

Terminaison et correction

INFORMATIQUE COMMUNE - TP n° 2.1 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ✎ programmer les algorithmes donnés en exemples.
- ✎ prouver la terminaison d'un algorithme simple.
- ✎ prouver la correction d'un algorithme simple.

A Terminaison

A1. Prouver la terminaison de l'algorithme 1 puis le traduire en Python.

Algorithme 1 Palindrome

```
1: Fonction PALINDROME( $w$ )
2:    $n \leftarrow$  la taille de la chaîne de caractères  $w$ 
3:    $i \leftarrow 0$ 
4:    $j \leftarrow n - 1$ 
5:   tant que  $i < j$  répéter
6:     si  $w[i] = w[j]$  alors
7:        $i \leftarrow i + 1$ 
8:        $j \leftarrow j - 1$ 
9:     sinon
10:      renvoyer Faux
11:   renvoyer Vrai
```

A2. Prouver la terminaison de l'algorithme 2 puis le traduire en Python.

Algorithme 2 Est une puissance de deux

```
1: Fonction EST_PUISSANCE_DE_DEUX( $n$ )
2:   si  $n < 2$  alors
3:     renvoyer Faux
4:   sinon
5:      $m \leftarrow n \bmod 2$ 
6:     tant que  $m = 0$  répéter
7:        $n \leftarrow n // 2$ 
8:        $m \leftarrow n \bmod 2$ 
9:   renvoyer  $n = 1$ 
```

Algorithme 3 Somme des n premiers entiers

```

1: Fonction INT_SUM( $n$ )
2:   si  $n=0$  alors
3:     renvoyer 0
4:   sinon
5:     renvoyer  $n + \text{INT\_SUM}(n-1)$ 

```

A3. Prouver la terminaison de l'algorithme récursif 3 puis le traduire en Python.

B Correction

B1. Prouver la correction partielle de l'algorithme 4 puis le traduire en Python en matérialisant l'invariant utilisé par des assertions.

Algorithme 4 Élément maximum d'un tableau

```

1: Fonction MAX( $t$ )
2:   si  $t$  est vide alors
3:     renvoyer  $\emptyset$ 
4:   sinon
5:      $n \leftarrow$  la taille du tableau
6:      $m = t[0]$ 
7:     pour  $i = 1$  à  $n - 1$  répéter
8:       si  $m < t[i]$  alors
9:          $m \leftarrow t[i]$ 
10:    renvoyer  $m$ 

```

B2. Prouver la correction partielle de l'algorithme de tri par sélection 5

Algorithme 5 Tri par sélection

```

1: Fonction TRIER_SELECTION( $t$ )
2:    $n \leftarrow$  taille( $t$ )
3:   pour  $i$  de 0 à  $n - 1$  répéter
4:      $\text{min\_index} \leftarrow i$                                 ▷ indice du prochain plus petit
5:     pour  $j$  de  $i + 1$  à  $n - 1$  répéter                      ▷ pour tous les éléments non triés
6:       si  $t[j] < t[\text{min\_index}]$  alors
7:          $\text{min\_index} \leftarrow j$                                 ▷ c'est l'indice du plus petit non trié!
8:     échanger( $t[i]$ ,  $t[\text{min\_index}]$ )                      ▷ c'est le plus grand des triés!

```

B3. Prouver la correction de l'algorithme du tri par insertion 6.

Algorithme 6 Tri par insertion

```

1: Fonction INSERTION(t, i)
2:   à_insérer ← t[i]
3:   j ← i
4:   tant que t[j-1] > à_insérer et j>0 répéter
5:     t[j] ← t[j-1]                                ▷ faire monter les éléments
6:     j ← j-1
7:   t[j] ← à_insérer                                ▷ insertion de l'élément
8: Fonction TRIER_INSERTION(t)
9:   n ← taille(t)
10:  pour i de 1 à n-1 répéter
11:    INSERTION(t,i)

```

C Algorithme d'Euclide du PGCD**Algorithme 7** Algorithme d'Euclide (optimisé)

```

1: Fonction PGCD(a, b)                                ▷ On suppose pour simplifier que  $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$  et  $b \leq a$ .
2:   r ← a mod b
3:   tant que r > 0 répéter                            ▷ On connaît la réponse si r est nul.
4:     a ← b
5:     b ← r
6:     r ← a mod b
7:   renvoyer b                                         ▷ Le pgcd est b

```

On cherche à prouver la terminaison et la correction de l'algorithme d'Euclide 7. Dans ce but, on rappelle quelques éléments mathématiques importants.

Théorème 1 — Division euclidienne . Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que les deux critères suivants sont vérifiés :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

Démonstration. 1. Existence : a et b étant donné, on pose $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$. Par définition de partie entière, on a : $0 \leq \frac{a}{b} - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor < 1$. En multipliant par b , on obtient : $0 \leq a - b \times \lfloor \frac{a}{b} \rfloor < b$. En choisissant donc $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ et $r = a - b \times \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$, on a bien :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

2. Unicité : supposons que l'on ait deux couples (q, r) et (q', r') appartenant à $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$: $a = bq + r = bq' + r'$ avec $0 \leq r < b$ et $0 \leq r' < b$. Cela peut également s'écrire : $b(q' - q) = r - r'$. Or, on a l'encadrement $-b < r - r' < b$. On en conclut que $-b < b(q' - q) < b$ et donc que $-1 < q' - q < 1$. Mais q et q' sont des entiers d'après nos hypothèses de départ. Donc, on en déduit de $q' - q = 0$. Il s'en suit que $q = q'$ et que $r = r'$. Il s'agit donc bien du même couple. ■

Théorème 2 — Existence du PGCD. Parmi tous les diviseurs communs de deux entiers a et b non nuls, il y en a **un** qui est le plus grand. Ce dernier est nommé plus grand commun diviseur de a et de b . On le note $\text{PGCD}(a, b)$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Tous les diviseurs de a sont bornés par $|a|$. On peut tenir le même raisonnement pour ceux de b . Donc, parmi les diviseurs de a et de b , il y en a donc un plus grand. ■

Théorème 3 — Propriété du PGCD. Soit a et b deux entiers.

1. Si $b = 0$, alors $\text{PGCD}(a, b) = a$.
2. Si $b \neq 0$, alors $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, a \bmod b)$.

Démonstration. Démonstration de l'égalité de l'ensemble \mathcal{D}_{ab} des diviseurs de a et de b et de l'ensemble \mathcal{D}_{br} des diviseurs de b et de r par double inclusion.

$\mathcal{D}_{ab} \subset \mathcal{D}_{br}$: La division euclidienne étant unique comme nous l'avons montré au théorème 1, il existe un entier q tel que $a = qb + r$. Ce qui peut s'écrire : $a - qb = r$. Si γ est un diviseur de a et de b , alors on peut écrire : $a - bq = \gamma a' + \gamma b'q = \gamma(a' - b'q) = r$. On a donc montré qu'un diviseur de a et de b est un diviseur de r .

$\mathcal{D}_{br} \subset \mathcal{D}_{ab}$: De même, si η est un diviseur de b et de r , alors on a : $a = bq + r = \eta(b'q + r')$, ce qui signifie que η est un diviseur de a .

Donc, $\mathcal{D}_{ab} = \mathcal{D}_{br}$. Ceci est vrai, y compris pour le plus grand des diviseurs de a et de b . ■

■ **Définition 1 — Suite des restes de la division euclidienne.** Soient a et b des entiers. On définit la suite des restes de la division euclidienne comme suit :

$$r_0 = |a| \tag{1}$$

$$r_1 = |b| \tag{2}$$

$$q_k = \lfloor r_{k-1} / r_k \rfloor, 1 \leq k \leq n \tag{3}$$

Alors on a :

$$r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1} \tag{4}$$

$$r_{k+1} = r_{k-1} \bmod r_k \tag{5}$$

Théorème 4 — Stricte décroissance de $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La suite des restes de la division euclidienne est positive, strictement décroissante et minorée par zéro.

C1. Coder l'algorithme 7 en Python.

C2. Grâce au théorème 3, coder une version récursive de l'algorithme du PGCD.

```
1 def rec_pgcd(a, b):
2     if b == 0:
3         return a
4     else:
5         return rec_pgcd(b, a % b)
```

C3. Donner une preuve du théorème 4.

- C4. Montrer que r est un variant de boucle pour l'algorithme d'Euclide.
- C5. Prouver la correction de l'algorithme d'Euclide.