

Des expressions régulières aux automates

OPTION INFORMATIQUE - TP n° 4.2 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ✎ coder la linéarisation d'une expressions régulière
- ✎ déterminer les composantes P, S et F relatives à une expression régulière linéaire
- ✎ coder l'algorithme de Berry-Sethi et trouver l'automate de Glushkov associé à une expression régulière

A Linéarisation d'une expression régulière

On souhaite réaliser la linéarisation d'une expression régulière dans le but d'implémenter l'algorithme de Berry-Sethi. On dispose du type `regex` algébrique suivant :

```
type regex =  
  EmptySet  
  | Epsilon  
  | Letter of char  
  | Sum of regex * regex  
  | Concat of regex * regex  
  | Kleene of regex ;;
```

On se donne le type algébrique `lregex` qui représente une expression régulière linéarisée :

```
type lregex =  
  Letter_ind of char * int  
  | SumL of lregex * lregex  
  | ConcatL of lregex * lregex  
  | KleeneL of lregex ;;
```

Un littéral est donc codé par une lettre associée à un numéro qui code l'ordre d'apparition de la lettre dans l'expression régulière.

A1. Écrire une fonction récursive de signature

```
linearize_and_count : regex -> int -> lregex * int
```

qui linéarise une expression régulière. Le paramètre de type `int` est le compteur de variable : on l'incrémente à chaque fois qu'on découvre un littéral ou une occurrence d'un littéral. La fonction renvoie l'expression linéarisée ainsi que l'état du compteur de variable. On choisira des caractères arbitraires¹ pour l'ensemble vide et le mot vide. La fonction s'utilise ainsi :

```
linearize_and_count e 1
```

en initialisant le compteur à 1. Pour l'expression régulière $(a|b)^*c$, la fonction renvoie :

1. Par exemple `char_of_int 0xD8` et `char_of_int 0x80`

```
(ConcatL (KleeneL (SumL (Letter_ind ('a', 1), Letter_ind ('b', 2))), Letter_ind ('c', 3)), 4)
```

- A2. Proposer une fonction de signature `epsilon_is_in : lregex -> bool` qui teste si une expression régulière linéarisée contient le mot vide.
- A3. Écrire une fonction «wrapper» de signature `linearize : regex -> lregex` qui permette de ne récupérer que l'expression régulière linéarisée, sans le compteur.

B Calcul des composantes P, S et F associées à une expression régulière

Toujours dans l'optique d'implémenter l'algorithme de Glushkov, on cherche maintenant à caractériser les ensembles P (préfixes à une lettre), S (suffixes à une lettre) et F (facteurs possibles de deux lettres) d'une expression régulière linéarisée.

- B1. Pour les expressions régulières suivantes, trouver les ensembles P, S et F tels que définis dans le cours : $(a|b)^*c$ et $((a|b)^*c)|b$.
- B2. **Ensemble P.** Écrire une fonction récursive de signature
`first_letter_prefix : lregex -> (char * int)list`
 qui renvoie la liste des préfixes à une lettre d'une expression régulière linéarisée. Par exemple pour $(a|b)^*c$ linéarisée, la fonction renvoie `(char * int)list = [('a', 1); ('b', 2); ('c', 3)]`. On utilisera la concaténation de liste @ et, si besoin, la fonction `epsilon_is_in`.
- B3. **Ensemble S.** Écrire une fonction récursive de signature
`last_letter_suffix : lregex -> (char * int)list`
 qui renvoie la liste des suffixes à une lettre d'une expression régulière linéarisée. Par exemple pour $(a|b)^*c$ linéarisée, la fonction renvoie `(char * int)list = [('c', 3)]`. On utilisera la concaténation de liste @ et, si besoin, la fonction `epsilon_is_in`.
- B4. Écrire une fonction de signature
`cartesian_product : 'a list -> 'b list -> ('a * 'b)list`
 qui renvoie le produit cartésien de deux listes d'entiers. Par exemple, `cartesian_product [1;3] [2;4;6;8]` renvoie `[(1, 2); (1, 4); (1, 6); (1, 8); (3, 2); (3, 4); (3, 6); (3, 8)]`.
- B5. **Ensemble F.** Écrire une fonction récursive de signature `two_factors : lregex -> ((char * int) * (char * int))list` qui renvoie les facteurs possibles de longueur 2 d'une expression régulière linéarisée. On utilisera la fonction `cartesian_product` et la concaténation de listes @.

C Algorithme de Berry-Sethi

L'algorithme de Berry-Sethi permet d'obtenir l'automate de Glushkov qui n'est pas déterministe a priori. C'est pourquoi on choisit de modéliser l'automate comme suit :

```
type ndfsm = { states : int list;
               alphabet : char list;
               initial : int list;
               transitions : (int * char * int) list;
               accepting : int list};;
```

On choisit de représenter les états par un numéro. **Le zéro est l'état initial. Les états sont ensuite numérotés d'après l'indice des lettres de l'expression régulière linéarisée.** On s'appuie par ailleurs sur toutes les fonctions précédemment écrites.

- C1. Linéariser à la main l'expression régulière $(ab|b)^*ba$ telle que l'effectue la fonction `linearize` déjà programmée.
- C2. Déterminer à la main l'automate de Glushkov associé à l'expression régulière $(ab|b)^*ba$.
- C3. Écrire une fonction de signature `all_states : regexp -> int list` qui renvoie la liste de tous les états de l'automate de Glushkov associés à une expression régulière. On utilisera la fonction `linearize`. Par exemple, pour $(a|b)^*c$, cette fonction renvoie `[0; 1; 2; 3]`.
- C4. Les états accepteurs de l'automate de Glushkov sont déterminés par l'ensemble `S` obtenu grâce à la fonction `last_letter_suffix`. Écrire une fonction de signature `accepting_states : ('a * 'b)list -> 'b list` qui prend comme paramètre un ensemble `S` lié à une expression régulière linéarisée et qui renvoie l'ensemble des états accepteurs de l'automate de Glushkov.
- C5. Écrire une fonction récursive de signature `initial_transitions : ('a * 'b)list -> (int * 'a * 'b)list` dont le paramètre est un ensemble `P` et qui renvoie la liste des transitions depuis l'état initial de l'automate de Glushkov.
- C6. Écrire une fonction récursive de signature `inner_transitions : (('a * 'b)* ('c * 'd))list -> ('b * 'c * 'd)list` dont le paramètre est un ensemble `F` et qui renvoie la liste des transitions internes de l'automate de Glushkov.
- C7. Écrire une fonction de signature `all_transitions : lregexp -> (int * char * int)list` qui renvoie la liste des transitions de l'automate de Glushkov.
- C8. Écrire une fonction de signature `rm_dup : 'a list -> 'a list` qui élimine les doublons dans une liste.
- C9. Écrire une fonction de signature `get_alphabet_from_trans : ('a * 'b * 'c)list -> 'b list` qui renvoie l'alphabet de l'automate de Glushkov d'après ses transitions.
- C10. Écrire une fonction de signature `glushkov : regexp -> ndfsm` qui renvoie l'automate de Glushkov associé à une expression régulière.
- C11. Déterminer à la main l'automate de Glushkov obtenu grâce la fonction précédente à partir de l'expression régulière $(ab|b)^*ba$.

D Entraînement

- D1. En utilisant l'algorithme de Berry-Sethi, trouver l'automate associé aux expressions régulières suivantes :
 - (a) aab^*ab
 - (b) $a(ab)^*|b^*a$
 - (c) $(b|ab)^*(\epsilon|ab)$
- D2. En utilisant l'algorithme de Thompson, trouver l'automate associé aux expressions régulières suivantes :
 - (a) a^*b
 - (b) aab^*ab
 - (c) $(a|b)^*a^*b^*$
 - (d) $(b|ab)^*(\epsilon|ab)$
 - (e) $a(ab)^*|b^*a$