GRAPHES AVANCÉS

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ expliquer le concept d'arbre recouvrant
- ☞ connaître les algorithmes de Prim et Kruskal
- ☞ connaître la notion de tri topologique et son lien avec le parcours en profondeur
- ☞ expliquer le concept de forte connexité
- ☞ expliquer l'intérêt d'un graphe biparti

A Rappels sur les graphes

■ **Définition 1 — Graphe.** Un graphe G est un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini et non vide d'éléments appelés **sommets** et A un ensemble de paires d'éléments de S appelées **arêtes**.

■ **Définition 2 — Sous-graphe.** Soit $G = (S, A)$ un graphe, alors $G' = \{S', A'\}$ est un sous-graphe de G si et seulement si $S' \subseteq S$ et $A' \subseteq A$.

■ **Définition 3 — Sous-graphe couvrant.** G' est un sous-graphe couvrant de G si et seulement si G' est un sous-graphe de G et $S' = S$.

■ **Définition 4 — Graphe connexe.** Un graphe $G = (S, A)$ est connexe si et seulement si pour tout couple de sommets (a, b) de G, il existe une chaîne d'extrémités a et b.

ă

Théorème 1 — Condition nécessaire d'acyclicité d'un graphe. Soit un graphe $G = (S, A)$ possédant au moins une arête et acyclique alors G possède au moins deux sommets de degré un et on a :

$$|A| \leqslant |S| - 1 \tag{1}$$

Théorème 2 — Condition nécessaire de connexité d'un graphe. Si un graphe $G = (S, A)$ est connexe alors on a :

$$|A| \geqslant |S| - 1 \tag{2}$$

■ **Exemple 1 — Exercices types.** Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté dont l'ordre est n.

1. Montrer que si le G est connexe alors il comporte au moins $n-1$ arêtes. (Procéder par récurrence)
2. Montrer que si G a tous les sommets de degré supérieur ou égal à 2 alors il possède un cycle. En déduire, qu'un graphe acyclique admet un sommet de degré 0 ou 1.
3. Montrer que que si G est acyclique alors il possède au plus $n-1$ arêtes. (Procéder par récurrence)

B Arbres recouvrants

■ **Définition 5 — Arbre.** Un arbre est un graphe non orienté connexe et acyclique.

R On déduit des deux théorèmes précédents qu'un arbre possède **exactement** $|S| - 1$ arêtes.

Théorème 3 — Caractérisation des arbres. Soit G un graphe non orienté à n sommets. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- G est un arbre
- G est connexe et acyclique
- G est connexe et possède $n-1$ arêtes
- G est connexe et la suppression de n'importe quelle arête le rend non connexe
- G est acyclique et possède $n-1$ arêtes
- G est acyclique et l'ajout de n'importe quelle arête crée un cycle
- entre toute paire de sommets de G il existe une unique chaîne dont les extrémités sont ces sommets

■ **Définition 6 — Forêt.** Une forêt est un graphe non orienté sans cycle.

■ **Définition 7 — Arbre recouvrant un graphe.** Dans un graphe non orienté et connexe, un arbre est dit recouvrant s'il est inclus dans ce graphe et s'il connecte tous les sommets de ce graphe.

R On peut dire de manière équivalente qu'un arbre recouvrant est :

- un sous-graphe acyclique maximal,
- un sous-graphe recouvrant connexe minimal.

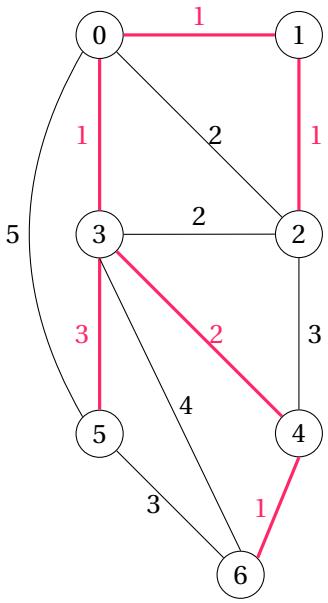


FIGURE 1 – Exemple d'arbre recouvrant dans un graphe non orienté et pondéré. En rouge, un arbre recouvrant minimal de poids total 9.

Les arbres recouvrants sont des éléments essentiels de monde réel car les applications sont nombreuses. La figure 1 peut par exemple représenter un réseau de villes qu'on souhaite interconnecter par un chemin de fer. Si le coût de construction est proportionnel au poids porté par l'arête, comment choisir les arêtes pour minimiser le coût de la construction du réseau de voies ferrées tout en interconnectant toutes les villes ? Les arêtes en rouges, qui forment un arbre recouvrant de poids minimal, permettent de répondre à cette question.

Les arbres recouvrants sont utilisés dans les réseaux d'énergie, de télécommunications, de fluides, de transport, de construction mais également en intelligence artificielle et en conception de circuits électroniques. Les deux algorithmes phares pour construire des arbres recouvrants sont l'algorithme de Kruskal [**kruskal_shortest_1956**] et l'algorithme de Prim [**prim_shortest_1957**].

■ **Définition 8 — Coupe de graphe.** On appelle coupe d'un graphe $G = (S, A)$

- une partition de l'ensemble des sommets S en deux sous-ensembles S_1 et S_2 non vides tels que $S = S_1 \cup S_2$ et $S_1 \cap S_2 = \emptyset$,
- ou bien l'ensemble des arêtes possédant une extrémité dans chaque sous-ensemble de la partition.

Le poids de la coupe est :

- soit la somme des poids respectifs des arêtes de la coupe si G est pondéré,
- soit le nombre d'arêtes dans la coupe.

Une arête de la coupe est dite traversante.

Théorème 4 — Propriété de la coupe. Soit $G = (S, A, w)$ un graphe pondéré. Soit C une coupe de ce graphe. Alors l'arête de poids minimum de la coupe fait partie de tous les arbres recouvrants minimum du graphe.

Démonstration. Par l'absurde. À savoir faire. ■

Théorème 5 — Propriété du cycle. Soit un cycle dans un graphe pondéré. L'arête de poids maximum de ce cycle ne peut pas faire partie d'un arbre recouvrant minimum du graphe.

Démonstration. Par l'absurde. À savoir faire. ■

■ **Exemple 2 — Exercices types.** Certaines définitions nécessaires à ces exercices sont données ci-dessous.

1. Les démonstrations précédentes.
2. Soit $G = (S, A, w)$ un graphe pondéré. Montrer que si les poids du graphe sont tous différents, alors il existe un unique arbre recouvrant de poids minimal. (Procéder par l'aburde)
3. Montrer que l'arbre recouvrant minimal n'engendre pas nécessairement le plus cours chemin entre deux sommets donnés. (Donner un exemple)

a Algorithme de Prim

L'algorithme de Prim est un algorithme **glouton optimal** qui s'applique aux **graphes pondérés connexes**. Pour construire l'arbre, l'algorithme part d'un sommet et fait croitre l'arbre en choisissant un sommet dont la distance est la plus faible et n'appartenant pas à l'arbre, garantissant ainsi l'absence de cycle.

Algorithme 1 Algorithme de Prim, arbre recouvrant

```
1 : Fonction PRIM(G = (V, E, w))
2 :     T ← ∅                                  ▷ la sortie : l'ensemble des arêtes de l'arbre recouvrant
3 :     S ← s un sommet quelconque de V
4 :     tant que S ≠ V répéter
5 :         (u, v) ← min (w(u, v), u ∈ S, v ∈ E)                    ▷ Choix glouton !
6 :         S ← S ∪ {v}
7 :         T ← T ∪ {(u, v)}
8 :     renvoyer T
```

R L'algorithme de Prim est une preuve constructive que tout graphe connexe possède au moins un arbre recouvrant minimal.

Cet algorithme termine car on privilégie la création d'un sous-graphe connexe en partant d'un sommet de S et en choisissant un nouveau sommet différent dans E. Comme le nombre de sommet d'un graphe est fini et que le graphe G est connexe, l'algorithme termine.

Cet algorithme est correct car il fournit un arbre recouvrant, un sous-graphe connexe acyclique à $n-1$ sommets. On peut montrer qu'il est minimal en utilisant la propriété de la coupe de l'exercice 2 de l'exemple 2, en procédant par récurrence sur la taille de chaque sous-graphe construit par l'algorithme. On montre que ces sous-graphes sont des arbres recouvrants minimaux à chaque étape.

La complexité de cet algorithme, si l'on utilise un tas min pour le file et une liste d'adjacence pour représenter G, est en $O((n+m)\log n)$ si $m = |E|$ est le nombre d'arêtes du graphe et n l'ordre du graphe.

R Quelles sont les différences entre Dijkstra et Prim ? En pratique, l'algorithme de Dijkstra est utilisé lorsque l'on souhaite économiser du temps et du carburant pour se déplacer d'un point à un autre. L'algorithme de Prim, quant à lui, est utilisé lorsque l'on souhaite minimiser les coûts de matériaux lors de la construction de routes reliant plusieurs points entre eux.

Les algorithmes de Prim et de Dijkstra présentent trois différences majeures :

- Dijkstra trouve le chemin le plus court, mais l'algorithme de Prim trouve le l'arbre recouvrant minimal.
- Dijkstra s'applique sur les graphes orientés et non orientés mais Prim ne s'applique qu'à des graphes non orientés.
- Prim peut gérer des pondérations négatives alors que Dijkstra ne l'admet pas.

b Algorithme de Kruskal

L'algorithme de Kruskal (cf. algorithme 2) est un algorithme **glouton optimal** qui s'applique aux **graphes pondérés**. Le graphe peut ne pas être connexe et dans ce cas on obtient un **forêt** d'arbres recouvrants. Pour construire la forêt et effectuer un choix d'arête, il ordonne les arêtes du graphe par ordre de pondération croissante.

Algorithme 2 Algorithme de Kruskal, arbre recouvrant

```
1 : Fonction KRUSKAL(G = (V, E, w))
2 :     T ← ∅                                  ▷ la sortie : l'ensemble des arêtes de l'arbre recouvrant
3 :     pour k de 1 à |E| répéter
4 :         e ← l'arête de pondération la plus faible de E          ▷ Choix glouton !
5 :         si (S, T ∪ {e}, w) est un graphe acyclique alors
6 :             T ← T ∪ {e}
7 :     renvoyer T
```

Démonstration. En utilisant la propriété de la coupe et celle du cycle (cf exemple 2), démontrer par récurrence la correction de l'algorithme de Kruskal. ■

La complexité de cet algorithme, si on utilise un tas binaire, est en $O(n \log m)$ si $m = |E|$ est le nombre d'arêtes du graphe et n l'ordre du graphe.

C Tri topologique d'un graphe orienté

a Ordre dans un graphe orienté acyclique

Dans un graphe orienté acyclique (Acyclic Directed Graph ou DAG en anglais), les arcs définissent un **ordre partiel**, le sommet à l'origine de l'arc pouvant être considéré comme le prédécesseur du sommet à l'extrémité de l'arc. Par exemple, sur la figure 2, a et b sont des prédécesseurs de d et e est un prédécesseur de g. Mais ces arcs ne disent rien de l'ordre entre e et h, l'ordre n'est pas total.

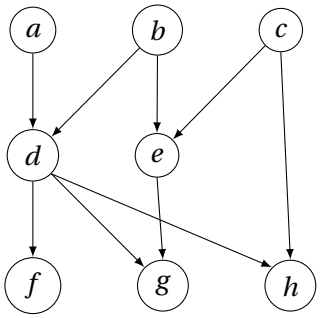


FIGURE 2 – Exemple de graphe orienté acyclique

L'algorithme de tri topologique permet de créer un ordre total $\preceq$ sur un graphe orienté acyclique. Formulé mathématiquement :

$$\forall (v,u) \in V^2, (v,u) \in E \Longrightarrow v \preceq u \tag{3}$$

Sur l'exemple de la figure 2, plusieurs ordre topologiques sont possibles. Par exemple :

- $a \preceq b \preceq c \preceq d \preceq e \preceq f \preceq g \preceq h$
- $a \preceq b \preceq d \preceq f \preceq c \preceq h \preceq e \preceq g$

b Existence d'un tri topologique

Théorème 6 — Existence d'un tri topologique. Tout graphe orienté acyclique possède un tri topologique.

Démonstration. Par récurrence sur le nombre de sommets du graphe.

- Initialisation : Pour un graphe à un seul sommet, ce sommet est trivialement trié tout seul.
- Hérédité : on suppose que tout graphe d'ordre strictement inférieur à n possède un tri topologique. Considérons un graphe G d'ordre n, acyclique et orienté. **Il existe au moins un sommet s qui ne possède aucun arc entrant, sinon cela aurait pour effet de créer un cycle dans le graphe.** Si on retire s et ses arcs sortants du graphe, on obtient un graphe à $n-1$ sommets qui possède, par hypothèse de récurrence, un tri topologique. Il suffit alors de placer s en tête du tri topologique pour obtenir un tri topologique de G.
- Conclusion : comme la propriété 6 est vraie pour un graphe à un sommet et que l'héridité est démontrée, alors elle est vraie pour tout graphe acyclique orienté.

■

R La clef des démonstrations autour des graphes acyclique est qu'il existe au moins un sommet s qui ne possède aucun arc entrant.

c Algorithmes de tri topologique

Pour construire un tri topologique, on peut utiliser l'algorithme de Kahn (cf. algorithme 3) ou le parcours en profondeur (cf. algorithme 4). Tous les deux permettent de détecter des cycles.

L'algorithme de tri topologique (cf. algorithme 4) utilise le parcours en profondeur d'un graphe pour marquer au fur et à mesure les sommets dans l'ordre topologique. Une pile est utilisée pour enregistrer l'ordre chronologique de découverte des sommets.

Au cours de l'algorithme, un sommet change d'état : il peut passer de «non visité» à «en cours» et finalement à «terminé». Il est alors possible de détecter un cycle si on redécouvre un sommet dans l'état «en cours». Des dates peuvent également être ajoutées au cours du traitement afin de pouvoir ordonnancer proprement les tâches parallélisables.

Algorithme 3 Algorithme de Kahn pour le tri topologique

```
1 : Fonction TT_KAHN(G)                          ▷ G = (S, A) est un graphe acyclique orienté
2 :     Créer une liste vide ordre
3 :     Créer une file file pour stocker les sommets dont le degré entrant vaut 0
4 :     Créer un dictionnaire degré_entrant pour stocker le degré entrant de chaque sommet
5 :     pour chaque sommet v ∈ S répéter
6 :         Calculer le degré entrant de v
7 :         degré_entrant[v] ← nombre d'arcs entrants pour v
8 :         si degré_entrant[v] = 0 alors
9 :             ENFILER(file, v)
10 :    tant que file n'est pas vide répéter
11 :        u ← DÉFILER(file)
12 :        AJOUTER(ordre,u)
13 :        pour pour chaque arc u → v répéter
14 :            Réduire le degré entrant de v de 1
15 :            si degré_entrant[v] = 0 alors
16 :                ENFILER(file, v)
17 :    si la taille(ordre) = |S| alors          ▷ il y a autant d'éléments dans ordre que de sommets
18 :        renvoyer ordre
19 :    sinon
20 :        Lever une exception : il y a un cycle dans le graphe et aucun un ordre topologique.
```

Algorithme 4 Tri topologique

```
1 : Fonction TRI_TOPOLOGIQUE(G)                ▷ G = (V, E) est un graphe orienté acyclique
2 :     Créer une liste vide ordre_topologique
3 :     Créer un ensemble visités pour les sommets visités
4 :     Créer un dictionnaire état pour l'état des sommets (non_visité, en_cours, terminé)
5 :     Fonction DFS(s)                        ▷ DFS : parcours en profondeur en anglais
6 :         si s est dans visités alors
7 :             renvoyer
8 :         Ajouter s à visités
9 :         état[s] ← en_cours
10 :        pour chaque voisin v de s (pour chaque arc s → v) répéter
11 :            si état[v] = non_visité alors
12 :                DFS(v)
13 :            sinon si état[v] = en_cours alors
14 :                Lever une exception : cycle détecté
15 :        état[s] ← terminé
16 :        Ajouter s au début de ordre_topologique
17 :    pour chaque sommet v ∈ V répéter
18 :        si v n'est pas dans visités alors
19 :            DFS(v)
20 :    renvoyer ordre_topologique
```

D Composantes fortement connexes d'un graphe orienté et 2-SAT

■ **Définition 9 — Composante fortement connexe d'un graphe orienté** $G = (V, E)$**.** Une composante fortement connexe d'un graphe orienté G est un sous-ensemble S de ses sommets, maximal au sens de l'inclusion, tel que pour tout couple de sommets $(s, t) \in S$ il existe un chemin de s à t dans G.

Le calcul des composantes connexes d'un graphe est par exemple utilisé pour résoudre le problème 2-SAT. Dans le cadre de ce problème, on dispose d'une formule logique sous la forme conjonctive normale et chaque clause comporte deux variables. L'idée est de construire un graphe à partir de la formule de cette formule F. Supposons qu'elle soit constituée de m clauses et n variables $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. On élabore alors un graphe $G = (V, E)$ à $2n$ sommets et $2m$ arêtes. Les sommets représentent les n variables v_i ainsi que leur négation $\neg v_i$. Les arêtes sont construites de la manière suivante : on transforme chaque clause de F de la forme $v_i \vee v_j$ en deux implications $\neg v_1 \implies v_2$ ou $\neg v_2 \implies v_1$. Cette transformation utilise le fait que la formule $a \implies b$ est équivalent à $\neg a \vee b$.

Théorème 7 F n'est pas satisfaisable si et seulement s'il existe une composante fortement connexe contenant une variable v_i et sa négation $\neg v_i$.

Démonstration. ($\Longleftarrow$) S'il existe une composante fortement connexe contenant a et $\neg a$, alors cela signifie $F : (a \implies \neg a) \wedge (\neg a \implies a)$. Or cette formule n'est pas satisfaisable. En effet, si a est vrai alors $(a \implies \neg a)$ est faux, car du vrai on ne peut pas conclure le faux d'après la définition sémantique de l'implication. De même, si a est faux alors $(\neg a \implies a)$ est faux, pour la même raison. Dans tous les cas, la formule est fausse. F n'est pas staisfaisable.

($\Longrightarrow$) Par contraposée. Supposons qu'il n'existe pas de composante fortement connexe contenant a et $\neg a$. Cela peut se traduire en la formule $\neg F : \neg(a \implies \neg a) \vee \neg(\neg a \implies a)$. Or, cette formule F est toujours satisfaisable. En effet, $\neg F$ s'écrit

$$\neg(\neg a \vee \neg a) \vee \neg(a \vee a) = a \vee \neg a \tag{4}$$

ce qui est toujours vérifié. Par contraposée, F est donc satisfaisable s'il existe une composante fortement connexe. ■

On peut montrer que SAT-2 est un problème de décision polynomial. C'est une restriction à des clauses de deux variables du problème général SAT qui lui est NP-complet.

E Graphes bipartis et couplage maximum

a Caractérisation des graphes bipartis

■ **Définition 10 — Graphe biparti.** un graphe $G = (S, A)$ est biparti si l'ensemble S de ses sommets peut être divisé en deux sous-ensembles disjoints U et W tels que chaque arête de A ait une extrémité dans U et l'autre dans W.

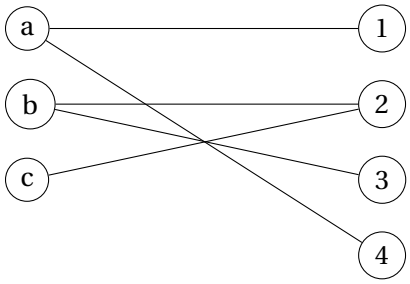


FIGURE 3 – Exemple de graphe biparti

Théorème 8 — Caractérisation des graphes bipartis par les cycles. Un graphe est biparti si et seulement s'il ne possède aucun cycle de longueur impaire,

Démonstration. ($\Longrightarrow$) Par l'absurde. Soit $G = (U, W, A)$ un graphe biparti. Soit $C = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_k, s_0)$ un cycle de longueur impaire de G. On suppose sans perte de généralité que s_0 est dans U. Alors, comme G est biparti, $s_i \in U$ si i est pair et $s_i \in W$ sinon. Comme C est un cycle impair, k est nécessairement pair. Donc s_k est dans U. Mais s_0 est dans U également, ce qui contredit le fait que G soit biparti. C'est donc absurde et il n'existe donc pas de cycle impair dans un graphe biparti.

($\Longleftarrow$) Soit un graphe $G = (S, A)$ ne possédant aucun cycle impair. Soit un T un arbre couvrant de racine r de G. On construit les ensembles U et W de la manière suivante :

- r appartient à U,
- Tout sommet séparé de r par un nombre pair d'arêtes appartient à U,
- Les autres sommets à W.

Les ensembles U et W sont disjoints par construction et recouvrent l'ensemble S de sommets de G. Il s'agit maintenant de montrer qu'aucune arête ne relie deux sommets de U ou de W en procédant par l'absurde. Supposons qu'il en existe une. Soit (a, b) une arête reliant deux sommets de U. il existe un chemin de a à b dans l'arbre couvrant T et ce chemin possède un nombre pair d'arêtes. Si on complète ce chemin par un l'arête (b, a), on obtient un cycle de longueur impaire. Ce qui est absurde par hypothèse. Donc une telle arête n'existe pas et les ensemble U et W forment donc une bipartition de S.

■

Pour savoir si un graphe est biparti on pourrait donc rechercher les cycles et évaluer leurs longueurs. Il existe cependant une autre approche. Un graphe biparti est un graphe bicolorable comme le montre la figure 6, c'est-à-dire son nombre chromatique est égal à 2.

Théorème 9 — Caractérisation des graphes bipartis et coloration. Un graphe est biparti si et seulement si est bi-colorable.

Démonstration. En affectant les couleurs à des ensembles ou les ensembles à des couleurs. ■

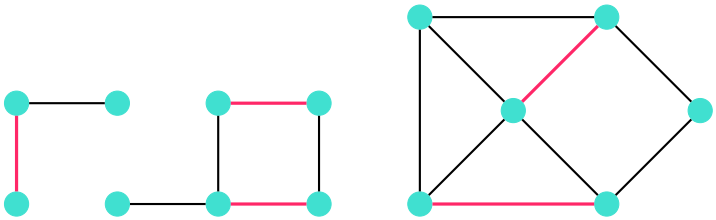


FIGURE 4 – Illustration de la notion de couplage maximal

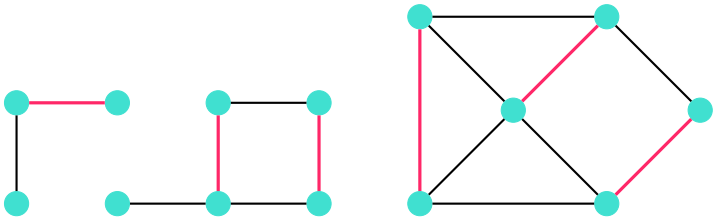


FIGURE 5 – Illustration de la notion de couplage de cardinal maximum

b Couplage dans un graphe biparti

■ **Définition 11 — Couplage.** Un couplage Γ dans un graphe non orienté $G = (S, A)$ est un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. Formellement :

$$\forall (a_1, a_2) \in A^2, a_1 \neq a_2 \Longrightarrow a_1 \cap a_2 = \emptyset \tag{5}$$

c'est-à-dire que les sommets de a_1 et a_2 ne sont pas les mêmes.

■ **Définition 12 — Sommets couplés, sommets exposés.** Un sommet est couplé s'il fait parti d'une arête de Γ. Un sommet est exposé s'il ne fait pas parti des arêtes de Γ, c'est-à-dire il n'est pas couplé.

■ **Définition 13 — Couplage maximal.** Un couplage maximal est tel que si on lui ajoute une arête, ce n'est plus un couplage. Il est donc maximal au sens de l'inclusion.

■ **Définition 14 — Couplage de cardinal maximum.** Un couplage de cardinal maximum est un couplage contenant le plus grand nombre d'arêtes possible.

■ **Exemple 3 — Affectation des cadeaux sous le sapin .** Au pied du sapin de Noël, un papa a disposé six cadeaux dont les paquets sont tous différents et numérotés de 0 à 5 [a]. Il a décidé que les cadeaux seraient répartis en fonction des paquets que les enfants préfèrent.

Ses cinq enfants expriment donc leurs préférences. Le papa pourra-t-il affecter un ca-

deau à chaque enfant et faire en sorte que ce cadeau soit un de leurs préférés ?

Évidemment la réponse à cette question dépend des préférences émises par les enfants. Supposons qu'ils se soient exprimés ainsi :

Alix 0,2

Brieuc 1,3,4,5

Céline 1,2

Dimitri 0,1,2

Enora 2

On peut représenter par un graphe biparti cette situation comme sur la figure 6. Dans ce cas précis, comme il y a quatre enfants qui ne veulent que les trois premiers cadeaux, il n'y a pas de solution. Mais si Enora avait choisit 4 et 5 ???

a. Ce papa est informaticien !

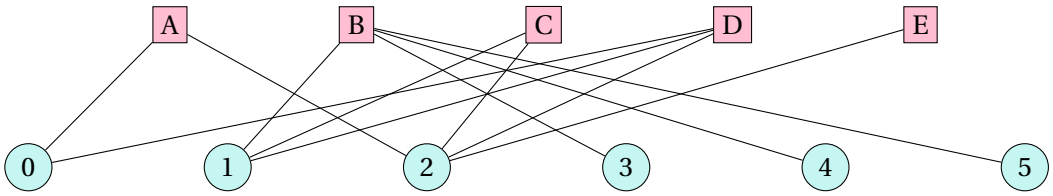


FIGURE 6 – Exemple de graphe biparti pour un problème d'affectation sans solution.

c Chemin augmentant

Pour résoudre le problème de trouver un couplage de cardinal maximum, on peut procéder en suivant l'algorithme 5. Il s'agit de construire un chemin augmentant pour atteindre un couplage de cardinal maximum.

■ **Définition 15 — Chemin alternant.** Une chemin alternant dans un graphe non orienté G et pour un couplage Γ est tel que les arêtes appartiennent successivement à Γ et $E \setminus \Gamma$.

■ **Définition 16 — Chemin augmentant.** Un chemin augmentant est un chemin alternant dont les extrémités sont des sommets exposés, c'est-à-dire qui n'appartiennent pas au couplage Γ.

Théorème 10 — Lemme de Berge. Soit un couplage Γ dans un graphe. Γ est de cardinal maximum si et seulement s'il ne possède aucun un chemin augmentant.

R Soit un couplage Γ dans un graphe. Alors il existe un couplage Γ' qui possède plus d'arêtes que Γ. Ce couplage vaut :

$$\Gamma' = \Gamma \Delta \pi$$

où Δ dénote la différence symétrique de deux ensembles.

$$\Gamma \Delta \pi = \{e \in E, e \in \{\Gamma \setminus \pi \cup \pi \setminus \Gamma\}\}$$

L'algorithme de recherche d'un couplage de cardinal maximum 5 s'appuie sur le lemme de Berge 10. La stratégie est la suivante : à partir d'un couplage Γ, on construit un nouveau couplage de cardinal supérieur à l'aide d'un chemin augmentant comme le montre la figure 7.

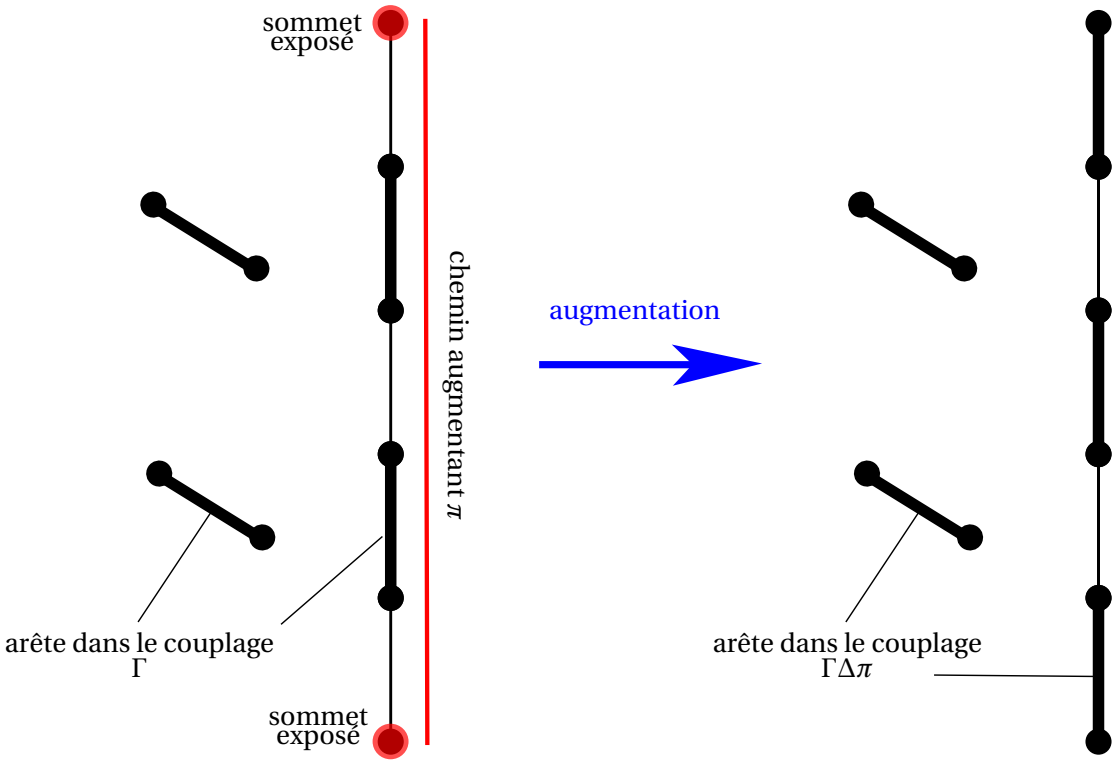


FIGURE 7 – Illustration de la construction d'un couplage de cardinal supérieur grâce à un chemin augmentant. (Source originale : Wikimedia Commons)

Dans un graphe **biparti**, il est facile d'augmenter la taille d'un couplage jusqu'au cardinal maximum :

1. s'il existe deux sommets exposés reliés par une arête, il suffit d'ajouter cette arête au couplage. Puis, on appelle récursivement l'algorithme sur ce nouveau couplage.
2. sinon il faut trouver un chemin augmentant π dans le graphe.
   (a) s'il n'y en a pas, l'algorithme est terminé.
   (b) sinon on effectue la différence symétrique entre le couplage Γ et l'ensemble des

arêtes du chemin augmentant π pour obtenir le nouveau couplage $\Gamma\Delta\pi$. Puis, on appelle récursivement l'algorithme avec ce nouveau couplage.

Il faut noter que le cardinal du couplage n'augmente pas nécessairement lorsqu'on effectue la différence symétrique mais il ne diminue pas.

Pour trouver un chemin augmentant dans un graphe biparti $G = ((U, D), E)$, on cherche le plus court chemin entre deux sommets exposés dans un graphe orienté auxiliaire G_o construit de la manière suivante :

1. toutes les arêtes de E qui n'appartiennent pas au couplage Γ sont orientés de U vers D.
2. toutes les arêtes de Γ sont orientées de D vers U.

Le plus court chemin entre deux sommets exposés de G_o est nécessairement un chemin augmentant, son caractère alternant vient du fait que le graphe est biparti.

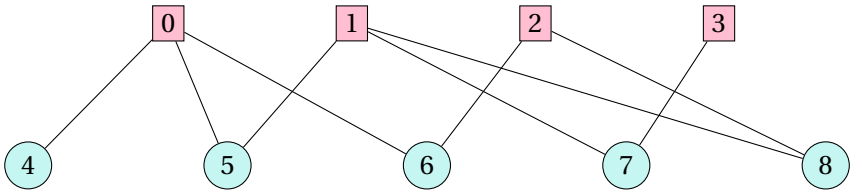
La figure 8 illustre les différentes étapes de l'algorithme. On vérifie bien que le résultat est correct : chaque enfant aura bien un cadeau qu'il avait mis sur sa liste.

Algorithme 5 Recherche d'un couplage de cardinal maximum

Entrée : un graphe biparti $G = ((U, D), E)$
Entrée : un couplage Γ initialement vide
Entrée : F_U, l'ensemble de sommets exposés de U initialement U
Entrée : F_D, l'ensemble de sommets exposés de D initialement D

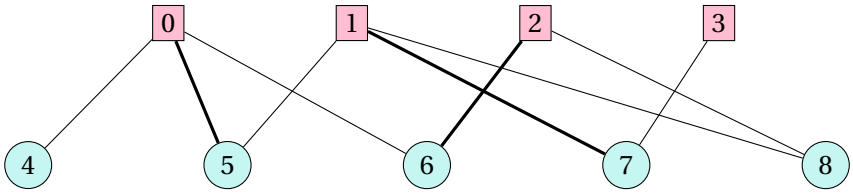
```
1 : Fonction C_MAX(G = (V = (U, D), E), Γ, F_U, F_D))        ▷ Γ est le couplage, vide initialement
2 :     si une arête e = (u, v) entre un sommet de F_U et un sommet de F_D existe alors
3 :         C_MAX(G, Γ ∪ {e}, F_U \ {u}, F_D \ {v})
4 :     sinon
5 :         Créer le graphe orienté G_o                  ▷ ∀e ∈ E, e de U vers D si e ∉ Γ, l'inverse sinon
6 :         Calculer le plus court chemin π entre un sommet de F_U et un de F_D dans G_o
7 :         si un tel chemin π n'existe pas alors
8 :             renvoyer Γ
9 :         sinon
10 :            C_MAX(G, ΓΔπ, F_U \ {π_start}, F_D \ {π_end})
11 :                                  ▷ π_start et π_end : début et fin du chemin π
```

Le graphe de départ de l'algorithme est le suivant :



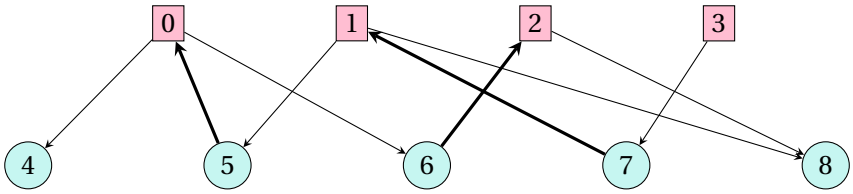
$\Gamma = \emptyset$

On effectue **trois appels récursifs** et, à chaque fois, on a trouvé une arête dont les sommets sont tous les deux exposés.



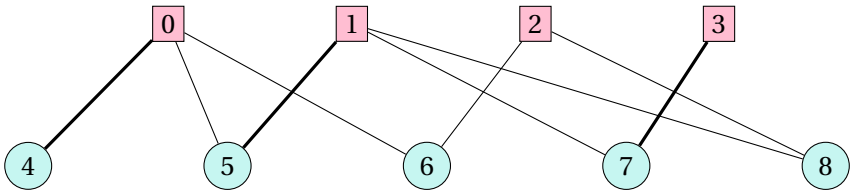
$\Gamma = \{(0,5),(1,7),(2,6)\}$

À ce stade de l'algorithme, aucun sommet exposé n'est relié par une arête à un autre sommet exposé. Donc, on construit le graphe G_o d'après le couplage Γ. On trouve le chemin le plus court entre les deux premiers sommets exposés 3 et 4 : π.



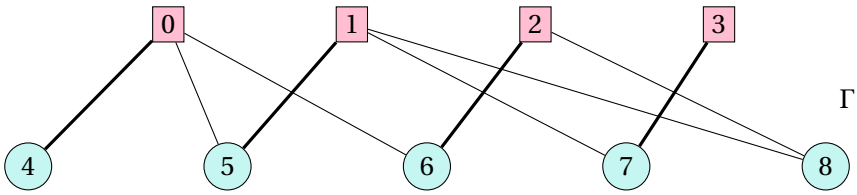
$\Gamma = \{(0,5),(1,7),(2,6)\}$
$\pi = \{3,7,1,5,0,4\}$

On en déduit un nouveau couplage $\Gamma = \Gamma \Delta \pi$:



$\Gamma = \{(0,4),(1,5),(3,7)\}$

On effectue **un appel récursif** et on trouve une arête dont les sommets sont tous les deux exposés : $(2,6)$. On effectue un dernier appel récursif et l'algorithme se termine car un seul sommet est non couplé.



$\Gamma = \{(0,4),(1,5),(3,7),(2,6)\}$

FIGURE 8 – Étapes de l'algorithme de recherche d'un couplage de cardinal maximum

F Pour aller plus loin --→ HORS PROGRAMME

a Affectation de ressources

Si les arêtes du graphe sont valuées (graphe pondéré), alors la recherche d'un couplage de cardinal maximum et de poids minimum dans un graphe biparti est en fait le problème de l'**affectation des ressources**. Le problème peut être énoncé de la manière suivante :

■ **Définition 17 — Problème d'affectation de ressources.** Soit un ensemble de personnes P et un ensemble de tâches T. Soit le graphe biparti $G = ((P,T),A)$ et une fonction de pondération sur les arêtes $w : A \to \mathbb{R}$. Le problème d'affectation consiste à trouver un couplage $\Gamma \subseteq A$ tel que :

- $|\Gamma| = |T|$,
- et la somme $\sum_{a \in \Gamma} w(a)$ est minimale.

L'algorithme hongrois résout ce problème en $O(n^4)$.

b Mariages stables ou appariement de ressources

Si les sommets du graphe biparti expriment des vœux de préférences, alors le problème considéré est celui des mariages stables. Ceci n'est pas au programme mais pourrait intéresser des rédacteurs d'épreuves de concours. Si vous avez du temps libre, les algorithmes d'acceptation différée [**gale_college_1962**] et des cycles d'échanges optimaux [**shapley_cores_1974**] sont à considérer.

La difficulté réside dans la capacité relative des algorithmes d'appariement de ressources de satisfaire les critères suivants :

Efficacité c'est-à-dire la satisfaction des préférences exprimées des candidats. Il s'agit de chercher à améliorer la satisfaction d'un candidat sans diminuer celle d'un autre.

Équité c'est-à-dire le respect des priorités émises par les institutions pour chaque candidat. Il n'est pas souhaitable en effet qu'un candidat plus prioritaire et désirant intégrer cette institution se voit refuser l'entrée alors qu'un autre candidat moins prioritaire y est admis.

Non manipulabilité c'est-à-dire la meilleure stratégie pour un candidat consiste toujours à classer ses vœux dans l'ordre réel de ses préférences, quels que soient les vœux soumis par les autres candidats. Il s'agit d'empêcher les stratégie individuelles de positionnement. Certains candidats pourraient être tentés par exemple de ne postuler qu'à certaines institutions pour lesquelles ils estiment avoir une chance. Il est possible aussi que les institutions manipulent l'algorithme.

Aucun algorithme n'est optimal sur ces trois critères, mais certains algorithmes comme [**gale_college_1962**] et [**shapley_cores_1974**] réalisent des compromis optimaux sur deux des trois critères et font au mieux sur le troisième. Le premier est non manipulable et respecte les priorités des candidats, mais ne produit pas nécessairement un appariement efficace. Le second algorithme est

également non manipulable mais produit un appariement efficace au prix d'une possible violation des priorités des candidats.