Logique : syntaxe, sémantique et déduction naturelle

OPTION INFORMATIQUE - TP nº 4.6 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ réviser les concepts vus en première année
- ☞ appliquer la déduction naturelle sur des preuves simples

A Exercices

A1. Simplifier les expressions logiques suivantes. Vous pouvez notamment utiliser l'associativité de $\wedge$ et $\vee$, la distributivité entre $\wedge$ et $\vee$, les loi de De Morgan. Statuer sur le fait que l'expression est une tautologie, une antilogie ou simplement satisfaisable.

(a) $P_1 = a \Rightarrow (b \Rightarrow a)$

(b) $P_2 = \neg((p \vee q) \Rightarrow p) \wedge q$

(c) $P_3 = (b \vee a) \vee \neg(a \vee b)$

(d) $P_4 = (a \vee (b \Rightarrow c)) \Rightarrow (a \vee b \vee c)$

(e) $P_5 = (b \oplus a) \oplus \neg(a \oplus b)$ où $\oplus$ est le OU Exclusif

(f) $P_6 = a \downarrow (b \downarrow a)$ où $\downarrow$ est le symbole de la négation de la disjonction.

A2. Montrer que le système $\Sigma = \{\uparrow\}$ est un système de connecteurs complet, où $\uparrow$ est le symbole de la négation de la conjonction.

A3. Montrer qu'une formule logique peut toujours se mettre sous une forme normale disjonctive. En déduire, l'existence d'une forme normale conjonctive pour toute formule logique.

A4. Mettre sous forme normale conjonctive (FNC) et sous forme normale disjonctive (FND) les propositions logiques :

(a) $((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

(b) $((\neg p \vee q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \oplus r)$ où $\oplus$ est le ou exclusif.

A5. Soient n variables propositionnelles $v_1, v_2, \ldots, v_n$. On considère les propositions logiques :

$$P = ((v_1 \Longrightarrow v_2) \wedge (v_2 \Longrightarrow v_3) \wedge \ldots \wedge (v_{n-1} \Longrightarrow v_n)) \quad \text{et} \quad Q = (P \wedge (v_n \Longrightarrow v_1))$$

(a) Quelles sont les modèles de P ?

(b) En déduire une forme normale disjonctive pour P.

(c) Mêmes questions pour Q.

A6. Montrez de deux façons différentes que la formule $\phi : (p \Longrightarrow (q \vee r)) \wedge (p \Longrightarrow (q \vee \neg r)) \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$ est une tautologie.

B Extrait de CCMP 2005

Résumé des concepts de l'énoncé :

- On appelle littéral une variable booléenne ou sa négation, a ou $\neg a$.
- On appelle clause une disjonction de littéraux.
- On appelle longueur d'une clause le nombre des littéraux qui composent cette clause.
- On appelle formule logique sous forme normale conjonctive une conjonction de clauses.

Dans ce problème, on s'intéresse aux formules logiques sous forme normale conjonctive pour lesquelles toutes les clauses sont de longueur 2. On dit qu'une telle formule est sous forme NC2.

Lorsqu'on consière une formule logique, on suppose que les littéraux d'une même clause sont différents et que toutes les clauses sont différentes.

Une formule logique est dite satisfaisable s'il existe une façon d'attribuer des valeurs aux variables booléennes telle que la formule soit évaluée à vrai, c'est-à-dire il existe un modèlde de la formule.

B1. Étant données trois variables booléennes x, y et z, on considère la formule :

$$F_1 = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg z)$$

F_1 est-elle satisfaisable ? Justifier votre réponse.

B2. Étant données quatre variables booléennes x, y, z, t, on considère la formule :

$$F_2 = (x \vee y) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee \neg z) \wedge (t \vee \neg z) \wedge (y \vee \neg t) \wedge (x \vee \neg y)$$

F_2 est-elle satisfiable ? Justifier votre réponse.

Quatre personnes, nommées X,Y,Z et T peuvent être chacune soit fiable, soit non fiable : une personne fiable dit toujours la vérité ; une personne non fiable peut dire la vérité ou mentir. Chacune de ces personnes sait si les autres sont fiables ou non.

- X dit : Z est fiable.
- Y dit : Z est non fiable, T est fiable.
- Z dit : Y est fiable, T est fiable.
- T dit : X est non fiable, Y est fiable.

Par ailleurs, on sait que :

- X est fiable ou Y est fiable ou X et Y sont fiables.
- Z est fiable ou T est fiable ou Z et T sont fiables.

On définit quatre variables booléennes ; la variable booléenne x (resp. y, z, t) vaut vrai si X (resp. Y, Z, T) est fiable et faux si X (resp. Y, Z, T) n'est pas fiable.

B3. Exprimer, à l'aide des variables x, y, z, t et de leurs négations, sous forme NC 2 , les renseignements dont on dispose sur la fiabilité ou la non-fiabilité des quatre personnes X,Y,Z, et T.

B4. Déterminer les personnes fiables et les personnes non fiables. Prouver le résultat.