

Syntaxe des formules logiques

OPTION INFORMATIQUE - TP n° 1.1 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ✎ utiliser la définition inductive des formules logiques pour calculer la hauteur ou la taille
- ✎ construire une table de vérité
- ✎ calculer une forme normale conjonctive ou disjonctive associée à une formule logique
- ✎ modéliser un énoncé simple du langage naturel en propositions logiques

A Définition inductive des formules logiques

En s'inspirant de la définition inductive des formules logiques, on se dote du type de données OCaml formule suivant :

```
1 type formule =  
2   | T (* true *)  
3   | F (* false *)  
4   | Var of int (* variable *)  
5   | Not of formule (* negation *)  
6   | And of formule * formule (* conjonction *)  
7   | Or of formule * formule (* disjonction *)
```

L'expression `Var of int` signifie qu'on représente les variables d'une formule logique par un numéro, ce qui est le cas dans les logiciels standard de logique. Par exemple, pour les variables des formules ci-dessous, on peut choisir la convention suivante : $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 1$, $c \rightarrow 2$.

A1. Représenter les arbres syntaxiques des formules logiques suivantes, puis les coder en OCaml.

- (a) $f_1 : a \vee (b \wedge c)$
- (b) $f_2 : (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg(c \vee a))$
- (c) $f_3 : \neg a \vee (a \implies b)$
- (d) $f_4 : (a \wedge (b \iff c))$

A2. Proposer une fonction de signature `valuation : int -> bool` qui implémente une valuation des variables propositionnelles a , b et c telle que les formules f_1 et f_2 soient vraies et f_3 et f_4 fausses. On utilisera le filtrage de motif. Les variables sont représentées par leur numéro : $a \rightarrow 0$, $b \rightarrow 1$, $c \rightarrow 2$. Si le numéro de variable n'est pas connu, la fonction échoue et renvoie le message `"Unknown variable"!`.

A3. Écrire une fonction **récursive** de signature `evaluation : (int -> bool) -> formule -> bool` qui évalue une formule logique d'après une valuation donnée. On utilisera le filtrage de motif. Cette fonction s'appuie sur la définition inductive de l'évaluation telle que définie dans le cours :

A4. Vérifier que la valuation choisie est bien telle que spécifiée à la question A.2.

B Taille, hauteur et nombre de termes d'une formule logique

- B1. En utilisant la définition de la fonction `taille` d'une formule logique, écrire une fonction de signature `taille : formule -> int` qui renvoie la taille d'une formule.
- B2. Vérifier sur les arbres des formules f_1 , f_2 , f_3 et f_4 les résultats produits par la fonction `taille`.
- B3. En utilisant la définition de la fonction `hauteur` d'une formule logique, écrire une fonction de signature `hauteur : formule -> int` qui renvoie la hauteur d'une formule.
- B4. Vérifier sur les arbres des formules f_1 , f_2 , f_3 et f_4 les résultats produits par la fonction `hauteur`.
- B5. On code conventionnellement les variables par des entiers en commençant par zéro. Proposer une fonction de signature `max_var : formule -> int -> int` qui renvoie l'entier le plus grand représentant une variable propositionnelle dans une formule. En déduire une fonction `nb_var : formule -> int` qui renvoie le nombre de variables propositionnelles utilisées dans une formule.
- B6. Vérifier sur f_1 , f_2 , f_3 et f_4 les résultats produits par les fonction `highest_var` et `nb_var`.

C De la table de vérité à la forme normale (i)

On considère la formule $\psi = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$.

- C1. Construire l'arbre syntaxique de ϕ .
- C2. Établir la table de vérité de ϕ .
- C3. Proposer une forme normale disjonctive de ϕ
- C4. Proposer une forme normale conjonctive de ϕ

D De la table de vérité à la forme normale (ii)

On considère la formule $\phi = ((a \implies \neg b) \implies \neg a) \wedge c$.

- D1. Construire l'arbre syntaxique de ϕ .
- D2. Établir la table de vérité de ϕ .
- D3. Proposer une forme normale disjonctive de ϕ
- D4. Proposer une forme normale conjonctive de ϕ

E Du langage naturel à la logique propositionnelle

On considère l'énoncé suivant :

Si le professeur a bien dormi, l'examen est conforme aux exercices de TD. Si j'apprends mon cours, je réussis à trouver la solution des exercices de TD. Si je réussis à trouver la solution des exercices de TD et que l'examen est conforme aux exercices de TD, je réussis l'examen.

- E1. Modéliser l'énoncé à l'aide de propositions.
- E2. Peut-on affirmer que, dans tous les cas, si le professeur dort bien, l'élève réussit à l'examen?