

RÉCURSIVITÉ

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ✎ expliquer le principe d'un algorithme récursif
- ✎ expliciter la condition d'arrêt d'un algorithme récursif
- ✎ faire des appels récursifs
- ✎ coder des algorithmes à récursivité simple et multiple en Python

A Principes de la programmation récursive

La récursivité, c'est la projection de l'induction mathématique dans le domaine de l'informatique. La plupart des langages contemporains sont récursifs, c'est-à-dire qu'ils permettent de programmer récursivement.

■ **Définition 1 — Algorithme récursif.** Un algorithme \mathcal{A} qui résout un problème \mathcal{P} est dit récursif si, où au cours de son exécution, il s'utilise lui-même pour résoudre le problème \mathcal{P} avec des données d'entrées différentes.

■ **Définition 2 — Appel récursifs d'une fonction.** On désigne par le terme appel récursif l'utilisation d'une fonction dans la définition de la fonction elle-même.

■ **Définition 3 — Pile d'exécution.** La pile d'exécution d'un processus est un emplacement mémoire destiné à mémoriser les appels de fonction, les paramètres, les variables locales ainsi que l'adresse de retour^a de chaque fonction en cours d'exécution.

^a. c'est-à-dire la case mémoire qui va contenir la valeur renvoyée par la fonction.

 **Vocabulary 1 — Call stack** ↔ Pile d'exécution

L'algorithme ?? est un algorithme récursif qui permet de calculer la fonction factorielle d'un entier naturel (cf. définition inductive ??). La ligne ?? contient l'appel récursif.

■ **Définition 4 — Factorielle, définie inductivement.** Comme on a défini l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} inductivement^a, la fonction factorielle peut être définie par :

Fact : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

(B) $\text{Fact}(0) = 1$,

(I) $\text{Fact}(n+1) = (n+1) \times \text{Fact}(n)$.

a. L'option informatique donne les bases théoriques de cette définition.

Algorithme 1 Factoriel récursif

```

1: Fonction FACT(n)
2:   si n = 0 alors                                     ▷ Condition d'arrêt
3:     renvoyer 1
4:   sinon
5:     renvoyer n × FACT(n-1)                             ▷ Appel récursif

```

À la lecture de cet algorithme, on peut être pris d'un vertige : cela va-t-il se terminer? Est-il possible de s'appeler soi-même pour résoudre un problème? Comment gérer en mémoire les appels successifs?

Pour calculer, cet algorithme procède comme suit : **il suspend momentanément le calcul du résultat de la fonction à la réception du résultat de l'appel récursif en empilant l'appel récursif sur la pile d'exécution**. La pile d'exécution est donc une zone mémoire essentielle qui garantit le bon déroulement des appels successifs des fonctions récursives ou non.

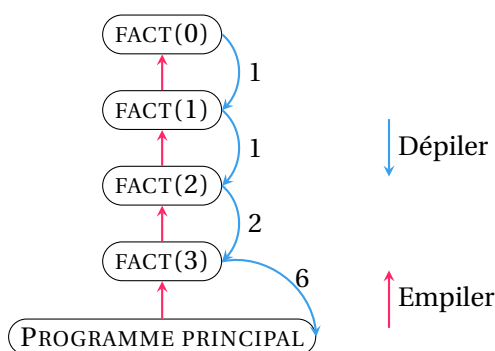
■ **Exemple 1 — Calculer $3!$ récursivement.** Dans le cas de $3!$, l'exécution se présente ainsi :

1. appel de $\text{FACT}(3)$ dont le résultat est suspendu au résultat de $\text{FACT}(2)$ (empilé),
2. appel de $\text{FACT}(2)$ dont le résultat est suspendu au résultat de $\text{FACT}(1)$ (empilé),
3. appel de $\text{FACT}(1)$ dont le résultat est suspendu au résultat de $\text{FACT}(0)$ (empilé),
4. $\text{FACT}(0)$ renvoie 1 (dépilé),
5. 1 est multiplié par 1, 1 est renvoyé par $\text{FACT}(1)$ (dépilé),
6. 1 est multiplié par 2, 2 est renvoyé par $\text{FACT}(2)$ (dépilé),
7. 2 est multiplié par 3 et 6 est renvoyé par $\text{FACT}(3)$ (dépilé).

La figure ?? illustre ce fonctionnement. Chaque appel récursif crée un contexte mémoire relatif à l'appel qui disparaît de la mémoire lorsque le résultat est renvoyé.

(R) Comme toute zone mémoire, la pile d'exécution est limitée, ce qui a des conséquences concrètes en programmation : on ne peut pas effectuer une infinité d'appels récursif. Une limite existe à la profondeur de la récursivité : la nature est têtue, notre monde physique demeure fini.

(R) La définition ?? ne garantit pas le bon fonctionnement d'un algorithme récursif. Pour qu'un algorithme récursif aboutisse correctement, il est nécessaire que le nombre d'appels ré-

FIGURE 1 – Vision de la pile d’exécution de l’algorithme factoriel récursif ?? pour le calcul de $3!$

cursifs soit fini. Dans le cas contraire, la pile d’exécution explose en mémoire : il n’y a plus assez de place pour la stocker et le système s’effondre.

M **Méthode 1 — Formuler correctement un algorithme récursif** Afin d’éviter les appels récursifs infinis, il est nécessaire d’être vigilant lors de l’écriture des algorithmes récursifs. Il faut :

1. distinguer au moins un cas sans appel récursif qui permet de terminer l’algorithme, c’est-à-dire **une condition d’arrêt**,
2. appeler récursivement avec des données **plus proches** des données qui satisfont la condition d’arrêt.

Dans le cas de l’algorithme ??, la condition d’arrêt est la ligne ?. Par ailleurs, on voit bien que l’appel récursif avec le paramètre $n - 1$ se rapproche de cette condition d’arrêt. La justification de ces affirmations repose sur l’induction et la notion d’ordre bien fondé (cf. option informatique).

B Types de récursivité

■ **Définition 5 — Récursivité simple.** La récursivité est dite simple si une exécution de l’algorithme aboutit à un seul appel récursif.

■ **Exemple 2 — Algorithmes simplement récursifs.** L’algorithme factoriel récursif ?? est une récursivité simple. Il est possible de formuler l’algorithme de recherche dichotomique récursivement (cf. algorithme ??). Cet algorithme est également de récursivité simple : chaque chemin d’exécution n’opère qu’un seul appel récursif.

■ **Définition 6 — Récursivité multiple.** La récursivité est dite multiple si une exécution de l’algorithme aboutit à plusieurs appels récursifs.

Algorithme 2 Recherche récursive d'un élément par dichotomie dans un tableau trié

```

1: Fonction REC_DICH(t, g, d, elem)
2:   si g > d alors                                     ▷ Condition d'arrêt
3:     renvoyer l'élément n'a pas été trouvé
4:   sinon
5:     m ← (g+d)//2                                         ▷ Diviser
6:     si t[m] = elem alors
7:       renvoyer m
8:     sinon si elem < t[m] alors
9:       REC_DICH(t, g, m-1, elem)                         ▷ résoudre
10:    sinon
11:      REC_DICH(t, m+1, d, elem)                           ▷ résoudre
  
```

■ **Exemple 3 — Algorithmes à récursivité multiple.** Les algorithmes calculant la suite de Fibonacci, la solution au jeu des tours d'Hanoi ou l'exemple ?? sont à récursivité multiples. L'algorithme ?? est à récursivité multiple car la fonction est appelée deux fois à la ligne sept.

Algorithme 3 Est-il mon aïeul?

```

1: Fonction EST_AÏEUL(p1, p2)
2:   si p1 est un des parents de p2 alors
3:     renvoyer Vrai
4:   sinon si p1 est plus jeune que p2 alors
5:     renvoyer Faux
6:   sinon
7:     renvoyer EST_AÏEUL(p1, mère(p2)) ou EST_AÏEUL(p1, père(p2))
  
```

■ **Définition 7 — Récursivité terminale** \rightarrow **Hors Programme** . Un algorithme est dit à récursivité terminale s'il renvoie directement le résultat de l'appel récursif sans opération supplémentaire. Cette propriété rend l'opération de dépilement de la pile d'exécution très efficace puisqu'on n'a pas à faire de calculs supplémentaires.

■ **Exemple 4 — Factoriel récursif terminal.** On peut transformer l'algorithme ?? pour qu'il présente une récursivité terminale (cf. ??)

Algorithme 4 Factoriel récursif terminal \rightarrow **HORS PROGRAMME**

```

1: Fonction FACT(n, acc)                                     ▷ on ajoute un accumulateur
2:   si n <= 1 alors                                         ▷ Condition d'arrêt
3:     renvoyer acc
4:   sinon
5:     renvoyer FACT(n-1, n × acc )                           ▷ Appel récursif avec accumulateur
  
```

C Du récursif à l'itératif --> HORS PROGRAMME

Dans la pratique, un algorithme est souvent énoncé récursivement car l'expression est plus puissante, plus intelligible et plus facile à trouver. Cependant, on convertit la plupart du temps l'algorithme récursif en itératif afin d'être plus performant : il s'agit à la fois d'éviter d'avoir à effectuer les appels récursifs successifs qui ralentissent souvent l'exécution sur les machines concrètes lorsque la récursivité n'est pas terminale et de dépasser la limite physique de la taille mémoire affectée à la pile.

P Lorsque la taille mémoire réservée à de la pile d'exécution est dépassée, Python interrompt l'exécution avec l'exception `RecursionError: maximum recursion depth exceeded`. Cela signifie qu'on ne peut plus stocker en mémoire les appels récursifs suspendus à l'exécution d'un autre.

M **Méthode 2 — Du récursif à l'itératif** La formulation d'un algorithme sous la forme d'un algorithme récursif **terminal** permet de facilement en déduire une version itérative. Le principe est expliqué par les algorithmes ?? et ??.

En appliquant la méthode décrite par ces algorithmes, on peut retrouver facilement la version itérative de factorielle (cf. algorithme ??).

Algorithme 5 Algorithme récursif terminal

```

1: Fonction REC_TERM(n)
2:   si ARRÊTER(n) alors
3:     renvoyer SOLUTION(n)
4:   sinon
5:     CALCULER_AVEC(n)
6:     renvoyer REC_TERM(MODIFIER(n))

```

Algorithme 6 Version itérative d'un algorithme récursif terminal

```

1: Fonction ITER(n)
2:   tant que non ARRÊTER(n) répéter
3:     CALCULER_AVEC(n)
4:     n ← MODIFIER(n)
5:   renvoyer SOLUTION(n)

```

R Programmer récursivement est une manière de penser très structurante. Elle repose sur le principe d'induction ^a. Les algorithmes proposés en TP permettent de développer cette compétence importante.

^a. principe très développé en option informatique

Algorithme 7 Factoriel itératif

```
1: Fonction FACT(n)
2:   acc  $\leftarrow$  1
3:   tant que n > 1 répéter
4:     acc  $\leftarrow$  n  $\times$  acc
5:     n  $\leftarrow$  n - 1
6:   renvoyer acc
```
