

# Jeux d'accessibilité

INFORMATIQUE COMMUNE - TP n° 3.7 - Olivier Reynet

## À la fin de ce chapitre, je sais :

- ✎ coder le calcul de attracteur pour un jeu d'accessibilité
- ✎ appliquer l'algorithme Minimax sur un jeu simple

## A Jeu de la soustraction

Le jeu de la soustraction est un jeu à deux joueurs. Devant eux se trouvent  $N$  bâtonnets<sup>1</sup>. Les joueurs jouent l'un après l'autre et ont le droit de retirer un, deux ou trois bâtonnets. Le gagnant est celui qui tire le dernier<sup>2</sup> bâtonnet.

- A1. Le jeu de la soustraction est-il un jeu d'accessibilité? Pourquoi?
- A2. Jouer avec votre voisin en prenant sept bâtonnets.
- A3. Combien de positions possibles existe-t-il pour cette partie à sept bâtonnets?
- A4. Construire sur le papier l'arène de ce jeu. On choisit la convention suivante : les sommets contrôlés par le premier joueur sont numérotés de 0 à  $n$ , ceux du second joueur de  $n + 1$  à  $2n + 1$ .
- A5. Calculer à la main l'attracteur du premier joueur et le reporter sur la figure précédente.
- A6. Que fait le code suivant?

```
1 def mystery_code(n):
2     size = n + 1
3     a = [[] for _ in range(2 * size)]
4     for i in range(size):
5         for j in range(1, 4):
6             if i - j >= 0:
7                 a[i].append(size + i - j)
8                 a[i + size].append(i - j)
9     return a
```

Un indice : pour  $n = 7$ , cette fonction renvoie :

```
1 [[], [8], [9, 8], [10, 9, 8], [11, 10, 9], [12, 11, 10], [13, 12, 11], [14, 13,
    12], [], [0], [1, 0], [2, 1, 0], [3, 2, 1], [4, 3, 2], [5, 4, 3], [6, 5, 4]]
```

- A7. Écrire une fonction Python qui renvoie le transposé d'un graphe orienté, c'est à dire le graphe dont tous les arcs sont inversés. Cette fonction aura pour prototype `g_transpose(g)` où `g` est un graphe sous la forme d'une liste d'adjacence. Elle renvoie un graphe sous la forme d'une liste d'adjacence. Par exemple, pour l'arène du jeu à sept bâtonnets, elle renvoie :

- 1. On peut y jouer avec des pièces, des stylos ou des allumettes...
- 2. La variante misère en fait le perdant.

```

1  [[9, 10, 11], [10, 11, 12], [11, 12, 13], [12, 13, 14], [13, 14, 15], [14, 15],
    [15], [], [1, 2, 3], [2, 3, 4], [3, 4, 5], [4, 5, 6], [5, 6, 7], [6, 7],
    [7], []]

```

A8. Écrire une fonction Python qui calcule le degré entrant d'un graphe. Cette fonction est de prototype `in_degrees(g)` et renvoie une liste d'entiers. Le degré du sommet 0 est à l'indice 0 de cette liste... Par exemple, pour l'arène du jeu à sept bâtonnets transposée, elle renvoie :

```

1  [0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3]

```

Pour trouver l'attracteur d'un joueur, il faut parcourir l'arène de jeu en inversant les arcs, c'est à dire en transposant le graphe. Ainsi, en partant de la conditions de gain  $C_g$  et en remontant les arcs, on parvient à trouver  $\mathcal{A}$ . On rappelle les détails de la procédure sur l'algorithme 1.

---

#### Algorithme 1 Calcul de l'attracteur d'un joueur

---

**Entrée :**  $g$  le graphe biparti de l'arène de jeu

**Entrée :**  $V$  l'ensemble de sommets du joueur

**Entrée :**  $C_g$  la condition de gain du joueur

```

1: Fonction ATTRACTEUR( $g, V, C_g$ )
2:    $\mathcal{A} \leftarrow \emptyset$  ▷ l'attracteur
3:    $g^t \leftarrow$  le transposé du graphe  $g$  ▷ Pour remonter le graphe
4:    $d_{in} \leftarrow$  tableau des degrés entrants du graphe transposé ▷ Pour compter ce qui entre
5:   pour chaque sommet  $v \in C_g$  répéter ▷ On part de la condition de gain
6:     AUGMENTER_ATTRACTEUR( $v, \mathcal{A}, g^t, d_{in}, V$ )
7:   renvoyer  $\mathcal{A}$ 
8: Fonction AUGMENTER_ATTRACTEUR( $v, \mathcal{A}, g^t, d_{in}, V$ )
9:   si  $v \notin \mathcal{A}$  alors
10:     $\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A} \cup \{v\}$ 
11:    pour chaque voisin  $u$  de  $v$  répéter ▷ Pour remonter le graphe
12:       $d_{in}[u] \leftarrow d_{in}[u] - 1$  ▷ On passe par ce sommet une fois depuis  $\mathcal{A}$ 
13:      si  $u \in V$  ou  $d_{in}[u] = 0$  alors ▷ Soit  $u \in V$  soit tous ses arcs entrant viennent de  $\mathcal{A}$ 
14:        AUGMENTER_ATTRACTEUR( $u, \mathcal{A}, g^t, d_{in}, V$ )

```

---

A9. Coder une fonction qui calcule l'attracteur d'un joueur. Elle aura pour prototype `attractor(a, cg)` où  $a$  est l'arène du jeu et  $cg$  la condition de gain d'un joueur. On implémentera les ensembles de sommets (attracteur, condition de gain ou l'ensemble des sommets appartenant à un joueur) par des type `set`.

A10. Tester sur les jeux de la soustraction de dimension 5, 7, 13, 15 et 20.

A11. Coder une fonction qui donne la stratégie gagnante, c'est à dire le prochain sommet dans l'attracteur ou bien None s'il n'y a pas de solution. Son prototype est

```

next_in_attractor(a, att, p)

```

où  $a$  est l'arène de jeu,  $att$  l'attracteur du joueur et  $p$  est la position sur l'arène. On remarquera que la position appartient forcément à un joueur et il faut donc fournir l'attracteur qui correspond à ce joueur.

A12. Coder un script pour jouer contre l'ordinateur.

0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5	0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	6	7	8	9	10	11	6	7	8	X	X	X
12	13	14	15	16	17	12	13	14	15	16	17	12	13	14	X	X	X

FIGURE 1 – Tablettes de chocolat et jeu de Chomp : après avoir pris le carré numéro 9, le joueur a mangé tous les X.

## B Minimax et chocolat

Le jeu de Chomp est le jeu des amateurs de chocolat et de roulette russe. Deux gourmets se partagent une tablette de chocolat rectangulaire prédécoupée en  $N \times M$  carrés. L'un après l'autre, chaque joueur désigne un carré et la mange ainsi que tous les carrés se trouvant à droite et au dessous de ce carré. Le carré de chocolat situé en haut et à gauche est en or (ou empoisonné<sup>3</sup>). Le joueur qui prend le dernier carré de chocolat a gagné (ou perdu). Pour la suite de ce TP, on choisit la version misère avec le carré empoisonné, c'est plus fun.

B1. Le jeu de Chomp est-il un jeu d'accessibilité? Pourquoi?

On implémente une tablette de chocolat par un type `set`. Pour créer un type `set` on utilise le constructeur `set()` ou bien `{}`. Ces structures sont mutables et non ordonnées.

Chaque carré de chocolat est un tuple à deux éléments  $(i, j)$  représentant la ligne  $i$  et la colonne  $j$  d'un carré de chocolat.

B2. Écrire une fonction de prototype `make_tab(n, m)` qui renvoie l'ensemble de tous les carrés de chocolat d'une tablette de taille  $n$  par  $m$ . Par exemple, pour  $n=3$  et  $m=6$ , la fonction renvoie :

```
{(0, 1), (1, 2), (0, 0), (1, 1), (0, 2), (1, 0)}
```

B3. Montrer que pour  $m = 1$  et  $n \geq 2$  ou  $n = 1$  et  $m \geq 2$ , il existe une stratégie gagnante pour le premier joueur.

B4. Montrer que pour  $m = n \geq 2$ , c'est à dire une tablette carrée, il existe une stratégie gagnante pour le premier joueur.

B5. Écrire une fonction de prototype `eatset(tab, i, j)` qui renvoie la nouvelle tablette après que le joueur a mangé le carré d'indice  $(i, j)$  comme expliqué sur la figure 1.

B6. Écrire une fonction de prototype `showtab(tab)` qui affiche une tablette de chocolat sur la console. Le caractère unicode "2588" permet de faire afficher un bloc rectangulaire noir. Par exemple, pour la tablette  $\{(0, 1), (0, 0), (1, 1), (0, 2), (1, 0)\}$ , la fonction affiche sur la console :

```

███
███
----> 5 squares

```

L'arène du jeu de Chomp n'est pas simple à concevoir car Lorsque  $N$  et  $M$  augmente le nombre de positions du jeu explose rapidement. On cherche donc à résoudre le problème différemment en utilisant l'approche Minimax dont on rappelle l'algorithme ci-dessous.

3. à votre convenance, le plaisir avant tout!

---

**Algorithme 2** Minimax

---

**Entrée :**  $p$  un position dans l'arbre de jeu (un nœu de l'arbre)**Entrée :**  $s$  la fonction de score sur les feuilles**Entrée :**  $\mathcal{H}$  l'heuristique de calcul du score pour un nœud interne**Entrée :**  $L$  la profondeur maximale de l'arbre Minimax

```

1: Fonction MINIMAX( $p, s, \mathcal{H}, L$ )
2:   si  $p$  est une feuille alors
3:     renvoyer  $s(p)$ 
4:   si  $L = 0$  alors
5:     renvoyer  $\mathcal{H}(p)$                                 ▷ On arrête d'explorer, on estime
6:   si  $p$  est contrôlé par  $J_{max}$  alors
7:      $M \leftarrow -\infty$ 
8:      $p_M$  un nœud vide
9:     pour chaque fils  $f$  de  $p$  répéter
10:       $v \leftarrow \text{MINIMAX}(f, s, \mathcal{H}, L - 1)$                 ▷  $v$  est un score de  $J_{min}$ 
11:      si  $v > M$  alors
12:         $M \leftarrow v$ 
13:         $p_M = f$ 
14:     renvoyer  $M, p_M$                                 ▷ Valeur maximale trouvée et la racine de cette solution
15:   sinon
16:      $m \leftarrow +\infty$ 
17:      $p_m$  un nœud vide
18:     pour chaque fils  $f$  de  $p$  répéter
19:       $v \leftarrow \text{MINIMAX}(f, s, \mathcal{H}, L - 1)$                 ▷  $v$  est un score de  $J_{max}$ 
20:      si  $v < m$  alors
21:         $m \leftarrow v$ 
22:         $p_m = f$ 
23:     renvoyer  $m, p_m$                                 ▷ Valeur minimale trouvée et la racine de cette solution

```

---

Pour des dimensions petites, l'arbre minimax peut être parcouru en entier. On fera donc abstraction de l'heuristique dans un premier temps : lorsque la profondeur de l'arbre maximale sera atteinte, on peut lever une exception, par exemple avec l'instruction `assert L<0, "Max depth reached!"` !.

- B7. Code une fonction `minimax(tab, L=5, player_is_max=True)`. Les paramètres sont `tab`, l'ensemble des carrés d'une tablette de chocolats, `L` la profondeur d'exploration de l'arbre maximale et `player_is_max` un booléen qui indique si c'est le premier joueur `max` qui joue. Cette fonction renvoie un tuple composé du score maximal atteignable et de la position correspondante qui conduit à ce score.
- B8. Pour une tablette de chocolat de 3x6, quelle est la profondeur minimale d'exploration qu'il faut choisir afin que l'ordinateur puisse gagner tout le temps?
- Il est possible de limiter la profondeur d'exploration grâce à la technique de l'élagage  $\alpha\beta$ . Dans le cas du jeu de Chomp, comme le score maximal est +1, il suffit d'observer que, dès qu'on a trouvé un score de 1 en parcourant les fils, on ne trouvera pas mieux. On fait la même observation pour le score minimal de -1.
- B9. Implémenter cette amélioration dans le code de la fonction `minimax`.
- B10. En utilisant la technique de mémorisation issue de la programmation dynamique, accélérer les calculs de l'algorithme précédent.
- B11. Afin de limiter la profondeur d'exploration nécessaire, proposer et implémenter une heuristique pour le jeu de Chomp.