Des expressions régulières aux automates

OPTION INFORMATIQUE - TP nº 4.2 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ coder la linéarisation d'une expressions régulière
- ☞ déterminer les composantes P,S et F relatives à une expression régulière linéaire
- ☞ coder l'algorithme de Berry-Sethi et trouver l'automate de Glushkov associé à une expression régulière

A Linéarisation d'une expression régulière

On souhaite réaliser la linéarisation d'une expression régulière dans le but d'implémenter l'algorithme de Berry-Sethi. On dispose du type `regexp` algébrique suivant :

```
type regexp =    EmptySet
               | Epsilon
               | Letter of char
               | Sum of  regexp * regexp
               | Concat of regexp * regexp
               | Kleene of regexp ;;
```

On se donne le type algébrique `lregexp` qui représente une expression régulière linéarisée :

```
type lregexp =
    Letter_ind of char * int
    | SumL of  lregexp * lregexp
    | ConcatL of lregexp * lregexp
    | KleeneL of lregexp ;;
```

Un littéral est donc codé par une lettre associée à un numéro qui code l'ordre d'apparition de la lettre dans l'expression régulière.

A1. Écrire une fonction récursive de signature
`linearize_and_count : regexp -> int -> lregexp * int`
qui linéarise une expression régulière. Le paramètre de type `int` est le compteur de variable : on l'incrémente à chaque fois qu'on découvre un littéral ou une occurrence d'un littéral. La fonction renvoie l'expression linéarisée ainsi que l'état du compteur de variable. On choisira des caractères arbitraires [1] pour l'ensemble vide et le mot vide. La fonction s'utilise ainsi :
`linearize_and_count e 1`
en initialisant le compteur à 1. Pour l'expression régulière $(a|b)^*c$, la fonction renvoie :

1. Par exemple `char_of_int 0xD8` et `char_of_int 0x80`

```
(ConcatL (KleeneL (SumL (Letter_ind ('a', 1), Letter_ind ('b', 2))),Letter_ind
    ('c', 3)),4)
```

Solution :

```
let rec linearize_and_count e counter =
    match e with
    | EmptySet -> Letter_ind(char_of_int 0xD8, counter), counter + 1
    | Epsilon -> Letter_ind(char_of_int 0x80, counter), counter + 1
    | Letter(a) -> Letter_ind(a, counter), counter + 1
    | Sum(e1,e2) -> let (e3,c) = linearize_and_count e1 counter in let (e4,
      c2) = linearize_and_count e2 c in SumL(e3,e4), c2
    | Concat(e1,e2) -> let (e3,c) = linearize_and_count e1 counter in let (
      e4,c2) = linearize_and_count e2 c in ConcatL(e3,e4), c2
    | Kleene(e) -> let (e1,c) = linearize_and_count e counter in KleeneL(e1)
      ,c
;;
```

A2. Proposer une fonction de signature `epsilon_is_in : lregexp -> bool` qui teste si une expression régulière linéarisée contient le mot vide.

Solution :

```
let rec epsilon_is_in e =
match e with
| SumL (e1,e2) -> epsilon_is_in e1 || epsilon_is_in e2
| ConcatL (e1,e2) -> epsilon_is_in e1 && epsilon_is_in e2
| KleeneL _ -> true
| Letter_ind (c,_) -> let eps = char_of_int 0x80 in eps = c ;;
```

A3. Écrire une fonction «wrapper» de signature `linearize : regexp -> lregexp` qui permette de ne récupérer que l'expression régulière linéarisée, sans le compteur.

Solution :

```
let linearize e = fst(linearize_and_count e 1);;
```

B Calcul des composantes P, S et F associées à un expression régulière

Toujours dans l'optique d'implémenter l'algorithme de Glushkov, on cherche maintenant à caractériser les ensembles P (préfixes à une lettre), S (suffixes à une lettre) et F (facteurs possibles de deux lettres) d'une expression régulière linéarisée.

B1. Pour les expressions régulières suivantes, trouver les ensembles P, S et F tels que définis dans le cours : $(a|b)^*c$ et $((a|b)^*c)|b$.

Solution : Pour $(a|b)^* c = (a_1|b_2)^* c_3$:

- $P = \{(a_1, b_2, c_3\}$,
- $S = \{c_3\}$,
- $F = \{a_1 a_1, a_1 b_2, b_2 a_1, b_2 b_2, a_1 c_3, b_2 c_3\}$.

Pour $((a|b)^* c)|b = ((a_1|b_2)^* c_3)|b_4$:

- $P = \{(a_1, b_2, c_3, b_4\}$,
- $S = \{c_3, b_4\}$,
- $F = \{a_1 a_1, a_1 b_2, b_2 a_1, b_2 b_2, a_1 c_3, b_2 c_3\}$.

B2. **Ensemble P.** Écrire une fonction récursive de signature
`first_letter_prefix : lregexp -> (char * int)list`
qui renvoie la liste des préfixes à une lettre d'une expression régulière linéarisée. Par exemple pour `(a|b)*c` linéarisée, la fonction renvoie `(char * int)list = [('a', 1); ('b', 2); ('c', 3)]`. On utilisera la concaténation de liste `@` et, si besoin, la fonction `epsilon_is_in`.

Solution :

```
let rec first_letter_prefix e =
       match e with
        | Letter_ind (a,i) -> [a,i]
        | SumL(e1, e2) -> (first_letter_prefix e1)@(first_letter_prefix e2)
        | ConcatL(e1, e2) when epsilon_is_in e1 ->
                  (first_letter_prefix e1)@(first_letter_prefix e2)
        | ConcatL(e1, _) -> first_letter_prefix e1
        | KleeneL(e) -> first_letter_prefix e
        ;;
```

B3. **Ensemble S.** Écrire une fonction récursive de signature
`last_letter_suffix : lregexp -> (char * int)list`
qui renvoie la liste des suffixes à une lettre d'une expression régulière linéarisée. Par exemple pour $(a|b)^* c$ linéarisée, la fonction renvoie `(char * int)list = [('c', 3)]`. On utilisera la concaténation de liste `@` et, si besoin, la fonction `epsilon_is_in`.

Solution :

```
let rec last_letter_suffix e =
    match e with
        | Letter_ind(a,i) -> [a,i]
        | SumL(e1, e2) -> (last_letter_suffix e1)@(last_letter_suffix e2)
        | ConcatL(e1, e2) when epsilon_is_in e2 ->
                      (last_letter_suffix e1)@(last_letter_suffix e2)
        | ConcatL(_, e2) -> last_letter_suffix e2
        | KleeneL(e) -> last_letter_suffix e
        ;;
```

B4. Écrire une fonction de signature
`cartesian_product : 'a list -> 'b list -> ('a * 'b)list`
qui renvoie le produit cartésien de deux listes d'entiers. Par exemple, `cartesian_product [1;3] [2;4;6;8]` renvoie `[(1, 2); (1, 4); (1, 6); (1, 8); (3, 2); (3, 4); (3, 6); (3, 8)]`.

Solution :

```
let cartesian_product set1 set2 =
    List.fold_left (fun acc e -> acc@ (List.map (fun e' -> (e,e')) set2)) []
        set1;;
```

B5. **Ensemble F.** Écrire une fonction récursive de signature `two_factors : lregexp -> ((char * int )* (char * int))list` qui renvoie les facteurs possibles de longueur 2 d'une expression régulière linéarisée. On utilisera la fonction `cartesian_product` et la concaténation de listes `@`.

Solution :

```
let rec two_factors e =
    match e with
        | Letter_ind(_,_) -> []
        | SumL(e1, e2) -> (two_factors e1)@(two_factors e2)
        | ConcatL(e1, e2) -> let l = (two_factors e1)@(two_factors e2)
        in l@(cartesian_product (last_letter_suffix e1) (first_letter_prefix
            e2))
        | KleeneL(e) -> (two_factors e)@(cartesian_product (
            last_letter_suffix e) (first_letter_prefix e))
        ;;
```

C Algorithme de Berry-Sethi

L'algorithme de Berry-Sethi permet d'obtenir l'automate de Glushkov qui n'est pas déterministe a priori. C'est pourquoi on choisit de modéliser l'automate comme suit :

```
type ndfsm ={ states : int list;
                alphabet : char list;
                initial : int list;
                transitions : (int * char * int) list;
                accepting : int list};;
```

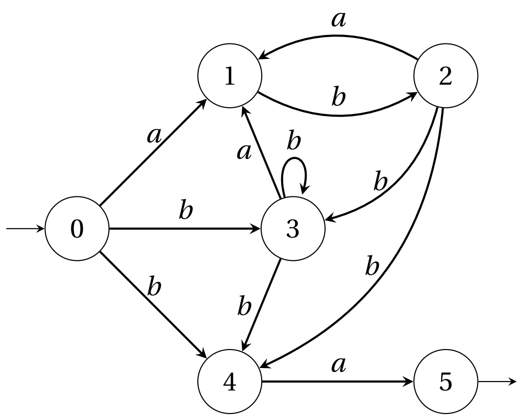
On choisit de représenter les états par un numéro. **Le zéro est l'état initial. Les états sont ensuite numérotés d'après l'indice des lettres de l'expression régulière linéarisée.** On s'appuie par ailleurs sur toutes les fonctions précédemment écrites.

C1. Linéariser à la main l'expression régulière $(ab|b)^*ba$ telle que l'effectue la fonction `linearize` déjà programmée.

Solution : $(a_1b_2|b_3)^*b_4a_5$

C2. Déterminer à la main l'automate de Glushkov associé à l'expression régulière $(ab|b)^* ba$.

Solution : cf. cours. C'est un automate local non déterministe.



C3. Écrire une fonction de signature `all_states : regexp -> int list` qui renvoie la liste de tous les états de l'automate de Glushkov associés à une expression régulière. On utilisera la fonction `linearize`. Par exemple, pour $(a|b)^* c$, cette fonction renvoie `[0; 1; 2; 3]`.

Solution :

```
let all_states e = let (_,c) = linearize_and_count e 1 in List.init c (fun i
    -> i);;
```

C4. Les états accepteurs de l'automate de Glushkov sont déterminés par l'ensemble S obtenu grâce à la fonction `last_letter_suffix`. Écrire une fonction de signature
`accepting_states : ('a * 'b)list -> 'b list`
qui prend comme paramètre un ensemble S lié à une expression régulière linéarisée et qui renvoie l'ensemble des états accepteurs de l'automate de Glushkov.

Solution :

```
let rec accepting_states s =
    match s with
        |[] -> []
        |(_,n)::t -> n::(accepting_states t);;
```

C5. Écrire une fonction récursive de signature `initial_transitions : ('a * 'b)list -> (int * 'a * 'b)list` dont le paramètre est un ensemble P et qui renvoie la liste des transitions depuis l'état initial de l'automate de Glushkov.

Solution :

```
let rec initial_transitions p =
```

```
    match p with
        |[] -> []
        |(c,n)::t -> (0,c,n)::(initial_transitions t);;
```

C6. Écrire une fonction récursive de signature `inner_transitions : (('a * 'b)* ('c * 'd))list -> ('b * 'c * 'd)list` dont le paramètre est un ensemble F et qui renvoie la liste des transitions internes de l'automate de Glushkov.

Solution :

```
let rec inner_transitions factors =
    match factors with
        |[] -> []
        |((_,n1),(c2,n2))::t -> (n1,c2,n2)::(inner_transitions t);;
```

C7. Écrire une fonction de signature `all_transitions : lregexp -> (int * char * int)list` qui renvoie la liste des transitions de l'automate de Glushkov.

Solution :

```
let all_transitions e =
    (initial_transitions (first_letter_prefix e)) @ (inner_transitions (
       two_factors e));;
```

C8. Écrire une fonction de signature `rm_dup : 'a list -> 'a list` qui élimine les doublons dans une liste.

Solution :

```
let rm_dup s = List.fold_left (fun acc x -> if List.mem x acc then acc else
    x :: acc) [] s;;
```

C9. Écrire une fonction de signature `get_alphabet_from_trans : ('a * 'b * 'c)list -> 'b list` qui renvoie l'alphabet de l'automate de Glushkov d'après ses transitions.

Solution :

```
let get_alphabet_from_trans trans =  rm_dup (List.map (fun (_,a,_) -> a)
    trans);;
```

C10. Écrire une fonction de signature `glushkov : regexp -> ndfsm` qui renvoie l'automate de Glushkov associé à une expression régulière.

Solution :

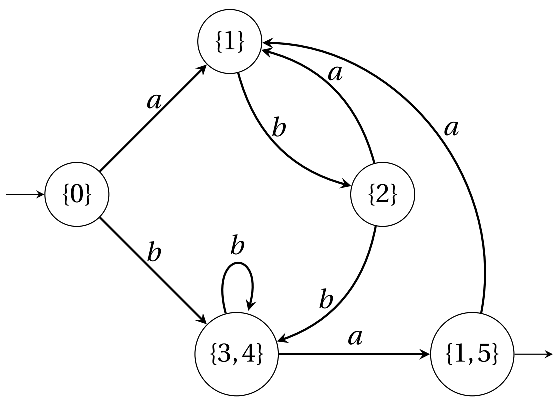
```
let glushkov rexp =
  let (e,c) = (linearize_and_count rexp 1) in
   let t = all_transitions e in
    { states = List.init c (fun i -> i);
        alphabet = get_alphabet_from_trans t;
        initial = [0] ;
        transitions = t;
        accepting = accepting_states (last_letter_suffix e) };;
```

C11. Déterminiser à la main l'automate de Glushkov obtenu grâce la fonction précédente à partir de l'expression régulière $(ab|b)^* ba$.

Solution :

	↓{0}	{1}	{2}	{3, 4}	↑{1, 5}
a	{1}		{1}	{1, 5}	
b	{3, 4}	{2}	{3, 4}	{3, 4}	{2}

ce qui se traduit par l'AFD :

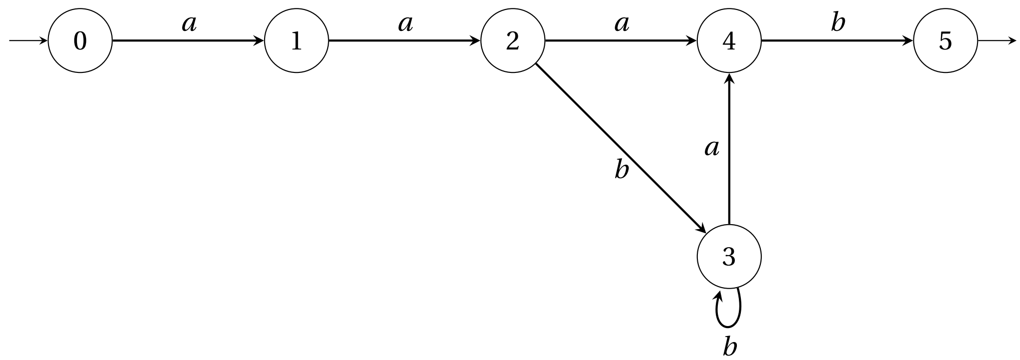


D Entraînement

D1. En utilisant l'algorithme de Berry-Sethi, trouver l'automate associé aux expressions régulières suivantes :

(a) $aab^* ab$

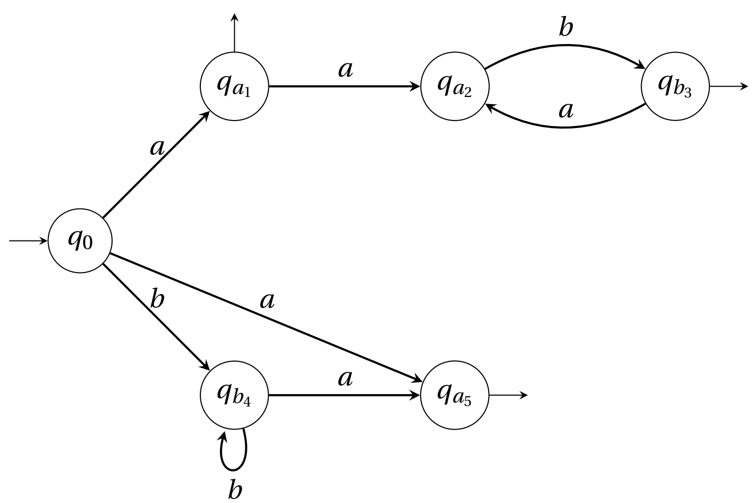
Solution :



(b) $a(ab)^*|b*a$

Solution :

1. Linéarisation : $a_1(a_2b_3)^*|b_4^*a_5$
2. Ensembles P,S, F :
   - $P = \{a_1, b_4, a_5\}$
   - $S = \{a_1, b_3, a_5\}$
   - $F = \{a_1a_2, a_2b_3, b_3a_2, b_4b_4, b_4a_5\}$
3. Automate = $(Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$:
   - $Q = \{q_0, q_{a_1}, q_{a_2}, q_{b_3}, q_{b_4}, q_{a_5}\}$
   - $F = \{q_{a_1}, q_{b_3}, q_{a_5}\}$



(c) $(b|ab)^*(\epsilon|ab)$

D2. En utilisant l'algorithme de Thompson, trouver l'automate associé aux expressions régulières suivantes :

(a) a^*b

(b) aab^*ab

(c) $(a|b)^* a^* b^*$

(d) $(b|ab)^* (\epsilon|ab)$

(e) $a(ab)^*|b^* a$

Solution : cf. cours : automates associés aux expressions régulières élémentaires et élimination des transitions spontanées. On doit retrouver le même qu'avec Berry-Sethi !