAS. *Récréations mathématiques*. Tome 2. Gauthier-Villars et fils, 1883 (cf. page 111).
- [22] John VON NEUMANN et Oscar MORGENSTERN. *Theory of Games and Economic Behaviour*. Press, Princeton, 1944 (cf. page 215).

Vidéos

- [1] ARTE. *Le dilemme du prisonnier | Voyages au pays des maths | ARTE*. 9 oct. 2021. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=G9ER5bLxQEU> (visité le 23/08/2022) (cf. page 217).
- [10] FORT-BOYARD.FR. *Bâtonnets*. 5 juill. 2011. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=10CUpulWxww> (visité le 23/08/2022) (cf. page 219).
- [11] ITEMPRODUCTIONS. *Nim game from "last year at marienbad"*. 7 juill. 2010. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=8218FtL60g4> (visité le 23/08/2022) (cf. page 219).

Sites web