Synthèse sur les langages et automates

OPTION INFORMATIQUE - TP n° 4.3 - Olivier Reynet

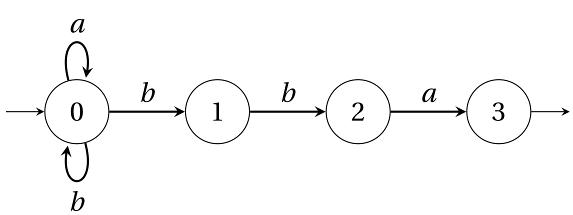
À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ Utiliser les définitions des mot et des langages
- ☞ Simplifier les expressions régulières
- ☞ Trouver le langage associé à une expression régulière
- ☞ Construire l'automate correspondant à un langage régulier
- ☞ Déterminiser un AFND
- ☞ Transformer une expression régulière en AFND avec Thompson ou Berry-Sethi
- ☞ Transformer un automate en une expression régulière
- ☞ Montrer qu'un langage n'est pas régulier

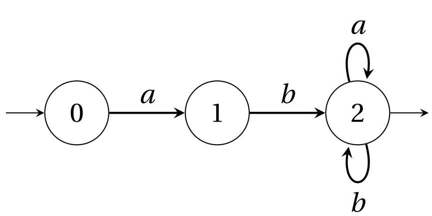
A Automate vers expression régulière

Pour les automates suivants, donner une expression régulière telle que le langage reconnaissable par l'automate est le langage dénoté par l'expression régulière. On éliminera les états après avoir normalisé l'automate en entrée et en sortie.

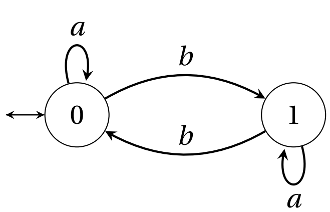
A1.

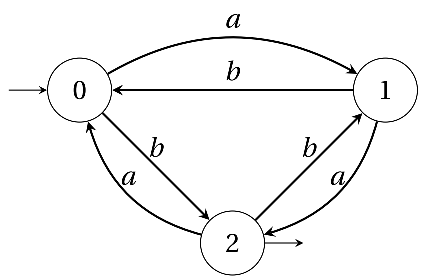


A2.



A3.



A4. 

B Expression régulière vers automate

Pour chaque expression régulière, appliquer :

1. l'algorithme de Berry-Sethi, trouver l'automate de Glushkov et le déterminer si besoin.
2. l'algorithme de Thompson (méthode compositionnelle), trouver l'automate et éliminer les transitions spontanées.

B1. $a|b$

B2. $a^* b$

B3. $(a|b)^* a$

B4. $(a|b) a^* b^*$

B5. $(a^* b)|(a(a|b)^*)$

B6. $(ba|a)^* ab$

B7. $(a|c)^* abb|(a|c)^*$

B8. $(ba|a)^* (a|b) c$

C Stabilité des langages réguliers

C1. Soit Σ un alphabet et $\mathcal{L}$ un langage régulier sur Σ. Montrer que le complémentaire de $\mathcal{L}$, $C(\mathcal{L}) = \overline{\mathcal{L}} = \left\{w, w \in \Sigma^* \text{ et } w \notin \mathcal{L}\right\}$, est régulier.

C2. Soit Σ un alphabet, $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux langages réguliers sur Σ. Montrer que $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ est un langage régulier.

C3. Soit Σ un alphabet, $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ deux langages réguliers sur Σ. Montrer que $\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2$ est un langage régulier.

C4. Soit Σ un alphabet et $\mathcal{L}$ un langage régulier sur Σ. On définit le mot miroir de $w = a_1 a_2 \dots a_n$ par $w^R = a_n a_{n-1} \dots a_1$ et le langage miroir $\mathcal{L}^R = \{u \in \Sigma^*, u^R \in \mathcal{L}\}$. Montrer que $\mathcal{L}^R$ est régulier.

C5. Soit Σ un alphabet et $\mathcal{L}$ un langage régulier sur Σ. Montrer que $\text{Pref}(\mathcal{L}) = \{u \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^*, uv \in \mathcal{L}\}$, l'ensemble de mots préfixes de $\mathcal{L}$, est un langage régulier.

C6. Soit Σ un alphabet et $\mathcal{L}$ un langage régulier sur Σ. Montrer que $\text{Suff}(\mathcal{L}) = \{v \in \Sigma^*, \exists u \in \Sigma^*, uv \in \mathcal{L}\}$, l'ensemble de mots suffixes de $\mathcal{L}$, est un langage régulier.

C7. Soit Σ un alphabet et $\mathcal{L}$ un langage régulier sur Σ. Montrer que $\text{Fact}(\mathcal{L}) = \{w \in \Sigma^*, \exists u, v \in \Sigma^*, uwv \in \mathcal{L}\}$, l'ensemble de mots facteurs de $\mathcal{L}$, est un langage régulier.

C8. Soit Σ un alphabet et $\mathcal{L}$ un langage régulier sur Σ. On définit le langage racine $\sqrt{\mathcal{L}}$ par :

$$\sqrt{\mathcal{L}} = \{u \in \Sigma^*, uu \in \mathcal{L}\} \tag{1}$$

Montrer que $\sqrt{\mathcal{L}}$ est régulier en vous appuyant sur l'automate reconnaissant le langage $\mathcal{L}$.

C9. Montrer que tout langage fini est un langage régulier.

D Lemme de l'étoile et non régularité

D1. Montrer que les langages ci-dessous ne sont pas réguliers.

(a) $\mathcal{L}_1 = \{a^p$, p est premier$\}$

(b) $\mathcal{L}_2 = \{w \in \Sigma^*, \Sigma = \{a, b\}, w$ possède autant de a que de b$\}$

(c) $\mathcal{L}_3 = \{a^i b^j, i < j\}$

(d) $\mathcal{L}_4 = \{a^p$, p n'est pas premier$\}$

D2. Montrer que l'ensemble des mots de Dyck $\mathcal{D}$ n'est pas un langage régulier. On rappelle que $\mathcal{D}$ est l'ensemble de mots bien parenthésés sur un alphabet fini de parenthèses ouvrantes et fermantes. Par exemple, sur la paire de parenthèses formée de (et), le mot (())() est un mot bien parenthésé, alors que le mot ())(ne l'est pas.

D3. Soit $\Sigma = \{a, b\}$ un alphabet à deux lettres et $\mathcal{L}_{pal}$ lensemble des palindromes sur Σ. Montrer que $\mathcal{L}_{pal}$ nest pas un langage régulier.