

# Sémantique et SAT

OPTION INFORMATIQUE - TP n° 2.2 - Olivier Reynet

## À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ représenter une valuation par un entier codé en binaire
- ☞ expliquer le problème SAT
- ☞ résoudre SAT par la force brute
- ☞ savoir simplifier une expression logique d'après les règles de simplification
- ☞ résoudre SAT par l'algorithme de Quine

## A Évaluation de formules logiques

A1. Construire la table de vérité pour chaque formule ci-dessous. En déduire la nature des propositions.

(a)  $F_1 = P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$

Solution :	$P$	$Q$	$Q \Rightarrow P$	$F_1$	$F_1$ est donc une tautologie.
	0	0	1	1	
	0	1	1	1	
	1	0	0	1	
	1	1	1	1	

(b)  $F_2 = \neg P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ .

Solution :	$P$	$Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$F_2$	$F_2$ est donc une tautologie.
	0	0	1	1	1	
	0	1	1	1	1	
	1	0	0	0	1	
	1	1	0	1	1	

A2. Pour chaque formule ci-dessous, trouver par la table de vérité et par le calcul.

(a) la forme normale disjonctive de  $F_2 = (P \vee \neg Q) \Rightarrow R$

**Solution :** Par le calcul :

$$F_1 \equiv (P \vee \neg Q) \Rightarrow R$$

Transformation de l'implication (1)

$$\equiv \neg(P \vee \neg Q) \vee R$$

Loi de De Morgan (2)

$$\equiv (\neg P \wedge Q) \vee R$$

(3)

Par la table de vérité :

$P$	$Q$	$R$	$P \vee \neg Q$	$F_2$
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

Prendre les modèles, en faire la disjonction et simplifier en remarquant que  $r$  est facteur de toutes les combinaisons de  $P, Q, \neg P$  et  $\neg Q$ .

(b) la forme normale conjonctive de  $F_1 = (P \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow S)$ **Solution :** Par le calcul :

$$F_2 \equiv (P \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow S)$$

Transformation de l'implication (4)

$$\equiv \neg(P \wedge (Q \Rightarrow R)) \vee S$$

Loi de De Morgan (5)

$$\equiv (\neg P \vee \neg(Q \Rightarrow R)) \vee S$$

Transformation de l'implication (6)

$$\equiv (\neg P \vee \neg(\neg Q \vee R)) \vee S$$

Loi de De Morgan (7)

$$\equiv (\neg P \vee (Q \wedge \neg R)) \vee S$$

Distributivité (8)

$$\equiv ((\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg R)) \vee S$$

(9)

$$\equiv (\neg P \vee Q \vee S) \wedge (\neg P \vee \neg R \vee S)$$

(10)

Par la table de vérité :

$P$	$Q$	$R$	$S$	$Q \Rightarrow R$	$P \wedge (Q \Rightarrow R)$	$F_1$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

Pour trouver la FNC, on choisit les anti-modèles et on prend la négations des variables.

$$F_2 = (\neg P \vee Q \vee R \vee S) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R \vee S)$$



Les FND et les FNC ne sont pas uniques!

## B Valuation d'une formule sous la forme d'un entier

On choisit de représenter les formules logiques comme dans le TD précédent mais en ajoutant le constructeur de l'implication :

```
type formule =
| T (* true *)
| F (* false *)
| Var of int (* variable *)
| Not of formule (* negation *)
| And of formule * formule (* conjonction *)
| Or of formule * formule (* disjonction *)
| Imp of formule * formule (* implication *)
```

Soit une formule logique  $\phi$  qui possède  $n$  variables propositionnelles. Chaque variable peut être vraie ou fausse et représentée par un bit à 0 pour F et 1 pour T. Une valuation de la formule logique peut donc être représentée par un nombre entier.

■ **Exemple 1 — Valuation et nombre binaire.** Soit  $\phi = a \wedge b \vee c$ . Cette formule comporte trois variables propositionnelles.  $a, b, c$  peuvent être vraies ou fausses. On attribue (arbitrairement) des numéros aux variables en commençant à zéro et en incrémentant de un : par exemple,  $(a, 0)$ ,  $(b, 1)$  et  $(c, 2)$ . On peut alors représenter une valuation de  $\phi$  par un nombre entier codé sur trois bits. Par exemple :

- $000_2 = 0_{10} \longrightarrow (c, b, a) = (F, F, F)$
- $001_2 = 1_{10} \longrightarrow (c, b, a) = (F, F, T)$
- $010_2 = 2_{10} \longrightarrow (c, b, a) = (F, T, F)$
- $100_2 = 4_{10} \longrightarrow (c, b, a) = (T, F, F)$
- $101_2 = 5_{10} \longrightarrow (c, b, a) = (T, F, T)$

Le bit de poids faible (0) représente la valuation de  $a$ , le second celle de  $b$  et le bit de poids fort celle de  $c$ . L'ensemble des valuations possibles peut donc être représenté par un ensemble d'entiers :  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \llbracket 0, 2^n - 1 \rrbracket$ .

**Par la suite, on suppose que toutes les variables d'une formule logique sont indexées par un numéro et la numérotation commence à zéro.** On dispose également de la fonction qui permet de calculer le numéro maximal attribué à une variable (`max_var` dans le TD précédent).

## C SAT par la force brute

C3. Écrire une fonction de signature `get_var_k_from_v : int -> int -> bool` qui prend comme paramètre :

1. une valuation  $v$  sous la forme d'un entier
2. un entier  $k$  représentant le numéro d'une variable

et qui renvoie `true` si  $k$  est vraie dans la valuation  $v$ , `false` sinon. Pour cette fonction, on utilisera les fonctions OCaml :

- `Int.logand` : ET bit à bit sur deux entiers. Par exemple, `Int.logand 5 2` renvoie 0 et `Int.logand 5 3` renvoie 1. En effet :  $101_2$  ET  $010_2 = 000_2$  et  $101_2$  ET  $011_2 = 001_2$ .
- `Int.shift_left` : décalage à gauche d'un entier. Elle permet de rapidement calculer une puissance de deux. Par exemple : `Int.shift_left 1 3` vaut 8, car  $1000_2 = 2^3 = 8$ .

et la technique du masquage.

**Solution :**

```
let get_var_k_from_v v k = Int.logand v (Int.shift_left 1 k) != 0;;
```

C4. Écrire une fonction de signature `evaluation : int -> formule -> bool` qui évalue une formule logique d'après une valuation donnée par un entier.

**Solution :**

```
let rec evaluation v f =
  match f with
  | T -> true
  | F -> false
  | Var k -> get_var_k_from_v v k
  | Not p -> not (evaluation v p)
  | And (p, q) -> evaluation v p && evaluation v q
  | Or (p, q) -> evaluation v p || evaluation v q
  | Imp (p, q) -> not (evaluation v p) || (evaluation v q);;
```

C5. Écrire une fonction de signature `brute_force_satisfiability : formule -> bool` qui statue sur la satisfaisabilité d'une formule logique en opérant par la force brute. Cette fonction prend comme paramètre une formule logique et renvoie :

- `true` si une valuation  $v$  satisfait la formule,
- `false` sinon

**Toutes les valuations possibles sont testées, dès qu'une valuation qui satisfait la formule est trouvée, la fonction renvoie `true`.** On procédera par récursivité en commençant par la valuation 0. La condition d'arrêt est qu'une valuation ne peut pas être plus grande que  $2^n - 1$  si la formule possède  $n$  variables propositionnelles.

**Solution :**

```

let brute_force_satisfiability f =
  let n = nb_var f in
  (* n : nombre de variables propositionnelles de type int de 0 à n-1 *)
  let v_limit = Int.shift_left 1 n in
  (* v_limit = 2^n est la première valuation impossible *)
  let rec check_val valuation =
    match valuation with
    | v when v < v_limit -> if evaluation v f
                           then true
                           else check_val (v + 1)
    | _ -> false (* condition d'arrêt de la récursivité *)
  in check_val 0;;

```

C6. Dédurre de la fonction précédente une fonction de signature `opt_brute_force_satisfiability : formule -> int option` qui renvoie la valuation trouvée ou None, en utilisant un type optionnel.

**Solution :**

```

let opt_brute_force_satisfiability f =
  let n = nb_var f in
  (* n : nombre de variables propositionnelles de type int de 0 à n-1 *)
  let v_limit = Int.shift_left 1 n in
  (* v_limit = 2^n est la première valuation impossible *)
  let rec check_val valuation =
    match valuation with
    | v when v < v_limit -> if evaluation v f
                           then Some v
                           else check_val (v + 1)
    | _ -> None (* condition d'arrêt de la récursivité *)
  in check_val 0;;

```

C7. Tester la validité de la fonction précédente sur les formules :

- $f_1 : a \vee (b \wedge c)$
- $f_2 : (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg(c \vee a))$
- $f_3 : (\neg a \wedge b \vee d) \vee (c \wedge \neg(b \vee d))$
- ```

      let f4 =
        let p1 = Var 0
        and p2 = Or (Var 1, Not(Var 2))
        and s1 = And(Not(Var 0), Not(Var 1))
        and s2 = Or (Var 1, And( Not (Var 0), Not (Var 2)))
      in let p = Or ( And (p1, p2), And(Not p1, Not p2) )
      and s = Or (And(s1, s2), And(Not s1, Not s2) )
      in And (p, s);;
      
```

**Solution :**

```

let f1 = Or ((Var 0), And ((Var 1),(Var 2)));;
let f2 = Or (And ((Var 0),(Not (Var 1))), And ((Var 1), Not(Or ((Var 2),(Var 0))));;
let f3 = Or (Or (And (Not (Var 0) , (Var 1)), (Var 3)), And ((Var 2), Not(Or((Var 1), (Var 3))))) ;;
let f4 =
  let p1 = Var 0
  and p2 = Or (Var 1, Not(Var 2))
  and s1 = And(Not(Var 0), Not(Var 1))
  and s2 = Or (Var 1, And( Not (Var 0), Not (Var 2)))
  in let p = Or ( And (p1, p2), And(Not p1, Not p2) )
      and s = Or (And(s1, s2), And(Not s1, Not s2) )
  in And (p, s);;

brute_force_satisfiability f1;;
brute_force_satisfiability f2;;
brute_force_satisfiability f3;;
brute_force_satisfiability f4;;

```

C8. Construire une formule logique à trois variables propositionnelles insatisfaisable et le vérifier.

**Solution :**  $f_5 : (\neg a \wedge b \wedge c) \wedge (a \wedge \neg(b \vee c))$

```

let f5 = And (And (And (Not (Var 0) , (Var 1)), (Var 2)), And ((Var 0), Not (Or((Var 1), (Var 2))));;
brute_force_satisfiability f5;;

```

C9. Quelle est la complexité dans le pire des cas de l'algorithme de résolution de SAT par la force brute en fonction du nombre de variables propositionnelles?

**Solution :** Hors appels récursifs, la fonction `brute_force_satisfiability` n'exécute qu'un nombre fini d'opérations de complexité constante en  $O(1)$ . Dans le pire des cas, toutes les valuations possibles sont testées et donc  $2^n$  appels récursifs sont effectués. La complexité est donc exponentielle en  $O(2^n)$ .

Cet algorithme est équivalent à la réalisation d'une table de vérité pour la formule considérée.

## D Algorithme de Quine

### a Règles de simplification de formules logiques après substitution

L'algorithme de Quine se fonde sur des simplifications de formules : lorsqu'une variable propositionnelle est remplacée par  $\top$  ou  $\perp$ , on peut en déduire des simplifications par équivalence de formules logiques.

Pour les éléments de base  $\top$  et  $\perp$  aucune simplification n'est possible. Pour une variable propositionnelle, on en peut pas non plus simplifier davantage le constructeur `Var`. Par contre, grâce aux règles

de simplification énoncées dans le cours, on peut programmer des constructeurs **not**, **and**, **or** et **imp** qui simplifient les expressions auxquels ils s'appliquent lorsque c'est possible. On appelle ces fonctions des constructeurs élégants<sup>1</sup>.

Le point de départ de la programmation est la fonction suivante :

```
let rec simplify f =
  match f with
  | Var _ | T | F -> f (* pas de simplifications possibles *)
  | Not f         -> s_not (simplify f)
  | And(f1, f2)   -> s_and (simplify f1) (simplify f2)
  | Or(f1, f2)    -> s_or  (simplify f1) (simplify f2)
  | Imp(f1, f2)   -> s_imp (simplify f1) (simplify f2)
```

On cherche donc à écrire les fonctions `s_not`, `s_and`, `s_or` et `s_imp`.

- D1. Écrire un constructeur élégant pour le constructeur **not** de signature `s_not : formule -> formule` qui construit la négation logique de la formule passée en paramètre en la simplifiant éventuellement.

**Solution :**

```
let s_not f =
  match f with
  | F -> T
  | T -> F
  | _ -> Not f
```

- D2. Écrire un constructeur élégant pour le constructeur **and** de signature `s_and : formule -> formule -> formule` qui construit la conjonction de deux formules passées en paramètre en simplifiant éventuellement.

**Solution :**

```
let s_and f1 f2 =
  match (f1, f2) with
  | F, _ | _, F -> F
  | T, f | f, T -> f
  | _, _ -> And (f1, f2)
```

- D3. Écrire un constructeur élégant pour le constructeur **or** de signature `s_or : formule -> formule -> formule` qui construit la disjonction de deux formules passées en paramètre en simplifiant éventuellement.

**Solution :**

```
let s_or f1 f2 =
  match (f1, f2) with
  | T, _ | _, T -> T
```

1. smart constructors

|      |      |                |
|------|------|----------------|
| F, f | f, F | -> f           |
| -, - |      | -> Or (f1, f2) |

D4. Écrire un constructeur élégant pour le constructeur `imp` de signature

`s_imp : formule -> formule -> formule` qui construit l'implication des deux formules passées en paramètre en simplifiant éventuellement.

**Solution :**

```
let s_imp f1 f2 =
  match (f1, f2) with
  | F, _ -> T (* ex falso quodlibet *)
  | _, T -> T
  | T, f -> f
  | f, F -> s_not f
  | _, _ -> Imp (f1, f2)
```

## b Programmation de l'algorithme

On se propose d'implémenter l'algorithme de Quine (cf. algorithme 1).

### Algorithme 1 Algorithme Quine (SAT)

```
1: Fonction QUINE_SAT(f) ▷ f est une formule logique
2:   SIMPLIFIER(f)
3:   si f ≡ T alors
4:     renvoyer Vrai
5:   sinon si f ≡ ⊥ alors
6:     renvoyer Faux
7:   sinon
8:     Choisir une variable x parmi les variables propositionnelles restantes de f
9:     renvoyer QUINE(f[x ← T]) || QUINE(f[x ← ⊥])
```

D1. Écrire une fonction de signature `subst : int -> formule -> formule -> formule` qui substitue une variable *k* par une formule *r* dans une formule *f*. On l'utilisera ainsi : `subst 2 T f` si l'on veut substituer la variable numéro 2 par la formule *T* dans la formule *f*.

**Solution :**

```
let rec subst k r f =
  match f with
  | F -> F
  | T -> T
  | Var j when k = j -> r
  | Var _ -> f
  | Not f -> Not (subst k r f)
  | And(f1, f2) -> And(subst k r f1, subst k r f2)
```



|             |                                    |
|-------------|------------------------------------|
| Or(f1, f2)  | -> Or(subst k r f1, subst k r f2)  |
| Imp(f1, f2) | -> Imp(subst k r f1, subst k r f2) |

---

D2. Tester la fonction en remplaçant par exemple la variable de numéro 0 par T dans  $f_1$ .

**Solution :**

```
let f1 = Or ((Var 0), And ((Var 1),(Var 2)));;
simplify f1;;
```

---

D3. Tester la simplification de la formule  $f_1$  dans le cas où la variable de numéro 0 a été remplacée par T.

**Solution :**

```
simplify (subst 0 T f1);;
```

---

D4. Écrire une fonction de signature `quine_sat : formule -> bool` qui statue sur la satisfaisabilité d'une formule logique. Cette fonction prend en paramètre une formule logique et renvoie un booléen, vrai si la formule est satisfaisable, faux sinon.

**Solution :**

```
let rec quine_sat f valuation =
  match simplify f with
  | T -> true
  | F -> false
  | f -> let v = max_var f 0 in simple_quine_sat (subst v T f) ||
        simple_quine_sat (subst v F f);;
```

---

D5. Tester la fonction sur  $f_1$  et sur la formule suivante :

$$((p \Rightarrow (q \vee r)) \wedge (s \Rightarrow \neg r \vee t)) \Rightarrow (p \Rightarrow s)$$

**Solution :**

```
quine_sat f1;;
let a = Imp(Var 0, Or(Var 1, Var 2));;
let b = Imp(Var 3, Or(Not (Var 2), Var 4));;
let c = Imp(Var 0, Var 3);;
let d = Imp(And(a,b), c);;
quine_sat d;;
```

---