

Terminaison et correction

INFORMATIQUE COMMUNE - TP n° 2.1 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ✎ programmer les algorithmes donnés en exemples.
- ✎ prouver la terminaison d'un algorithme simple.
- ✎ prouver la correction d'un algorithme simple.

A Terminaison

A1. Prouver la terminaison de l'algorithme 1 puis le traduire en Python.

Algorithme 1 Palindrome

```
1: Fonction PALINDROME( $w$ )
2:    $n \leftarrow$  la taille de la chaîne de caractères  $w$ 
3:    $i \leftarrow 0$ 
4:    $j \leftarrow n - 1$ 
5:   tant que  $i < j$  répéter
6:     si  $w[i] = w[j]$  alors
7:        $i \leftarrow i + 1$ 
8:        $j \leftarrow j - 1$ 
9:     sinon
10:      renvoyer Faux
11:   renvoyer Vrai
```

A2. Prouver la terminaison de l'algorithme 2 puis le traduire en Python.

Algorithme 2 Est une puissance de deux

```
1: Fonction EST_PUISSANCE_DE_DEUX( $n$ )
2:   si  $n = 0$  alors
3:     renvoyer Faux
4:   sinon
5:      $m \leftarrow n \bmod 2$ 
6:     tant que  $m = 0$  répéter
7:        $n \leftarrow n // 2$ 
8:        $m \leftarrow n \bmod 2$ 
9:     renvoyer  $n = 1$ 
```

Algorithme 3 Somme des n premiers entiers

```
1: Fonction INT_SUM(n)
2:   si n=0 alors
3:     renvoyer 0
4:   sinon
5:     renvoyer n + INT_SUM(n-1)
```

A3. Prouver la terminaison de l'algorithme récursif 3 puis le traduire en Python.

A4. Prouver la terminaison de l'algorithme récursif 4.

Algorithme 4 Exponentiation rapide a^n

```
1: Fonction EXP_RAPIDE(a,n)
2:   si n = 0 alors                                     ▷ Condition d'arrêt
3:     renvoyer 1
4:   sinon si n est pair alors
5:     p ← EXP_RAPIDE(a, n//2)                             ▷ Appel récursif
6:     renvoyer p × p
7:   sinon
8:     p ← EXP_RAPIDE(a, (n-1)//2)                         ▷ Appel récursif
9:     renvoyer p × p × a
```

B Algorithme d'Euclide du PGCD

Algorithme 5 Algorithme d'Euclide (optimisé)

```

1: Fonction PGCD( $a, b$ )                                ▷ On suppose pour simplifier que  $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$  et  $b \leq a$ .
2:    $r \leftarrow a \bmod b$ 
3:   tant que  $r > 0$  répéter                             ▷ On connaît la réponse si  $r$  est nul.
4:      $a \leftarrow b$ 
5:      $b \leftarrow r$ 
6:      $r \leftarrow a \bmod b$ 
7:   renvoyer  $b$                                            ▷ Le pgcd est  $b$ 

```

On cherche à prouver la terminaison et la correction de l'algorithme d'Euclide 5. Dans ce but, on rappelle quelques éléments mathématiques importants.

Théorème 1 — Division euclidienne. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que les deux critères suivants sont vérifiés :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

Démonstration. 1. Existence : a et b étant donné, on pose $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$. Par définition de partie entière, on a : $0 \leq \frac{a}{b} - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor < 1$. En multipliant par b , on obtient : $0 \leq a - b \times \lfloor \frac{a}{b} \rfloor < b$. En choisissant donc $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ et $r = a - b \times \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$, on a bien :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

2. Unicité : supposons que l'on ait deux couples (q, r) et (q', r') appartenant à $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$: $a = bq + r = bq' + r'$ avec $0 \leq r < b$ et $0 \leq r' < b$. Cela peut également s'écrire : $b(q' - q) = r - r'$. Or, on a l'encadrement $-b < r - r' < b$. On en conclut que $-b < b(q' - q) < b$ et donc que $-1 < q' - q < 1$. Mais q et q' sont des entiers d'après nos hypothèses de départ. Donc, on en déduit de $q' - q = 0$. Il s'en suit que $q = q'$ et que $r = r'$. Il s'agit donc bien du même couple. ■

Théorème 2 — Existence du PGCD. Parmi tous les diviseurs communs de deux entiers a et b non nuls, il y en a un qui est le plus grand. Ce dernier est nommé plus grand commun diviseur de a et de b . On le note $\text{PGCD}(a, b)$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Tous les diviseurs de a sont bornés par $|a|$. On peut tenir le même raisonnement pour ceux de b . Donc, parmi les diviseurs de a et de b , il y en a donc un plus grand. ■

Théorème 3 — Propriété du PGCD. Soit a et b deux entiers.

1. Si $b = 0$, alors $\text{PGCD}(a, b) = a$.
2. Si $b \neq 0$, alors $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, a \bmod b)$.

Démonstration. Démonstration de l'égalité de l'ensemble \mathcal{D}_{ab} des diviseurs de a et de b et de l'ensemble \mathcal{D}_{br} des diviseurs de b et de r par double inclusion.

$\mathcal{D}_{ab} \subset \mathcal{D}_{br}$: La division euclidienne étant unique comme nous l'avons montré au théorème 1, il existe un entier q tel que $a = qb + r$. Ce qui peut s'écrire : $a - qb = r$. Si γ est un diviseur de a et de b , alors on peut écrire : $a - bq = \gamma a' + \gamma b' q = \gamma(a' - b' q) = r$. On a donc montré qu'un diviseur de a et de b est un diviseur de r .

$\mathcal{D}_{br} \subset \mathcal{D}_{ab}$: De même, si η est un diviseur de b et de r , alors on a : $a = bq + r = \eta(b'q + r')$, ce qui signifie que η est un diviseur de a .

Donc, $\mathcal{D}_{ab} = \mathcal{D}_{br}$. Ceci est vrai, y compris pour le plus grand des diviseurs de a et de b . ■

■ **Définition 1 — Suite des restes de la division euclidienne.** Soient a et b des entiers. On définit la suite des restes de la division euclidienne comme suit :

$$r_0 = |a| \quad (2)$$

$$r_1 = |b| \quad (3)$$

$$q_k = \lfloor r_{k-1} / r_k \rfloor, 1 \leq k \leq n \quad (4)$$

Alors on a :

$$r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1} \quad (5)$$

$$r_{k+1} = r_{k-1} \bmod r_k \quad (6)$$

Théorème 4 — Stricte décroissance de $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La suite des restes de la division euclidienne est positive, strictement décroissante et minorée par zéro.

- B1. Coder l'algorithme 5 en Python.
- B2. Grâce au théorème 3, coder une version récursive de l'algorithme du PGCD.
- B3. Donner une preuve du théorème 4.
- B4. Montrer que r est un variant de boucle pour l'algorithme d'Euclide.
- B5. Prouver la correction de l'algorithme d'Euclide.

C Correction d'algorithmes classiques

- C1. Prouver la correction partielle de l'algorithme 6 puis le traduire en Python en matérialisant l'invariant utilisé par des assertions.
- C2. Prouver la correction partielle de l'algorithme de tri par sélection 7
- C3. Prouver la correction de l'algorithme du tri par insertion 8.

Algorithme 6 Élément maximum d'un tableau

```

1: Fonction MAX( $t$ )
2:   si  $t$  est vide alors
3:     renvoyer  $\emptyset$ 
4:   sinon
5:      $n \leftarrow$  la taille du tableau
6:      $m = t[0]$ 
7:     pour  $i = 1$  à  $n - 1$  répéter
8:       si  $m < t[i]$  alors
9:          $m \leftarrow t[i]$ 
10:    renvoyer  $m$ 

```

Algorithme 7 Tri par sélection

```

1: Fonction GET_MIN_INDEX( $t, i$ )
2:    $n \leftarrow$  taille( $t$ )
3:    $\text{min\_index} \leftarrow i$ 
4:   pour  $j$  de  $i + 1$  à  $n - 1$  répéter
5:     si  $t[j] < t[\text{min\_index}]$  alors
6:        $\text{min\_index} \leftarrow j$ 
7:   renvoyer  $\text{min\_index}$ 
8: Fonction TRIER_SELECTION( $t$ )
9:    $n \leftarrow$  taille( $t$ )
10:   $\text{min\_index} \leftarrow$  GET_MIN_INDEX( $t, 0$ )
11:  échanger( $t, 0, \text{min\_index}$ )
12:  pour  $i$  de 1 à  $n - 1$  répéter
13:     $\text{min\_index} \leftarrow$  GET_MIN_INDEX( $t, i$ )
14:    échanger( $t, i, \text{min\_index}$ )

```

▷ Initialisation : le plus petit en tête

▷ indice du prochain plus petit

▷ c'est le plus grand des triés!

Algorithme 8 Tri par insertion

```

1: Fonction INSERTION( $t, i$ )
2:    $\text{à\_insérer} \leftarrow t[i]$ 
3:    $j \leftarrow i$ 
4:   tant que  $t[j-1] > \text{à\_insérer}$  et  $j > 0$  répéter
5:      $t[j] \leftarrow t[j-1]$ 
6:      $j \leftarrow j-1$ 
7:    $t[j] \leftarrow \text{à\_insérer}$ 
8: Fonction TRIER_INSERTION( $t$ )
9:    $n \leftarrow$  taille( $t$ )
10:  pour  $i$  de 1 à  $n-1$  répéter
11:    INSERTION( $t, i$ )

```

▷ faire monter les éléments

▷ insertion de l'élément
