Automates finis non déterministes

OPTION INFORMATIQUE - TP n° 3.10 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ reconnaître un automate fini non déterministe (AFND)
- ☞ déterminiser un AFND
- ☞ expliquer comment éliminer les transitions spontanées

A Déterminisme?

Soient les automates décrits sur les figures 1, 2 et 3 sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

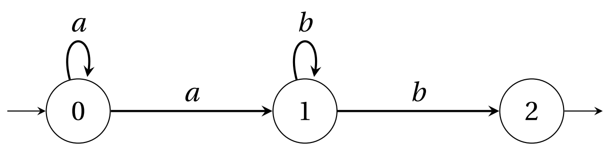


FIGURE 1 – $\mathcal{A}_1$

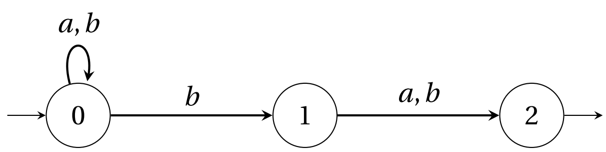


FIGURE 2 – $\mathcal{A}_2$

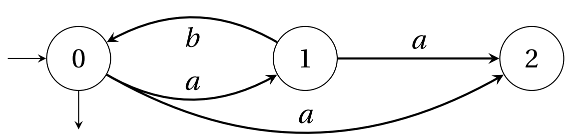


FIGURE 3 – $\mathcal{A}_3$

A1. Les automates $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$ sont-ils déterministes? Pourquoi?

A2. L'automate $\mathcal{A}_1$ reconnaît-il le mot aabbb? Construire l'arbre de l'exécution de cet automate pour ce mot, c'est-à-dire envisager tous les chemins d'exécution possibles.

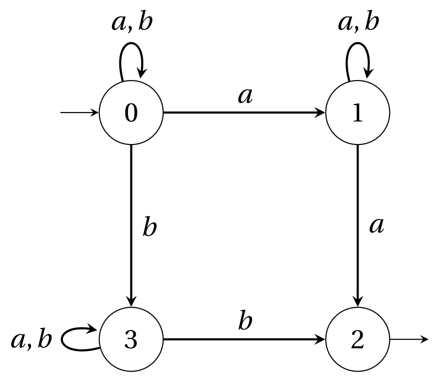
A3. Même question pour le mot bbbaa et l'automate $\mathcal{A}_2$.

A4. Même question pour le mot abab et l'automate $\mathcal{A}_3$.

A5. Décrire dans le langage naturel les langages reconnus par les automates $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$.

B Déterminisation d'un AFND

Soit l'automate $\mathcal{A}$ suivant :



B1. Pourquoi l'automate suivant est-il non déterministe ?

B2. Quel est le langage reconnu par cet automate ?

B3. Déterminiser l'automate fini non déterministe $\mathcal{A}$ suivant. On procédera en construisant le tableau des états de l'automate déterministe associé.

B4. Dessiner l'automate déterministe calculé précédemment.

C Modélisation d'un automate non déterministe en OCaml

On choisit de modéliser un automate fini non déterministe par un type algébrique de la manière suivante : les états sont représentés par des types `int`. Les lettres sont des types `char`. On représente les états par une `int list` et l'alphabet par une `char list`. On spécifie les états initiaux et accepteurs par une `int list`. Les transitions possibles forment une `(int * char * int)list`. Cette solution d'implémentation présente l'avantage de coller au plus prêt à la définition mathématique d'un automate.

```
type ndfsm ={ states : int list;
            alphabet : char list;
            initial : int list;
            transitions : (int * char * int) list;
            accepting : int list};;
```

C1. Créer une variable `automata` qui représente l'automate non déterministes $\mathcal{A}$ de la section B.

D Codage de l'algorithme de déterminisation

On souhaite implémenter l'algorithme de déterminisation d'un automate fini non déterministe. Pour cela, on choisit de représenter un élément de $\mathcal{P}(Q)$, l'ensemble des parties de Q, par une `int list`, c'est-à-dire une liste d'états. Si le nombre d'états de l'automate non déterministe est n, alors le cardinal de

$\mathcal{P}(Q)$ est 2^n. C'est pourquoi on choisit de coder chaque état par un nombre entre 0 et $2^n - 1$. Ce nombre est construit d'une manière univoque comme suit : chaque état de l'automate de départ est codé de 0 à $n-1$; chaque état associé à un élément de $\mathcal{P}(Q)$ est obtenu en effectuant la somme des puissances de 2 associées à un état. Par exemple, pour la partition `[0;2;3]` on aura $2^0 + 2^2 + 2^3 = 11 = 1011_2$: l'état correspondant de l'automate déterministe sera donc le numéro 11.

D1. Écrire une fonction de signature `get_partition_number_from_list : int list -> int` qui renvoie le numéro associé à un élément de $\mathcal{P}(Q)$, c'est-à-dire l'état de l'automate déterministe associé à un ensemble d'états de l'automate non déterministe. On utilisera la fonction `lsl` qui permet de calculer rapidement une puissance de 2. Par exemple, `1 lsl 3` calcule 2^3.

D2. Écrire une fonction de signature `successors : ndfsm -> int -> char -> int list` qui renvoie les états suivants possibles. L'automate est dans un certain état (`int`) et il reçoit une lettre (`char`), le tout est passé en paramètres.

D3. Écrire une fonction de signature
`successor_part : ndfsm -> int list -> char -> int list * int`
qui renvoie l'état suivant de l'automate déterministe ainsi que le numéro associé à cet état. Les paramètres sont l'automate, l'état courant (`int list`) et la lettre reçue.

Par exemple, l'appel `successor_part automata [0;1] 'a';;` renvoie
`- : int list * int = ([0; 1; 2], 7)` sur l'automate considéré précédemment. On pourra s'appuyer sur les fonctions auxiliaires suivantes :

- `uniq_insert : 'a -> 'a list -> 'a list` qui insère un élément dans une liste s'il n'y est pas,
- `merge : 'a list -> 'a list -> 'a list` qui fusionne deux listes sans créer de doublons,

D4. Écrire une fonction de signature `build_det_fsm : ndfsm -> ndfsm` qui renvoie l'automate déterministe associé à un automate non déterministe. Il s'agit de construire :

1. les états de l'automate déterministe associé,
2. les transitions de cet automate,
3. d'en déduire l'état initial et les états accepteurs.

Pour la procédure, on utilisera une file d'attente (bibliothèque Queue) : cette file est initialisée avec l'état initiale de l'automate déterministe. À chaque itération, on défile (`pop`) un élément et on enfile (`push`) les nouveaux états découverts. La procédure s'arrête lorsque la file est vide. On a alors trouvé tous les états de l'automate et toutes les transitions de l'automate déterministe.

Pour mémoriser les partitions déjà rencontrées, on utilisera une table de hachage de la bibliothèque `Hashtbl`. Les clefs de cette table seront les numéros associés aux états de l'automate déterministe et la valeur associée à une clef sera la liste des états de l'automate non déterministe associée à cette partie de `Q`.

Pour savoir si un état est un état accepteur, on pourra utiliser la fonction `land` qui calcule le ET bit à bit entre deux nombres entiers.

Pour l'automate non déterministe considéré à la section précédente, on obtient :

```
{ states = [15; 13; 11; 7; 9; 3; 1];
    alphabet = ['a'; 'b'];
    initial = [1];
    transitions = [(15, 'b', 15); (15, 'a', 15);
                  (13, 'b', 13); (13, 'a', 11);
                  (11, 'b', 15); (11, 'a', 15);
                  (7, 'b', 11); (7, 'a', 7);
```

```
                    (9, 'b', 13); (9, 'a', 11);
                    (3, 'b', 11); (3, 'a', 7);
                    (1, 'b', 9); (1, 'a', 3)];
        accepting = [15; 13; 7]}
```

D5. Écrire une fonction qui permet de savoir si un mot est reconnu par l'automate déterministe ainsi généré.

D6. Proposer un algorithme permettant de savoir si un automate est déterministe.