Sémantique et SAT

OPTION INFORMATIQUE - TP nº 2.2 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ représenter une valuation par un entier codé en binaire
- ☞ expliquer le problème SAT
- ☞ résoudre SAT par la force brute
- ☞ savoir simplifier une expression logique d'après les règles de simplification
- ☞ résoudre SAT par l'algorithme de Quine

A Évaluation de formules logiques

A1. Construire la table de vérité pour chaque formule ci-dessous. En déduire la nature des propositions.

(a) $F_1 = P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

(b) $F_2 = \neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$.

A2. Pour chaque formule ci-dessous, trouver par la table de vérité et par le calcul.

(a) la forme normale disjonctive de $F_2 = (P \vee \neg Q) \Rightarrow R$

(b) la forme normale conjonctive de $F_1 = (P \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow S)$

B Valuation d'une formule sous la forme d'un entier

On choisit de représenter les formules logiques comme dans le TD précédent mais en ajoutant le constructeur de l'implication :

```
type formule =
    | T (* true *)
    | F (* false *)
    | Var of int (* variable *)
    | Not of formule (* negation *)
    | And of formule * formule (* conjonction *)
    | Or  of formule * formule  (* disjonction *)
    | Imp of formule * formule (* implication *)
```

Soit une formule logique ϕ qui possède n variables propositionnelles. Chaque variable peut être vraie ou fausse et représentée par un bit à 0 pour F et 1 pour T. Une valuation de la formule logique peut donc être représentée par un nombre entier.

■ **Exemple 1 — Valuation et nombre binaire.** Soit $\phi = a \wedge b \vee c$. Cette formule comporte trois variables propositionnelles. a, b, c peuvent être vraies ou fausses. On attribue (arbitrairement) des numéros aux variables en commençant à zéro et en incrémentant de un : par exemple, $(a,0)$, $(b,1)$ et $(c,2)$. On peut alors représenter une valuation de ϕ par un nombre entier codé sur trois bits. Par exemple :

- $000_2 = 0_{10} \longrightarrow (c,b,a) = (F,F,F)$
- $001_2 = 1_{10} \longrightarrow (c,b,a) = (F,F,T)$
- $010_2 = 2_{10} \longrightarrow (c,b,a) = (F,T,F)$
- $100_2 = 4_{10} \longrightarrow (c,b,a) = (T,F,F)$
- $101_2 = 5_{10} \longrightarrow (c,b,a) = (T,F,T)$

Le bit de poids faible (0) représente la valuation de a, le second celle de b et le bit de poids fort celle de c. L'ensemble des valuations possibles peut donc être représenté par un ensemble d'entiers : $\{0,1,2,3,4,5,6,7\} = [\![0, 2^n - 1]\!]$.

Par la suite, on suppose que toutes les variables d'une formule logique sont indexées par un numéro et la numérotation commence à zéro. On dispose également de la fonction qui permet de calculer le numéro maximal attribué à une variable (`max_var` dans le TD précédent).

C SAT par la force brute

C3. Écrire une fonction de signature `get_var_k_from_v : int -> int -> bool` qui prend comme paramètre :

1. une valuation v sous la forme d'un entier
2. un entier k représentant le numéro d'une variable

et qui renvoie `true` si k est vraie dans la valuation v, `false` sinon. Pour cette fonction, on utilisera les fonctions OCaml : :

- `Int.logand` : ET bit à bit sur deux entiers. Par exemple, `Int.logand 5 2` renvoie 0 et `Int.logand 5 3` renvoie 1. En effet : 101_2 ET $010_2 = 000_2$ et 101_2 ET $011_2 = 001_2$.
- `Int.shift_left` : décalage à gauche d'un entier. Elle permet de rapidement calculer une puissance de deux. Par exemple : `Int.shift_left 1 3` vaut 8, car $1000_2 = 2^3 = 8$.

et la technique du masquage.

C4. Écrire une fonction de signature `evaluation : int -> formule -> bool` qui évalue une formule logique d'après une valuation donnée par un entier.

C5. Écrire une fonction de signature `brute_force_satisfiability : formule -> bool` qui statue sur la satisfaisabilité d'une formule logique en opérant par la force brute. Cette fonction prend comme paramètre une formule logique et renvoie :

- `true` si une valuation `v` satisfait la formule,
- `false` sinon

Toutes les valuations possibles sont testées, dès qu'une valuation qui satisfait la formule est trouvée, la fonction renvoie `true`. On procédera par récursivité en commençant par la valuation 0. La condition d'arrêt est qu'une valuation ne peut pas être plus grande que $2^n - 1$ si la formule possède n variables propositionnelles.

C6. Déduire de la fonction précédente une fonction de signature `opt_brute_force_satisfiability : formule -> int option` qui renvoie la valuation trouvée ou `None`, en utilisant un type optionnel.

C7. Tester la validité de la fonction précédente sur les formules :

- $f_1 : a \vee (b \wedge c)$
- $f_2 : (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg(c \vee a))$
- $f_3 : (\neg a \wedge b \vee d) \vee (c \wedge \neg(b \vee d))$
-
```
let f4 =
    let p1 = Var 0
    and p2 = Or (Var 1, Not(Var 2))
    and s1 = And(Not(Var 0), Not(Var 1))
    and s2 = Or (Var 1, And( Not (Var 0), Not (Var 2)))
    in let p = Or ( And (p1, p2), And(Not p1, Not p2) )
    and s = Or (And(s1, s2), And(Not s1, Not s2) )
    in And (p, s);;
```

C8. Construire une formule logique à trois variables propositionnelles insatisfaisable et le vérifier.

C9. Quelle est la complexité dans le pire des cas de l'algorithme de résolution de SAT par la force brute en fonction du nombre de variables propositionnelles ?

D Algorithme de Quine

a Règles de simplification de formules logiques après substitution

L'algorithme de Quine se fonde sur des simplifications de formules : lorsqu'une variable propositionnelle est remplacée par $\top$ ou $\bot$, on peut en déduire des simplifications par équivalence de formules logiques.

Pour les éléments de base $\top$ et $\bot$ aucune simplification n'est possible. Pour une variable propositionnelle, on en peut pas non plus simplifier davantage le constructeur `Var`. Par contre, grâce aux règles de simplication énoncées dans le cours, on peut programmer des constructeurs `not`, `and`, `or` et `imp` qui simplifient les expressions auxquels ils s'appliquent lorsque c'est possible. On appelle ces fonctions des constructeurs élégants [1].

Le point de départ de la programmation est la fonction suivante :

```
let rec simplify f =
  match f with
      | Var _ | T | F -> f  (* pas de simplifications possibles *)
      | Not f         -> s_not (simplify f)
      | And(f1, f2)   -> s_and (simplify f1) (simplify f2)
      | Or(f1, f2)    -> s_or  (simplify f1) (simplify f2)
      | Imp(f1, f2)   -> s_imp (simplify f1)  (simplify f2)
```

On cherche donc à écrire les fonctions `s_not`, `s_and`, `s_or` et `s_imp`.

D1. Écrire un constructeur élégant pour le constructeur `not` de signature `s_not : formule -> formule` qui construit la négation logique de la formule passée en paramètre en la simplifiant éventuellement.

1. smart constructors

D2. Écrire un constructeur élégant pour le constructeur `and` de signature
`s_and : formule -> formule -> formule` qui construit la conjonction de deux formules passées en paramètre en simplifiant éventuellement.

D3. Écrire un constructeur élégant pour le constructeur `or` de signature
`s_or : formule -> formule -> formule` qui construit la disjonction de deux formules passées en paramètre en simplifiant éventuellement.

D4. Écrire un constructeur élégant pour le constructeur `imp` de signature
`s_imp : formule -> formule -> formule` qui construit l'implication des deux formules passées en paramètre en simplifiant éventuellement.

b Programmation de l'algorithme

On se propose d'implémenter l'algorithme de Quine (cf. algorithme 1).

Algorithme 1 Algorithme Quine (SAT)

Fonction QUINE_SAT(f) ▷ f est une formule logique
  SIMPLIFIER(f)
  si $f \equiv \top$ **alors**
    renvoyer Vrai
  sinon si $f \equiv \bot$ **alors**
    renvoyer Faux
  sinon
    Choisir une variable x parmi les variables propositionnelles restantes de f
    renvoyer QUINE($f[x \leftarrow \top]$) || QUINE($f[x \leftarrow \bot]$)

D1. Écrire une fonction de signature `subst : int -> formule -> formule -> formule` qui substitue une variable `k` par une formule `r` dans une formule `f`. On l'utilisera ainsi : `subst 2 T f` si l'on veut substituer la variable numéro 2 par la formule $\top$ dans la formule f.

D2. Tester la fonction en remplaçant par exemple la variable de numéro 0 par $\top$ dans f_1.

D3. Tester la simplification de la formule f_1 dans le cas où la variable de numéro 0 a été remplacée par $\top$.

D4. Écrire une fonction de signature `quine_sat : formule -> bool` qui statue sur la satisfaisabilité d'une formule logique. Cette fonction prend en paramètre une formule logique et renvoie un booléen, vrai si la formule est satisfaisable, faux sinon.

D5. Tester la fonction sur f_1 et sur la formule suivante :

$$((p \Longrightarrow (q \vee r)) \wedge (s \Longrightarrow \neg r \vee t)) \Longrightarrow (p \Longrightarrow s)$$