

INFORMATIQUE TRONC COMMUN

Classes préparatoires scientifiques

Lycée La Pérouse - Kerichen

Olivier Reynet

16-01-2026

- PYTHON
- PROGRAMMATION IMPÉRATIVE ET RÉCURSIVE
- STRUCTURES DE DONNÉES : LISTES, TABLEAUX, GRAPHES, FILES, PILES
- ALGORITHMIQUE GÉNÉRALE :
 - TRIS
 - RECHERCHE DICHOTOMIQUE
 - GLOUTONS
 - PROGRAMMATION DYNAMIQUE
 - PLUS COURTS CHEMINS DANS UN GRAPHE
- COMPLEXITÉ, TERMINAISON, CORRECTION
- BASES DE DONNÉES RELATIONNELLES ET SQL
- APPRENTISSAGE AUTOMATIQUE
- JEUX

TABLE DES MATIÈRES

I Introduction	3
1 Crayons et questions	5
A L'ingénieur, la construction et le calcul	5
B Programme d'informatique et philosophie de la construction	6
C Pourquoi travailler l'informatique?	7
D Comment travailler l'informatique?	7
2 Comment lire ce cours?	9
A L'informatique et le langage : une histoire de mots	9
B L'anglais et le français	9
C À la frontière du programme officiel --> HORS PROGRAMME	10
★ D Option informatique	10
3 Algorithmes à maîtriser	11
A Rechercher	11
B Tris et complexités associées dans le pire et le meilleur des cas	11
C Calculer	11
D Calculs sur les types structurés	12
E Concepts	12
4 Au commencement, des concepts	13
A Algorithmes, programmes et processus	14
B Langages, compilateurs et machines --> HORS PROGRAMME	15
C Des paradigmes différents --> HORS PROGRAMME	18
D Systèmes d'exploitations --> HORS PROGRAMME	20
E Bibliothèques logicielles	23
II Semestre 1	27
5 Types et opérateurs	29
A Types	29
B Opérateurs	31
C Opérateurs sur les chaînes de caractères	34
D Une variable Python est une référence	34

TABLE DES MATIÈRES

E Mots-clefs du langage	35
6 Structurons	39
A Anatomie d'un programme Python	39
B Programmation structurée	41
C Fonctions Python	45
D Conventions de nommage	48
7 Listes Python	51
A Constructeurs de listes	51
B Opérations sur une liste	53
C Concaténation et démultiplication de listes	54
D Des listes indéclables	54
E Des listes itérables	55
F Des listes tronçonnables	55
G Les algorithmes simples mais incontournables	55
H Listes, copies et références	57
I Listes, paramètres et fonctions	58
J Tuples	59
8 Trier	61
A Comment caractériser un algorithme de tri?	62
B Trier un tableau	62
C Comparatif des tris	64
D Trier avec les fonctions natives de Python	64
9 Rechercher	67
A Recherche séquentielle	67
B Recherche dichotomique	68
C Compter les opérations	70
10 Récursivité	75
A Principes de la programmation récursive	75
B Types de récursivité	77
C Du récursif à l'itératif --> HORS PROGRAMME	79
11 Tableaux statiques	81
A Type abstrait de données et structure de données --> HORS PROGRAMME	81
B TAD tableaux et listes --> HORS PROGRAMME	83
C Implémentation des tableaux --> HORS PROGRAMME	84
D Bilan de complexités	86
E Pourquoi Numpy? --> HORS PROGRAMME	86
F Importation	88
G Créer des vecteurs, des matrices ou des tableaux	88
H Accéder aux éléments d'un tableau	90

TABLE DES MATIÈRES

I	Opérations élément par élément	91
J	Opérations matricielles	92
K	Types de données	92
L	Autres fonctions	93
III	Semestre 2	95
12	Terminaison et correction	97
A	Un programme se termine-t-il?	97
B	Variant de boucle	99
C	Démontrer la terminaison d'un algorithme	99
D	Le résultat est-il correct?	102
E	Invariant de boucle	103
13	Complexité	107
A	Complexités algorithmiques	107
B	Notation asymptotique	108
C	Typologie de la complexité	111
D	Calcul du coût d'une instruction	111
E	Calculs classiques de complexité	112
F	Diviser pour régner	114
G	Exemple de la recherche dichotomique	115
H	Exemple de l'exponentiation rapide	117
I	Exemple du tri fusion	117
J	Exemple du tri rapide	121
K	Complexité de l'algorithme d'Euclide	122
L	Synthèse	124
14	Algorithmes gloutons	125
A	Problème d'optimisation	125
B	Algorithmes gloutons	126
C	Modélisation	127
D	Exemple du sac à dos	130
E	Gloutonnerie et dynamisme	131
15	Les mots des graphes	133
A	Typologie des graphes	133
B	Implémentation des graphes	137
C	Caractérisation structurelle des graphes	138
D	Isomorphisme des graphes	140
E	Chaînes, cycles et parcours	142
F	Sous-graphes et connexité	144
G	Coloration de graphes	145
H	Distances	148

TABLE DES MATIÈRES

I	Arbres	148
J	Exemples d'utilisation simple des graphes	149
16 Propriétés des graphes		151
A	Des degrés et des plans	151
B	Caractérisation des chaînes, des cycles et des graphes	152
C	Graphes acycliques et connexes	153
D	Coloration, graphes planaires et nombre chromatique	154
E	Principe d'optimalité et plus court chemin dans un graphe	154
17 Algorithmes des graphes		155
A	Parcours d'un graphe	155
B	Parcours en largeur	156
C	Parcours en profondeur	160
D	Trouver un chemin dans un graphe non pondéré	161
E	Plus courts chemins dans les graphes pondérés	163
18 Des nombres		169
A	Des cailloux à compter	169
B	Cardinal d'un ensemble	169
C	Peut-on construire l'ensemble \mathbb{N} ?	170
D	Ensembles usuels	170
E	Formalisation de la numération de position	171
F	Écriture d'un entier dans base quelconque	173
G	Changement de base	175
H	Nombres décimaux et dyadiques	177
I	De l'écriture des nombres rationnels	178
J	Arrondis et erreurs	179
19 Représentation des nombres entiers		181
A	Encoder un entier naturel	181
B	Encoder un entier relatif	183
20 Représentation des nombres réels		187
A	Calculs à virgule fixe --- HORS PROGRAMME	187
B	Représentation à virgule flottante	190
C	Calcul avec les flottants --- HORS PROGRAMME	196
D	Conséquence des erreurs et des arrondis	198
E	Bilan	199
21 Bonnes pratiques		201
A	Défendre le code : pourquoi et comment?	201
B	Spécifier	204
C	Écrire un code intelligible	205
D	Tester son code et le maintenir	207

TABLE DES MATIÈRES

IV Semestre 3	211
22 Dictionnaires	213
★ A Type abstrait de données et structure de données	213
★ B TAD Tableau	215
C TAD Dictionnaire	215
★ D Implémentation d'un TAD dictionnaire	217
E Dictionnaires Python	218
F Tables de hachage	221
23 Programmation dynamique	227
A Motivations	227
B Exemples simples de chevauchements des sous-problèmes	229
C Principes de la programmation dynamique	231
D Principe d'optimalité et plus court chemin dans un graphe	232
E Le retour du sac à dos	237
F Programmation dynamique itérative (approche ascendante)	241
G Programmation dynamique récursive (approche descendante)	241
24 Bases de données relationnelles	243
A Pourquoi?	243
B Données et gestion des données	244
C De la conception à l'implémentation physique	245
D Le modèle relationnel	251
E Traduction des associations dans le modèle relationnel	253
F Du modèle physique à la création des tables --> HORS PROGRAMME	258
25 Modèle relationnel et langage SQL	261
A Requêtes SQL	261
B Projection : SELECT ...FROM	264
C Sélection : WHERE	265
D Jointure : JOIN ...ON	267
E Agréger, grouper et filtrer des résultats	270
F Opérations ensemblistes	272
G Requêtes imbriquées	272
H De belles requêtes SQL	273
26 Et la machine apprit	275
A Principes	275
B Objectifs et algorithmes	276
C Données	277
D Apprentissage supervisé : k plus proches voisins	281
E Apprentissage non supervisé : k-moyennes	286

TABLE DES MATIÈRES

27 Théorie des jeux	289
A Introduction à la théorie des jeux	290
B Nature de l'information des jeux	292
C Forme extensive d'un jeu séquentiel (Arbre de jeu)	293
D Jeux d'accessibilité	295
E Noyau d'un graphe de jeu --> HORS PROGRAMME	297
F Arène de jeu d'un jeu d'accessibilité	298
G Stratégies et positions	300
H Attracteurs	300
★ I Solution des jeux de Nim et impartialaux --> HORS PROGRAMME	302
28 Exploration et heuristiques	305
A Au-delà des jeux d'accessibilité, les heuristiques	305
B Algorithme Minimax	306
C Élagage $\alpha\beta$ sur un arbre Minimax --> HORS PROGRAMME	308
D A* pour trouver un chemin	308
V Annexes	315
Bibliographie	317
Articles	317
Livres	318
Vidéos	318
Sites web	318
Tables de figures	319
Tables de tableaux	325
Tables de codes	327
Index	329

LISTE DES ALGORITHMES

1	Produit de deux nombres	14
2	Produit de deux nombres entiers avec boucle inconditionnelle	43
3	Produit de deux nombres entiers avec boucle conditionnelle	44
4	Tri par sélection	63
5	Tri par insertion	63
6	Tri par comptage	64
7	Recherche séquentielle d'un élément dans un tableau	67
8	Recherche d'un élément par dichotomie dans un tableau trié	69
9	Recherche d'un élément par dichotomie dans un tableau trié, renvoyer l'indice minimal en cas d'occurrences multiples.	69
10	Recherche séquentielle d'un élément dans un tableau	71
11	Tri par insertion, calcul du nombre d'opérations	72
12	Factoriel récursif	76
13	Recherche récursive d'un élément par dichotomie dans un tableau trié	78
14	Est-il mon aïeul?	78
15	Factoriel récursif terminal → HORS PROGRAMME	79
16	Algorithme récursif terminal	79
17	Version itérative d'un algorithme récursif terminal	80
18	Factoriel itératif	80
19	Test de la terminaison de l'algorithme SOUS_TEST	98
20	Calcul des éléments de la suite de Syracuse	98
21	Produit de deux nombres entiers naturels, quel pourrait être un variant?	100
22	Produit de deux nombres entiers naturels, quel pourrait-être un variant?	100
23	Boucle infinie (à ne pas reproduire!)	101
24	Boucle infinie, condition d'arrêt sur un flottant (ne pas reproduire!!!)	101
25	Factoriel récursif	102
26	Division euclidienne $a = bq + r$	104
27	Exponentiation rapide, version itérative	105
28	Calcul de a^n	112
29	Multiplication élément par élément d'une matrice carrée $(n, n) : M \rightarrow \alpha M$	112
30	Accumuler	113
31	Appliquer une fonction et accumuler	113
32	Diviser, résoudre et combiner (Divide And Conquer)	115
33	Recherche récursive d'un élément par dichotomie dans un tableau trié	116
34	Exponentiation rapide a^n	117

35	Tri fusion	118
36	Découper en deux	119
37	Fusion de deux sous-tableaux triés	119
38	Tri rapide	121
39	Partition en deux sous-tableaux	121
40	Algorithme d'Euclide (optimisé)	122
41	Principe d'un algorithme glouton	127
42	Réservation d'une place au port (Version simplifiée)	128
43	Problème du sac à dos	131
44	Parcours en largeur d'un graphe	156
45	Parcours en profondeur d'un graphe (version récursive)	160
46	Parcours en profondeur d'un graphe (version itérative)	160
47	Longueur d'une chaîne via un parcours en largeur d'un graphe non pondéré	162
48	Algorithme de Dijkstra, plus courts chemins à partir d'un sommet donné	164
49	Fibonacci récursif (approche descendante)	230
50	Fibonacci itératif, sans calculs redondants (approche ascendante)	230
51	Algorithme de Bellman-Ford, plus courts chemins à partir d'un sommet donné	233
52	Algorithme de Floyd-Warshall, plus courts chemins entre toutes les paires de sommet	236
53	KP(n, π) par programmation dynamique	241
54	KP(n, π) par programmation récursive brute	242
55	KP(n, π) par programmation dynamique et mémoïsation	242
56	k plus proches voisins (KNN)	281
57	k-moyennes	286
58	Minimax	309
59	Minimax avec élagage $\alpha\beta$	310

Première partie

Introduction

1

CRAYONS ET QUESTIONS

Proverbe chinois : «Celui qui pose une question risque cinq minutes d'avoir l'air bête, celui qui ne pose pas de question restera bête toute sa vie».

Bernard Werber, dans les Thanatonautes

Les crayons c'est pas du bois et de la mine, c'est de la pensée par les phalanges.

Henri de Toulouse Lautrec

À la fin de ce chapitre, je sais :

 pourquoi et comment travailler l'informatique.

A L'ingénieur, la construction et le calcul

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il peut être utile de s'interroger sur la finalité potentielle de vos études et donc, de se demander ce que recouvre la profession d'ingénieur : qu'est-ce qu'un ingénieur ?

Le technicien est celui à qui on confie une mission qu'il sait faire. Un ingénieur, c'est celui à qui on confie une mission qu'il va savoir faire : la réponse n'existe pas nécessairement sur étagère, il lui faut souvent la construire, la calculer. Or, dans le monde de l'industrie actuelle, les caractéristiques des objets développés font vous ne pouvez rien construire sans l'informatique.

Si vous voulez être un ingénieur capable, il vous faut donc maîtriser l'informatique, tout comme vos ancêtres avant vous ont appris à maîtriser le crayon, les abaques, la règle, le compas, la trigonométrie, la corde à noeuds, le calcul dans le système de numération de position,

les tables de logarithmes, la règle à calcul et les machines à calculer. Ce n'était pas un choix mais une évidence qui s'imposait, cela facilitait la construction et les calculs. **Aujourd'hui, l'évidence informatique s'impose à vous de la même manière et tout en vous confiant une puissance de calcul inégalée : à vous de la maîtriser.**

B Programme d'informatique et philosophie de la construction

Comme cela est détaillé au chapitre 4, **l'informatique est la science de la construction de l'information par le calcul.** Le programme officiel d'informatique est à consulter en ligne. Il est très précis et vaste et indique clairement ce qu'il faut savoir et savoir faire. Il précise également à la fin les éléments du langage Python que l'on attend que vous maîtrisiez.

Un extrait me semble particulièrement important :

La pratique régulière de la résolution de problèmes par une approche algorithmique et des activités de programmation qui en résultent constitue un aspect essentiel de l'apprentissage de l'informatique.

Cette pratique régulière se fait en TP. Les TP qui vous sont proposés présentent des problèmes et montrent une voie pour construire une solution à ce problème. Car *résoudre par une approche algorithmique des problèmes*, cela signifie construire une solution à un problème.

D'une manière générale, les TP sont importants, notamment car il n'est pas prévu dans le programme officiel de cours magistraux au premier semestre. Les TP abordent les sujets du programme dans un ordre logique, en commençant par les concepts les plus faciles. Par ailleurs, mes TP sont progressifs, les questions les plus faciles se trouvent au début et les plus difficiles à la fin. Un TP raconte une histoire : il s'agit souvent de construire¹ une information, de la faire apparaître : un message secret, la solution à un problème concret ou la stratégie gagnante d'un jeu. Cette construction se fait par étapes, progressivement, tout au long du TP. Cette philosophie s'inspire des épreuves de concours qui vous présentent également la construction d'une information autour d'un thème, si bien que chaque TP vous prépare davantage au concours.

Tout ingénieur sait que pour bien construire, il faut commencer par bien bricoler : bricoler en informatique, cela signifie imaginer des algorithmes sur des cas simples, les implémenter, tester les codes et recommencer sur des situations plus complexes. Se construire des outils pour en construire d'autres encore plus puissants, tout comme le bricoleur élabore parfois un outil dédié pour réussir une opération mécanique délicate. L'avantage de l'informatique, c'est qu'on ne risque ni de casser quelque chose, ni de se faire mal : au pire, on a fabriqué un outil et on appréhende mieux une situation problème. Alors, bricolons !

1. Programmer, c'est bricoler de l'information!

C Pourquoi travailler l'informatique?

Il est pertinent de travailler l'informatique parce que² :

1. l'informatique rapporte des points aux concours, points qui font la différence,
2. ces points sont plus faciles à gagner que les points en mathématiques,
3. on manque d'ingénieries et d'ingénieurs capables dans le domaine,
4. l'évolution de votre carrière ne sera pas la même si vous savez utiliser pertinemment l'informatique dans votre contexte professionnel,
5. l'informatique façonne et façonnera toute votre vie. Tout simplement.
6. l'informatique, c'est passionnant.

D Comment travailler l'informatique?

Mon cours en ligne suit exactement le programme officiel. Sur ce site, vous trouverez tous les cours et tous les TP de chaque semestre, avec les solutions. Ils sont à votre disposition dans un but précis : aider simultanément ceux qui ont le plus de difficultés et ceux qui veulent aller plus loin.

Sur le plan matériel, l'informatique étant aujourd'hui ubiquitaire, vous pouvez travailler sur n'importe quel ordinateur³ ainsi que sur vos tablettes ou smartphones. Après avoir installé l'interprète Python, un simple éditeur de texte suffit généralement pour composer les codes. Cependant, un environnement de développement logiciel (IDE en anglais) est souvent un plus en termes de lisibilité et d'intelligibilité du code ainsi qu'en termes de rapidité de développement. Généralement, les classes préparatoires utilisent Pyzo, un IDE orienté calcul scientifique qui a le mérite d'être simple, disponible sur tous les OS et libre.

Sur le plan pédagogique, les sections qui suivent donnent quelques conseils éclairés.

a Avant le TP

- Lire le cours associé au TP : cela veut dire se poser des questions sur le sens du chapitre en prenant des notes sur les concepts présentés (avec un crayon et du papier).
- Lire le TP en entier.
- Préparer les premières questions du TP à l'écrit (avec un crayon et du papier).

b Pendant le TP sur machine

- Ne pas hésiter à prendre le clavier et la souris. Les partager avec son binôme régulièrement. Il faut être acteur de son apprentissage et à l'écoute.
- Quand on n'a pas le clavier, on peut écrire, imaginer et proposer des solutions (avec un crayon et du papier).

2. du plus pragmatique au plus important!

3. car Python est un langage interprété

- Commenter ou prendre des notes sur les points les plus difficiles ou les plus importants du TP (avec un crayon et du papier).
- Interpeler régulièrement l'enseignant et lui poser les questions en lien avec le TP et le cours.

c Après le TP

- Finir le TP si vous n'avez pas eu le temps de finir en classe.
- Poser des questions s'il y a encore des zones d'ombres.
- Écrire une petite synthèse sur le TP que vous pourrez relire avant le devoir (avec un crayon et du papier).
- Suggérer des améliorations au professeur.

d Sur le long terme (trois semestres mois)

- Lire le cours en avance de phase : on comprend toujours mieux la deuxième fois et encore mieux la troisième !
- Poser des questions : à l'oral, par écrit.
- Repérer ses lacunes et les combler : syntaxe du langage, compréhension des structures et des algorithmes, intérêts des concepts. Il est souvent plus chronophage d'avoir des lacunes que de les combler.
- S'entraîner avec un autre élève : se poser des questions, tester l'autre sur la compréhension, expliquer à l'autre les concepts que l'on a soi-même compris. C'est ainsi que vous progresserez vite.
- Créer un lien entre les différents thèmes étudiés. Par exemple, se demander pourquoi je vous présente la récursivité avant les approches divisor pour régner et gloutonne ?
- Associer un exemple concret à chaque concept (généralement abstrait) et être capable de l'expliquer à un autre. Par exemple, associer l'exemple du Morpion à l'algorithme Minimax ou la programmation dynamique au problème du sac à dos.

Pour plus d'éléments sur les techniques d'apprentissage, je vous conseille le site The Learning Scientist.

2

COMMENT LIRE CE COURS ?

Raisonner sur la matière et l'énergie, et raisonner sur l'information, c'est très différent.

Gérard Berry

À la fin de ce chapitre, je sais :

 lire ce cours

A L'informatique et le langage : une histoire de mots

■ **Définition 1 — Informatique.** L'informatique est la science du traitement automatique et rationnel de l'information par un système concret ou abstrait.

L'informatique traitant de l'information, il y est naturellement question de langages. Comment parler de l'information sans utiliser et maîtriser le langage en général? Comment maîtriser un langage sans connaître le sens des mots? La plupart des difficultés de l'informatique peuvent être dépassées si l'on maîtrise la définition des concepts. C'est pourquoi celles-ci sont bien mises en évidence dans ce cours.

B L'anglais et le français

Le français est la langue privilégiée de ce cours, celle qui permet d'expliquer et de comprendre. Mais, les codes informatiques présentés privilégient l'anglais : la raison principale de ce choix réside dans le fait qu'il est beaucoup plus difficile pour un être humain d'appréhender un mélange de langues plutôt que d'en lire un seule à la fois. C'est pourquoi j'essaie de ne pas mélanger les langues, tout en les pratiquant toutes.

L'influence de la langue anglaise étant malgré tout très forte dans le domaine de l'informatique, je précise les correspondances avec le français et les nuances terminologiques dans des paragraphes dédiés nommés *vocabulary*.



Vocabulary 1 — Word ⇔ mot.

Si au cours de votre lecture, vous trouvez des erreurs ou des coquilles, n'hésitez pas à me les signaler!

a Des remarques particulières et des méthodes

P Certains paragraphes commencent par ce symbole P dans un rond turquoise : cela signifie qu'ils traitent plus particulièrement du langage Python. Si vous voulez aller vite, vous pouvez vous concentrer dans un premier temps sur leur lecture.

Certains de ces paragraphes sont essentiels pour bien réussir les épreuves d'informatique commune des concours. Ceux-ci finissent la plupart du temps ainsi :



Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

R D'autres remarques d'ordre plus général figurent ainsi, dans un paragraphe commençant par un R dans un rond.

M **Méthode 1 — Méthode** Certains paragraphes sont identifiés comme étant des méthodes. Ils sont à connaître car utiles pour progresser efficacement.

C À la frontière du programme officiel → HORS PROGRAMME

R Certaines sections marquées → HORS PROGRAMME présentent des notions hors programme officiel. Néanmoins, elles ont souvent un grand intérêt pour la compréhension de l'informatique en général et certaines épreuves de concours se jouent à la frontière du programme.

★ D Option informatique

R Certaines sections sont marquées d'une étoile signifiant que le contenu de la section est davantage destiné aux élèves qui suivent l'option informatique. La lecture de ce paragraphe est certainement intéressante pour comprendre en profondeur mais pas nécessaire pour l'épreuve d'informatique commune.

3

ALGORITHMES À MAÎTRISER

One learns from books and example only that certain things can be done. Actual learning requires that you do those things.

Frank Herbert

A Rechercher

- rechercher l'élément maximum ou minimum d'un tableau (cf. listing 7.1)
- rechercher l'indice du maximum ou du minimum d'un tableau (cf. listing 7.1)
- rechercher un élément de manière séquentielle dans un tableau non trié (cf algorithme 7)
- rechercher par dichotomie un élément dans un tableau trié (en itératif ou récursivement) (cf. algorithmes 8 et 13)

B Tris et complexités associées dans le pire et le meilleur des cas

- tri par insertion (cf. algorithme 5)
- tri fusion (cf. algorithme 35)
- tri rapide (cf. algorithme 38)
- tri par comptage (cf. algorithme 6)

C Calculer

- calculer la moyenne d'une série de valeur dans un tableau (cf. code 7.1)
- calculer la médiane d'une série de valeur dans un tableau trié

- calculer factoriel (en itératif ou récursivement)
- calculer les termes de la suite de Fibonacci (en itératif ou récursivement)
- créer et initialiser un tableau Numpy de dimension quelconque.
- calculer une formule simple (de type $2\nu sin(2\pi\omega t)$) vectoriellement avec Numpy
- calculer une exponentiation rapide (en récursif) (cf. algorithme 34)
- calculer le PGCD de deux entiers, algorithme d'Euclide (en itératif ou récursivement)
- évaluer un polynôme avec la méthode d'Horner (cf. TP Complexité)
- calculer le produit scalaire de deux vecteurs
- calculer la distance euclidienne de deux points dans un espace de dimension n (cf. TP Machine Learning)

D Calcul sur les types structurés

- Chaînes de caractères : concaténer, parcourir
- Listes : créer, initialiser, parcourir, indexer (négatif, plage), tronçonner, éliminer des doublons (unique), mettre à plat une liste imbriquée,
- Dictionnaire : rechercher une clef, insérer une (clef,valeur), modifier une (clef,valeur), compter les occurrences des éléments d'une liste, utiliser un dictionnaire en programmation dynamique (mémoïsation) comme alternative à un tableau,
- Tableaux numpy : créer, initialiser, obtenir les dimensions (shape), parcourir, indexer (négatif, plage), tronçonner, opérer élément par élément (calcul vectoriel),
- Graphe : manipuler sous la forme d'une liste d'adjacence ou de matrice d'adjacence, parcourir en largeur, transposer un graphe orienté.

E Concepts

- Programmation structurée impérative
- Programmation procédurale : les fonctions, les paramètres d'entrées, valeur retournée
- Récursivité
- Complexité
- Représentation des nombres en machine (entiers signés, non signés et flottants)
- Algorithmes de décomposition : diviser pour régner, gloutons et programmation dynamique de bas en haut et par mémoïsation
- Apprentissage, prédiction, classification et régression : KNN et K-means,
- Arène/Arbre de jeu, attracteur, stratégie, minimax
- Requêtes SQL

4

AU COMMENCEMENT, DES CONCEPTS

Swamp King : One day all this will be yours!
Herbert : What, the curtains ?

The Holy Grail, Monty Python

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ Expliquer ce qu'est l'informatique
- ☒ Distinguer les concepts d'algorithme, de programme et de processus
- ☒ Lister les grandes caractéristiques du langage Python
- ☒ Importer des fonctions d'une bibliothèque (module Python)

Ce premier chapitre n'explique pas dans le détail tous les concepts présentés. Cependant les TP du premier semestre permettent d'approfondir ces concepts et complémentent cette lecture.

Parler d'informatique nécessite de parler de l'information et des langages informatiques qui véhiculent ces informations. Parler des langages, c'est tenter de décrire les mots de ce langage, de la structure qui relie ces mots entre eux et de leur pouvoir. Pour parler de mots, il faut tout d'abord se mettre d'accord sur le sens de ces mots.

■ **Définition 2 — Information.** Une information^a est un élément de connaissance traduit par un ensemble de signaux selon un code déterminé, en vue d'être conservé, traité ou communiqué.

a. D'après le dictionnaire de l'académie française

A Algorithmes, programmes et processus

■ **Définition 3 — Informatique.** L'informatique est la science du traitement automatique et rationnel de l'information par un système concret ou abstrait.

Formulé plus simplement, on peut dire que **l'informatique est la science de la construction de l'information par le calcul.**

 **Vocabulary 2 — Computer Sciences and Computer Engineering** ↔ Les anglo-saxons font une distinction entre l'informatique comme science abstraite (Computer Sciences) et l'informatique comme science concrète appliquée (Computer Engineering). En français, l'informatique désigne les deux, ce qui est important, l'une n'allant pas sans l'autre. Que ferait-on de la physique théorique sans l'expérience? Que ferait-on de l'informatique sans l'électronique?

L'informatique, tout comme la physique ou la chimie, fait appel aux mathématiques pour **modéliser** un problème et démontrer des propriétés. Mais à la différence des mathématiques qui se permettent souvent de manipuler des objets qu'on ne sait pas construire, l'informatique est une science **constructiviste** : lorsqu'on résout un problème en informatique, on construit la solution à l'aide d'un algorithme.

■ **Définition 4 — Algorithme.** Un algorithme est une méthode pour résoudre un problème donné. Cette méthode est constituée d'une suite d'instructions qui permet de trouver une solution au problème.

■ **Exemple 1 — Produit de deux nombres.** L'algorithme 1 calcule le produit de deux nombres.

Algorithme 1 Produit de deux nombres

1: Fonction PRODUIT(a, b)	$\triangleright a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$.
2: $p \leftarrow 0$	
3: $c \leftarrow 0$	$\triangleright c$ est un entier.
4: tant que $c < a$ répéter	
5: $p \leftarrow p + b$	
6: $c \leftarrow c + 1$	
7: renvoyer p	

On s'efforce généralement :

- de rendre un algorithme non ambigu,
- d'identifier clairement les entrées et les sorties ,
- de décrire un algorithme avec suffisamment d'abstraction afin de rendre de son implémentation indépendante du langage de programmation choisi.

R L'élaboration d'un algorithme n'est pas un exercice théorique. Au contraire c'est dessinant au brouillon, en émettant des hypothèses simplificatrices, en bricolant et en tâtonnant que l'on parvient généralement à écrire un algorithme qui fonctionne.

Le développement de l'informatique s'appuie fortement sur la logique, la théorie des graphes, la théorie des langages et des automates. Ces théories contribuent à la fois à son développement théorique et à son développement concret, c'est-à-dire électronique.

■ **Définition 5 — Programme.** Un programme est un ensemble d'instructions dans un langage de programmation donné.

R Il est important de savoir passer de l'expression d'un algorithme à un programme et, dans le cadre des épreuves des concours, à un programme en Python! L'expression de l'algorithme dans les épreuves est le plus souvent sous la forme d'un texte, c'est-à-dire qu'on décrit l'algorithme avec des **phrases**^a. Le code 4.1 traduit l'algorithme 1 en Python.

a. ce qui ne simplifie pas la tâche du candidat qui doit savoir lire et interpréter...

Code 4.1 – Un exemple de programme en Python - traduction de l'algorithme produit

```
def produit(a, b):    # une fonction
    p = 0
    c = 0
    while c < a:
        p = p + b
        c = c + 1
    return p

# Debut du programme principal
print("Le produit de 2 par 21 vaut :", produit(21, 2))
```

R Si un algorithme est abstrait, un programme est concret, c'est-à-dire qu'il est interprétable soit par un processeur directement, soit par un interpréteur (machine virtuelle). On peut donc demander à une machine d'exécuter un programme, mais on ne peut pas lui demander d'exécuter directement un algorithme.

■ **Définition 6 — Processus.** Un processus est un programme en cours d'exécution sur une machine, c'est-à-dire un processeur muni d'une mémoire et d'un système d'exploitation.

B Langages, compilateurs et machines --> HORS PROGRAMME

■ **Définition 7 — Langage de programmation.** Un langage de programmation est une notation normée dont l'objectif est d'implémenter des algorithmes.

■ **Exemple 2 — Langages de programmation.** Parmi les langages de programmation les plus utilisés actuellement on peut citer : C, C++, Java, Python ou Javascript. On choisit un langage plutôt qu'un autre en fonction de l'application visée. Javascript est par exemple un langage plutôt orienté web. C est plutôt dédié aux systèmes embarqués et bas niveau.

■ **Définition 8 — Compilateur.** Un compilateur est un logiciel qui transforme un langage en un autre. Le langage des données d'entrée est dit *langage source* et celui des données de sortie *langage cible*.

■ **Définition 9 — Langage machine.** Le langage machine est le langage d'un processeur. Il est composé d'instructions très élémentaires de type :

- mettre une donnée dans une case mémoire,
- modifier le contenu d'une case mémoire (opérations arithmétiques et logiques),
- tester la valeur d'une case mémoire,
- effectuer des branchements et des sauts dans le code,
- appeler une routine de calcul.

Ces instructions élémentaires sont exécutées par le processeur à une fréquence très élevée^a.

a. de l'ordre du GHz dans les processeurs actuels.

■ **Définition 10 — Langage compilé.** Un langage compilé^a est un langage muni d'un compilateur capable de générer du langage machine à partir du code source.

a. On devrait dire compilable, mais les anglicismes et les traductions littérales sont légions dans le domaine informatique.

■ **Exemple 3 — Quelques compilateurs.** Les compilateurs sont ubiquitaires dans tous les domaines de l'ingénierie et la plupart du temps invisibles. On trouve :

- **gcc** est un compilateur capable de compiler de nombreux langages dont le langage C. Il permet de traduire des instructions en langage C en langage machine, c'est-à-dire le langage d'un processeur.
- **javac** est un compilateur capable de traduire du code java en bytecode java.
- **pdflatex** est un compilateur capable de traduire du code L^AT_EXen PDF et de créer les pages que vous lisez.

■ **Définition 11 — Langage interprété.** Un langage interprété est un langage muni d'un interpréteur capable de l'exécuter sur une machine concrète.

■ **Définition 12 — Interpréteur ou machine virtuelle.** Un interpréteur^a ou machine virtuelle est un **logiciel** qui permet d'interpréter des instructions dans un langage généralement dé-



FIGURE 4.1 – Comparaison des chaînes d'exécution des langages compilés (à gauche) et des langages interprétés (à droite)

signé par le terme Bytecode. Ce logiciel est exécuté par un processeur, ce qui explique le qualificatif virtuel : on ne programme pas un processeur mais un interpréteur.

a. On devrait dire interprète mais il s'agit encore une fois d'un anglicisme.

■ **Exemple 4 — Machines virtuelles.** Quelques exemples d'interpréteurs :

- Java Virtual Machine (JVM) est un interpréteur de code Java.
- Python Virtual Machine (PVM) est un interpréteur de code Python.
- Ocaml dispose d'un interpréteur et d'un compilateur en langage machine.

■ **Définition 13 — Bytecode.** Un bytecode est un langage intermédiaire entre un langage de programmation (de haut niveau) et les langages de plus bas niveau (proche du processeur). Il est exécuté par un interpréteur.

R Si un bytecode est indépendant de la machine sur laquelle il sera exécuté, un interpréteur dépend au contraire de la machine concrète sur laquelle il s'exécute c'est-à-dire du processeur et du système d'exploitation.

Le code Python, avant d'être exécuté par une machine virtuelle, c'est-à-dire un logiciel, est

```

0 LOAD_CONST      1 (0)
2 STORE_FAST     2 (p)
4 LOAD_CONST      1 (0)
6 STORE_FAST     3 (c)
8 LOAD_FAST       3 (c)
10 LOAD_FAST      0 (a)
12 COMPARE_OP    0 (<)
14 POP_JUMP_IF_FALSE 20 (to 40)
16 LOAD_FAST      2 (p)
18 LOAD_FAST      1 (b)
20 BINARY_ADD
22 STORE_FAST     2 (p)
24 LOAD_FAST      3 (c)
26 LOAD_CONST      2 (1)
28 BINARY_ADD
30 STORE_FAST     3 (c)
32 LOAD_FAST      3 (c)
34 LOAD_FAST      0 (a)
36 COMPARE_OP    0 (<)
38 POP_JUMP_IF_TRUE 8 (to 16)
40 LOAD_FAST      2 (p)
42 RETURN_VALUE

```

FIGURE 4.2 – Bytecode Python du code 4.1 de la fonction produit.

compilé dans un langage nommé Bytecode par la PVM.

P Python est donc un langage interprété.

Le figure 4.2 donne, à titre d’illustration, le bytecode du programme 4.1. On perçoit bien la nature élémentaires des instructions impératives qui ressemblent beaucoup à celle d’un langage machine. Sauriez-vous l’interpréter à votre tour?

C Des paradigmes différents --> HORS PROGRAMME

Tout comme il existe une multitude de langages humains, il existe une grande diversité de langages informatiques. Pour mieux cerner leurs différences, on utilise la notion de paradigme de programmation.

■ **Définition 14 — Paradigme de programmation.** Un paradigme de programmation est un ensemble de formes et de figures qui constitue un modèle propre à un langage.



FIGURE 4.3 – Paradigmes des langages de programmation

■ **Définition 15 — Paradigme impératif.** Le paradigme impératif s'attache à décrire des séquences d'instructions (ordres) qui agissent sur un état interne de la machine (contexte). L'impératif explicite le *comment procéder* pour exécuter un programme. Cette programmation se rapproche de la logique électronique des processeurs.

■ **Définition 16 — Paradigme procédural.** Ce paradigme est une déclinaison de l'impératif et propose de regrouper des éléments réutilisables de code dans des routines. Ces routines sont appelées procédures (si elles ne renvoient rien) ou fonctions (si elles renvoient un résultat).

■ **Définition 17 — Paradigme objet.** Ce paradigme est une déclinaison de l'impératif et propose de décrire un programme comme l'interaction entre des objets à définir. Une classe est un type d'objet qui possède des attributs et des comportements. Ces caractéristiques sont encapsulées et peuvent être masquées à l'utilisateur d'un objet : cela permet de protéger l'intégrité de l'objet et de garantir une cohérence dans la manipulation des données.

■ **Définition 18 — Paradigme déclaratif.** Le paradigme déclaratif est une syntaxe qui s'attache à décrire le *quoi*, c'est-à-dire *ce que le programme doit faire*, non pas comment il doit le faire. Un langage déclaratif ne dépend pas de l'état interne d'une machine (contexte). Cette programmation se rapproche de la logique mathématique et délègue au compilateur la délicate question du *comment procéder*.

■ **Définition 19 — Paradigme fonctionnel.** Le paradigme fonctionnel est une déclinaison du déclaratif qui considère qu'un programme n'est qu'un calcul et qu'un calcul est le résultat d'une fonction. Le mot fonction est ici à prendre au sens mathématique du terme (lambda calcul) : une fonction appelée avec les mêmes paramètres produit le même résultat en toute circonstance.

Comme on peut le constater sur la figure 4.2, les langages de types Bytecode sont impératifs. L'objectif est de se rapprocher des langages machines qui sont également impératifs à cause de l'architecture des processeurs de type Von Neumann.

P Python est un langage multiparadigme : impératif, objet et fonctionnel.

■ **Exemple 5 — Langages et paradigmes.** La plupart des langages contemporains sont multiparadigmes, c'est-à-dire qu'ils permettent de programmer de différentes manières.

- C : impératif, structuré et procédural,
- C++ : impératif, structuré, procédural, objet et fonctionnel,
- Java : impératif, objet, fonctionnel,
- Javascript : fonctionnel, objet (prototype), script,
- Smalltalk : objet,
- Prolog : logique,
- SQL : déclaratif, requêtage,
- Ocaml : fonctionnel, impératif et objet,
- Haskell : fonctionnel pur.

D Systèmes d'exploitations → HORS PROGRAMME

■ **Définition 20 — Système d'exploitation.** Un système d'exploitation est un ensemble de logiciels qui forme une interface abstraite entre les applications et la machine. Un système d'exploitation accède directement au matériel de l'ordinateur, c'est-à-dire les systèmes électroniques constitutifs comme le processeur, les mémoires et les périphériques (écran, clavier, trackpad...).

Les autres applications de l'ordinateur s'appuient sur le système d'exploitation pour accéder au matériel.

 **Vocabulary 3 — Operating System (OS)** ↪ Système d'exploitation.

Un système d'exploitation :

- garantit ainsi l'intégrité et la cohérence de la machine,
- masque la complexité du matériel aux utilisateurs, aux développeurs et aux applications en présentant une abstraction du matériel,
- gère le matériel en appliquant certaines stratégies prédéfinies (allocation mémoire, ordonnancement des processus),
- isole les applications les unes des autres.

 **Vocabulary 4 — Software, hardware** ↪ En anglais, on distingue les logiciels (software) du matériel électronique qui lui permet de fonctionner (hardware).

Un système d'exploitation est composé (cf. figure 4.4) :

- d'un système de fichiers (file system),



FIGURE 4.4 – Positionnement du système d'exploitation et des bibliothèques logicielles entre les éléments logiciels et le matériel électronique

- de pilotes (drivers) spécifiques aux matériels électroniques,
- d'un ordonnanceur (scheduler) de processus,
- d'un gestionnaire de mémoire.

L'ordonnanceur et le gestionnaire de mémoire appliquent des stratégies sophistiquées afin de garantir une certaine équité entre les processus qui s'exécutent, l'accès aux ressources de la machine et l'allocation de l'espace mémoire.

Un système d'exploitation offre la plupart du temps deux modes de fonctionnement différents :

- Le mode utilisateur, non privilégié : dans cet espace, l'utilisateur peut utiliser les ressources du système et l'interface du système d'exploitation. Cependant, il n'accède à aucun matériel de manière privilégiée. C'est l'espace de développement et de fonctionnement des applications et des services. Cet espace garantit que tout accès au système logiciel/matériel est légal, car contrôlé par le système d'exploitation.
- Le mode administrateur, super-utilisateur, privilégié (KERNEL SPACE) : dans cet espace, l'administrateur peut programmer le système d'exploitation, le modifier et accéder au matériel, sans restrictions.

■ **Exemple 6 — Quelques systèmes d'exploitation.** Parmi les plus courants, on peut citer :

- Windows,
- Mac OS X,
- Linux,
- la famille de Unix BSD.

Dans des domaines plus spécifiques, comme l'informatique temps réel ou les systèmes embarqués, on peut trouver d'autres systèmes d'exploitation comme Windows CE, FreeRTOS ou Xenomai.

■ **Définition 21 — Système de fichier.** Un système de fichier est une organisation hiérarchique des fichiers mis en œuvre par un système d'exploitation. Cette organisation se présente sous la forme d'un arbre (systèmes Unix) ou d'une forêt (systèmes Windows).

Lorsqu'on travaille sur un ordinateur, il est toujours important de savoir où l'on se trouve et où l'on peut aller dans un système de fichiers.

■ **Définition 22 — Chemin.** Un chemin est une chaîne de caractères qui permet de décrire la position d'un fichier ou d'un répertoire dans un système de fichier.

On peut lire directement un chemin sur l'arborescence de la figure 4.5. **La racine de l'arbre est dénotée /.** Ainsi, le chemin vers le répertoire personnel d'Olivier est `/home/olivier/`. Le sous-répertoire `python/tp1` est désigné par le chemin absolu `/home/olivier/python/tp1`.

■ **Définition 23 — Chemin absolu.** Un chemin absolu est un chemin qui décrit la ressource désigné sans équivoque possible depuis la racine du système de fichier. Un chemin absolu commence par `/`. Par exemple, `/home/olivier/`.

■ **Définition 24 — Chemin relatif.** Un chemin relatif est un chemin qui est désigne une ressource par rapport à l'endroit où l'on se trouve dans le système de fichiers. Il ne commence pas par un `/`. Par exemple, `python/tp1`.

Lorsque l'on ouvre un environnement de développement comme Pyzo, celui-ci se place dans un répertoire de travail. C'est dans ce répertoire que sont lancés les commandes et les scripts Python. Il dépend de la configuration du système sur lequel on travaille. On peut éventuellement en changer si besoin, mais tout d'abord quel est-il?

Le module `os` est une bibliothèque qui permet d'interagir avec le système d'exploitation d'un ordinateur. La commande `import os` permet d'utiliser les commandes de ce module.

Par exemple pour connaître le répertoire dans lequel on se trouve on utilise l'instruction `os.getcwd()`. Il faut remarquer la notation pointée qui permet d'accéder à une fonction en particulier du module `os`, le nom de la fonction qui signifie *get current working directory* ainsi que les parenthèses qui permettent d'exécuter la fonction. Dans un script Python, pour afficher le résultat, il est nécessaire d'appeler la commande `print` de la manière suivante `print(os.getcwd())`. L'affichage est automatique dans le shell interactif.



FIGURE 4.5 – Arborescence typique d'un système de fichier Unix/Linux/Mac OS X

E Bibliothèques logicielles

Tous les langages modernes possèdent des bibliothèques logicielles qui permettent d'accélérer le développement. Ce sont des collections de fonctions ou de classes réutilisables directement par le développeur. Il s'agit de gagner du temps et de ne pas réinventer la poudre. Elles permettent souvent d'adresser un domaine particulier de l'informatique (calcul, traitement des images, création de graphiques) ou de simplifier les interfaces (interagir avec un système d'ex-

ploitation ou un périphérique (image, son, réseaux).

Comme de nombreux langages, Python possède un grand nombre de bibliothèques¹. Les épreuves des concours se basent sur le cœur du langage et quelques bibliothèques. Parmi elles on peut citer :

- math,
- random,
- numpy.

P Il faut bien faire à attention à **respecter les consignes des épreuves** de concours car ces épreuves peuvent être de nature légèrement différente selon les concours. Si le sujet précise qu'on ne doit pas utiliser numpy, alors il ne faut pas l'utiliser. Si le sujet précise qu'on doit utiliser une fonction d'une bibliothèque, alors il faut l'utiliser!

 **Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!**

P En python, on peut choisir d'utiliser tout ou partie d'une bibliothèque et plusieurs syntaxes sont possibles. Il faut les connaître (cf. codes 4.2, 4.3 et 4.4) et **ne pas les mélanger** : au concours, ces points sont faciles à obtenir, alors faites attention!

 **Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!**

Code 4.2 – Importer un module et l'utiliser

```
import math

a = math.sqrt(math.log(7))
```

Code 4.3 – Importer toutes les fonctions d'un module et en utiliser certaines

```
from math import *

a = sqrt(log(7))
```

Code 4.4 – Importer quelques fonctions d'un module et les utiliser

```
from math import sqrt, log

a = sqrt(log(7))
```

1. On parle de l'Application Program Interface (API) Python

R D'un point de vue mémoire, la dernière syntaxe est plus parcimonieuse puisqu'elle n'importe en mémoire que les fonctions dont le code a besoin.

Deuxième partie

Semestre 1

5

TYPES ET OPÉRATEURS

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ Utiliser et identifier les types simples (int, float, boolean, complex)
- ☒ Utiliser les opérateurs en lien avec les types simples numériques
- ☒ Utiliser une variable de type simple
- ☒ Reconnaître les principaux mots-clefs du langage Python

A Types

L'informatique traite l'information. Dans ce but, il faut être capable de stocker l'information sous une forme accessible au traitement informatique. Selon la nature de l'information, un type de données différent est choisi pour la représenter.

■ **Définition 25 — Typage.** Le typage désigne l'action de choisir une représentation à une donnée selon ses caractéristiques. Cette représentation est nommée type. Le typage est effectué soit par le programmeur, soit par le compilateur soit par l'interpréteur.

■ **Définition 26 — Type simple.** Les types simples correspondent à des informations comme les nombres, des constantes ou les valeurs booléennes.

Les types simples en Python sont :

- `int` permet de représenter un sous-ensemble des entiers relatifs,
- `float` permet de représenter un sous-ensemble des décimaux,
- `complex` permet de représenter un sous-ensemble des nombres complexes,
- `bool` permet de représenter une valeur booléenne, vrai ou faux.

Les codes 5.1 donnent des exemples d'usage de ces types en Python. Il faut noter que, comme de nombreux langages modernes, Python est un langage multiparadigme. Il implé-

mente notamment le paradigme objet, c'est pourquoi les types simples sont des classes d'objet.

Code 5.1 – Types simples

```
print(type(42))    # <class 'int'> an integer
print(type(2.37))  # <class 'float'> a floating point number
print(type(3-2j))  # <class 'complex'> a complex number
print(True, type(True))  # True <class 'bool'>
print(False, type(False)) # False <class 'bool'>
```

■ **Définition 27 — Inférence de type**. L'inférence de type est une action d'un compilateur ou d'un interpréteur qui permet de typer une données automatiquement d'après sa nature.

■ **Définition 28 — Typage explicite**. Un langage est dit à typage explicite s'il exige de toute donnée qu'elle soit déclarée selon un type. Le contraire est un typage **implicite**.

■ **Définition 29 — Typage dynamique**. Un langage est dit à typage dynamique si une variable peut changer de type au cours de l'exécution du programme. Inversement, on parle de typage **statique**.

Dans l'exemple ci-dessus, Python fait donc de l'inférence de type, puisque la donnée 42 est interprétée comme un `int`, 2.37 comme un `float`...

 Python est un langage à typage implicite et dynamique.

■ **Définition 30 — Transtypage**. Transtyper une variable c'est modifier son type en opérant une conversion de la donnée.

 **Vocabulary 5 — Type Casting** ⇔ En anglais, le transtypage est désigné par les termes *type casting* ou *type conversion*.

 En Python, on peut transtyper une variable numérique en utilisant un constructeur numérique `int` ou `float`. Par exemple :

```
b = float(3)
print(b, type(b))  # 3.0 <class 'float'>
c = int(3.56)
print(c, type(c))  # 3 <class 'int'>
```

■ **Définition 31 — Types composés**. Un type composé est un type de données qui agrège des types simples dans un objet homogène (tableau, énumération) ou inhomogène (structure, union). Dans les types composés (in)homogènes, les données (ne) sont (pas) toutes du

■ même type.

P En Python les types composés sont les chaînes des caractères, les tuples, les listes, les ensembles et les dictionnaires.



FIGURE 5.1 – Types de données composés du langage Python : les conteneurs

B Opérateurs

Les opérateurs peuvent être classés en catégories selon la nature de leur action, le type d'opérandes ou le nombre d'opérandes dont ils ont besoin.

a Opérateurs arithmétiques

Ce sont les transpositions informatiques des opérateurs mathématiques : ils agissent sur des représentations de nombre en machine, les types numériques.

- $a + b$ l'addition,
- $a - b$ la soustraction,
- $a * b$ la multiplication,
- $a // b$ la division entière,
- $a \% b$ l'opération modulo,
- a / b la division,
- $a ** n$ l'élévation à la puissance n ou exponentiation.


Vocabulary 6 — Arithmetic operators ↴

En anglais, on les désigne par :

- Addition,
- Subtraction,
- Multiplication,
- Floor division,
- Modulus,
- Division,
- Exponentiation.

Merci le latin et Guillaume le Conquérant.

P Les opérateurs `+`, `-` et `*` s'appliquent indifféremment aux types `int` et `float`. Néanmoins, le résultat d'une opération entre `int` sera un `int`. Le résultat est un `float` si l'une des deux opérandes au moins en est un. On parle alors de transtypage implicite, les `int` sont transtypés par l'interpréteur en `float` pour réaliser l'opération, de manière transparente.

L'opérateur de division `/` renvoie en un `float` même si les opérandes sont entières. L'opérateur `//` peut renvoyer un `int` si les deux opérandes sont entières. Cette opération est en fait le quotient de la division euclidienne ou la partie entière du résultat de `/`, d'où le nom en anglais.

L'opérateur `**` s'applique aux `int` et aux `float` et renvoie un `int` si toutes les opérandes sont un `int`, un `float` sinon.

L'opérateur `%` renvoie généralement le reste de la division euclidienne de `a` par `b`. Cependant, lorsque les deux opérandes sont négatives, le modulo résulte en nombre négatif afin d'avoir également $a = (a//b)* b + a\%b$.

Tous les langages n'adoptent pas forcément les mêmes conventions que Python, il faut donc rester vigilant.

La syntaxe infixe de ces opérateurs fait qu'il peut être ambigu d'écrire certaines expressions. Par exemple, comment interpréter `2 + 3 * 4`? Doit-on calculer d'abord l'addition `2+3` puis multiplier le résultat? Ou bien doit-on effectuer la multiplication d'abord? Le résultat ne sera pas le même. Quelle est la bonne opération? Quel opérateur doit-on appliquer en premier? Sans parenthèses, cette ambiguïté demeure à moins qu'on ne décide d'attribuer une priorité différente aux opérateurs. C'est ce qui est fait par la plupart des langages.

P La priorité des opérateurs en Python est définie comme indiqué sur le tableau 5.1. C'est pourquoi l'expression `2 + 3 * 4` est évaluée en 14^a . De plus, lorsque le degré de priorité est identique, on associe en priorité de la gauche vers la droite. Ainsi, l'expression `15 / 5 * 2` est évaluée en 6^b .

a. et non pas 24

b. et non pas 1.5

Priorité	Opérateurs	Description
1	()	parenthèses
2	**	exponentiation
3	+x -x ~x	plus et moins unaire, négation bits à bits
4	* / // %	multiplication, division division entière, modulo
5	+ -	addition, soustraction
6	<< >> >>= <<=	décalage binaire
7	&	et bits à bits
8	^	ou exclusif bits à bits
9		ou bits à bits
10	==, != >, >=, <, <= <i>is, is not, in, not in</i>	identité, non identité comparaison appartenance
11	not	négation logique
12	and	et logique
13	or	ou logique

TABLE 5.1 – Priorités des opérateurs en Python : dans l'ordre d'apparition, du plus prioritaire (1) au moins prioritaire (13)

R Attention : certains opérateurs apparaissent identiques syntaxiquement mais se comportent différemment selon le type de donnée. Par exemple * ou + sont des opérateurs qui peuvent également agir sur les chaînes de caractères ou sur les listes. Dans ce cas, ils possèdent une autre signification. On dit qu'on a surchargé ces opérateurs.

b Opérateurs logiques

■ **Définition 32 — Opérateur logique.** Les opérateurs logiques produisent une valeur booléenne à partir d'autres valeurs booléennes en les combinant. Ils prennent le plus souvent deux opérandes.

Les opérateurs logiques Python sont :

- a **and** b la conjonction, renvoie `True` si a et b sont tous les deux à vrais,
- a **or** b la disjonction, renvoie `True` si a ou b sont vrais,
- **not** a la négation, renvoie `True` si a est faux, `False` sinon.

P En Python les valeurs booléennes sont `True` et `False`. Ce sont deux objets qui peuvent être interprétées numériquement par 0 ou 1.

Il faut noter également que d'autres objets peuvent être interprétés comme `False` :

- None qui est un l'objet qui représente *rien*,
- les représentations de zéro pour les types numériques dont `int`, `float`,
- les séquences et collections vides : `" "`, `()`, `[]`, `set()`, `range(0)`

M **Méthode 2 — Tester un booléen** Pour tester la valeur d'un booléen `a`, on n'écrit jamais `if a == True`, mais simplement `if a`. De même, pour tester le cas faux, on écrira `if not a`.

c Opérateurs d'affectation

■ **Définition 33 — Affectation.** L'affectation est l'opération qui consiste à assigner une valeur à une variable et donc de modifier son état en mémoire.

Le fait que l'affectation soit une instruction est caractéristique des langages impératifs. En Python, il existe plusieurs opérateurs d'affectation :

- `a = 3` affectation simple,
- `a += 3` affectation simple combinée avec une addition équivalent à `a = a + 3`,
- `a -= 3` affectation simple combinée avec une soustraction équivalent à `a = a - 3`.

L'affectation combinée évite à l'interpréteur de créer une variable intermédiaire pour le calcul. L'opération se fait en place, c'est à dire sur l'espace mémoire même associé à la variable.

C Opérateurs sur les chaînes de caractères

Les chaînes de caractères sont des objets immuables en Python. Leurs valeurs sont initialisées en utilisant les guillemets `" "`. Certains symboles sont utilisés pour désigner plusieurs opérateurs différents. C'est le cas par exemple de `+` et `*` qui peuvent désigner des opérateurs sur les chaînes de caractères. C'est ce qu'illustre l'exemple suivant

```
s = "Z comme "
print(s + " Zorglub")      # Z comme Zorglub
print(s + "42")            # Z comme 42
print(s*3)                 # Z comme Z comme Z comme
```

 **Vocabulary 7 — Double and simple quotes ↴** Les guillemets `"` correspondent au mot anglais *double quote*. Il existe aussi le symbole apostrophe `'`, *simple quote* en anglais, qui permet également d'initialiser des chaînes de caractères.

D Une variable Python est une référence

Tout est dans le titre de la section, mais je vais l'écrire comme une règle d'or :

P En Python, une variable est une référence contenant l'adresse d'un objet en mémoire.

■ **Définition 34 — Type immuable.** Un type immuable est un type de donnée que l'on ne peut pas modifier. Inversement, un type mutable est un type dont on peut modifier la valeur.

P En Python, les types immuables sont :

- les types simples numériques : `int`, `float`, `bool`,
- les `str`,
- les `tuple`.

Les types mutables sont :

- les listes `list`,
- les dictionnaire `dict`,
- les ensembles `set`.

Ces types mutables et immuables combinés à la règle d'or précédente permettent d'expliquer énormément de codes qui peuvent parfois sembler très peu clairs au débutant. C'est par exemple ce qui explique pourquoi l'affectation ne se comporte pas de la même manière avec toutes les variables, ce que l'on observera au cours des TP de l'année.

■ **Exemple 7 — Affectation d'immuables.** Un entier est une donnée immuable : on ne peut pas en modifier la valeur, 42 vaut 42. De même pour un nombre flottant ou un booléen, vrai reste vrai et faux, faux... En Python, une variable à qui on a affecté une donnée référence un objet d'un certain type représentant cette donnée en mémoire. Si on affecte une nouvelle donnée à une variable immuable, le type étant immuable, c'est donc à la référence de changer. L'interpréteur alloue donc un nouvel espace mémoire à cette donnée et la variable référence ce nouvel objet. C'est ce qu'illustrent les figures 5.2 et 5.3 avec un type `int` immuable et un type `list` mutable.

L'ancienne valeur peut demeurer un moment en mémoire, jusqu'à ce que le ramasse-miette de l'interpréteur (Garbage Collector) désalloue cet espace mémoire pour libérer la mémoire, si cette valeur n'est plus référencée par aucune variable.

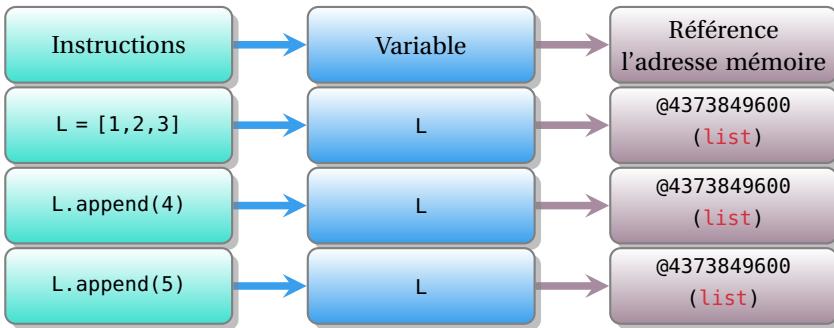
E Mots-clefs du langage

Les mots-clefs d'un langage sont des mots réservés, c'est à dire qu'on ne peut et qu'on ne doit pas les utiliser pour nommer des variables pour des fonctions. Ils sont rassemblés sur le tableau 5.2.

**Code 5.2 – Affectations de type immuable**

```
a = 3
print(a, id(a)) #3 4337549616
a = 4
print(a, id(a)) #4 4337549648
a = -5.3
print(a, id(a)) #-5.3 4375807472
```

FIGURE 5.2 – Variable de type immuable, affectation et référencement en mémoire (à gauche) et programme Python pour la visualisation des adresses en mémoire (à droite)

**Code 5.3 – Affectations de type mutable**

```
L = [1, 2, 3]
print(L, id(L))
# [1, 2, 3] 4373849600
L.append(4)
print(L, id(L))
# [1, 2, 3, 4] 4373849600
L.append(5)
print(L, id(L))
# [1, 2, 3, 4, 5] 4373849600
```

FIGURE 5.3 – Variable de type mutable, affectation et référencement en mémoire (à gauche) et programme Python pour la visualisation des adresses en mémoire (à droite)

Mot-clef	Usage
<code>if</code> <code>elif</code> <code>else</code> <code>for</code> <code>while</code> <code>break</code> <code>continue</code> <code>pass</code>	structure conditionnelle structure conditionnelle structure conditionnelle pour créer une boucle pour pour créer une boucle tant que sortir d'une boucle continuer la boucle pour ne rien faire
<code>and</code> <code>not</code> <code>or</code> <code>False</code> <code>True</code> <code>assert</code> <code>None</code> <code>in</code> <code>is</code>	et logique négation logique ou logique valeur booléenne faux valeur booléenne vrai créer une assertion en programmation défensive constante pour représenter le rien pour vérifier si une valeur est présente dans une séquence pour tester l'égalité de deux variables
<code>from</code> <code>import</code> <code>as</code>	pour importer tout ou partie d'un module pour importer un module pour créer un alias
<code>def</code> <code>return</code> <code>lambda</code>	pour définir une fonction pour sortir d'une fonction et renvoyer une valeur pour créer des fonctions anonymes
<code>raise</code> <code>try</code> <code>except</code> <code>finally</code> <code>with</code>	pour lever une exception pour gérer les exception pour gérer les exceptions pour gérer les exceptions pour gérer les exceptions
<code>class</code> <code>del</code> <code>global</code> <code>nonlocal</code> <code>yield</code>	définir une classe pour supprimer un objet pour déclarer une variable globale et l'utiliser pour déclarer une variable non locale pour créer une coroutine (hors programme)

TABLE 5.2 – Mots-clefs du langage Python

6

STRUCTURONS

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ lire et interpréter un code Python structuré
- ☞ indenter et enchaîner correctement les blocs Python
- ☞ comprendre le concept de portée d'une variable
- ☞ coder une structure conditionnelle (et l'expression conditionnelle)
- ☞ coder une boucle avec un range sur l'intervalle d'entiers ouvert $[0, n[$
- ☞ coder une boucle tant que en précisant la condition de sortie
- ☞ coder une fonction (paramètres formels, effectifs, retour)

A Anatomie d'un programme Python

■ **Définition 35 — Instruction.** Une instruction dans un programme informatique est un mot qui explique à l'ordinateur l'action qu'il doit exécuter.

■ **Définition 36 — Programme informatique.** Un programme informatique est une suite d'instructions.

Un programme informatique se présente sous la forme d'un fichier texte organisé en parties et sous-parties, comme le montre le code 6.1.

P Une des caractéristiques principales du langage Python est de donner un sens à l'indentation dans le code, c'est-à-dire que **les espaces en début de ligne ont une signification** : ils désignent un bloc d'instructions.

■ **Définition 37 — Bloc d'instructions Python.** Une suite d'instructions indentées au **même niveau** constituent un bloc d'instructions.

■ **Définition 38 — Portée d'une variable.** La portée d'une variable définie dans un bloc Python est l'ensemble du bloc : cela veut dire qu'elle est visible et utilisable dans tout le bloc (y compris les sous-blocs).

■ **Exemple 8 — Portée d'une variable.** Dans le code 6.1, la variable N est accessible depuis l'ensemble des lignes du code : on dit que c'est une variable **globale**. Il est possible de l'utiliser et donc de la modifier partout.

Par contre, la variable c n'est définie que dans le bloc de la fonction count_elem_if : on dit que c'est une variable **locale** à la fonction. Sa portée est limitée. Tenter de l'utiliser en dehors du bloc, par exemple dans le programme principal, aboutira à une exception de type NameError car l'interpréteur Python ne connaîtra pas ce symbole.

■ **Définition 39 — Programme principal.** Le programme principal est le point d'entrée de l'exécution d'un programme informatique : c'est par là que tout commence.

Code 6.1 – Anatomie d'un programme Python (importations, variables globales, fonctions, indentation, blocs, programme principal)

```
from random import choice # importation des fonctions issues des bibliothèques

N = 42                      # variables globales

def count_elem_if(L, value): # DÉBUT DE FONCTION, PROTOTYPE, DÉBUT DE BLOC :
    c = 0                    # INDENTATION variable locale à la fonction
    for elem in L:            # DÉBUT DE BOUCLE, DÉBUT DE BLOC :
        if elem == value:     # INDENTATION, DÉBUT D'ALTERNATIVE, TEST, DÉBUT DE BLOC :
            c += 1              # INDENTATION, incrémentation et affectation d'une variable
    return c                  # FIN DE BLOC, FIN DE BLOC, instruction de renvoi du résultat
#FIN DE BLOC

# PROGRAMME PRINCIPAL
L = ["words", "letters", "words", "sentences", "words"]
w = choice(L)
n = count_elem_if(L, w)
if n < N:
    print("Less than ", N, " occurrences of ", w)
```

 --> HORS PROGRAMME En Python le programme principal s'appelle `__main__`. Il peut être introduit par les instructions `if __name__=="__main__":`. L'intérêt de cette instruction est de permettre au fichier de se comporter soit comme un programme à exécuter, soit comme un module que l'on peut alors importer dans un autre programme sans exécuter le programme principal.

B Programmation structurée

■ **Définition 40 — Programmation structurée.** Dans le cadre de la programmation structurée, un programme informatique peut-être développé à partir de trois structures :

1. les séquences d'instructions,
2. les structures alternatives,
3. les structures itératives.

Ce paradigme de programmation est une déclinaison du paradigme impératif. Il est proche du fonctionnement des processeurs actuels^a.

^a. Tout en évitant la programmation spaghetti propre aux langages machines.

a Séquences d'instructions

Tous les langages de programmation dispose d'un moyen pour exprimer une séquence d'instructions. La plupart du temps on utilise des accolades (en Java, en C), parfois des délimiteurs de type begin ... end (Ocaml). En Python, le point virgule ; et l'indentation (cf. définition 37) permettent de constituer une séquence d'instructions.

b Structures conditionnelles

■ **Définition 41 — Instruction de test ou test.** Une instruction de test est une opération dont le résultat est un booléen.

■ **Définition 42 — Instruction conditionnelle.** L'exécution d'une instruction conditionnelle est soumise à la validité d'un test effectué en amont de l'instruction.

P En Python, il existe deux structures alternatives : le bloc `if` then `elif` `else` ou bien l'évaluation sous condition d'une expression `expr if then else`.

Bloc conditionnel en Python

Le code 6.2 recense les syntaxes possibles.

Code 6.2 – blocs conditionnels

```
age = 57
if age < 50:
    print("Great !")

if age < 50:
    print("Still young !")
else:
    print("Not dead yet !")
```

```

if age < 50:
    print("Still young !")
elif 50 <= age <= 67:
    print("Has to work...")
else:
    print("Get some rest !")

```

R Lorsqu'on utilise les structures conditionnelles, il est nécessaire d'être vigilant à ce que les conditions s'excluent mutuellement. Dans le cas contraire, c'est le premier test validé qui déclenche le branchement et l'exécution d'une instruction conditionnelle. On peut utiliser `if` sans `else` ou/et sans `elif`, mais il faut être logique dans l'élaboration des conditions pour que l'exécution aboutisse à un algorithme cohérent.

Dans l'exemple 6.2, il n'est pas souhaitable par exemple que les tests soient écrits ainsi `if age <= 50 : et elif 50 <= age <= 60 :`. Logiquement, cela signifierait que si `age` valait 50, on devrait afficher "Still young"! et "Has to work...". Or, seule la première chaîne de caractères sera affichée dans ce cas.

Expressions conditionnelles en Python

Cette syntaxe est à rapprocher du paradigme fonctionnel. Elle permet de conditionner l'évaluation d'une expression. Le code 6.3 décrit la syntaxe Python.

Code 6.3 – Expression conditionnelle

```

autruche = True
age = 45 if autruche else 46
print(age) # 45

```

c Structures itératives

■ **Définition 43 — Structures itératives ou boucles.** Les structures itératives ou boucles permettent de répéter une séquence d'instructions un certain nombre de fois.

On distingue les boucles conditionnelles des boucles inconditionnelles.

Boucles inconditionnelles POUR

Les boucles inconditionnelles permettent de répéter une séquence d'instructions un nombre explicite de fois. Cela signifie que, lorsqu'on programme une boucle inconditionnelle, on connaît ce nombre et on peut donc l'écrire dans le code.

Code 6.4 – Boucle inconditionnelle for

```

a = 3
b = 4
p = 0

```

Algorithme 2 Produit de deux nombres entiers avec boucle inconditionnelle

```

1: a ← 3
2: b ← 4
3: p ← 0
4: pour k de 0 à b – 1 répéter                                ▷ b est un entier.
5:     p ← p + a

```

```

for k in range(b):
    p += a
print(p) # 12

```

P En Python, la fonction `range` permet d'exprimer la plage de variation de la variable de boucle. **Les paramètres de cette fonction sont des entiers** et il faut être vigilant car ceci est une source majeure de pertes de points à l'épreuve d'informatique commune. Le résultat est une séquence immuable.

La signature de cette fonction est `range(start, stop[, step])`. Si on omet de préciser `start`, alors on commence la séquence par zéro. Si on omet de préciser `step`, le pas par défaut vaut un. **La valeur stop est toujours exclue de la séquence.** Donc `range(10)` va renvoyer une séquence [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9] contenant **dix** éléments, comme le montre le code 6.5.



Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

Code 6.5 – Utilisation de range

```

print("Simple range")
for i in range(10):
    print(i, end="\t")      # 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

print("\nStart Stop range")
for i in range(3, 10):
    print(i, end="\t")      # 3 4 5 6 7 8 9

print("\nStart Stop Step range")
for i in range(1, 10, 2):
    print(i, end="\t")      # 1 3 5 7 9

```

Boucles conditionnelles TANT QUE

Les boucles conditionnelles permettent de conditionner la répétition d'une séquence d'instructions à une condition exprimée par un test. Cela signifie que, lorsqu'on programme une boucle conditionnelle, on ne sait pas nécessairement le nombre de répétitions à exécuter. Mais, on sait exprimer la condition d'arrêt des répétitions.

Code 6.6 – Boucle conditionnelle while

Algorithme 3 Produit de deux nombres entiers avec boucle conditionnelle

1: $a \leftarrow 3$	▷ On veut calculer $a \times b$
2: $b \leftarrow 4$	
3: $k \leftarrow 0$	▷ Initialiser la variable de boucle
4: $p \leftarrow 0$	▷ p contiendra le résultat
5: tant que $k < b$ répéter	
6: $p \leftarrow p + a$	
7: $k \leftarrow k + 1$	▷ Incrémenter la variable de boucle

```

a = 3
b = 4
k = 0
p = 0
while k < b :
    p += a
    k += 1
print(p) # 12

```

(R) D'une manière générale, on privilégiera l'utilisation des boucles `for`. On choisira une boucle `while` dans les cas où :

- l'on ne peut pas exprimer simplement le nombre de répétitions nécessaires,
- les conditions d'arrêt mettent en jeux des nombres flottants,
- on doit à la fois balayer tout un ensemble et respecter une certaine condition d'arrêt.

d Pourquoi compte-t-on à partir de 0 en informatique? --> HORS PROGRAMME

Cette question mérite qu'on s'y attarde un peu car, de nouveau, ceci est à l'origine de pertes de points significatives lors de l'épreuve d'informatique commune. Cette question est liée à une autre : pourquoi spécifie-t-on le paramètre `stop` dans la fonction `range` comme première valeur non atteinte de la séquence ? Deux questions qui peuvent empêcher de dormir...

Dans une lettre restée célèbre [7], Dijkstra¹ explique les raisons théoriques qui ont poussé les informaticiens à adopter cette convention, car il s'agit bien là d'une convention, on aurait pu choisir de procéder différemment.

La convention choisie pour délimiter les bornes d'une séquence de nombres entiers est la suivante : $\min \leq i < \sup$, le minimum étant inclus et le maximum exclu. Par exemple, la séquence $[0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$ est exprimée $0 \leq i < 13$.

Tout d'abord, Dijkstra observe qu'une séquence de nombres entiers naturels possède toujours un plus petit élément par lequel on commence. Donc l'exclure n'est pas judicieux. Ceci justifie le choix du symbole \leq . Ensuite, il observe qu'on pourrait très bien commencer à indexer les séquences par l'élément numéro 1. Mais si on adopte cette convention, alors la plage des

1. prononcer DailleKeStra

indices s'exprime $1 \leq i < N + 1$, ce qui n'est pas très élégant et ne donne pas d'emblée la longueur de la séquence. Par contre, si on commence à zéro, alors cette plage des indices s'écrit $0 \leq i < N$ ce qui présente à la fois l'avantage :

- d'indiquer directement la longueur de la séquence (N),
- de ne pas à avoir à ajouter en permanence $+1$ pour préciser les plages d'indices.

Une autre raison, plus électronicienne, milite pour commencer à zéro. En mémoire, toute case est numérotée. Un tableau en mémoire occupe des cases mémoires contiguës. Il commence à une case dont le numéro est c . Quand on va chercher dans la mémoire le premier élément du tableau, on va donc récupérer l'élément en mémoire dans la case numéro c . Si on souhaite récupérer le second élément, on incrémente c de un. Le premier élément se trouve donc à l'indice 0 ($c + 0$) et le second à l'indice 1 ($c + 1$)!

C'est pourquoi, comme Dijkstra, il faut considérer zéro comme le nombre entier le plus naturel pour commencer à dénombrer! D'ailleurs, le mot *zéro* vient de l'italien *zefiro* et qui provient lui-même de l'arabe *sifr* qui signifie à l'origine le vide, le néant. Quoi de plus naturel que le vide pour commencer?

C Fonctions Python

Dans un programme, Il est inutile voire dangereux de répéter du code déjà écrit : cela nuit à la fiabilité², à la lisibilité³ et à la générativité. C'est pour éviter cela que le paradigme procédural a été inventé.

■ **Définition 44 — Paradigme procédural.** Le paradigme procédural incite à regrouper dans un même code les fonctionnalités importantes d'un programme dans un but d'intelligibilité et de réutilisabilité du code écrit. Les fonctionnalités sont regroupées dans des routines ou des procédures.

 En Python, les routines sont appelées fonctions. On les appellera donc ainsi par la suite.

■ **Définition 45 — Fonctions Python.** Une fonction Python est caractérisée par :

- son nom,
- ses paramètres formels,
- une valeur de retour (optionnelle).

■ **Définition 46 — Appel d'une fonction.** Appeler une fonction, c'est demander son exécution. Cela s'effectue en respectant la signature de la fonction et en utilisant l'opérateur () qui demande l'exécution de la fonction à l'interpréteur.

2. car on peut se tromper en recopiant
3. car cela allonge le code inutilement

■ **Définition 47 — Signature d'une fonction.** La signature d'une fonction sert de mode d'emploi à l'utilisateur et de guide au développeur. La signature d'une fonction est constituée du nom de la fonction, de ses types paramètres d'entrée / sortie.

■ **Définition 48 — Paramètres formels.** Ce sont les paramètres d'entrée qui sont utilisés pour **définir** la fonction. Ils sont précisés dans la signature. Ils sont formellement exigés par la fonction pour opérer.

■ **Définition 49 — Paramètres effectifs.** Ce sont les paramètres d'entrée qui apparaissent lors de l'**appel** d'une fonction, c'est-à-dire lorsqu'on utilise la fonction. Il sont effectivement transmis à la fonction lors de l'appel.

■ **Exemple 9 —** . Le code 6.7 donne un exemple très simple de fonction. Sur cet exemple, on peut noter :

- la signature de la fonction : `square(a)`,
- le paramètre formel `a` dont la portée est le bloc de la fonction, et dont le type peut éventuellement être précisé : on écrit alors par exemple `square(a: int)`, si le type du paramètre formel est un entier.
- la valeur renvoyée `x`. On peut préciser le type de la valeur renvoyée dans la signature : par exemple, `square(a : int) -> int`.
- le paramètre effectif `3`.
- l'appel de la fonction `nine = square(3)`.

R Le mot clef `return` est **fondamental** : il permet de récupérer le résultat du calcul de la fonction dans le programme qui l'a appelée. Par exemple `resultat = square(3)`.

P Ne pas confondre `print(square(3))`, instruction qui affiche le résultat de la fonction sur l'écran, avec `return x`. Le `print` affiche à l'écran mais le résultat de la fonction n'est nulle part en mémoire, il est perdu : on ne peut donc pas le réutiliser pour faire des calculs. Par contre, grâce au mot clef `return` c'est possible !

P Le mot clef `return` ne peut être utilisé que dans une fonction, nulle part ailleurs.

Code 6.7 – Fonction Python à un paramètre renvoyant un entier

```
def square(a):      # signature, a est un paramètre formel
    x = a * a      # corps de la fonction
    return x        # valeur renvoyée

def cube(a : float) -> float: # signature, a est un paramètre formel dont le type est
                                # précisé
```

```

x = a * a *a      # corps de la fonction
return x          # valeur renvoyée, dont le type est précisé dans la signature

nine = square(3)   # 3 est un paramètre effectif
# nine contient le résultat de la fonction renvoyé par le return (affectation)
eight = cube(2.0)  # 2.0 est un paramètre effectif
# eight contient le résultat de la fonction renvoyé par le return (affectation)

```

 **Vocabulary 8 — Parameters - arguments** ↗ En anglais, les paramètres formels sont désignés par le terme *parameters*, les paramètres effectifs par *arguments*. Certains emploient ces mots en français également, ce qui ne manque pas d'ajouter de la confusion dans les concepts.

 **Vocabulary 9 — Type hint** ↗ Indice de type. C'est la possibilité de préciser le type d'un paramètre formel dans une fonction (comme pour la fonction cube du code 6.7). En python, cette déclaration n'a aucune valeur de contrainte.

Code 6.8 – Procédure Python

```

def say_hello(name, n):    # signature
    for i in range(n):    # corps de la fonction
        print(f"Hello {name} !", end="\t")
    # pas de valeur renvoyée

say_hello("Olivier", 2) # Hello Olivier ! Hello Olivier !

```

Le code 6.8 montre un exemple de procédure, c'est-à-dire une fonction qui ne renvoie rien. Elle ne fait, en apparence seulement, aucun calcul qu'on puisse sauvegarder. Par contre, elle interagit avec la console, c'est-à-dire avec l'écran de la machine via le système d'exploitation, pour faire afficher des chaînes de caractères⁴.

Code 6.9 – Fonction avec paramètre optionnel et plusieurs chemin d'exécution avec valeur retour

```

def say_my_name(name: str, capitalized=True):
    # signature avec paramètre optionnel
    if capitalized:
        return name.capitalize()    # valeur renvoyée
    else:
        return name.upper()        # valeur renvoyée

my_name = say_my_name("olivier")    # appel de la fonction
print(my_name)                      # Olivier
my_name = say_my_name("olivier", False)  # appel de la fonction
print(my_name)                      # OLIVIER

```

4. ce que l'on appellera un effet au second semestre.

Le code 6.9 montre un exemple de fonction avec paramètre optionnel. Si le paramètre `capitalized` n'est pas fourni lors de l'appel de la fonction alors celui-ci se voit attribuer la valeur `True`. S'il existe un paramètre effectif lors de l'appel, c'est celui-ci qui est utilisé.

R Ce code montre également qu'avec une structure conditionnelle, il peut exister plusieurs chemins d'exécution avec une valeur retour différente.

D Conventions de nommage

■ **Définition 50 — Conventions.** Règles de conduite adoptées à l'intérieur d'un groupe social. Exemple : en mathématiques, l'inconnue c'est x .

D'une manière générale, en informatique contemporaine, on préfère les conventions aux configurations⁵, car cela fait gagner un temps précieux. Respecter des conventions dans l'écriture des programmes permet leur traitement automatique par d'autres outils pour générer d'autres programmes (tests, vérification, documentation, mise en ligne, interfaçage). Cela permet également aux développeurs de comprendre plus rapidement un code.

L'intelligibilité est certainement la plus grande qualité qu'on puisse exiger d'un code. Aujourd'hui, dans la plupart des entreprises, des normes de codage sont appliquées afin de rendre le travail collaboratif plus efficace. Pour le langage Python, un ensemble de recommandations a été produit (cf. Python Enhancement Proposals - PEP 8). Donc, si vous ne savez pas trop comment faire, il est toujours possible de s'y référer. Les IDE actuels implémentent ces recommandations et peuvent formater ou proposer des changements conformes aux Python Enhancement Proposals.

M **Méthode 3 — Choisir un nom de variable ou de fonction** *Mal nommer les choses c'est ajouter au malheur de ce monde^a*. Alors tâchons de bien les nommer.

À faire :

- choisir des noms de variables et de fonctions en minuscules,
- si plusieurs mots sont nécessaires, mettre un `_` entre les mots,
- préférer un verbe pour les fonctions,
- appeler un chat un chat.

À ne pas faire :

- utiliser les lettres `I,O` ou `I` pour un nom de variables. Elles sont confondues avec `1` ou `0`.
- utiliser autre chose que les caractères ASCII (par exemple des lettres accentuées, des lettres grecques ou des kanjis),

5. c'est-à-dire des arrangements spécifiques.

- appeler une variable d'après un mot clef du langage Python (lambda, list, dict, set, global, try, True...)

a. citation apparemment de Brice Parrain dans une réflexion sur l'étranger d'Albert Camus. À vérifier cependant.

■ **Exemple 10 — Noms courants de variables.** Voici des noms possibles et courants pour :

- les types `int`: i, j, k, m, n, p, q
- les types `float`: x, y, z, u, v, w
- les accumulateurs : acc, s, somme, prod, produit, product
- les pas^a: dt, dx, dy, step, pas,
- un caractère : c, car
- les chaînes de caractères : ch, s,
- les listes : L, results, values, lst, fruits, trousers,
- les dictionnaires : d, t, ht, annuaire, dico,
- les constantes en majuscules : MAX_SIZE, N.

a. c'est-à-dire la distance entre chaque élément d'un vecteur temporel par exemple

M Méthode 4 — Faire un commentaire Un commentaire peut être utile dans une copie pour détailler un point du code ou expliquer un choix d'implémentation que vous avez fait. Mais d'une manière générale, il n'est pas forcément nécessaire, pourvu que votre code soit intelligible. Le choix des noms des variables, le respect de l'indentation et des conventions sont les clefs d'un code intelligible.

Que peut-il arriver de pire à quelqu'un qui raconte une blague? Devoir l'expliquer. Il en est de même du commentaire. Le commentaire peut être utile à l'intelligibilité mais il peut lui nuire également. Par ailleurs, dans le temps, un commentaire peut faire référence à une ligne modifiée ou une variable dont le nom a changé. Dans ce cas là, le commentaire nuit à la compréhension.

On s'attachera donc à :

- n'inscrire que des commentaires utiles et brefs,
- s'assurer qu'ils sont cohérents avec le code,
- à ne pas paraphraser le code.

On préfèrera écrire un code directement lisible. Sur le site de ce cours, vous trouverez des exemples de copies de concours que je vous aide à analyser. Bien écrire et bien nommer permet de gagner des points.

7

LISTES PYTHON

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ créer une liste simplement ou en compréhension
- ☒ manipuler une liste pour ajouter, ôter ou sélectionner des éléments
- ☒ tester l'appartenance d'un élément à une liste
- ☒ utiliser la concaténation et le tronçonnage sur une liste
- ☒ itérer sur les éléments d'une liste avec une boucle for
- ☒ coder les algorithmes incontournables (count, max, min, sum, avg)

La liste Python est une collection très¹ pratique. Elle est à la base de quasiment tous les algorithmes que l'on demande d'implémenter lors des épreuves de concours. C'est une liste **mutable** implémentée par un tableau dynamique.

A Constructeurs de listes

Cette section s'intéresse à la manière dont on peut créer des listes en Python.

a Crochets

À tout seigneur tout honneur, les crochets sont la voie royale pour créer une liste.

```
L = [] # Empty list
print(L, type(L)) # [] <class 'list'>
L = [1, 2, 3]
print(L) # [1, 2, 3]
L = [True, False, False]
print(L) # [True, False, False]
L = ["cours", "td", "tp"]
```

1. trop?

```
print(L # ['cours', 'td', 'tp']
L = [[2.3, 4.7], [5.9, 7.1], [1.8, 3.9]] # Nested List !
print(L # [[2.3, 4.7], [5.9, 7.1], [1.8, 3.9]]
```

L'exemple précédent montre que :

- On peut créer des listes de n'importe quel type de donnée. Une liste est un conteneur avant toute chose.
- On peut créer des listes imbriquées (nested list), c'est-à-dire des listes de listes. Ces dernières sont très appréciées par les créateurs d'épreuves de concours.

b Constructeur list

La fonction `list()`² permet également de créer une liste à partir de n'importe quel objet itérable. Elle s'utilise le plus souvent pour convertir un autre objet itérable³ en liste.

```
L = list() # Empty list
print(L, type(L)) # [] <class 'list'
L = list("Coucou !")
print(L) # ['C', 'o', 'u', 'c', 'o', 'u', ' ', '!']
L = list(range(10))
print(L) # [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
```

c Construire une liste en compréhension

Tout comme les ensembles en mathématiques, les listes peuvent être construites à partir d'une description compréhensible des éléments de la liste. Cette méthode de création de liste est à rapprocher du paradigme fonctionnel.

```
L = [ i for i in range(10) ]
print(L) # [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]
L = [ i for i in range(10) if i %2 == 0]
print(L) # [0, 2, 4, 6, 8]
```

P Cette méthode de création de liste est puissante mais est très délicate à manipuler. C'est pourquoi il est préférable de ne l'utiliser que si on est vraiment sûr de soi, sinon c'est une perte de points assurée au concours. On peut l'éviter avec une boucle `for` et un `append` et ainsi assurer des points comme le montre l'exemple ci-après.



Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

2. On appelle cette fonction le **constructeur** des objets de type `list`.
 3. un dictionnaire ou une chaîne de caractères par exemple

```
L = []
for i in range(10):
    if i % 2 == 0:
        L.append(i)
print(L) # [0, 2, 4, 6, 8]
```

B Opérations sur une liste

a Longueur d'une liste

La fonction `len` renvoie la longueur d'une séquence. Elle s'utilise donc aussi pour les listes.

```
L = [ 1, 2, 3 ]
print(len(L)) # 3
```



En Python, on peut tester si une liste est vide avec la fonction `len`.

```
L = [ 1, 2, 3]
while len(L) > 0:
    print(L.pop()) # 3 2 1
```

b Appartenance à une liste

Les mots-clefs `in` et `not in` permettent de tester l'appartenance à une liste et renvoient les booléens correspondants.

```
L = [ 1, 2, 3]
print(2 in L) # True
print(42 in L) # False
print(42 not in L) # True
```



Attention cependant aux coûts cachés en Python : tester l'appartenance à une liste de taille n , comme on le verra dans les chapitres suivants, est une opération en $O(n)$.

c Ajouter un élément à une liste

La méthode `append` de la classe `list` permet d'ajouter un élément à la fin d'une liste. Cette méthode modifie la liste. Son coût est constant en $O(1)$.

```
L = [ 1, 2, 3]
L.append(4)
print(L) # [1, 2, 3, 4]
L.append(5)
print(L) # [1, 2, 3, 4, 5]
```

d Retirer le dernier élément d'une liste

La méthode `pop` de la classe `list` permet de retirer le dernier élément ajouté. Son coût est constant en $O(1)$ si on se contente d'enlever le dernier.

```
L = [ 1, 2, 3 ]
L.pop()
print(L) # [1, 2]
```

C Concaténation et démultiplication de listes

L'opérateur `+` permet de concaténer une liste à une autre liste pour en créer une nouvelle, c'est-à-dire de créer une nouvelle liste en fusionnant leurs éléments. Les deux opérandes de cet opérateur sont donc des listes !

```
L = [1, 2, 3]
M = [4, 5, 6]
N = L + M
print(N) # [1, 2, 3, 4, 5, 6]
```

L'opérateur `*` permet de démultiplier un élément dans une liste **à l'identique**.

```
L = [1] * 10 # À ne pas utiliser pour autre chose que des entiers
print(L) # [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]
```

R **IL EST FORTEMENT DÉCONSEILLÉ D'UTILISER CET OPÉRATEUR à cause des effets indésirables lorsqu'on manipule des listes de listes.** Comme une liste est une référence, l'opérateur `*` utilisé ainsi `[[]*n]` démultiplie la **même** liste dans toute la liste. En conséquence, modifier un élément d'une sous-liste modifiera toutes les sous-listes, ce qui n'est jamais souhaitable.

Il existe également l'opérateur de concaténation et d'affectation `+=` ainsi que l'opérateur de démultiplication et d'affectation `*=`.

```
L = [1, 2]
L += [3]
L *= 4
print(L) # [1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3]
```

D Des listes indicables

L'intérêt des listes Python est qu'elles permettent d'accéder à un élément particulier en $O(1)$, c'est-à-dire temps constant⁴. Pour cela, il suffit de connaître l'indice de l'élément dans la liste. Naturellement, comme expliqué dans le cours précédent :

- le premier élément d'une liste est l'élément d'indice 0,

4. C'est parce qu'elles sont implémentées par des tableaux dynamiques.

- le dernier élément d'une liste est l'élément d'indice `len(L) - 1`.

Tout comme les chaînes de caractères, les listes autorisent également les indices négatifs pour identifier un élément à partir de la fin de la chaîne.

```
L = [ 1, 2, 3 ]
print(L[0]) # 1
print(L[len(L) - 1]) # 3
print(L[-2]) # 2
```

E Des listes itérables

Une liste Python est itérable, c'est-à-dire qu'elle peut être l'objet d'une itération via une boucle `for`.

```
L = [ 1, 2, 3 ]
for elem in L:
    print(elem) # 1 2 3 elem
```

Naturellement, on peut parcourir une liste d'après ses indices :

```
L = [ 1, 2, 3 ]
for i in range(len(L)):
    print(L[i]) # 1 2 3
```

L'intérêt de la première syntaxe est qu'on ne peut pas se tromper sur les indices. Le premier inconvénient est que l'on ne peut pas modifier l'élément `elem`. Le second inconvénient est qu'on ne dispose pas l'indice alors qu'on pourrait en avoir besoin...

On choisira donc l'une ou l'autre syntaxe selon qu'il est nécessaire ou pas de disposer de l'indice ou de modifier les éléments.

F Des listes tronçonnables



Vocabulary 10 — Slicing ↵ Tronçonnage

Tout comme les chaînes de caractères, les listes sont tronçonnables.

```
L = [1, 2, 3, 4, 5, 6]
print(L[1:3]) # slicing start stop --> [2, 3]
print(L[-3:-1]) # negative slicing --> [4, 5]
print(L[::-1]) # reverse list --> [6, 5, 4, 3, 2, 1]
print(L[0:-1:2])# slicing start stop step --> [1, 3, 5]
```

G Les algorithmes simples mais incontournables

Les listes Python sont très souvent utilisées pour agréger des éléments différents d'un même type. Lors d'un traitement automatisé des données, il est naturel de vouloir :

- compter les éléments d'un certain type,
- trouver le maximum ou le minimum des éléments s'il y en a un, ou trouver l'indice de cet extremum,
- calculer une somme, une moyenne ou un écart type, si les éléments de la liste sont numériques.

Le code 7.1 implémente ces algorithmes incontournables en Python.

Code 7.1 – Algorithmes simples et incontournables

```
def count_elem_if(L, value):
    c = 0
    for elem in L:
        if elem == value:
            c += 1
    return c


def max_elem(L):
    if len(L) > 0:
        m = L[0]
        for elem in L:
            if elem > m:
                m = elem
        return m
    else:
        return None


def min_elem(L):
    if len(L) > 0:
        m = L[0]
        for elem in L:
            if elem < m:
                m = elem
        return m
    else:
        return None


def sum_elem(L):
    acc = 0
    for elem in L:
        acc += elem
    return acc


def avg_elem(L):
    if len(L) > 0:
        acc = 0
        for elem in L:
            acc += elem
    return acc / len(L)
```

```

else:
    return None

if __name__=="__main__":
    L = ["words", "letters", "words", "sentences", "words"]
    print(count_elem_if(L, "words")) # 3
    L = [ 13, 19, -7, 23, -29, 5, -3, 41]
    print(max_elem(L), min_elem(L), sum_elem(L), avg_elem(L)) # 41 -29 62 7.75
    L = []
    print(max_elem(L), min_elem(L), sum_elem(L), avg_elem(L)) # None None 0 None
    L = list("Anticonstitutionnellement")
    print(max_elem(L), min_elem(L)) # u A

```

P En Python, il existe les fonctions :

- `sum` pour calculer la somme des éléments d'une liste,
- `max` et `min` pour trouver le maximum et le minimum d'une liste.

```
L =[1, 2, 3]
print(sum(L), max(L), min(L)) # 6, 3, 1
```

Avant de les utiliser, lisez attentivement le sujet de l'épreuve. Si elles ne sont pas autorisées explicitement, ne pas les utiliser.

 Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

H Listes, copies et références

En manipulant les listes, il faut rester vigilant lorsqu'on souhaite partager des éléments ou copier des éléments. Il faut avoir en mémoire la règle d'or Python⁵.

P L'affection simple d'une liste à une autre ne recopie pas les éléments de la liste mais copie la référence de la liste. Sur l'exemple suivant, M et L désigne le même objet en mémoire. Si on modifie l'un, on modifie l'autre.

```
L = [1, 2, 3]
M = L
print(id(M) == id(L)) # True
M[0] = 42
print(L) # [42, 2, 3]
```

Il n'y a donc pas recopie des éléments dans ce cas.

Par contre, l'instruction suivante permet de recopier une liste, c'est-à-dire dupliquer ses éléments en mémoire. On dispose alors de deux références vers deux objets différents. L'un ne

5. Toute variable Python est une référence vers un objet en mémoire.

modifie pas l'autre.

```
L = [1, 2, 3]
M = L[:]
print(id(M)== id(L)) # False
M[0] = 42
print(L) # [1, 2, 3]
```

I Listes, paramètres et fonctions

Cette section s'intéresse au cas où une liste est un paramètre d'une fonction. Que se passe-t-il dans ce cas ?

La liste étant une séquence mutable, lorsqu'une fonction utilise une liste qu'elle a reçue en paramètre, les opérations sont directement effectuées sur la liste en mémoire comme le montre le code 7.2. Ceci explique pourquoi on n'a pas besoin de renvoyer une liste modifiée par une fonction si celle-ci a été transmise en paramètre. **C'est ce qu'on appelle un passage par référence d'un type mutable.**

Comme le montre l'exemple 7.2, pour une variable immuable comme un `int`, le passage en paramètre n'accorde pas plus de droits sur l'objet : celui-ci est toujours immuable. Donc, d'autres références sont créées pour enregistrer les calculs. Si la dernière référence créée contenant le résultat n'est pas renvoyée par la fonction en utilisant `return`, le calcul est perdu.

On fera donc attention à utiliser `return` lorsqu'il le faut !

Code 7.2 – Passage en paramètre d'un type mutable et d'un type immuable à une fonction

```
def f(L):
    print("inside f start :", id(L), L)
    for i in range(len(L)):
        L[i] = L[i] + 100
    print("inside f end :", id(L), L)

def g(a):
    print("inside g start :", id(a), a)
    for i in range(3):
        a = 10 * a
    print("inside g end : ", id(a), a)
    # return a # —> on aurait dû décommenter cette ligne !

# TESTS
M = [1, 2, 3]
f(M)
print("main M", id(M), M)

b = 2
g(b)
print("main b", id(b), b)
```

Voici le résultat de l'exécution de ce code :

```
inside f start : 4374619648 [1, 2, 3]
inside f end : 4374619648 [101, 102, 103]
main M 4374619648 [101, 102, 103]
inside g start : 4373872912 2
inside g end : 4373887856 2000
main b 4373872912 2
```

J Tuples

Les tuples Python sont des séquences **IMMUTABLES** que l'on construit avec les parenthèses `()`. On peut les manipuler comme des listes : ils sont indexables, itérables et tronçonnables. Il ne faut juste pas tenter de modifier leurs éléments car cela n'est pas possible!

```
T = (1, 2, 3, 4, 5)

for elem in T:
    print(elem)

for i in range(len(T)):
    print(T[i])

print(T[-1])
print(T[::-1])
print(T[1:4:2])
T[0] = 9 # TypeError: 'tuple' object does not support item assignment
```

8

TRIER

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ expliquer le fonctionnement d'algorithmes de tri simple,
- ☒ caractériser un tri (comparatif, en place, stable, en ligne)

Trier est une activité que nous pratiquons dès notre plus jeune âge : les couleurs, les formes, les tailles sont autant d'entrées possibles pour cette activité. Elle est également omniprésente dans l'activité humaine, dès l'instant où il faut rationaliser une activité. Dans le cadre du traitement de l'information, on y a si souvent recours qu'on n'y prête quasiment plus attention. C'est pourquoi les algorithmes de tri ont été intensément étudiés et raffinés à l'extrême : il s'agit d'être capable de trier n'importe quel jeu de données pourvu qu'un ordre puisse être défini et de sélectionner le tri le plus efficace selon le tri à effectuer.

Ce chapitre esquisse donc quelques algorithmes de tri simples à coder.

Dans tout le chapitre, on considère :

- un tableau noté t , indiqué avec des crochets, c'est-à-dire que l'on peut accéder à un élément de la case i en écrivant $t[i]$,
- les indices d'un tableau de taille n vont de 0 à $n - 1$,
- des éléments à trier.

La plupart du temps, si le tri est générique ou par comparaison, le type des éléments du tableau importe peu, pourvu qu'on dispose d'un ordre sur ces éléments. On donnera au cours de l'année une définition précise d'une relation d'ordre, mais, pour l'instant, on considère juste qu'il est possible de comparer deux éléments entre eux. C'est-à-dire qu'on peut réaliser un test de type $t[i] < t[j]$ et récupérer une réponse booléenne à ce test. C'est d'ailleurs ainsi que la plupart des contexte informatique définissent un ordre dans un type de donnée.



En Python, on implémentera ces tableaux par des listes.

A Comment caractériser un algorithme de tri?

Pour distinguer les différents algorithmes de tri, on dispose de nombreux qualificatifs. Les définitions suivantes en expliquent quelques uns parmi les plus courants.

■ **Définition 51 — Tri par comparaisons.** Un tri par comparaison procède en comparant les éléments deux à deux^a.

a. ce qui sous-entend que certains algorithmes, comme l'algorithme de tri par comptage, procèdent différemment.

■ **Définition 52 — Tri en place.** Un tri est dit en place s'il peut être directement effectué dans le tableau initial et ne nécessite pas l'allocation d'une nouvelle structure en mémoire de la taille du tableau initial^a.

a. Cette propriété est importante car la mémoire est un paramètre très couteux des systèmes électroniques, tant sur le plan énergétique que sur le plan financier.

■ **Définition 53 — Tri incrémental ou en ligne.** Il s'agit d'un tri capable de commencer le tri avant même d'avoir reçu l'intégralité des données^a.

a. Cette propriété est très intéressante dans le cadre du traitement en temps réel des systèmes dynamiques (qui évoluent dans le temps)

■ **Définition 54 — Tri stable.** Un tri est dit stable s'il préserve l'ordonnancement initial des éléments que l'ordre considère comme égaux mais que l'on peut distinguer^a.

a. par exemple, dans un jeu de cartes, deux valets (même type de carte) de couleurs différentes.

B Trier un tableau

a Tri par sélection

Le tri par sélection est un tri par comparaisons et échanges, en place, non stable et hors ligne.

Son principe est le suivant : on cherche le plus petit élément du tableau (de droite) et on l'insère à la fin du tableau trié de gauche. Au démarrage de l'algorithme, on cherche le plus petit élément du tableau et on l'insère à la première place. Puis on continue avec le deuxième plus petit élément du tableau que l'on ramène à la deuxième place et ainsi de suite.

b Tri par insertion

Le tri par insertion est un tri par comparaison, stable et en place. De plus, si les données ne sont pas toutes présentes au démarrage de l'algorithme, le tri peut quand même commencer, ce qui n'est pas le cas du tri par sélection. C'est donc également un tri en ligne (ou incrémental).

c Tri par comptage

Le tri par comptage est un tri par dénombrement de valeurs entières. Il ne porte donc que sur des tableaux contenant des entiers. C'est un tri non comparatif, stable et hors ligne.

Le principe du tri par comptage est de compter le nombre d'occurrences de chaque valeur entière puis de construire un nouveau tableau à partir de ce comptage.

R Ce tri est certes non comparatif car il n'utilise pas explicitement de comparaisons. Mais l'ordre des entiers est utilisé lors du comptage.

Algorithme 6 Tri par comptage

```

1: Fonction TRIER_COMPTAGE( $t, v_{max}$ )            $\triangleright v_{max}$  est le plus grand entier à trier
2:    $n \leftarrow \text{taille}(t)$ 
3:    $c \leftarrow$  un tableau de taille  $v_{max} + 1$  initialisé avec des zéros
4:   pour  $i$  de 0 à  $n - 1$  répéter
5:      $c[t[i]] \leftarrow c[t[i]] + 1$             $\triangleright$  compter les occurrences de chaque élément du tableau.
6:    $\text{résultat} \leftarrow$  un tableau de taille  $n$ 
7:    $i \leftarrow 0$ 
8:   pour  $v$  de 0 à  $v_{max}$  répéter            $\triangleright$  On prend chaque valeur possible dans l'ordre
9:     si  $c[v] > 0$  alors                    $\triangleright$  Si l'élément  $v$  est présent dans le tableau
10:      pour  $j$  de 0 à  $c[v] - 1$  répéter
11:         $\text{résultat}[i] \leftarrow v$             $\triangleright$  alors écrire autant de  $v$  que d'occurrences de  $v$ 
12:         $i \leftarrow i + 1$                     $\triangleright$  à la bonne place, la ième!
13:   renvoyer  $\text{résultat}$ 
```

C Comparatif des tris

Les tableaux 8.1 et 8.2 résument les caractéristiques et les complexités des principaux algorithmes de tri au programme.

D Trier avec les fonctions natives de Python

P Il existe deux solutions natives pour trier une liste en Python :

1. appeler la fonction `sorted` sur une liste ou un dictionnaire. Cette fonction renvoie une nouvel objet trié sans modifier l'original. Par exemple, `T = sorted(L)`. Dans le cas d'un dictionnaire, ce sont les clefs qui sont triées.
2. appeler la méthode `sort` de la classe List. Cette méthode effectue un tri en place sur une liste et la modifie. Par exemple, `L.sort()`. Cette méthode n'existe pas pour les dictionnaires.

Tris	Comparaison	Stable	En place	En ligne
par sélection	oui	non	oui	non
par insertion	oui	oui	oui	oui
par comptage	non	oui	non	non
fusion	oui	oui	oui	non
rapide	oui	non	oui	non

TABLE 8.1 – Comparatif des caractéristiques des algorithmes de tri. Il existe de nombreuses variantes de ces algorithmes. Les informations de ce tableau concernent les versions implémentées en cours ou en TP.

Tris	Complexité temporelle pire des cas	Complexité temporelle moyenne	Complexité temporelle meilleur des cas	Complexité spatiale
par sélection	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(1)$
par insertion	$O(n^2)$	$O(n^2)$	$O(n)$	$O(1)$
par comptage	$O(n + v_{max})$	$O(n + v_{max})$	$O(n + v_{max})$	$O(n + v_{max})$
fusion	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
rapide	$O(n^2)$	$O(n \log n)$	$O(n \log n)$	$O(\log n)$

TABLE 8.2 – Complexité des différents algorithmes de tri.

Les tris opérés par ces fonctions sont garantis stables. Cela signifie que lorsque plusieurs enregistrements ont la même clé, leur ordre original est préservé.

La documentation Python est à consulter ici pour les usages plus spécifiques de ces fonctions. On peut notamment spécifier :

- un tri ascendant ou descendant à l'aide du paramètre optionnel booléen `reverse`,
- à la fonction l'élément à utiliser pour le tri (en cas d'élément multiple) et même le comparateur à l'aide du paramètre optionnel `key`.



Par défaut, Python trie les n-uplets dans l'ordre lexicographique.

9

RECHERCHER

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ rechercher un élément dans un tableau trié par recherche dichotomique
- ☒ compter le nombre d'opérations élémentaires nécessaires à l'exécution d'un algorithme,

Lors du traitement des informations, le tri est souvent associé à une autre activité : la recherche d'un élément dans un ensemble trié. En effet, la recherche dichotomique permet d'accélérer grandement la recherche d'un élément, pourvu que celui-ci soit trié.

Ce chapitre aborde la recherche recherche dichotomique dans un tableau trié.

A Recherche séquentielle

L'algorithme 7 détaille la recherche séquentielle d'un élément dans un tableau : on cherche, élément après élément, si un certain élément appartient au tableau.

Algorithme 7 Recherche séquentielle d'un élément dans un tableau

```
1: Fonction RECHERCHE_SÉQUENTIELLE(t, elem)
2:   n ← taille(t)
3:   pour i de 0 à n – 1 répéter
4:     si t[i]= elem alors
5:       renvoyer i           ▷ élément trouvé, on renvoie sa position dans t
6:   renvoyer l'élément n'a pas été trouvé
```

Dans le pire des cas, c'est-à-dire si l'élément recherché n'appartient pas au tableau, la recherche séquentielle nécessite un nombre d'instructions proportionnel à n , la taille du tableau. On dit que sa complexité est en $O(n)$.

P Lorsqu'on utiliser l'opérateur `in` en Python pour tester l'appartenance d'un élément à une liste comme dans `e in L`, l'algorithme utilisé est celui de la recherche séquentielle. Le coût de cet usage est linéaire par rapport à la taille de la liste. Ce n'est donc pas une opération élémentaire.

B Recherche dichotomique

Si le tableau dans lequel la recherche est à effectuer est trié, alors la recherche dichotomique à privilégier. Celle-ci est illustrée sur la figure 9.1.

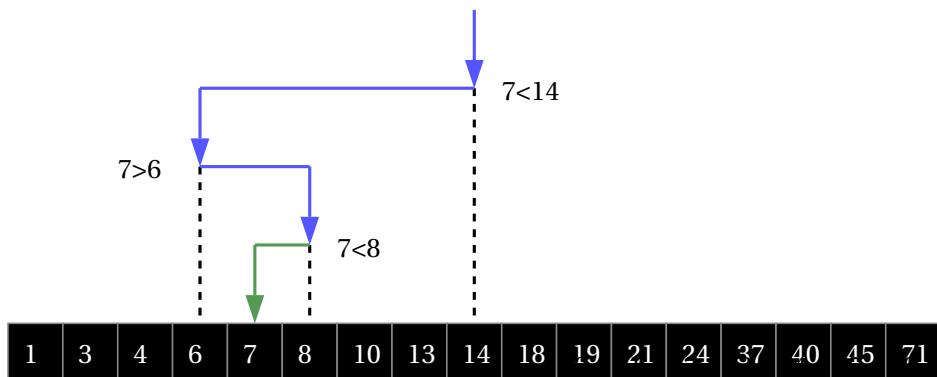


FIGURE 9.1 – Illustration de la recherche dichotomique de la valeur 7 dans un tableau trié
(Source : Wikimedia Commons)

■ **Définition 55 — Recherche dichotomique.** La recherche dichotomique recherche un élément dans un tableau trié en éliminant à chaque itération la moitié du tableau qui ne contient pas l'élément. Le principe est le suivant :

- comparer la valeur recherchée avec l'élément **médian** du tableau,
- si les valeurs sont égales, la position de l'élément dans le tableau a été trouvée,
- sinon, il faut poursuivre la recherche dans la moitié du tableau qui contient l'élément à coup sûr.

Si l'élément existe dans le tableau, alors l'algorithme renvoie son indice dans le tableau. Sinon, l'algorithme signifie qu'il ne l'a pas trouvé.

Le mot dichotomie vient du grec et signifie couper en deux. En prenant l'élément médian du tableau, on opère en effet une division de la taille du tableau en deux parties. On ne conserve que la partie qui pourrait contenir l'élément recherché.

À chaque tour de boucle, l'algorithme divise par deux la taille du tableau considéré. À la fin de l'algorithme, le dernier sous-tableau considéré comporte un seul élément¹. Supposons que la taille du tableau initial est une puissance de deux : $n = 2^p$. On a alors $1 = \frac{n}{2^k} = \frac{2^p}{2^k}$, si k est

1. ou zéro si l'élément n'appartient pas au tableau

Algorithme 8 Recherche d'un élément par dichotomie dans un tableau trié

```

1: Fonction RECHERCHE_DICHOTOMIQUE(t, elem)
2:   n ← taille(t)
3:   g ← 0
4:   d ← n-1
5:   tant que g ≤ d répéter           ▷ ≤ cas où valeur au début, au milieu ou à la fin
6:     m ← (g+d)//2                   ▷ Division entière : un indice est un entier!
7:     si t[m] < elem alors          ▷ l'élément devrait se trouver dans t[m+1, d]
8:       g ← m + 1
9:     sinon si t[m] > elem alors    ▷ l'élément devrait se trouver dans t[g, m-1]
10:    d ← m - 1
11:   sinon
12:     renvoyer m                  ▷ l'élément a été trouvé
13:   renvoyer l'élément n'a pas été trouvé

```

le nombre d'itérations effectuées pour en arriver à un sous-tableau de taille 1. C'est pourquoi le nombre d'itérations peut s'écrire : $k = \log_2 2^p = p \log_2 2 = p = \log_2(n)$. La complexité de cet algorithme est donc logarithmique en $O(\log_2(n))$, ce qui est bien plus efficace qu'un algorithme de complexité linéaire.

R Si le tableau contient plusieurs occurrences de l'élément à chercher, alors l'algorithme 8 renvoie un indice qui n'est pas celui de la première occurrence de l'élément. C'est pourquoi, l'algorithme 9 propose une variation qui renvoie l'indice de la première occurrence de l'élément.

Algorithme 9 Recherche d'un élément par dichotomie dans un tableau trié, renvoyer l'indice minimal en cas d'occurrences multiples.

```

1: Fonction RECHERCHE_DICHOTOMIQUE_INDICE_MIN(t, elem)
2:   n ← taille(t)
3:   g ← 0
4:   d ← n-1
5:   tant que g < d répéter           ▷ attention au strictement inférieur!
6:     m ← (g+d)//2                   ▷ Un indice de tableau est un entier!
7:     si t[m] < elem alors          ▷ l'élément devrait se trouver dans t[m+1, d]
8:       g ← m + 1
9:     sinon
10:    d ← m                          ▷ l'élément devrait se trouver dans t[g, m]
11:   si t[g] = elem alors
12:     renvoyer g
13:   sinon
14:     renvoyer l'élément n'a pas été trouvé

```

L'algorithme de la recherche dichotomique peut s'écrire de manière récursive, comme on le verra dans le chapitre suivant.

R Attention à ne pas confondre cet algorithme avec la recherche de zéro d'une fonction par dichotomie. Le principe est le même. Cependant, dans le cas de la recherche dichotomique, on s'intéresse à des indices de tableaux, donc à des nombres entiers. C'est pourquoi on choisit de prendre le milieu via la division entière $//$. Lorsqu'on cherche les zéros d'une fonction mathématique, on s'intéresse à des nombres réels représentés par des flottants en machine. C'est pourquoi lorsqu'on prend le milieu, on choisit alors la division de flottants $/$.

R Le milieu d'un segment $[a, b]$ vaut $m = (a+b)/2$, **non pas** $m = (b-a)/2$.

C Compter les opérations

Pour comparer l'efficacité des algorithmes, on compte le nombre d'opérations élémentaires nécessaires à leur exécution en fonction de la taille des données d'entrée. Dans notre cas, la taille des données d'entrée est souvent la taille du tableau à trier. Que se passe-t-il lorsque cette taille augmente ? Le temps d'exécution de l'algorithme augmente-t-il ? Et de quelle manière ? Linéairement, exponentiellement ou logarithmiquement par rapport à la taille ?

Dans ce qui suit, on suppose qu'on dispose d'une machine pour tester l'algorithme. On fait l'hypothèse réaliste que les opérations élémentaires suivantes sont réalisées en des temps constants par cette machine :

- opération arithmétique $+, -, *, /, //, \%$, coûts associé c_{op} ,
- tests $==, !=, <, >$, coûts associé c_t ,
- affectation \leftarrow , coût associé c_{\leftarrow}
- accès à un élément indicé $t[i]$, coût associé c_a
- structures de contrôles (structures conditionnelle et boucles), coût associé négligé,
- échange de deux éléments dans le tableau, coût c_e ,
- accès à la longueur d'un tableau, coût c_l .

■ **Exemple 11 — Compter le nombres d'opérations élémentaires de la recherche séquentielle.** Sur l'algorithme 10, on a reporté les coûts pour chaque instruction. On peut donc maintenant calculer le coût total. Ce coût C va dépendre de la taille du tableau que l'on va noter n . Il va également dépendre du chemin d'exécution : est-ce que le test ligne 4 est valide ou non ? On choisit de se placer dans le pire des cas, c'est-à-dire qu'on suppose que le test est invalidé à toutes les itérations^a. Dans ce cas, on peut dénombrer les coûts élémentaires :

$$C(n) = c_{\leftarrow} + \sum_{i=0}^{n-1} c_a + c_t \quad (9.1)$$

$$= c_{\leftarrow} + (c_a + c_t)n \quad (9.2)$$

Dans le pire des cas, on observe donc que le coût de la recherche séquentielle est proportionnel à n . On notera cette au deuxième semestre $C(n) = O(n)$, signifiant par là que le coût est dominé asymptotiquement par n . Lorsque n augmente, le coût de la recherche séquentielle dans le pire des cas n'augmente pas plus vite que n .

Si on se place dans le meilleur des cas, c'est-à-dire lorsque l'élément recherché se situe dans la première case du tableau, on obtient un coût total de $C(n) = c_{\leftarrow} + c_a + c_t$, c'est-à-dire un coût qui ne dépend pas de n . On le notera $C(n) = O(1)$ et on dira que ce coût est constant.

a. i.e. l'élément cherché n'est pas dans le tableau.

Algorithme 10 Recherche séquentielle d'un élément dans un tableau

```

1: Fonction RECHERCHE_SÉQUENTIELLE(t, elem)
2:   n ← taille(t)                                     ▷ affectation :  $c_{\leftarrow}$ 
3:   pour i de 0 à  $n - 1$  répéter                   ▷ répéter n fois
4:     si t[i]= elem alors                         ▷ accès, test :  $c_a + c_t$ 
5:       renvoyer i
6:   renvoyer l'élément n'a pas été trouvé
  
```

R L'analyse des calculs précédents montre qu'on peut simplifier notre approche du décompte des opérations. Étant donné que ce qui nous intéresse, c'est l'évolution du coût en fonction de la taille du tableau, les valeurs des constantes de coût des opérations élémentaires importent peu, pourvu que celles-ci soient constantes. **C'est pourquoi, on supposera désormais qu'on dispose d'une machine de test pour nos algorithmes telle que chaque instruction élémentaire possède un coût constant que l'on notera c .** Il suffit pour cela de choisir une constante qui majore toutes les autres.

■ **Exemple 12 — Compter le nombre d'opérations élémentaires pour le tri par insertion.** Sur l'algorithme 11, on a reporté les coûts pour chaque instruction. On peut donc maintenant calculer le coût total. On choisit de se placer dans le pire des cas, c'est-à-dire lorsqu'on insère l'élément systématiquement au début du tableau^a. La boucle *tant que* est donc exécutée

Algorithme 11 Tri par insertion, calcul du nombre d'opérations

```

1: Fonction TRIER_INSERTION(t)
2:   n ← taille(t)                                     ▷ affectation : c
3:   pour i de 1 à n-1 répéter
4:     à_insérer ← t[i]                                ▷ accès, affectation : 2c
5:     j ← i                                         ▷ affectation : c
6:     tant que t[j-1] > à_insérer et j>0 répéter    ▷ accès, tests : 3c
7:       t[j] ← t[j-1]                                ▷ accès, affectation : 3c
8:       j ← j-1                                       ▷ affectation : c
9:     t[j] ← à_insérer                                ▷ accès, affectation : 2c

```

$i - 1$ fois.

$$C(n) = c + \sum_{i=1}^{n-1} (2c + c + (i-1)(3c + c) + 2c) \quad (9.3)$$

$$= c + c \sum_{i=1}^{n-1} (1 + 4i) \quad (9.4)$$

$$= c + c(n-1) + 4 \frac{n(n-1)}{2} \quad (9.5)$$

$$= (c-2)n + 2n^2 \quad (9.6)$$

Dans le pire des cas, le coût total du tri par insertion est donc en $O(n^2)$.

Le meilleur des cas, pour l'algorithme de tri par insertion, c'est lorsque l'élément à insérer n'a jamais à être déplacé^b. Alors la condition de sortie de la boucle *tant que* est valide dès le premier test. Le coût total devient alors :

$$C(n) = c + \sum_{i=1}^{n-1} (2c + c + 3c) \quad (9.7)$$

$$= c + 6c(n-1) \quad (9.8)$$

$$= -5c + 6cn \quad (9.9)$$

Dans le meilleur des cas, on a donc un coût du tri par insertion en $O(n)$.

-
- a. Le tableau est donné en entrée dans l'ordre inverse à l'ordre souhaité.
 - b. Le tableau donné en entrée est déjà trié!

■ **Exemple 13 — Compter le nombre d'opérations élémentaires pour le tri par comptage.** La première partie de l'algorithme 6 compte les occurrences de chaque élément. La complexité de cette opération est $O(n)$ puisqu'il s'agit de balayer tout le tableau d'entrée à chaque fois.

La seconde partie de l'algorithme 6 est composée deux boucles imbriquées qui dépendent de v_{max} et de n . La boucle imbriquée effectue $c[v]$ tours à chaque fois que le nombre est présent dans le tableau. On considère que le test et les deux opérations dans la boucle im-

briquée ont un coût constant de 1. On peut compter le nombre d'opérations pour les deux boucles imbriquées :

$$C(n, v_{max}) = \sum_{v=0}^{v_{max}} \left(1 + \sum_{j=0}^{c[v]-1} 1 \right) \quad (9.10)$$

$$= \sum_{v=0}^{v_{max}} 1 + c[v] \quad (9.11)$$

$$= 1 + v_{max} + n \quad (9.12)$$

car $\sum_{j=0}^{c[v]-1} 1 = c[v]$ et $\sum_{v=0}^{v_{max}} c[v] = n$.

C'est pourquoi la complexité du tri par comptage est en $O(n + 1 + v_{max} + n) = O(v_{max} + n)$

Le coût total de l'algorithme de tri par comptage est donc linéaire par rapport aux deux paramètres d'entrée. Il est donc raisonnable de l'utiliser lorsque n est du même ordre que v_{max} . Par contre, il nécessite la création d'un tableau de même taille n^a , ce qui peut avoir des conséquences sur la mémoire du système.

a. ce tri n'est pas en place

10

RÉCURSIVITÉ

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ expliquer le principe d'un algorithme récursif
- ☒ expliciter la condition d'arrêt d'un algorithme récursif
- ☒ faire des appels récursifs
- ☒ coder des algorithmes à récursivité simple et multiple en Python

A Principes de la programmation récursive

La récursivité, c'est la projection de l'induction mathématique dans le domaine de l'informatique. La plupart des langages contemporains sont récursifs, c'est-à-dire qu'ils permettent de programmer récursivement.

■ **Définition 56 — Algorithme récursif.** Un algorithme \mathcal{A} qui résout un problème \mathcal{P} est dit récursif si, où au cours de son exécution, il s'utilise lui-même pour résoudre le problème \mathcal{P} avec des données d'entrées différentes.

■ **Définition 57 — Appel récursifs d'une fonction.** On désigne par le terme appel récursif l'utilisation d'une fonction dans la définition de la fonction elle-même.

■ **Définition 58 — Pile d'exécution.** La pile d'exécution d'un processus est un emplacement mémoire destiné à mémoriser les appels de fonction, les paramètres, les variables locales ainsi que l'adresse de retour^a de chaque fonction en cours d'exécution.

a. c'est-à-dire la case mémoire qui va contenir la valeur renvoyée par la fonction.

 **Vocabulary 11 — Call stack ↽ Pile d'exécution**

L'algorithme 12 est un algorithme récursif qui permet de calculer la fonction factorielle d'un entier naturel (cf. définition inductive 59). La ligne 5 contient l'appel récursif.

■ **Définition 59 — Factorielle, définie inductivement.** Comme on a défini l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} inductivement^a, la fonction factorielle peut être définie par :

Fact : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

(B) $\text{Fact}(0) = 1$,

(I) $\text{Fact}(n + 1) = (n + 1) \times \text{Fact}(n)$.

a. L'option informatique donne les bases théoriques de cette définition.

Algorithme 12 Factoriel récursif

1: Fonction FACT(n)	
2: si n = 0 alors	▷ Condition d'arrêt
3: renvoyer 1	
4: sinon	
5: renvoyer n × FACT(n-1)	▷ Appel récursif

À la lecture de cet algorithme, on peut être pris d'un vertige : cela va-t-il se terminer ? Est-il possible de s'appeler soi-même pour résoudre un problème ? Comment gérer en mémoire les appels successifs ?

Pour calculer, cet algorithme procède comme suit : **il suspend momentanément le calcul du résultat de la fonction à la réception du résultat de l'appel récursif en empilant l'appel récursif sur la pile d'exécution.** La pile d'exécution est donc une zone mémoire essentielle qui garantit le bon déroulement des appels successifs des fonctions récursives ou non.

■ **Exemple 14 — Calculer 3! récursivement.** Dans le cas de 3!, l'exécution se présente ainsi :

1. appel de FACT(3) dont le résultat est suspendu au résultat de FACT(2) (empilé),
2. appel de FACT(2) dont le résultat est suspendu au résultat de FACT(1) (empilé),
3. appel de FACT(1) dont le résultat est suspendu au résultat de FACT(0) (empilé),
4. FACT(0) renvoie 1 (dépilé),
5. 1 est multiplié par 1, 1 est renvoyé par FACT(1)(dépilé),
6. 1 est multiplié par 2, 2 est renvoyé par FACT(2)(dépilé),
7. 2 est multiplié par 3 et 6 est renvoyé par FACT(3) (dépilé).

La figure 10.1 illustre ce fonctionnement. Chaque appel récursif crée un contexte mémoire relatif à l'appel qui disparaît de la mémoire lorsque le résultat est renvoyé.

R Comme toute zone mémoire, la pile d'exécution est limitée, ce qui a des conséquences concrètes en programmation : on ne peut pas effectuer une infinité d'appels récursif. Une li-



FIGURE 10.1 – Vision de la pile d'exécution de l'algorithme factoriel récursif 12 pour le calcul de $3!$

mite existe à la profondeur de la récursivité : la nature est têtue, notre monde physique demeure fini.

R La définition 56 ne garantit pas le bon fonctionnement d'un algorithme récursif. Pour qu'un algorithme récursif aboutisse correctement, il est nécessaire que le nombre d'appels récursifs soit fini. Dans le cas contraire, la pile d'exécution explose en mémoire : il n'y a plus assez de place pour la stocker et le système s'effondre.

M **Méthode 5 — Formuler correctement un algorithme récursif** Afin d'éviter les appels récursifs infinis, il est nécessaire d'être vigilant lors de l'écriture des algorithmes récursifs. Il faut :

1. distinguer au moins un cas sans appel récursif qui permet de terminer l'algorithme, c'est-à-dire **une condition d'arrêt**,
2. appeler récursivement avec des données **plus proches** des données qui satisfont la condition d'arrêt.

Dans le cas de l'algorithme 12, la condition d'arrêt est la ligne 2. Par ailleurs, on voit bien que l'appel récursif avec le paramètre $n - 1$ se rapproche de cette condition d'arrêt. La justification de ces affirmations repose sur l'induction et la notion d'ordre bien fondé (cf. option informatique).

B Types de récursivité

■ **Définition 60 — Récursivité simple.** La récursivité est dite simple si une exécution de l'algorithme aboutit à un seul appel récursif.

■ **Exemple 15 — Algorithmes simplement récursifs.** L'algorithme factoriel récursif 12 est une récursivité simple. Il est possible de formuler l'algorithme de recherche dichotomique récursivement (cf. algorithme 13). Cet algorithme est également de récursivité simple : chaque chemin d'exécution n'opère qu'un seul appel récursif.

Algorithme 13 Recherche récursive d'un élément par dichotomie dans un tableau trié

```

1: Fonction REC_DICH(t, g, d, elem)
2:   si g > d alors                                ▷ Condition d'arrêt
3:     renvoyer l'élément n'a pas été trouvé
4:   sinon
5:     m ← (g+d)//2                                ▷ Diviser
6:     si t[m] = elem alors
7:       renvoyer m
8:     sinon si elem < t[m] alors
9:       REC_DICH(t, g, m-1, elem)                  ▷ résoudre
10:    sinon
11:      REC_DICH(t, m+1, d, elem)                  ▷ résoudre
  
```

■ **Définition 61 — Récursivité multiple.** La récursivité est dite multiple si une exécution de l'algorithme aboutit à plusieurs appels récursifs.

■ **Exemple 16 — Algorithmes à récursivité multiple.** Les algorithmes calculant la suite de Fibonacci, la solution au jeu des tours d'Hanoi ou l'exemple 14 sont à récursivité multiples. L'algorithme 14 est à récursivité multiple car la fonction est appelée deux fois à la ligne sept.

Algorithme 14 Est-il mon aïeul?

```

1: Fonction EST_AÏEUL(p1, p2)
2:   si p1 est un des parents de p2 alors
3:     renvoyer Vrai
4:   sinon si p1 est plus jeune que p2 alors
5:     renvoyer Faux
6:   sinon
7:     renvoyer EST_AÏEUL(p1, mère(p2)) ou EST_AÏEUL(p1, père(p2))
  
```

■ **Définition 62 — Récursivité terminale** → Hors Programme . Un algorithme est dit à récursivité terminale s'il renvoie directement le résultat de l'appel récursif sans opération supplémentaire. Cette propriété rend l'opération de dépilement de la pile d'exécution très efficace puisqu'on n'a pas à faire de calculs supplémentaires.

■ **Exemple 17 — Factoriel récursif terminal.** On peut transformer l'algorithme 12 pour qu'il présente une récursivité terminale (cf. 15)

Algorithme 15 Factoriel récursif terminal → HORS PROGRAMME

```

1: Fonction FACT(n, acc)                                ▷ on ajoute un accumulateur
2:   si n <= 1 alors                               ▷ Condition d'arrêt
3:     renvoyer acc
4:   sinon
5:     renvoyer FACT(n-1, n × acc )                  ▷ Appel récursif avec accumulateur
  
```

C Du récursif à l'itératif → HORS PROGRAMME

Dans la pratique, un algorithme est souvent énoncé récursivement car l'expression est plus puissante, plus intelligible et plus facile à trouver. Cependant, on convertit la plupart du temps l'algorithme récursif en itératif afin d'être plus performant : il s'agit à la fois d'éviter d'avoir à effectuer les appels récursifs successifs qui ralentissent souvent l'exécution sur les machines concrètes lorsque la récursivité n'est pas terminale et de dépasser la limite physique de la taille mémoire affectée à la pile.

P Lorsque la taille mémoire réservée à de la pile d'exécution est dépassée, Python interrompt l'exécution avec l'exception `RecursionError: maximum recursion depth exceeded`. Cela signifie qu'on ne peut plus stocker en mémoire les appels récursifs suspendus à l'exécution d'un autre.

M **Méthode 6 — Du récursif à l'itératif** La formulation d'un algorithme sous la forme d'un algorithme récursif **terminal** permet de facilement en déduire une version itérative. Le principe est expliqué par les algorithmes 16 et 17.

En appliquant la méthode décrite par ces algorithmes, on peut retrouver facilement la version itérative de factorielle (cf. algorithme 18).

Algorithme 16 Algorithme récursif terminal

```

1: Fonction REC_TERM(n)
2:   si ARRÊTER(n) alors
3:     renvoyer SOLUTION(n)
4:   sinon
5:     CALCULER_AVEC(n)
6:     renvoyer REC_TERM(MODIFIER(n))
  
```

Algorithme 17 Version itérative d'un algorithme récursif terminal

```

1: Fonction ITER(n)
2:   tant que non ARRÊTER(n) répéter
3:     CALCULER_AVEC(n)
4:     n ← MODIFIER(n)
5:   renvoyer SOLUTION(n)

```

Algorithme 18 Factoriel itératif

```

1: Fonction FACT(n)
2:   acc ← 1
3:   tant que n > 1 répéter
4:     acc ← n × acc
5:     n ← n - 1
6:   renvoyer acc

```

 Programmer récursivement est une manière de penser très structurante. Elle repose sur le principe d'induction^a. Les algorithmes proposés en TP permettent de développer cette compétence importante.

a. principe très développé en option informatique

11

TABLEAUX STATIQUES

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ distinguer les listes des tableaux statiques
- ☒ choisir une structure de données adaptée à un algorithme
- ☒ importer la bibliothèque Numpy
- ☒ utiliser un tableau Numpy mono et multidimensionnel
- ☒ écrire des opérations élément par élément

Écrire un programme optimal en terme de complexité nécessite l'identification des structures de données utilisées très tôt dans le développement. En effet, le choix d'une structure de données plutôt qu'une autre, par exemple choisir une liste à la place d'un tableau ou d'un dictionnaire, peut rendre inefficace un algorithme selon le choix effectué.

Ce chapitre a pour but d'approfondir la définition des structures de données afin de permettre un choix éclairé. C'est pourquoi on définit d'abord ce qu'est un type de données abstrait en illustrant ce concept sur les listes, les tableaux, les piles et les files. Puis on fait le lien avec les implémentations possibles de ces types en structures de données, notamment en langage Python. Le chapitre s'achève sur la description et l'usage des tableaux statiques fournis par la bibliothèque de calcul numérique Numpy. Des explications sont données pour utiliser au mieux le calcul vectoriel.

A Type abstrait de données et structure de données

→ HORS PROGRAMME

- **Définition 63 — Type abstrait de données (TAD).** Un type de données abstrait est une abstraction d'une structure de données qui ne se préoccupe pas de son implémentation sur

une machine : sa structure interne est indiscernable, le type abstrait est vu de l'extérieur comme une boîte noire.

Un TAD spécifie le quoi, c'est à dire le type de données contenues ainsi que les opérations qu'on fait dessus. Par contre, il ne spécifie pas comment sont stockées ni comment les opérations sont implémentées.

■ **Définition 64 — Structure de données.** Une structure de données est une mise en œuvre concrète d'un type abstrait, une implémentation d'un type abstrait sur dans un langage de programmation.

■ **Exemple 18 — Un entier.** Un entier est un TAD qui :

- contient une suite de chiffres^a éventuellement précédés par un signe – ou +,
- fournit les opérations +, −, ×, //, % .

Selon le langage, ce TAD entier est implémenté en machine par un type concret différent :

- `int` en Python,
- `Integer` ou `int` en Java,
- `char`, `short`, `int`, `uint`, `long int` en C,
- `int` en OCaml.

a. peu importe la base pour l'instant...

■ **Exemple 19 — Un booléen.** De la même manière, on peut définir un TAD qui désigne un booléen. Un booléen est un TAD qui :

- se note Vrai ou Faux,
- fournit les opérations logiques ET, OU, NON...

Selon le langage, ce TAD booléen est implémenté en machine par un type concret différent :

- `bool` valant `True` ou `False` en Python,
- `boolean` valant `true` ou `false` en Java,
- `bool` valant `1` ou `0` en C,
- `bool` valant `true` ou `false` en OCaml.

(R) Un type abstrait de données est à une structure de donnée ce qu'un algorithme est à un programme. On spécifie un algorithme ou un type abstrait de données, mais on implémente un programme ou une structure de données.

Les exemples précédents de types abstraits de données étaient limités à des types simples. Mais il est possible de définir des types abstraits de données composés.

■ **Exemple 20 — Types abstraits de données composés.** Voici quelques types abstraits

composés parmi les plus courants :

- liste,
- file,
- pile,
- arbre binaire,
- dictionnaire ou tableau associatif,
- ensemble,
- graphe.

R Il faut faire attention, car si les objets de type `list` en Python implémente le TAD liste par un tableau dynamique, ce n'est pas la seule implémentation possible. De plus, le type `list` est particulièrement plastique puisqu'on peut s'en servir comme d'une pile ou une file également, même si les complexités des opérations de base ne sont pas optimales.

B TAD tableaux et listes → HORS PROGRAMME

Pour les informaticiens, les listes et les tableaux sont avant tout des TAD qui permettent de stocker de façon ordonnée des éléments.

■ **Définition 65 — TAD tableau.** Un TAD tableau représente une structure finie indicable par des entiers. Cela signifie qu'on peut accéder à la lecture ou à l'écriture de n'importe quel élément directement en utilisant un indice, par exemple `t[3]`.

On peut décliner le TAD tableau de manière :

- statique : la taille du tableau est fixée, on ne peut pas ajouter ou enlever d'éléments.
- évolutive : la taille du tableau peut varier, on peut ajouter ou enlever des éléments. Dans ce cas, on parle de tableau dynamique.

■ **Définition 66 — TAD liste.** Un TAD liste représente une séquence finie d'éléments d'un même type qui possède un rang dans la séquence. Les données sont traitées séquentiellement, dans l'ordre du rang.

Un TAD liste est évolutif, c'est à dire qu'on peut ajouter ou enlever n'importe quel élément.

Les opérations sur un TAD liste sont :

- l'ajout ou suppression en début et/ou en fin de liste,
- l'accès à la fin de la liste.

La longueur d'une liste est le nombre d'éléments qu'elle contient. On dit qu'une liste est vide si elle ne contient aucun élément, sa longueur vaut zéro. Le début de la liste est désigné par le terme tête de liste (head), le dernier élément de la liste par la fin de la liste (tail).



FIGURE 11.1 – Représentation d'un tableau statique en mémoire. Il peut représenter un tableau t de cinq entiers codés sur huit bits. On accède directement à l'élément i en écrivant $t[i]$.

Ce chapitre détaille les implémentations de trois du TAD : les tableaux (vus cette fois-ci comme structure de données concrète), les listes chaînées et les tableaux dynamiques (ou vecteurs, ou encore listes-tableaux).

C Implémentation des tableaux --> HORS PROGRAMME

a Implémentation d'un tableau statique

Dans sa version statique, un TAD tableau de taille fixe n est implémenté par un bloc de mémoire contiguë contenant n cases. Ces cases sont capables d'accueillir le type d'élément que contient le tableau.

Par exemple, pour un TAD tableau statique de cinq entiers codés sur huit bits, on alloue un espace mémoire de 40 bits subdivisés en cinq octets comme indiqué sur la figure 11.1. Dans la majorité des langages, l'opérateur `[]` permet alors d'accéder aux éléments, par exemple $t[3]$. Les éléments sont numérotés à partir de zéro : $t[0]$ est le premier élément.

On peut estimer les coûts associés à l'utilisation d'un tableau statique comme le montre le tableau 11.1.

Opération	Complexité	Raison
Accès à un élément au début	$O(1)$	
Accès à un élément à la fin	$O(1)$	
Accès à un élément au milieu	$O(1)$	
Ajout d'un élément au début	$O(n)$	créer un nouveau tableau
Ajout d'un élément à la fin	$O(n)$	créer un nouveau tableau
Suppression d'un élément au début	$O(n)$	créer un nouveau tableau
Suppression d'un élément à la fin	$O(n)$	créer un nouveau tableau

TABLE 11.1 – Complexité des opérations associées à l'utilisation d'un tableau statique.

b Implémentation d'un tableau dynamique --> HORS PROGRAMME

Un tableau dynamique est implémenté par un tableau statique de taille n_{max} supérieure à la taille nécessaire pour stocker les données. Les n données contenues dans un tel tableau

le sont donc simplement entre les indices 0 et $n - 1$. Si la taille n_{max} n'est plus suffisante pour stocker toutes les données, on crée un nouveau tableau statique plus grand de taille kn_{max} et on recopie les données dedans.

Toute la subtilité des tableaux dynamiques réside dans la manière de gérer les nouvelles allocations mémoires lorsque le tableau doit être modifié.

R Les tableaux dynamiques sont parfois appelés vecteurs.

R Comme le montre le tableau 11.2, l'intérêt majeur du tableau dynamique est de proposer un accès direct constant comme dans un tableau statique tout en évitant les surcoups liés à l'ajout d'éléments.

Opération	Complexité	Raison
Accès à un élément au début	$O(1)$	
Accès à un élément à la fin	$O(1)$	
Accès à un élément au milieu	$O(1)$	
Ajout d'un élément au début	$O(n)$	décaler tous les éléments contigus
Ajout d'un élément à la fin	$O(1)$	amorti : il y a de la place ou pas
Suppression d'un élément au début	$O(n)$	décaler tous les éléments contigus
Suppression d'un élément à la fin	$O(1)$	amorti : il y a de la place, parfois trop

TABLE 11.2 – Complexité des opérations associées à l'utilisation d'un tableau dynamique.

R Le coût amorti signifie généralement le coût est constant. Mais, lorsqu'il n'y a plus de place, il faut bien créer la nouvelle structure adaptée au nombre d'éléments et cela a un coût linéaire $O(n)$. Donc ce coût amorti en $O(1)$ signifie c'est constant la plupart du temps mais que parfois cela peut être linéaire.

P En python le type `list` est implémenté par un tableau dynamique mais se comporte bien comme un TAD liste !

Cela a pour conséquence que :

- `L.pop()` et `L.append()` sont de complexité $O(1)$, donc supprimer ou ajouter en fin ne coûte pas cher,
- alors que `L.pop(0)` et `L.insert(0, elem)` sont de complexité $O(n)$ et donc supprimer ou ajouter en tête coûte cher.

Lorsqu'un algorithme doit supprimer ou ajouter en tête, il vaut mieux utiliser une autre structure de données qu'une `list` Python. Dans la bibliothèque `collections`, le type `deque` représente une liste sur laquelle les opérations d'ajout et de suppression en tête ou en fin sont en $O(1)$.

R Rechercher un élément dans un tableau statique ou dans un tableau dynamique présente donc une complexité dans le pire des cas linéaire en $O(n)$: il faut nécessairement balayer tous les éléments si l'élément recherché se trouve en dernière position.

D Bilan de complexités

Le tableau 11.3 propose une synthèse des coûts des opérations sur les structures listes et tableaux en fonction de leurs implémentations.

Opération	Tableau statique	Tableau dynamique
Accès à un élément au début	$O(1)$	$O(1)$
Accès à un élément à la fin	$O(1)$	$O(1)$
Accès à un élément au milieu	$O(1)$	$O(1)$
Ajout d'un élément au début	$O(n)$	$O(n)$
Ajout d'un élément à la fin	$O(n)$	$O(1)$ amorti
Suppression d'un élément au début	$O(1)$	$O(n)$
Suppression d'un élément à la fin	$O(n)$	$O(1)$ amorti

TABLE 11.3 – Complexité des opérations associées à l'utilisation des listes et des tableaux.

E Pourquoi Numpy?

--> HORS PROGRAMME

P Numpy est un bibliothèque logicielle Python dédiée au calcul numérique. Elle n'est pas explicitement au programme. Certaines épreuves de concours en interdisent son usage quand d'autres l'exigent explicitement. Il faut rester **vigilant** à la lecture de l'épreuve.

 Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

Le cœur du langage Python ne dispose pas d'un type tableau **statique**, c'est-à-dire de taille fixe. Les concepteurs de ce langage ont créé un type hybride qui se comporte à la fois comme une liste et un tableau : la liste Python. L'implémentation est réalisée grâce à un tableau **dynamique**, c'est-à-dire un tableau dont la taille évolue en fonction du besoin au cours du programme. Néanmoins, cette évolution de taille a un impact sur la rapidité des opérations. La liste Python est très souple et (trop) pratique : on peut la tordre pour faire, au moins en apparence, à peu près ce que l'on veut, même si cela n'est pas toujours efficace. Cependant, elle n'est pas adaptée au calcul numérique : les listes imbriquées ne sont pas des tableaux multidimensionnels et trop de flexibilité rend le code propice à des bogues à répétitions difficiles à cerner.

Pour le calcul numérique, il est important de pouvoir utiliser des tableaux statiques pour représenter des vecteurs, des matrices ou des tableaux à n dimensions car les opérations qu'on souhaite réaliser se font soit élément par élément (calcul vectoriel) soit par matriciellement.

Or, ces calculs vectoriels ou matriciels ne sont cohérents que si les tailles des opérandes correspondent. La taille fixe permet de garantir la cohérence des calculs effectués : on ne peut pas par inadvertance ajouter un élément à un tableau statique. D'un point de vue machine, **l'espace mémoire alloué peut rester le même tout au long du calcul**, le chargement en mémoire est donc plus facile à gérer, les modifications et les accès plus simples et plus rapides.

Les plus-values de Numpy, dans ce contexte, sont les suivantes :

1. le type `array` est un tableau statique multidimensionnel. En machine, tous les éléments sont stockés de manière contiguë, à plat : l'aspect multidimensionnel n'est qu'une vision du tableau procurée par le génie logiciel, du sucre syntaxique. C'est pourquoi il est très facile de changer de redimensionner un tableau Numpy car il n'est pas modifié en mémoire par cette opération.
2. les types simples Numpy sont plus riches que les types de base Python : on peut par exemple utiliser des types entiers non signés (`np.uint8`) pour stocker une information sur un octet plutôt que d'utiliser un entier signé sur 64 bits, ou utiliser des flottants simple précision plutôt que double. Gain de place, gain de temps également dans les opérations.
3. les calculs vectoriel (élément par élément) et matriciel proposés par Numpy présentent deux avantages :
 - les opérations vectorielles `+, -, *, /, ...` sont pré-compilées en langage machine et donc le calcul est exécuté très rapidement par l'interpréteur Python car il n'est pas interprété. Les codes compilés utilisent les instructions vectorielles des processeurs, des instructions capables de réaliser plusieurs opérations du même type (addition par exemple) sur des opérandes différentes en un seul cycle d'horloge.
 - la syntaxe proposée via la surcharge d'opérateur permet de s'affranchir de l'utilisation des boucles et d'écrire une formule vectorielle avec la même syntaxe qu'une formule scalaire. C'est à cette condition d'écriture d'ailleurs que les calculs peuvent être accélérés par les opérations pré-compilées. Par exemple, ci-dessous, on a opéré une multiplication par deux pour chaque élément de `X`, puis une soustraction avec un élément de `B` : zéro pour la première colonne, un pour la seconde, deux pour la dernière.

```
import numpy as np
X = np.arange(9.0).reshape((3, 3)) # Matrice 3x3
# array([[0., 1., 2.],
#        [3., 4., 5.],
#        [6., 7., 8.]])
B = np.arange(3.0) # vecteur (1,3)
# array([0., 1., 2.])
Y = 2*X - B # matrice 3x3
# résultat :
#      array([[ 0.,  1.,  2.],
#             [ 6.,  7.,  8.],
#             [12., 13., 14.]])
```

-
- L'opérateur `@` garantit que la syntaxe d'un calcul matriciel est identique à l'expression mathématique. Par exemple :

```
import numpy as np
A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
B = np.array([[5, 6], [7, 8]])
produit = A @ B
```


Vocabulary 12 — Element-wise ↗ élément par élément

Numpy est très utilisé par les scientifiques du monde entier. Les raisons principales sont les suivantes :

1. Numpy est open source,
2. Numpy est optimisée avec un cœur compilé en langage C (compilé, pas interprété donc plus rapide),
3. Numpy s'interface facilement avec d'autres langages de calcul scientifique (C et Fortran notamment),
4. Numpy procure les array, une structure de données de type tableau multidimensionnel de dimensions fixes. Cela complète habilement le langage Python qui ne propose que des listes qui sont implémentées par des tableaux dynamiques.
5. Numpy propose des opérations sur les tableaux élément par élément. Cela permet à la fois d'éviter d'écrire des boucles et de paralléliser les opérations.
6. Numpy permet l'écriture de calculs matriciels.
7. Ces deux derniers points font que les formules mathématiques apparaissent écrites quasi-naturellement dans le code.

F Importation

On peut importer comme on le désire la bibliothèque Numpy. Cependant une convention très utilisée fait qu'on l'importe souvent comme ceci :

```
import numpy as np

t = np.zeros(42)
```

G Créer des vecteurs, des matrices ou des tableaux

- **Définition 67 — Vecteur numpy.** Le terme *vecteur* désigne des array numpy de dimension 1.
- **Définition 68 — Matrice numpy .** Le terme *matrice* désigne les array numpy de dimension deux.

Lorsque le tableau possède plus de deux dimensions, on parle de tableau.

On peut créer, comme le code 11.1 le montre, un vecteur, une matrice ou un tableau numpy à partir :

- du constructeur `np.array()`,
- d'une liste ou d'une liste imbriquée,
- de fonctions spéciales en précisant les dimensions du tableau et la valeur d'initialisation des cases du tableau,
- d'un tableau existant : la tableau créé aura les mêmes dimensions. On précise la valeur à laquelle on veut initialiser les cases.

Code 11.1 – Créer des tableaux Numpy

```
import numpy as np

v1 = np.array([1, 2, 3])
print(v1.shape, v1) # (3,) [1 2 3]
v2 = np.array([[10], [20], [30]])
print(v2.shape, v2) # (3, 1) [[10] [20] [30]]

v3 = np.zeros((1, 3))
print(v3.shape, v3) # (1, 3) [[0. 0. 0.]]
v4 = np.ones((1, 7))
print(v4.shape, v4) # (1, 7) [[1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.]]

m1 = np.zeros((5, 5))
print(m1.shape, m1)
# (5, 5)
# [[0. 0. 0. 0. 0.]
# [0. 0. 0. 0. 0.]
# [0. 0. 0. 0. 0.]
# [0. 0. 0. 0. 0.]
# [0. 0. 0. 0. 0.]]

m1 = np.ones((2, 3))
print(m1.shape, m1)
# (2, 3)
# [[1. 1. 1.]
# [1. 1. 1.]]

t0 = np.zeros((42, 21, 84, 3))
print(t0.shape) # (42, 21, 84, 3)

t1 = np.zeros_like(v1)
print(t1.shape, t1) # (3,) [0 0 0]
t2 = np.ones_like(v3)
print(t2.shape, t2) # (1, 3) [[1. 1. 1.]]
t3 = np.full_like(m1, 42)
print(t3.shape, t3)
# (5, 5)
# [[42. 42. 42. 42. 42. 42. 42.]]
```

```
# [42. 42. 42.]]

s = np.zeros((4, 4, 500)).shape
print(s[0], s[1], s[2]) # 4 4 500

r = np.arange(0, 1, 0.1) # like range but for float !
print(r) # [0. 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9]
time = np.linspace(0, 1, 11)
print(time) # [0. 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1. ]
```

P Comme le montre la fin du code 11.1, la fonction `shape` renvoie un tuple qui spécifie les dimensions du tableau. Comme c'est un tuple, on peut accéder à la taille de chaque dimension par l'opérateur `[]`. Pour un matrice, par exemple, on obtient le nombre de lignes et le nombre de colonnes.

H Accéder aux éléments d'un tableau

Les cases d'un array numpy sont numérotées à partir de zéro, comme pour les listes Python. Le tronçonnage ainsi que l'indexage négatif sont également disponibles comme le montre le code 11.2.

P Cependant, la syntaxe de la manipulation des tableaux multidimensionnels est différente de celle des listes imbriquées : une virgule sépare les indices des dimensions différentes. Il faut rester vigilant et ne pas confondre ces syntaxes.



Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

Code 11.2 – Accéder aux éléments d'un tableau numpy

```
import numpy as np

m = np.array([[1, 2], [3, 4]])
print(m)
# [[1 2]
#  [3 4]]
print(m[0, 0], m[0, 1], m[1, 0], m[1, 1]) # 1 2 3 4
# slicing
print(m[:, 0]) # [1 3]
print(m[:, 1]) # [2 4]
print(m[0, :]) # [1 2]
print(m[1, :]) # [3 4]

# negative indexing
print(m[-1, -1])
# reversing
print(m[::-1])
# assignment
```

```
m[0, :] = 42
print(m)
# [[42 42]
#  [ 3  4]]

# resizing
m = m.reshape((1, 4))
print(m) # [[1 2 3 4]]
```

P Comme on peut le voir à la fin du code 11.2, on peut facilement redimensionner un tableau, avec ses éléments dedans. Cela vient du fait que numpy stocke toujours les éléments d'un tableau de manière contiguë en mémoire et ce, quelle que soit les dimensions du tableau.

La bibliothèque stocke aussi avec le tableau ses dimensions apparentes pour l'utilisateur. L'accès aux éléments au travers ses dimensions $t[3,2]$ n'est donc qu'une commodité (du sucre syntaxique) fournie par le génie logiciel de la bibliothèque. Un indice réel est calculé par numpy à partir de [3,2] pour accéder à la case l'élément dans la zone contiguë en mémoire.

 **Vocabulary 13 — Syntactic sugar ↪** Sucre syntaxique. Élément de la syntaxe d'un langage visant à faciliter l'utilisation, l'écriture et la lecture associées à un concept. Cela adoucit le travail humain.

I Opérations élément par élément

On a très souvent besoin d'appliquer les mêmes formules à tous les éléments d'un tableau, à toute une série de données. Par exemple, pour filtrer un signal, le moyenner, pour changer de couleur tous les pixels d'une image ou tout simplement pour calculer tous le prix TTC de tous les éléments d'une liste de prix HT.

Le succès de numpy repose principalement sur la capacité à opérer des calculs sur un tableau comme si on les effectuait sur une variable scalaire (cf. code 11.3). **Il devient alors inutile de faire une boucle pour traiter tous les éléments du tableau** et l'écriture et la lecture des formules physiques et mathématiques s'en trouvent facilitées :

Code 11.3 – Opérer élément par élément

```
import numpy as np

x = np.ones(4)
print(x + x) # [2. 2. 2. 2.]
print(x - x) # [0. 0. 0. 0.]
print(4 * x * x / 5) # [0.8 0.8 0.8 0.8]
print(x / x) # [1. 1. 1. 1.]

r = np.arange(0, 1, 0.3)
print(r) # [0. 0.3 0.6 0.9]
s = np.pi * r ** 2
print(s) # [0. 0.28274334 1.13097336 2.54469005]
```

```

time = np.linspace(0, 1, 11)
print(time) # [0. 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1. ]
signal = 5 * np.cos(2 * np.pi * 7 * time)
print(signal)
# [ 5. -1.54508497 -4.04508497 4.04508497 1.54508497 -5.
# 1.54508497 4.04508497 -4.04508497 -1.54508497 5. ]

```

P Les opérateurs arithmétiques `+, -, *, /, *` utilisés dans le code 11.3 sont des opérateurs qui agissent sur des tableaux numpy. En informatique, on dit alors qu'on a surchargé les opérateurs `+, -, *, /, *` pour qu'ils puissent agir sur d'autres données que les `int` ou les `float`.

J Opérations matricielles

Numpy possède également la multiplication matricielle comme le montre le code 11.4. C'est l'opérateur `@` qui permet de réaliser cette opération. Il est également très facile de faire de l'algèbre linéaire¹ avec le module `numpy.linalg`.

Code 11.4 – Calcul matriciel

```

import numpy as np

A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
X = np.array([[.2], [.1]])
B = np.array([[.1, .2, .3], [.4, .5, .6]])
U = np.array([[0.1], [0.2], [0.3]])

Xp = A @ X + B @ U
print(Xp.shape) # (2, 1)
print(Xp)
# [[0.54]
# [1.32]]

```

K Types de données

La bibliothèque numpy fournit également des types de données supplémentaires à Python. Ce sont en fait des types utilisés par le langage C qui sous-tend les calculs. On y trouve notamment les types `int` non signés désignés par `uint` ou les `float` sur 32 bits.

De nombreuses données concrètes sont représentées par des entiers non signés. C'est le cas par exemple des pixels d'une image dont on code généralement l'intensité sur huit bits, c'est à dire par une valeur comprise entre 0 et $2^8 - 1 = 255$. Numpy propose le type `np.uint8` pour représenter ce type de données.

1. Calculer une matrice inverse par exemple.

Code 11.5 – Types de données numpy

```
import numpy as np

unsigned_integer = np.uint8(42)
print(unsigned_integer) # 42
image = np.zeros((1024, 512), dtype=np.uint8)
image[:] = 237
print(image)
#[[237 237 237 ... 237 237 237]
# [237 237 237 ... 237 237 237]
# [237 237 237 ... 237 237 237]
# ...
# [237 237 237 ... 237 237 237]
# [237 237 237 ... 237 237 237]
# [237 237 237 ... 237 237 237]]
```

R Utiliser le type de données le plus adapté à la nature de la donnée est très important : cela permet d'économiser radicalement l'espace mémoire et d'accélérer les calculs.

L Autres fonctions

Numpy regorge de fonctionnalités. N'hésitez pas à consulter la documentation en ligne. Cette bibliothèque est complétée par `scipy`, bibliothèque scientifique.

- fonctions numpy standards à connaître : `min`, `max`, `std`, `mean`, `sum`,
- `unique` : permet de ne conserver qu'un seul exemplaire de chaque valeur dans un tableau,
- `argmax`, `argmin` : permet de récupérer l'indice du maximum ou du minimum d'un tableau,
- `concatenate` agrège deux tableaux,
- le module `numpy.random` et notamment `shuffle` pour mélanger un tableau.

■ **Exemple 21 — Normalisation d'un ensemble de données par colonne.** On suppose qu'on dispose d'un ensemble de données sous la forme d'un tableau numpy de dimension (n, m) . Chaque colonne représente un paramètre que l'on souhaite normaliser : centrer en zéro et d'écart type égal à un.

Pour chaque échantillon x_{ij} de la ligne i et colonne j , on veut :

$$x_{ij}^{norm} = \frac{x_{ij} - \mu_j}{\sigma_j}$$

où μ_j et σ_j sont les moyennes et écart-type de la colonne j .

On peut réaliser ceci en une seule instruction :

```
import numpy as np

def normalized(data):
```

```
return (data - np.mean(data, axis=0)) / np.std(data, axis=0)

data = np.random.random((100, 5))
data = normalized(data)

print(np.max(data, axis=0), np.min(data, axis=0), np.mean(data, axis=0), np.std(data,
axis=0))
```

Troisième partie

Semestre 2

12

TERMINAISON ET CORRECTION

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ expliquer le problème de la terminaison d'un algorithme
- ☒ utiliser un variant de boucle pour prouver la terminaison d'un algorithme
- ☒ expliquer la notion de correction d'un algorithme
- ☒ utiliser un invariant de boucle pour prouver la correction d'un algorithme

A Un programme se termine-t-il?

Si un programme ne s'arrête pas de lui-même, c'est soit qu'il :

- converge très lentement vers une solution,
- il ne s'arrêtera jamais, tournant en rond, répétant **indéfiniment** les mêmes séquences.

Cette dernière possibilité est à la fois utile, par exemple pour un système d'exploitation et des serveurs qui doivent servir en permanence, et en même temps guère admissible lorsqu'on souhaite avoir la réponse à un problème donné. C'est pourquoi les informaticiens s'intéressent tout particulièrement à la question de l'arrêt de leurs programmes.

Parmi les éléments de notre pseudo-langage algorithmique, les seuls qui pourraient engendrer une exécution infinie d'un programme sont les instructions de boucle, **pour** et **tant que** ainsi que la récursivité. C'est pourquoi les sections qui suivent y accordent un intérêt tout particulier.

■ **Exemple 22 — S'arrêtera ? S'arrêtera pas ?.** Imaginons un instant que nous disposions d'un algorithme capable de se prononcer sur la terminaison d'un autre algorithme et nommons le `termine?`. Cet algorithme renvoie vrai si l'algorithme passé en paramètre se termine et faux sinon.

Imaginons que l'on souhaite tester la terminaison d'un autre algorithme nommé `SOUS_TEST`

comme dans l'algorithme 19. Que penser alors de cet algorithme? À quelle condition se termine-t-il? Peut-on le prouver? Naturellement, ce paradoxe souligne l'impossibilité de répondre à la question de la terminaison d'un algorithme.

On dit que le problème de l'arrêt est **indécidable**, tout comme toute propriété non triviale sur un programme (Théorème de Rice [21]).

Algorithme 19 Test de la terminaison de l'algorithme SOUS_TEST

```

1: Fonction TEST_TERMINAISON
2:   tant que TERMINE?(SOUS_TEST) est faux répéter
3:     ne rien faire.
  
```

Théorème 1 — Problème de l'arrêt. Il n'existe pas de programme permettant de dire si un algorithme termine toujours ou non.

■ **Exemple 23 — Suite de Syracuse .** Prenons par exemple l'algorithme de calcul des éléments de la suite de Syracuse (cf. algorithme 20).

Une implémentation dans le langage de votre choix vous montrera que cette fonction renvoie la valeur 1 au bout d'un certain nombre d'itérations^a. Cet algorithme se termine donc, au moins en apparence.

Il existe d'ailleurs une conjecture nommée «conjecture de Syracuse» qui formule l'hypothèse que la suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif atteint 1.

Cependant, aucune théorie mathématique ou informatique n'a pu le démontrer à ce jour. Il se peut même qu'on ne puisse pas le démontrer.

^a. À partir de ce rang, la suite de Syracuse est cyclique.

Algorithme 20 Calcul des éléments de la suite de Syracuse

```

1: Fonction SYRACUSE(n)                               ▷ n est un paramètre formel d'entrée
2:   s  $\leftarrow$  n
3:   tant que s > 1 répéter
4:     si s est pair alors
5:       s  $\leftarrow$  s/2
6:     sinon
7:       s  $\leftarrow$  3 * s + 1
8:     renvoyer s
  
```

R D'une manière générale, on en peut donc pas conclure sur la terminaison d'un algorithme. Néanmoins, dans de nombreux cas particuliers et en utilisant des propriétés mathématiques, on peut démontrer que des algorithmes se terminent. Ceci est l'objet des deux sections suivantes.

B Variant de boucle

■ **Définition 69 — Variant de boucle.** Un variant de boucle v est une suite de valeurs telles que :

1. les valeurs de v sont entières et positives (\mathbb{N}),
2. v est strictement décroissante à chaque itération de la boucle,
3. v dépend des variables de la boucle.

R Le variant de boucle est une suite de valeurs entières positives strictement décroissante : elle est donc **minorée par 0**. Une suite strictement décroissante minorée d'entiers naturels ne peut avoir qu'un nombre fini de termes. **Le variant atteint donc n'importe quelle valeur positive inférieure à sa valeur de départ en un nombre fini d'itérations.** Dès lors, si la condition d'arrêt de la boucle est le franchissement de cette valeur, l'arrêt se déclenche et le programme termine.

R D'une manière générale, la condition d'arrêt d'une boucle doit impliquer le franchissement d'une valeur particulière par le variant de boucle.

R Dans un cadre plus général (et l'option informatique), un variant appartient à un ensemble muni d'un **ordre bien fondé**. Dans le cadre du tronc commun informatique, on utilisera presque toujours $(\mathbb{N}, <)$: l'absence de suite infinie strictement décroissante dans \mathbb{N} garantit l'arrêt.

C Démontrer la terminaison d'un algorithme

M **Méthode 7 — Démontrer la terminaison d'un algorithme** Pour prouver la terminaison d'un algorithme, si cela est possible, il suffit souvent de prouver que les boucles se terminent et donc de :

1. trouver un variant de boucle (entier, positif, strictement décroissant),
2. montrer que le variant franchit une valeur limite liée à la condition d'arrêt.

R La boucle **pour** ne pose généralement pas de problèmes en langage Python^a au niveau de la terminaison car donc le nombre d'itérations est explicite et l'indice est directement géré par la fonction `range`. Il suffit alors de choisir un variant lié à la variable d'itération de la boucle, typiquement $n - i$ ou i . Ce n'est pas le cas des boucles tant que.

^a Dans d'autres langages comme le langage C, ce n'est pas toujours évident. La boucle `for` est définie comme une boucle `while` déguisée où l'on peut modifier l'indice manuellement, ce qui rend la terminaison non triviale.

a Terminaison d'un algorithme impératif

■ **Exemple 24 — Fonction produit.** Prenons l'exemple simple du calcul du produit de deux nombres entiers naturels a et b par l'algorithme 21 : la condition d'arrêt de la boucle tant que $c < b$ peut s'écrire $b - c > 0$. Par ailleurs, c est incrémenté à chaque tour de boucle. La fonction

$$\begin{aligned}v : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\c &\longmapsto b - c\end{aligned}$$

est une fonction à valeurs entières, strictement décroissante, initialisée à une valeur positive, c'est-à-dire un variant de boucle. v atteint nécessairement la valeur 0, au bout d'un certain nombre d'itérations. Il s'en suit que la condition d'arrêt $b - c > 0$ devient fausse et déclenche l'arrêt de la boucle. Donc, l'algorithme 21 se termine.

On procède de la même manière pour l'algorithme 22. Construisons un variant de boucle à partir de la variable i . On peut poser :

$$\begin{aligned}v : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\i &\longmapsto b - i\end{aligned}$$

Il s'agit bien d'une fonction à valeurs entières. Au démarrage, $v(0)$ vaut b qui est une valeur entière positive. À chaque tour de boucle, i est incrémenté implicitement de 1. Donc v est une fonction entière strictement décroissante, un variant de boucle. La condition de sortie de la boucle est $i > b - 1$. On a $v(b) = b - b = 0$. D'après le théorème de la limite monotone, v atteindra la valeur 0 au bout d'un certain nombre d'itérations. Donc l'algorithme se termine.

Algorithme 21 Produit de deux nombres entiers naturels, quel pourrait être un variant?

1: Fonction PRODUIT(a, b)	▷ $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$.
2: $p \leftarrow 0$	
3: $c \leftarrow 0$	▷ c est un entier.
4: tant que $c < b$ répéter	
5: $p \leftarrow p + a$	
6: $c \leftarrow c + 1$	
7: renvoyer p	

Algorithme 22 Produit de deux nombres entiers naturels, quel pourrait-être un variant?

1: Fonction PRODUIT(a, b)	▷ $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}$.
2: $p \leftarrow 0$	
3: pour $i = 0$ à $b - 1$ répéter	▷ i est la variable d'itération de la boucle pour
4: $p \leftarrow p + a$	
5: renvoyer p	

R Il est important de noter que le test de la boucle **tant que** s'exprime avec le signe inférieur. On veillera à procéder de même, c'est-à-dire à exprimer ces tests à l'aide de l'opérateur $<$ ou $>$, non pas avec l'opérateur \neq . Ceci afin d'éviter l'erreur suivante illustrée par l'exemple 25.

■ **Exemple 25 — Boucle infinie (à ne pas reproduire!).** Reprenons l'algorithme 21 en introduisant une **petite erreur** à la ligne 6 : on incrémente de 2. La condition d'arrêt de la boucle $c \neq b$ ne garantit pas que la fonction $v(c) = b - c$ soit minorée par zéro, notamment si b est impair : v peut prendre des valeurs négatives, ce n'est donc pas un variant de boucle. Cet algorithme 23 ne termine pas toujours.

Algorithme 23 Boucle infinie (à ne pas reproduire!)

```

1: Fonction BINF( $a, b$ )                                      $\triangleright a \in \mathbb{N}$  et  $b \in \mathbb{N}$ .
2:    $p \leftarrow 0$ 
3:    $c \leftarrow 0$                                           $\triangleright c$  est un entier.
4:   tant que  $c \neq b$  répéter
5:      $p \leftarrow p + a$ 
6:      $c \leftarrow c + 2$ 
7:   renvoyer  $p$ 
```

R De manière similaire, on évitera les tests d'égalité sur les flottants dans les conditions d'arrêt : on a toutes les chances de ne pas la vérifier, comme le montre l'exemple 26 et l'algorithme 24.

■ **Exemple 26 — Boucle infinie, de la théorie à la pratique (à ne pas reproduire!).** Dans l'algorithme 24, la condition d'arrêt doit pouvoir être vérifiée, en théorie. Dans les faits, elle ne l'est pas pour deux raisons :

1. on ne sait pas si r est un multiple de 0.1,
2. même si c'était le cas, l'utilisation des flottants (norme IEEE 754) ne permet pas d'atteindre la valeur 0.1 exactement, quelque soit le langage de programmation comme cela est expliqué au chapitre c.

Il faut donc éviter les conditions d'arrêt de boucle comprenant des flottants et, si jamais on y est contraint, utiliser les opérateurs de comparaison $<$ ou $>$, jamais les opérateurs \neq ou $=$.

Algorithme 24 Boucle infinie, condition d'arrêt sur un flottant (**ne pas reproduire!!!**)

```

1: Fonction CAFLOT( $r$ )                                      $\triangleright r \in \mathbb{R}$ .
2:    $x \leftarrow 0.0$                                           $\triangleright x \in \mathbb{R}$ .
3:   tant que  $x \neq r$  répéter
4:      $x \leftarrow x + 0.1$ 
```

b Terminaison d'un algorithme récursif

Dans le cas où l'algorithme est récursif, on peut démontrer la terminaison par récurrence sur la variable des appels récursifs si celle-ci décroît par soustraction. On initialise pour la condition d'arrêt de l'algorithme, puis on fait l'hypothèse de récurrence que l'algorithme p se termine pour $p(n)$ et on montre qu'il se termine pour $p(n+1)$. On conclut sur la terminaison pour tout entier naturel n .

Si la récurrence décroît par division, on peut essayer de montrer que les paramètres des appels récursifs forment une suite des $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement décroissante, à valeurs positives et minorée par zéro.

■ **Exemple 27 — Terminaison de l'algorithme récursif 25 de calcul de $n!$.** On procède par récurrence sur n .

Initialisation : pour $n = 0$ ou 1 , l'algorithme renvoie la valeur 1 et termine.

Héritéité : Supposons que l'algorithme termine pour le paramètre n . Le calcul de $\text{fact}(n+1)$ termine, car par hypothèse de récurrence $\text{fact}(n)$ termine et l'algorithme renvoie alors la multiplication de n et de ce résultat.

Conclusion : L'algorithme de factoriel termine pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On aurait également pu dire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = u_n - 1$ et $u_0 = N$ est à valeurs entières, strictement décroissante et initialisée à une valeur positive. Le nombre d'appels récursifs avant d'atteindre la condition d'arrêt est donc fini. L'algorithme se termine.

Algorithme 25 Factoriel récursif

```

1: Fonction FACT(n)
2:   si n ≤ 1 alors                               ▷ Condition d'arrêt
3:     renvoyer 1
4:   sinon
5:     renvoyer n × FACT(n-1)                      ▷ Appel récursif

```

D Le résultat est-il correct?

Le résultat d'un algorithme est-il le bon ? Cette question hante de nombreux informaticiens et plus récemment tous ceux qui sont passés par Parcoursup !

■ **Définition 70 — Correction d'un algorithme.** La correction d'un algorithme est sa capacité à :

1. se terminer,
2. produire un résultat correct, conforme à ce qu'on attend de lui, quelles que soient les entrées.

On dit que la correction est :

- partielle** si le résultat est correct lorsque l'algorithme se termine,
- totale** si elle est partielle et que l'algorithme se termine.

Dans le cadre de la programmation structurée, on peut prouver formellement la correction des opérations d'affectation, des enchaînements d'instructions, des structures conditionnelles et des boucles. Néanmoins, nous nous intéressons dans ce qui suit plus particulièrement aux boucles.

E Invariant de boucle

Si la terminaison d'une boucle permet de conclure sur le fait qu'elle s'arrête, elle ne prouve en aucun cas la validité de son résultat. La correction d'une boucle dans le cadre de tests unitaires non exhaustifs n'est pas une preuve non plus. Or, il est difficile voire impossible de tester de manière exhaustive un algorithme et il faut être capable de garantir la correction, quelles que soient les entrées.

La démarche générale de démonstration de la correction des boucles est une forme de démonstration par récurrence. La propriété à démontrer est nommée *invariant de boucle*. On procède donc en trois phases : l'initialisation de l'invariant, la conservation de l'invariant et la conclusion.

- **Définition 71 — Invariant de boucle.** Un invariant de boucle est une **propriété** liée aux variables d'un algorithme qui :

1. est vraie au début de la boucle,
2. est invariante par les instructions de la boucle à chaque itération,
3. est vraie lorsque la condition de boucle est invalidée.

R D'un point de vue formel, le concept d'invariant de boucle provient de la logique de Hoare, logique développée pour démontrer la correction des codes informatiques. Cette logique repose sur l'usage de triplets constitués de deux propositions et d'un code intercalé $\{P\}C\{Q\}$ que l'on interprète comme la pré-condition $\{P\}$, la commande C et la post-condition $\{Q\}$. La règle d'inférence pour une boucle TANT QUE, si la boucle termine, s'écrit :

$$\frac{\begin{array}{c} \{I \wedge B\}S\{I\} \\ \{I\} \text{ tant que } B \text{ faire } S \text{ fin } \{\neg B \wedge I\} \end{array}}{\{I\} \text{ tant que } B \text{ faire } S \text{ fin } \{\neg B \wedge I\}}$$

Ce qui se lit : sous réserve que $I \wedge B$ soit vrai et que I ne soit pas modifié par S , alors on peut écrire la boucle et celle-ci est correcte si elle termine.

a Correction de la division euclidienne

- **Exemple 28 — Correction partielle de la division euclidienne.** On considère l'algorithme de la division euclidienne (cf. algorithme 26). Pour démontrer sa correction partielle, on peut choisir l'invariant de boucle $J : a = bq + r$. On procède alors en trois temps :

1. \mathcal{I} est vérifié avant la boucle car $a = qb + r = r$ car $q = 0$.
2. Au cours de l'exécution de la boucle, on choisit une itération quelconque. On suppose qu'au début de cette itération, l'invariant \mathcal{I} est vérifié et on a $a = bq + r$. À la fin de l'itération, $b(q+1) + (r - b) = bq + b + r - b = bq + r = a$. Donc, \mathcal{I} est vérifié à la fin de l'itération, si elle est vraie à l'entrée de celle-ci.
3. Comme l'invariant de boucle \mathcal{I} est vrai au démarrage de la boucle et invariant par les instructions de la boucle, on a donc, à la fin de la boucle, $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. Cet algorithme délivre donc bien le résultat escompté s'il termine.

Algorithme 26 Division euclidienne $a = bq + r$

```

1: Fonction DIVISER( $a,b$ )                                ▷ les entrées sont des entiers naturels.
2:    $r \leftarrow a$ 
3:    $q \leftarrow 0$ 
4:   tant que  $r \geq b$  répéter
5:      $r \leftarrow r - b$ 
6:      $q \leftarrow q + 1$ 
7:   renvoyer ( $q,r$ )

```

(R) La plupart du temps, l'invariant de boucle est une propriété liée à l'expression que l'on souhaite calculer grâce à cette boucle. Il est nécessaire de l'exprimer soit mathématiquement comme dans l'exemple 28 soit en langage naturel.

(R) Dans tous les cas, une démonstration de correction est une rédaction et demande, comme toute preuve, un effort de structuration du propos et de l'intelligibilité.

(R) D'une manière pratique, on peut vérifier un invariant de boucle en ajoutant une assertion à chaque tour de boucle qui exige de le vérifier, comme dans le code ci-dessous.

```

def euclid_div(a,b):
    r=a
    q=0
    assert a == b*q + r
    while r >= b:
        assert a == b*q + r
        r = r - b
        q = q + 1
        assert a == b*q + r
    assert 0 <= r < b
    return q,r

```

Correction de l'exponentiation rapide

■ **Exemple 29 — Correction de l'exponentiation rapide.** L'invariant de la boucle *tant que* de l'algorithme 27 est le suivant :

$$\mathcal{J}: i \times e^n = a^N.$$

1. Initialisation : \mathcal{J} est vérifié avant la boucle, car $i \times e^n = 1 \times a^N = a^N$.
2. Conservation : supposons que, une itération quelconque, \mathcal{J} soit vérifié à l'entrée de la boucle. On a donc $i \times e^n = a^N$.
 - Si n est pair, i n'est pas modifié par les instructions. Par contre, n est divisé par deux et e devient e^2 . On a donc, à la suite des instructions de la boucle : $i \times e^n \longrightarrow i \times (e^2)^{n/2} = i \times e^n = a^N$, car n est pair et $2 \times (n/2) = n$.
 - Si n est impair, il existe un entier k tel que $n = 2k+1$. Les instructions font évoluer i , e et n . Ainsi

$$i \times e^n \longrightarrow (i \times e) \times (e^2)^{(2k+1)/2} = ie \times (e^2)^k = i \times e^{2k+1} = ie^n = a^N$$

3. Conclusion : \mathcal{J} est invariant par les instructions de la boucle. Comme il est vérifié à l'entrée, il est donc vérifié à la fin de la boucle. Comme, on sort de la boucle lorsque $n = 1$, à la fin on a $i \times e^1 = ie = a^N$. L'algorithme est donc correct.

Algorithme 27 Exponentiation rapide, version itérative

```

1: Fonction EXP( $a, n$ ) ▷  $n$  est un entier naturel.
2:   si  $n == 0$  alors
3:     renvoyer 1
4:   sinon
5:      $e \leftarrow a$ 
6:      $i \leftarrow 1$ 
7:     tant que  $n > 1$  répéter
8:       si  $n$  est pair alors
9:          $e \leftarrow e \times e$ 
10:         $n \leftarrow n//2$ 
11:      sinon
12:         $i \leftarrow e \times i$ 
13:         $e \leftarrow e \times e$ 
14:         $n \leftarrow n//2$ 
15:      renvoyer  $i * e$ 

```

```

def ite_quick_exp( $a, N$ ):
    if  $N == 0$ :
        return 1
    else:
         $e = a$ 
         $i = 1$ 

```

```
n = N
while n > 1:
    assert i*e**n == a**N  # Loop invariant
    if n % 2 == 0:
        e = e * e
        n = n // 2
    else:
        i = i * e
        e = e * e
        n = n // 2
return e*i
```

13

COMPLEXITÉ

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ─ définir les concepts de complexité temporelle et complexité mémoire
- ─ calculer la complexité d'algorithmes simples
- ─ calculer la complexité d'algorithmes récursifs

A Complexités algorithmiques

Lorsque la taille des données d'entrée à traiter d'un algorithme augmente, le résultat est que l'algorithme met généralement plus de temps à s'exécuter. Pourquoi est-ce un problème ? C'est un problème car, dans les activités humaines, lorsqu'un système fonctionne, on a souvent tendance à lui en demander plus, très vite. Or, si le système développé est capable de gérer trois utilisateurs, peut-il en gérer un million en un temps raisonnable et sans s'effondrer ? C'est peu probable.

La question est donc de savoir :

- comment mesurer la sensibilité d'un algorithme au changement d'échelle des données d'entrée,
- comment mesurer cette sensibilité indépendamment des machines concrètes (processeurs), car on se doute bien que selon la puissance de la machine, le résultat ne sera pas le même.

■ **Définition 72 — Complexité temporelle.** La complexité temporelle est une mesure de l'évolution du temps nécessaire à un algorithme pour s'exécuter correctement en fonction de la taille des données d'entrée. La complexité temporelle est directement liée au nombre d'instructions à exécuter.

■ **Définition 73 — Complexité mémoire ou spatiale.** La complexité mémoire est une mesure de l'évolution de l'espace nécessaire à un algorithme pour s'exécuter correctement en fonction de la taille des données d'entrée. La complexité mémoire est associée à la taille de l'espace mémoire occupé par un algorithme au cours de son exécution.

D'un point de vue opérationnel, si la taille n des données d'entrées augmente, un bon algorithme doit pouvoir délivrer des résultats en un temps fini, même si le nombre d'instructions lié aux boucles ou aux appels récursifs dépend de n . C'est pourquoi la complexité est un **calcul asymptotique** : on s'intéresse au comportement de l'algorithme lorsque n tend vers l'infini.

B Notation asymptotique

On utilise la notation de Landau O pour qualifier le comportement asymptotique de la complexité¹. Le tableau 13.1 recense les principales complexités et donne un exemple associé.

■ **Définition 74 — Notation de Landau O .** Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ et $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$. On dit que f ne croît pas plus vite que g et on note $f = O(g)$ si et seulement si :

$$\exists C \in \mathbb{N}, \exists n_i \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_i \Rightarrow f(n) \leq Cg(n)$$

R Cette définition signifie simplement qu'au bout d'un certain rang, la fonction f ne croît jamais plus vite que la fonction g .

Théorème 2 — Propriétés de O . Soit f, f_1, f_2, g, g_1 et $g_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

1. $\forall k \in \mathbb{R}_+^*, O(k.f) = O(f)$
2. $f = O(g) \Rightarrow f + g \in O(g)$
3. $f_1 = O(g_1), f_2 = O(g_2) \Rightarrow f_1 + f_2 = O(\max(g_1, g_2))$
4. $f_1 = O(g_1), f_2 = O(g_2) \Rightarrow f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$
5. $\forall k \in \mathbb{R}_+^*, f = O(g) \Rightarrow k.f = O(g)$

■ **Exemple 30 — Simplification de notations asymptotiques.** Supposons qu'on ait compté le nombre d'opérations d'un algorithme en fonction de n et qu'on ait trouvé : $2n^2 + 4n + 3$. Alors la complexité de l'algorithme est $O(n^2)$. En effet, on a bien $\forall n \in \mathbb{N}, 2n^2 + 4n + 3 < 10n^2$. Si vous avez un doute, étudiez le signe du trinôme $-8n^2 + 4n + 3$.

De même, $10\log(n) + 5(\log(n))^3 + 7n + 3n^2 + 6n^3 = O(n^3)$. Pour le montrer, il suffit d'utiliser le théorème sur les croissances comparées.

1. $O(n)$ se dit «grand o de n».

Complexité	Nom	Description
$O(1)$	Constante	Instructions exécutées un nombre constant de fois Indépendante de la taille de l'entrée
$O(\log(n))$	Logarithmique	Légèrement plus lent lorsque n augmente.
$O(n)$	Linéaire	L'algorithme effectue une tâche constante pour chaque élément de l'entrée.
$O(n \log(n))$	Linéarithmique	L'algorithme effectue une tâche logarithmique pour chaque élément de l'entrée.
$O(n^2)$	Quadratique	L'algorithme effectue une tâche linéaire pour chaque élément de l'entrée.
$O(n^k)$	Polynomiale	Typiquement k tâches linéaires imbriquées.
$O(k^n)$	Exponentielle	L'algorithme effectue une tâche constante sur tous les sous-ensembles de l'entrée.
$O(n!)$	Factorielle	L'algorithme effectue une tâche dont la complexité est multipliée par une quantité croissante proportionnelle à n .

TABLE 13.1 – Hiérarchie des complexités temporelles de la moins complexe à la plus complexe.

Taille de l'entrée	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(n \log n)$	$O(n^2)$	$O(n^3)$	$O(2^n)$
10^2	2,3 ns	50 ns	230 ns	5 μ s	500 μ s	335 années
10^3	3,4 ns	500 ns	3,45 μ s	500 μ s	500 ms	10^{282} années
10^4	4,6 ns	5 μ s	46 μ s	50 ms	500 s	...
10^5	5,7 ns	50 μ s	575 μ s	5 s	2h20 min	...
10^6	6,9 ns	500 μ s	6,9 ms	500 s	96 jours	...
10^9	10 ns	500 ms	10,4 s	96 jours

TABLE 13.2 – Sur une machine cadencée à 2 Ghz, quelle est la durée prévisible d'exécution d'un algorithme en fonction de la taille des données d'entrée et de sa complexité? On suppose qu'une seule période d'horloge est nécessaire au traitement d'une donnée.

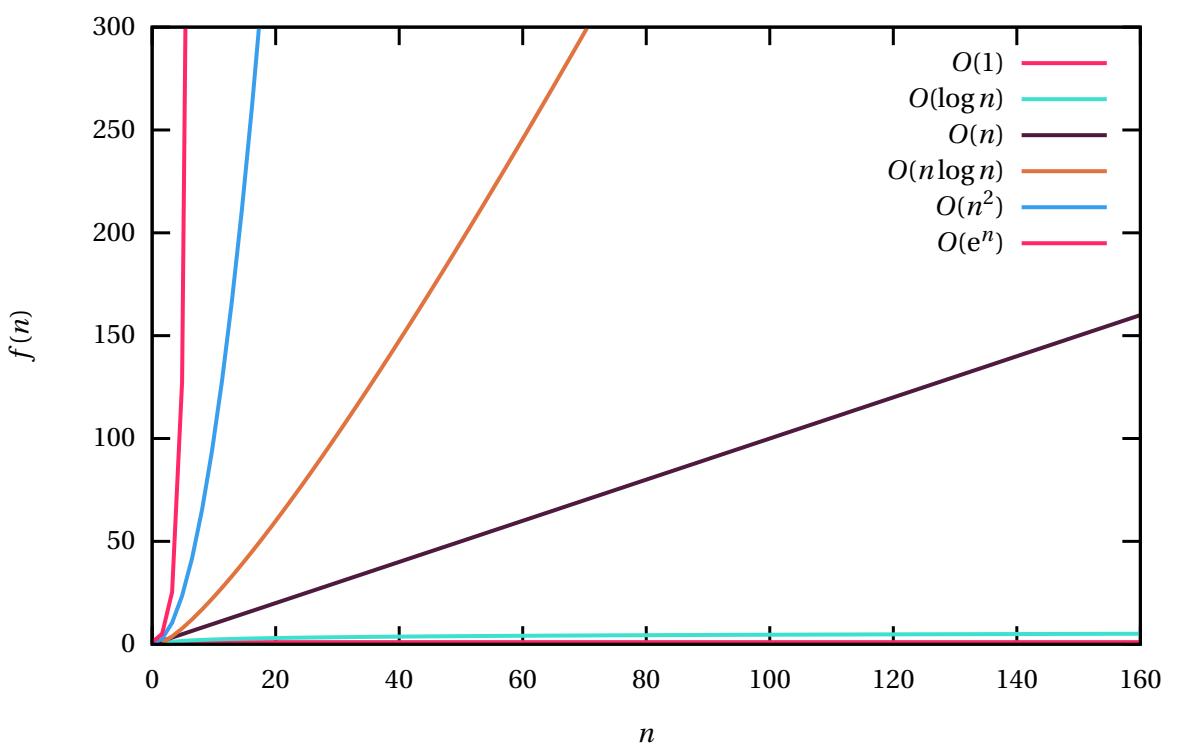


FIGURE 13.1 – Comparaison des croissances des complexités usuelles

C Typologie de la complexité

Selon l'algorithme étudié, on est amené à s'intéresser à différentes complexités :

- La complexité dans le pire des cas, c'est-à-dire l'estimation du nombre d'instructions nécessaires dans le cas le plus défavorable.
- La complexité dans le meilleur des cas, idem dans le cas le plus favorable.
- La complexité moyenne, c'est-à-dire une moyenne de la complexité de tous les cas possibles.

R Ces trois calculs de complexité sont parfois nécessaires pour faire un choix d'algorithme et la connaissance statistique de la nature des données d'entrée peut influer sur ce choix.

D Calcul du coût d'une instruction

Il est difficile de savoir exactement en combien de temps une instruction d'un programme s'exécute pour plusieurs raisons :

1. les compilateurs disposent de fonctions d'optimisation en langage machine ou en code interprétable qui font que le code source n'est pas nécessairement représentatif du code exécuté. Il serait donc nécessaire d'examiner le code exécutable pour statuer.
2. selon les architectures électroniques et les machines virtuelles, le coût d'une même opération varie.

Cependant, dans le cadre d'un calcul de complexité d'un algorithme, on peut s'abstraire de ces considérations électroniciennes et considérer qu'une opération élémentaire i possède un coût constant qu'on notera c .

Dans ce qui suit, on suppose qu'on dispose d'une machine pour tester l'algorithme. On fait l'hypothèse réaliste que les opérations élémentaires suivantes sont réalisées en un temps constant c par cette machine :

- opération arithmétique $+, -, *, /, //, \%$,
- tests $==, !=, <, >$,
- affectation \leftarrow ,
- accès à un élément indicé $t[i]$,
- structures de contrôles (structures conditionnelle et boucles), coût associé négligé,
- échange de deux éléments dans le tableau,
- accès à la longueur d'un tableau.

Finalement, on fait l'approximation supplémentaire qu'une combinaison simple de ces opérations est également réalisée en un temps constant c .

E Calcul classiques de complexité

■ **Exemple 31 — Calcul d'une complexité linéaire.** On souhaite calculer la complexité de l'algorithme 28. La taille du problème dépend de n , c'est-à-dire la puissance à laquelle on veut calculer le nombre a . En effet, pour différents a , plus petits ou plus grands, l'exécution ne sera pas plus chronophage. Le coût total $C(n)$ associé à cet algorithme peut donc s'écrire :

$$C(n) = c + n \times c = O(nc) = cO(n) = O(n) \quad (13.1)$$

Plus simplement, on peut dire que la complexité de l'algorithme 28 est linéaire en fonction de n car on opère n itérations d'une boucle dont les instructions sont de complexité constante $O(1)$.

Algorithme 28 Calcul de a^n

1: Fonction PUISSANCE(a, n)	$\triangleright a$ et n sont des entiers naturels
2: $p \leftarrow 1$	\triangleright coût : c
3: pour $i = 1, \dots, n$ répéter	\triangleright on répète n fois
4: $p \leftarrow p \times a$	\triangleright coût : c
5: renvoyer p	

■ **Exemple 32 — Calcul d'une complexité quadratique.** On souhaite calculer la complexité de l'algorithme 29. Le coût total associé à cet algorithme peut donc s'écrire :

$$C(n) = c + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} c = c + c \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} 1 = c + n^2 c = O(n^2) \quad (13.2)$$

C'est pourquoi, la complexité de l'algorithme 29 est en $O(n^2)$.

Algorithme 29 Multiplication élément par élément d'une matrice carrée (n, n) : $M \rightarrow \alpha M$

1: Fonction AMUL(M, α)	$\triangleright M$, matrice carrée de taille (n, n), α est un scalaire
2: $n \leftarrow$ taille de M	\triangleright coût : c
3: pour i de 0 à $n - 1$ répéter	\triangleright on répète n fois
4: pour j de 0 à $n - 1$ répéter	\triangleright on répète n fois
5: $M[i, j] \leftarrow \alpha \times M[i, j]$	\triangleright coût : c
6: renvoyer M	\triangleright le résultat

■ **Exemple 33 — Complexité quadratique.** On souhaite calculer la complexité de l'algo-

rithme 30. On peut calculer le coût total de l'algorithme 30 comme suit :

$$C(n) = c + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k c \quad (13.3)$$

$$= c + c \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k 1 \quad (13.4)$$

$$= c + c \sum_{k=1}^n k \quad (13.5)$$

$$= c + c \frac{n(n+1)}{2} \quad (13.6)$$

$$= O(n^2) \quad (13.7)$$

Algorithme 30 Accumuler

```

1: Fonction QACC( $n$ )
2:    $a \leftarrow 0$                                      ▷ coût :  $c$ 
3:   pour  $k$  de 1 à  $n$  répéter                  ▷ on répète  $n$  fois
4:     pour  $i$  de 1 à  $k$  répéter          ▷ on répète  $k$  fois
5:        $a \leftarrow a + i$                       ▷ coût :  $c$ 
6:   renvoyer  $a$                                 ▷ le résultat

```

■ **Exemple 34 — Complexité polynomiale.** On souhaite calculer la complexité de l'algorithme 31. On suppose qu'on connaît la complexité de f et qu'elle est linéaire par rapport à son paramètre. On peut donc calculer le coût total de l'algorithme 31 comme suit :

$$C(n) = c + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k c + c_f i = c + c \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k 1 + c_f \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k i \quad (13.8)$$

$$= c + c \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} = c + c \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{k}{2} + \frac{k^2}{2} \quad (13.9)$$

$$= c + c \frac{n(n+1)}{2} + c_f \frac{n(n+1)}{4} + c_f \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} \quad (13.10)$$

$$= O(n^3) \quad (13.11)$$

Algorithme 31 Appliquer une fonction et accumuler

```

1: Fonction FACC( $n$ )                               ▷ Applique  $f$  et accumule  $n$  fois
2:    $a \leftarrow 0$                                      ▷ coût :  $c$ 
3:   pour  $k$  de 1 à  $n$  répéter                  ▷ on répète  $n$  fois
4:     pour  $i$  de 1 à  $k$  répéter          ▷ on répète  $k$  fois
5:        $a \leftarrow a + f(i)$                       ▷ coût :  $c + c_f i$ 
6:   return  $a$                                     ▷ le résultat

```



FIGURE 13.2 – Principe de la décomposition d'un problème en sous-problèmes indépendants pour un algorithme de type diviser pour régner.

F Diviser pour régner

■ **Définition 75 — Algorithme de type diviser pour régner.** L'idée centrale d'un algorithme de type diviser pour régner est de décomposer le problème étudié en plusieurs sous-problèmes de taille réduite. Ces algorithmes peuvent éventuellement être exprimés récursivement et sont souvent très efficaces.

On distingue trois étapes lors de l'exécution d'un tel algorithme :

1. la division du problème en sous-problèmes qu'on espère plus simples à résoudre,
2. la résolution des sous-problèmes : c'est à cette étape que l'on peut faire appel à la récursivité,
3. la combinaison des solutions des sous-problèmes pour construire la solution au problème.

(R) On devrait donc logiquement nommer ces algorithmes diviser, résoudre et combiner!

 **Vocabulary 14 — Divide and conquer ↪** diviser pour régner.

Très souvent², les algorithmes de type diviser pour régner sont exprimés récursivement. La condition d'arrêt de l'algorithme est la suivante : la division en sous-problèmes s'arrête lorsqu'on sait résoudre le problème directement³ pour la taille s à laquelle on a aboutie. Les étapes 7 et 9 de l'algorithme 32 sont facilement descriptibles à l'aide d'un arbre, comme le montre la figure 13.3. La hauteur de cet arbre peut être appréciée et quantifiée. Elle sert notamment à calculer la complexité liée aux algorithmes récursifs.

Sur la figure 13.3, on a choisi de représenter un algorithme de type diviser pour régner dont le problème associé \mathcal{P} est de taille n . L'étape de division en sous-problèmes divise par d le problème initial et nécessite r appels récursifs. Si $D(n)$ est la complexité de la partie division et $C(n)$ la complexité de l'étape de combinaison des résultats, alors on peut décrire la complexité

2. mais pas toujours

3. c'est-à-dire sans appels récursifs

Algorithme 32 Diviser, résoudre et combiner (Divide And Conquer)

```

1: Fonction DRC( $\mathcal{P}$ )                                 $\triangleright \mathcal{P}$  est un problème de taille  $n$ 
2:    $r \leftarrow$  un entier  $\geq 1$                        $\triangleright$  pour générer  $r$  sous-problèmes à chaque étape
3:    $d \leftarrow$  un entier  $> 1$                        $\triangleright$  on divise par  $d$  la taille du problème
4:   si  $n < s$  alors                          $\triangleright$  Condition d'arrêt,  $s$  est un seuil à déterminer
5:     renvoyer RÉSOUUDRE( $n$ )
6:   sinon
7:     ( $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_r$ )  $\leftarrow$  Diviser  $\mathcal{P}$  en  $r$  sous-problèmes de taille  $n/d$ .
8:     pour  $i$  de 1 à  $r$  répéter
9:        $S_i \leftarrow$  DRC( $\mathcal{P}_i$ )                   $\triangleright$  Appels récursifs
10:    renvoyer COMBINER( $S_1, \dots, S_r$ )

```

$T(n)$ d'un tel algorithme par la relation de récurrence $T(n) = rT(n/d) + D(n) + C(n)$ et $T(s)$ une constante. Sur la figure 13.3 on a choisi $r = 3$ pour la représentation graphique.



G Exemple de la recherche dichotomique

■ **Exemple 35 — Recherche dichotomique.** L'algorithme de recherche dichotomique 33 est un cas particulier d'algorithme de type diviser pour régner avec $r = 1$ et $d = 2$, c'est-à-dire un seul appel récursif par chemin d'exécution et une division de la taille du problème par deux. La complexité d'un tel algorithme s'exprime donc naturellement par une relation

de récurrence : si n est la taille du tableau d'entrée, $T(n) = 1 + T(n/2)$. Cela traduit le fait qu'en dehors de l'appel récursif, la complexité de l'algorithme est constant. Cette relation est typique des algorithmes dichotomiques.

La division du problème en sous-problèmes est opérée via la ligne 5. La résolution des sous-problèmes est effectuée par des appels récursifs. L'étape de combinaison des résultats n'existe pas.

Algorithme 33 Recherche récursive d'un élément par dichotomie dans un tableau trié

```

1: Fonction REC_DICH(t, g, d, elem)
2:   si g > d alors                                ▷ Condition d'arrêt
3:     renvoyer l'élément n'a pas été trouvé
4:   sinon
5:     m ← (g+d)//2                                ▷ Diviser
6:     si t[m] = elem alors
7:       renvoyer m
8:     sinon si elem < t[m] alors
9:       renvoyer REC_DICH(t, g, m-1, elem)          ▷ résoudre
10:    sinon
11:      renvoyer REC_DICH(t, m+1, d, elem)          ▷ résoudre
  
```



FIGURE 13.4 – Structure d'arbre et appels récursifs pour la récurrence de la recherche dichotomique : $T(n) = T(n/2) + c$. Hors appel récursif, la fonction opère un nombre constant d'opérations c indépendant de n en $O(1)$.

Supposons que le tableau d'entrée de l'algorithme possède n éléments et que le nombre d'opérations nécessaires à l'algorithme soit $T(n)$ (cf .figure 13.4). On peut expliciter formelle-

ment la relation de récurrence qui existe entre $T(n)$ et $T(n/2)$. On a :

$$T(n) = T(n/2) + c \quad (13.12)$$

car en dehors de l'appel récursif, le coût de l'exécution vaut c . On a également $T(1) = c$, car chercher un élément dans un tableau à un seul élément se fait à temps constant : il suffit de tester cet élément.

Pour simplifier le calcul de complexité, on fait l'hypothèse que $n = 2^k$ est une puissance de deux. Considérer la suite $T(n)$ revient alors à considérer $k = \log_2 n$ et la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que $u_k = u_{k-1} + c$, car $T(2^k) = T(2^{k-1}/2) + c = T(2^{k-1}) + c$. Par ailleurs, $u_0 = T(1) = c$. u est une suite arithmétique de raison c et de premier terme c . Donc $u_k = kc + c = (k+1)c = (1 + \log_2 n)c$. La complexité de la recherche d'un élément par dichotomie est donc $O(\log n)$.

H Exemple de l'exponentiation rapide

L'analyse de l'algorithme 34 aboutit à la même relation de récurrence que précédemment : $T(n) = 1 + T(n/2)$. On a donc $T(n) = O(\log n)$.

R Donc si la récurrence d'un algorithme est un schéma pour lequel on connaît la complexité, alors on peut déduire immédiatement sa complexité.

Algorithme 34 Exponentiation rapide a^n

```

1: Fonction EXP_RAPIDE(a,n)
2:   si n = 0 alors                                ▷ Condition d'arrêt
3:     renvoyer 1
4:   sinon si n est pair alors
5:     p ← EXP_RAPIDE(a, n//2)                      ▷ Appel récursif
6:     renvoyer p × p
7:   sinon
8:     p ← EXP_RAPIDE(a, (n-1)//2)                  ▷ Appel récursif
9:     renvoyer p × p × a

```

I Exemple du tri fusion

Les tris génériques abordés jusqu'à présent, par sélection ou insertion, présentent des complexités polynomiales en $O(n^2)$ dans le pire des cas. L'algorithme de tri fusion permet de dépasser cette limite et d'obtenir un tri générique de complexité linéarithmique dans tous les cas. Il a été inventé par John von Neumann en 1945. C'est un bel exemple d'algorithme de type diviser pour régner avec $r = 2$ et $d = 2$, c'est-à-dire deux appels récursifs par chemin d'exécution et une division de la taille du problème par deux (cf. figure 13.5). Ce tri est comparatif, il peut s'effectuer en place et les implémentations peuvent être stables.

Son principe (cf. algorithmes 35, 37 et 36) est simple : transformer le tri d'un tableau à n éléments en sous-tableaux ne comportant qu'un seul élément⁴ puis les recombiner en un seul tableau en conservant l'ordre. L'algorithme est divisé en deux fonctions :

- TRI_FUSION qui opère concrètement la division et la résolution des sous-problèmes,
- FUSION qui combine les solutions des sous-problèmes en fusionnant deux sous-tableaux triés.

Il n'y a pas de pire ou meilleur cas : l'algorithme effectue systématiquement la découpe et la fusion des sous-tableaux.

Pour le calcul de la complexité, on a la relation de récurrence $T(n) = 2T(n/2) + f(n)$ où $f(n)$ représente le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour partager et fusionner deux sous-tableaux de taille $n/2$. La complexité de la fonction FUSION est linéaire, car on effectue n fois les instructions élémentaires de la boucle. La complexité de DÉCOUPER_EN_DEUX est $O(n)$ s'il y a création de tableaux et en $O(1)$ si on travaille en place. Donc on peut simplifier la récurrence en $T(n) = 2T(n/2) + n$.

On fait l'hypothèse que n vaut 2^k , c'est-à-dire une puissance de deux pour simplifier le calcul. Soient les suites auxiliaires $u_k = T(2^k)$ et $v_k = u_k/2^k$. La récurrence s'écrit alors :

$$T(2^k) = 2T(2^{k-1}) + 2^k \quad (13.13)$$

ce qui peut s'écrire :

$$u_k = 2u_{k-1} + 2^k \quad (13.14)$$

On en déduit que la suite v_k vérifie : $v_k = v_{k-1} + 1$. v est une suite arithmétique de raison 1. Si on suppose que $u_0 = 0$, c'est-à-dire que le coût de traitement d'un tableau à un élément est nul, alors $v_0 = 0$. On en déduit que : $v_k = v_0 + k \times 1 = k$ et donc :

$$u_k = k2^k$$

La taille du tableau étant $n = 2^k$, la complexité de l'algorithme est $\mathcal{O}(n \log_2 n)$ dans **tous** les cas (le pire comme le meilleur).

Algorithme 35 Tri fusion

```

1: Fonction TRI_FUSION(t)
2:    $n \leftarrow$  taille de t
3:   si  $n < 2$  alors
4:     renvoyer t
5:   sinon
6:      $t_1, t_2 \leftarrow$  DÉCOUPER_EN_DEUX(t)
7:     renvoyer FUSION(TRI_FUSION( $t_1$ ), TRI_FUSION( $t_2$ ))

```

4. et donc déjà triés!

Algorithme 36 Découper en deux

```

1: Fonction DÉCOUPER_EN_DEUX(t)
2:   n ← taille de t
3:   t1, t2 ← deux listes vides
4:   pour i = 0 à n//2 - 1 répéter
5:     AJOUTER(t1, t[i])
6:   pour j = n//2 à n - 1 répéter
7:     AJOUTER(t2, t[j])
8:   renvoyer t1, t2

```

Algorithme 37 Fusion de deux sous-tableaux triés

```

1: Fonction FUSION(t1, t2)
2:   n1 ← taille de t1
3:   n2 ← taille de t2
4:   n ← n1 + n2
5:   t ← une liste vide
6:   i1 ← 0
7:   i2 ← 0
8:   pour k de 0 à n - 1 répéter
9:     si i1 ≥ n1 alors
10:      AJOUTER(t, t2[i2])
11:      i2 ← i2 + 1
12:    sinon si i2 ≥ n2 alors
13:      AJOUTER(t, t1[i1])
14:      i1 ← i1 + 1
15:    sinon si t1[i1] ≤ t2[i2] alors
16:      AJOUTER(t, t1[i1])
17:      i1 ← i1 + 1
18:    sinon
19:      AJOUTER(t, t2[i2])
20:      i2 ← i2 + 1
21:   renvoyer t

```



FIGURE 13.5 – Structure d’arbre et appels récursifs pour le tri fusion : $T(n) = 2T(n/2) + f(n)$ et $\frac{n}{2^k} = 1$. La fonction FUSION opère un nombre d’opérations $f(n)$.

J Exemple du tri rapide

La complexité du tri rapide est $\mathcal{O}(n \log_2 n)$ dans le meilleur cas et en moyenne. Cependant, dans le pire des cas, si on choisit systématiquement mal le pivot, c'est-à-dire si on prend le plus petit élément ou le plus grand, alors la complexité est en $\mathcal{O}(n^2)$, car cela revient à faire un tri par sélection.

Algorithme 38 Tri rapide

```

1: Fonction TRI_RAPIDE(t)
2:    $n \leftarrow$  taille de t
3:   si  $n < 2$  alors
4:     renvoyer t
5:   sinon
6:      $t_1, \text{pivot}, t_2 \leftarrow$  PARTITION(t)
7:     renvoyer CONCATÉNER(TRI_RAPIDE( $t_1$ ), pivot, TRI_RAPIDE( $t_2$ ))

```

Algorithme 39 Partition en deux sous-tableaux

```

1: Fonction PARTITION(t)
2:    $n \leftarrow$  taille de t
3:   pivot  $\leftarrow 0$ 
4:   i_pivot  $\leftarrow$  un nombre au hasard entre 0 et  $n - 1$  inclus
5:    $t_1, t_2 \leftarrow$  deux listes vides
6:   pour k = 0 à  $n - 1$  répéter
7:     si k = i_pivot alors
8:       pivot  $\leftarrow t[k]$ 
9:     sinon si  $t[k] \leq t[i\_pivot]$  alors
10:      AJOUTER( $t_1, t[k]$ )
11:    sinon
12:      AJOUTER( $t_2, t[k]$ )
13:   renvoyer  $t_1, \text{pivot}, t_2$ 

```

K Complexité de l'algorithme d'Euclide

La complexité de l'algorithme d'Euclide n'est pas triviale à mesurer. Pour y parvenir, nous allons nous appuyer sur la suite des restes et la comparer à la suite de Fibonacci. On note également que n , l'indice du dernier reste non nul donne directement une mesure de la complexité de la boucle.

Algorithme 40 Algorithme d'Euclide (optimisé)

1: Fonction PGCD(a, b)	▷ On suppose que $(a, b) \in \mathbb{Z}, b \leq a$.
2: $a \leftarrow a $	
3: $b \leftarrow b $	
4: $r \leftarrow a \bmod b$	
5: tant que $r > 0$ répéter	▷ On connaît la réponse si r est nul.
6: $a \leftarrow b$	
7: $b \leftarrow r$	
8: $r \leftarrow a \bmod b$	
9: renvoyer b	▷ Le pgcd est b

■ **Définition 76 — Suite des restes de la division euclidienne.** Soient a et b des entiers. On définit la suite des restes de la division euclidienne comme suit :

$$r_0 = |a| \quad (13.15)$$

$$r_1 = |b| \quad (13.16)$$

$$q_k = \lfloor r_{k-1} / r_k \rfloor, 1 \leq k \leq n \quad (13.17)$$

Alors on a :

$$r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1} \quad (13.18)$$

$$r_{k+1} = r_{k-1} \bmod r_k \quad (13.19)$$

Théorème 3 — Stricte décroissance de $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La suite des restes de la division euclidienne est positive, strictement décroissante et minorée par zéro.

Théorème 4 — Quotients de la suite des restes. Soit n l'indice de la suite des restes correspondant au dernier reste non nul. Alors on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, q_k \geq 1 \quad (13.20)$$

$$k = n, q_n \geq 2 \quad (13.21)$$

Démonstration. D'après la proposition 3, $r_{k-1} > r_k > r_{k+1}$. De plus, q_k est un entier strictement positif d'après l'équation 13.17. Donc $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, q_k \geq 1$.

Par ailleurs, si q_n valait 1, alors on aurait $r_n = r_{n-1}$, ce qui n'est pas possible car la suite est strictement décroissante. C'est pourquoi, $q_n \geq 2$. ■

Théorème 5 — Des restes et des éléments de la suite de Fibonacci. Soit n l'indice du dernier reste non nul de la suite des restes de la division euclidienne.

Soit f_i le i^{e} terme de la suite de Fibonacci définie par $f_{i+1} = f_i + f_{i-1}$, $f_0 = 1$ et $f_1 = 1$. Alors on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, r_k \geq f_{n-k}. \quad (13.22)$$

Démonstration. D'après le théorème 4, on a $r_{n-1} = q_n r_n \geq 2 = f_2$, car r_n est non nul. Comme la suite des restes est décroissante, $r_{n-1} \geq 2r_n$ et donc $r_n \geq f_2/2 = f_1$. En réitérant n fois ce raisonnement en faisant décroître n , c'est-à-dire en remontant la suite des restes, on trouve que $r_0 \geq f_n$ ainsi que tous les résultats. ■

Supposons qu'il y a n étapes lors de l'algorithme d'Euclide. Alors, on a

$$b = r_1 \geq f_{n-1} \quad (13.23)$$

Or, la suite de Fibonacci est une suite récurrente linéaire d'ordre deux. On connaît donc sa forme explicite.

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\phi^n - \left(-\frac{1}{\phi} \right)^n \right) \quad (13.24)$$

avec le nombre d'or $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. De plus, on peut montrer que

$$f_n \simeq \phi^n \quad (13.25)$$

et donc, au rang $n-1$, on a :

$$\log(f_{n-1}) \simeq (n-1) \log(\phi) \quad (13.26)$$

En utilisant l'équation 13.23, on en conclut que :

$$n \geq 1 + \frac{\log(b)}{\log(\phi)} \quad (13.27)$$

La complexité de l'algorithme d'Euclide est donc $O(1+1,44 \log_2(b))$, où $\log_2(b)$ est le nombre bits nécessaires pour coder b . Elle est logarithmique en fonction de la taille du codage l'entier et donc très efficace, ce qui est très important pour les opérations de chiffrement ou de codage. Cette conclusion est également le théorème de Lamé.

Théorème 6 — Théorème de Lamé. Le nombre de divisions euclidiennes nécessaires pour calculer $\text{PGCD}(a, b)$ par l'algorithme d'Euclide est inférieur ou égal à 5 fois le nombre de chiffres de b en base 10.

L Synthèse

M Méthode 8 — Complexité d'une fonction Pour trouver la complexité d'une fonction :

1. Trouver le(s) paramètre(s) de la fonction étudiée qui influe(nt) sur la complexité.
2. Déterminer si, une fois ce(s) paramètre(s) fixé(s), il existe un pire ou un meilleur des cas.
3. Calculer la complexité en :
 - calculant éventuellement une somme d'entiers (fonction itérative),
 - posant une formule récurrente sur la complexité (fonction récursive).

Le tableau 13.3 récapitule les complexités des algorithmes récursifs à connaître.

Récurrence	Complexité	Algorithmes
$T(n) = 1 + T(n - 1)$	$\rightarrow O(n)$	factorielle
$T(n) = 1 + T(n/2)$	$\rightarrow O(\log n)$	dichotomie, exponentiation rapide
$T(n) = n + 2T(n/2)$	$\rightarrow O(n \log n)$	tri fusion, transformée de Fourier rapide

TABLE 13.3 – Récurrences et complexités associées utiles et à connaître

14

ALGORITHMES GLOUTONS

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ expliquer le principe d'un algorithme glouton
- ☒ citer des cas d'utilisation classiques de ce principe
- ☒ coder un algorithme glouton en Python

A Problème d'optimisation

■ **Définition 77 — Optimisation.** Un problème d'optimisation \mathcal{P} nécessite de déterminer les conditions dans lesquelles ce problème présente une caractéristique optimale au regard d'un critère.

(R) Optimiser, c'est donc construire une solution S en choisissant parmi les éléments d'un ensemble \mathcal{E} ceux qui génèrent le meilleur résultat selon le critère de l'optimisation.

■ **Exemple 36 — Problèmes d'optimisation.** La plupart des problèmes de tous les jours sont des problèmes d'optimisation :

- comment répartir équitablement des tâches selon certains critères?
- comment choisir le plus court chemin pour aller d'un point à un autre?
- comment choisir ses actions pour optimiser un portefeuille et son rendement?
- comment choisir le régime moteur pour économiser un maximum de carburant?
- comment choisir des articles dans un supermarché en respectant un budget et d'autres contraintes simultanément?
- comment faire ses valises en emportant à la fois le plus d'affaires possible et le plus de valeur possible au total?

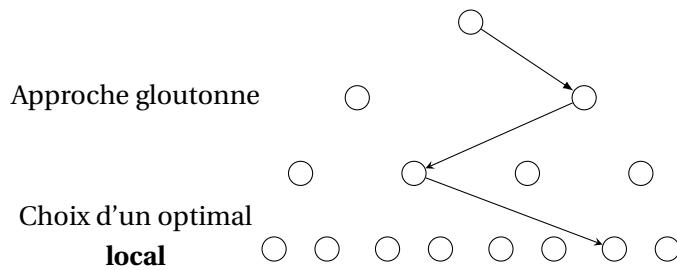


FIGURE 14.1 – Étape de résolution d'un problème d'optimisation par décomposition en sous-problèmes et approche gloutonne.

B Algorithmes gloutons

■ **Définition 78 — Algorithme glouton.** Un algorithme glouton décompose un problème d'optimisation en sous-problèmes et le résout :

1. en construisant une solution partielle admissible en effectuant à chaque étape le **meilleur choix local**,
2. en **espérant** que ces choix locaux conduiront à un résultat global optimal.



Vocabulary 15 — Greedy algorithms ⇔ les algorithmes gloutons

La figure 14.1 illustre le fonctionnement d'un algorithme glouton. Un problème de décomposition devient une suite de choix optimaux localement.

R La plupart du temps, un algorithme glouton est appliqué à un problème d'optimisation. Le résultat n'est pas toujours optimal. Mais l'espoir fait vivre : certains algorithmes gloutons obtiennent une solution optimale! Comme ils sont souvent assez simples à implémenter par rapport aux autres algorithmes d'optimisation, ils représentent une solution précieuse.

■ **Définition 79 — Glouton optimal.** On dit qu'un algorithme glouton est optimal s'il produit une solution optimale au problème d'optimisation associé.

■ **Exemple 37 — Algorithmes gloutons optimaux.** Parmi les algorithmes au programme, il existe des algorithmes gloutons optimaux :

- Dijkstra (plus court chemin dans un graphe),
- Prim et Kruskal (arbres recouvrants d'un graphe),
- codage d'Huffman (compression de données).

C Modélisation

On considère un ensemble \mathcal{E} d'éléments parmi lesquels on doit faire une sélection pour optimiser la solution \mathcal{S} à un problème d'optimisation \mathcal{P} . On construit une solution \mathcal{S} séquentiellement via un algorithme glouton en suivant la procédure décrite sur l'algorithme 41. Il ne reste plus qu'à préciser, selon le problème considéré :

- le choix du meilleur élément de \mathcal{E} , **l'optimum local**,
- le test d'une solution pour savoir si celle-ci est une solution complète ou partielle du problème \mathcal{P} ,
- l'ajout d'un élément à une solution.

Algorithme 41 Principe d'un algorithme glouton

```

1: Fonction GLOUTON( $\mathcal{E}, \mathcal{P}$ )                                 $\triangleright \mathcal{E}$  un ensemble d'éléments,  $\mathcal{P}$  le problème
2:    $\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$                                       $\triangleright$  La solution de  $\mathcal{P}$  à construire
3:   tant que  $\mathcal{S}$  n'est pas une solution complète de  $\mathcal{P}$  et que  $\mathcal{E}$  n'est pas vide répéter
4:      $e \leftarrow \text{CHOISIR\_LE\_MEILLEUR\_ÉLÉMENT\_LOCAL}(\mathcal{E})$            $\triangleright$  l'optimum local!
5:     si l'ajout de  $e$  à  $\mathcal{S}$  est une solution (partielle ou complète) de  $\mathcal{P}$  alors
6:        $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{e\}$                                           $\triangleright$  On opère le choix glouton!
7:      $\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{E} \setminus \{e\}$                                         $\triangleright$  Si cela n'a pas déjà été fait en 4
8:   renvoyer  $\mathcal{S}$ 

```

a Exemple de l'occupation de la place au port

Un port de plaisance gère l'occupation d'une place vacante et ouverte à la réservation pour une durée limitée. Certains plaisanciers sont de passage et font des réservations. L'objectif fixé est de sélectionner **un maximum de réservations compatibles** afin de satisfaire un maximum de clients.

On désigne par \mathcal{E} l'ensemble des demandes des clients. Pour toute demande $C \in \mathcal{E}$, on a la possibilité d'accéder à la date de début $d(C)$ de la demande ainsi qu'à la date de fin $f(C)$. On cherche donc à trouver un sous-ensemble de \mathcal{E} constitué de demandes compatibles et de cardinal maximum.

On dénote l'intervalle de temps d'occupation associé à une demande C par $[d(C), f(C)]$. La compatibilité de deux demandes C_i et C_j peut alors être formalisée ainsi :

$$[d(C_i), f(C_i)] \cap [d(C_j), f(C_j)] = \emptyset \quad (14.1)$$

Un exemple de réservations est donné sur la figure 14.2.

L'algorithme glouton 42 permet de résoudre ce problème de planning.

Cet algorithme est bien glouton car :

1. la construction de l'ensemble $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_k\}$ s'effectue de manière séquentielle,
2. le choix effectué à chaque tour de boucle est le meilleur en termes de compatibilité : les demandes peuvent éventuellement s'enchaîner grâce à la ligne ??.



FIGURE 14.2 – Exemple de réservations de place au port correspondant à l'ensemble $\{[0,7], [2,5], [6,8], [1,2], [5,6], [0,2], [4,7], [0,1], [3,6], [1,3], [4,5], [6,8], [0,2], [5,7], [1,4]\}$

Algorithme 42 Réservation d'une place au port (Version simplifiée)

```

1: Fonction GÉRER_LA_PLACE( $\mathcal{E}$ )
2:    $\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$ 
3:   Trier  $\mathcal{E}$  par ordre croissant des dates de fin  $f(C_i)$ 
4:   date_limite  $\leftarrow -\infty$ 
5:   pour  $C \in \mathcal{E}$  répéter                                 $\triangleright$  On parcourt la liste triée
6:     si  $d(C) \geqslant \text{date\_limite}$  alors
7:        $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{C\}$ 
8:       date_limite  $\leftarrow f(C)$ 
9:   renvoyer  $\mathcal{S}$ 

```

Pour l'exemple de la figure 14.2, cet algorithme trouve $\llbracket 0, 1 \rrbracket, (1, 2), (2, 5), (5, 6), (6, 8) \rrbracket$, c'est-à-dire C_8, C_4, C_2, C_5 et C_3 . L'ensemble \mathcal{S} étant constitué de demandes partiellement compatibles, l'algorithme aboutit donc à une solution. Cependant, on peut se demander si celle-ci est optimale, c'est-à-dire de cardinal maximum : a-t-on satisfait un maximum de clients ? Ne peut-on faire mieux ?

★ b Preuve de l'optimalité --> HORS PROGRAMME

R Dans un premier temps, on peut remarquer que l'ensemble \mathcal{S} est un sous-ensemble de \mathcal{E} qui est lui-même un ensemble fini. C'est pourquoi, il existe nécessairement une solution de cardinal maximum. En effet, toute partie non vide finie de \mathbb{N} est majorée et elle admet un plus grand élément.

L'algorithme 42 aboutit à une solution optimale.

Démonstration par induction sur les ensembles solutions $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \dots, s_j\}, j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. On suppose qu'on peut ordonner les ensembles \mathcal{E} et \mathcal{S} par date de fin croissante et qu'il y a une date à laquelle on a démarré le service de location¹. Pour un ensemble de demandes $C = \{c_1, \dots, c_r\}$ ainsi ordonné, les demandes c_1, \dots, c_r sont compatibles si et seulement si :

$$d(c_1) < f(c_1) \leq d(c_2) < f(c_2) \leq \dots \leq d(c_r) < f(c_r) \quad (14.2)$$

On procède en deux temps en montrant :

1. d'abord qu'il existe une solution optimale $\mathcal{O} = \{o_1, \dots, o_m\}$ telle que les premiers éléments de $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_k\}$ coïncident avec ceux de \mathcal{O} ,
2. puis que $\mathcal{S} = \mathcal{O}$.

Initialisation : pour $j = 1$, on a $\mathcal{S} = s_1$, s_1 étant la demande qui se termine le plus tôt. Par rapport à la solution optimale $\mathcal{O} = \{o_1, \dots, o_m\}$, on a nécessairement $f(s_1) \leq f(o_1)$ et donc :

$$d(s_1) < f(s_1) \leq d(o_2) < f(o_2) \leq \dots \leq d(o_m) < f(o_m) \quad (14.3)$$

On en conclut que $\{s_1, o_2, \dots, o_m\}$ est compatible avec \mathcal{O} . Pour $j = 1$, la propriété est vérifiée et \mathcal{S} est compatible avec une solutions optimale.

Hérédité : on suppose que la solution $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_j\}$ est compatible avec $\mathcal{O} = \{o_1, \dots, o_m\}$, c'est à dire que : $\{s_1, s_2, \dots, s_j, o_{j+1}, \dots, o_m\}$ est optimale. s_{j+1} est choisie minimale parmi toutes les tâches compatibles avec s_j . Or, comme $f(s_j) \leq f(o_j)$, l'ensemble des tâches compatibles avec s_j inclut l'ensemble des tâches compatibles avec o_j .

D'après notre hypothèse, o_{j+1} est choisi dans $\mathcal{E} \setminus \{s_1, \dots, s_j\}$, de telle manière que la date de fin est minimale. Donc $f(s_{j+1}) \leq f(o_{j+1})$. On en conclut que $\{s_1, s_2, \dots, s_j, s_{j+1}, o_{j+2}, \dots, o_m\}$ est compatible avec \mathcal{O} et donc optimale.

Par induction, on peut donc affirmer que \mathcal{S} est optimale, quel que soit $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Est-ce que les deux solutions optimales \mathcal{S} et \mathcal{O} coïncident ? Est-ce que $k = m$? Si ce n'était pas le cas, c'est à dire $k > m$, alors on pourrait choisir dans $\mathcal{E} \setminus \{s_1, \dots, s_k\}$ une demande dont la date de fin serait

1. sous-entendu, on ne pourra pas choisir une date plus petite que celle-ci pour le début et la fin de la location.

compatible avec la solution optimale. Cette solution ne serait donc plus optimale, ce qui est une contradiction. ■

Cet algorithme glouton est donc optimal, mais cela est essentiellement dû aux contraintes qu'on a mises sur l'optimisation : **tous les clients ne seront pas satisfaits. On cherche juste à en satisfaire un maximum.**

D Exemple du sac à dos

On cherche à remplir un sac à dos comme indiqué sur la figure 14.3. Chaque objet que l'on peut insérer dans le sac est **insécable**² et possède une valeur entière (€) et un poids entier connus (kg). On cherche à maximiser la valeur totale emportée dans le sac à dos tout en limitant³ le poids à π kg.

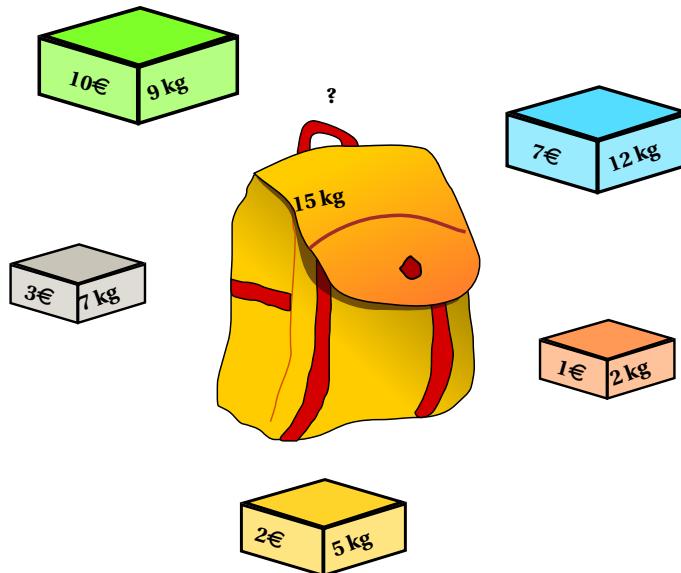


FIGURE 14.3 – Illustration du problème du sac à dos (d'après Wikipedia). On a cinq objets de poids 9, 12, 2, 7 et 5 kg et de valeur 10, 7, 1, 3 et 2 . Le poids total admissible dans le sac est 15kg.



Vocabulary 16 — Knapsack problem ↽ Le problème du sac dos.

On peut chercher à résoudre le problème du sac à dos de manière gloutonne en utilisant un algorithme glouton (cf. algorithme 43).

En termes de complexité, l'algorithme 43 est plutôt intéressant : sa complexité est la somme de celle du tri et de la boucle TANT QUE soit $O(n \log n + n)$. Cependant, la solution trouvée n'est

2. Soit on le met dans le sac, soit on ne le met pas. Mais on ne peut pas en mettre qu'une partie.

3. On accepte un poids total inférieur ou égal à π .

Algorithme 43 Problème du sac à dos

```

1: Fonction SAC_À_DOS( $\mathcal{E}, \pi$ )                                 $\triangleright \mathcal{E} = \{(v_1, p_1), \dots, (v_n, p_n)\}$ 
2:    $\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$ 
3:    $p_{total} \leftarrow 0$ 
4:    $v_{total} \leftarrow 0$ 
5:   Trier  $\mathcal{E}$  par ordre de valeurs  $v_i$  décroissantes            $\triangleright$  le choix sera facile
6:   tant que  $p_{total} < \pi$  et que  $\mathcal{E}$  non vide répéter
7:      $v, p \leftarrow$  retirer l'élément de  $\mathcal{E}$  le plus valué       $\triangleright$  choix de  $v$  maximale
8:     si  $p_{total} + p \leq \pi$  alors                          $\triangleright$  Est-ce une solution?
9:       Ajouter  $(v, p)$  à  $\mathcal{S}$ 
10:  renvoyer  $\mathcal{S}$ 

```

pas nécessairement optimale : cet algorithme est donc un point de départ mais pas la solution définitive à ce problème.

R D'une manière plus générale, le problème du sac à dos reflète un problème d'allocation de ressources pour lequel le temps (ou le budget) est fixé et où l'on doit choisir des éléments indivisibles parmi un ensemble tâches (ou de projets).

R Une intuition naturelle consisterait à trier les objets selon leur rapport valeur/poids (ou densité massique). Cependant, cette heuristique échoue également à fournir une solution optimale dans le cas général. La contrainte d'intégrité des objets (**insécables**) empêche souvent l'algorithme d'utiliser la totalité de la capacité disponible : l'espace résiduel ne peut être optimisé. C'est donc la nature discrète du problème qui empêche la méthode gloutonne de fonctionner systématiquement. Notez que si l'on relâche cette contrainte (problème du sac à dos fractionnaire où les objets sont sécables), alors la stratégie gloutonne basée sur la densité devient prouvablement optimale.

E Gloutonnerie et dynamisme

Tenter sa chance est le plus souvent payant! Si un algorithme glouton donne une solution rapidement alors que l'algorithme donnant la solution optimale est de complexité exponentielle $O(2^n)$ alors tenter sa chance en *gloutonnant* permet souvent de progresser vers une solution acceptable.

R La programmation dynamique qui sera étudiée au semestre trois permet de résoudre les problèmes d'optimisation sur lesquels butent certains algorithmes gloutons. Elle est pertinente lorsque les sous-problèmes générés se recoupent.

15

LES MOTS DES GRAPHES

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ utiliser des mots pour décrire les graphes
- ☒ énumérer quelques graphes remarquables
- ☒ distinguer un parcours d'une chaîne et d'un cycle
- ☒ distinguer un graphe orienté, non orienté, pondéré et un arbre

La théorie des graphes en mathématiques discrètes étudie les graphes comme objet mathématique. En informatique, en plus de les étudier, on a la chance de pouvoir les programmer, de jouer avec pour résoudre une infinité de problèmes. Les domaines d'application des graphes sont innombrables : les jeux, la planification, l'organisation, la production, l'optimisation, les programmes et modèles informatiques, les trajets dans le domaine des transports, le tourisme, la logistique ou tout simplement la géométrie... **Les graphes sont des objets simples que tout le monde peut dessiner.** Même s'il ne vous apparaît pas immédiatement que résoudre un sudoku est équivalent à la coloration d'un graphe, la pratique de ces derniers vous amènera à regarder le monde différemment.

A Typologie des graphes

■ **Définition 80 — Graphe.** Un graphe G est un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini et non vide d'éléments appelés **sommets** et A un ensemble de paires d'éléments de S appelées **arêtes**.

R A est donc un ensemble de paires de sommets : l'arête qui, sur le graphe 15.1, relie le sommet a au sommet b est noté (a, b) ou tout simplement ab .

 **Vocabulary 17 — Graph** \rightsquigarrow Graphe

 **Vocabulary 18 — Vertex (plural : vertices)** \rightsquigarrow Sommet

 **Vocabulary 19 — Edge** \rightsquigarrow Arête

La définition 80 est en fait celle des **graphes simples et non orientés** : ce sont eux que l'on considérera la plupart du temps.



FIGURE 15.1 – Graphe simple



FIGURE 15.2 – Multigraph à deux boucle et deux arêtes parallèles \dashrightarrow HORS PROGRAMME

- **Définition 81 — Boucle.** Une boucle est une arête reliant un sommet à lui-même.
- **Définition 82 — Arêtes parallèles.** Deux arêtes sont parallèles si elles relient les mêmes sommets.
- **Définition 83 — Graphe simple.** Un graphe simple est un graphe sans arêtes parallèles et sans boucles.
- **Définition 84 — Multigraph.** Un multigraph est un graphe avec des boucles et des arêtes parallèles. \dashrightarrow HORS PROGRAMME



FIGURE 15.3 – Graphe pondéré

■ **Définition 85 — Graphe pondéré.** Un graphe $G = (S, A)$ est pondéré s'il existe une application $w : A \rightarrow \mathbb{R}$. Le poids de l'arête ab vaut $w(ab)$.

■ **Définition 86 — Graphe orienté.** Un graphe $G = (S, A)$ est orienté si ses arêtes sont orientées selon une direction. Les arêtes sont alors désignées par le mot arc.



FIGURE 15.4 – Graphe orienté

R Sur le graphe orienté de la figure 15.4, il existe une arc de *a* vers *b*, matérialisé sur le graphe par une flèche. On note l'arc (a, b) ou ab .

■ **Définition 87 — Graphe complet.** Un graphe $G = (S, A)$ est complet si et seulement si une arête existe entre chaque sommet, c'est-à-dire si tous les sommets sont voisins.

En hommage à Kuratowski, on désigne les graphes complets par la lettre K_o indicée par l'ordre du graphe (cf. définition 91). La figure 15.5 représente le graphe complet d'ordre cinq K_5 . Kuratowski a notamment démontré [16] que K_5 n'est pas planaire : quelle que soit la manière de représenter ce graphe sur un plan, des arêtes se croiseront. Le graphe de la figure 15.1 est planaire.

FIGURE 15.5 – Graphe complet K_5

■ **Définition 88 — Graphe planaire.** Une graphe planaire est un graphe que l'on peut représenter sur un plan sans qu'aucune arête ne se croise.

■ **Définition 89 — Graphe biparti.** un graphe $G = (S, A)$ est biparti si l'ensemble S de ses sommets peut être divisé en deux sous-ensembles disjoints U et W tels que chaque arête de A ait une extrémité dans U et l'autre dans W .



FIGURE 15.6 – Graphe biparti

FIGURE 15.7 – Graphe biparti complet K_{34}

B Implémentation des graphes

On peut représenter graphiquement un graphe comme sur les figures précédentes 15.1, 15.3 ou 15.4. On peut également chercher à les implémenter sous la forme d'ensembles, de matrices ou de listes.

■ **Exemple 38 — Graphe et ensembles.** Le graphe de la figure 15.1 est un graphe simple que l'on peut noter $G = \{S = \{a, b, c, d\}, A = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, d)\}\}$ ou plus simplement $G = \{S = \{a, b, c, d\}, A = \{ab, ac, bc, cd\}\}$.

■ **Définition 90 — Adjacent ou voisin.** Deux sommets a et b sont adjacents ou voisins si le graphe contient une arête ab . Deux arêtes sont adjacentes ou voisines s'il existe un sommet commun à ces deux arêtes.

■ **Exemple 39 — Graphe et matrice d'adjacence.** Grâce au concept d'adjacence, on peut représenter un graphe par une matrice d'adjacence. Pour construire une telle matrice, il faut d'abord numérotter arbitrairement les sommets du graphes. Par exemple, pour le graphe de la figure 15.1, on choisit l'ordre $(a, b, c, d) \rightarrow (0, 1, 2, 3)$. Les coefficients m_{ij} de la matrice d'adjacence sont calculés selon la règle suivante :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe une arête entre le sommet } i \text{ et le sommet } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (15.1)$$

Pour le graphe de la figure 15.1, on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (15.2)$$

La matrice d'adjacence d'un graphe simple non orienté est de diagonale nulle (pas de boucles) et symétrique.

La matrice d'un graphe orienté n'est pas forcément symétrique.

Dans le cas d'un graphe pondéré, on peut remplacer le coefficient de la matrice par le poids de l'arête considérée.

En Python, on pourra utiliser un tableau Numpy pour implémenter une matrice d'adjacence.

■ **Exemple 40 — Graphe et liste d'adjacence.** On peut représenter un graphe par la liste des voisins de chaque sommet. Par exemple, si on dénote les sommets a , b , c et d par les indices 0, 1, 2, et 3, alors le graphe de la figure 15.1 peut être décrit par la liste `[[1,2], [0,2], [0,1,3], [2]]`.

Pour résumé, en Python :

```
G = [[1,2], [0,2], [0,1,3], [2]]
```

```
n = len(G)    # graph order
```

Par ailleurs, si le graphe est pondéré, la liste d'adjacence est une liste de listes de tuples, chaque tuple étant un couple (sommet, poids). Par exemple, le graphe orienté de la figure 15.3 s'écrit :

```
G = [[(1,8),(2,3)], [(0,8),(2,1)], [(0,3),(1,1),(3,42)], [(2,42)]]
```

R Ni la représentation graphique de la figure 15.1, ni la matrice d'adjacence M de l'équation 15.2, ni les listes d'adjacence ne sont des représentations uniques. On peut tracer différemment le graphe ou choisir un autre ordre pour les sommets et obtenir une autre matrice ou une autre liste d'adjacence. Cela traduit l'isomorphisme des graphes.

R Le choix d'une implémentation ou d'une autre est avant tout lié aux choix des algorithmes que l'on va utiliser. La structure de donnée utilisée est souvent le facteur clef qui permet d'améliorer ou de détériorer les performances d'un algorithme.

C Caractérisation structurelle des graphes

■ **Définition 91 — Ordre d'un graphe.** L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets. Pour $G = (S, A)$, l'ordre du graphe vaut donc le cardinal de l'ensemble S que l'on note généralement $|S|$. On note parfois l'ordre d'un graphe $|G|$.

R Si $|S| = n$, alors une matrice d'adjacence de $G = (S, A)$ est de dimension $n \times n$. Une liste d'adjacence de G a pour taille n .

■ **Définition 92 — Taille d'un graphe.** La taille d'un graphe désigne le nombre de ses arêtes. On le note $|A|$ et parfois $||G||$

■ **Définition 93 — Voisinage d'un sommet.** L'ensemble de voisins d'un sommet a d'un graphe $G = (S, A)$ est le voisinage de ce sommet. On le note généralement $V_G(a)$.

■ **Définition 94 — Incidence.** Une arête est dite incidente à un sommet si ce sommet est une des extrémités de cette arête

■ **Définition 95 — Degré d'un sommet.** Le degré $d(a)$ d'un sommet a d'un graphe G est le nombre d'arêtes incidentes au sommet a . C'est aussi $|V_G(a)|$.

■ **Définition 96 — Degrés d'un graphe orienté.** Dans un graphe orienté G et pour un som-

met s de ce graphe, on distingue :

- le degré entrant $d_+(s)$: le nombre d'arêtes incidentes à s et dirigées sur s ,
- le degré sortant $d_-(s)$: le nombre d'arêtes incidentes qui sortent de s et qui sont dirigées vers un autre sommet.

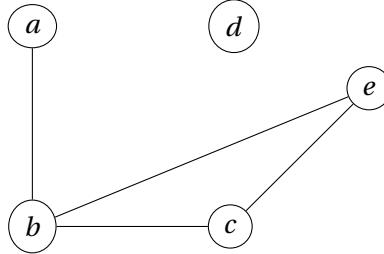


FIGURE 15.8 – Graphe d'ordre cinq, de taille quatre et de séquence $[0, 1, 2, 2, 3]$. Le sommet d est isolé. Ce graphe n'est ni complet ni connexe.

■ **Définition 97 — Sommet isolé.** Un sommet isolé est un sommet dont le degré vaut zéro.

■ **Définition 98 — Séquence des degrés.** La séquence des degrés d'un graphe G est la liste ordonnée par ordre croissant des degrés des sommets de G .

Sur la figure 15.8, on a représenté un graphe d'ordre cinq avec un sommet isolé. Ce graphe n'est pas connexe ni complet et sa séquence des degrés est $[0, 1, 2, 2, 3]$.

■ **Définition 99 — Graphe complémentaire.** Soit $G = (S, A)$ un graphe. On dit que $\bar{G} = (\bar{S}, \bar{A})$ est le complémentaire de G si les arêtes de \bar{G} sont les arêtes possibles qui ne figurent pas dans G . On note ces arêtes \bar{A} .

Par exemple, le complémentaire du graphe 15.8 est représenté sur la figure 15.9.

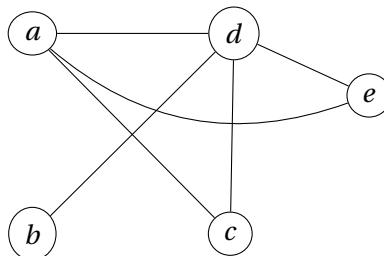


FIGURE 15.9 – Graphe complémentaire du graphe de la figure 15.8

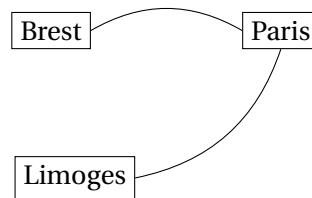


FIGURE 15.10 – Graphe d'ordre trois, de taille deux et de séquence [1,1,2]



FIGURE 15.11 – Graphe d'ordre trois, de taille deux et de séquence [1,1,2]

D Isomorphisme des graphes

Considérons les graphes des figures 15.10 et 15.11. Ils ne diffèrent que par les noms des sommets et la signification des arêtes. Si on ne prête pas attention aux noms des sommets ni à la signification des arêtes, ces deux graphes sont identiques, leurs caractéristiques sont les mêmes : ordre, degré, taille. On dit qu'ils sont isomorphes ou qu'ils sont identiques à un isomorphisme près. Finalement, c'est la structure du graphe telle qu'on peut la caractériser qui importe, pas son apparence.

■ **Définition 100 — Graphes isomorphes.** Deux graphes $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont isomorphes si et seulement s'il existe une bijection σ de S vers S' pour laquelle, si ab est un arête de A , alors $\sigma(a)\sigma(b)$ est à une arête de A' .

■ **Exemple 41 — Isomorphes et bijection.** Considérons les deux graphes G et G' représentés sur les figures 15.12 et 15.13.

On peut les définir par des ensembles de la manière suivante :

$$G = (S = \{a, b, c, d\}, A = \{ab, ac, bc, bd, dc\}) \quad (15.3)$$

$$G' = (S' = \{1, 2, 3, 4\}, A' = \{12, 14, 24, 23, 43\}) \quad (15.4)$$

Formulé de la sorte, on pourrait croire que ces deux graphes ne sont pas isomorphes. Pourtant, c'est le cas. Comment le montrer? En exhibant une bijection ad-hoc!

On cherche donc une bijection entre les deux graphes en comparant les degrés des som-

FIGURE 15.12 – Graphe d'exemple $G = (S = \{a, b, c, d\}, A = \{ab, ac, bc, bd, dc\})$ FIGURE 15.13 – Graphe d'exemple $G' = (S' = \{1, 2, 3, 4\}, A' = \{12, 14, 24, 23, 43\})$

mets et en observant leurs arêtes.

On peut proposer la bijection $\sigma : S \longrightarrow S'$ telle que :

$$\sigma(a) = 1 \tag{15.5}$$

$$\sigma(b) = 2 \tag{15.6}$$

$$\sigma(c) = 4 \tag{15.7}$$

$$\sigma(d) = 3 \tag{15.8}$$

On a également la correspondance des arêtes :

$$\sigma(a)\sigma(b) = 12 \tag{15.9}$$

$$\sigma(a)\sigma(c) = 14 \tag{15.10}$$

$$\sigma(b)\sigma(c) = 24 \tag{15.11}$$

$$\sigma(b)\sigma(d) = 23 \tag{15.12}$$

$$\sigma(c)\sigma(d) = 43 \tag{15.13}$$

R On peut compter le nombre de graphes isomorphes pour un ordre donné. Par exemple, il y a deux graphes isomorphes d'ordre 2 et 8 d'ordre 3.

E Chaînes, cycles et parcours

- **Définition 101 — Chaîne.** Une chaîne reliant deux sommets a et b d'un graphe non orienté a à b . Dans le cas d'un graphe orienté on parle de chemin.
- **Définition 102 — Chaîne élémentaire.** Une chaîne élémentaire ne passe pas deux fois par un même sommet : **tous ses sommets sont distincts**.
- **Définition 103 — Chaîne simple.** Une chaîne simple ne passe pas deux fois par une même arête : **toutes ses arêtes sont distinctes**.
- **Définition 104 — Longueur d'une chaîne.** La longueur d'une chaîne \mathcal{C} est :
 - le nombre d'arêtes que comporte la chaîne dans un graphe simple non pondéré,
 - la somme des poids des arêtes de la chaîne, c'est à dire $\sum_{e \in \mathcal{C}} w(e)$, dans le cas d'un graphe simple pondéré dont la fonction de valuation est w .



FIGURE 15.14 – Exemple de chaîne simple reliant a à d en rouge

- **Définition 105 — Cycle.** Un cycle est une chaîne simple dont les deux sommets extrémités sont identiques.
- La longueur d'un cycle est le nombre d'arêtes qu'il contient. Dans le cas des graphes orientés on parle de circuit.



FIGURE 15.15 – Exemple de cycle en turquoise



FIGURE 15.16 – Saurez-vous trouver le cycle eulérien de ce graphe ?

■ **Définition 106 — Chaîne eulérienne.** Une chaîne eulérienne est une chaîne simple qui passe par toutes les arêtes d'un graphe.

■ **Définition 107 — Cycle eulérien.** Un cycle eulérien est un cycle passant exactement une fois par chaque arête d'un graphe.

■ **Définition 108 — Cycle hamiltonien.** Un cycle hamiltonien est un sous-graphe couvrant qui est un cycle. Autrement dit, c'est un cycle qui passe par tous les sommets d'un graphe.

R Rowan Hamilton était un astronome irlandais qui a inventé le jeu icosien^a en 1857.

a. The icosian game, jeu équivalent à l'icosagonal d'Édouard Lucas [17]

R Les graphes complets K_n sont eulériens et hamiltoniens : ils possèdent à la fois un cycle eulérien et un cycle hamiltonien.

R On peut également définir une chaîne comme le graphe d'ordre n isomorphe au graphe $P_n = \{S_n = \{1, 2, \dots, n\}, A_n = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}\}$. Par convention, on pose $P_1 = \{S_1 = \{1\}\}$ et $A_1 = \emptyset$. Les extrémités de la chaînes sont les deux sommets de degré 1.

Avec la même approche et les mêmes notations, un cycle devient alors un graphe isomorphe au graphe $C_n = \{S_n, A'_n = A_n \cup \{n, 1\}\}$, c'est à dire que la chaîne finit là où elle a commencé. L'ordre de C_n est supérieur ou égal à trois.



FIGURE 15.17 – Graphe du jeu icosien et du dodécaèdre (solide régulier à 12 faces pentagonales). C'est un graphe cubique car chaque sommet possède trois voisins. Ce graphe possède un cycle hamiltonien. Saurez-vous le trouver?

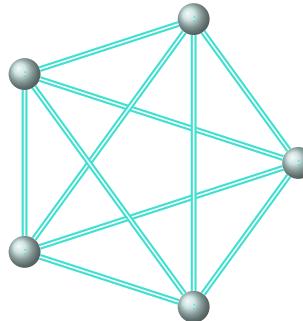


FIGURE 15.18 – Graphe K_5 : saurez-vous trouver des cycles hamiltonien et eulérien de ce graphe?

F Sous-graphes et connexité

■ **Définition 109 — Graphe connexe.** Un graphe $G = (S, A)$ est connexe si et seulement si pour tout couple de sommets (a, b) de G , il existe une chaîne d'extrémités a et b .

Par exemple, le graphe de la figure 15.1 est connexe, mais pas celui figure 15.8.

■ **Définition 110 — Sous-graphe.** Soit $G = (S, A)$ un graphe, alors $G' = (S', A')$ est un sous-graphe de G si et seulement si $S' \subseteq S$ et $A' \subseteq A$.



FIGURE 15.19 – Exemple de sous-graphe couvrant G en rouge : $G = (S = \{a, b, c, d\}, A = \{ab, ac, cd\})$

■ **Définition 111 — Sous-graphe couvrant.** G' est un sous-graphe couvrant de G si et seulement si G' est un sous-graphe de G et $S' = S$.

■ **Définition 112 — Sous-graphe induit.** Soit $S' \subset S$ non vide. G' est un sous-graphe de G induit par S' et on note $G[S']$ si et seulement si G' admet pour arêtes celles de G dont les deux extrémités sont dans S' .

■ **Définition 113 — Clique.** Une clique est d'un graphe $G = (S, A)$ un sous-ensemble $C \subseteq S$ des sommets dont le sous-graphe induit $G[C]$ est complet.

Sur la figure 15.20, le graphe $G = (S = \{b, c, d\}, A = \{bc, bd, cd\})$ est une clique.

G Coloration de graphes

■ **Définition 114 — Coloration.** Une coloration d'un graphe simple est l'attribution d'une couleur aux sommets de ce graphe.

■ **Définition 115 — Coloration valide.** Une coloration est valide lorsque deux sommets adjacents n'ont jamais la même couleur.



FIGURE 15.20 – Exemple de sous-graphe induit par les sommets $S = \{a, c, d\}$ en turquoise. $G[S] = (S = \{a, c, d\}, A = \{ac, cd\})$

■ **Définition 116 — Nombre chromatique.** Le nombre chromatique d'un graphe G est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour obtenir une coloration valide de ce graphe. On le note généralement $\chi(G)$.



FIGURE 15.21 – Exemple de 4-coloration valide d'un graphe. Cette coloration n'est pas optimale.

■ **Définition 117 — k-coloration.** Lorsqu'une coloration de graphe utilise k couleurs, on dit d'elle que c'est une k -coloration.

■ **Définition 118 — Coloration optimale.** Une $\chi(G)$ -coloration valide est une coloration optimale d'un graphe G .



FIGURE 15.22 – Exemple de 3-coloration valide d'un graphe. Cette coloration est optimale.



FIGURE 15.23 – Graphe de Petersen : saurez-vous proposer une coloration optimale de ce graphe sachant que son nombre chromatique vaut trois ?

H Distances

■ **Définition 119 — Distance dans un graphe simple non pondéré.** La distance d'un sommet a à un sommet b dans un graphe simple non pondéré G est la longueur de la plus courte chaîne d'extrémités a et b . On la note $d_G(a, b)$.

R Cette définition coïncide avec la notion de distance en mathématiques. Pour les sommets a , b et c de G :

- $d_G(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
- $d_G(a, b) = d_G(b, a)$
- $d_G(a, b) \leq d_G(a, c) + d_G(c, b)$

■ **Définition 120 — Valuation d'une chaîne dans un graphe pondéré.** La valuation d'une chaîne dans un graphe pondéré est la somme des poids de chacune de ses arêtes. Pour une chaîne P , on la note $v(P)$.

■ **Définition 121 — Distance dans un graphe pondéré.** La distance d'un sommet a à un sommet b dans un graphe pondéré G est la valuation minimum des chaînes d'extrémités a et b . On la note $d_{G,v}(a, b)$.

I Arbres

■ **Définition 122 — Arbre.** Un arbre est un graphe connexe et acyclique.

■ **Définition 123 — Feuilles.** Dans un arbre, les sommets de degré un sont appelés les feuilles.

■ **Définition 124 — Arbre recouvrant.** Un arbre recouvrant d'un graphe G est un sous-graphe couvrant de G qui est un arbre.

■ **Définition 125 — Arbre enraciné.** Parfois, on distingue un sommet particulier dans un arbre A : la racine r . Le couple (A, r) est un nommé arbre enraciné. On le représente un tel arbre verticalement avec la racine placée tout en haut comme sur la figure 15.24.

■ **Définition 126 — Arbre binaire.** Un arbre binaire est un graphe connexe acyclique pour lequel le degré de chaque sommet vaut au maximum trois. Le degré de la racine vaut au maximum deux.

■ **Définition 127 — Arbre binaire parfait.** Un arbre binaire parfait est un arbre dans lequel



FIGURE 15.24 – Exemples d’arbres enracinés. Les racines des arbres sont en rouge, les feuilles en turquoise. Le tout forme une forêt.

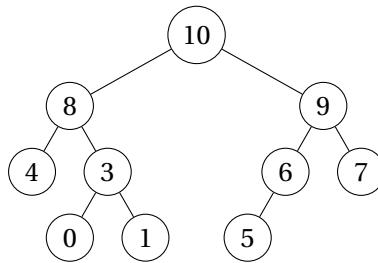


FIGURE 15.25 – Arbre binaire

tous les niveaux sauf le dernier doivent être totalement remplis. Si le dernier n'est pas rempli totalement alors il doit être rempli de gauche à droite.



FIGURE 15.26 – Arbre binaire parfait

Ces arbres sont illustrés sur les figure 15.25 et 15.26.

J Exemples d'utilisation simple des graphes

■ **Exemple 42 — Télécommunications en Bretagne.** Un réseau de télécommunication en Bretagne doit relier les villes de Rennes, Lorient, Vannes, Brest, Saint Brieuc, Lannion et Quimper. Les concepteurs de ce réseau souhaitent que les liens soient redondants : en cas de panne sur un lien, on redirige le trafic sur un autre. Ils proposent que chaque ville possède exactement trois liens vers trois autres villes. Cela sera-t-il possible ?

■ **Exemple 43 — Basket le retour.** À l'entraînement, on propose une activité *cohésion* à une équipe de basket de cinq joueurs. Le meneur a la balle et débute l'action. Une passe entre chaque joueur doit avoir lieu avant que la balle ne revienne au meneur qui se charge du tir qui conclut l'action. Le sens de la passe n'a pas d'importance. Un même joueur peut donc recevoir la balle plusieurs fois, mais pas d'un même coéquipier. Il ne peut pas non plus la lancer deux fois vers le même coéquipier.

- a) Cela est-il possible ?
- b) Combien de passes ont lieu ?
- c) Un joueur est malade et il n'y a plus que quatre joueurs sur le terrain. Cette activité est-elle possible ?

■ **Exemple 44 — Graphe et sudoku.** On considère le sudoku 4x4 ci-dessous.

- a) Proposer une modélisation sous la forme d'un graphe de ce jeu en explicitant ce que représente un sommet et ce représente une arête ?
- b) Dessiner ce graphe en faisant des cercles vides pour les sommets.
- c) Colorier chaque sommet avec une couleur de telle manière à ce qu'aucun sommet ne possède la même couleur qu'un voisin.
- d) De combien de couleurs a-t-on besoin au minimum ?

1	2	3	4
3	4	1	2
2	3	4	1
4	1	2	3

■ **Exemple 45 — Lemme d'Euler.** Montrer que dans un graphe il y a toujours un nombre pair de sommets de degré impair.

16

PROPRIÉTÉS DES GRAPHES

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ démontrer le lemme des poignées de mains
- ☒ caractériser un cycle eulérien
- ☒ savoir expliquer ce qu'est un cycle hamiltonien
- ☒ caractériser un graphe connexe, acyclique ou un arbre

A Des degrés et des plans

Théorème 7 — Somme des degrés d'un graphe. Le nombre d'arêtes d'un graphe simple est égal à la moitié de la somme des degrés des sommets de ce graphe.

Plus formellement, soit $G = (S, A)$ un graphe simple alors on a :

$$2|A| = \sum_{s \in S} d(s) \quad (16.1)$$

Démonstration. Il suffit de dénombrer de deux manières différentes le nombre N d'extrémités d'arêtes dans le graphe G . D'une part, chaque arête possède deux extrémités, on a donc $N = 2|A|$. D'autre part, le nombre d'extrémités d'arêtes est égal à la somme des degrés de tous les sommets s donc $N = \sum_{s \in S} d(s)$. ■

R On appelle souvent ce théorème le lemme des poignées de mains car il peut se traduire par le fait que dans un graphe il y a toujours un nombre pair de sommets de degré impair.

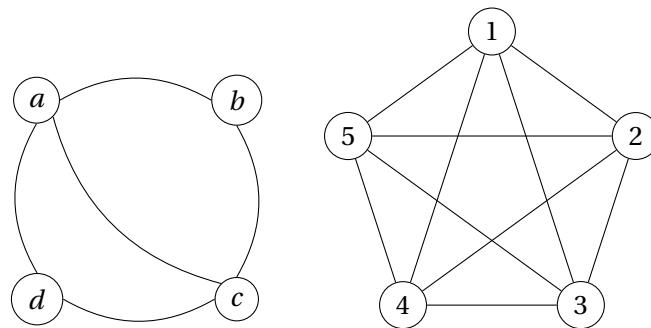


FIGURE 16.1 – Sur ces graphes, on peut vérifier les théorèmes de caractérisation des chaînes eulériennes et des cycles eulériens.

Théorème 8 — Formule d'Euler pour les graphes planaires. Soit $G = (S, A)$ un graphe simple. G est planaire si le nombre de régions du plan qu'il délimite R vaut :

$$R = 2 + |A| - |S| \quad (16.2)$$

R Pour vérifier cette formule, il ne faut pas oublier la région extérieure au graphe qui compte également.

B Caractérisation des chaînes, des cycles et des graphes

Théorème 9 — Caractérisation d'une chaîne eulérienne. Il existe une chaîne eulérienne dans un graphe lorsque seuls les sommets de départ et d'arrivée sont de degré impair.

Théorème 10 — Caractérisation d'un cycle eulérien. Il existe un cycle eulérien dans un graphe si tous les sommets sont de degré pair.

Pour bien visualiser ces caractérisations, on peut s'entraîner sur les graphes de la figure 16.1. Le graphe d'ordre quatre possède une chaîne eulérienne mais pas de cycle eulérien. Le graphe complet K_5 possède les deux.

On appelle graphe hamiltonien un graphe qui possède un cycle hamiltonien (cf. définition 108). Un graphe hamiltonien :

- est connexe,
- d'ordre supérieur ou égal à trois,
- n'a pas de sommets de degré un.

Théorème 11 — Condition nécessaire pour un graphe non hamiltonien. Soit $G = (S, A)$ un graphe. Soit $U \subseteq S$ un ensemble de sommets de G . Si le nombre de composantes connexes de $G = (S \setminus U, A)$ est strictement supérieur au nombre de sommets de U , alors G n'est pas hamiltonien.

Théorème 12 — Condition suffisante pour un graphe hamiltonien. Soit $G = (S, A)$ un graphe d'ordre supérieur ou égal à deux. Si pour toute paire de sommets a et b non adjacents de G on a :

$$d(a) + d(b) \geq |S| \quad (16.3)$$

alors G est hamiltonien.

Dans le cas d'un **graphe simple** à $n > 2$ sommets, la condition suffisante devient :

$$\forall s \in S, d(s) \geq n/2 \quad (16.4)$$

Théorème 13 — Chemin hamiltonien dans une graphe complet orienté. Tout graphe complet orienté possède un chemin hamiltonien.

Démonstration. Par récurrence sur le nombre de sommet du graphe. ■



FIGURE 16.2 – On peut vérifier que K_5 possède un chemin hamiltonien.

C Graphes acycliques et connexes

Théorème 14 — Condition nécessaire d'acyclicité d'un graphe. Soit un graphe $G = (S, A)$ acyclique. On a alors :

$$|A| \leq |S| - 1 \quad (16.5)$$

Théorème 15 — Condition nécessaire de connexité d'un graphe. Si un graphe $G = (S, A)$ est

connexe alors on a :

$$|A| \geq |S| - 1 \quad (16.6)$$

R On déduit des deux théorèmes précédents qu'un arbre (cf. définition 122) possède exactement $|S| - 1$ arêtes.

D Coloration, graphes planaires et nombre chromatique

Théorème 16 — Trois couleurs. Si tous les degrés des sommets d'un graphe planaire sont pairs, alors trois couleurs suffisent pour obtenir une coloration valide.

Théorème 17 — Quatre couleurs. Le nombre chromatique d'un graphe planaire ne dépasse jamais quatre.

On peut chercher à encadrer le nombre chromatique d'un graphe. Dans une premier temps, on peut remarquer que :

- $\chi(G) \leq |S|$, autrement dit, l'ordre d'un graphe est supérieur ou égal au nombre chromatique. L'égalité est atteinte pour les graphes complets : tous les sommets étant reliés les uns aux autres, on ne peut qu'utiliser des couleurs différentes pour chaque sommet.
- Pour un sous-graphe G' de G , on a $\chi(G') \leq \chi(G)$.

■ **Définition 128 — Degré maximum des sommets d'un graphe.** On note $\Delta(G)$ le degré maximum des sommets d'un graphe G .

■ **Définition 129 — Ordre du plus grand sous-graphe complet d'un graphe.** On note $\omega(G)$ l'ordre du plus grand sous-graphe **complet** d'un graphe G .

Théorème 18 — Encadrement du nombre chromatique. Pour un graphe G , on a :

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \quad (16.7)$$

E Principe d'optimalité et plus court chemin dans un graphe

Théorème 19 — Optimalité et plus court chemin dans graphe. Si $a \rightsquigarrow b$ est le plus court chemin passant par un sommet c , alors les sous-chemins $a \rightsquigarrow c$ et $c \rightsquigarrow b$ sont des plus courts chemins.

Démonstration. Soit $a \rightsquigarrow b$ le plus court chemin passant par un sommet c dans un graphe G . Si $a \rightsquigarrow c$ n'est pas le plus court chemin, alors il suffit de prendre le plus court chemin entre a et c et de le joindre à $c \rightsquigarrow b$ pour obtenir un chemin plus court de a vers b . Ce qui est en contradiction avec notre hypothèse que $a \rightsquigarrow b$ est le plus court chemin. ■

17

ALGORITHMES DES GRAPHES

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ parcourir un graphe en largeur et en profondeur
- ☒ démontrer la terminaison du parcours en largeur
- ☒ utiliser une file ou une pile pour parcourir un graphe
- ☒ énoncer le principe de l'algorithme de Dijkstra (plus court chemin)
- ☒ appliquer l'algorithme de Dijkstra à un graphe simple à la main en créant un tableau de résolution

A Parcours d'un graphe

■ **Définition 130 — Parcours d'un graphe.** Un parcours d'un graphe G est un ordre pour visiter chaque sommet d'un graphe.

Le parcours d'un graphe est une opération fondamentale : il ne s'agit pas tant de parcourir le graphe que de cheminer sur les sommets d'un graphe dans un certain ordre pour y effectuer des calculs. L'ordre du parcours est crucial dans le sens où il conditionne la plupart du temps la complexité de l'algorithme qui utilise un parcours. Les parcours de graphe sont utilisés par de nombreux algorithmes, notamment Dijkstra et A* mais également Edmonds-Karp.

On peut facilement mémoriser les différentes stratégies en observant les types d'ensemble qui sont utilisés pour stocker les sommets à parcourir au cours de l'algorithme :

1. Le parcours en **largeur** passe par tous les voisins d'un sommet avant de parcourir les descendants de ces voisins. Les sommets passent dans une **file** d'attente, c'est-à-dire structure de données de type First In First Out.
2. Le parcours en **profondeur** passe par tous les descendants d'un voisin d'un sommet avant de parcourir tous les autres voisins de ce sommet. L'implémentation la plus simple et la plus commune est récursive. Mais on peut aussi l'implémenter de manière itérative

en utilisant une *pile* de sommets, c'est-à-dire une structure de données de type Last In First Out.

B Parcours en largeur

■ **Définition 131 — Parcours en largeur.** Parcourir en largeur un graphe signifie qu'on cherche à visiter tous les voisins d'un sommet avant de parcourir les autres sommets du graphe.



Vocabulary 20 — Breadth First Search ↽ ↾ Parcours en largeur

Le parcours en largeur d'un graphe (cf. algorithme 44) est un algorithme à la base de nombreux développements comme l'algorithme de Dijkstra et de Prim (cf. algorithmes 48 et ??). Il nécessite d'utiliser :

1. une **file d'attente**¹ qui détient la liste des sommets à visiter dans l'ordre de la largeur du graphe : les sommets sont enfilés au fur et à mesure de leur découverte. Lorsque le sommet a été visité, il quitte la file.
2. et une structure qui **enregistre** les différents sommets déjà **découverts** afin de ne pas les revisiter.

Algorithme 44 Parcours en largeur d'un graphe

```

1: Fonction PARCOURS_EN_LARGEUR( $G, s$ )                                 $\triangleright s$  est un sommet de  $G$ 
2:    $F \leftarrow$  une file d'attente vide                                          $\triangleright F$  comme file
3:    $D \leftarrow \emptyset$                                                         $\triangleright D$  ensemble des sommets découverts
4:    $P \leftarrow$  une liste vide                                               $\triangleright P$  comme parcours
5:   ENFILER( $F, s$ )
6:   AJOUTER( $D, s$ )               $\triangleright$  Pour la preuve de la correction, on précise que  $d[s] = 0$ 
7:   tant que  $F$  n'est pas vide répéter
8:      $v \leftarrow$  DÉFILER( $F$ )
9:     AJOUTER( $P, v$ )           $\triangleright$  ou bien traiter le sommet en place
10:    pour chaque voisin  $x$  de  $v$  dans  $G$  répéter
11:      si  $x \notin D$  alors           $\triangleright x$  n'a pas encore été découvert
12:        AJOUTER( $D, x$ )
13:        ENFILER( $F, x$ )     $\triangleright$  Pour la preuve de la correction, on ajoute ici  $d[x] = d[u] + 1$ 
14:    renvoyer  $P$            $\triangleright$  Facultatif, on pourrait traiter chaque sommet  $v$  en place

```

R La structure de donnée file permet de garantir la correction du parcours en largeur d'abord : on fait entrer en premier dans la file les voisins puis les descendants des voisins.

1. structure de données de type First In First Out

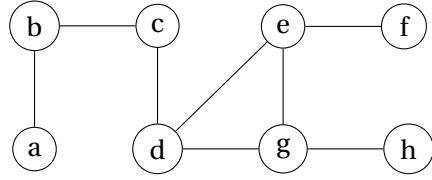


FIGURE 17.1 – Exemple de parcours en largeur au départ de a : a → b → c → d → e → g → f → h.

a Terminaison du parcours en largeur

La terminaison du parcours en largeur peut être prouvée en considérant le variant de boucle

$$\nu = |F| + |\bar{D}| \quad (17.1)$$

c'est-à-dire la somme des éléments présents dans la file et du nombre de sommets non découverts.

Démonstration. À l'entrée de la boucle, si n est l'ordre du graphe, on a $|F| + |\bar{D}| = 1 + n - 1 = n$. Puis, à chaque itération, on retire un élément de la file et on ajoute ses p voisins en même temps qu'on marque les p voisins comme découverts. L'évolution du variant au cours d'une itération s'écrit :

$$\nu = (|F|_d - 1 + p) + (|\bar{D}|_d - p) = |F|_d + |\bar{D}|_d - 1 \quad (17.2)$$

où l'on note $|F|_d$ et $|\bar{D}|_d$ les valeurs au début de l'itération de $|F|$ et $|\bar{D}|$.

À chaque tour de boucle, ce variant ν décroît donc strictement de un et atteint nécessairement zéro au bout d'un certain nombre de tours. Lorsque le variant vaut zéro $|F| + |\bar{D}| = 0$, on a donc $|F| = 0$ et $|\bar{D}| = 0$. La file est nécessairement vide et tous les sommets ont été découverts. L'algorithme se termine puisque la condition de sortie est atteinte. ■

b Correction du parcours en largeur

Parcourir un graphe en largeur, à partir d'un sommet de départ s , cela veut dire trouver les chemins les plus courts partant de s vers tous les sommets du graphe². On remarque que tous les sommets du graphe sont à un moment ou un autre de l'algorithme admis dans l'ensemble D et enfilés **une seule fois**.

Pour montrer la correction, on procède en deux temps :

parcours le parcours en largeur à partir du sommet de départ visite tous les sommets.

en largeur le chemin du sommet de départ s à un sommet u est le plus court en termes nombre de sauts³.

2. On fait l'hypothèse que le graphe est connexe. S'il ne l'est pas, il suffit de recommencer la procédure avec un des sommets n'ayant pas été parcouru.

3. c'est-à-dire en termes de longueur de chemin

Démonstration. On montre dans un premier temps que le parcours en largeur à partir du sommet de départ visite tous les sommets par l'absurde.

Imaginons qu'il existe un sommet x accessible depuis le sommet de départ s et non visité par l'algorithme du parcours en largeur. Supposons que x est le premier sommet accessible depuis s et non visité par l'algorithme. Si ce sommet est accessible depuis s , c'est qu'il existe un chemin de s à x dans le graphe. x possède donc un sommet adjacent parent sur ce chemin que l'on note p . Comme x est le premier sommet non visité, alors p a nécessairement été découvert précédemment par l'algorithme. Mais comme le parcours procède en largeur par sommets adjacents, si p a été découvert, alors x a été découvert également. Ce qui est absurde. Il n'existe donc pas de sommet x non visité par l'algorithme. **Donc tous les sommets sont visités.**

Puis il faut montrer qu'on parcourt les sommets selon l'ordre des voisins d'abord, c'est-à-dire dans l'ordre de la distance au sommet de départ. Le graphe n'est pas pondéré, mais on peut considérer que tous les poids du graphe valent 1 ou bien qu'on compte les sauts (franchissement des arêtes) pour atteindre un sommet. Il suffit d'ajouter la notion de distance comme précisé en commentaire sur l'algorithme 44.

On procède en utilisant l'invariant de boucle `while` : \mathcal{I} : « **Pour chaque sommet v qui se trouve dans la file, la distance $d[v]$ au sommet de départ s est correcte et tous les sommets déjà découverts ont été découverts dans l'ordre croissant de distance depuis s .** »

Initialisation à l'entrée de la boucle `while`, le seul sommet dans la file est le sommet de départ qui est situé à une distance nulle de lui-même. La distance est correcte. Comme aucun autre sommet n'a encore été découvert, l'ordre est correct également. Donc \mathcal{I} est vérifié à l'entrée de la boucle.

Conservation Supposons que \mathcal{I} soit vérifié à l'entrée de la boucle. D'après cette hypothèse, la distance du sommet v défilé est correcte car v a été enfilé et marqué comme découvert à la précédente itération. À la fin de l'itération, on a marqué comme découvert tous les voisins de v qui se trouvent à une distance de 1 de v . Ce sont les voisins les plus proches car ils sont directement connectés à v . Donc les sommets découverts le sont bien dans l'ordre croissant de distance. \mathcal{I} est conservé par les instructions du corps de la boucle.

Conclusion Comme l'invariant est vérifié à l'entrée de la boucle et qu'il est conservé par les instructions de la boucle, \mathcal{I} est vérifié à la fin de la boucle. Par conséquent, le parcours en largeur est correct : tous les sommets ont été découverts dans l'ordre croissant des distances.

Le parcours en largeur est donc correct. ■

c Complexité du parcours en largeur

La complexité de cet algorithme est lié, comme toujours, aux structures de données utilisées. Pour qu'elle soit optimale, on considère donc que :

1. G , un graphe d'ordre n et de taille m , est implémenté par une **liste d'adjacence** g . Rechercher les voisins d'un sommet est alors une opération en $O(1)$,

2. la file d'attente F possède une complexité en $O(1)$ pour les opérations ENFILER et DÉFILER,
3. les listes P et D possèdent une complexité en $O(1)$ pour l'ajout d'un élément AJOUTER,
4. savoir si un sommet est dans D est une opération en $O(1)$.

Selon ces options choisies, lors du parcours en largeur, les instructions des boucles s'effectuent donc en un temps constant c .

$$C(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \sum_{v \in g[k]} c \right) \quad (17.3)$$

Dans le pire des cas, le graphe est complet : chaque sommet possède donc $n - 1$ voisins et la boucle intérieure fait un nombre maximal d'itérations. La complexité dans le pire des cas est alors quadratique :

$$C(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \sum_{v \in g[k]} c \right) = n + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} 1 = n + \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2) \quad (17.4)$$

Si l'on considère un cas quelconque, c'est-à-dire un graphe non complet, on peut exprimer la complexité différemment. En déroulant les deux boucles, c'est-à-dire en écrivant les instructions les unes après les autres explicitement, on se rend compte que l'on parcourt :

1. tous les sommets une fois et toutes les arêtes deux fois si le graphe n'est pas orienté,
2. tous les sommets une fois et toutes les arêtes une fois si le graphe est orienté.

Dans le cas d'un graphe non orienté, cela s'exprime :

$$C(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \sum_{v \in g[k]} c \right) = n + 2 \sum_{a \in A} 1 = n + 2m = O(n + m) \quad (17.5)$$

C'est pourquoi on note généralement la complexité du parcours en largeur $O(n + m)$. C'est une expression qui montre que si le graphe est peu dense, alors la complexité du parcours n'est pas vraiment quadratique. Par contre, dans le pire des cas, le graphe est complet, $m = \frac{n(n-1)}{2}$ d'après le lemme des poignées de mains et on retrouve bien une complexité quadratique.

R Si on avait utilisé une matrice d'adjacence, on aurait été obligé de rechercher les voisins à chaque étape, c'est à dire de balayer une ligne de la matrice. Cette opération aurait eu un coût en $O(n)$. La complexité temporelle du parcours en serait impactée.

R Utiliser une liste Python pour implémenter une file d'attente n'est pas optimal. Si l'opération `append(x)` permet bien d'enfiler l'élément à la fin de la liste en une complexité $O(1)$, l'opération `pop(0)` qui permet de récupérer le premier élément de la liste (DÉFILER) est de complexité $O(n)$, car il est nécessaire de réécrire tout le tableau dynamique sous-jacent.

C Parcours en profondeur

■ **Définition 132 — Parcours en profondeur.** Parcourir en profondeur un graphe signifie qu'on cherche à visiter tous les voisins descendants d'un sommet qu'on découvre avant de parcourir les autres sommets découverts en même temps.



Vocabulary 21 — Depth First Search ⇔ Parcours en profondeur

Le parcours en profondeur d'un graphe s'exprime naturellement récursivement (cf. algorithme 45). Il peut également s'exprimer de manière itérative (cf. algorithme 46) en utilisant une pile P afin gérer la découverte des voisins dans l'ordre de la profondeur du graphe.

Algorithme 45 Parcours en profondeur d'un graphe (version récursive)

```

1: Fonction PARCOURS_EN_PROFONDEUR( $G, s, D, C$ )           ▷  $s$  est un sommet de  $G$ 
2:   AJOUTER( $C, s$ )                                         ▷  $s$  est ajouté au parcours du graphe
3:   AJOUTER( $D, s$ )                                         ▷  $s$  est marqué découvert
4:   pour chaque voisin  $x$  de  $s$  dans  $G$  répéter
5:     si  $x \notin D$  alors                                     ▷  $x$  n'a pas encore été découvert
6:       PARCOURS_EN_PROFONDEUR( $G, x, D, C$ )

```

Algorithme 46 Parcours en profondeur d'un graphe (version itérative)

```

1: Fonction PARCOURS_EN_PROFONDEUR( $G, s$ )           ▷  $s$  est un sommet de  $G$ 
2:    $P \leftarrow$  une pile vide                                ▷  $P$  comme pile
3:    $D \leftarrow$  un ensemble vide                            ▷  $D$  comme découverts
4:    $C \leftarrow$  un liste vide                               ▷  $C$  pour le parcours
5:   EMPILER( $P, s$ )
6:   tant que  $P$  n'est pas vide répéter
7:      $v \leftarrow$  DÉPILER( $P$ )
8:     AJOUTER( $C, v$ )
9:     pour chaque voisin  $x$  de  $v$  dans  $G$  répéter
10:    si  $x \notin E$  alors
11:      EMPILER( $P, x$ )
12:      AJOUTER( $D, x$ )
13:    renvoyer  $C$                                      ▷ Facultatif, on pourrait traiter chaque sommet  $v$  en place

```

La complexité de cet algorithme peut être calculé facilement si on considère son expression récursive (cf. algorithme 45). Soit un graphe $G = (S, A)$ possédant n sommets et m arêtes. On considère qu'en dehors des appels récursifs, la complexité de l'algorithme est constante. Par ailleurs, on effectue un nombre d'appels récursifs égal au nombre de voisin du sommet en cours d'exploration. C'est pourquoi, la complexité s'exprime :

$$T(S, A) = 1 + v_0 + T(S \setminus \{s_0\}, A \setminus \{a_0\}) \quad (17.6)$$



FIGURE 17.2 – Exemple de parcours en profondeur au départ de a : a → b → c → d → g → h → e → f

où s_0 désigne le sommet d'indice 0, v_0 le nombre de voisins du sommet s_0 et a_0 les arêtes de s_0 à ses voisins. On en déduit alors :

$$T(S, A) = 1 + v_0 + 1 + v_1 + T(S \setminus \{s_0, s_1\}, A \setminus \{a_0, a_1\}) \quad (17.7)$$

$$= 1 + 1 + 1 + \dots + v_0 + v_1 + v_2 + \dots + T(S \setminus \{s_0, s_1, s_2, \dots\}, A \setminus \{a_0, a_1, a_2, \dots\}) \quad (17.8)$$

$$= n + \sum_{k=0}^{m-1} v_k \quad (17.9)$$

$$= n + m \quad (17.10)$$

La complexité de l'algorithme du parcours en profondeur est donc la même que celles du parcours en largeur et on la note $O(n + m)$.

D Trouver un chemin dans un graphe non pondéré

On peut modifier l'algorithme 44 de parcours en largeur d'un graphe pour trouver un chemin reliant un sommet à un autre et connaître la longueur de la chaîne qui relie ces deux sommets. Il suffit pour cela de :

- garder la trace du prédécesseur (**parent**) du sommet visité sur le chemin,
- sortir du parcours dès qu'on a trouvé le sommet cherché (**early exit** ou sortie anticipée),
- calculer le coût du chemin associé.

Le résultat est l'algorithme 47.

Opérer cette recherche dans un graphe ainsi revient à chercher dans **toutes les directions**.

R Un graphe non pondéré peut-être vu comme un graphe pondéré dont la fonction de valuation vaut toujours 1. La distance entre deux sommets peut alors être interprétée comme le nombre de sauts nécessaires pour atteindre un sommet.

Algorithme 47 Longueur d'une chaîne via un parcours en largeur d'un graphe non pondéré

```

1: Fonction LONGUEUR_CHAÎNE( $G, s, b$ )           ▷ Trouver la longueur du chemin de  $s$  à  $b$ 
2:    $F \leftarrow$  une file d'attente vide               ▷  $F$  comme file
3:    $D \leftarrow$  un ensemble vide                      ▷  $D$  comme découverts
4:    $P \leftarrow$  un dictionnaire vide                  ▷  $P$  comme parent
5:   ENFILER( $F, s$ )
6:   AJOUTER( $D, s$ )
7:   tant que  $F$  n'est pas vide répéter
8:      $v \leftarrow$  DÉFILER( $F$ )
9:     si  $v = b$  alors                           ▷ Objectif atteint, early exit
10:    sortir de la boucle
11:    pour chaque voisin  $x$  de  $v$  dans  $G$  répéter
12:      si  $x \notin D$  alors                     ▷  $x$  n'a pas encore été découvert
13:        AJOUTER( $D, x$ )
14:        ENFILER( $F, x$ )
15:         $P[x] \leftarrow v$                          ▷ Garder la trace du parent de  $x$  sur le chemin
16:       $c \leftarrow 0$                             ▷ Longueur du chemin
17:       $u \leftarrow b$ 
18:      tant que  $u \neq s$  répéter
19:         $c \leftarrow c + 1$ 
20:        sommet  $\leftarrow P[u]$                    ▷ On remonte à l'origine du chemin
21:      renvoyer  $c$ 

```

E Plus courts chemins dans les graphes pondérés

Théorème 20 — Existence d'un plus court chemin. Dans un graphe pondéré **sans pondérations négatives**, il existe toujours un plus court chemin.

Démonstration. Un graphe pondéré possède un nombre fini de sommets et d'arêtes (cf. définition 80). Il existe donc un nombre fini de chaînes entre les sommets du graphe. Comme les valuations du graphe ne sont pas négatives, c'est-à-dire que $\forall e \in E, w(e) \geq 0$, l'ensemble des longueurs de ces chaînes est **une partie non vide de \mathbb{N} : elle possède donc un minimum**. Parmi ces chaînes, il en existe donc nécessairement une dont la longueur est la plus petite, le plus court chemin. ■

■ **Définition 133 — Plus court chemin entre deux sommets d'un graphe.** Le plus court chemin entre deux sommets a et b d'un graphe G est une chaîne \mathcal{C}_{ab} qui relie les deux sommets a et b et :

- qui comporte un minimum d'arêtes si G est un graphe non pondéré,
- dont le poids cumulé est le plus faible, c'est à dire $\min_{\mathcal{C}_{ab} \in G} \left(\sum_{e \in \mathcal{C}_{ab}} w(e) \right)$, dans le cas d'un graphe pondéré de fonction de valuation w .

■ **Définition 134 — Distance entre deux sommets.** La distance entre deux sommets d'un graphe est la longueur d'un plus court chemin entre ces deux sommets. Pour deux sommets a et b , on la note δ_{ab} . On a enfin :

$$\delta_{ab} = \min_{\mathcal{C}_{ab} \in G} \left(\sum_{e \in \mathcal{C}_{ab}} w(e) \right) \quad (17.11)$$

a Algorithme de Dijkstra

L'algorithme de Dijkstra⁴[6] s'applique à des **graphes pondérés** $G = (S, A, w)$ **dont la valuation est positive**, c'est à dire que $\forall e \in E, w(e) \geq 0$. C'est un algorithme **glouton optimal** qui trouve les plus courts chemins entre un sommet particulier $s_0 \in S$ et tous les autres sommets d'un graphe. Pour cela, l'algorithme classe les différents sommets par ordre croissant de leur distance minimale au sommet de départ⁵.

L'algorithme de Dijkstra est **un parcours en largeur qui utilise une file de priorités** : lorsqu'on insère un nouvel élément dans cette file, celui-ci est placé d'après son niveau de priorité, le plus prioritaire en premier. Dans notre cas, la priorité est la distance la plus faible : le sommet à la plus petite distance se situe donc en tête de la file et sera défiler en premier.

4. à prononcer "Dijkstra"

5. Ordre glouton

Algorithme 48 Algorithme de Dijkstra, plus courts chemins à partir d'un sommet donné

```

1: Fonction DIJKSTRA( $G = (S, A, w)$ ,  $s_0$ )       $\triangleright$  Trouver les plus courts chemins à partir de  $a \in S$ 
2:    $\Delta \leftarrow s_0$                        $\triangleright \Delta$  est l'ensemble des sommets dont on connaît la distance à  $s_0$ 
3:    $n \leftarrow |S|$                        $\triangleright$  L'ordre du graphe
4:    $\Pi \leftarrow$  tableau vide (taille  $n$ )     $\triangleright \Pi[s]$  est le parent de  $s$  dans le plus court chemin de  $s_0$  à  $s$ 
5:    $d \leftarrow$  tableau vide (taille  $n$ )           $\triangleright$  l'ensemble des distances au sommet  $s_0$ 
6:    $\forall s \in S, d[s] \leftarrow w(s_0, s)$          $\triangleright w(s_0, s) = +\infty$  si  $s$  n'est pas voisin de  $s_0$ , 0 si  $s = s_0$ 
7:   tant que  $\bar{\Delta}$  n'est pas vide répéter     $\triangleright \bar{\Delta}$  : sommets dont la distance n'est pas connue
8:     Choisir  $u$  dans  $\bar{\Delta}$  tel que  $d[u] = \min(d[v], v \in \bar{\Delta})$            $\triangleright$  Choix glouton!
9:      $\Delta = \Delta \cup \{u\}$                    $\triangleright$  On prend la plus courte distance à  $s_0$  dans  $\bar{\Delta}$ 
10:    pour chaque voisin  $x$  de  $u$  répéter
11:      si  $d[x] > d[u] + w(u, x)$  alors
12:         $d[x] \leftarrow d[u] + w(u, x)$            $\triangleright$  Mises à jour des distances des voisins
13:         $\Pi[x] \leftarrow u$                        $\triangleright$  Pour garder la tracer du chemin le plus court
14:    renvoyer  $d, \Pi$ 

```

(R) Il faut remarquer que les boucles imbriquées de cet algorithme peuvent être comprises comme deux étapes successives de la manière suivante :

1. On choisit un nouveau sommet u de G à chaque tour de boucle *tant que* qui est tel que $d[u]$ est la plus petite des valeurs accessibles dans $\bar{\Delta}$. C'est le **voisin d'un sommet de $\bar{\Delta}$ le plus proche de s_0** . Ce sommet u est alors inséré dans l'ensemble Δ : c'est la **phase de transfert** de u de $\bar{\Delta}$ à Δ .
2. Lors de la boucle *pour*, on met à jour les distances des voisins de u . C'est la **phase de mise à jour des distances** des voisins de u .

L'algorithme de Dijkstra procède de proche en proche, comme le parcours en largeur.

■ **Exemple 46 — Application de l'algorithme de Dijkstra.** On se propose d'appliquer l'algorithme 48 au graphe représenté sur la figure 17.3. Le tableau 17.1 représente les distances successivement trouvées à chaque tour de boucle *tant que* de l'algorithme. En rouge figurent les distances les plus courtes à a à chaque tour. On observe également que certaines distances sont mises à jour sans pour autant que le sommet soit sélectionné au tour suivant.

À la fin de l'algorithme, on note donc que les distances les plus courtes de a à b, c, d, e, f sont $[5, 1, 8, 3, 6]$. Le chemin le plus court de a à b est donc $a \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow b$. Le plus court de a à f est $a \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow f$. C'est la structure de données Π qui garde en mémoire le prédécesseur (parent) d'un sommet sur le chemin le plus court qui permettra de reconstituer les chemins.



FIGURE 17.3 – Graphe pondéré à valeurs positives pour l’application de l’algorithme de Dijkstra.

Δ	a	b	c	d	e	f	$\bar{\Delta}$
{}	0	7	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	{a, b, c, d, e, f}
{a}	.	7	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	{b, c, d, e, f}
{a, c}	.	6	.	$+\infty$	3	8	{b, d, e, f}
{a, c, e}	.	5	.	8	.	6	{b, d, f}
{a, c, e, b}	.	.	.	8	.	6	{d, f}
{a, c, e, b, f}	.	.	.	8	.	.	{d}
{a, c, e, b, f, d}	{}

TABLE 17.1 – Tableau d des distances au sommet a successivement trouvées au cours de l’algorithme de Dijkstra appliqué au graphe de la figure 17.3

Théorème 21 — L’algorithme de Dijkstra se termine et est correct.

Démonstration. **Correction partielle de l’algorithme :** à chaque étape de cet algorithme, on peut distinguer deux ensembles de sommets : l’ensemble Δ est constitué des éléments dont on connaît la distance la plus courte à s_0 et l’ensemble complémentaire $\bar{\Delta}$ qui contient les autres sommets.

On note :

- δ_u la distance la plus courte du sommet s_0 au sommet u .
- $d[u]$ la distance trouvée par l’algorithme entre le sommet s_0 le sommet u .

On souhaite démontrer la correction en montrant que $\mathcal{I} : \forall x \in \Delta, d[x] = \delta_x$ est un invariant de boucle.

1. Avant la boucle : Δ ne contient que le sommet s_0 . Or, $d[s_0] = 0$ et $\delta_{s_0} = 0$. Donc, l’invariant est vérifié à l’entrée de la boucle.

2. Pour une itération quelconque, on suppose que l'invariant \mathcal{I} est vérifié à l'entrée de la boucle. Un sommet u est sélectionné dans $\bar{\Delta}$. Pour ce sommet u , qui n'appartient pas encore à Δ , on souhaite montrer qu'à la fin de l'itération $d[u] = \delta_u$.

On procède par l'absurde en supposant que $d[u] \neq \delta_u$ et qu'il existe un plus court chemin P de s_0 à u tel que la longueur de ce chemin $\lambda(P)$ soit **strictement** plus petite que $d[u]$:

$$\lambda(P) < d[u]$$

Ce chemin P démarre d'un sommet de Δ et le quitte au bout d'un certain temps pour atteindre u . Soit x la première arête quittant Δ de ce chemin P : $x \in \Delta$ et $y \in \bar{\Delta}$. Soit P_x le chemin de s_0 à x . Ce chemin est un plus court chemin, par hypothèse d'induction et $d[x] = \delta_x$. On a donc :

$$\lambda(P_x) + w(x, y) = d[x] + w(x, y) \leq \lambda(P) < d[u] \quad (17.12)$$

Comme y est un sommet adjacent à x , la distance à y a été mise à jour par l'algorithme précédemment. On a donc :

$$d[y] \leq d[x] + w(x, y) \quad (17.13)$$

De plus, comme on a sélectionné u dans $\bar{\Delta}$ tel que la distance soit minimale au sommet de départ, et comme $y \in \bar{\Delta}$, on a également :

$$d[u] \leq d[y] \quad (17.14)$$

En combinant ces équations, on aboutit à la contradiction suivante : $d[u] < d[u]$. Un chemin tel que P n'existe donc pas et $d[u] = \delta_u$. L'invariant \mathcal{I} est donc vérifié à la fin de l'itération.

3. Comme l'invariant \mathcal{I} est vérifié à l'entrée de la boucle et qu'il n'est pas modifié par les instructions de la boucle, on en déduit qu'il est vrai à la fin de la boucle. L'algorithme de Dijkstra est donc correct.

Terminaison de l'algorithme : avant la boucle *tant que*, $\bar{\Delta}$ possède $n - 1$ éléments, si $n \in \mathbb{N}^*$ est l'ordre du graphe. À chaque tour de boucle *tant que*, l'ensemble $\bar{\Delta}$ décroît strictement d'un élément et atteint donc nécessairement zéro. Le cardinal de $\bar{\Delta}$ est donc un variant de boucle. L'algorithme se termine lorsque le cardinal de $\bar{\Delta}$ atteint zéro. ■

La complexité de l'algorithme de Dijkstra dépend de l'ordre n du graphe considéré et de sa taille m . La boucle *tant que* effectue exactement $n - 1$ tours. La boucle *pour* effectue à chaque fois un nombre de tour égal au nombre d'arêtes non découvertes qui partent du sommet u considéré et vont vers un sommet voisin de $\bar{\Delta}$. On ne découvre une arête qu'une seule fois, puisque le sommet u est transféré dans Δ au début de la boucle. Au final, on exécute donc la mise à jour des distances un nombre de fois égal à la taille m du graphe, c'est à dire son nombre d'arêtes. En notant la complexité du transfert c_t et la complexité de la mise à jour des distances c_d et en déroulant la boucle *tant que*, on peut écrire :

$$C(n, m) = (n - 1)c_t + mc_d \quad (17.15)$$

Les complexités c_d et c_t dépendent naturellement des structures de données utilisées pour implémenter l'algorithme.

Si on choisit une implémentation de d par un tableau, alors on a besoin de rechercher le minimum des distances pour effectuer le transfert : cela s'effectue au prix d'un tri du tableau au minimum en $c_t = O(n \log n)$. Un accès aux éléments du tableau pour la mise à jour est en $c_d = O(1)$. On a donc $C(n) = (n - 1)O(n \log n) + mO(1) = O(n^2 \log n)$.

Si d est implémentée par une file à priorités (un tas) comme le propose Johnson [14], alors on a $c_t = O(\log n)$ et $c_d = O(\log n)$. La complexité est alors en $C(n) = (n + m) \log n$. Cependant, pour que le tas soit une implémentation pertinente, il est nécessaire que $m = O(\frac{n^2}{\log n})$, c'est à dire que le graphe ne soit pas complet, voire un peu creux !

■ **Exemple 47 — Usage de l'algorithme de Dijkstra .** Le protocole de routage OSPF implémente l'algorithme de Dijkstra. C'est un protocole qui permet d'automatiser le routage sur les réseaux internes des opérateurs de télécommunications. Les routeurs sont les sommets du graphe et les liaisons réseaux les arêtes. La pondération associée à une liaison entre deux routeurs est calculée à partir des performances en termes de débit de la liaison. Plus une liaison possède un débit élevé, plus la distance diminue.

OSPF est capable de relier des centaines de routeurs entre eux, chaque routeur relayant les paquets IP de proche en proche en utilisant le plus court chemin de son point de vue^a. Le protocole garantit le routage des paquets par les plus courts chemins en temps réel. Chaque routeur calcule ses propres routes vers toutes les destinations, périodiquement. Si une liaison réseau s'effondre, les routeurs en sont informés et recalculent d'autres routes immédiatement. La puissance de calcul nécessaire pour exécuter l'algorithme sur un routeur, même dans le cas d'un réseau d'une centaine de routeur, est relativement faible car la plupart des réseaux de télécommunications sont des graphes relativement peu denses. Ce n'est pas rentable de créer des graphes de télécommunications complets, même si ce serait intéressant pour le consommateur et très robuste !

^a. Cela fonctionne grâce au principe d'optimalité de Bellman!

18

DES NOMBRES

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ distinguer les ensembles de nombres \mathbb{R} , \mathbb{Q} , \mathbb{D} , \mathbb{Z} et \mathbb{N}
- ☒ convertir un entier de la base 10 à la base 2 ou 16 et réciproquement
- ☒ expliquer pourquoi certains nombres ne peuvent pas être encodé en machine de manière exacte

A Des cailloux à compter

Au commencement, il y a les entiers naturels, ces entiers qu'on manipule tous les jours, sans s'en rendre compte : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Il a fallu longtemps pour arriver à les abstraire comme nous le faisons aujourd'hui. Pour nos ancêtres, les entiers n'étaient souvent que des petits cailloux¹ que l'on manipulait pour compter des moutons, des mesures de blé ou des personnes.

C'est la théorie des ensembles qui nous a permis d'abstraire ces nombres et de les manipuler comme des ensembles. Cette théorie est née à la fin du XIX^e siècle de l'audace de Cantor, l'audace d'avoir osé compter le nombre d'éléments d'un ensemble, même quand celui-ci était infini [19].

■ **Définition 135 — Ensemble.** Un ensemble est une collection de choses qu'on appelle éléments. L'ensemble vide est noté \emptyset .

B Cardinal d'un ensemble

■ **Définition 136 — Cardinal d'un ensemble fini.** Le cardinal d'un ensemble fini est son nombre d'éléments.

1. C'est le mot caillou en latin *calculus* qui a donné le mot calcul en français.

■ **Exemple 48** Soit l'ensemble $A = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit, \star\}$. On a $|A| = 5$.
On a évidemment également $|\emptyset| = 0$.

S'il est facile de dire que le cardinal d'un ensemble fini est le nombre de ses éléments, la définition de cardinal d'un ensemble infini est plus délicate. D'ailleurs, plutôt que de le définir directement, on le décrit plutôt [5] en se donnant les moyens de :

1. dire si deux ensembles E et F ont le même cardinal (cf. définition 137). Il existe alors une bijection² entre les deux : on dit qu'ils sont équipotents.
2. comparer les cardinaux de deux ensembles E et F . S'il existe une injection de E dans F , alors le cardinal de E est inférieur ou égal au cardinal de F .

On peut définir également une relation d'ordre sur les cardinaux et ainsi tous les comparer.

■ **Définition 137 — Cardinal d'un ensemble.** Si deux ensembles peuvent être mis en bijection, on dit qu'ils ont le même cardinal, qu'ils sont équipotents.

C Peut-on construire l'ensemble \mathbb{N} ?

Les entiers jouent un rôle essentiel dans le cadre de la théorie de l'information en général et davantage encore dans le domaine de la cryptographie. La construction de l'ensemble \mathbb{N} peut être établie rigoureusement et simplement dans le cadre de la théorie des ensembles en utilisant l'ensemble vide³ et trois axiomes : l'axiome de la paire, l'axiome de la réunion et l'axiome de l'infini. C'est la méthode de construction des ensembles dite de Von Neumann.

Pour construire l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} on peut :

1. choisir de noter 0 l'ensemble vide : $0 = \emptyset$,
2. définir une fonction s *successeur de* en posant pour tout ensemble a : $s(a) = a \cup \{a\}$. Le successeur est donc obtenu en ajoutant à l'ensemble l'ensemble de départ comme élément. Si $|(a)| = n$, alors on voit immédiatement que $|(s(a))| = n + 1$

Le successeur de 0 s'écrit $s(0) = 0 \cup \{0\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{0\}$, ensemble que l'on peut noter 1 et dont le cardinal vaut 1. On remarque aussi que $s(1) = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{\{0\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$, ensemble que l'on peut noter 2, dont le cardinal vaut bien 2. Ainsi de suite, $n = \{0, 1, \dots, n - 1\}$, récursivement. Selon cette approche, on peut donc définir chaque nombre entier comme un ensemble.

Afin de garantir l'existence de l'ensemble \mathbb{N} , on a besoin de l'axiome de l'infini qui garantit qu'il existe un ensemble contenant 0 fermé pour l'opération successeur, c'est-à-dire que tout successeur d'un élément de I appartient à I . Grâce à cet axiome, l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} est un ensemble infini d'ensembles dont les cardinaux valent les nombres entiers.

D Ensembles usuels

Dans ce document, on supposera donc que l'on sait construire les ensembles :

-
2. Il est intéressant de noter que Galiléé déjà avait eu l'idée de faire un appariement bijectif.
 3. dont le cardinal vaut 0.

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ les entiers naturels,
2. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ les entiers relatifs,
3. \mathbb{Q} l'ensemble des nombres rationnels,
4. \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.

On supposera également que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et que les opérations d'addition et de multiplication sont possibles sur tous ces ensembles. Enfin, on suppose pour l'instant que l'on peut comparer les nombres réels entre eux.

Ces ensembles sont représentés sur la figure 18.1. L'ensemble \mathbb{A} est l'ensemble des solutions des équations polynomiales à coefficients rationnels, c'est-à-dire l'ensemble des racines des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$, par exemple $\sqrt{2}$ qui est racine de $X^2 - 2$. L'ensemble \mathbb{D} est l'ensemble des nombres décimaux (cf. définition 140).

E Formalisation de la numération de position

■ **Définition 138 — Numération de position.** La numération de position est un principe de notation selon lequel la signification d'un chiffre dépend de sa position dans le nombre. Dans un tel système, chaque chiffre se voit affecter un «poids» dans un nombre, poids qui est un facteur multiplicatif et qui dépend de la position du chiffre dans ce nombre.

■ **Définition 139 — Base d'un système de numération de position.** Soit g un entier naturel fixé supérieur à 1. g est la base d'un système de numération de position, si, lors de l'écriture d'un nombre, une unité de chaque ordre vaut g unités de l'ordre précédent.

Même si le principe énoncé dans la définition 138 peut apparaître trivial, l'écriture des nombres n'a pas toujours suivi ce principe⁴. Aujourd'hui, nous utilisons la numération de position quelle que soit la base et les conventions prises sont la plupart du temps les suivantes :

- les positions des chiffres se comptent de droite à gauche,
- le chiffre le plus à droite représente les unités et possède l'indice 0,
- le nombre formé par 10 représente exactement la valeur de la base quelle que soit cette base, c'est-à-dire la base d'un système de numération se note toujours 10 dans cette base,
- si on ajoute un zéro à droite d'un nombre, cela revient à multiplier ce nombre par sa base.

Dans un nombre écrit avec le système de numération de position, un chiffre c en position p ne vaut pas la même chose qu'à la position $p - 1$. Si g est la base de ce système, le chiffre c en position p vaut g fois plus que s'il était placé en position $p - 1$.

La division euclidienne est une décomposition unique d'un nombre. C'est pourquoi, on montre dans la section suivante qu'un entier naturel a peut s'écrire d'une manière unique dans un système de numération de position en base g à l'aide d'un nombre minimal de chiffres n . Les coefficients $a_i \in \{0, \dots, g - 1\}$ sont des entiers naturels strictement inférieurs à g (cf. théorème 22). On a alors :

4. Le chiffres romains par exemple.



FIGURE 18.1 – Ensembles de nombres : naturels \mathbb{N} , relatifs \mathbb{Z} , dyadiques rationnels \mathbb{D} , décimaux \mathbb{D} , rationnels \mathbb{Q} , algébriques \mathbb{A} et réels \mathbb{R} .

$$a = a_{n-1}g^{n-1} + \dots + a_2g^2 + a_1g + a_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k g^k. \quad (18.1)$$

La numération de position revient à représenter le nombre en écrivant seulement les coefficients de ce polynôme, en omettant la plupart du temps la base et en notant tous les coefficients nuls ou non, de manière à ce que leur place soit définie sans ambiguïté. On désigne alors un nombre a , qui possède n chiffres, par un n -uplet en séparant ou non les éléments du n -uplet :

$$a = (a_{n-1}, \dots, a_1, a_0) = (a_{n-1} \dots a_1 a_0)_g = a_{n-1} \dots a_1 a_0 \quad (18.2)$$

■ **Exemple 49** $2021_{10} = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 1 \times 10^0 = 2021$

■ **Exemple 50** $2021_3 = 2 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 61_{10}$ et ne se prononce pas «deux mille vingt et un»...

■ **Exemple 51** $2021_{64} = 2 \times 64^3 + 0 \times 64^2 + 2 \times 64^1 + 1 \times 64^0 = 524417_{10}$

F Écriture d'un entier dans base quelconque

Théorème 22 — Décomposition dun entier en base g . Soit $g \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour tout $a \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et un n-uplet unique de chiffres $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \llbracket 0, g-1 \rrbracket^n$ tels que :

$$a = \sum_{k=0}^{n-1} a_k g^k. \quad (18.3)$$

De plus, si $a \in \mathbb{N}^*$, on peut calculer le nombre de chiffres nécessaires pour représenter un nombre dans la base g :

$$n \leq \left\lfloor \log_g a \right\rfloor + 1 \quad (18.4)$$

Démonstration. 1. Unicité : on suppose qu'un développement tel que 18.3 existe. Alors, on peut écrire, en regroupant les puissances non nulles de g :

$$a = gA_1 + a_0$$

avec

$$A_1 = a_{n-1}g^{n-2} + \dots + a_1$$

Ainsi, a_0 peut être vu comme le reste de la division euclidienne de a par g . Celle-ci étant unique, le coefficients a_0 et A_1 sont bien déterminés de manière unique. En considérant les termes $A_k = a_{n-k}g^{n-k-1} + \dots + a_k$, on trouve de même que a_k et A_{k+1} sont les restes et quotients de la division euclidienne de A_k par g . Par une récurrence immédiate, on montre ainsi que les a_k sont uniques.

2. Existence : on procède en construisant la solution, c'est-à-dire les coefficients entiers. On les choisit comme suit :

$$c_k = \left\lfloor \frac{a}{g^k} \right\rfloor - g \left\lfloor \frac{a}{g^{k+1}} \right\rfloor$$

D'après la définition de la partie entière,

$$\frac{a}{g^k} - 1 < \left\lfloor \frac{a}{g^k} \right\rfloor \leq \frac{a}{g^k}$$

et

$$-\frac{a}{g^{k+1}} \leq -\left\lfloor \frac{a}{g^{k+1}} \right\rfloor < -\frac{a}{g^{k+1}} + 1$$

En multipliant la dernière inéquation par g et en l'additionnant première, on obtient que :

$$-1 < c_k < g$$

Comme c_k est un entier, il appartient donc à l'ensemble $\{0, \dots, g-1\}$. Ces coefficients sont nuls à partir d'un certain rang. En effet, si $k \geq \lfloor \log_g a \rfloor + 1$, alors $k > \lfloor \log_g a \rfloor$ et

$$\frac{a}{g^k} < \frac{a}{g^{\lfloor \log_g a \rfloor}} = \frac{a}{a} = 1$$

Ceci signifie que $\left\lfloor \frac{a}{g^k} \right\rfloor = 0$ quelque soit $k > \lfloor \log_g a \rfloor$.

Enfin, en notant $m = 1 + \lfloor \log_g a \rfloor$ on obtient par télescopage :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} c_k g^k &= \left\lfloor \frac{a}{g^0} \right\rfloor - g \left\lfloor \frac{a}{g^1} \right\rfloor + \left(\left\lfloor \frac{a}{g^1} \right\rfloor - g \left\lfloor \frac{a}{g^2} \right\rfloor \right) g \\ &\quad + \left(\left\lfloor \frac{a}{g^2} \right\rfloor - g \left\lfloor \frac{a}{g^3} \right\rfloor \right) g^2 + \left(\left\lfloor \frac{a}{g^3} \right\rfloor - g \left\lfloor \frac{a}{g^4} \right\rfloor \right) g^3 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \left(\left\lfloor \frac{a}{g^{m-2}} \right\rfloor - g \left\lfloor \frac{a}{g^{m-1}} \right\rfloor \right) g^{m-2} + \left(\left\lfloor \frac{a}{g^{m-1}} \right\rfloor - g \left\lfloor \frac{a}{g^m} \right\rfloor \right) g^{m-1} \\ &= \left\lfloor \frac{a}{g^0} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a}{g^m} \right\rfloor g^m \\ &= a \end{aligned}$$

car $m > \lfloor \log_g a \rfloor$ et $\left\lfloor \frac{a}{g^m} \right\rfloor = 0$. Les coefficients c_k conviennent donc bien pour les a_k du théorème. ■

R On peut définir un système de numération unaire, c'est-à-dire avec les seuls symboles 0 et 1, mais ce n'est pas l'objet ici. C'est pourquoi on a restreint $g \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

Théorème 23 Si $a \in \mathbb{N}$ s'écrit $a_{n-1} \dots a_0$ dans la base g , alors $g^{n-1} \leq a < g^n$.

Démonstration. On le démontre par récurrence. Pour $n = 1$, $a = a_0 < g$ d'après le théorème 22. Supposons la proposition vraie pour les nombres à n chiffres et prenons un nombre c à $n+1$ chiffres. Alors, on peut écrire $c = c_n g^n + d$, c'est-à-dire le n ième chiffre multiplié par son poids dans la base plus un nombre $d = d_{n-1} \dots d_0$ à n chiffres en base g . On applique l'hypothèse de récurrence au nombre d . Avec l'inégalité de droite, on obtient :

$$c < c_n g^n + g^n = g^n(c_n + 1) \leq g^{n+1}$$

puisque $c_n \in \{0, \dots, g-1\}$.

Avec l'inégalité de gauche, on obtient :

$$c \geq c_n g^n + g^{n-1} \geq c_n g^n \geq g^n$$

Donc,

$$g^n \leq c < g^{n+1}$$

Donc la proposition est vraie pour tout entier de n chiffres. ■

■ **Exemple 52 — en base 2.** $1111_2 < 2^4$

■ **Exemple 53 — en base 10.** $999 < 10^3$

Théorème 24 — Moins on a de chiffres, plus on est petit . Soient deux entiers écrits dans une même base g et dont le nombre de chiffres est différent, alors le plus petit est celui dont l'écriture possède le moins de chiffres.

Démonstration. Soient a et b deux entiers écrits respectivement $a_{n-1}\dots a_0$ et $b_{m-1}\dots b_0$ dans la base g et que $a \neq b$. Supposons que $n < m$ alors $n \leq m-1$ et puisque $1 < g$, la proposition 23 implique que $a < g^n \leq g^{m-1} \leq b$. Donc $a < b$. ■

G Changement de base

Pour convertir en base 10 un nombre entier quelconque, il suffit d'appliquer la formule 18.1 comme dans l'exemple 50.

Pour faire l'opération inverse, c'est-à-dire convertir un nombre entier en base 10 vers une base quelconque, il faut remarquer que si $a = (a_{n-1}\dots a_1 a_0)_g$ alors le quotient de la division euclidienne de a par g est égal à $q = (a_{n-1}\dots a_1)_g$ et le reste à $r = a_0$ puisque $a = gq + r$ avec $0 \leq r \leq g - 1$.

■ **Exemple 54 — Écrire 61_{10} en base 3.**

$$61_{10} = 3 \times 20 + 1 \tag{18.5}$$

$$20 = 3 \times 6 + 2 \tag{18.6}$$

$$6 = 3 \times 2 + 0 \tag{18.7}$$

$$2 = 3 \times 0 + 2 \tag{18.8}$$

C'est pourquoi, $61_{10} = 2021_3 = 2 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 1 \times 3^0$

■ **Exemple 55 — Écrire 61_{10} en base 2.**

$$61_{10} = 32 + 16 + 8 + 4 + 1 \quad (18.9)$$

$$= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \quad (18.10)$$

$$= 111101_2 \quad (18.11)$$

$$= 0b111101 \quad (18.12)$$

■ **Exemple 56 — Écrire 61_{10} en base 16.**

$$61_{10} = 3 \times 16 + D \quad (18.13)$$

$$= 3 \times 16^1 + D \times 16^0 \quad (18.14)$$

$$= 3D_{16} \quad (18.15)$$

$$= 0x3D \quad (18.16)$$

■ **Exemple 57 — Écrire $3CF_{16}$ en base 10.**

$$3CF_{16} = 3 \times 16^2 + C \times 16^1 + F \quad (18.17)$$

$$= 3 \times 256 + C \times 16 + F \quad (18.18)$$

$$= 975_{10} \quad (18.19)$$

■ **Exemple 58 — Écrire 10110101_2 en base 10.**

$$10110101_2 = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 \quad (18.20)$$

$$= 128 + 32 + 16 + 4 + 1 \quad (18.21)$$

$$= 181_{10} \quad (18.22)$$

R En langage Python, on peut directement écrire du binaire en préfixant le nombre par **0b** (`0b00011`) ou de l'hexadécimal en préfixant par **0x** (`0xF4E`). En machine, un nombre est toujours codé en binaire, ces représentations nous sont donc destinées à nous, êtres humains. Les fonctions `bin`, `oct` et `hex` permettent de convertir directement des nombres en binaire, octal et hexadécimal. Inversement, l'instruction `int('2021', 3)` permet de convertir de la base 3 en décimal (on trouve 61).

R L'hexadécimal présente un intérêt fort car la conversion entre le binaire et l'hexadécimal est simple pour un être humain : chaque groupe de quatre bits représente un chiffre hexadécimal.

■ **Exemple 59 — Écrire 10110101_2 en base 16.**

$$10110101_2 = 1011_2 \times 16^1 + 0101_2 \times 16^0 \quad (18.23)$$

$$= B_{16} \times 16^1 + 5_{16} \times 16^0 \quad (18.24)$$

$$= B5_{16} \quad (18.25)$$

$$= 0xB5 \quad (18.26)$$

H Nombres décimaux et dyadiques

■ **Définition 140 — Nombre décimal.** Un nombre décimal est un rationnel qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \quad (18.27)$$

On note $\mathbb{D} = \{\frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des nombres décimaux.

■ **Exemple 60 — $8,4$ est un nombre décimal.** En effet, on peut l'écrire $\frac{84}{10}$.

■ **Définition 141 — Nombre dyadique.** Un nombre dyadique est un rationnel qui peut s'écrire sous la forme

$$\frac{a}{2^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \quad (18.28)$$

On note $\mathcal{D} = \{\frac{a}{2^n}, a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des nombres dyadiques.

■ **Exemple 61 — $6,25$ est un nombre dyadique.** En effet, on observe que $6,25_{10} = 110,01_2$. Son développement binaire est fini. On peut l'écrire $\frac{25}{2^2}$.

Théorème 25 — Caractérisation des dyadiques et des décimaux. Un nombre est décimal (resp. dyadique) si son développement en base 10 (resp. 2) est fini.

■ **Exemple 62 — $1/3$ n'est pas un nombre décimal.** En effet, son développement en base dix n'est pas fini, il se répète. On peut l'écrire $\frac{1}{3} = 0,333333\dots$. C'est un nombre rationnel.

■ **Exemple 63 — $8,4$ n'est pas un nombre dyadique.** En effet, on observe que $8,4_{10} = 1000,011001100110011_2\dots$. Son développement binaire n'est pas fini.

Théorème 26 — Les dyadiques sont strictement inclus dans les décimaux. On a $\mathcal{D} \subsetneq \mathbb{D}$. Ce qui signifie qu'il existe des décimaux qui ne sont pas des dyadiques.

Démonstration. On montre l'inclusion puis la stricte inclusion.

$\mathcal{D} \subset \mathbb{D}$ Soit un nombre dyadique $\frac{a}{2^n}, a \in \mathbb{Z}$. Alors en multipliant en haut et en bas par 5^n on

obtient

$$\frac{a}{2^n} = \frac{a \times 5^n}{10^n}$$

ce qui prouve que c'est un nombre décimal puisque $a \times 5^n \in \mathbb{Z}$.

$\mathcal{D} \neq \mathbb{D}$ le développement binaire de 0,1 est infini. Ce nombre est décimal mais pas dyadique, ce qui montre l'inclusion stricte.

■

■ **Exemple 64 — Décimaux mais pas dyadiques.** 0,1, 0,2, 0,3 ou 8,4 sont des nombres décimaux mais pas dyadiques.

(R) On a toujours $\mathcal{D} \subset \mathbb{Q}$ et $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ (cf. figure 18.1).

I De l'écriture des nombres rationnels

On peut montrer qu'un nombre rationnel est un nombre :

- à représentation décimale répétitive. Par exemple, $1/3 = 0,333\dots = 0.\overline{3}$ ou $1/7 = 0,142857142857\dots = 0,\overline{142857}$,
- ou à représentation décimale terminale, lorsque la répétition est 0. Par exemple, $1/2 = 0,5000\dots = 0,4999\dots = 0,5$.

Il existe, en base 10, deux représentations équivalentes décimales terminales : soit avec des 0 soit avec des 9 (cf. proposition 27). C'est pourquoi, il faut être attentif à l'interprétation des résultats lorsque ces différentes représentations interviennent.

Théorème 27 — $1 = 0,999\dots$

Démonstration. On utilise le résultat de la somme des termes d'une suite géométrique.

$$0,999\dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots \quad (18.29)$$

$$= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots \quad (18.30)$$

$$= 9 \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots \right) \quad (18.31)$$

$$= 9 \left(-1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k} \right) \quad (18.32)$$

$$= 9 \left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right) \quad (18.33)$$

$$= 9 \left(-1 + \frac{10}{9} \right) \quad (18.34)$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{9} = 1 \quad (18.35)$$



J Arrondis et erreurs

Il nous faut pouvoir estimer précisément les erreurs que l'on commet lorsqu'on choisit d'encoder en machine un nombre selon un format donné. Les définitions de l'arrondi, des erreurs absolues et relatives vont nous y aider.

- **Définition 142 — Arrondir un nombre en base 10.** La plupart du temps, on choisit d'arrondir un nombre réel a à 10^{-n} de la manière suivante :

$$\text{arrondi}(a, n) = \text{sgn}(a) \frac{\lfloor |a \times 10^n| + 0,5 \rfloor}{10^n} \quad (18.36)$$

- **Exemple 65 — Arrondir à 10^{-2} .** 5,456 sera arrondi à 10^{-2} par la formule 18.36 à 5,46.

- **Définition 143 — Erreur d'approximation absolue.** Soit v un nombre réel et \tilde{v} sa valeur approchée. L'erreur absolue est définie par :

$$\varepsilon_a = \tilde{v} - v \quad (18.37)$$

- **Définition 144 — Erreur d'approximation relative.** Soit v un nombre réel et \tilde{v} sa valeur approchée. L'erreur relative est définie par :

$$\varepsilon_r = \frac{\tilde{v} - v}{|v|} \quad (18.38)$$

19

REPRÉSENTATION DES NOMBRES ENTIERS

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ encoder un nombre entier non signé en binaire
- ☒ encoder un nombre entier signé en complément à deux

A Encoder un entier naturel

Les ordinateurs encodent les entiers en binaire sur des groupes de bits. Selon le processeur ou le circuit, les machines sont capables de proposer différentes tailles de regroupements de bits appelés *mots*. Les plus courants sont 8, 16, 32 et 64 bits.

■ **Définition 145 — Mot.** Un mot de taille n est un regroupement de n bits.

Sur p bits, on peut coder un nombre entier naturel $0 \leq a < 2^p$. C'est à dire que l'on peut utiliser la plage de nombres allant de 0 à $2^p - 1$ exactement.

(R) La base 2 n'utilise que les chiffres 0 et 1, ce qui correspond également à la capacité de stocker une information selon deux états physiquement différents de la matière, chose bien maîtrisée en électronique.

■ **Définition 146 — Entiers non signés.** Les électroniciens et informaticiens désignent par le terme entiers non signés les entiers naturels représentés en machine par un mot.

■ **Exemple 66 — Addition sur des entiers non signés.** Pour additionner deux nombres entiers non signés, on utilise des circuits nommés additionneurs qui additionnent les bits entre eux en signalant s'il existe une retenue^a. Par exemple, le résultat de $1+1$ s'écrit $1_2 + 1_2 = 10_2$. Pour trouver le bit des unités, une simple porte de type ou exclusif suffit : $1 \oplus 1 = 0$. Pour

Nombre de bits	Minimum	Maximum	Nombres de valeurs
8	0	255	256
16	0	65535	65536
32	0	4294967295	plus de 4 milliards
64	0	18446744073709551615	plus de 18 milliards de milliards

TABLE 19.1 – Plage de valeurs atteintes et nombre de valeurs encodées selon la taille des entiers non signés sur 8 , 16, 32 ou 64 bits

trouver la retenue, on utilise une porte AND : $1 \wedge 1 = 1$. Cette retenue peut être propagée dans un autre additionneur. Au final, le circuit électronique exécute l'opération que nous effectuerions à la main comme suit :

$$\begin{array}{r}
 \text{Bit de retenue } 10110100 \\
 \text{Opérande a } 01011010_2 \\
 \text{Opérande b } +01001011_2 \\
 \hline
 \text{Résultat } =10100101_2
 \end{array}$$

Ces opérations ont été intensivement optimisées : les processeurs actuels sont capables d'additionner plusieurs nombres entiers de 64 bits en un seul cycle d'horloge, notamment grâce aux instructions vectorielles.

a. en anglais, la retenue se dit Carry, c'est pourquoi on note souvent ce bit C.

■ **Définition 147 — Dépassement de capacité.** Lors d'un calcul sur un type représenté sur n bits, il est possible que le résultat d'une opération soit trop grand pour être codé sur n bits. Dans ce cas, on dit qu'il y a dépassement de capacité : on ne peut plus représenter le résultat à l'aide de ce type de données.

■ **Exemple 67 — Dépassement de capacité.** On effectue des calculs avec des entiers non signés codés sur 8 bits et on souhaite additionner 168 et 192 :

$$168 + 192 = 360 > 255 = 2^8 - 1$$

Donc, on aboutit à un dépassement de capacité car on ne peut pas représenter 360 sur 8 bits. Le processeur est sensé le signaler, mais les langages peuvent se comporter différemment selon le compilateur face à cette situation.

$$\begin{array}{r}
 \text{Bit de retenue } 00000000 \\
 \text{Opérande a } 10101000 \\
 \text{Opérande b } +11000000 \\
 \hline
 \text{Résultat } =01101000_2
 \end{array}$$

Le résultat présenté par le processeur sera donc 104 et le bit de retenu sera égal à 1, ce qui signifie un dépassement de capacité. Le résultat ne peut pas être utilisé pour le calcul standard.

R Si l'objectif est de faire des calculs modulo 256 sur des entiers non signés, alors il est possible, dans certains langages, d'utiliser le dépassement de capacité et les opérateurs arithmétiques dans cet objectif.

On observe en effet que, sur l'exemple précédent, le résultat vaut $01101000_2 = 104_{10}$ et que

$$168 + 192 = 360 = 104 \bmod 256$$

L'opération et le dépassement de capacité engendre un calcul modulo 2^8 : on a juste *effacé* les bits de poids fort du résultat, le bits qui permettent d'atteindre une valeur supérieure à 255.

B Encoder un entier relatif

a Approche naïve

Si l'on cherche à représenter un entier relatif et qu'on adopte une approche naïve, on peut imaginer utiliser un bit pour désigner le signe de ce nombre. Par exemple, 0 pour le signe positif et 1 pour le signe négatif. S'en suivrait alors la représentation binaire de la valeur absolue du nombre $|a|$. Cette méthode possède néanmoins de nombreux inconvénients :

1. le nombre 0 pourrait être représenté par deux symboles différents, positif ou négatif, ce qui n'est pas souhaitable. Il est toujours préférable d'avoir une unicité lors de la représentation d'un objet.
2. l'algorithme de l'addition ne s'appliquerait qu'à des entiers de même signe et on devrait donc utiliser une autre algorithme, et donc un autre circuit électronique, pour les entiers relatifs. Or il est intéressant de pouvoir appliquer toujours le même algorithme quelle que soit la donnée, c'est-à-dire d'utiliser les mêmes circuits électroniques.

On utilise donc un encodage particulier pour représenter les entiers négatifs, encodage dit **complément à deux**.

b Complément à deux (puissance n)

■ **Définition 148 — Complément à deux.** Pour représenter les entiers relatifs en mémoire sur n bits avec la convention du complément à deux à la puissance n , on encode :

- les nombres positifs de 0 à $2^{n-1} - 1$ par leur valeur en binaire,
- les nombres **négatifs** a par les nombres positifs $2^n + a$.

Le premier chiffre d'un nombre négatif en complément à deux est donc toujours 1. Cela limite la représentation des nombres à la plage $-2^{n-1} \leq a \leq 2^{n-1} - 1$. Par contre, on peut utiliser les mêmes circuits pour additionner ou multiplier des nombres positifs ou négatifs.

■ **Exemple 68 — Encodage sur 8 bits en complément à 2.** Sur 8 bits, on peut donc normalement inscrire les entiers relatifs allant de $-128 \rightarrow 1111111_2$ à $127 \rightarrow 0111111_2$.

Pour écrire le nombre -67_{10} , on calcule $2^8 - 67 = 189$ qui s'écrit 10111101_2 .

M Méthode 9 — Trouver rapidement le complément à 2^n d'un nombre négatif Pour cela il suffit de :

1. Prendre la valeur absolue du nombre en binaire,
2. Prendre le complément à un de ce nombre,
3. Ajouter un.

Par exemple :

$$|-121| = 121 = 01111001_2 \rightarrow (\text{complément à un}) \ 10000110_2 \rightarrow +1 \ 10000111_2 = (-121)_{10}$$

R Le complément à un d'un nombre binaire s'obtient en remplaçant les 0 par des 1 et les 1 par des 0.

L'encodage complément à deux permet de donner une représentation **unique** sur n bits à tout nombre entier relatif appartenant à $[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$. Ces encodages sont dits **signés** ou **signed** en anglais. Ils sont déclinés pour des nombres de bits allant de 8 à 64 sur la plupart des architectures (cf. tableau 19.2). Ils permettent également de réaliser des opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division facilement.

Nombre de bits	Intervalle accessible (signé)	Intervalle accessible (non signé)
8	$[-128, 127]$	$[0, 255]$
16	$[-32768, 32767]$	$[0, 65535]$
32	$[-2147483648, 2147483647]$	$[0, 4294967295]$
n	$[-2^{n-1}, 2^{n-1} - 1]$	$[0, 2^n - 1]$

TABLE 19.2 – Plage d'entiers accessibles en fonction du nombre de bits de la représentation signée.

c Opérations en complément à deux

■ **Exemple 69 — Addition en complément à deux.** Calculons $113 + (-91)$ comme le ferait un ordinateur. Ces deux nombres sont encodables sur 8 bits, car compris dans l'intervalle $\llbracket -2^7, 2^7 - 1 \rrbracket = \llbracket -128, 127 \rrbracket$.

$113 = (01110001)_2$ et $-91 = (10100101)_2$. On additionne de manière classique et on obtient : $113 + (-91) = (00010110)_2 = 22_{10}$

$4 = (00000100)_2$ et $-125 = (10000011)_2$. On additionne de manière classique en tronquant le résultat à 8 bits et on obtient : $4 + (-125) = (10000111)_2 = -121_{10}$

■ **Définition 149 — Dépassement de capacité.** Lorsque le résultat d'une opération sort de l'intervalle de représentation possible, c'est-à-dire $a \otimes b \notin \llbracket -2^{n-1}, 2^{n-1} - 1 \rrbracket$, alors le résultat n'est plus valide et on dit qu'on a dépassé les capacités de stockage du système.

■ **Exemple 70 — Addition et dépassement.** Si on utilise un encodage signé des entiers sur 8 bits pour effectuer $72 + 59$ alors il advient un dépassement de capacité. Le résultat obtenu sur 8 bits est $0b10000011$ qui représente -125 , ce qui n'est pas possible puisque les deux opérandes sont positives. Les processeurs savent détecter ces situations.

20

REPRÉSENTATION DES NOMBRES RÉELS

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ le concept de nombre flottant (signe, mantisse, exposant)
- ☒ expliquer la différence entre simple et double précision
- ☒ calculer une erreur relative et une erreur absolue
- ☒ expliquer le mécanisme d'absorption et ses conséquences

A Calculs à virgule fixe → HORS PROGRAMME

La représentation des nombres entiers décrite au chapitre précédent peut servir à encoder des nombres rationnels dont la précision est limitée, des décimaux ou des dyadiques par exemple. On appelle cette représentation à virgule fixe.

 **Vocabulary 22 — Fixed-Point Arithmetics** ⇔ En anglais, ce mode de calcul s'énonce Fixed-Point Arithmetics, étant donné l'utilisation du point à la place de la virgule par les anglo-saxons.

■ **Définition 150 — Représentation à virgule fixe** . Il s'agit de représenter un nombre par un entier divisé par un facteur d'échelle choisi, c'est-à-dire $\frac{a}{b^n}$, $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$.

On affecte un certain nombre de bits à la **partie entière** et à la **partie fractionnaire** de ce nombre.

La notation standard est la suivante : `fixed<m,n>` est le type d'un nombre à virgule fixe codé sur m bits pour la partie entière et sur n bits pour la partie fractionnaire. Le facteur d'échelle vaut donc 2^n .

La base de numération est deux et le facteur d'échelle est une puissance de deux. On peut donc représenter à virgule fixe un sous-ensemble des nombres dyadiques \mathcal{D} .

■ **Exemple 71 — 7,5 est dyadique.** En base dix, le nombre décimal 7,5 peut être représenté à virgule fixe par le nombre entier 75 et le facteur d'échelle 10, car $75 = \frac{75}{10}$.

Pour coder 7,5 en binaire, on observe que $7,5 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} = 4 + 2 + 1 + 0,5 = 7,5$. C'est un nombre dyadique. Pour trouver la partie fractionnaire, on procède comme pour la partie entière, par divisions successives : la partie entière du résultat contient le bit recherché. Dans notre cas : $\lfloor 0,5/2^{-1} \rfloor = \lfloor 0,5 \times 2 \rfloor = 1$. Tous les autres bits sont nuls.

On peut alors choisir de représenter 7,5 avec une type `fixed<3,1>` et l'écrire : 111,1₂. En machine, il peut être stocké sur 4 bits 1111₂ = 15₁₀ et le facteur d'échelle vaut 2. On vérifie que $15/2 = 7,5$.

■ **Exemple 72 — 3,14 est décimal mais pas dyadique....** π est un nombre transcendant. Mais la valeur approchée 3,14 en base dix est un nombre décimal. Il peut être représenté à virgule fixe par le nombre entier 314 et le facteur d'échelle 100, car $3,14 = \frac{314}{100}$.

3,14 n'est pas un nombre dyadique. Pour coder exactement la valeur 0,14 en binaire, il faudrait une infinité de bits^a : $0,14_{10} = 0,0\overline{0100011101011100001}_2$. Cependant, on remarque que $3,14 \approx 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-6} = 3 + 0,125 + 0,015625 = 3,140625$. Il s'agit là d'une valeur approchée.

On peut alors choisir de représenter 3,14 en valeur approchée avec un type `fixed<2,6>` et l'écrire : 11,001001₂. Le facteur d'échelle vaut 2⁶. Il sera donc codé en machine 11001001. On vérifie que $11001001_2 / 1000000_2 = 201/64 = 3,140625$

a. Les chiffres surmontés d'une barre horizontale constituent le motif répété à l'infini.

R Tout comme en base 10, certains nombres ne peuvent pas être codés en base 2 par un nombre fini de bits. C'est le cas par exemple de $0,1_{10} = 0,0\overline{00110011001100110011}_2$.

La représentation à virgule fixe des nombres permet d'utiliser les circuits dédiés à l'arithmétique des nombres entiers pour effectuer des calculs sur des nombres codés en virgule fixe¹. On n'a donc pas besoin de modifier les architectures des processeurs qui sont capables de calculer sur les entiers pour calculer en arithmétique à virgule fixe. C'est un avantage dans le cadre des systèmes embarqués.

Erreurs d'approximation

L'inconvénient de l'arithmétique à virgule fixe est principalement le lien entre la précision obtenue et l'ordre de grandeur des entiers représentés.

Théorème 28 — Majorant de l'erreur absolue. L'erreur absolue d'un nombre v et sa valeur approchée \tilde{v} encodé par un `fixed<m,n>` est majorée par une constante. On a :

$$|\varepsilon_a| = |\tilde{v} - v| < 2^{-n-1} \quad (20.1)$$

Démonstration. Soit a une nombre codé en `fixed<m,n>`. Le nombre b directement supérieur

1. On code souvent une valeur approchée du nombre décimal ou dyadique.

que l'on peut coder est obtenu en ajoutant 2^{-n} , c'est-à-dire en ajoutant 1 au bit de poids faible. $b - a = 2^{-n}$: cette différence est la plus petite que l'on puisse coder. Au pire, le nombre réel v à encoder se situe au milieu de l'intervalle $[a, b]$ et donc l'erreur commise sera la moitié de la largeur de cet intervalle : $\frac{1}{2}(b - a) = 2^{-n-1}$. Cet valeur est un majorant de l'erreur absolue. ■

■ **Exemple 73 — Erreur absolue, ordre de grandeur et virgule fixe.** Imaginons que l'on utilise des entiers codés à virgule fixe par un type `fixed<6,3>` non signé. La plage des valeurs que l'on peut atteindre va de 0 à $63,875_{10} = 111111,111_2$. On peut tout d'abord noter une limitation : on ne pourra coder des nombres supérieurs à 63,875.

De plus, entre chaque nombre ainsi représenté, l'incrément minimal est de $1/2^3 = 0,125$. L'erreur absolue est majorée par la constante 2^{-n-1} , dans notre cas 0,0625.

Théorème 29 — Majorant de l'erreur relative. L'erreur relative entre un nombre réel v et sa valeur approchée \tilde{v} encodée par un `fixed<m,n>` est majorée par un terme dépendant de v . On a :

$$|\epsilon_r| = \frac{|\tilde{v} - v|}{|v|} \leqslant \frac{2^{-n-1}}{|v|} \quad (20.2)$$

Démonstration. Ce résultatat est une conséquence de la proposition précédente. ■

■ **Exemple 74 — Erreur relative en `fixed<5,3>`.** L'erreur relative pour des nombres codés en `fixed<5,3>` non signé est beaucoup plus faible pour les valeurs élevées du nombre.

Sur l'intervalle $[1, 1, 125]$, tout nombre supérieur ou égal à 1,0625 va être arrondi à 1,125, tout nombre strictement inférieur à 1. L'erreur relative en arrondissant à 1 est majorée par celle commise pour le nombre 1,0625. Elle vaut $(1 - 1,0625)/1,0625 \approx -0,059$. Celle commise en arrondissant à 1,125 est majorée par celle commise pour 1,0625. Elle vaut $(1,125 - 1,0625)/1,0625 \approx 0,059$.

Ce résultatat est conforme à la proposition précédente et peut s'écrire :

$$\max |\epsilon_r(a \in [1, 1, 125])| < 0,059 \approx \frac{2^{-4}}{1,125}$$

En procédant de même avec l'intervalle $[63, 63, 125]$, on trouve que :

$$\max |\epsilon_r(a \in [63, 63, 125])| < 0,001 \approx \frac{2^{-4}}{63}$$

Cela signifie que l'erreur relative d'arrondi commise sur un nombre a compris entre $[63, 63, 125]$ peut être jusqu'à soixante trois fois plus faible que pour un nombre a appartenant à l'intervalle $[1, 1, 125]$.

Même si l'arithmétique à virgule fixe est très utilisée dans le calcul embarqué, elle nécessite un savoir faire particulier, car il faut gérer les dépassements correctement. En outre, **une erreur relative variable sur la plage de données manipulée par un algorithme peut être rédhibitoire**

pour certaines applications. Heureusement, les nombres flottants permettent de dépasser ces limites.

B Représentation à virgule flottante

a Cas général

La représentation d'un nombre à virgule flottante ne fixe pas un nombre exact de bits alloués à la partie fractionnaire. Au contraire, la position de la virgule dépend d'un exposant. IEEE 754 est la norme utilisée pour cette représentation par la plupart des systèmes.

■ **Définition 151 — Notation scientifique.** Exprimer un nombre a selon la notation scientifique c'est l'écrire sous la forme :

$$a = \pm m \times 10^e \quad (20.3)$$

où $m \in [1, 10[\subset \mathbb{D}$ est un nombre décimal nommé *mantisso* et $e \in \mathbb{Z}$ l'exposant.

■ **Définition 152 — Représentation normalisé IEEE 754 d'un nombre binaire.** Pour représenter un nombre binaire en utilisant norme IEEE 754, il est nécessaire d'écrire le nombre à représenter sous la forme : $\pm 1, M.2^e$.

- On appelle M la pseudo-mantisso. Le 1 au début du nombre n'est pas codé en machine, il est implicite. On l'appelle le bit caché.
- \pm , le signe de la mantisse est codée par s qui vaut 0 ou 1.
- e est l'exposant qui va être codé par un exposant biaisé E . Le biais dépend du format choisi, simple ou double précision : c est codé sur $n_E = 8$ bits ou $n_E = 11$ bits. En simple précision, il vaut $2^{n_E-1} - 1 = 2^7 - 1 = 127$. En double précision, $2^{n_E-1} - 1 = 2^{10} - 1 = 1023$.



FIGURE 20.1 – Schématisation du format IEEE 754.

■ **Définition 153 — Nombre IEEE 754 normalisé.** Un nombre IEEE 754 est normalisé lorsque le bit caché de la mantisse est 1 et lorsque l'exposant biaisé appartient à $\llbracket 1, 2^{n_E} - 2 \rrbracket$, où n_E est le nombre de bits qui code l'exposant biaisé E .

Si le biais vaut b , cela signifie qu'un nombre normalisé correspond à un exposant $e \in \llbracket 1 - b, 2^{n_E} - 2 - b \rrbracket$. En simple précision, $b = 127$ et cela se traduit par $e \in \llbracket -126, 127 \rrbracket$. En double précision, $b = 1023$ et cela se traduit par $e \in \llbracket -1022, 1023 \rrbracket$.

La norme IEEE 754 définit plusieurs formats qui garantissent des précisions différentes. Dans tous les cas, s est codé sur un seul bit.

Simple précision - 32 bits M est codée sur 23 bits, E sur 8 bits.

Double précision - 64 bits M est codée sur 52 bits, E sur 11 bits.

■ **Exemple 75 — Représenter $39,125_{10}$ par un nombre flottant IEEE 754.** Tout d'abord, il est nécessaire de convertir le nombre en base 2, comme expliqué dans l'exemple 72. On obtient $39,125_{10} = 100111,001_2$. Une fois ce résultat obtenu, il est nécessaire d'écrire ce nombre sous la forme $\pm 1, M \cdot 2^e$. Cela donne, en binaire, $1,00111001.2^5$.

Dans cette notation, l'exposant n'est pas biaisé. Pour le représenter en machine, il faut donc le translater et la translation dépend du format choisi, simple ou double précision. Au format simple précision, E est codé sur 8 bits et on translate de 127. Donc on a $E = 127 + 5 = 132_{10} = 10000100_2$.

Le nombre étant positif, le bit de signe s vaut 0.

La représentation IEEE 754 simple précision de $39,125_{10}$ est donc 01000010000111001000000000000000₂ comme le montre la figure 20.2.

0	10000100	001110010000000000000000
---	----------	--------------------------

FIGURE 20.2 – Représentation IEEE 754 simple précision de $39,125_{10}$.

(R) L'intérêt de placer l'exposant avant la mantisse et de le biaiser est de faciliter la comparaison de deux nombres flottants. Si les exposants sont différents, il suffit de comparer ces valeurs positives pour connaître le nombre le plus grand.

(R) Pourquoi biaiser l'exposant? → HORS PROGRAMME Il semble que ce soit pour faire en sorte que l'opération d'inversion du plus petit et du plus grand normalisé ne produise ni dépassement ni sous-dépassement (cf. définitions b).

En simple précision, le plus petit normalisé est 2^{-126} . L'inverse de ce nombre vaut 2^{126} : c'est un nombre normalisé. Le plus grand normalisé est $(2 - 2^{-23}) \cdot 2^{127}$. Son inverse arrondi vaut 2^{-128} : ce nombre est dénormalisé mais il ne s'agit pas d'un sous-dépassement.

Un autre biais ne permettrait pas d'obtenir ce résultat.

b Cas particuliers → HORS PROGRAMME

■ **Définition 154 — Nombre IEEE 754 dénormalisé.** Si n_E est le nombre de bits qui code l'exposant biaisé E , un nombre IEEE 754 est dénormalisé lorsque :

$E = 0$: Alors l'exposant e vaut **par convention** $-2^{n_E-1}+2$ et le nombre représenté $0, M \cdot 2^{-2^{n_E-1}+2}$ (noter le 0 au début).

$E = 2^{n_E} - 1$: la plus grande valeur possible de l'exposant biaisé. Le nombre représente alors des valeurs spéciales comme l'infini ou NaN.

R En simple précision, un nombre dénormalisé correspond à un exposant e non biaisé de -126 commençant par le bit 0 ou de 127 .

R La convention prise pour la valeur de e dans le cas où $E = 0$ permet de limiter la distance entre le plus grand des dénormalisés et le plus petit des normalisés. Dans de cas de la simple précision, $0.11111111111111111111111111111111.2^{-126}$ et $1.00000000000000000000000000000000.2^{-126}$.

Il existe trois cas de représentation dénormalisée IEEE 754 binaire : zéro, l'infini et NaN.

Représentation de zéro

Dans le cas où l'exposant biaisé et la mantisse sont tous les deux nuls, on considère alors que le nombre codé est zéro.

R Il y a donc deux zéros possibles dans la norme IEEE 754, un positif et un négatif, car le bit de signe peut valoir 1 ou 0. Cela est utile notamment pour évaluer les signes de résultats infinis ou dans le cas d'un dépassement de capacité négative (arithmetic underflow).

Représentation de l'infini

Dans le cas où l'exposant vaut $2^{n_E} - 1$ et où la mantisse est nulle, on considère que le nombre représente un infini. Selon le bit de signe, celui-ci peut être considéré comme infiniment négatif ou infiniment positif.

Ceci n'est pas un nombre (Not a Number, NaN)

Dans le cas où l'exposant vaut $2^{n_E} - 1$ et où la mantisse n'est pas nulle, on considère que le nombre représenté n'est pas un nombre.

NaN est une représentation nécessaire aux calculs car les résultats des opérations mathématiques ne sont pas toujours déterminés ou valides.

■ **Définition 155 — NaN silencieux - Quiet NaN.** Un NaN silencieux est émis lorsque le résultat de l'opération est indéterminé. Il est propagé dans le calcul.

■ **Définition 156 — NaN signalé - Signalling NaN.** Un NaN signalé est émis lorsque l'opération n'est pas valide. Il produit immédiatement une exception.

■ **Exemple 76 — QNaN et SNaN.** La division par zéro résulte en un SNaN. L'opération $\pm\infty / \pm\infty$ résulte en un QNaN.

Dépassemens

On peut distinguer plusieurs cas de dépassements liés à la norme IEEE 754. En simple précision,

1. les nombres négatifs inférieurs à $-(2 - 2^{-23}) \cdot 2^{127}$ constituent un dépassement par valeurs négatives,
2. les nombres négatifs supérieurs à -2^{-149} constituent un sous-dépassement par valeurs négatives,
3. les nombres positifs inférieurs à 2^{-149} constituent un sous-dépassement par valeurs positives,
4. les nombres positifs supérieurs à $(2 - 2^{-23}) \cdot 2^{127}$ constituent un dépassement par valeurs positives.

 **Vocabulary 23 — Overflow, underflow** ~~~ En anglais on désigne par *overflow* les dépassements et *underflow* les sous-dépassements. On peut ainsi désigner un sous-dépassement par valeurs négatives par *negative underflow*.

R Les sous-dépassements n'engendrent qu'une perte de précision dont l'ordre de grandeur est très faible. Les dépassements sont plus problématiques car ils sont la manifestation d'une incapacité à représenter un nombre en flottant.

Valeurs accessibles aux flottants

Le tableau 20.1 précise les valeurs extrêmes accessibles à la norme IEEE 754. Le tableau 20.2 donne un aperçu de la plage de valeurs accessibles via des flottants en simple et double précision.

Précision	Normalisé	Dénormalisé
simple	de $\pm 2^{-126}$ à $(2 - 2^{-23}) \cdot 2^{127}$	de $\pm 2^{-149}$ à $(1 - 2^{-23}) \cdot 2^{-126}$
double	de $\pm 2^{-1022}$ à $(2 - 2^{-52}) \cdot 2^{1023}$	de $\pm 2^{-1074}$ à $(1 - 2^{-52}) \cdot 2^{-1022}$

TABLE 20.1 – Plus petit (dé)normalisé et plus grand (dé)normalisé.

Précision	Binaire	Décimal
simple	$[-(2 - 2^{-23}) \cdot 2^{127}, (2 - 2^{-23}) \cdot 2^{127}]$	$\sim [-10^{38,53}, 10^{38,53}]$
double	$[-(2 - 2^{-52}) \cdot 2^{1023}, (2 - 2^{-52}) \cdot 2^{1023}]$	$\sim [-10^{308,25}, 10^{308,25}]$

TABLE 20.2 – Plage de valeurs accessibles aux flottants.

Opérations spéciales

La norme IEEE 754 définit le résultat des opérations spéciales qui comportent des valeurs dénormalisées. Elles sont décrites dans le tableau 20.3 et servent à faire en sorte que les résultats classiques sur les limites des fonctions réelles soient respectés par les flottants.

Opération	Résultat
$n / \pm\infty$	0
$n \times \pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm nz / 0, nz \neq 0$	$\pm\infty$
$\pm 0 / \pm 0$	NaN
$\infty + \infty$	∞
$\infty - \infty$	NaN
$\pm\infty \times \pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\infty / \pm\infty$	NaN
$\pm\infty \times 0$	NaN
NaN == NaN	Faux

TABLE 20.3 – Opérations spéciales sur les flottants.

Synthèse de l'écriture des flottants

Le tableau 20.4 résume l'écriture normée IEEE754 des flottants et associe à chaque représentation une valeur ou un sens particulier. La figure 20.3 montre les nombres flottants IEEE754 codables sur l'axe des réels.

Signe	Exposant	Mantisse	Sens / valeur
0	0	0	0
0	0	$M \neq 0$	Nombre positif dénormalisé
0	$0 < E < 2^{n_E} - 1$	M	Nombre positif normalisé
0	$2^{n_E} - 1$	0	$+\infty$
0	$2^{n_E} - 1$	$0 < M < 2^{n_M-1} - 1$	NaN
0	$2^{n_E} - 1$	$M \geq 2^{n_M-1}$	QNaN
1	0	0	-0
1	0	$M \neq 0$	Nombre négatif dénormalisé
1	$0 < E < 2^{n_E} - 1$	M	Nombre négatif normalisé
1	$2^{n_E} - 1$	0	$-\infty$

TABLE 20.4 – Synthèse de l'écriture des flottants.



FIGURE 20.3 – Illustration de la répartition des nombres flottants IEEE754 en simple précision sur la droite des réels.

c Erreur d'approximation

Erreur absolue

Si on cherche à majorer l'erreur absolue que l'on commet lors de la représentation binaire IEEE 754, il suffit de considérer un incrément de 1 sur le bit de poids faible par rapport à la valeur considérée : celui-ci dépend à la fois du nombre de bits avec lequel est codée la mantisse et de l'exposant.

On trouve alors :

$$\epsilon_a < 2^{-n_M} \times 2^e \quad (20.4)$$

si e est l'exposant non biaisé et n_M le nombre de bits qui code la pseudo-mantisse.

Pour l'exemple 75, l'erreur absolue est donc majorée : $\epsilon_a < 2^{-23} \times 2^5 = 2^{-18} \simeq 3,18 \cdot 10^{-6}$.

Dans le cas du nombre :

$$500000,875_{10} = 1111010000100100000,111_2 = 1,111010000100100000111_2 \times 2^{18}$$

On a : $\epsilon_a < 2^{-23} \times 2^{18} = 2^{-5} \simeq 3,125 \cdot 10^{-2}$.

L'erreur absolue varie donc selon la plage de valeurs considérée.

Erreur relative

L'intérêt de la représentation à virgule flottante est qu'elle garantit une erreur relative constante quelque soit l'ordre de grandeur des nombres représenté. Avec la norme IEEE 754, on peut représenter 2^{n_M} nombres entre chaque puissance de 2.

L'erreur relative entre chaque nombre flottant en simple précision est donc majorée par l'inverse de ce nombre. On a :

$$\epsilon_r < 2^{-23} \quad (20.5)$$

et ce, quelque soit l'exposant.

R $\epsilon_r < 2^{-23} \simeq \frac{10^{-6}}{8}$. Cela nous garantit 6 chiffres significatifs en base 10.

En double précision, $\epsilon_r < 2^{-52} \simeq \frac{10^{-15}}{4,5}$. IEEE754 nous garantit donc 15 chiffres significatifs en base 10.

Modes d'arrondi --> HORS PROGRAMME

La norme IEEE 754 définit plusieurs modes pour arrondir les résultats des calculs si ceux-ci ne sont pas exacts. Le résultat correct se trouve la plupart du temps entre deux valeurs représentable par la norme. Il faut en choisir un. On utilise alors une des méthodes suivantes :

arrondir au plus proche on choisit de prendre le résultat représentable le plus proche. Si le résultat correct est exactement au milieu de l'intervalle des représentables, on choisit le résultat dont la mantisse se termine par 0 et on parle d'arrondi pair. C'est le mode par défaut. On note qu'il est différent de celui adopté classiquement pour le calcul sur les décimaux.

arrondir au dessus on choisit le résultat représentable le plus grand, éventuellement infini ou zéro.

arrondir au dessous on choisit le résultat représentable le plus petit, éventuellement infini ou zéro.

arrondir en troncant on choisit le résultat représentable le plus proche de zéro dans tous les cas.

Le mode par défaut est arrondir au plus proche.

C Calcul avec les flottants --> HORS PROGRAMME

■ **Exemple 77 — Addition en simple précision.** Considérons l'opération $(0,1 + 0,2) - 0,3$ en simple précision.

Tout d'abord, il faut remarquer que ni 0,1 ni 0,2 ni 0,3 ne sont des nombres dyadiques. Cela signifie que leur représentation en machine ne peut être qu'une approximation. Le résultat d'une opération avec ces opérandes est donc toujours une valeur approchée...

La valeur $0,1_{10}$ en binaire fait apparaître le premier 1 à la quatrième décimale. Donc l'exposant sera -4 . De plus, $0,1_{10}$ fait l'objet d'un arrondi au plus prêt en binaire. En l'occurrence, c'est la valeur supérieure qui est plus proche car le milieu de l'intervalle $[0,1]$ est 0,1.

Pour aboutir à ce résultat, on utilise les trois bits GRS après le dernier bit de poids faible. **On nomme ces trois bits GRS pour Guard, Round, Sticky.** Dans ce cas, ils valent 110 et $110 > 100$. Par conséquent, en mode par défaut, on arrondit à la valeur supérieure et on

obtient :

$$1.10011001100110011001100\dots \quad GRS \quad (20.6)$$

$$1.10011001100110011001100.2^{-4} \quad 110 \quad (20.7)$$

$$0,1_{10} \rightarrow 1.10011001100110011001101.2^{-4} \quad (20.8)$$

Il est de même pour la valeur $0,2_{10}$, mais avec un exposant valant -3 :

$$0,2_{10} \rightarrow 1.10011001100110011001101.2^{-3} \quad (20.9)$$

L'addition de $0,1 + 0,2$ nécessite tout d'abord la mise à l'échelle de $0,1$ par rapport à $0,2$: pour les additionner, on les représente avec le même exposant en l'occurrence -3 . On ne conserve que les trois GRS des bits de $0,1$ qui sont rejetés à droite du nouveau bit de poids faible.

$$1.10011001100110011001101.2^{-4} \quad GRS \quad (20.10)$$

$$\rightarrow 0.11001100110011001100110.2^{-3} \quad 100 \quad (20.11)$$

$$(20.12)$$

On peut alors procéder à l'addition :

$$GRS \quad (20.13)$$

$$0.11001100110011001100110.2^{-3} \quad 100 \quad (20.14)$$

$$+ 1.10011001100110011001101.2^{-3} \quad 000 \quad (20.15)$$

$$----- \quad (20.16)$$

$$10.01100110011001100110011.2^{-3} \quad 100 \quad (20.17)$$

$$\rightarrow 1.00110011001100110011001.2^{-2} \quad 110 \quad (20.18)$$

$$\rightarrow 1.00110011001100110011010.2^{-2} \quad (20.19)$$

Le passage de 20.17 à 20.18 se justifie par le maintien de la norme : on choisit l'exposant de la notation IEEE754 d'après le premier bit à 1. Les bits décalés vers la droite se retrouvent positionnés sur les bits GRS.

On effectue ensuite l'opération d'arrondi 20.19 en tenant compte des bits GRS. Le résultat obtenu se termine par $01|110$ (en notant $b_1 b_0 | GRS$). On essaie donc de savoir comment se positionne cette valeur par rapport au milieu de l'intervalle de représentation possible qui est $[01, 10]$. Ce milieu vaut 1.100 . Le résultat obtenu 1.110 étant supérieur à cette valeur, on arrondit au plus près au nombre strictement supérieur 10. D'où le résultat.

La valeur 0.3_{10} est codée par :

$$0,3_{10} \mapsto 1.00110011001100110011010.2^{-2}. \quad (20.20)$$

En simple précision, on a donc bien $(0,1 + 0,2) - 0,3 = 0$.

Cependant, les limites de précision des flottants évoquées précédemment engendrent des calculs parfois déroutants et entachés d'erreur. L'associativité de l'addition peut ne plus être vérifiée, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition non plus.

■ **Exemple 78 — Erreur d'arrondis en double précision.** Considérons de nouveau l'opération $(0,1 + 0,2) - 0,3$ mais cette fois-ci **en double précision**. Le résultat de cette opération devrait être 0, mais il n'en est rien et on trouve $5,551115123125783 \cdot 10^{-17}$.

L'erreur commise provient de la représentation de $0,3_{10}$ en double précision :

Pour $0,3_{10}$, les trois derniers bits valent 011 et les bits GRS 001. L'intervalle considéré pour l'arrondi est $[11, 100]$, son milieu vaut 11.100 et $11.001 < 11.100$. La valeur choisie pour les trois derniers bits est donc la valeur inférieure de l'intervalle, soit 011 : l'arrondi ne modifie pas la valeur codée en machine. Cette représentation se note 0,2999999999999999 sur 17 décimales.

Par ailleurs, l'addition de $0,1 + 0,2$ aboutit à $0,30000000000000004$ en représentant 17 décimales. La soustraction de la représentation de $0,3$ en double précision aboutit donc à une erreur d'arrondi. **En double précision**, on a $(0,1 + 0,2) - 0,3 = 5,551115123125783 \cdot 10^{-17}$. La différence entre les deux valeurs porte sur les trois derniers bits.

Bien entendu, les chiffres significatifs du résultat, c'est-à-dire les 15 premiers, sont corrects. Il faut donc juste être vigilant sur l'interprétation des résultats.

D Conséquence des erreurs et des arrondis

■ **Définition 157 — Mécanisme d'absorption.** Le mécanisme d'absorption apparaît lorsqu'on additionne deux valeurs dont l'écart relatif est très important : cela engendre l'absorption de la plus petite valeur par la plus grande.

■ **Exemple 79 — Perte de l'associativité de l'addition.** Considérons l'addition suivante en simple précision :

$$2^{24} \pm 1 \pm 1 \quad (20.22)$$

Supposons que le calcul soit mené de la gauche vers la droite, c'est-à-dire $(2^{24} + 1) + 1$. Comme l'écart entre deux nombres codables en IEEE 754 est de 2 lorsque l'exposant non biaisé e vaut 24, on obtient que $(2^{24} + 1) + 1 = 2^{24} + 1 = 2^{24}$. Or, si on commence le calcul par la droite, $2^{24} + (1 + 1) = 2^{24} + 2$, car le nombre 2 est représentable avec l'exposant 24. L'addition n'apparaît donc plus associative.

■ **Exemple 80 — Multiplication non distributive par rapport à l'addition.** Considérons l'opération $100 \times (0,1 + 0,2)$ en simple précision.

Si le calcul est effectué en commençant par l'addition, le résultat est faux et vaut 30,000000000000004. Par contre, si on développe le calcul et qu'on l'effectue après développement, on trouve exactement $100 \times 0,1 + 100 \times 0,2 = 30,0$.

Lorsqu'on utilise les flottants, il faut donc éviter d'additionner des calculs sur des nombres dont l'écart relatif est très important. De même, on évitera de soustraire deux valeurs très proches au risque de perdre énormément de chiffres significatifs dans le résultat.

De plus, il faut se poser la question de la nécessité d'utiliser une simple ou une double précision en fonction de l'application.

R L'impact du changement de précision des flottants sur la complexité mémoire est conséquent car il double systématiquement l'espace mémoire nécessaire au stockage des données. Par ailleurs, il a également un impact important sur la complexité temporelle, car les unités de calculs sur les flottants (FPU) sont spécifiques, plus complexes et moins nombreuses que les unités arithmétiques sur les entiers (ALU). La puissance de calcul nécessaire pour changer de précision n'est donc pas à négliger non plus et dépend fortement de l'architecture du processeur.

R Certains processeurs ne disposent même pas d'unités arithmétiques pour les flottants. Dans ce cas, il faut soit utiliser l'arithmétique fixée soit émuler le calcul des flottants. La première solution, l'arithmétique fixée, est la plus souhaitable pour minimiser l'impact sur la complexité temporelle. Dans le domaine des systèmes embarqués elle est souvent à privilégier.

E Bilan

M **Méthode 10 — Bien manipuler les flottants** Pour bien calculer avec les flottants, il est préférable de :

1. ne **jamas** tester l'égalité exacte ou la différence entre deux `float`, préférer `< ou >`
2. additionner les petits avant les grands,
3. éviter de soustraire deux données quasi-égales (perte de précision),
4. se poser la question de la précision nécessaire au calcul,
5. calculer sur les entiers si c'est possible plutôt que sur les `float`,
6. s'il est possible de renoncer à un calcul rapide, les bibliothèques `decimal` et `mpmath` permettent de calculer avec une précision arbitraire.

R Pour connaître les limites de sa machine en Python, consulter la documentation ici :

```
import math
import sys

m = sys.float_info.max
# nombre maximum positif fini flottant encodable
eps = sys.float_info.epsilon
# différence entre 1.0 et la plus petite valeur plus grande que 1.0 et encodable en
# flottant
print(m)
# 1.7976931348623157e+308
print(eps)
# 2.220446049250313e-16
print(m == m-(m*(eps/10)))    # True
print(m == m-(m*eps))         # False
```

R Attention : `10e23` est un flottant qui vaut 10 que multiplie 10^{23} , soit 10^{24} . Alors que `10**23` représente un entier : l'entier 10 à la puissance 23. D'ailleurs l'assertion `10e23 == 10**23` renvoie faux;-)

21

BONNES PRATIQUES

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ produire un code intelligible
- ☒ structurer un programme
- ☒ tester et se laisser guider par les tests
- ☒ utiliser la programmation défensive

La notion de bonnes pratiques en informatique peut paraître naïve et inutile à un débutant : le code marche ou ne marche pas selon une spécification donnée. En fait, la réalité est plus nuancée. Deux méthodes (parfois complémentaires) sont actuellement utilisées pour garantir le bon fonctionnement d'un logiciel :

1. le test exhaustif du code,
2. la vérification formelle (c'est-à-dire la preuve mathématique de la correction) du code.

D'un côté, l'utilisation des langages courants de développement (C, C++, Java, Javascript, Python, Scala...) rend les erreurs inévitables. D'un autre côté, les méthodes formelles ont à la fois des limites et induisent un coût et une lourdeur non négligeable sur le développement.

Les bonnes pratiques sont donc celles qui permettent à la fois de réduire les erreurs logicielles et leurs conséquences tout en limitant l'impact sur le coût de développement. À l'heure des cyberguerres, ces pratiques ont un impact conséquent et sont vitales au développement dans le domaine informatique.

A Défendre le code : pourquoi et comment ?

Il est possible d'adopter un style de programmation **défensif**, style qui renforce la fiabilité, la sécurité et rend les erreurs plus faciles à comprendre.

a Différents types d'erreurs

Différentes erreurs peuvent être distinguées :

- des erreurs dans la gestion des structures, des types et des conteneurs : types des variables, bornes d'un tableau ou d'une liste, référence mémoire erronée, boucle qui ne termine jamais... Ces erreurs sont de la responsabilité unique du développeur et il peut donc les corriger s'il les perçoit!
- des erreurs qui dépendent de l'environnement : lecture/écriture d'un fichier, d'un socket réseau, d'un capteur, d'un clavier, d'un écran, d'un périphérique quelconque... Ces erreurs ne sont pas inhérentes au programme : elles sont parfois indétectables car dépendantes de l'environnement. Cependant, il faut absolument les envisager afin qu'elles ne soient pas une cause d'échec du programme. Les exceptions ou les promesses (promises Javascript ou future Java et Rust) sont des bonnes solutions pour gérer ce type d'erreurs.
- des erreurs (souvent fatales) en lien avec les processus de la machine elle-même : dépassement de la taille de la pile d'exécution, dépassement de capacité dans le cadre de la représentation des nombres, limites du langage, du compilateur ou de l'interpréteur, du processeur ou du système d'exploitation. Ces erreurs remettent souvent en cause le programme et ses fondements. Si modifier le programme n'est pas possible, elles nécessitent alors un ajustement de la plateforme.

b Des exceptions plutôt que des codes retours

■ **Définition 158 — Exception.** Une exception est une interruption de l'exécution d'un programme à cause d'une erreur dont la possibilité a été **prévue**.

R À l'origine de l'anticipation de cette erreur, on peut trouver soit le programmeur soit le langage utilisé. Certains langages sont plus prévoyants que d'autres !

Lorsqu'une exception est levée par une partie du code, une routine d'interruption est exécutée et le programme est interrompu : celui-ci s'arrête là et n'achève pas son exécution. Cependant, si le programmeur anticipe la levée de cette exception, il peut la capturer, la gérer et continuer l'exécution de son programme (cf. exemples 81 et 82).

■ **Exemple 81 — Division par zéro.** Imaginons qu'un processus d'entrée/sortie^a a initialisé une variable **b** à zéro. Imaginons que, dans la suite du code, le calcul de **a/b** soit nécessaire. Alors, on peut anticiper le problème en utilisant une exception comme suit :

```
try:
    c = a/b
except ZeroDivisionError as e:
    print("Error: Cannot divide by zero")
    # faire quelque chose d'autre ou rien si ce n'est pas critique
    # ici le programme continue même lorsque l'exception a été levée
```

a. un capteur par exemple

■ **Exemple 82 — Lecture d'un fichier qui n'existe pas.** L'exemple le plus classique d'exception est celui engendré par la lecture d'un fichier qui n'existe pas lors de l'exécution du programme. Le développeur ne peut pas savoir si le fichier existe, par contre il peut anticiper le cas où celui-ci n'existe pas, comme c'est le cas ci-dessous, en créant le fichier par exemple.

```
import logging
try:
    with open("file.log") as file:
        read_data = file.read()
except FileNotFoundError as e:
    print(e)
logging.basicConfig(filename="file.log", level=logging.INFO)
# le programme peut continuer normalement
```

R Pour signifier à l'utilisateur d'une fonction que l'exécution de celle-ci s'est déroulée sans erreur, les programmeurs ont longtemps utilisé^a la technique du code retour. Par convention, si la fonction renvoyait :

- 0, alors elle s'était déroulée sans erreur,
- un nombre négatif, alors elle s'était déroulée avec erreur et le nombre négatif indique le type de l'erreur.

Cependant, cette pratique nécessitait de tester systématiquement le code renvoyé par la fonction. On préfère aujourd'hui utiliser des exceptions pour signifier un dysfonctionnement de la fonction. Les paramètres renvoyés sont les sorties et l'exception peut être standardisée ou personnalisée.

a. et utilise toujours en langage C

c Des assertions qui lèvent des exceptions

■ **Définition 159 — assertion.** Une assertion est le résultat une expression booléenne évaluée, c'est-à-dire un test évalué à vrai ou faux. Si l'évaluation échoue, une exception est levée signifiant ainsi l'échec du test. Sinon le programme continue.

En Python, c'est le mot-clé `assert` qui permet d'écrire des assertions comme indiqué ci-dessous.

```
number = 42
assert number > 0
assert number > 0, f"expect number greater than 0, but got: {number}"
assert number > 0 and isinstance(number, int), f"natural number expected, got: {number}"
```

B Spécifier

Bien programmer commence par bien spécifier ce que l'on attend du logiciel.

■ **Définition 160 — Spécification.** Une spécification est un ensemble explicite d'exigences qu'un produit à concevoir doit satisfaire.

Les exigences de spécification servent de base à la conception d'un produit et à la validation du produit réalisé.

La spécification fonctionnelle permet de définir les différentes fonctions que le logiciel réalise. Elle se décline selon trois axes :

1. décomposition : décomposer la fonction en sous-fonctions,
2. données : quelle est la nature des données d'entrée et de sortie (unités, types, ordre de grandeur)
3. comportement : comment se comporte la fonction selon le scenario (que se passe-t-il par exemple lorsque l'utilisateur fournit des données d'un mauvais type ou en dehors d'un intervalle donné?)

À cette étape, on considère le logiciel comme une boîte noire et on s'intéresse aux entrées et aux sorties des fonctions. C'est pourquoi les annotations de types sont très utiles en pratique : la signature spécifie une fonction, sans préjuger de l'implémentation.

■ **Exemple 83 — Annotation de type et spécification fonctionnelle.** En Python, comme dans d'autres langages, la signature d'une fonction peut être très précise grâce à l'annotation des types. Par exemple, une fonction de signature `sort(L : list) -> None` peut être considérée comme une boîte noire dont l'entrée est constituée d'une liste que l'on peut modifier et qui ne renvoie rien.

Les préconditions et les postconditions sur les données se traduisent généralement par des assertions qui portent sur les paramètres.

■ **Exemple 84 — Précondition et postcondition.** Lorsqu'une fonction a des exigences précises sur des données d'entrée ou de sortie, on peut utiliser des assertions pour vérifier en amont et en aval que ce qui est donné en entrée et ce qui sort de la fonction est correct.

```
def temp_convert(tk: float) -> float:
    # précondition : la température en Kelvin est toujours positive
    assert tk >= 0, "Tempature in Kelvin should be positive."
    return tk - 273.15
```

La spécification peut également préciser qu'un certain type d'exception est levée si la température d'entrée est négative. L'utilisation d'exceptions dédiées est possible dans de nombreux langages. Elle améliore le développement en facilitant l'analyse des erreurs.

```
class InvalidKelvinTemperatureException(Exception):
    """Exception raised for errors in the input temperature.
```

```

Attributes:
    temperature -- input temperature which caused the error
    message -- explanation of the error
"""

def __init__(self, temp, message="Temperature should be positive if in Kelvin"):
    self.temp = temp
    self.message = message
    super().__init__(self.message)

def temp_convert(tk: float) -> float:
    if tk < 0:
        raise InvalidKelvinTemperatureException(tk)
    return tk - 273.15

# TESTS
try:
    temp_convert(-35.5)
except Exception as e:
    print(f"Expected exception --> {e}")
print(temp_convert(45.2))

```

Dans le flot de conception d'un produit, de nombreuses étapes suivent la spécification fonctionnelle. Parmi celles-ci, on peut citer notamment la spécification logique (composants abstraits : services, clients et leurs interactions) et la spécification physique ou matérielle (composants concrets : machines, ressources, réseaux, mémoires).

C Écrire un code intelligible

Bien programmer nécessite de produire un code intelligible.

a Nommer des variables

■ **Définition 161 — Conventions.** Règles de conduite adoptées à l'intérieur d'un groupe social. Exemple : en mathématiques, l'inconnue c'est x .

D'une manière générale, en informatique contemporaine, on préfère les conventions aux configurations¹, car cela fait gagner un temps précieux. Respecter des conventions dans l'écriture des programmes permet leur traitement automatique par d'autres outils pour générer d'autres programmes (tests, vérification, documentation, mise en ligne, interfaçage). Cela permet également aux développeurs de comprendre plus rapidement un code.

L'intelligibilité est certainement la plus grande qualité qu'on puisse exiger d'un code. Aujourd'hui, dans la plupart des entreprises, des normes de codage sont appliquées afin de rendre

1. c'est à dire des arrangements spécifiques.

le travail collaboratif plus efficace. Pour le langage Python, un ensemble de recommandations a été produit (cf. Python Enhancement Proposals - PEP 8). Donc, si vous ne savez pas trop comment faire, il est toujours possible de s'y référer. Les IDE actuels implémentent ces recommandations et peuvent formater ou proposer des changements conformes aux Python Enhancement Proposals.

M **Méthode 11 — Choisir un nom de variable ou de fonction** *Mal nommer les choses c'est ajouter au malheur de ce monde^a*. Alors tâchons de bien les nommer.

À faire :

- choisir des noms de variables et de fonctions en minuscules.
- si plusieurs mots sont nécessaires, mettre un _ entre les mots,
- préférer un **verbe** pour les fonctions, par exemple `trier`
- préférer des **noms** pour les variables, par exemple `color`)
- appeler un chat un chat.

À ne pas faire :

- utiliser les lettres I,O ou I pour un nom de variables. Elles sont confondues avec 1 ou 0.
- utiliser autre chose que les caractères ASCII (par exemple des lettres accentuées, des lettres grecques ou des kanjis),
- appeler une variable d'après un mot clef du langage Python (`lambda`, `list`, `dict`, `set`, `global`, `try`, `True`...)

a. citation apparemment de Brice Parrain dans une réflexion sur l'étranger d'Albert Camus. À vérifier cependant.

■ **Exemple 85 — Noms courants de variables.** Voici des noms possibles et courants pour :

- les types `int` : `i, j, k, m, n, p, q, a, b`
- les types `float` : `x, y, z, u, v, w`
- les accumulateurs : `acc, s, somme, prod, produit, product`
- les pas^a : `dt, dx, dy, step, pas`,
- les chaînes de caractères : `c, ch, s`,
- les listes : `L, results, values`,
- les dictionnaires : `d, t, ht`,
- les constantes en majuscules : `MAX_SIZE`.

a. c'est à dire la distance entre chaque élément d'un vecteur temporel par exemple

b Commenter un code

M **Méthode 12 — Faire un commentaire** Un commentaire peut être utile dans une copie afin de :

- détailler un point du code calculatoire,
- expliquer un choix d'implémentation de structure,
- mettre en exergue un variant (terminaison) ou un invariant (correction) du code,
- mettre en avant une pré-condition ou une post-condition.

Cependant, d'une manière générale, il n'est pas forcément nécessaire, pourvu que votre code soit intelligible. Le choix des noms des variables, le respect de l'indentation et des conventions sont les clefs d'un code intelligible.

Que peut-il arriver de pire à quelqu'un qui raconte une blague ? Devoir l'expliquer. Il en est de même du commentaire. Le commentaire peut être utile à l'intelligibilité mais il peut lui nuire également. Par ailleurs, dans le temps, un commentaire peut faire référence à une ligne modifiée ou une variable dont le nom a changé. Dans ce cas là, le commentaire nuit à la compréhension.

On s'attachera donc à :

- n'inscrire que des commentaires utiles et brefs,
- s'assurer qu'ils sont cohérents avec le code,
- à ne pas paraphraser le code.

On préfèrera écrire un code directement lisible. Sur le site de ce cours, vous trouverez des exemples de copies de concours que je vous aide à analyser. Bien écrire et bien nommer permet de gagner des points.

c Segmenter le code en modules réutilisables

La programmation structurée permet de décomposer un code en sous-parties, les fonctions et les bibliothèques de fonctions. On s'attachera donc à créer des codes construits à partir de fonctions réutilisables afin de ne pas réinventer la poudre. Celles-ci trouveront leur place dans les bibliothèques de fonctions (des modules Python) et pourront être réutilisées à volonté par vous et les personnes avec qui vous souhaiterez travailler.

D Tester son code et le maintenir

Pour être un minimum fiable, un code doit être testé. Un logiciel doit également tenir dans le temps, durer et évoluer en fonction des besoins. Cette maintenance logicielle est cruciale et très importante : un code est rarement figé, il est régulièrement mise à jour. Comment s'assurer alors que, malgré l'évolution, ce qui fonctionnaire avant, fonctionne toujours ?

Un bon code est donc un code bien testé ou, encore mieux, un code développé à partir des tests (test driven).

a Types de tests

■ **Définition 162 — Tests statiques.** Les tests statiques sont opérés en dehors de l'exécution du programme. Il s'agit de relectures du code par un humain ou par un logiciel dans le but de détecter des anomalies.

■ **Définition 163 — Tests dynamiques.** Les tests dynamiques sont opérés lors de l'exécution du code.

On distingue également :

1. les tests unitaires qui portent sur les fonctions élémentaires du code,
2. les tests d'intégration qui portent sur les interfaces entre les sous-systèmes. Ce sont des tests comportementaux qui vérifient si les interactions entre les composants logiciels sont nominales.
3. les tests systèmes portent sur l'ensemble du logiciel.
4. les tests de non-régression qui vérifient si l'évolution du code n'a pas créé des bogues ni endommagé les fonctionnalités pré-existantes à l'évolution (qui fonctionnaient avant!),
5. les tests de robustesse et de performance qui viennent stresser le système et le pousser dans ses retranchements.

b Données de test

Pour créer des tests, il est fondamental de créer les données d'entrée des tests, conformément aux spécifications. Dans le cadre des tests unitaires, il s'agit de tester des données d'entrées nominales tout comme des données aberrantes. Dans le cadre des tests d'intégration, on est parfois amené à simuler un des sous-systèmes pour fournir des entrées ou des sorties.

À la fin du test, les données recueillies sont dépouillées afin de valider ou non le test.

c Couverture du code

Lors des tests, il est important de s'assurer que toutes les lignes du code ont été testées. En effet, lorsque plusieurs chemins d'exécution sont possibles, si les tests ne sont pas correctement rédigés, il est possible que certaines parties du code ne soient jamais exécutées et donc potentiellement boguées.

Dans le cas où les tests sont correctement rédigés et qu'il existe à la fin de ceux-ci des chemins d'exécution qui n'ont pas été parcourus, alors il est fort probable que cette partie du code ne serve à rien!

d Tests, IDE et bibliothèques

Tous les langages possèdent des bibliothèques qui facilitent l'écriture de tests, tout particulièrement les tests unitaires. Python propose par exemple la bibliothèque `unittest`. Un exemple d'utilisation est donné ci-dessous.

```
import random
import unittest
```

```
def euclid(a, b):
    r = a
    q = 0
    while r >= b:
        r_prec = r
        r = r - b
        q = q + 1
    return q, r

class TestSum(unittest.TestCase):
    def test_int(self):
        """
        Test that it works on random integers with
        """
        for _ in range(100):
            a = random.randrange(100)
            b = random.randrange(99)
            q, r = euclid(a, b)
            self.assertEqual(q, a // b)
            self.assertEqual(r, a % b)

    # Toutes les méthodes commençant par test_ seront exécutées dans le main

if __name__ == '__main__':
    unittest.main()
```

Quatrième partie

Semestre 3

22

DICTIONNAIRES

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ décrire le TAD dictionnaire
- ☒ créer et utiliser un dictionnaire en Python
- ☒ expliquer l'implémentation d'un dictionnaire par une table de hachage

★ A Type abstrait de données et structure de données

■ **Exemple 86 — Analogie introductory : de la fonction mécanique à l'architecture physique.** Pour réaliser une fonction mécanique, il est courant de disposer de plusieurs solutions concrètes. Par exemple, si l'on considère un vélo, comment convertir le mouvement de rotation du pédalier en mouvement de rotation des roues ? La fonction abstraite recherchée, c'est-à-dire le **quoi**, ce que l'on veut pouvoir faire, est un convertisseur de rotation en rotation. Cette **abstraction** peut être réalisée par un système classique (roues dentées et chaîne métallique), par une courroie polyamide et carbone ou par un cardan. Trois réalisations possibles au moins pour une même abstraction.

Tout comme en conception mécanique on distingue l'abstraction à réaliser de sa réalisation, de la même manière, en informatique, on distingue un type de données que l'on désigne par le terme *Type Abstrait de Données* (TAD) de sa réalisation concrète que l'on désigne par le terme *Structure de données*.

■ **Définition 164 — Type abstrait de données (TAD).** Un type de données abstrait est une abstraction d'une structure de données qui ne se préoccupe pas de son implémentation sur une machine : sa structure interne est indiscernable, le type abstrait est vu de l'extérieur comme une boîte noire.

Un TAD spécifie le quoi, c'est-à-dire le type de données contenues ainsi que les opérations possibles sur ces données.

rations possibles. Par contre, il ne spécifie pas comment dont les données sont stockées ni comment les opérations sont implémentées.

■ **Définition 165 — Structure de données.** Une structure de données est une mise en œuvre concrète d'un type abstrait, une implémentation d'un type abstrait sur dans un langage de programmation. On y décrit donc le **comment**, c'est-à-dire la manière avec laquelle sont codées les données et les opérations en machine.

R Un type abstrait de données est à une structure de donnée ce qu'un algorithme est à un programme. On spécifie un algorithme ou un type abstrait de données, mais on implémente un programme ou une structure de données.

■ **Exemple 87 — Un entier.** Un entier est un TAD qui :

(données) contient une suite de chiffres^a éventuellement précédés par un signe – ou +,

(opérations) fournit les opérations +, −, ×, /, % .

Selon le langage, ce TAD entier est implémenté en machine par un type concret différent :

- `int` en Python,
- `Integer` ou `int` en Java,
- `char`, `short`, `int`, `uint`, `long` `int` en C,
- `int` en OCaml.

a. peu importe la base pour l'instant...

■ **Exemple 88 — Un booléen.** De la même manière, on peut définir un TAD qui désigne un booléen. Un booléen est un TAD qui :

(données) se note Vrai ou Faux,

(opérations) fournit les opérations logiques conjonction, disjonction et négation...

Selon le langage, ce TAD booléen est implémenté en machine par un type concret différent :

- `bool` valant `True` ou `False` en Python,
- `boolean` valant `true` ou `false` en Java,
- `bool` valant 1 ou 0 en C,
- `bool` valant `true` ou `false` en OCaml.

Les exemples précédents de types abstrait de données étaient limités à des types simples. Mais il est possible de définir des types abstraits de données composés.

■ **Exemple 89 — Types abstraits de données composés.** Voici quelques types abstraits composés parmi les plus courants :

- liste,

- file,
- pile,
- arbre binaire,
- dictionnaire ou tableau associatif,
- ensemble,
- graphe.

★ B TAD Tableau

■ **Définition 166 — TAD tableau.** Un TAD tableau représente une structure finie indicable par des entiers. Cela signifie qu'on peut accéder à la lecture ou à l'écriture de n'importe quel élément directement en utilisant un indice : par exemple $a = t[3]$ pour la lecture et $t[7] = 67.6$ pour l'écriture.

(données) le plus souvent des nombres, en tout cas des types identiques : on appelle cette donnée l'élément d'un tableau.

(opérations) on distingue deux opérations principales caractéristiques :

- l'accès à un élément via un indice entier via un opérateur de type `[]`,
- l'enregistrement de la valeur d'un élément d'après son indice.

Les implémentations du TAD tableau sont la plupart du temps des structures des données linéaires en mémoire : les données d'un tableau sont rangées dans des zones mémoires **continues**, les unes derrières les autres. On peut décliner le TAD tableau de manière :

1. **statique** : la taille du tableau est fixée à la création du tableau. Il n'est pas possible d'ajouter ou d'enlever des éléments.
2. **dynamique** : la taille du tableau peut varier, on peut ajouter ou enlever des éléments. Dans ce cas, on parle de tableau dynamique.

P En Python, il n'existe pas à proprement parlé de type tableau dans le cœur du langage. Cependant, la liste Python est implémentée par un tableau dynamique et permet donc souvent de pallier ce manque. Néanmoins, pour un calcul numérique efficace, il faut absolument privilégier l'usage des tableaux Numpy qui implémentent le TAD tableau statique.

C TAD Dictionnaire

■ **Définition 167 — TAD Dictionnaire.** Un dictionnaire est une extension du TAD tableau dont les éléments \mathcal{V} , au lieu d'être indicés par un entier sont indicés par des clefs appartenant à un ensemble \mathcal{K} . Soit $k \in \mathcal{K}$, une clef d'un dictionnaire D . Alors $\mathsf{D}[k]$ est la valeur v de \mathcal{V} qui correspond à la clef k .



FIGURE 22.1 – Illustration du concept de dictionnaire

On dit qu'un dictionnaire est un **tableau associatif** qui associe une clef κ à une valeur ν . Les opérations sur un dictionnaire sont :

1. rechercher la présence d'une clef dans le dictionnaire,
2. accéder à la valeur correspondant à une clef,
3. insérer une valeur associée à une clef dans le dictionnaire,
4. supprimer une valeur associée à une clef dans le dictionnaire.

R L'intérêt principal d'un dictionnaire est que l'on connaît des implémentations qui permettent de rechercher et d'accéder à un élément en un temps constant $\mathcal{O}(1)$. Rechercher un élément dans une liste est une opération linéaire en $\mathcal{O}(n)$ dans le pire des cas. Dans le cadre d'un tableau, si la recherche par dichotomie est implémentée, alors la recherche d'un élément est logarithmique en $\mathcal{O}(\log(n))$. Si on implémente bien un dictionnaire, tester l'appartenance à un dictionnaire est de complexité constante, ce qui peut accélérer grandement l'exécution d'un algorithme.

P Un dictionnaire relie donc directement une clef, qui n'est pas nécessairement un entier, à une valeur : pas besoin d'index intermédiaire pour rechercher une valeur comme dans une liste ou un tableau. Par contre, cette clef est nécessairement d'un type immuable. Considérons l'exemple donné sur l'exemple de la figure 22.2. On suppose que les éléments chimiques sont enregistrés via une chaîne de caractères : "C", "O", "H", "Cl", "Ar", "N". Soit d , un dictionnaire correspondant à la figure 22.2. Accéder au numéro atomique de l'élément c s'écrit : $d["C"]$.

R Un dictionnaire n'est pas une structure ordonnée, à la différence des listes ou des tableaux.



FIGURE 22.2 – Illustration du concept de dictionnaire, ensembles concrets

■ **Exemple 90 — Usage des dictionnaires.** Les dictionnaires sont utiles notamment dans le cadre de la programmation dynamique pour la mémoisation, c'est à dire l'enregistrement des valeurs d'une fonction selon ses paramètres d'entrée. Par exemple :

- a-t-on déjà rencontré un sommet lorsqu'on parcourt un graphe?
- a-t-on déjà calculé la suite de Fibonacci pour $n = 4$?

Répondre à ces questions exige de savoir si pour une clef donnée il existe une valeur.

★ D Implémentation d'un TAD dictionnaire

On peut implémenter efficacement un TAD dictionnaire à l'aide

1. des tables de hachage,
2. d'arbres binaires de recherche équilibrés (AVL ou arbres rouges et noirs).

Opération	Liste d'association	Table de hachage	Arbre de recherche
Rechercher (pire cas)	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$
Insérer (pire cas)	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$
Effacer (pire cas)	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n)$
Rechercher (en moyenne)	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\log n)$
Insérer (en moyenne)	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\log n)$
Effacer (en moyenne)	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\log n)$

TABLE 22.1 – Complexité des opérations associées à l'utilisation des tables de hachage ou des arbres pour implémenter un TAD dictionnaire. Les coûts indiqués sont dans le pire des cas ou en moyenne.

Il existe de nombreuses implémentations possibles du TAD dictionnaire. On peut, par exemple, les implémenter avec des listes, mais l'efficacité n'est pas au rendez-vous. C'est pourquoi, dans la suite ce chapitre, on s'intéresse aux **tables de hachage** pour implémenter un TAD dictionnaire.

E Dictionnaires Python

a Constructeurs de dictionnaires en Python

Cette section s'intéresse à la manière dont on peut créer des dictionnaires en Python.

Accolades

À tout seigneur tout honneur, les accolades sont la voie royale pour créer un dictionnaire.

```
d = {} # Empty dict
print(d, type(d)) # {} <class 'dict'>
d = {"Ar": 18, "Na": 11, "Cl": 17, "H": 1}
# keys are strings, values integers
print(d) # {'Ar': 18, 'Na': 11, 'Cl': 17, 'H': 1}

d = {("Alix", 14): True, ("Guillaume", 7): False, ("Hannah", 24): 17}
print(d, type(d)) # keys are tuples, values booleans
# {('Alix', 14): True, ('Guillaume', 7): False, ('Hannah', 24): 17} <class 'dict'>

d = {13: [1, 3], 219: [2, 1, 9], 42: [4, 2]}
print(d, type(d)) # keys are integers, values lists
# {13: [1, 3], 219: [2, 1, 9], 42: [4, 2]} <class 'dict'>
```

L'exemple précédent montre que :

- Les clefs d'un dictionnaire sont nécessairement constituées de types **immuables**, c'est à dire ni une liste ni un dictionnaire par exemple. Si la clef était mutable, alors le code calculé par la fonction de hachage serait variable pour une même clef : on ne saurait donc plus identifier la valeur associée ou bien celle-ci changerait.
- Les valeurs peuvent être de n'importe quel type de données.

Constructeur dict

La fonction `dict()` permet également de créer un dictionnaire à partir de n'importe quel objet itérable. Elle s'utilise le plus souvent pour convertir un liste de tuples en dictionnaire.

```
d = dict() # Empty dict
print(d, type(d)) # {} <class 'dict'>
d = dict([('Ar', 18), ('Na', 11), ('Cl', 17), ('H', 1)])
# keys are strings, values integers
print(d) # {'Ar': 18, 'Na': 11, 'Cl': 17, 'H': 1}
d = dict(zip(["Alix", "Guillaume", "Hannah"], [14, 7, 24]))
# zip is really useful here !
```

```
print(d) # {'Alix': 14, 'Guillaume': 7, 'Hannah': 24}
```

Définir un dictionnaire en compréhension

Tout comme les ensembles en mathématiques, les dictionnaires peuvent être construits à partir d'une description compréhensible de ses éléments. Cette méthode de création de dictionnaires est à rapprocher du paradigme fonctionnel.

```
pairs = [("Alix", 14), ("Guillaume", 7), ("Hannah", 24)]
d = {name: age for name, age in pairs} # comprehension dictionary
print(d) # {'Alix': 14, 'Guillaume': 7, 'Hannah': 24}
```

 Cette méthode de création de dictionnaire est puissante mais est très délicate à manipuler. C'est pourquoi il est préférable de ne l'utiliser que si on est vraiment sûr de soi, sinon c'est une perte de points assurée au concours. On peut l'éviter avec une boucle `for` et ainsi assurer des points.

 Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

b Opérations sur un dictionnaire Python

Nombes d'éléments d'un dictionnaire

La fonction `len` renvoie le nombre de clefs d'un dictionnaire.

```
d = dict([("Ar", 18), ("Na", 11), ("Cl", 17), ("H", 1)])
print(len(d)) # 4
```

 En Python, on peut tester si un dictionnaire est vide avec la fonction `len`.

```
empty_dict = {}
if not empty_dict:    # direct
    print("Dictionary is empty!")
else:
    print("Dictionary is not empty!")

if len(empty_dict) == 0: # nb of elements
    print("Dictionary is empty!")
else:
    print("Dictionary is not empty!")

if empty_dict == {}: # compare to an empty dict
    print('Dictionary is empty!')
else:
    print('Dictionary is not empty!')
```

Appartenance à un dictionnaire

Les mots-clefs `in` et `not in` permettent de tester l'appartenance à un dictionnaire et renvoient les booléens correspondants.

```
d = {"Ar": 18, "Na": 11, "Cl": 17, "H": 1}
if "Ar" in d:
    print("Ar", d["Ar"]) # Ar 18
if "O" not in d:
    print("O is not in d") # O is not in d
```

Ajouter et supprimer un élément sur un dictionnaire

L'opérateur `[]` est nécessaire pour ajouter une valeur d'après sa clef. On peut ajouter plusieurs éléments avec `update`. Enfin, les fonctions qui retirent un élément modifient le dictionnaire en place.

```
d = {"Ar": 18, "Na": 11, "Cl": 17, "H": 1}
d["O"] = 8
print(d) # {'Ar': 18, 'Na': 11, 'Cl': 17, 'H': 1, 'O': 8}
del d["Ar"]
print(d) # {'Na': 11, 'Cl': 17, 'H': 1, 'O': 8}
d.pop("Na")
print(d) # {'Cl': 17, 'H': 1, 'O': 8}
d.update({"F": 9, "Br": 35})
print(d) # {'Cl': 17, 'H': 1, 'O': 8, 'F': 9, 'Br': 35}
```

c Fusionner des dictionnaires Python

Pour fusionner deux dictionnaires, on peut soit utiliser la méthode `update` qui modifie le dictionnaire en place, soit utiliser un syntaxe dépendante des versions de Python.

```
d1 = {"Ar": 18, "Na": 11, "Cl": 17, "H": 1}
d2 = {"F": 9, "Br": 35}
d1.update(d2) # simple, in place
print(d1) #{'Cl': 17, 'H': 1, 'O': 8, 'F': 9, 'Br': 35}

d1 = {"Ar": 18, "Na": 11, "Cl": 17, "H": 1}
d2 = {"F": 9, "Br": 35}
d = {**d1, **d2} # Python 3.5
print(d) #{'Ar': 18, 'Na': 11, 'Cl': 17, 'H': 1, 'F': 9, 'Br': 35}

d1 = {"Ar": 18, "Na": 11, "Cl": 17, "H": 1}
d2 = {"F": 9, "Br": 35}
d = d1 | d2 # Python 3.9
print(d) #{'Ar': 18, 'Na': 11, 'Cl': 17, 'H': 1, 'F': 9, 'Br': 35}
```

d Des dictionnaires itérables

Un dictionnaire Python est itérable, c'est à dire qu'il peut être l'objet d'une itération via une boucle `for`.

```
d = {"Ar": 18, "Na": 11, "Cl": 17, "H": 1}

for atom in d:
    print(atom, d[atom])

for atom, number in d.items():
    print(atom, number)

# Same result :
# Ar 18
# Na 11
# Cl 17
# H 1
# F 9
# Br 35
```

F Tables de hachage

a Principe

■ **Définition 168 — Table de hachage.** Une table de hachage est constituée d'un tableau t et d'une fonction de hachage h . Elle implémente un dictionnaire sur un ensemble de clefs \mathcal{K} et un ensemble de valeurs \mathcal{V} .

Pour tout élément k de \mathcal{K} , $h(k)$ est l'indice de la case du tableau t auquel on stocke la valeur v , ce qui peut s'exprimer ainsi :

$$\forall (k, v) \in (\mathcal{K} \times \mathcal{V}), t[h(k)] \leftarrow v \quad (22.1)$$

La figure 22.3 illustre l'implémentation d'un dictionnaire par une table de hachage.

■ **Définition 169 — Fonction de hachage.** Un fonction de hachage prend une clef en entrée et génère un index entier associé à cette clef.

Plus formellement, si \mathcal{K} est l'un ensemble des clefs (non nécessairement numériques) et \mathcal{V} l'ensemble des valeurs associées aux clefs de cardinal n , on peut définir une fonction de hachage :

$$h : \mathcal{K} \longrightarrow \llbracket 0, n - 1 \rrbracket \quad (22.2)$$

$$k \longmapsto i \quad (22.3)$$

Soit k le cardinal de \mathcal{K} , c'est à dire le nombre de clefs possibles. On pourrait représenter un TAD dictionnaire à l'aide d'un tableau de dimension k et une fonction bijective $h : \mathcal{K} \longrightarrow \llbracket 0, k - 1 \rrbracket$. L'accès aux éléments et l'ajout d'un élément seraient en $\mathcal{O}(1)$, le temps de calculer la



FIGURE 22.3 – Illustration de l’implémentation d’un dictionnaire par table de hachage. La fonction de hachage h permet de calculer les indices du tableau. **La valeur a associée à α se trouve à la case $h(\alpha)$ du tableau.** Toutes les clefs n’ont pas forcément de valeur associée à un moment donné de l’algorithme. Dans ce cas, à l’indice associé à cette clef, le tableau est vide.

valeur de la fonction bijective pour une clef donnée. Néanmoins, d’un point de vue complexité mémoire, cette solution n’est pas réalisable : le nombre de clefs possibles est souvent immense alors que les clefs effectivement utilisées sont moins nombreuses. **Ce qui nous amènerait à réserver un espace mémoire bien supérieur aux besoins réels.**

On adopte donc l’hypothèse réaliste suivante : la taille m du tableau qu’on utilise est petite devant le nombre de clefs possibles k , c’est à dire $m \ll k$. En procédant ainsi, **on renonce à l’injectivité de la fonction de hachage** et donc à sa bijectivité, car on engendre des collisions : il pourra exister des clefs différentes pour lesquelles le code calculé par la fonction de hachage sera le même. Tout dépend du nombre de clefs utilisées et de la fonction de hachage.

■ **Définition 170 — Collision.** On dit qu’il y a collision lorsque une fonction de hachage appliquée à deux clefs différentes c_1 et c_2 produit le même résultat : $h(c_1) = h(c_2)$

b Choix d’une fonction de hachage

Le choix d’une fonction de hachage n’est pas évident. Ces fonctions doivent permettre de générer un index dont la taille est inférieure à celle du tableau, tout en distinguant au mieux les clefs, tout en évitant le plus possible les collisions. On recherche donc des fonctions de hachage qui possèdent les caractéristiques suivantes :

1. son calcul doit être rapide,
2. pour une même clef, on obtient un même code (**cohérence**),
3. pour des clefs qui se ressemblent, les codes obtenus doivent être très différents. D’une manière générale, les codes doivent présenter une distribution uniformément répartie sur l’espace des indices (**répartition uniforme**).

Comme mentionné au paragraphe précédent, on renonce à l’injectivité pour des raisons d’espace mémoire. Pour des clefs différentes, on n’obtient donc pas toujours des codes diffé-

rents (**non injectif**). Le choix d'une fonction de hachage a donc également pour objectif de **minimiser les collisions**.

Pour gérer au mieux les collisions, on cherche à répartir uniformément les clefs dans les différentes cases du tableau. Ceci revient à faire en sorte que la probabilité qu'une valeur v associée à une clef c occupe la case i du tableau devrait être proche de $1/m$, si la taille de ce tableau est m . En faisant cette hypothèse, si on suppose qu'on utilise g clefs, alors la probabilité p d'obtenir des codes différents lors du calcul des g clefs par la fonction de hachage vaut :

$$p = \frac{m(m-1)\dots(m-g+1)}{m^g} = \frac{m!}{(m-g)!m^g} \quad (22.4)$$

On en déduit la probabilité de collision p_c :

$$p_c = 1 - \frac{m(m-1)\dots(m-g+1)}{m^g} = \frac{m!}{(m-g)!m^g} \quad (22.5)$$

\backslash	m	5000	10000	100000	1000000
g					
100	0,63	0,39	0,05	0,005	
500	0,99	0,99	0,71	0,12	
1000	1	1	0,99	0,39	
1500	1	1	0,99	0,68	
2000	1	1	0,99	0,86	
2500	1	1	0,99	0,96	

TABLE 22.2 – Probabilité de collision p_c dans l'hypothèse d'une répartition uniforme des valeurs dans le tableau d'une table de hachage. Même dans le cas d'un tableau à un million d'éléments, la probabilité de collision est quasi-certaine dès que le nombre de clefs utilisé est supérieure à 2500. C'est le paradoxe des anniversaires.

Une rapide évaluation de cette probabilité est donnée sur le tableau 22.2. On en conclut que, quelle que soit la taille du tableau, les collisions existeront. Il faut donc trouver un moyen de les gérer au mieux.

c Fonctions de hachages possibles

Une fonction de hachage h peut procéder en deux étapes :

1. une fonction h_e qui encode la clef d'entrée en un entier naturel,
2. et une fonction h_c qui compresse le code dans l'ensemble des indexes.

Plus formellement, on la fonction de hachage comme une fonction composée :

$$h_e : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbb{N} \quad (22.6)$$

$$h_c : \mathbb{N} \longrightarrow [\![0, n-1]\!] \quad (22.7)$$

et

$$h = h_c \circ h_e \quad (22.8)$$

■ **Exemple 91 — Fonctions d'encodage des clefs.** Pour compresser une clef, il faut d'abord l'encoder, c'est à dire la convertir en un nombre entier. Dans ce but, on peut par exemple, si la clef est une chaîne de caractères $c_0c_1\dots c_{k-1}$, utiliser le code ASCII associé à un caractère $\text{ascii}(c_i)$ pour calculer $\sum_{i=0}^{k-1} \text{ascii}(c_i)2^{8+k}$. On verra en TP que faire juste la somme des valeurs ASCII des caractères n'est pas forcément une bonne idée. Prendre l'adresse en mémoire non plus.

L'important est que l'encodage génère un même code pour une même clef et un code vraiment différent si les clefs sont différentes.

■ **Exemple 92 — Hachage par modulo simple.** Si la taille du tableau de la table de hachage est m , on peut choisir la fonction $h : c \rightarrow c \bmod m$. Le choix de m mérite néanmoins quelques points d'attention : on évitera de prendre des nombres du type 2^q ou 2^{q-1} . On choisit généralement un nombre premier éloigné pas trop proche d'une puissance de 2 pour garantir une bonne répartition des clefs.

■ **Exemple 93 — Hachage par multiplication et modulo.** On peut également choisir la fonction $h : c \rightarrow \lfloor \{\phi c\} \times m \rfloor$. Si ϕ est le nombre d'or et $\{\phi c\}$ la partie fractionnaire du produit ϕc , cette méthode garantit une bonne répartition des clefs sans restreindre les valeurs de m .

d Gestion des collisions

Deux grandes méthodes permettent de gérer les collisions :

1. **par chainage** : stocker valeurs associées aux collisions dans une même case sous la forme d'une liste comme l'illustre la figure 22.4. Cette solution induit une augmentation de la complexité car en cas de collision, on n'accède plus à l'élément directement : il faut le chercher dans une liste. C'est ce qui explique le $\mathcal{O}(n)$ dans le pire des cas sur le tableau 22.1.
2. **par adressage ouvert** : chercher une place vide dans le tableau en le sondant et placer la valeur dedans. Cela induit que le nombre de clefs utilisées est inférieur à la taille du tableau et ralentit l'accès à un élément. Lorsque le tableau est trop petit, on peut en changer pour un plus grand : cela a un coût également.

e Implémentation des dict en Python

L'implémentation du TAD dictionnaire en Python fait l'objet de travaux et d'évolutions en permanence et c'est un sujet complexe. En résumé, pour implémenter les `dict`, Python utilise des tables de hachage en adressage ouvert dont la taille évolue dynamiquement (comme le type `list`).



FIGURE 22.4 – Illustration de l’implémentation d’un dictionnaire par table de hachage avec chainage. Les clefs β et ϕ , engendrent des collisions. On stocke donc les valeurs possibles pour un même code (indice) dans une liste.

23

PROGRAMMATION DYNAMIQUE

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ énoncé les principes de la programmation dynamique
- ☒ distinguer cette méthode des approches gloutonnes et diviser pour régner
- ☒ formuler récursivement le problème du sac à dos

A Motivations

Dans la famille des algorithmes de décomposition, c'est-à-dire les algorithmes qui cherchent à décomposer un problème en sous-problèmes afin de le résoudre, on distingue trois grandes familles :

1. les algorithmes gloutons (cf. chapitre 14),
2. les algorithmes de type diviser pour régner (cf. chapitre ??)
3. la programmation dynamique.

La figure 23.1 schématise ces trois approches sous la forme d'arbres de décomposition de problèmes en sous-problèmes. Les algorithmes de type gloutons ou de type diviser pour régner ont des limites :

1. même s'il existe des algorithmes gloutons optimaux¹, c'est-à-dire qui produisent une solution optimale au problème, la plupart du temps ce n'est pas le cas.
2. même si l'approche diviser pour régner est très efficace pour de nombreux problèmes², elle nécessite que les sous-problèmes soient indépendants. Or, parfois, il n'en est rien,

1. On peut citer notamment : la planification de tâches dans le temps qui ne se chevauchent pas, l'algorithme de Prim ou de Huffmann.

2. On peut citer notamment : la transformée de Fourier rapide (FFT), l'exponentiation rapide, les approches dichotomiques.

certains sous-problèmes ont des sous-problèmes en commun, ils ne sont pas indépendant, ils se chevauchent. Dans ce cas, l'approche diviser pour régner devient inefficace puisqu'elle résout plusieurs fois les mêmes sous-problèmes.

Afin de dépasser ces limites, on étudie la programmation dynamique.



FIGURE 23.1 – Schématisation des différentes approches des algorithmes de décomposition d'un problème en sous-problèmes : diviser pour régner, approche gloutonne et programmation dynamique itérative.



FIGURE 23.2 – Programmation itérative du calcul de $\binom{6}{3}$. Les rectangles correspondent à un cas terminal de la récursivité, les cercles à l'application de la formule récursive. **Les sous-problèmes se chevauchent** : par exemple, le calcul de $\binom{3}{2}$ est utilisé par le calcul de $\binom{4}{2}$ et $\binom{4}{3}$. En complétant le tableau de résolution, l'idée est de ne le calculer qu'une seule fois ces éléments.

B Exemples simples de chevauchements des sous-problèmes

■ **Exemple 94 — Calcul de $\binom{n}{k}$.** La formule de récurrence

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ 1 & \text{si } k = n \text{ ou } k = 0 \\ n & \text{si } k = 1 \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{sinon} \end{cases} \quad (23.1)$$

permet de construire le triangle de Pascal (cf. tableau 23.1). Cette construction illustre la méthode de complétement d'un tableau de résolution dans le cadre de la programmation dynamique. La figure 23.2 met en exergue les sous-problèmes et leur imbrication pour calculer $\binom{6}{3}$.

■ **Exemple 95 — Algorithme de calcul des termes de la suite Fibonacci.** On considère la suite de Fibonacci : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Pour calculer le u_n , on peut procéder de plusieurs manières différentes comme le montre les algorithmes 49 et 50. Cependant, ces deux approches n'ont pas la même efficacité. La première est une approche récursive multiple descendante. Les appels multiples montrent qu'on se trouve dans le cadre d'un problème pour lequel **les sous-problèmes ne sont pas indépendants**. Dans ce cas, l'algorithme 49 calcule inutilement plusieurs fois les mêmes termes et est inefficace. Par exemple, pour calculer u_4 selon cette approche on doit calculer

n	k	0	1	2	3	4	5	6
6		1	6	15	20	15	6	1
5		1	5	10	10	5	1	0
4		1	4	6	4	1	0	0
3		1	3	3	1	0	0	0
2		1	2	1	0	0	0	0
1		1	1	0	0	0	0	0
0		1	0	0	0	0	0	0

TABLE 23.1 – Triangle de Pascal à mettre en parallèle de la figure 23.2. On a représenté le triangle du bas vers le haut.

$u_3 + u_2$. Mais le calcul de u_3 va lancer le calcul $u_2 + u_1$. On va donc calculer au moins deux fois u_2 . Cette approche aboutit à une complexité en $O(2^n)$.

L'algorithme 50 propose une version itérative ascendante dans l'ordre des termes : on calcule d'abord le premier terme puis le second et ainsi il n'y a pas de calculs redondants et la complexité en $O(n)$. Cette approche est dans l'esprit de la programmation dynamique : on cherche à calculer comme indiqué sur la figure 23.1 pour éviter les calculs redondants. On pourrait construire un graphe similaire à celui de la figure 23.2.

Algorithme 49 Fibonacci récursif (approche descendante)

```

1: Fonction REC_FIBO(n)
2:   si n = 0 ou n = 1 alors                               ▷ Condition d'arrêt
3:     renvoyer n
4:   sinon
5:     renvoyer REC_FIBO(n-1) + REC_FIBO(n-2)    ▷ Appels multiples et chevauchements

```

Algorithme 50 Fibonacci itératif, sans calculs redondants (approche ascendante)

```

1: Fonction ITE_FIBO(n)
2:    $u_0 \leftarrow 0; u_1 \leftarrow 1$ 
3:   pour i de 0 à n répéter
4:     tmp  $\leftarrow u_0$ 
5:      $u_0 \leftarrow u_1$ 
6:      $u_1 \leftarrow \text{tmp} + u_1$ 
7:   renvoyer  $u_0$ 

```

C Principles de la programmation dynamique

■ **Définition 171 — Principe d'optimalité de Bellman.** La solution optimale à un problème d'optimisation combinatoire présente la propriété suivante : quel que soit l'état initial et la décision initiale prise, les décisions qui restent à prendre pour construire une solution optimale forment une solution optimale par rapport à l'état qui résulte de la première décision^a.

a. PRINCIPLE OF OPTIMALITY. An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decisions are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decisions[3].

■ **Définition 172 — Sous-structure optimale.** En informatique, un problème présente une sous-structure optimale si une solution optimale peut être construite à partir des solutions optimales à ses sous-problèmes.

■ **Définition 173 — Programmation dynamique.** La programmation dynamique est une méthode de construction des solutions optimales d'un problème par combinaison des solutions optimales de sous-problèmes. Pour cela, le problème considéré doit posséder une sous-structure optimale (cf. définition 172). Certaines combinaisons de solutions sont implicitement rejetées si elles appartiennent à un sous-ensemble qui n'est pas utile : afin d'être efficace, on ne construit que les solutions optimales des sous-problèmes utiles à la construction de la solution optimale.

Cette approche :

- considère un problème \mathcal{P} à sous-structure optimale,
- décompose le problème \mathcal{P} en sous-problèmes de taille moindre,
- construit une solution de \mathcal{P} en ne résolvant un même sous-problème qu'une seule fois.

Le cadre de l'application de la programmation dynamique sont donc les problèmes d'optimisation combinatoire dont la sous-structure est optimale. Pour ce genre de problèmes, il y a de nombreuses solutions possibles³. Chaque solution possède une valeur propre que l'on peut quantifier. On cherche alors soit à la minimiser soit à la maximiser, dans tous les cas, on cherche au moins une valeur optimale.

3. Penser au problème du sac à dos par exemple.



FIGURE 23.3 – Illustration du principe d'optimalité et de sous-structure optimale : trouver le plus court chemin dans un graphe orienté et pondéré. Les lignes droites sont des arcs. Les lignes ondulées indiquent les chemins connus dans le graphe : il faut imaginer qu'on n'a pas représenté tous les sommets. Les nombres représentent des distances ou les poids des arcs.

M Méthode 13 — Algorithme de programmation dynamique, approche ascendante Pour créer un algorithme de programmation dynamique avec une approche ascendante permettant de résoudre un problème à sous-structure optimale, il faut :

1. **Formuler récursivement** le problème en sous-problèmes,
2. Créer et initialiser un **tableau** de résolution,
3. Compléter ce tableau en calculant les solutions des sous-problèmes selon l'ordre de la récurrence trouvée pour ne les calculer qu'une seule fois.

D Principe d'optimalité et plus court chemin dans un graphe

Le principe d'optimalité et la notion de sous-structure optimale sont illustrés par la figure 23.3 qui représente le problème du plus court chemin dans un graphe. On peut exprimer le plus court chemin récursivement en fonction du début du chemin choisi et du plus court chemin dans le reste du graphe. Cela peut s'exprimer simplement comme suit :

Le plus court chemin de s_0 à s est le chemin le plus court à choisir parmi :

- le chemin ne passant pas par u , déjà découvert et dont la longueur vaut 42,
- le chemin qui passe par u et par A suivi par le chemin le plus court de A à s ,
- le chemin qui passe par u et par B suivi par le chemin le plus court de B à s ,
- le chemin qui passe par u et par C suivi par le chemin le plus court de C à s .

Il est nécessaire de considérer le plus court chemin de A à s ou de B à s , sinon la solution globale ne serait pas optimale. Le plus court chemin est une solution optimale et le plus court chemin

de A à s est un sous-problème. Donc, on exprime bien la solution optimale d'un problème en fonction des solutions optimales des sous-problèmes.

Le plus court chemin étant un problème à sous-structure optimale, on peut chercher à le résoudre par la programmation dynamique : cette approche est celle de l'algorithme de Bellman-Ford.

a Algorithme de Bellman-Ford

Soit $G = (S, A, w)$ un graphe orienté et pondéré ne possédant pas de circuits de poids négatif.

Si i représente **le nombre de sauts autorisés pour atteindre un sommet** et $d_i(v)$ la **distance du sommet de départ** s_0 au sommet v en effectuant i sauts, alors cela peut se traduire mathématiquement par :

$$d_i(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \text{ et } v = s_0 \\ +\infty & \text{si } i = 0 \text{ et } v \neq s_0 \\ \min \left(d_{i-1}(v), \min_{\text{arcs } (u,v)} (d_{i-1}(u) + w(u, v)) \right) & \text{sinon} \end{cases} \quad (23.2)$$

Le problème ainsi posé étant à sous-structure optimale, l'algorithme de Bellmann-Ford 51 résout ce problème en utilisant la programmation dynamique. L'ordre du graphe n étant donné, cet algorithme nécessite $n - 1$ itérations pour converger car le chemin le plus court passe par au plus $n - 1$ sommets. À chaque itération, pour chaque arête (u, v) , il choisit la distance la plus courte pour atteindre v .

Algorithme 51 Algorithme de Bellman-Ford, plus courts chemins à partir d'un sommet donné

```

1: Fonction BELLMAN_FORD( $G = (S, A, w)$ ,  $s_0$ )
2:    $n \leftarrow$  ordre de  $G$                                  $\triangleright n$  est le nombre de sommets de  $G$ 
3:    $d \leftarrow$  un tableau de dimension  $(n, n)$  initialisé à  $infty$        $\triangleright$  distances au sommet  $a$ 
4:    $d[0, s_0] \leftarrow 0$                                           $\triangleright 0$  si  $s = s_0$ 
5:   pour  $i$  de 1 à  $n - 1$  répéter
6:     pour  $v$  de 0 à  $n - 1$  répéter
7:        $d[i, v] \leftarrow d[i - 1, v]$ 
8:       pour  $(u, v) = a \in A$  répéter                       $\triangleright$  Pour chaque arc d'extrémité  $v$ 
9:         si  $d[i, v] > d[i - 1, u] + w(u, v)$  alors           $\triangleright$  Si plus court par  $u$ 
10:         $d[i, v] \leftarrow d[i - 1, u] + w(u, v)$             $\triangleright$  Mise à jour de  $d$  de  $s_0$  à  $v$  en  $i$  sauts
11:   renvoyer  $d[n - 1, :]$                                 $\triangleright$  On renvoie les distances de  $s_0$  à tous les sommets

```

R La complexité de l'algorithme de Bellman-Ford est en $O(nm)$, pour un graphe d'ordre n possédant m arêtes.

■ **Exemple 96 — Application de l'algorithme de Bellman-Ford.** On se propose d'appliquer l'algorithme 51 au graphe pondéré et orienté représenté sur la figure 23.4. Ce graphe contient des pondérations négatives mais pas de cycles à pondération négative. Le tableau 23.2 représente les distances successivement trouvées à chaque itération. La complexité de l'algorithme est en $O(nm)$ si n est l'ordre du graphe et m sa taille.



FIGURE 23.4 – Graphe orienté et pondéré pour application de l'algorithme de Bellman-Ford (sans circuit à pondération négative)

$i \backslash v$	0	1	2	3	4
4	0	2	2	1	1
3	0	2	2	3	1
2	0	4	2	$+\infty$	1
1	0	$+\infty$	2	$+\infty$	3
0	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

TABLE 23.2 – Tableau lié à l'application de l'algorithme de Bellman-Ford au départ du sommet 0 du graphe de la figure 23.4. Application de la formule de récurrence 23.2 : i représente le nombre de sauts autorisés, v les sommets. Complétion du bas vers le haut.

Il est important de souligner que cet algorithme s'applique uniquement à des **graphes pondérés et orientés** dont les pondérations peuvent être négatives mais **sans cycles de longueur négative** [4, 11, 20].

R Les poids négatifs peuvent représenter des transferts de flux (énergie ou chaleur en physique-chimie, argent en économie) et sont donc très courants.

R Les cycles de poids négatif ne peuvent pas permettre de définir une distance minimale : à chaque itération du cycle, la distance diminue.

R Cet algorithme ne s'applique pas à des graphes non orientés pour la raison suivante : les arêtes d'un graphe non orienté sont des cycles car la relation est dans les deux sens. Donc chaque arête de poids négatif est un cycle de poids négatif.

■ **Exemple 97 — Protocole de routage RIP.** Le protocole de routage RIP utilise l'algorithme de Bellman-Ford pour trouver les plus courts chemins dans un réseau de routeur. Il est moins adapté que OSPF pour les grands réseaux à cause de la lenteur de la convergence : pour être sûr de disposer des chemins les plus courts, il faut obligatoirement opérer les $n - 1$ itérations de l'algorithme.

b Algorithme de Floyd-Warshall

L'algorithme de Floyd-Warshall [10, 22, 27] est l'application de la programmation dynamique⁴ à la recherche de l'**existence d'un chemin entre toutes les paires de sommets d'un graphe orienté et pondéré**. Les distances trouvées sont les plus courtes. **Les pondérations du graphe peuvent être négatives mais on exclut tout circuit de poids strictement négatif.**

Soit un graphe orienté et pondéré $G = (S, A, w)$. G peut être modélisé par une matrice d'adjacence M

$$\forall i, j \in \llbracket 0, |S| - 1 \rrbracket, M = \begin{cases} w(i, j) & \text{si } (i, j) \in A \\ +\infty & \text{si } (i, j) \notin A \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (23.3)$$

Un exemple de graphe associé à la matrice d'adjacence :

$$M_{\text{init}} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & +\infty & 0 & +\infty \\ +\infty & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad (23.4)$$

est donné sur la figure 23.5. Sur cet exemple, le chemin le plus court de 0 à 2 vaut -2 et passe par 3.

Chaque étape p de l'algorithme de Floyd-Warshall ne considère que les chemins possibles n'utilisant que les p premiers sommets. À l'étape p , on associe une matrice M_p qui contient la longueur des chemins les plus courts d'un sommet à un autre passant par des sommets de l'ensemble $\{v_0, v_1, \dots, v_{p-1}\}$. On construit ainsi une suite de matrice finie $(M_p)_{p \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et on initialise la matrice M avec M_{init} .

Supposons qu'on dispose de M_{p-1} . Considérons un chemin \mathcal{C} entre v_i et v_j dont la longueur est minimale et dont les sommets intermédiaires sont dans $\{v_0, v_1, \dots, v_{p-2}\}$, $p \leq n$. Pour un tel chemin :

- soit le plus court chemin passe par v_{p-1} . Dans ce cas, \mathcal{C} est la réunion de deux chemins dont les sommets sont dans $\{v_0, v_1, \dots, v_{p-1}\}$: celui de v_i à v_{p-1} et celui de v_{p-1} à v_j .
- soit le plus court chemin ne passe pas par v_{p-1} .

Entre ces deux chemins, on choisira le chemin le plus court.

4. cf. programme de seconde année



FIGURE 23.5 – Exemple de graphe orienté et pondéré pour expliquer le concept de matrice d'adjacence.

R Le chemin le plus court est au maximum de longueur n , sinon, on repasserait nécessairement par un sommet déjà visité (principe des tiroirs).

R $M_{p+1}(i, j)$ est le poids minimal d'un chemin de i à j dont les sommets sont inférieurs ou égaux à p .

On peut traduire notre explication ci-dessus par la relation de récurrence suivante :

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall i, j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, M_p(i, j) = \min(M_{p-1}(i, j), M_{p-1}(i, p-1) + M_{p-1}(p-1, j)) \quad (23.5)$$

Pour $p = 0$, on pose $M_0 = M_{\text{init}}$.

L'algorithme de Floyd-Warshall 52 est un bel exemple de programmation dynamique. Sa complexité temporelle est en $O(n^3)$. Il peut être programmé en place.

Algorithme 52 Algorithme de Floyd-Warshall, plus courts chemins entre toutes les paires de sommet

```

1: Fonction FLOYD_WARSHALL( $G = (S, A, w)$ )
2:    $M \leftarrow$  la matrice d'adjacence de  $G$                                  $\triangleright$  Correspond à  $M_0$ ,  $p = 0$ 
3:   pour  $p$  de  $1$  à  $|S| - 1$  répéter                                 $\triangleright$  Nombre de sauts
4:     pour  $i$  de  $0$  à  $|S| - 1$  répéter                                 $\triangleright$  Sommet de départ
5:       pour  $j$  de  $0$  à  $|S| - 1$  répéter                                 $\triangleright$  Sommet d'arrivée
6:          $M_p(i, j) = \min(M_{p-1}(i, j), M_{p-1}(i, p-1) + M_{p-1}(p-1, j))$ 
7:   renvoyer  $M$ 
```

R Cet algorithme ressemble à Bellman-Ford mais avec une vision globale, à l'échelle du graphe tout entier, pas uniquement par rapport à un sommet de départ. Il ne considère, à chaque itération, que les chemins possibles passant par les sommets d'indice au plus p . C'est pourquoi sa complexité est en $O(n^3)$.

■ **Exemple 98 — Application de l'algorithme de Floyd-Warshall.** Si on applique l'algorithme au graphe de la figure 23.5, alors on obtient la série de matrices suivantes :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & +\infty & 0 & +\infty \\ +\infty & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad (23.6)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ +\infty & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad (23.7)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ +\infty & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad (23.8)$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad (23.9)$$

E Le retour du sac à dos

a Position du problème

On cherche à remplir un sac à dos comme indiqué sur la figure 23.6. Chaque objet que l'on peut insérer dans le sac est **insécable**⁵ et possède une valeur et un poids connus. On cherche à maximiser la valeur totale emportée dans la sac à dos tout en limitant⁶ le poids à π .

On a vu au chapitre 14 que l'approche gloutonne ne donnait pas toujours le résultat optimal. On se propose donc de résoudre le problème par la programmation dynamique en appliquant la méthode 13.

b Modélisation du problème

Soit un ensemble $\mathcal{O}_n = \{o_1, o_2, \dots, o_n\}$ de n objets de valeurs v_1, v_2, \dots, v_n et de poids respectifs p_1, p_2, \dots, p_n . Soit un sac à dos n'admettant pas un poids emporté supérieur à π . On note également qu'on peut mettre au plus n objets dans le sac.

Les objets sont rangés dans une liste et dans un ordre quelconque. Ils sont indicés par i variant de 1 à n . Un objet o_i possède une valeur v_i et un pèse p_i .

Avec ces notations, on peut formuler le problème du sac à dos comme suit.

5. Soit on le met dans le sac, soit on ne le met pas. Mais on ne peut pas en mettre qu'une partie.

6. On accepte un poids total inférieur ou égal à π .



FIGURE 23.6 – Illustration du problème du sac à dos (d'après Wikipedia). On a cinq objets de poids 9, 12, 2, 7 et 5 kg et de valeur 10, 7, 1, 3 et 2 €. Le poids total admissible dans le sac est 15kg.

■ **Définition 174 — Problème du sac à dos.** Comment remplir un sac à dos en maximisant la valeur totale emportée V tout en ne dépassant pas le poids maximal π admissible par le sac à dos.

Formellement, comment maximiser $V = \sum_{o_i \in B} v_i$ en respectant la contrainte $\sum_{o_i \in B} p_i \leq \pi$ où B est l'ensemble des objets emportés dans le sac?

On note^a le problème du sac à dos KP(n, π) et une solution optimale à ce problème S(n, π).

^a. en anglais, ce problème est nommé Knapsack Problem, d'où le KP.

c Formulation récursive du problème en sous-problèmes non indépendants

Pour chaque objet o_i , si $p_i \leq \pi$, on peut le mettre dans le sac. La formulation récursive s'énonce alors ainsi :

- Soit l'objet o_i fait partie d'une solution optimale. Alors la fonction à maximiser vaut la valeur de l'objet o_i plus la valeur maximale atteignable avec les $n-1$ objets restants, sachant qu'on ne peut plus mettre que $\pi - p_i$ kg dans le sac.
- Soit l'objet o_i ne fait pas partie d'une solution optimale. Alors la fonction à maximiser vaut la valeur maximale atteignable avec les $n-1$ objets restants une fois cet objet o_i écarté. On peut toujours mettre π kg dans le sac.

Formellement, on exprime cette récursivité ainsi :

$$S(n, \pi) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou si } \pi = 0 \\ \max(v_n + S(n-1, \pi - p_n), S(n-1, \pi)) & \text{si } p_n \leq \pi \\ S(n-1, \pi) & \text{sinon} \end{cases} \quad (23.10)$$

Cette formulation prouve que **le problème du sac à dos possède une sous-structure optimale et que les problèmes se chevauchent** : pour un poids π maximal donné, **calculer une solution optimale de KP(n, π) nécessite de savoir calculer une solution optimale pour les $n-1$ premiers objets de la liste et pour des poids π et $\pi - p_i$** . Schématiquement, on peut représenter cette démarche comme sur la figure 23.7.

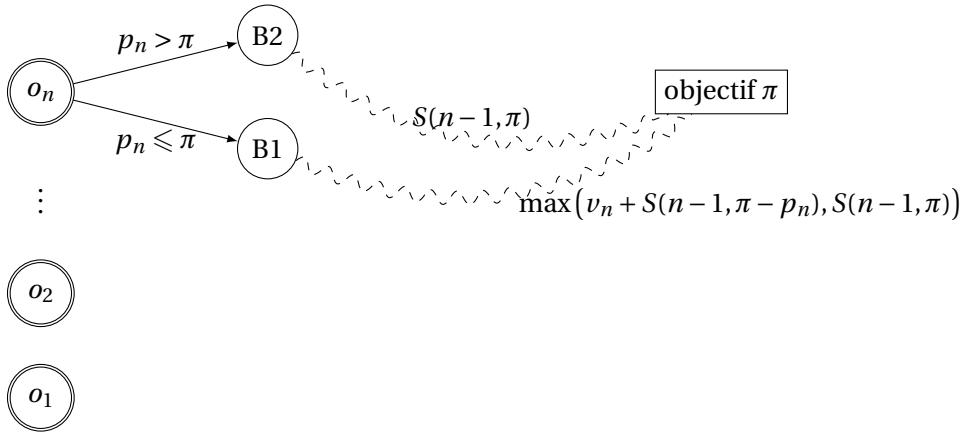


FIGURE 23.7 – Formulation récursive du problème du sac à dos.

R Attention au sens des notations : $S(i, P)$ est une solution au problème KP(i, P). Pour ce problème, on ne peut prendre que les i premiers objets de la liste et le poids maximum admissible est P . Si on considère $S(i-1, P-p_i)$, alors on ne peut prendre que les $i-1$ premiers objets de la liste et le poids maximal admissible est $P-p_i$. Les objets sont rangés dans un ordre quelconque.

d Création et initialisation du tableau de résolution

On cherche donc maintenant à créer un tableau à double entrée qui recense toutes les solutions optimales nécessaires à la résolution du problème KP(n, π). Ce tableau a pour dimension $(n+1, \pi+1)$:

- le nombre i d'objets dans le sac d'un côté à valeur dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. La valeur pour $i = 0$ est nulle, on ne prend pas d'objet.
- les poids P atteignables de l'autre à valeur dans $\llbracket 0, \pi \rrbracket$. La valeur pour $P = 0$ est nulle, on ne prend pas d'objet.

La valeur d'une case du tableau est $S(i, P)$.

Indice i de l'objet	1	2	3	4	5
valeur (€)	10	7	1	3	2
poids (kg)	9	12	2	7	5

TABLE 23.3 – Synthèse des informations relatives au problème de la figure 23.6.

Indice i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	0	0	1	1	1	2	2	3	3	10	10	11	11	11	12	12
4	0	0	1	1	1	1	1	3	3	10	10	11	11	11	11	11
3	0	0	1	1	1	1	1	1	1	10	10	11	11	11	11	11
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10	10	10	10	10	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10	10	10	10	10	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Poids (kg) →	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

TABLE 23.4 – Tableau de résolution du sac à dos dans le cas de la figure 23.6 donnant les valeurs de $S(i, P)$, avec $i \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$ et $P \in \llbracket 0, 15 \rrbracket$.

e Complétion du tableau par résolution ascendante

On considère la liste d'objets décrite sur le tableau 23.3 et qui correspond au problème décrit sur la figure 23.6. L'ordre des objets est **arbitraire**. Le résultat du calcul est donné sur le tableau 23.4. On a construit ce tableau du bas vers le haut en suivant l'algorithme 53.

Naturellement, sur l'exemple donné sur la figure 23.6, il est possible de calculer à la main les valeurs du tableau. Ce n'est guère le cas dans des situations réalistes, c'est pourquoi il faut maintenant écrire l'algorithme qui va permettre de compléter ce tableau dans l'ordre et ainsi de résoudre notre problème.

R Pour bien comprendre, il peut être utile de reproduire la figure 23.2 pour l'exemple du sac à dos KP(5, 7) par exemple!

R Le tableau de résolution est formé en général de $n + 1$ lignes et $m + 1$ colonnes. Le sens de la compléion du tableau dépend de la récurrence trouvée. Si les expressions trouvées sont du type :

- $S(i - 1, j - 2)$, il faut envisager la compléion du tableau de bas en haut et de gauche à droite.
- $S(i + 1, j + 2)$, il faut envisager la compléion du tableau de haut en bas et de droite à gauche.

0	$S(n, 1)$	$S(n, \pi)$
0
0	$S(i, 1)$	$S(i, P)$
0	$S(i-1, 1)$...	$S(i-1, P-p_i)$...	$S(i-1, P)$
0	p_i
0	0	0	0	0	0	0	0	0

FIGURE 23.8 – Schéma de remplissage du tableau pour le problème KP(n, π). Le poids se trouve sur l'axe horizontal et le nombre d'objets sur l'axe vertical. Pour calculer $S(i, P)$ on a besoin de $S(i-1, P)$ et de $S(i-1, P-p_i)$.

F Programmation dynamique itérative (approche ascendante)

L'algorithme 53 donne la procédure de résolution de KP(n, π) par programmation dynamique, de bas en haut et de gauche à droite et de manière itérative. Aucun calcul redondant n'est effectué.

Algorithme 53 KP(n, π) par programmation dynamique

```

1: Fonction KP_DP( $p, v, \pi, n$ )                                ▷  $p$  la liste de poids,  $v$  celle des valeurs
2:    $S \leftarrow$  un tableau d'entiers de taille  $(n+1, \pi+1)$ 
3:   pour  $i$  de 0 à  $n$  répéter                                ▷ de bas en haut
4:     pour  $P$  de 0 à  $\pi$  répéter                            ▷ de gauche à droite
5:       si  $i = 0$  ou  $P = 0$  alors
6:          $S[i, P] \leftarrow 0$ 
7:       sinon si  $p_i \leq P$  alors
8:          $S[i, P] \leftarrow \max(v_i + S[i-1, P-p_i], S[i-1, P])$ 
9:       sinon
10:         $S[i, P] \leftarrow S[i-1, P]$ 
11:   renvoyer  $S[n, \pi]$ 

```

Les complexités temporelle et spatiale de l'algorithme 53 sont en $O(n\pi)$.

G Programmation dynamique récursive (approche descendante)

Il est possible de résoudre le problème du sac à dos de manière récursive comme le montre l'algorithme 54. Néanmoins, comme les sous-problèmes se chevauchent, de nombreux calculs redondants sont effectués. Pour des valeurs importantes de n et π , cet algorithme est totale-

ment inefficace.

Algorithme 54 KP(n, π) par programmation récursive brute

```

1: Fonction KP_REC( $p, v, \pi, n$ )            $\triangleright p$  la liste de poids,  $v$  celle des valeurs
2:   si  $i = 0$  ou  $P = 0$  alors
3:     renvoyer 0
4:   sinon si  $p[i] \leq P$  alors
5:     renvoyer  $\max(v_n + \text{KP\_REC}(p, v, \pi - p_n, n - 1), \text{KP\_REC}(p, v, \pi, n - 1))$ 
6:   sinon
7:     renvoyer KP_REC( $p, v, \pi, n - 1$ )
  
```

■ **Définition 175 — Mémoïsation.** La mémoïsation est une technique de mise en mémoire de résultats intermédiaires afin de ne pas les recalculer.

Pour résoudre les problèmes de l'algorithme 54, les calculs intermédiaires sont stockés dans une structure de données, typiquement un tableau ou un dictionnaire. Avant chaque appel récursif, l'algorithme vérifie si le calcul à faire récursivement a déjà été effectué. Si c'est le cas, la solution stockée dans le tableau est utilisée. Sinon la récursivité s'exécute.

L'algorithme 55 donne la procédure de résolution de KP(n, π) en utilisant la mémoïsation. Cette technique récursive est considérée comme une implémentation possible de la programmation dynamique : les langages contemporains permettent même de l'automatiser (cf. décorateur `@lru_cache()` de la bibliothèque `functools` en Python).

Algorithme 55 KP(n, π) par programmation dynamique et mémoïsation

```

1: Fonction KP_MEM( $p, v, \pi, n, S$ )            $\triangleright S$  est un tableau d'entiers de taille  $(n + 1, \pi + 1)$ 
2:   si  $i = 0$  ou  $P = 0$  alors
3:     renvoyer 0
4:   sinon
5:     si la solution  $S[n, P]$  a déjà été calculée alors
6:       renvoyer  $S[n, P]$ 
7:     sinon si  $p_n \leq \pi$  alors
8:        $S[n, P] \leftarrow \max(v_n + \text{KP\_MEM}(p, v, \pi - p_n, n - 1, S), \text{KP\_MEM}(p, v, \pi, n - 1, S))$ 
9:       renvoyer  $S[n, P]$ 
10:    sinon
11:       $S[n, P] \leftarrow \text{KP\_MEM}(p, v, \pi, n - 1)$ 
12:      renvoyer renvoyer  $S[n, P]$ 
  
```

24

BASES DE DONNÉES RELATIONNELLES

Flight reservation systems decide whether or not you exist. If your information isn't in their database, then you simply don't get to go anywhere.

Arthur Miller

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ faire la différence entre une base de données et un SGBD
- ☞ modéliser des entités relatives à une réalité simple
- ☞ modéliser une association simple entre deux entités en précisant les cardinalités
- ☞ traduire une association dans un modèle relationnel
- ☞ interpréter un modèle relationnel de base de données

A Pourquoi ?

L'ubiquité de l'information n'est plus une vue de l'esprit aujourd'hui. La vie contemporaine n'est parfois qu'une suite ininterrompue de sollicitations de systèmes d'information qui ne cessent de générer des opérations sur des bases de données via des systèmes de gestion de bases de données. Par exemple :

- prendre un train, un bus, un avion, un bateau, une autoroute,
- louer un vélo, une voiture, une place de stationnement,
- réserver un hôtel, un article d'un magasin, un activité sportive ou culturelle, recevoir un colis,
- consulter un médecin, acheter des médicaments en pharmacie, faire des analyses médicales,

- payer ses impôts, demander une aide à la CAF, chercher un texte légal en vigueur dans le journal officiel,
- prendre une photo ou une vidéo sur son smartphone, envoyer un message à un proche, partager des informations via une application,
- jouer à un jeu en ligne, démarcher des clients ou chercher des collaborateurs via un réseau social...

Ces systèmes interagissent¹ entre eux à la suite de nos actions, souvent à l'insu même de l'instigateur. La plupart des requêtes sont tellement rapides qu'elles sont imperceptibles à l'être humain, à moins d'analyser finement ce que l'on est en train de faire et l'information que l'on manipule. Nous produisons collectivement et à travers eux des quantités inimaginables d'information.

■ **Exemple 99 — Quantité d'information sur les serveurs à l'échelle mondiale.** À l'échelle mondiale, on estime actuellement la quantité d'information créée et sauvegardée annuellement^a à une centaine de Zio (zebiocets), soit 100×2^{70} octets. Pour se donner une idée, si on estime qu'un machine personnelle possède en standard un disque dur de 128 Gio, cela représente 858993459200 disques durs, soit environ 858 milliards. Nous sommes pour l'instant moins de 8 milliards d'habitants sur Terre... Gageons que ces données créées, sauvegardées, diffusées et recopiées sont toujours utiles!?

a. Ces données ne tiennent pas compte des machines personnelles (ordinateurs ou smartphones) ni des objets connectés.

🇬🇧 **Vocabulary 24 — bit** ↳ bit Unité binaire de l'information. Une information est pour l'instant représentée en machine par un ensemble de symboles binaires généralement notées 0 et 1.

🇬🇧 **Vocabulary 25 — Byte** ↳ octet. Un octet est constitué de huit bits.

Les bases de données étaient déjà au cœur des systèmes d'information, même avant l'ère informatique. Elles sont présentes aujourd'hui dans les systèmes d'exploitation, les applications des smartphones et même sur les objets connectés.

Ce chapitre traite de la modélisation de l'information pour les bases de données. Car, avant de pouvoir manipuler concrètement l'information de manière cohérente, il faut dégager un modèle qui décrit la réalité qu'on est en train de manipuler pour lui donner un sens. C'est l'enjeu de la modélisation conceptuelle et logique et du modèle relationnel associé.

B Données et gestion des données

■ **Définition 176 — Base de données.** Une base de données est un ensemble de données enregistré représentant une partie du monde ou une activité humaine.

1. Les canadiens parlent d'infonuagique pour l'informatique dans le cloud.

Il est de l'intérêt du concepteur et de l'utilisateur de limiter le périmètre d'une base de données. Par exemple, on s'intéressera aux documents d'une médiathèque, aux pneumatiques distribués en France, aux légumes cultivables en agriculture biologique ou aux dossiers scolaires des étudiants.

Une base de données est une idée que l'on peut concrétiser en écrivant sur des cahiers ou en programmant des ordinateurs selon ce que l'on veut en faire.

■ **Définition 177 — Système de Gestion de Base de Données (SGBD).** Un système de gestion de base de données est un ensemble logiciel dont le but est de gérer une base de données stockée sur support informatique. Il s'agit de garantir l'accès, la lecture, l'écriture, l'interrogation ou la modification de la base de données d'une manière cohérente et efficace.

■ **Exemple 100 — SGBD.** Parmi les SGBD les plus utilisés, on peut citer Oracle, MySQL, PostgreSQL, SQLite ou Microsoft SQL Server.

L'interaction avec les SGDB contemporains a été standardisée et on peut aujourd'hui utiliser le langage SQL pour interagir avec la plupart des SGBD. Au-delà de la manipulation des données, un SGBD doit pouvoir veiller à la cohérence et à l'intégrité des informations toute en garantissant des transactions rapides.

■ **Définition 178 — Structured Query Language.** SQL est un langage informatique normalisé servant à interagir avec des bases de données relationnelles. Il permet de manipuler (rechercher, ajouter ou supprimer, modifier) des informations, mais aussi de créer et de contrôler l'intégrité des données et des transactions sur une base de données relationnelle.

C De la conception à l'implémentation physique

La réalisation d'une base de données n'est pas une agrégation brute de données : c'est la réalisation d'une structure cohérente avec un contexte. Pour que les recherches s'effectuent simplement et efficacement, il est nécessaire de décrire, au-delà des données elles-mêmes, les liens sémantiques qui existent et qui relient les données entre elles, mais également la manière dont on stocke logiquement et physiquement les données ainsi que les transactions possibles.

La conception d'une base de données s'effectue la plupart du temps en trois étapes :

1. on établit d'abord un modèle **conceptuel** de la réalité à modéliser,
2. puis on choisit une représentation **logique** de ce modèle (généralement le modèle relationnel)
3. enfin, on implémente **physiquement** la base de données à l'aide d'un SGBD.

R Un modèle de base de données n'est pas unique. Selon le degré des exigences spécifiées par les utilisateurs de la base, différents modèles peuvent convenir. Les modèles proposés

par la suite sont donc toujours perfectibles. C'est normal. En général en ingénierie, on peut parvenir à des solutions différentes pour résoudre un même problème. On parle alors d'équifinalité.

a Modélisation conceptuelle

L'étape de modélisation conceptuelle s'affranchit de toute considération d'implémentation de la base de données pour se concentrer sur la **description sémantique de la réalité à modéliser**, c'est à dire le sens de cette réalité. Un réalité consiste le plus souvent en une activité humaine décrite simplement par un texte comme le montre l'exemple 104. L'analyse de ce texte et des mots le composant permet de dégager les éléments à modéliser. Cette modélisation est donc avant tout une activité du *langage* et une activité d'*abstraction*². Elle s'appuie généralement sur le modèle entité-association ou le langage Unified Modeling Language (UML).

■ **Définition 179 — Entité ou classe.** Une entité est un concept qui représente une abstraction d'un ensemble de données que l'on peut regrouper et caractériser par des attributs communs

■ **Exemple 101 — La voiture, une entité simple.** Une voiture est une entité : elle représente les véhicules à quatre roues motorisés. Elle est caractérisée d'être d'une marque particulière et par le fait de posséder quatre roues, des portes, un moteur, un poste de pilotage.

■ **Exemple 102 — Un conducteur de voiture, une entité simple.** Un conducteur est une entité : elle représente la personne qui conduit un véhicule. Elle est caractérisée un nom et un numéro de permis.

■ **Définition 180 — Association.** Une association entre entités définit un ensemble de liens entre ces entités. Généralement, une association est représentée par un verbe. Elle est pondérée par des cardinalités qui précisent le nombre d'entités mises en jeu dans cette association. Une association peut réunir une, deux ou trois entités, on dit alors qu'elle est unaire, binaire ou ternaire.

■ **Exemple 103 — Conduire, une association simple.** Conduire est une association binaire : elle relie une entité conducteur à une entité véhicule. Selon la réalité à modéliser, on pourra pondérer cette association différemment. Par exemple, une personne peut ne conduire qu'une seule voiture. Mais certains conducteurs conduisent plusieurs voitures. De la même manière, une voiture peut être conduite par un ou plusieurs conducteurs selon la situation.

■ **Définition 181 — Modèle entité-association.** Le modèle entité-association cherche à représenter sur un même schéma des entités et des associations identifiables dans une réalité à modéliser.

2. Il n'y a pas que les mathématiques dans la vie, il y a le langage aussi!

■ **Exemple 104 — Une réalité à modéliser.** Afin d'illustrer le modèle entité-association, on a capturé une réalité à modéliser. Cette capture se fait la plupart du temps grâce à des entretiens avec les personnes impliquées dans le contexte. Voici le texte décrivant la réalité à modéliser :

Une société de production recense les concerts donnés par des orchestres sur une saison. Chaque orchestre est décrit par son nom. Elle qualifie les orchestres en catégories selon leur style (baroque, symphonique, chambre, jazz, expérimental), sachant qu'un même orchestre ne peut faire partie que d'une seule catégorie. Un orchestre est dirigé par un chef d'orchestre dont on connaît le nom et le prénom. Au cours d'une même saison, un même orchestre peut accueillir plusieurs chefs différents. De la même manière, un chef peut diriger plusieurs orchestres. La résidence d'un orchestre définit son lieu de répétition. Une résidence est occupée par un seul orchestre mais un orchestre peut ne pas avoir de résidence. Elle est caractérisée par une ville et un pays.

On souhaite disposer d'une base de données pour accéder facilement à :

- *la liste des chefs d'un orchestre,*
- *la liste des pays de résidence des orchestres,*
- *la liste des orchestres de même style.*

La réalité décrite dans l'exemple 104 peut être modélisée et représentée graphiquement comme sur la figure 24.1. L'intérêt de cette modélisation n'est pas uniquement son intelligibilité pour l'être humain : des outils³ capables de transformer ce modèle graphique en modèle logique voire physique⁴ existent et sont couramment utilisés.

Sur la figure 24.1, les cardinalités viennent quantifier le nombre d'entités qui participent à une association. Le premier nombre quantifie la cardinalité minimale de l'association, le second la cardinalité maximale.

■ **Définition 182 — Types d'association.** On définit plusieurs types d'association en fonction des cardinalités **maximales** qu'elles mettent en jeu :

1. de un à un,
2. de un à plusieurs,
3. de plusieurs à plusieurs.

■ **Exemple 105 — Interprétations des cardinalités des associations de l'exemple 104.** La notation 0 – 1 à droite de l'association *occupe* sur la figure 24.1 signifie qu'un orchestre occupe zéro ou une seule résidence, conformément à l'énoncé de l'exemple 104.

Le 1 – 1 au-dessous de l'association *occupe* signifie qu'une résidence est occupée au plus par un orchestre et au moins par un orchestre, c'est à dire exactement par un orchestre, conformément à l'énoncé.

Cette association *occupe* est de type **un à un**, car de chaque côté la cardinalité maximale

3. des compilateurs

4. c'est à dire en base de données concrète et utilisable



FIGURE 24.1 – Un modèle conceptuel de type entité-association associé à la réalité de l'exemple 104. Les entités sont inscrites dans des rectangles, les attributs des entités dans des ovales et les associations entre les entités dans des losanges. Des cardinalités sont précisées sur les arcs qui relient les entités aux associations

vaut un.

La notation $0-n$ au dessus de l'association ***qualifie*** sur la figure 24.1 signifie qu'un style qualifie zéro ou plusieurs orchestres.

Le $1-1$ au-dessous de l'association ***qualifie*** signifie qu'un orchestre est qualifié exactement par un style.

Cette association ***qualifie est de type un à plusieurs***, car la cardinalité maximale de part et d'autre de l'association vaut un et n.

La notation $0-n$ au dessus de l'association ***dirige*** sur la figure 24.1 signifie qu'un chef d'orchestre peut diriger zéro ou plusieurs orchestres. Le zéro laisse la possibilité à un chef d'être libre de tout engagement.

Le $0-n$ au dessous de l'association ***dirige*** signifie qu'un orchestre peut être dirigé par zéro ou plusieurs chefs. Le zéro laisse la possibilité à un orchestre de ne pas avoir de chef.

L'association ***dirige est de type plusieurs à plusieurs***, car la cardinalité maximale de chaque côté de l'association vaut n.

R Pour comprendre les cardinalités sur la figure 24.1, une bonne maîtrise de la voix active et de la voix passive en français est nécessaire. On lit une association dans un sens à la voix active et dans l'autre sens à la voix passive. L'interprétation des cardinalités découle de cette lecture à double voix.

b Modélisation logique

■ **Définition 183 — Modèle logique.** Un modèle logique s'élabore à partir d'un modèle conceptuel. Il explique comment sont structurées les données dans le logiciel de base de données. Il ne dit pas comment implémenter les structures mais spécifie :

- le type de structure qui enregistre les entités et les associations,
- le type de données des attributs et les valeurs possibles,
- les clefs qui identifient les entités,
- les contraintes référentielles liées à l'intégrité entre les éléments du modèle.

R Par essence, une base de données est partagée entre plusieurs utilisateurs^a. Certains utilisateurs ont plus de droits que d'autres. Par exemple, ils peuvent avoir le droit d'insérer des nouveaux enregistrements. Il n'est pas rare de trouver dans les bases de données mal conçues :

- des doublons,
- des valeurs aberrantes,
- des valeurs incohérentes.

Pour remédier à ceci, on impose des contraintes sur le modèle logique de la base de données.

^a. voirie des millions...

■ **Définition 184 — Contrainte d'unicité.** Une contrainte d'unicité précise qu'un attribut ou un ensemble d'attributs d'une entité est unique dans la base de données. On ne peut donc plus insérer deux informations différentes dont ces attributs seraient identiques. Cela permet d'éviter l'insertion d'informations redondantes. Elle est réalisée grâce à une clef primaire.

■ **Définition 185 — Clef primaire.** Une clef primaire est un attribut ou un ensemble d'attributs d'une entité qui permet de distinguer un représentant de cette entité d'un autre. C'est un identifiant qui garantit l'unicité des données.

R Dans le modèle relationnel, une clef primaire permet d'identifier les enregistrements d'une relation : le SGBD peut vérifier qu'il n'y a bien qu'une seule fois une même information dans une relation (unicité). Au niveau physique, la clef primaire distingue les lignes d'une table.

■ **Exemple 106 — Identifier une voiture et un conducteur.** L'identifiant choisi pour une entité voiture est généralement sa plaque d'immatriculation qui est unique au moins à l'échelle d'un pays. Ainsi, on ne pourra pas confondre deux voitures. De même, pour un conducteur, le plus sûr est de choisir son numéro de permis de conduire. On pourrait imaginer utiliser la combinaison de son nom et de sa date de naissance. Cela peut malheureusement ne pas suffire dans certaines situations^a.

a. Un conducteur nommé Jean Martin, étant donné qu'il porte le prénom et le nom les plus courants en France, peut avoir un homonyme né le même jour. Ce n'est pas exclu.

Si la contrainte d'unicité protège des doublons, elle ne protège pas des valeurs aberrantes ou incohérentes.

■ **Définition 186 — Contrainte référentielle.** Une contrainte référentielle spécifie qu'un attribut d'une entité faisant référence à une autre doit nécessairement référencer l'autre entité en question pour ne pas dupliquer les informations^a. Ce référencement se fait via une clef étrangère.

a. et les rendre incohérente par la même occasion...

■ **Définition 187 — Clef étrangère.** Une clef étrangère est un attribut ou ensemble d'attributs d'une entité qui permet de faire référence à un représentant d'une autre entité. C'est, le plus souvent, la clef primaire d'une autre entité.

Construire un modèle logique d'une base de données, c'est donc se poser de nombreuses questions sur les données et ce qu'on peut ou doit en faire. Toutes les réponses formulées ont un impact sur la structure logique de la base de données.

Le modèle logique généralement utilisé dans le domaine des bases de données est le modèle relationnel qui est décrit à la section D.

c Modélisation physique

■ **Définition 188 — Modèle physique.** Un modèle physique est l'implémentation d'un modèle logique dans un SGBD.

Pour implémenter ce modèle physique en mémoire, le SGBD crée alors :

- la base de données (sur un serveur ou dans un fichier),
- toutes les structures de données nécessaires pour enregistrer les données,
- les contraintes logicielles d'unicité et de référencement,
- des vues pour simplifier la visualisation des données,
- des index pour accélérer l'exécution des requêtes.

La réalisation d'une base de données physiquement est hors programme. Dans toutes les épreuves, on considère que la base de données a déjà été implémentée, elle est donc fournie.

D Le modèle relationnel

Cette section décrit plus précisément le modèle relationnel qui est au programme de l'épreuve d'informatique commune. C'est à partir de ce modèle que l'on peut effectuer des requêtes sur des bases de données.

Le modèle relationnel repose sur l'algèbre relationnelle, de solides fondements mathématiques qui ne sont pas exposés ici car hors programme, mais qui justifient pleinement son adoption massive comme modèle logique de référence.

■ **Définition 189 — Modèle relationnel.** Le modèle relationnel est un modèle logique de base de données pour lequel :

- l'information est structurée en tableaux à deux dimensions : les relations.
- les entités décrites dans ces tableaux doivent l'être indépendamment des associations qui les relient.

Un exemple de modèle relationnel est donné sur la figure 24.2 : on y retrouve les définitions données ci-dessous.

■ **Définition 190 — Relation.** Une relation est tableau à deux dimensions constitué :

1. d'un entête qui contient la liste des noms des attributs associés à leur domaine,
2. d'un corps qui est un ensemble de lignes dont les éléments sont des valeurs qui appartiennent aux domaines des attributs correspondant dans l'entête.

Les attributs d'une relation relèvent tous d'une entité commune.

■ **Définition 191 — Ligne ou enregistrement.** Un enregistrement est une ligne dans le corps d'une relation. Un enregistrement représente une instance d'une entité. Généralement on parle de ligne au niveau logique et d'enregistrement au niveau physique.



FIGURE 24.2 – Modèle relationnel construit à partir du modèle conceptuel 24.1. Seules les en-têtes de colonne des relations sont représentées. Les associations du modèle conceptuel ont été intégrées aux tables en ajoutant des colonnes qui contiennent les clefs primaires et les clefs étrangères nécessaires ou en créant une nouvelle table (direction). Les flèches mettent en évidence ces associations.

R Au niveau physique, on désigne une relation par le terme **table**, ce qui est légitime car son implémentation est un tableau. Les **lignes** d'une relation sont les enregistrements de la table. Les colonnes d'une table sont les attributs de la relation.

■ **Définition 192 — Domaine d'un attribut.** Le domaine d'un attribut est l'ensemble des valeurs qu'il peut prendre.

■ **Exemple 107 — Domaine d'un attribut *paiement*.** Si l'attribut d'une entité *paiement* est une monnaie, alors le domaine associé à cet attribut est l'ensemble de toutes monnaies possibles : euro, dollar, rouble, yen, livre sterling...

R Certains SGBD n'utilisent pas le modèle relationnel, on parle de systèmes NoSQL. Ils sont souvent utilisés lorsque les modèles de données à gérer varient rapidement.

La représentation des entités du modèle conceptuel est naturel dans le modèle relationnel : une entité est représentée par une table. Par contre, représenter une association demande un travail supplémentaire.

E Traduction des associations dans le modèle relationnel

Cette section s'attache à décrire comment on peut traduire les associations d'un modèle conceptuel dans un modèle relationnel.

M **Méthode 14 — Transformation d'une association de un à un** Une association de un à un se traduit par l'apparition d'une clef étrangère dans une des deux tables du modèle relationnel.

Par exemple, sur le modèle conceptuel de la figure 24.1, la relation *occupe* est une association de un à un. Concrètement, au niveau des tables du modèle relationnel, on peut ajouter une colonne à la table *résidence*, colonne de même type que la clef primaire de la table *orchestre*. Cette colonne de la table *résidence* devient une clef étrangère qui référence la table *orchestre*, signifiant ainsi qu'une résidence est occupée par un orchestre comme le montre la figure 24.3.

R Les colonnes ajoutées aux tables et représentant des clefs étrangères portent souvent le même nom que la clef primaire à laquelle elles se réfèrent. C'est une bonne pratique. Cependant, il est possible de leur donner des noms différents.

R Les cardinalités minimales sont généralement traduites dans le modèle relationnel par des contraintes qui n'apparaissent pas sur les schémas mais dans la manière de compléter les colonnes des clefs étrangères.

Pour une association dont la cardinalité est minimale est 1, on impose à la clef étrangère d'être définie : par exemple, pour le modèle de la figure 24.1, le fait qu'une résidence soit nécessairement occupée par un orchestre implique que le SGBD doit vérifier qu'à chaque nouvelle insertion d'une résidence, cette clef soit présente et référence un orchestre en particulier.

Pour une cardinalité minimale 0, lors de l'insertion d'un nouvel enregistrement, une clef étrangère peut ne pas être définie.



FIGURE 24.3 – Traduction d'une association de un à un dans un modèle relationnel. Modèle relationnel spécifiant les tables résidence et orchestre du modèle relationnel de la figure 24.2.

M Méthode 15 — Transformation d'une association de un à plusieurs Une association de un à plusieurs se traduit par l'apparition d'une clef étrangère dans la table dont la cardinalité maximale vaut un.

Par exemple, sur le modèle conceptuel de la figure 24.1, la relation *qualifie* est une association de un à plusieurs. Concrètement, au niveau des tables du modèle relationnel, on peut ajouter une colonne à la table *orchestre*, colonne de même type que la clef primaire de la table *style*. Cette colonne de la table *orchestre* devient une clef étrangère qui référence la table *style*, signifiant ainsi qu'un orchestre est qualifié par un style, comme le montre comme le montre la figure 24.4.



FIGURE 24.4 – Traduction d'une association de un à plusieurs dans un modèle relationnel. Modèle relationnel spécifiant les tables *orchestre* et *style* du modèle relationnel de la figure 24.2.

M Méthode 16 — Transformation d'une association de plusieurs à plusieurs Une association de plusieurs à plusieurs se traduit par la création d'une nouvelle table dans la base de données. On choisit généralement de nommer cette table d'après le nom de l'association. Cette nouvelle table contient deux clefs étrangères, chacune pointant vers une extrémité différente de l'association.

Par exemple, sur le modèle conceptuel de la figure 24.1, la relation *dirige* est une association de plusieurs à plusieurs. Concrètement, au niveau des tables du modèle relationnel, on ajoute une table nommée direction. Cette table comporte au moins deux colonnes, deux clefs étrangères : l'une pointe vers la clef primaire de la table orchestre et l'autre vers la clef primaire de la table chef. Une direction est le fait qu'au cours de la saison, un chef dirige un orchestre. La figure 24.5 montre comment transformer une relation de plusieurs à plusieurs dans le cas du modèle conceptuel de la figure 24.1.



FIGURE 24.5 – Traduction d'une association de plusieurs à plusieurs dans un modèle relationnel. Modèle relationnel spécifiant les tables orchestre, direction et chef qui implémente l'association *dirige* du modèle conceptuel de la figure 24.1.



FIGURE 24.6 – Modèle physique de la base de données du modèle relationnel 24.2.

F Du modèle physique à la création des tables

--> HORS PROGRAMME

Il existe donc trois types de modèle pour décrire les base de données selon que l'on se place au niveau :

1. conceptuel,
2. relationnel (logique),
3. ou physique.

Sur la figure 24.6 est schématisé le modèle physique associé au modèle relationnel de la figure 24.2 et au modèle conceptuel de la figure 24.1.

Sur ce modèle physique sont notamment précisés les types des attributs en essayant de minimiser la taille en mémoire de chaque attribut.

Le langage SQL permet la création de ce modèle physique. Le code 24.1 montre comment créer les tables concrètes associées au modèle physique de la figure 24.6 dans la base de don-

nées. En plus des types des attributs y figurent également les contraintes de clefs primaires et étrangères.

Code 24.1 – Création du modèle physique d'une base de données

```

CREATE TABLE "chef"
(
    "id_chef" INTEGER,
    "nom"      VARCHAR(80),
    "prenom"   VARCHAR(80),
    PRIMARY KEY ("id_chef")
);

CREATE TABLE "style"
(
    "nom"      VARCHAR(80),
    PRIMARY KEY ("nom")
);

CREATE TABLE "orchestre"
(
    "id_orch"  INTEGER,
    "nom"      VARCHAR(80),
    "id_style" VARCHAR(80),
    PRIMARY KEY ("id_orch"),
    FOREIGN KEY ("id_style") REFERENCES "style"
);

CREATE TABLE "residence"
(
    "id_res"   INTEGER,
    "ville"    VARCHAR(80),
    "pays"     VARCHAR(80),
    "id_orch"  INTEGER,
    PRIMARY KEY (id_res),
    FOREIGN KEY ("id_orch") REFERENCES orchestre (id_orch)
);

CREATE TABLE "direction"
(
    "id_dir"   INTEGER,
    "id_chef"  INTEGER,
    "id_orch"  INTEGER,
    PRIMARY KEY ("id_dir"),
    FOREIGN KEY ("id_chef") REFERENCES chef (id_chef),
    FOREIGN KEY ("id_orch") REFERENCES orchestre (id_orch)
);

```

25

MODÈLE RELATIONNEL ET LANGAGE SQL

Did you really name your son ROBERT') ; DROP TABLE
students;--?

Exploits of a Mom, XKCD

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ interpréter et utiliser un modèle relationnel de base de données
- ☒ utiliser les opérateurs de projection et de sélection sur un modèle simple (select from, where)
- ☒ utiliser les clefs primaires et étrangères dans une requête simple
- ☒ opérer une jointure interne entre plusieurs tables (join on)
- ☒ utiliser les fonctions d'agrégation pour un calcul simple (min, max, sum, avg, count)
- ☒ filtrer des agrégations d'après un critère (having)
- ☒ utiliser des opérateurs ensemblistes (intersect, union, except)

A Requêtes SQL

SQL est le langage de manipulation et de création du modèle relationnel. Il implémente les opérations de l'algèbre relationnelle. De type déclaratif, ce langage décrit donc ce que l'on veut faire sur la base de données, pas comment on veut le faire car le SGBD s'en charge.

Les épreuves d'informatique commune proposent essentiellement de rédiger des requêtes SQL sur un base de données proposée. C'est un sous-ensemble de possibilité du langage qui permet déjà de se divertir un peu!

■ **Définition 193 — Requête SQL.** Une requête SQL consiste à extraire des données issues d'une base de données relationnelle en utilisant les opérateurs relationnels. Ces opérateurs sont :

- SELECT ...FROM
- WHERE
- GROUP BY
- HAVING
- ORDER BY

S'ajoutent à ces opérateurs, les opérations ensemblistes (union, intersection et différence) ainsi que l'opérateur de jointure (JOIN).

La structure générique d'une requête SQL est donnée sur le figure 25.1.

Code 25.1 – Structure de base d'une requête SQL : projection et sélection

```
— Commentaire
SELECT nom          — OPERATEUR attribut
  FROM ville        — OPERATEUR table
 WHERE nom_pays = "France"; — OPERATEUR condition
```

Dans tout le chapitre, on considère qu'on manipule le modèle relationnel donné sur la figure 25.1 via le langage SQL.



FIGURE 25.1 – Modèle relationnel utilisé pour les exemples de projection et de sélection.

B Projection : SELECT ...FROM

■ **Définition 194 — Projection.** Une projection est une opération qui consiste à sélectionner des colonnes (attributs) dans une table. En langage SQL, la projection est effectuée grâce aux mots clefs **SELECT** et **FROM**.

Code 25.2 – Exemples de projections

```
SELECT nom      — la colonne nom
  FROM ville;   — de la table ville
— SORTIE DU SGBD :
— Brest
— Brest
— Londres
— Exeter
— Edinburgh
— Londres
— Plymouth
— Rome
— Limoges
— Vienne
— Salzbourg
```



```
SELECT *      — toutes les colonnes
  FROM ville; — de la table ville
— SORTIE DU SGBD :
— 1 Brest France 140547
— 2 Brest Bielorussie 309764
— 3 Londres Royaume-Uni 8250205
— 4 Exeter Royaume-Uni 113507
— 5 Edinburgh Royaume-Uni 459366
— 6 Londres Canada 366151
— 7 Plymouth Royaume-Uni 234982
— 8 Rome Italie 2617175
— 9 Limoges France 137758
— 10 Vienne Autriche 1761738
— 11 Salzbourg Autriche 146676
```



```
SELECT nom, nom_pays — la colonne nom et la colonne nom_pays
  FROM ville; — de la table ville
— SORTIE DU SGBD :
— Brest France
— Brest Bielorussie
— Londres Royaume-Uni
— Exeter Royaume-Uni
— Edinburgh Royaume-Uni
— Londres Canada
— Plymouth Royaume-Uni
— Rome Italie
— Limoges France
— Vienne Autriche
— Salzbourg Autriche
```

C Sélection : WHERE ...

■ **Définition 195 — Sélection.** Une sélection est une opération qui consiste à sélectionner des lignes (enregistrements) dans une table. En langage SQL, la sélection est effectuée grâce au mot clef `WHERE` suivi d'une condition.

Code 25.3 – Sélections

```
SELECT nom      — la colonne nom
FROM ville      — de la table ville
WHERE nom_pays = "France";
— condition de selection : les lignes dont la colonne nom_pays vaut "France"
— SORTIE DU SGBD :
— Brest
— Limoges

SELECT nom      — la colonne nom
FROM ville      — de la table ville
WHERE nom_pays = "France" OR nom_pays = "Royaume-Uni";
— condition de selection : les lignes dont la colonne nom_pays vaut "France" ou du "
  Royaume Uni"
— SORTIE DU SGBD :
— Brest
— Londres
— Exeter
— Edinburgh
— Plymouth
— Limoges
```

Une fois la projection et la sélection effectuée, on peut préciser la manière dont les résultats s'affichent : on peut ordonner les résultats selon un attribut en particulier, c'est la vocation des mots-clefs `ORDER BY`. L'ordre suivi par le SGBD sera l'ordre alphabétique ou numérique en fonction du type de données par rapport auquel on souhaite ordonner. Si on souhaite ordonner par un attribut de type texte, c'est l'ordre lexicographique qui est utilisé. Si on souhaite ordonner par un attribut du type entier, c'est l'ordre numérique qui sera choisi.

On peut également indiquer qu'on veut une projection sans redondance, c'est-à-dire ne garder qu'un seul exemplaire de chaque résultat (cf. code 25.4) grâce aux mots-clefs `SELECT DISTINCT`.

L'opérateur `LIMIT n` permet de limiter le nombre de réponses aux `n` premières. L'opérateur `OFFSET n` permet d'écarter les `n` premières réponses. En combinant les deux, on peut sélectionner n'importe quelle plage de la réponse.

Code 25.4 – Sélections - ordre des résultats - projection non redondante

```

SELECT nom      — la colonne nom
FROM ville      — de la table ville
WHERE nom_pays = "France" OR nom_pays = "Royaume-Uni"
ORDER BY nom_pays;
— condition de selection : colonne nom_pays vaut "France" ou du "Royaume Uni"
— ordonner par nom_pays
— SORTIE DU SGBD :
— Brest
— Londres
— Exeter
— Edinburgh
— Plymouth
— Limoges

SELECT DISTINCT nom_pays   — la colonne nom_pays
FROM ville           — de la table ville
ORDER BY nom_pays;
— projection : les pays des villes sans redondance DISTINCT
— ordonner par nom_pays
— SORTIE DU SGBD :
— Autriche
— Bielorussie
— Canada
— France
— Italie
— Royaume-Uni

SELECT nom, population   — la colonne population
FROM ville             — de la table ville
ORDER BY nom_pays       — regrouper par pays
LIMIT 3;                — les trois premiers resultats
— SORTIE DU SGBD :
— Vienne 1761738
— Salzbourg 146676
— Brest 309764

SELECT nom, population
FROM pays
ORDER BY population
LIMIT 3      — les trois premiers resultats
OFFSET 2;    — on ecarte les 5 premieres
— SORTIE DU SGBD :
— Canada 35151728
— Italie 59433744
— Royaume-Uni 64105654

```

R Il est possible qu'il existe une ambiguïté dans le nom des attributs. Par exemple, la table *ville* possède un champ nom, tout comme la table *pays*. Parfois, cette ambiguïté n'a pas de conséquence, comme dans le code 25.10 : on a deux commandes `SELECT nom` qui désignent deux attributs différents, mais cela reste intelligible pour le SGBD, car ces commandes font parties de deux projections différentes, les `FROM` sont différents.

Cependant, il arrive que le SGBD ne puisse pas lever l'ambiguïté des noms utilisés. Dans ce cas, on peut soit :

- utiliser le préfixe du nom de la table suivi d'un point pour désigner un attribut. Par exemple, pour ne pas confondre la population d'une ville et la population d'un pays, on peut écrire les deux expressions `ville.population` et `pays.population`.
- renommer les tables, les attributs ou les champs calculés grâce à l'opérateur de renommage `AS` comme dans le code 25.5.

D Jointure : JOIN ...ON ...

Il est possible d'effectuer une requête SQL sur plusieurs tables simultanément, soit en utilisant le produit cartésien de tables explicitement soit en effectuant un jointure interne. Celle-ci est la syntaxe à privilégier pour cette opération.

■ **Définition 196 — Jointure.** En langage SQL, une jointure est un de construire une information issue de plusieurs tables dans une même requête en créant une liaison logique entre les tables. Elle effectue un produit cartésien des tables filtré d'après la condition de jointure.

R Pour associer deux tables dans une jointure, il est nécessaire d'utiliser les mots-clefs `JOIN` et `ON`. Après `JOIN` on précise quelles tables sont à joindre, après `ON` on explicite la condition qui crée la filtre les lignes ainsi créées.

■ **Exemple 108 — Exemples de jointures.** Le code 25.5 présente deux jointures de type différent.

La première jointure est une jointure entre deux tables différentes. La condition de jointure est que les lignes des deux tables doivent porter les mêmes noms de pays. La figure 25.2 détaille les étapes de cette requête.

La seconde est une autojointure, c'est-à-dire qu'on relie la table à elle-même pour faire une requête. Dans cet exemple, on joint deux à deux les lignes des villes qui font parties d'un même pays, puis on sélectionne les lignes dont la première ville possède une population plus grande que la seconde.

Code 25.5 – Exemples de jointures

```

SELECT ville.nom, pays.population
FROM ville
JOIN pays
ON ville.nom_pays = pays.nom
WHERE pays.population < 60000000;
— Jointure de ville et pays d'apres les noms des pays
— Condition : les pays comportent moins de 60 millions d'habitants
— Sortie du SGBD
— Brest 9460692
— Londres 35151728
— Rome 59433744
— Vienne 8499759
— Salzbourg 8499759

SELECT v.nom, w.nom, v.population-w.population
FROM ville as v
JOIN ville as w
ON v.nom_pays = w.nom_pays
WHERE v.population > w.population;
— Projection avec renommage v
— Autojointure avec renommage w
— La condition de jointure est que le nom du pays des deux villes doit etre le meme.
— La selection ne retient que les couples de villes tels que la premiere ville est
    plus peuplee
— On calcule la difference de population entre les deux villes
— SORTIE DU SGBD :
— Brest Limoges 2789
— Londres Edinburgh 7790839
— Londres Exeter 8136698
— Londres Plymouth 8015223
— Edinburgh Exeter 345859
— Edinburgh Plymouth 224384
— Plymouth Exeter 121475
— Vienne Salzbourg 1615062

```

Étape 1 : jointure des tables ville et pays d'après les noms des pays.

<u>id_ville</u>	nom	nom_pays	population	<u>nom</u>	capitale	population
1	Brest	France	140547	France	Paris	64933400
2	Brest	Biélorussie	309764	Biélorussie	Minsk	9460692
3	Londres	Royaume-Uni	8250205	Royaume-Uni	Londres	64105654
4	Exeter	Royaume-Uni	113507	Royaume-Uni	Londres	64105654
5	Edinburgh	Royaume-Uni	459366	Royaume-Uni	Londres	64105654
6	Londres	Canada	366151	Canada	Ottawa	35151728
7	Plymouth	Royaume-Uni	234982	Royaume-Uni	Londres	64105654
8	Rome	Italie	2617175	Italie	Rome	59433744
9	Limoges	France	137758	France	Paris	64933400
10	Vienne	Autriche	1761738	Autriche	Vienne	8499759
11	Salzbourg	Autriche	146676	Autriche	Vienne	8499759

Étape 2 : sélection des pays de moins de 60 millions d'habitants.

<u>id_ville</u>	nom	nom_pays	population	<u>nom</u>	capitale	population
2	Brest	Biélorussie	309764	Biélorussie	Minsk	9460692
6	Londres	Canada	366151	Canada	Ottawa	3515172
8	Rome	Italie	2617175	Italie	Rome	59433744
10	Vienne	Autriche	1761738	Autriche	Vienne	8499759
11	Salzbourg	Autriche	146676	Autriche	Vienne	8499759

Étape 3 : projection du nom de la ville et de la population du pays.

nom	population
Brest	9460692
Londres	3515172
Rome	59433744
Vienne	8499759
Salzbourg	8499759

FIGURE 25.2 – Représentation des étapes de la requête `SELECT ville.nom, pays.population FROM ville JOIN pays ON ville.nom_pays = pays.nom WHERE pays.population < 60000000` ; du code 25.5 qui opère une jointure entre les tables ville et pays. Étape 1 : les lignes des deux tables sont mises côte à côte d'après le critère de jointure. Étape 2 : seules les lignes qui respectent la condition de sélection sont gardées. Étape 3 : la projection sélectionne les colonnes résultats.

E Agréger, grouper et filtrer des résultats

a Fonctions d'agrégation : SUM, COUNT, AVG, MAX, MIN

■ **Définition 197 — Fonction d'agrégation.** Une fonction d'agrégation effectue des opérations statistiques sur un ensemble d'enregistrements. Elle s'applique à plusieurs lignes en même temps et permet :

- **COUNT** : de compter les éléments projetés et sélectionnés.
- **MIN** et **MAX** : de trouver le minimum ou le maximum des éléments,
- **SUM** : de calculer la somme des éléments,
- **AVG** : de calculer la moyenne des éléments.

R Dans une requête, si la fonction d'agrégation est utilisée sans regroupements **GROUP BY**, alors la fonction est appliquée à l'ensemble des enregistrements sélectionnés et le résultat tient en une ligne. Par exemple, `SELECT MIN(population) FROM ville` renvoie une seule valeur.

Si la fonction d'agrégation est utilisée avec regroupement **GROUP BY**, alors la fonction est appliquée sur chaque groupe et produit donc autant de résultats que de groupes créés.



Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

R On peut utiliser les fonctions d'agrégation avec l'opérateur de projection **SELECT, HAVING** ou **ORDER BY**. Par contre, **on n'utilise jamais** de fonctions d'agrégation avec l'opérateur de sélection **WHERE**. La raison est que pour pouvoir agréger des lignes, il faut d'abord sélectionner ces lignes des tables.

Code 25.6 – Exemples d'utilisation des fonctions d'agrégation

```

SELECT COUNT(nom_pays)
FROM ville
WHERE population > 1000000;
— On compte les pays qui ont des villes de plus de 5 millions d'habitants.
— SORTIE DU SGBD :
— 3

SELECT MAX(population), nom
FROM ville
WHERE nom_pays = "Royaume-Uni";
— On determine le nom de la ville du Royaume-Uni qui possede le plus grand nombre d'
    habitants.
— SORTIE DU SGBD :
— 8250205 Londres

SELECT MIN(nom)
FROM pays;
— On determine le nom du pays le premier dans l'ordre lexicographique.

```

```

— SORTIE DU SGBD :
— Autriche

SELECT AVG(population), MIN(population), MAX(population)
FROM ville;
— On determine la moyenne, le minimum et la maximum de la population des villes.
— SORTIE DU SGBD :
— 1321624.45454545 113507 8250205

```

b Regrouper : GROUP BY ...

L'opérateur **GROUP BY** permet de créer des groupes dans la réponse. L'intérêt principal est que les fonctions d'agrégation peuvent calculer leurs statistiques non plus sur l'ensemble des réponses mais sur chacun de ces groupes.

Code 25.7 – Exemple d'utilisation de **GROUP BY**

```

SELECT nom_pays, SUM(population)
FROM ville
WHERE population > 200000
GROUP BY nom_pays;
— On fait la somme des populations des villes de plus de 200000 habitants par pays.
— SORTIE DU SGBD :
— Autriche 1761738
— Bielorussie 309764
— Canada 366151
— Italie 2617175
— Royaume-Uni 8944553

```

c Filtrer des résultats regroupés : GROUP BY ... HAVING...

SQL permet de filtrer les groupes créés par **GROUP BY**. En effet, l'opérateur **WHERE** a déjà sélectionné les lignes, les groupes ont été créés à partir de ces lignes. Si on souhaite filtrer les groupes, il faut donc un autre opérateur. C'est le rôle de **HAVING**.

Code 25.8 – Exemple d'utilisation de **GROUP BY ... HAVING**

```

SELECT nom_pays, SUM(population)
FROM ville
WHERE population > 200000
GROUP BY nom_pays
HAVING COUNT(nom) > 2;
— On fait la somme des populations des villes de plus de 200000 habitants par pays
— si seulement le pays en possède au moins 3.
— SORTIE DU SGBD :
— Royaume-Uni 8944553

```

F Opérations ensemblistes

SQL définit également des opérateurs ensemblistes : un opérateur d'union, d'intersection et de différence. Ils sont principalement utiles lorsqu'on dispose de plusieurs tables cohérentes, voire qui représente la même entité, et qu'on souhaite extraire des informations de ces deux tables simultanément. Il est nécessaire que les projections génèrent le même nombre de colonnes pour pouvoir mener une opération ensembliste. Les opérateurs sont **UNION**, **INTERSECT** et **EXCEPT**.

Code 25.9 – Exemple d'opération ensembliste

```
SELECT nom, population
FROM ville
WHERE nom = "Londres"
UNION
SELECT nom, population
FROM ville
WHERE population < 20000
— SORTIE DU SGBD :
— Brest 140547
— Exeter 113507
— Limoges 137758
— Londres 366151
— Londres 8250205
— Salzbourg 146676
```

G Requêtes imbriquées

■ **Définition 198 — Sous-requête ou requête imbriquée.** Une requête imbriquée est une requête incluse dans une requête. Son résultat devient le champ de recherche d'une autre requête.



Vocabulary 26 — Nested request ↗ Requête imbriquée

Comme le montre le code 25.10, il est possible d'utiliser les opérateurs de comparaison `=, <, <=, >, >=` pour créer une condition qui dépend de la requête imbriquée, si celle-ci ne renvoie qu'une seule valeur. Mais ce n'est pas toujours le cas. Dans le cas contraire, la sous-requête résulte en une liste de valeur, alors il est nécessaire d'utiliser les mots-clefs `IN` ou `NOT IN` pour tester l'appartenance du critère à la liste de valeurs renournée par la requête imbriquée.

Code 25.10 – Requêtes imbriquées

```
SELECT nom
FROM ville
WHERE ville.pays = ( SELECT nom
                      FROM pays
                      WHERE capitale = "Paris");
```

```
— Requete imbriquee : le noms du pays dont la capitale est Paris
— Sortie du SGBD
— Brest
— Limoges

SELECT nom
FROM ville
WHERE pays IN ( SELECT nom
                 FROM pays
                 WHERE population < 60000000);
— Requete imbriquee : la liste des noms des pays qui comportent moins de 60 millions d
  'habitants
— Sortie du SGBD
— Brest
— Londres
— Rome
— Vienne
— Salzbourg
```

H De belles requêtes SQL

Comme vous l'aurez observé tout au long de ce chapitre, on n'écrit pas n'importe comment les requêtes SQL. Les codes qui vont sont présentés respectent certaines conventions.

M Méthode 17 — Écriture de requêtes SQL et conventions Afin de garantir une bonne lisibilité des requêtes SQL, il est nécessaire de bien les écrire. Même s'il ne s'agit de convention, il est important :

- d'écrire en majuscules pour les opérateurs SQL,
- d'écrire en minuscules les relations (tables) et les attributs (champs),
- de revenir à la ligne après chaque opération : projection, sélection, regroupement, agrégation, ordonnancement.

 Le paragraphe précédent est important pour l'épreuve d'informatique!

Opérateurs	Action
<code>SELECT ... FROM ...</code>	Projection des colonnes d'une table
<code>SELECT DISTINCT ... FROM ...</code>	Idem mais sans redondance, sans doublons
<code>WHERE ...</code>	Condition de sélection des lignes
<code>GROUP BY ...</code>	Créer des regroupements des résultats
<code>HAVING ...</code>	Filtrer les regroupements de résultats
<code>ORDER BY ... ASC/DESC</code>	Ordonner les résultats
<code>LIMIT n</code>	Limiter le nombre de résultats aux n premiers
<code>OFFSET n</code>	Écarter les n premiers résultats
<code>UNION, INTERSECT, EXCEPT</code>	Opérations ensemblistes
<code>MIN, MAX, AVG, COUNT, SUM</code>	Fonctions d'agrégation

TABLE 25.1 – Synthèse des opérateurs SQL au programme

26

ET LA MACHINE APPRIT

L'intelligence artificielle n'existe pas.

Luc Julia [15]

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ définir les termes intelligence artificielle et apprentissage automatique
- ☒ expliquer et utiliser l'algorithme d'apprentissage supervisé des k plus proches voisins (KNN)
- ☒ expliquer et utiliser l'algorithme d'apprentissage non supervisé des k moyennes (Kmeans)

A Principles

■ **Définition 199 — Intelligence artificielle.** L'intelligence artificielle est un mot valise qui désigne des systèmes électroniques et informatiques capables de percevoir, de comprendre, d'apprendre et d'agir pour atteindre un but précis.

Cette définition pose de nombreux problèmes car elle repose sur le concept d'intelligence qu'il est bien difficile de définir. D'après le Larousse, l'intelligence est un *ensemble des fonctions mentales ayant pour objet la connaissance conceptuelle et rationnelle*. La machine aurait-elle des fonctions mentales? C'est à dire des fonctions cognitives, exécutives et langagières? De nombreuses personnes [15] insistent sur l'absurdité du mot intelligence artificielle qui a fait naître de nombreux fantasmes depuis son invention en 1955 par John McCarthy[18]. C'est pourquoi, dans ce chapitre, on s'intéressera davantage aux algorithmes d'**apprentissage automatique**, terme plus précis, plus pragmatique, qui pose moins de problèmes métaphysiques.



Vocabulary 27 — Machine Learning ⇔ Apprentissage automatique

■ **Définition 200 — Apprentissage automatique.** L'apprentissage automatique est un ensemble de techniques qui a pour but d'automatiser les prises de décision en créant des systèmes capables, à partir d'un jeu de données, de découvrir, d'identifier et de classifier des motifs récurrents. Ces systèmes peuvent en plus être capables d'améliorer leurs performances au fur et à mesure de leur utilisation.

Les données d'entrée peuvent être de nature très différente : langage, nombres, images, sons, signaux... Les motifs récurrents identifiés par la machine ne sont généralement pas perceptibles par l'être humain ce qui donne à ces techniques une apparence de boîte noire. Cependant ces motifs identifiés le sont grâce à une analyse rationnelle du problème de décision considéré : rien d'ésotérique là dedans.

L'apprentissage automatique est considéré comme un sous-ensemble de l'intelligence artificielle.

B Objectifs et algorithmes

Il existe deux grands objectifs à l'apprentissage automatique :

1. la régression,
2. et la classification.

■ **Définition 201 — Régression.** Un algorithme d'apprentissage automatique dont la sortie est une régression génère un résultat sous la forme d'une valeur continue. Il s'agit de prédire par exemple un prix, une température ou le cours d'une action.

■ **Définition 202 — Classification.** Un algorithme d'apprentissage automatique dont la sortie est une classification génère un résultat sous la forme d'une valeur discrète qui permet de trier un ensemble de données selon plusieurs catégories.

Par exemple masculin ou féminin, vrai ou faux, spam ou pas spam, carotte, navet ou pomme de terre si on considère des légumes, pierre, sable, végétal ou eau si l'on considère la nature d'un sol à identifier.



Parfois un même algorithme peut permettre d'effectuer une régression ou une classification.

On distingue plusieurs types d'algorithmes d'apprentissage automatique : l'apprentissage supervisé, non supervisé et l'apprentissage par renforcement. Seules deux approches sont au programme : une supervisée (KNN), l'autre non supervisée (K-means).

■ **Définition 203 — Apprentissage supervisé.** Un algorithme d'apprentissage supervisé s'appuie sur un jeu de données étiquetées pour s'entraîner à produire des résultats corrects. Au fur et à mesure que les données sont lues, il ajuste les poids du modèle afin de coller au

mieux aux étiquettes (phase d'entraînement). On réserve généralement une partie du jeu de données pour vérifier la validité du modèle ainsi obtenu (phase de test).

(R) Il existe de nombreux algorithmes pour la régression et/ou la classification en apprentissage automatique. Le TP associé à ce cours est l'occasion d'illustrer les performances de plusieurs algorithmes confrontés à des jeux de données différents. Le choix d'un algorithme plutôt qu'un autre en apprentissage automatique est un compromis issu de l'expérience.

Parmi les algorithmes les plus utilisés on note :

1. l'analyse en composantes principales (Principal Component Analysis) pour réduire les dimensions d'un jeu de données,
2. les k-moyennes et les k plus proches voisins,
3. les arbres de décisions (Decision Trees),
4. les séparateurs à vaste marge (Support Vector Machine),
5. les réseaux de neurones (ANN),
6. les réseaux de neurones convolutionnels (CNN) pour l'apprentissage profond.

C Données

Les données jouent un rôle central dans l'apprentissage automatique. Avant de se lancer dans l'apprentissage automatique, il est nécessaire d'extraire, de sélectionner et de transformer les données pour constituer un jeu de données utilisable. C'est ce jeu de données qui constitue l'**entrée** d'un algorithme.

Les données peuvent être **étiquetées** : on peut indiquer ainsi au système les caractéristiques qu'il va devoir apprendre à identifier. Elles peuvent aussi être **non étiquetées** et le système devra alors repérer et extraire les motifs récurrents sans indications.

a Normalisation

Les algorithmes KNN et K-moyennes reposent sur des calculs de distances qui sont dépendantes de l'échelle des variables. Si les échelles relatives des variables sont d'ordre très différent, par exemple [10, 1000] contre [0.01, 0.1], la plus grande domine le calcul des distances, écrase de son ordre le résultat de la distance. Les paramètres de petite échelle sont donc invisibilisés. Cela peut entraîner :

- des groupes biaisés vers les dimensions avec des échelles plus grandes, même si ces paramètres n'ont pas plus d'importance,
- une convergence plus lente.

Il existe plusieurs types de normalisation des données. Parmi les plus courantes, on trouve :

- Le Z-score : $e = \frac{e - \mu}{\sigma}$ où μ est la moyenne et σ l'écart type du paramètre. Cette normalisation aboutit à des paramètres de moyenne nulle et d'écart-type 1. Ce Z-score permet d'identifier les données aberrantes, en utilisant la loi normale.

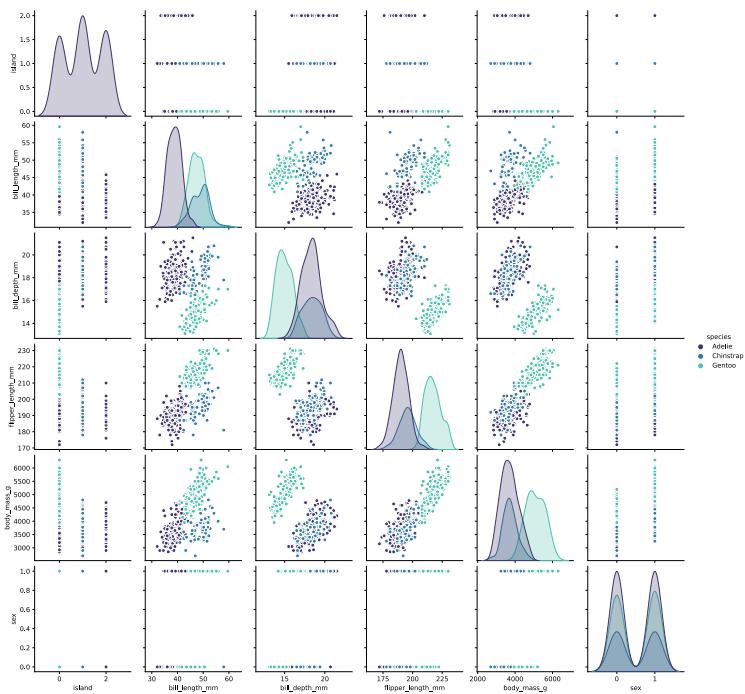


FIGURE 26.1 – Visualisation de la dispersion des paramètres sur le jeu de données des manchots répartis sur trois îles et en trois espèces

- la mise à l'échelle par rapport au minimum et au maximum : $e = \frac{e - v_{\min}}{v_{\max} - v_{\min}}$. Les paramètres sont alors tous à valeur dans $[0, 1]$.

Après normalisation, la contribution de tous les paramètres devient similaire.

b Visualisation

La visualisation des caractéristiques d'un jeu de données et des résultats de l'apprentissage est un élément déterminant pour l'analyse des performances des algorithmes. Un exemple de visualisation des données brutes produit par les bibliothèques Scikit-Learn et Seaborn Python est donné sur la figure 26.1 : il s'agit des paramètres d'un jeu de données sur les manchots. Un exemple de projection des résultats de l'algorithme KNN sur le jeu de données iris selon toutes les dimensions est donné sur la figure 26.2.

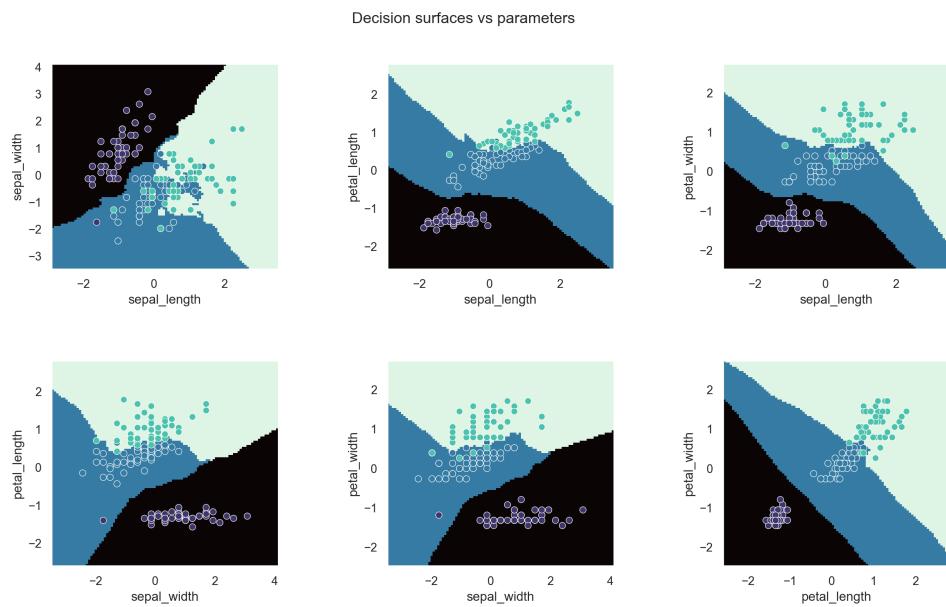


FIGURE 26.2 – Résultats de l'apprentissage de l'algorithme KNN sur le jeu de données de l'iris. Les régions de décisions du classificateur sont superposées au valeurs vraies des espèces d'iris.

c Évaluation de la performance

■ **Définition 204 — Matrice de confusion.** La matrice de confusion est un outil qui permet de visualiser les performances d'un algorithme de classification. Chaque case contient le nombre^a de cas d'une classe *donnée* qui a été **prédite** par l'algorithme comme appartenant à une certaine classe.

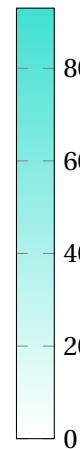
La matrice de confusion est donc organisée comme suit :

- les lignes représentent les classes données (par le jeu de données étiquetées),
- les colonnes représentent les classes prédites par l'algorithme.

a. ou le pourcentage

■ **Exemple 109 — Matrice de confusion.** On considère un algorithme de traitement automatique des messages instantanés : on cherche à classer les messages en différentes catégories (peur (P), joie (J), amour (A), tristesse (T), violence (V)) en fonction de leur contenu. On dispose d'un jeu de données étiquetées dont on utilise une partie pour l'apprentissage de l'algorithme et une partie pour le test de l'algorithme^a. La matrice ci-dessous représente les résultats obtenus par l'algorithme sur le jeu de données de test.

	P	J	A	T	V
P	55	6	4	30	5
J	10	75	2	11	2
A	3	1	91	5	1
T	25	15	1	58	1
V	4	1	2	0	93



Prédiction

On peut lire la première ligne de la matrice ainsi : sur la centaine de messages de test étiquetés P (peur), 55 ont été effectivement prédits comme tels par l'algorithme. Mais, 6 ont été prédits joie, 4 amour, 30 tristesse et 5 violence. Notre algorithme engendre donc une certaine confusion entre la peur et la tristesse^b, confusion qui est explicite lorsqu'on affiche cette matrice ! Lorsqu'un algorithme fonctionne correctement, les valeurs sur la diagonale sont maximales et les éléments non diagonaux minimaux.

a. Généralement on sélectionne 70% des données pour l'apprentissage et 30% pour le test.

b. à moins que ce ne soit notre jeu de données et les classes choisies qui ne sont pas pertinentes !

R Dans le cas où il y a deux classes, la diagonale représente les vrais positifs et les vrais négatifs.

D Apprentissage supervisé : k plus proches voisins

 **Vocabulary 28 — K-Nearest Neighbours (KNN) Algorithm** ↪ Algorithme des k plus proches voisins

L'algorithme des k plus proches voisins [9] est un algorithme relativement simple, supervisé et encore très utilisé aujourd'hui pour effectuer des régressions ou des classifications. Il ne présente pas à proprement parler de phase d'entraînement qui est confondue avec la phase de prédiction¹ : il utilise toutes les données à chaque calcul. Il est cependant couramment utilisé pour les systèmes simples de recommandation, la reconnaissance de modèle, la fouille de données, les prévisions des marchés financiers ou la détection d'intrusion.

Pour les problèmes de **classification**, l'étiquette de classe est affectée à l'échantillon analysé sur la base d'un **vote à la majorité** : on utilise l'étiquette de la classe la plus fréquemment représentée autour de l'échantillon.

Pour les problèmes de **régression** et une certaine fonction f à valeur continue, on procède de la même manière mais on calcule la prédiction sur la **valeur de la moyenne** de f sur les k plus proches voisins.

a Description de l'algorithme KNN

Algorithme 56 k plus proches voisins (KNN)

```

1: Fonction KNN( $D, x, k, \delta$ )
2:    $n \leftarrow |D|$ 
3:    $\Delta \leftarrow \emptyset$                                 ▷ Distances à calculer
4:   pour chaque échantillon étiqueté  $e \in \mathcal{E}$  répéter
5:     Ajouter  $\delta(x, e)$  à  $\Delta$ 
6:   Sélectionner les  $k$  voisins les plus proches de  $x$  en utilisant  $\Delta$ 
7:   Compter le nombre d'occurrences de chaque classe des  $k$  voisins de  $x$ 
8:   renvoyer la classe  $c$  la plus représentée parmi les  $k$  plus proches voisins

```

On considère un problème de classification dans \mathbb{R}^d . On dispose d'un ensemble d'échantillons étiquetés \mathcal{E} dont les éléments sont des couples composés d'un vecteur de \mathbb{R}^d et d'une étiquette désignant la classe à laquelle appartient l'échantillon. On note l'ensemble des classes possibles \mathcal{C} . On cherche donc à déterminer la classe d'autres échantillons non étiquetés. On note $\mathcal{E} = \{(e_i, c_j), i \in \llbracket 1, n \rrbracket, j \in \llbracket 1, m \rrbracket, e_i \in \mathbb{R}^d, c_i \in \mathcal{C}\}$, l'ensemble des données étiquetées dont on dispose. On cherche à trouver la classe c de e , un élément de \mathbb{R}^d . On dispose d'une distance δ sur \mathbb{R}^d .

1. ce n'est pas un avantage, mais bien un inconvénient

La complexité temporelle de l'algorithme KNN (cf. algorithme 56) pour un jeu de n données de dimension d est $O(1)$ à l'entraînement car cette phase n'existe pas², mais $O(n \times d)$ à la pré-diction. Plus le jeu de données grandit, plus KNN devient inefficace : ce problème est souvent désigné en IA par la malédiction de la dimension d'un problème.

b Distances

Pour savoir si un voisin est proche, il faut être capable de mesurer sa distance. L'algorithme KNN utilise donc une distance dont la définition varie selon le problème considéré : distance euclidienne, de Manhattan, de Tchebychev. La figure 26.3 illustre les distances les plus utilisées en pratique. Mais, selon le contexte on peut faire appel à la distance de Levenshtein (pour la comparaison de mots) ou de Hamming (pour des séquences de même longueur).

R L'analyse du jeu de données est parfois nécessaire pour choisir la distance la plus appropriée.

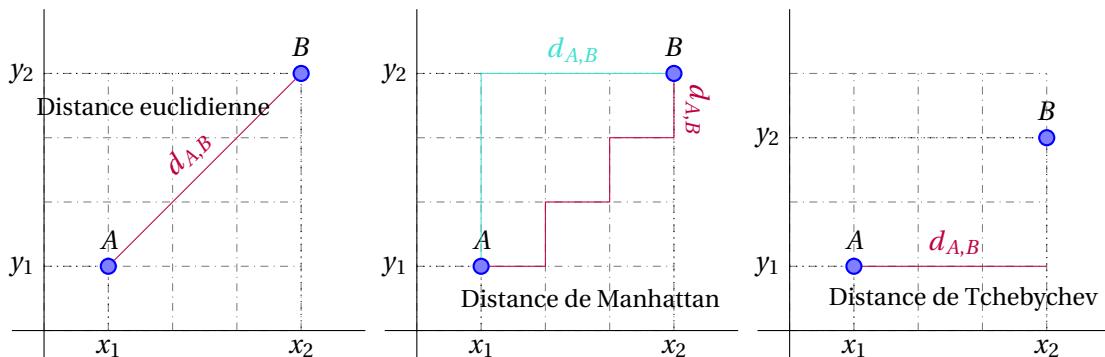


FIGURE 26.3 – Illustration de différentes distances dans le plan

c Comment choisir k ?

Si n est la dimension du problème, c'est-à-dire que le jeu de données est constitué de n échantillons, alors il faut nécessairement choisir k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Choisir un k trop grand amène à classer la majorité des échantillons dans la classe dominante. Choisir un k trop petit ne permet pas de conclure précisément : la réponse est trop sensible au bruit. Par ailleurs, on choisit souvent k impair pour éviter les égalités lors du vote majoritaire.

Le choix le plus commun et empirique est de prendre \sqrt{n} , la racine carrée du nombre de points ou bien $\sqrt{n/m}$, la racine du nombre de points divisé par le nombre de classes dans le cas d'une classification. Mais tester les différentes valeurs de k peut s'avérer nécessaire.

2. on parle alors de *lazy learning*

d Comment sélectionner les k plus proches voisins?

Les étapes de l'algorithme 56 des lignes 4 à 6 nécessitent une forme de tri des indices des échantillons d'après l'ensemble Δ des distances à x pour faire émerger les k plus proches voisins. On peut imaginer effectuer un tri en ligne au fur et à mesure par insertion, un tri fusion, un tri rapide ou un tri par tas min.

R Certaines structures de données comme les arbres k-d, , constituent des solutions très adaptées à la recherche des voisins : les noeuds de ces arbres de recherches sont construits à partir d'hyperplans qui divisent l'espace \mathbb{R}^d des échantillons : tous les points situés en dessous d'un noeud hyperplan sont stockés dans le sous-arbre gauche, les autres dans sous-arbre droit. Cette structure «*dichotomique*» permet de trouver rapidement les voisins en éliminant des parties de l'espace de recherche très rapidement --> HORS PROGRAMME



Vocabulary 29 — k-dimensional trees, k-d trees ⇔ les arbres k-d

e Comment détecter la classe majoritaire?

Pour élire la classe majoritaire d'un échantillon, il est possible de procéder de différentes manières :

- à la majorité simple des classes des k voisins : dans ce cas, la classe la plus représentée parmi les k voisins est la classe prédictive pour l'échantillon.
- à la majorité des classes des k voisins pondérées par la distance du voisin : dans ce cas, les voisins les plus proches contribuent davantage à la classe prédictive.

P Pour implémenter en Python ce choix, l'option la plus simple est de créer une représentation des occurrences des classes (histogramme), par exemple sous la forme d'un tableau. Ensuite, il suffit de sélectionner l'indice du maximum de ce tableau pour trouver la classe majoritaire, avec ou sans pondération.

R Il convient de noter que le choix d'une valeur appropriée de k (le nombre de voisins les plus proches) et la méthode de pondération des votes (le cas échéant) peuvent avoir un impact sur les performances de l'algorithme KNN. La validation croisée et la recherche en grille sont des techniques courantes pour ajuster ces hyperparamètres : on cherche le paramètre k optimal en testant des valeurs.

f KNN pour la régression

On cherche à effectuer une régression sur une série de données expérimentales sur un modèle à une seule dimension. La figure 26.4 représente les données expérimentales par des points. Aucun axe ne possède de titre ni d'unités car ces données sont simulées à partir d'une équation de type : $f(x) = e^{-\alpha x} \cos(x)$. Les données sont rendues «expérimentales» par l'ajout d'un bruit additif.

La figure 26.4 montre l'importance du choix de k lorsque KNN est utilisé : lorsque k est trop petit, la régression est sensible au bruit; lorsque k est trop grand, la régression ne suit plus les variations expérimentales.

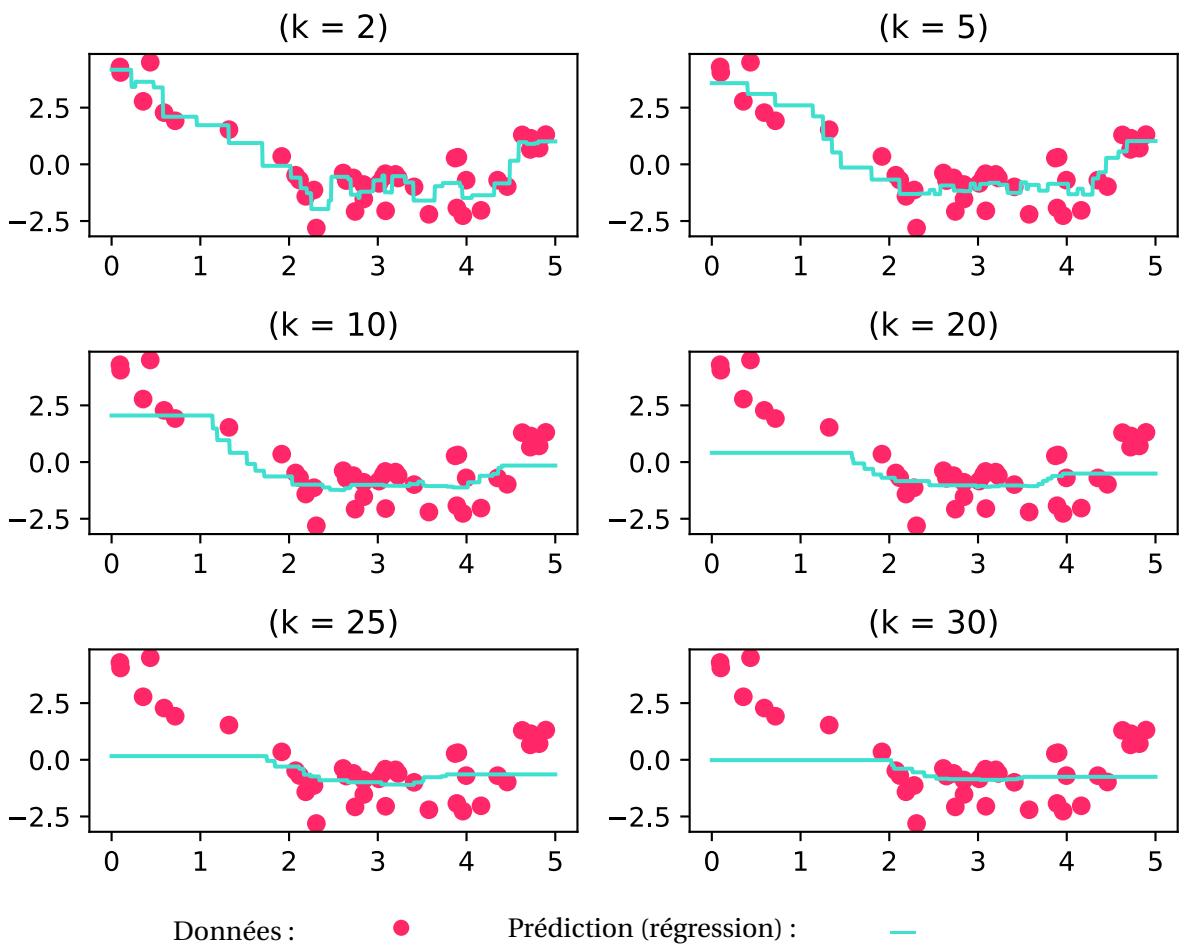


FIGURE 26.4 – Illustration de l'influence du nombre de voisins k sur une régression de modèle non linéaire dans le cadre de l'algorithme KNN

g KNN pour la classification

Les figures 26.2 et 26.5 illustrent le résultat de l'algorithme 56 sur le très célèbre jeu de données de l'iris [8]. Les résultats montrent clairement que KNN est capable de discriminer plusieurs variétés d'iris en connaissant uniquement les paramètres morphologiques des pétales et des sépales. On remarque essentiellement une légère confusion entre Versicolor et Virginica. Certaines Virginica sont prises pour des Versicolor. La matrice de confusion démontre la performance de l'algorithme.

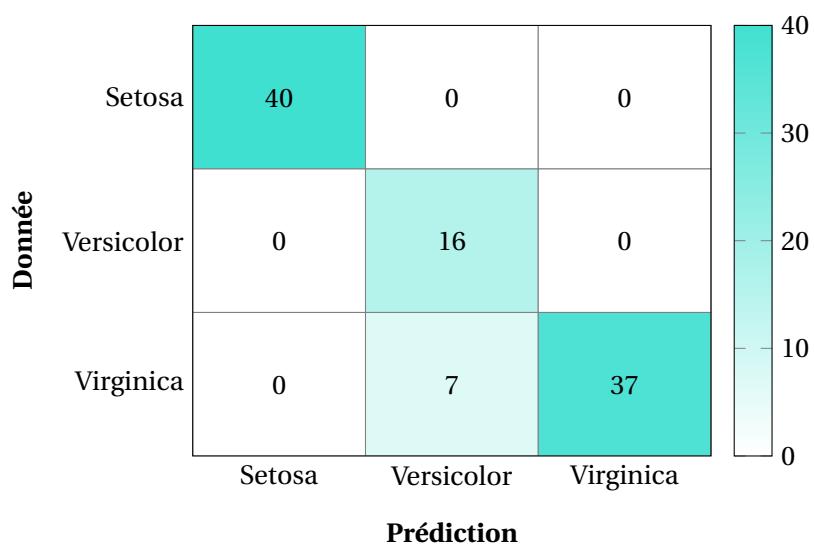


FIGURE 26.5 – Matrice de confusion dans le cadre de la classification des variétés d'Iris : Setosa, Versicolor et Virginica. Les paramètres d'entrées sont les largeurs et longueurs des pétales et sépales. La prédiction est correcte dans plus de 90% des cas comme le montre la matrice de confusion.

E Apprentissage non supervisé : k-moyennes

 **Vocabulary 30 — k-means** ⇔ Algorithmes des k-moyennes

On ne dispose pas toujours d'un jeu de données étiquetées, c'est-à-dire des échantillons dont on connaît la classe. C'est pourquoi certains algorithmes d'apprentissage automatique développent une approche non supervisée. L'absence d'échantillons de vérification fait qu'il est parfois plus difficile d'évaluer la performance de ces algorithmes.

On considère de nouveau un problème de **classification**. On suppose qu'on dispose d'un ensemble d'échantillons $\mathcal{E} = \{e_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i \in \mathbb{R}^d\}$. Il s'agit de créer une partition de \mathcal{E} selon k classes.

Algorithme 57 k-moyennes

```

1: Fonction KMEANS( $\mathcal{E}, k$ )
2:    $\mathcal{P} \leftarrow \{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k\}$  une partition quelconque de  $\mathcal{E}$  en  $k$  classes
3:   tant que des échantillons changent de partition répéter
4:      $(b_1, b_2, \dots, b_k) \leftarrow \text{BARYCENTRE}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k)$ 
5:     pour chaque échantillon  $e$  de  $\mathcal{E}$  répéter
6:       Trouver la partition  $\mathcal{P}_i$  la plus proche de  $e$ ,  $\|e - b_i\|^2$  est minimale sur  $\mathcal{P}$ 
7:       Ajouter  $e$  à la partition  $\mathcal{P}_i$  trouvée
8:   renvoyer  $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k)$ 

```

Le cœur de cet algorithme est la construction des partitions de l'ensemble du jeu de données. L'algorithme crée donc des catégories, autant qu'on lui en demande. Si l'utilisateur n'a pas d'idée précise du nombre de catégories à créer, il est nécessaire de tâtonner. Par ailleurs, le lien sémantique entre les données et le résultat est à la charge de l'utilisateur de l'algorithme : k-moyennes se contente de créer des partitions, il ne leur attribue aucun sens particulier. On est loin de l'intelligence artificielle qui fait fantasmer les foules! La figure 26.6 montre que k-moyennes trouve bien k classes (cluster ou sous-groupe) même si ce n'est pas la réalité.

 L'algorithme des k-moyennes minimise le coût défini par la fonction :

$$f(\mathcal{E}, k) = \sum_{i=1}^k \sum_{e \in \mathcal{P}_i} \|e - m_i\|^2 \quad (26.1)$$

L'algorithme consiste à minimiser la variance des partitions (clusters). La fonction BARYCENTRE utilise donc la norme **euclidienne**.

 --> HORS PROGRAMME On peut démontrer que cet algorithme termine en considérant la fonction de coût $f(\mathcal{E}, k) = \sum_{i=1}^k \sum_{e \in \mathcal{P}_i} \|e - m_i\|^2$.

Comme il y a k^n façons de répartir n points en k partitions, l'ensemble des partitions pos-

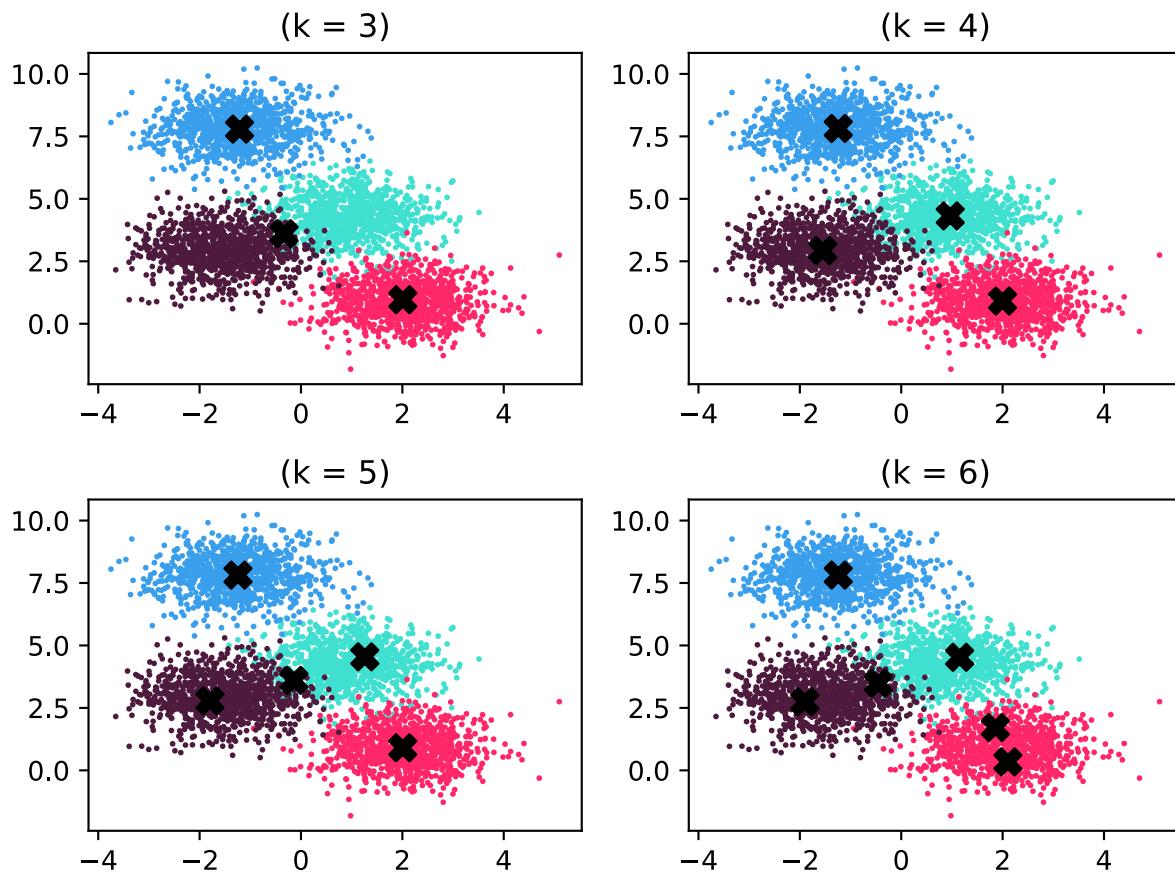


FIGURE 26.6 – Illustration des conséquences du choix du paramètre k dans k-moyennes. Sur cet exemple, seules quatre classes existent dans les données. k varie entre 3 et 6. Les barycentres des classes sont représentés par des croix noires.

sible est un ensemble fini. L'algorithme itère sur cet ensemble fini. S'il ne termine pas, c'est donc qu'il opère un cycle dans cet ensemble fini. Si c'était le cas, comme la fonction f est strictement décroissante d'après notre choix des partitions à chaque itération, cela signifierait qu'une même partition pourrait présenter un coût plus faible que son propre coût, ce qui est absurde. Donc, l'algorithme n'itère pas sur un cycle et nécessairement termine de parcourir l'ensemble des partitions en minimisant la fonction de coût.

En résumé : la fonction de coût décroît strictement tant que la partition change. Si la partition ne change pas, l'algorithme s'arrête.

a Points forts et points faibles de l'algorithme des K-moyennes

L'algorithme des K-moyennes est :

1. n'est pas nécessairement optimal. La fonction f converge, mais pas nécessairement vers l'optimum global.
2. est sensible à l'initialisation : selon la partition de départ, le résultat peut ne pas être le même, c'est-à-dire f peut atteindre un minimum local.

Ces points faibles sont dépassables en pratique :

- dans le cas où l'optimal global n'a pas été atteint, il est possible de redémarrer l'algorithme à partir d'autres partitions initiales et de trouver l'optimal global.
- il est également possible d'optimiser la partition de départ afin d'augmenter les chances de trouver l'optimal global.

27

THÉORIE DES JEUX

Si deux ont proposé entre eux, de dire chacun l'un après l'autre alternativement un nombre à plaisir, qui toutefois ne surpasse pas un certain nombre précis, pour voir ajoutant ensemble les nombres qu'ils diront qui arrivera plutôt à quelque nombre prescrit; faire si bien qu'on arrive toujours le premier au nombre destiné.

Claude-Gaspar Bachet de Méziriac, 1612 [2]

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ expliquer l'intérêt de la théorie des jeux
- ☒ expliquer le concept de jeu d'accessibilité
- ☒ coder le calcul des attracteurs

La théorie des jeux a été initiée par John Von Neumann pendant et après la seconde guerre mondiale. Dans un ouvrage resté célèbre[26], de nombreux problèmes très généraux sont abordés sous la perspective du jeu et de l'économie. Tout comme les algorithmes d'IA développés aujourd'hui, cette théorie a pour objectif d'aider à la décision lorsque l'environnement est incertain, c'est-à-dire complexe et imprévisible. Elle fait intervenir des joueurs considérés comme des individus rationnels, des règles et des contextes d'évolution du jeu.

Le programme de classe préparatoire n'aborde que les jeux d'accessibilité à deux joueurs que l'on peut modéliser avec un graphe orienté biparti. Néanmoins, cela permet de lever le voile sur une théorie puissante et fascinante qui est utilisée dans de nombreux domaines clés comme ceux de :

- la vérification formelle (model checking) : il s'agit de ramener la vérification de formules logiques complexes à la résolution de jeux. Si l'on gagne, cela signifie que le système satisfait la spécification logique.

- la synthèse de programmes : au lieu de vérifier si un programme est correct, on utilise la théorie des jeux pour le générer automatiquement. Une stratégie gagnante dans un jeu devient l'algorithme à construire.
- l'intelligence artificielle : la théorie aide à la décision dans des environnements incertains.

A Introduction à la théorie des jeux

■ **Définition 205 — Jeu.** Dans le cadre de cette théorie, on considère qu'un jeu est une activité humaine définie dans le cadre d'un contexte et dont les participants doivent suivre les règles énoncées et faire des choix pour gagner en s'opposant ou résoudre un problème ensemble. Cette activité nécessite des compétences intellectuelles, des savoirs et incorpore le hasard.

Les jeux ainsi définis englobent donc la plupart des activités humaines : l'économie, la guerre, l'étude du vivant ou même la physique peuvent être le cadre de jeux qui servent alors de modèles pour découvrir, établir des stratégies ou simuler une réalité.

■ **Définition 206 — Jeu séquentiel.** Un jeu séquentiel est un jeu au cours duquel les joueurs décident de leur stratégie les uns après les autres et peuvent donc tenir compte des actions des joueurs précédents.

R Par opposition, certains jeux (non séquentiels) forcent les joueurs à jouer les coups simultanément.

■ **Définition 207 — Jeux coopératifs.** Un jeu coopératif permet la construction de coalitions entre joueurs. Cela suppose une concertation sur la stratégie à adopter et un engagement à coopérer.

■ **Définition 208 — Jeu à somme nulle.** Les jeux à somme nulle sont des jeux pour lesquels les gains de l'un sont strictement les pertes de l'autre. Si on utilise une fonction de gain pour évaluer les perspectives de gain de chaque joueur, alors la somme des gains des joueurs est nulle. Mathématiquement, si G_i est le gain du joueur i et si le jeu est à somme nulle alors $\sum_{i=1}^n G_i = 0$.

■ **Exemple 110 — Jouer à somme nulle.** Parmi les jeux les plus connus à somme nulle, on trouve :

- les échecs,
- le tarot ou le poker,
- shi-fu-mi.

R La plupart des situations de la vie quotidienne engendre des jeux à somme non nulle. Par exemple, le commerce est un jeu à somme non nulle plutôt positive : un marchand de voiture est gagnant lorsqu'il vend une voiture à un client. Le client a souscrit un crédit pour acheter et semble perdant mais peut utiliser sa voiture comme bon lui semble. Donc, les situations commerciales peuvent être gagnant-gagnant : si vous avez faim, vous serez content d'acheter de la nourriture qu'un marchand voudra bien vous vendre. Elles peuvent également être perdant-perdant...

■ **Définition 209 — Dilemme du prisonnier.** Le dilemme du prisonnier est un exemple fondamental^a de la théorie des jeux. Il a été formalisé par Tucker en 1950 [23] pour pointer une insuffisance de la théorie des jeux de l'époque : deux individus rationnels ne coopèrent pas nécessairement^b. Le principe est le suivant :

Deux membres d'un même gang criminel sont arrêtés et emprisonnés. Chaque prisonnier est mis à l'isolement : il ne peut pas communiquer avec l'autre. La police ne dispose pas de suffisamment de preuves pour les accuser formellement tous les deux et il est envisagé de les condamner à un an de prison tous les deux pour des charges moindres. Pour l'instant les deux prisonniers gardent le silence.

Néanmoins, la police propose à chaque prisonnier A et B un marché diabolique. En voici les termes :

1. Si A et B se dénoncent mutuellement, ils seront condamnés à deux ans de prisons.
2. Si A trahit B et que B demeure silencieux, A sera libéré et B sera condamné à trois ans.
3. Symétriquement, si A demeure silencieux et que B le dénonce, alors A fera trois ans et B sera libéré.
4. Enfin, si A et B demeurent silencieux, les deux feront un an de prison.

a. un paradigme

b. On trouve ici [1] une fabuleuse introduction à ce dilemme dans la série Voyages au pays des maths d'Arte. À regarder absolument!

R Le dilemme du prisonnier illustre bien des situations (guerre commerciale par exemple) dans lesquelles les acteurs peuvent agir rationnellement, ne pas coopérer spontanément et perdre simultanément. L'incitation à tricher est naturellement au cœur du dilemme.

La **répétition** du jeu peut cependant amener à considérer d'autres stratégies : chaque joueur peut adapter son comportement par rapport à l'expérience passée et choisir de coopérer ou au contraire de se venger. Lorsque l'incitation à tricher est moins forte que les représailles potentielles, la coopération peut alors s'imposer et le jeu peut atteindre un équilibre de Nash.

B Nature de l'information des jeux

■ **Définition 210 — Jeu à information parfaite.** Un jeu est à information parfaite si chaque joueur est parfaitement informé des actions passées des autres joueurs avant de prendre sa décision : aucune action du jeu n'a été cachée. On se rappelle de tous les coups joués précédemment. Un jeu à information parfaite est un jeu séquentiel.

■ **Définition 211 — Jeu à information complète.** Un jeu à information complète si tous les joueurs ont une connaissance totale des données du jeu : règles, pièces, actions possibles, fonction de gain, objectifs des autres joueurs.

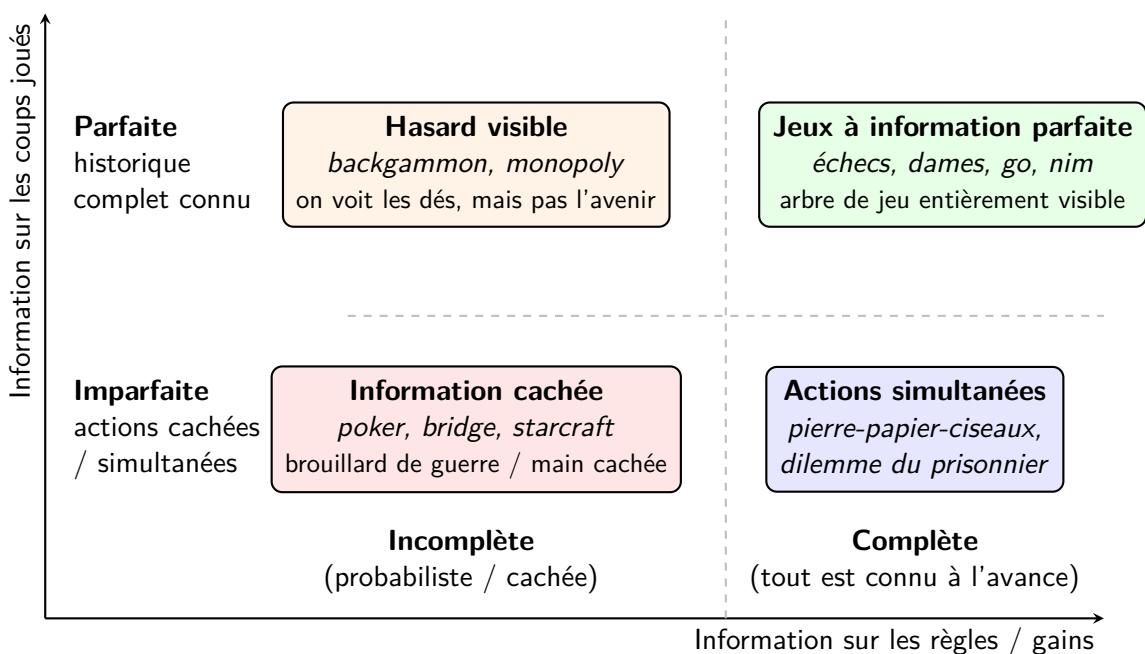


FIGURE 27.1 – Synthèse des catégories de jeu en fonction de la nature des informations

La figure 27.1 met en évidence la caractérisation possible des jeux en fonction de la nature de l'information disponible sur le jeu :

- sur l'axe horizontal, l'information sur les règles du jeu varie d'incomplète à complète : cet axe concerne la connaissance de la structure du jeu.
- sur l'axe vertical, l'information varie de imparfaite à parfaite : cet axe concerne le déroulement du jeu, l'historique des actions passées.

R Les jeux à information incomplète sont appelés jeux bayésiens. Dans ce cas, les joueurs n'ont pas une connaissance commune du jeu : chacun n'a qu'une vision partielle des données

du jeu.

Ce cours traite principalement du quadrant Parfaite/Complète, c'est-à-dire les conditions d'informations pour lesquelles les algorithmes comme Minimax et ou les attracteurs sont les plus directs à appliquer.

■ **Définition 212 — Jeu partisan (par opposition à jeu impartial)** . Un jeu partisan est un jeu à deux joueurs tel que l'ensemble des coups légaux dépend du joueur. Autrement dit : dans une même position, les joueurs n'ont pas nécessairement les mêmes options.

■ **Exemple 111 — Jouer à information (in)complète et (im)parfaite.** Aux échecs, s'il s'agit d'une partie d'échec classique, les joueurs évoluent dans un contexte d'information parfaite : chaque joueur a pu voir tous les coups joués précédemment au cours de la partie. De plus, les règles sont connues, toutes les pièces sont toutes visibles, le chronomètre aussi : alors l'information est complète également. Par contre, si une partie est prise en cours de route et que le joueur n'a pas connaissance des coups passés, l'information est imparfaite. Dans tous les cas, les échecs sont un jeu partisan : les coups possibles d'un joueur dépendent de la position et de la couleur.

Les jeux de cartes comme le tarot, le bridge ou le poker sont des jeux à information imparfaite la distribution est inconnue (aléatoire et personne n'en a connaissance puisque les cartes sont retournées lors de la distribution) et incomplète car on ne connaît pas la main des adversaires lors du jeu ni les objectifs des joueurs.

C Forme extensive d'un jeu séquentiel (Arbre de jeu)

■ **Définition 213 — Arbre de jeu ou forme extensive.** La représentation d'un jeu séquentiel sous la forme d'un arbre est appelée forme extensive ou arbre de jeu. Les nœuds représentent les positions du jeu. Les nœuds d'un même niveau sont contrôlés par un même joueur.

Un exemple d'arbre de jeu pour une partie de morpion est donné sur la figure 27.2.

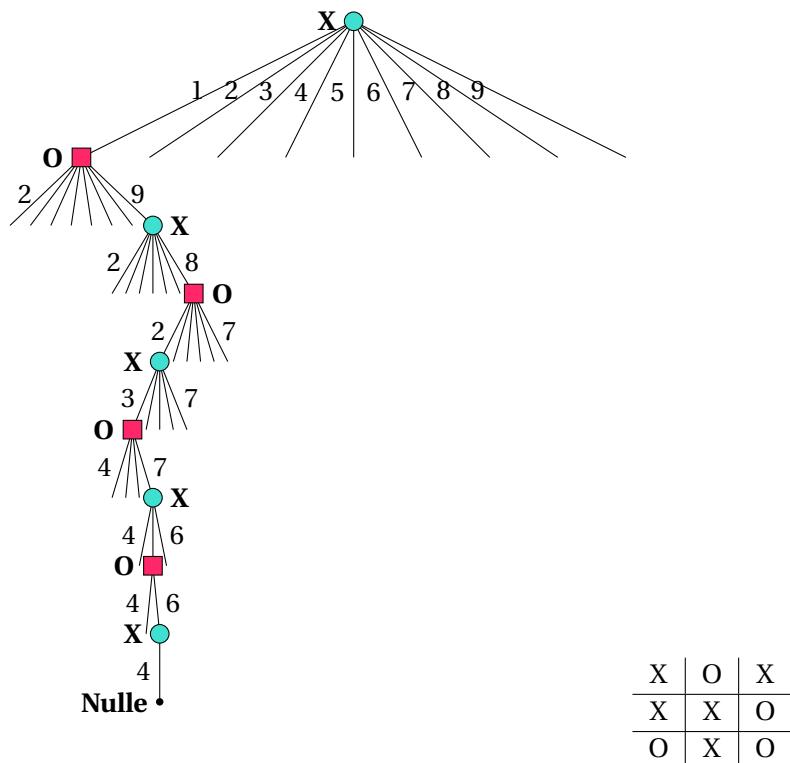


FIGURE 27.2 – Représentation partielle d'un arbre de jeu d'une partie de morpion. La feuille de l'arbre indique le résultat de la partie (nulle). Chaque nœud interne de l'arbre représente une position de **X** ou de **O** au cours de la partie dans laquelle les joueurs doivent faire un choix. On considère que les cases sont numérotées de 1 à 9 en ligne et en partant du haut. La position finale est donnée sous l'arbre. Le joueur à la croix *X* joue en premier car il contrôle la racine de l'arbre.

D Jeux d'accessibilité

■ **Définition 214 — Jeu impartial.** Un jeu impartial est un jeu séquentiel à deux joueurs à information parfaite, sans hasard et pour lequel, à chaque position, les mêmes coups sont disponibles pour les deux joueurs.

■ **Définition 215 — Jeu d'accessibilité.** Un jeu d'accessibilité est un jeu impartial fini pour lequel les positions sont modélisées par un graphe orienté acyclique (DAG). Jouer un coup revient à suivre une des arêtes du graphe. Le nombre de sommets est fini. Le perdant est celui qui atteint une position sans successeur dans le graphe (convention *normale*).

R L'acyclicité du graphe orienté garantit la terminaison du jeu d'accessibilité en un nombre fini de coups. Sinon, les joueurs pourraient emprunter des cycles indéfiniment et ne jamais terminer une partie. L'acyclicité crée un ordre dans les sommets du graphe orienté.

R Selon la convention *misère* d'un jeu d'accessibilité, le gagnant est celui qui atteint une position sans successeur dans le graphe.

■ **Définition 216 — Jeu de Nim.** Un jeu de Nim est un jeu d'accessibilité particulier à base de plusieurs tas de jetons (allumettes, bâtonnets, graines...). Jouer un coup consiste à retirer au moins un jeton d'un seul tas, sans contrainte spatiale sur le tas. On ne peut pas fragmenter un tas ou le faire disparaître.

R Parmi les variantes les plus célèbres, on peut citer :

- le jeu de Marienbad (avec des cartes ou des allumettes)[13],
- le jeu des bâtonnets^a [12],
- le jeu de Grundy.

^a. type Fort Boyard

■ **Exemple 112 — Graphe orienté acyclique d'une partie de jeu de Marienbad.** La figure 27.3 donne un exemple de jeu de Marienbad tel qu'il est présenté dans le film d'Alain Resnais. Chaque joueur peut retirer autant d'allumettes qu'il le veut sur une ligne seulement. Le perdant est celui qui retire la dernière allumette.

Ce jeu de Marienbad est modélisable par un graphe orienté comme l'indique la figure 27.4. Sur cette figure, on considère que les joueurs jouent alternativement en se déplaçant sur le graphe : un des joueurs est initialement sur la position de départ s , quatre allumettes sont reparties sur deux rangées. En suivant l'arête (s, b) , le joueur fait l'action de retirer les deux allumettes d'une rangée. En suivant l'arête (s, a) , le joueur fait l'action de retirer un allumette d'une rangée.

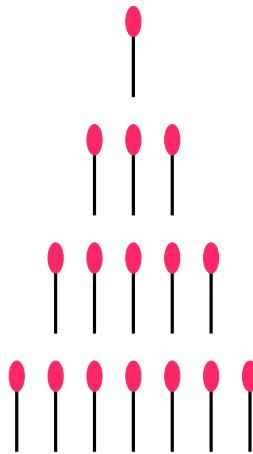


FIGURE 27.3 – Jeu de Marienbad avec des allumettes

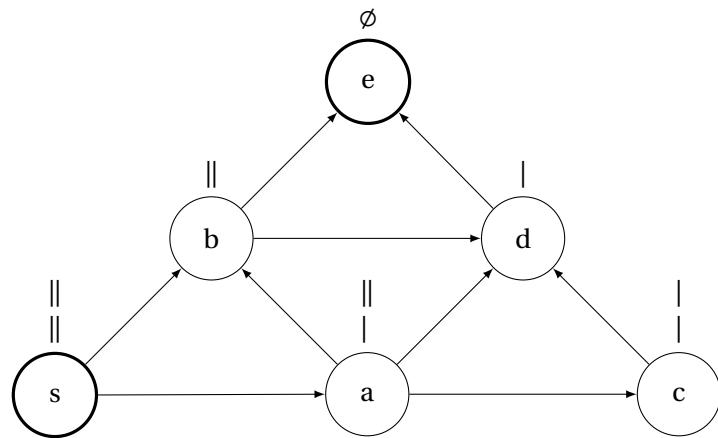


FIGURE 27.4 – Modélisation par graphe orienté acyclique (DAG) d'une partie de jeu de Marienbad avec deux rangées de deux allumettes au départ. On peut jouer dessus avec un pion placé en s au départ. Puis chaque joueur fait avancer le pion d'un saut sur le graphe en sélectionnant un successeur en suivant les arcs. Le joueur qui doit jouer en position e a perdu (convention normale).

E Noyau d'un graphe de jeu → HORS PROGRAMME

Déterminer une stratégie pour gagner au jeu de Nim revient à chercher à distinguer les positions gagnantes des positions gagnantes sur un graphe orienté acyclique comme celui de la figure 27.4. Cette distinction est intimement liée à la notion de **noyau** en théorie des graphes.

■ **Définition 217 — Noyau d'un graphe.** Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Un sous-ensemble de sommets $K \subset S$ est un **noyau** du graphe si :

- aucun sommet de K n'a de successeur dans K .

$$\forall s \in K, \forall (s, s') \in A \implies s' \notin K \text{ (stabilité interne)} \quad (27.1)$$

- tout sommet n'appartenant pas à K possède au moins un successeur dans K .

$$\forall s \notin K, \exists s' \in K \text{ tel que } (s, s') \in A \text{ (stabilité externe)} \quad (27.2)$$

Théorème 30 — Noyau et positions gagnantes. Pour un jeu d'accessibilité se terminant par une position sans successeur (convention normale) :

- les sommets du **noyau** correspondent aux **positions perdantes** (P-positions).
- les sommets hors du noyau correspondent aux **positions gagnantes** (N-positions).

■ **M Méthode 18 — Stratégie gagnante et noyau** Pour gagner, il suffit alors de répéter les opérations suivantes jusqu'à ce que l'adversaire se retrouve bloqué sur un sommet du noyau sans successeur :

- si le joueur est sur un sommet $s \notin K$, il existe un coup vers $s' \in K$ qu'il faut jouer.
- si l'adversaire se retrouve en $s' \in K$. Quel que soit son coup, il sera forcé d'aller vers un sommet hors du noyau ($s'' \notin K$).

■ **Exemple 113 — Application au jeu de Marienbad de la figure 27.4.** Pour identifier le noyau K du graphe, on procède en remontant depuis la fin :

- e est un sommet sans successeurs. Dans la convention de jeu normale (le dernier à jouer gagne, donc celui qui ne peut plus jouer a perdu), e est une position perdante. $e \in K$.
- d et b sont des sommets qui possèdent un arc vers e . Puisqu'ils peuvent atteindre le noyau, ce sont des positions gagnantes. $d, b \notin K$.
- Depuis le sommet c , les coups possibles mènent uniquement vers d . Comme d n'est pas dans le noyau, et qu'il n'y a pas d'autre option, le joueur en c ne peut pas atteindre le noyau. De plus, c ne peut pas atteindre e directement. Donc, $c \in K$.
- Depuis a il est possible d'aller vers c qui est dans le noyau. Donc $a \notin K$.

- Depuis s , on peut aller vers b ou a . Aucun de ces deux sommets n'est dans le noyau. Le joueur partant de s est forcé d'envoyer l'adversaire sur des positions gagnantes (a ou b). Par conséquent, $s \in K$.

On a donc $K = \{s, c, e\}$. Par conséquent, il n'est pas judicieux d'être le premier joueur... Si jamais le joueur est en a , il faut jouer vers c sinon, c'est perdu!

F Arène de jeu d'un jeu d'accessibilité

■ **Exemple 114 — Graphe orienté biparti d'un jeu de marienbad.** Une autre modélisation du jeu de Marienbad évoqué précédemment peut se faire en utilisant un **graphe orienté biparti** comme le montre la figure 27.5 :

- chaque sommet représente une position dans le jeu.
- chaque sommet est possédé par l'un des deux joueurs : si le jeu se trouve sur un sommet d'un joueur, cela signifie que c'est  lui de jouer.
- jouer un coup consiste  suivre un arc.

■ **Définition 218 — Arène de jeu.** Le graphe $G = (V_1, V_2, E)$ est nommé arène de jeu si est biparti si $G = (V = V_1 \cup V_2, E)$ est un graphe orienté biparti et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Sur cette arène, le joueurs se répartissent les sommets : le joueur J_1 controle^a V_1 , le joueur J_2 V_2 .

^a cela signifie que c'est  lui de jouer

■ **Définition 219 — Partie.** Une partie est un chemin sur l'arène de jeu :  chaque tour, le joueur J_1 en $v_i \in V_1$ choisit une arête de E dont le premier sommet est v_i et le second un sommet $v_j \in V_2$. J_2 choisit ensuite  partir de v_j le sommet suivant dans V_1 . Une partie en n coups s'écrit donc $(v_0, \dots, v_i, \dots, v_{n-1})$.

■ **Définition 220 — Condition de gain.** Une condition de gain pour un joueur J_i sur une arène de jeu $G = (V, E)$ est un sous-ensemble C_i^g de V_i . La partie est remportée par le joueur J_i si celui-ci visite un sommet de C_i^g en premier.

■ **Définition 221 — Condition de victoire.** Une condition de victoire d'un joueur J_i est un sous-ensemble de toutes les parties possibles \mathcal{P} remportées par ce joueur. On la note :

$$C_i^\nu = \{\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \text{ visite un sommet de } C_i^g\} \quad (27.3)$$

■ **Exemple 115 — Condition de gain et de victoire pour le jeu de Nim.** Pour le jeu de Nim de la figure 27.5 en choisissant la variante **misère** et J_1 comme premier joueur, alors $C_1^g = \{c_1\}$ est une condition de gain pour J_1 . De plus, $C_1^\nu = \{(s_1, a_2, c_1)\}$ est la condition de victoire de J_1 .

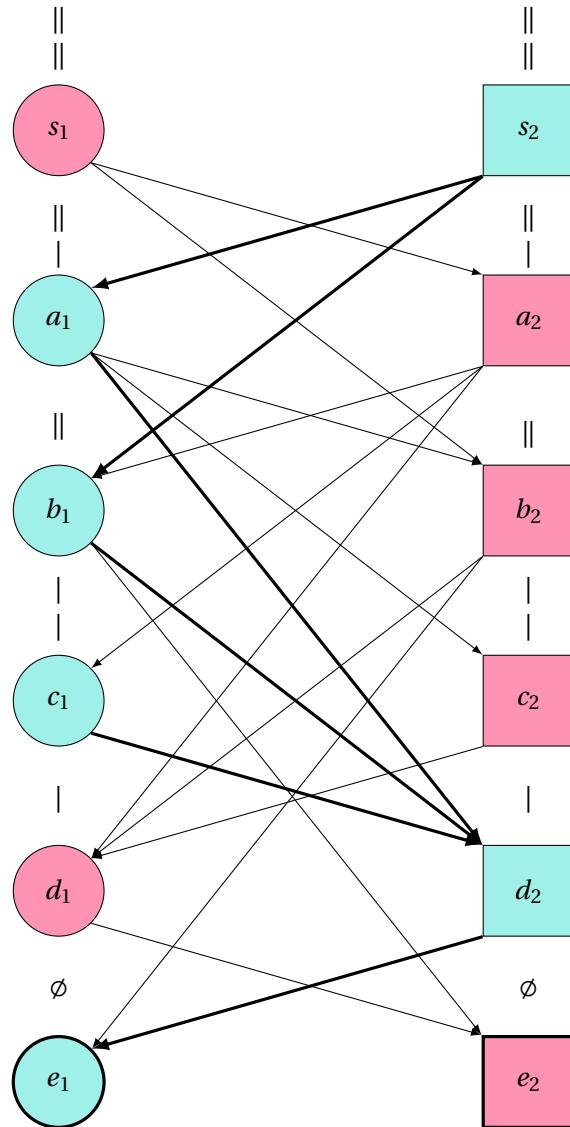


FIGURE 27.5 – Modélisation par graphe orienté biparti d'un jeu de Nim, variante **misère** : le dernier à jouer a perdu. Les sommets des joueurs 1 et 2 sont distingués par des cercles (1) et des carrés (2). La couleur cyan représente l'attracteur du joueur $J_1 : \mathcal{A}_1 = \{s_2, a_1, b_1, c_1, d_2, e_1\}$. On voit donc que 1 n'a pas intérêt à commencer à jouer dans cette configuration. Il en est de même pour le joueur 2 dont l'attracteur en rouge.

G Stratégies et positions

■ **Définition 222 — Stratégie sans mémoire.** Soit $G = (V, E)$ une arène de jeu. On note $V_i^{>0}$ l'ensemble des sommets contrôlés par le joueur $i \in \{1, 2\}$ de degré sortant non nul. Une stratégie est une application $\phi : V_i^{>0} \rightarrow V$ telle que :

$$\forall v \in V_i^{>0}, (v, \phi(v)) \in E \quad (27.4)$$

Cette stratégie est sans mémoire car elle ne dépend que du sommet courant et pas des sommets précédents de la partie.

R Une stratégie sans mémoire permet donc de calculer le prochain coup à jouer d'après la position courante. Le joueur J_i suit la stratégie ϕ lors d'une partie $\mathcal{P} = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ si $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, v_j \in V_i^{>0} \implies v_{j+1} = \phi(v_j)$

■ **Définition 223 — Stratégie gagnante.** Une stratégie ϕ est gagnante pour le joueur J_i depuis le sommet $v_0 \in V_i$ si toute partie jouée depuis v_0 par J_i en suivant ϕ est gagnante pour J_i .

■ **Définition 224 — Position gagnante.** Soit $G = (V = V_1 \cup V_2, E)$ un jeu d'accessibilité à deux joueurs. Un sommet $v \in V_i$ est appelé position gagnante pour le joueur J_i si celui-ci possède une stratégie gagnante depuis v .

■ **Exemple 116 — Position gagnante du jeu de Nim.** Sur le jeu de la figure 27.5, le sommet a_1 est une position gagnante pour J_1 . Reste à trouver la stratégie ϕ ... Le sommet s_1 n'est pas une position gagnante pour J_1 .

R On appelle :

- P-position une position dans laquelle le joueur précédent a gagné.
- N-position une position dans laquelle le joueur dont c'est le tour eut gagner.

H Attracteurs

Pour gagner une partie d'un jeu d'accessibilité, il semble donc logique de chercher les positions gagnantes et une stratégie associée. La notion d'attracteur a été développée pour construire l'ensemble des positions gagnantes. L'idée est de construire cet ensemble en partant de la condition de gain, en remontant les arcs du graphe à l'envers et en ne conservant que les positions gagnantes.

■ **Définition 225 — Suite des ensembles attracteurs.** Soit $G = (V = V_1 \cup V_2, E)$ une arène d'un jeu d'accessibilité. On définit par induction la suite des attracteurs $(\mathcal{A}_j^1)_{j \in \mathbb{N}}$ du joueur J_1 , c'est-à-dire des ensembles des sommets de V à partir desquels le joueur J_1 peut forcer la partie à arriver en C_1^g , de la manière suivante :

$$\mathcal{A}_0^1 = C_1^g \quad \text{si } j = 0 \quad (27.5)$$

$$\mathcal{A}_{j+1}^1 = \mathcal{A}_j^1 \cup \{\nu \in V_1, \exists \nu' \in \mathcal{A}_j^1, (\nu, \nu') \in E\} \cup \{\nu \in V_2, \forall \nu' \in V_1, (\nu, \nu') \in E \Rightarrow \nu' \in \mathcal{A}_j^1\} \quad \forall j \geq 0 \quad (27.6)$$

$$(27.7)$$

Formulé simplement, le premier terme de cette suite est la condition de gain du joueur, c'est-à-dire les sommets qui lui donnent la victoire. Puis, le terme $j+1$ de la suite est l'union :

- du terme \mathcal{A}_j^1 ,
- des sommets de V_1 qu'un arc peut mener à une position gagnante de \mathcal{A}_j^1 dans V_2 ,
- des sommets de V_2 qui font obligatoirement aboutir à une position gagnante de V_1 .

■ **Définition 226 — Attracteur du joueur J_i .** L'attracteur du joueur i est l'ensemble des sommets d'une arène de jeu défini par :

$$\mathcal{A}^i = \bigcup_0^{+\infty} \mathcal{A}_j^i. \quad (27.8)$$

Théorème 31 — L'attracteur du joueur J_i contient exactement toutes les positions gagnantes de J_i .

Démonstration. On procède par récurrence sur le rang d'un sommet de G , une fonction $r : V \rightarrow \mathbb{N}$ définie comme suit :

$$\forall \nu \in V, r(\nu) = \min\{j, \nu \in \mathcal{A}_j^i\} \quad (27.9)$$

Pour un sommet n'appartenant pas à l'attracteur \mathcal{A} , le rang est infini. Cette définition est possible car la suite $(\mathcal{A}_j^1)_{j \in \mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion.

La propriété à démontrer est la suivante : \mathcal{P}_j : Pour tout $j \in \mathbb{N}$, les sommets de rang j sont des positions gagnantes du joueur J_1 .

- Initialisation \mathcal{P}_0 : pour $j = 0$, $\mathcal{A}_0^1 = C_1^g$, donc tous les sommets de \mathcal{A}_0^1 sont des positions gagnantes.
- Héritéité : on suppose que, pour un certain entier naturel j , l'ensemble \mathcal{A}_j^1 ne contient que des positions gagnantes de J_1 (\mathcal{P}_j est vraie). Considérons maintenant un élément ν de l'ensemble \mathcal{A}_{j+1}^1 de rang $j+1$. Supposons de plus¹ que ν n'appartient pas à \mathcal{A}_j^1 . Il reste alors deux possibilités :

1. Si $\nu \in V_1$, alors par définition de l'ensemble, il existe un arc qui amène à une position gagnante de \mathcal{A}_j^1 . Donc, ν est une position gagnante.

1. sinon c'est trivial

2. Si $v \in V_2$, alors par définition de l'ensemble, tous les arcs de l'arène l'amènent vers une position gagnante de \mathcal{A}_j^1 . C'est donc une position gagnante.
- Conclusion : comme le nombre de sommet du graphe est fini et que les ensembles \mathcal{A}_j^1 ne contiennent que des positions gagnantes, l'attracteur \mathcal{A} ne possède donc que des positions gagnantes.

■

R On peut maintenant construire une stratégie **gagnante** en considérant la stratégie sans mémoire ϕ qui, au fur et à mesure de la partie, fait diminuer le rang de la position courante :

$$\forall v_j \in \mathcal{A}_j^1 \cap V_1, v_{j+1} = \phi(v_j), r(v_{j+1}) < r(v_j) \quad (27.10)$$

Celle-ci est gagnante, car, en choisissant de diminuer le rang de la position suivante, on se rapproche de la victoire.



I Solution des jeux de Nim et impartialaux ---> HORS PROGRAMME

Les jeux de Nim ont permis à Sprague et Grundy d'élaborer une théorie mathématique qui donnent la solution d'un jeu d'accessibilité en se ramenant à un jeu de Nim sans avoir à explorer tout l'arbre de jeu, comme on doit le faire pour calculer un attracteur.

L'intérêt du nombre de Grundy ou **nimber** est donc de permettre la détermination de la stratégie optimale sans avoir à explorer l'intégralité du graphe de jeu. Il suffit de connaître la position courante, par exemple les tailles respectives des n piles d'allumettes (x_1, \dots, x_n) .

La résolution d'un jeu d'accessibilité repose alors sur deux étapes clés :

- **Équivalence** : On montre que le jeu étudié est équivalent à un jeu de Nim dans une position donnée (x_1, \dots, x_n) .
- **Décomposition** : On considère ce jeu comme une *somme* de n jeux de Nim élémentaires, chacun composé d'une seule pile de taille x_i . On définit alors une règle d'addition spécifique pour calculer la valeur globale du jeu à partir de ses composantes.

Cette opération, introduite par Bouton en 1901, correspond mathématiquement à l'opérateur OU exclusif (XOR) bit à bit.

Théorème 32 — Bouton, 1901. Une position (x_1, \dots, x_n) d'un jeu de Nim est une position perdante (P-position) si et seulement si la somme de Nim de ses composantes est nulle :

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n = 0 \quad (27.11)$$

À l'inverse, si cette somme est non nulle, la position est gagnante (N-position).

■ **Définition 227 — Nombre de Grundy d'un jeu de Nim.** Le nombre de Grundy est la somme $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$ du théorème 32 en utilisant le ou exclusif sur la position du jeu.

Mais on peut également le définir récursivement :

- si la pile du jeu de Nim est en position finale, le nombre de Grundy vaut 0,
- sinon, le nombre de Grundy d'une position donnée (x_1, \dots, x_n) est le plus petit entier positif ou nul qui n'apparaît pas dans la liste des nombres de Grundy des positions qui suivent immédiatement la position donnée.

Ceci s'écrit parfois :

$$\gamma = \text{mex}(\{x_1, \dots, x_n\}) \quad (27.12)$$

où la fonction mex (minimum excluded) renvoie le plus petit entier naturel n'appartenant pas à une partie de \mathbb{N} .

■ **Définition 228 — Minimum Excluded (mex).** Soit E un sous-ensemble de \mathbb{N} .

$$\text{mex}(E) = \min \{n \in \mathbb{N}, n \notin E\} \quad (27.13)$$

■ **Exemple 117 — Fonction mex.** Les résultats suivants éclairent le fonctionnement de cette fonction :

- $\text{mex}(\{1, 2\}) \rightarrow 0$
- $\text{mex}(\{0, 1, 3, 7, 9\}) \rightarrow 2$

Théorème 33 — Sprague–Grundy. Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté acyclique fini représentant un jeu d'accessibilité. Il existe une unique fonction

$$g : S \longrightarrow \mathbb{N}$$

telle que, pour tout sommet $x \in S$,

$$g(x) = \text{mex} \{g(y) \mid (x, y) \in A\}.$$

De plus, un sommet $x \in S$ est une P-position si et seulement si $g(x) = 0$.

R Les théorèmes 32 et 33 induisent la stratégie gagnante pour gagner à un jeu d'accessibilité : il s'agit de celle qui consiste à choisir la position suivante de telle manière à ce que son nombre de Grundy soit nul.

R La fonction de Grundy est donc définie récursivement à partir des P-positions.

■ **Exemple 118 — Utilisation du nombre de Grundy.** Ces théorèmes permettent d'affir-

mer que la position de départ de la figure 27.5 est une position perdante, car le nombre de Grundy est nul : $10_2 \oplus 10_2 = 00_2$. Il ne reste plus qu'à vous entraîner au calcul en binaire;-) ou alors expliciter la fonction de Grundy.

En partant du puits $e(\emptyset)$ du graphe 27.4 qui est une P-positoin, on construit :

- e (Position \emptyset) : c'est un puits, aucune allumette restante.

$$g(e) = \text{mex}(\emptyset) = 0$$

- d (Position $|$) : le seul mouvement possible mène à la position vide e .

$$g(d) = \text{mex}(\{g(e)\}) = \text{mex}(\{0\}) = 1$$

- Sommet c (Position $||$) : on ne peut retirer qu'une allumette, ce qui mène à la position d .

$$g(c) = \text{mex}(\{g(d)\}) = \text{mex}(\{1\}) = 0$$

- b (Position $|||$) : on peut retirer une allumette (vers d) ou deux (vers e).

$$g(b) = \text{mex}(\{g(e), g(d)\}) = \text{mex}(\{0, 1\}) = 2$$

- a (Position $|| ||$) : les coups possibles permettent d'atteindre b , c ou d .

$$g(a) = \text{mex}(\{g(b), g(c), g(d)\}) = \text{mex}(\{2, 0, 1\}) = 3$$

- s (Position $|| |||$) : depuis la s , on peut soit retirer une ligne entière (vers b), soit retirer une seule allumette (vers a).

$$g(s) = \text{mex}(\{g(b), g(a)\}) = \text{mex}(\{2, 3\}) = 0$$

On en conclut donc que la position s est une P-position : ne pas jouer en premier. Si jamais on doit jouer en a , choisir c .

28

EXPLORATION ET HEURISTIQUES

For progress there is no cure.

John Von Neumann [25]

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☒ expliquer la notion d'heuristique
- ☒ appliquer les algorithmes A* et minimax à des cas simples

A Au-delà des jeux d'accessibilité, les heuristiques

De nombreux autres jeux existent qui ne sont pas des jeux d'accessibilité. Par exemple, les échecs ou le go. Pour ces jeux, les joueurs n'ont pas les même options : le joueur qui a les blancs ne peut pas manipuler les noirs de la même manière. Donc la théorie de Sprague-Grundy ne peut pas s'appliquer.

Par ailleurs, pour ces jeux, il est impensable de construire l'arbre de jeu, la combinatoire nous indique que le nombre de parties possibles est bien trop grand. Le nombre de Shannon est une tentative pour estimer le nombre de parties différentes¹ possibles. Il vaut 10^{123} pour les échecs ce qui est plus grand que le nombre d'atomes dans l'univers observable...

S'il nous faut donc renoncer à explorer ces arbres de jeux d'une manière exhaustive, rien ne nous empêche de les explorer localement. Si on utilise un arbre de jeu exhaustif, la partie se finit lorsque la position est une feuille à laquelle est associé un gain ou un score. Lorsqu'on explore localement un arbre de jeu, les feuilles sont parfois absentes voire encore très loin de la position. C'est pourquoi le développement de ces algorithmes s'appuie sur des **heuristiques** capables d'estimer le gain d'une position sans disposer de l'intégralité de l'arbre de jeu.

1. qui ont un sens

■ **Définition 229 — Heuristique.** Une heuristique^a est une approche de résolution de problème à partir de connaissances incomplètes. Une heuristique doit permettre d'aboutir en un temps limité à des solutions néanmoins acceptables même si elles ne sont pas nécessairement optimales.

a. Je trouve en grec ancien.

B Algorithme Minimax

Tu sais que ce que tu peux espérer de mieux est d'éviter le pire.

Italo Calvino, 1979

On se place dans le cadre d'un jeu :

- séquentiel à somme nulle,
- à deux joueurs,
- déterministe (sans hasard),
- à information parfaite et complète,
- pour lequel on dispose d'une fonction permettant d'évaluer une position.

R Parmi ces jeux, on trouve par exemple les jeux impartials, le morpion, les échecs, le go ou le jeu de hex.

Dans ce cadre, l'algorithme Minimax associé à une heuristique permet de développer des stratégies sans avoir à explorer tout l'arbre de jeu. Il découle naturellement du théorème du même nom démontré par Von Neumann en 1926.

L'algorithme 58 détaille la procédure Minimax. Le principe est le suivant : on construit un arbre de jeu incomplet comme celui-de la figure 28.1. La hauteur de l'arbre est un entier fixé qui limite la profondeur de l'exploration de l'algorithme.

Chaque niveau de l'arbre est contrôlé par un seul joueur. Comme, pour les jeux d'accessibilité considérés, les gains de l'un sont les pertes de l'autre, on choisit de nommer les joueurs J_{max} en **rouge** et J_{min} en **cyan**. Le but du jeu est de maximiser le gain pour J_{max} , son score est donc positif, et, symétriquement, minimiser le gain pour J_{min} dont le score est donc négatif.

■ **Définition 230 — Définition du score des joueurs pour une position donnée.** Le jeu associe à chaque feuille de l'arbre minimax un gain qui devient le score du joueur qui atteint cette feuille. Si la feuille est en position p alors on choisit de noter ce score $s(p) \in \mathbb{R}$. À partir du score associé aux feuilles, on peut définir récursivement le score maximal ou minimal associé à un nœud interne p de l'arbre minimax comme suit :

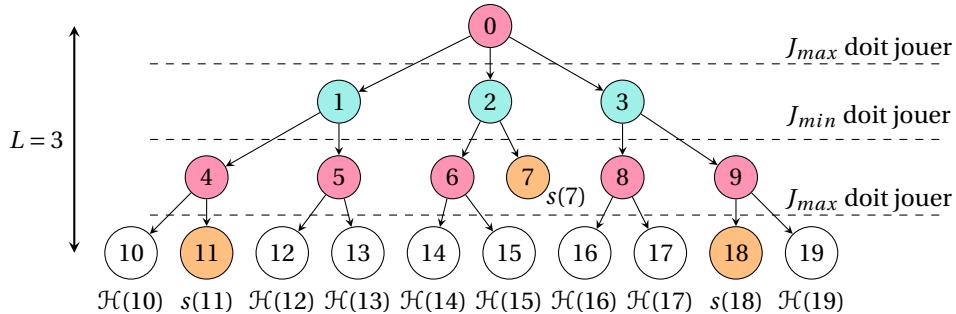


FIGURE 28.1 – Exemples d'arbre minimax. Chaque niveau est contrôlé par un seul joueur, J_{max} en rouge et J_{min} en cyan. La hauteur de l'arbre L est telle que seule une partie de l'arbre de jeu est accessible. Certaines feuilles sont visibles (en orange, c'est l'automne). L'arbre minimax s'achève donc parfois sur des nœuds internes pour lesquels on donne une estimation du gain (non coloré).

$$\mathcal{S}(p) = \begin{cases} s(p) & \text{si } p \text{ est une feuille} \\ \max \{\mathcal{S}(f), f \text{ fils de } p\} & \text{si } p \text{ est contrôlé par } J_{max} \\ \min \{\mathcal{S}(f), f \text{ fils de } p\} & \text{si } p \text{ est contrôlé par } J_{min} \end{cases} \quad (28.1)$$

Ainsi, à la fin de la partie, si J_{max} en position p effectue les choix décrits ci-dessus, son score final sera au moins $\mathcal{S}(p)$. De même, le score de J_{min} en position p sera au plus $\mathcal{S}(p)$. Ceci peut se démontrer par récurrence.

Le score d'un joueur ne peut se calculer tel que décrit ci-dessus puisqu'on ne connaît pas l'intégralité de l'arbre de jeu. L'algorithme 58 suppose donc qu'on connaît une **heuristique** \mathcal{H} pour estimer le score d'une position d'un nœud intermédiaire. Cette heuristique est une fonction de la position p dans l'arbre et sa valeur est un nombre réel $\mathcal{H}(p)$.

■ **Exemple 119 — Calcul des scores sur un arbre Minimax.** La figure 28.2 superpose les scores calculés par l'algorithme Minimax sur chaque nœud. Le joueur J_{max} peut donc espérer au plus un score de 6 s'il se trouve en position 0.

R Minimax peut fonctionner sans heuristique particulière si l'arbre à explorer est de taille raisonnable. Mais, dès lors que l'arbre à explorer est grand, il est nécessaire de ne plus explorer toutes les branches et d'évaluer la position courante : c'est le rôle de l'heuristique.

R Une bonne heuristique pour l'algorithme minimax calcule un score : positif pour un joueur et négatif pour l'autre. Ce score doit :

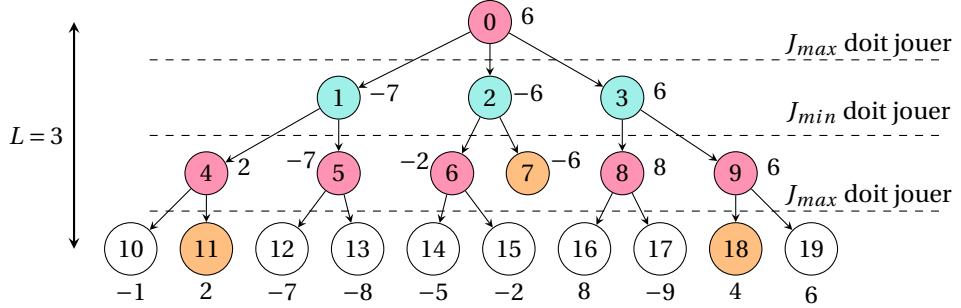


FIGURE 28.2 – Exemples d’arbre minimax complété avec les scores. Chaque niveau est contrôlé par un seul joueur, J_{max} en rouge et J_{min} en cyan.

- permettre une bonne **dérenciation** des positions : il doit être possible de distinguer les positions gagnantes, celles qui sont équilibrées et les perdantes,
- donner une bonne **approximation** du score réel de la position : plus cette valeur est proche de la valeur exacte obtenue par exploration complète de l’arbre, plus les décisions prises seront pertinentes,
- être **rapide à calculer** pour ne pas ralentir l’exploration de l’arbre.

C Élagage $\alpha\beta$ sur un arbre Minimax --> HORS PROGRAMME

Selon les situations considérées, limiter la profondeur d’exploration de l’arbre de jeux peut s’avérer être insuffisant pour réduire la complexité du problème. L’élagage $\alpha\beta$ est une technique pour ne pas explorer certaines branches de l’arbre qui n’ont pas besoin de l’être. Le principe est détaillé sur la figure 28.3.

On distingue deux types d’élagage possible, les types α et β comme le montre les figures 28.4 et 28.5. Pour améliorer la complexité de l’algorithme Minimax, on peut choisir d’élaguer comme le montre l’algorithme 59.

D A* pour trouver un chemin

Si le jeu que l’on considère ne peut pas être modélisé selon un arbre Minimax, alors la situation n’est pas désespérée car il nous reste encore les graphes. Il est toujours possible de modéliser l’évolution d’un jeu comme une succession d’état, chaque coup joué permettant de passer d’un état à un autre. Développer une stratégie dans un jeu modélisé par un graphe à état revient donc à trouver un chemin d’un sommet à un autre dans un graphe. Le premier sommet correspond aux conditions initiales du jeu, le dernier à une condition de gain.

Algorithme 58 Minimax

Entrée : p un position dans l'arbre de jeu (un nœud de l'arbre)

Entrée : s la fonction de score sur les feuilles

Entrée : \mathcal{H} l'heuristique de calcul du score pour un nœud interne

Entrée : L la profondeur maximale de l'arbre Minimax

```

1: Fonction MINIMAX( $p, s, \mathcal{H}, L$ )
2:   si  $p$  est une feuille alors
3:     renvoyer  $s(p)$ 
4:   si  $L = 0$  alors
5:     renvoyer  $\mathcal{H}(p)$                                  $\triangleright$  On arrête d'explorer, on estime
6:   si  $p$  est contrôlé par  $J_{max}$  alors
7:      $M \leftarrow -\infty$ 
8:      $p_M$  un nœud vide
9:     pour chaque fils  $f$  de  $p$  répéter
10:     $v \leftarrow \text{MINIMAX}(f, s, \mathcal{H}, L - 1)$             $\triangleright v$  est un score de  $J_{min}$ 
11:    si  $v > M$  alors
12:       $M \leftarrow v$ 
13:       $p_M = f$ 
14:    renvoyer  $M, p_M$                                  $\triangleright$  Valeur maximale trouvée et la racine de cette solution
15:  sinon
16:     $m \leftarrow +\infty$ 
17:     $p_m$  un nœud vide
18:    pour chaque fils  $f$  de  $p$  répéter
19:       $v \leftarrow \text{MINIMAX}(f, s, \mathcal{H}, L - 1)$             $\triangleright v$  est un score de  $J_{max}$ 
20:      si  $v < m$  alors
21:         $m \leftarrow v$ 
22:         $p_m = f$ 
23:    renvoyer  $m, p_m$                                  $\triangleright$  Valeur minimale trouvée et la racine de cette solution

```

Algorithme 59 Minimax avec élagage $\alpha\beta$

Entrée : p un position dans l'arbre de jeu (un nœud de l'arbre)

Entrée : s la fonction de score sur les feuilles

Entrée : \mathcal{H} l'heuristique de calcul du score pour un nœud interne

Entrée : L la profondeur maximale de l'arbre Minimax

Entrée : α le niveau de coupure α ▷ $-\infty$ au démarrage

Entrée : β le niveau de coupure β ▷ $+\infty$ au démarrage

1: **Fonction** MINIMAX_ $\alpha\beta(p, s, \mathcal{H}, L, \alpha, \beta)$

2: **si** p est une feuille **alors**

3: **renvoyer** $s(p)$

4: **si** $L = 0$ **alors**

5: **renvoyer** $\mathcal{H}(p)$

▷ On arrête d'explorer, on estime

6: **si** p est contrôlé par J_{max} **alors**

7: $M \leftarrow -\infty$

8: p_M un nœud vide

9: **pour** chaque fils f de p **répéter**

10: $v \leftarrow \text{MINIMAX_}\alpha\beta(f, s, \mathcal{H}, L - 1, \alpha, \beta)$

▷ v est un score de J_{min}

11: **si** $v > M$ **alors**

12: $M \leftarrow v$

13: $p_M = f$

14: **si** $v \geq \beta$ **alors**

15: **renvoyer** M

▷ Élagage de type β

16: $\alpha \leftarrow \max(\alpha, M)$ ▷ Mise à jour du niveau de l'élagage

17: **renvoyer** M, p_M

▷ Valeur maximale trouvée et la racine de cette solution

18: **sinon**

19: $m \leftarrow +\infty$

20: p_m un nœud vide

21: **pour** chaque fils f de p **répéter**

22: $v \leftarrow \text{MINIMAX_}\alpha\beta(f, s, \mathcal{H}, L - 1, \alpha, \beta)$

▷ v est un score de J_{max}

23: **si** $v < m$ **alors**

24: $m \leftarrow v$

25: $p_m = f$

26: **si** $v \leq \alpha$ **alors**

27: **renvoyer** m

▷ Élagage de type α

28: $\beta \leftarrow \min(\beta, m)$ ▷ Mise à jour du niveau de l'élagage

29: **renvoyer** m, p_m

▷ Valeur minimale trouvée et la racine de cette solution

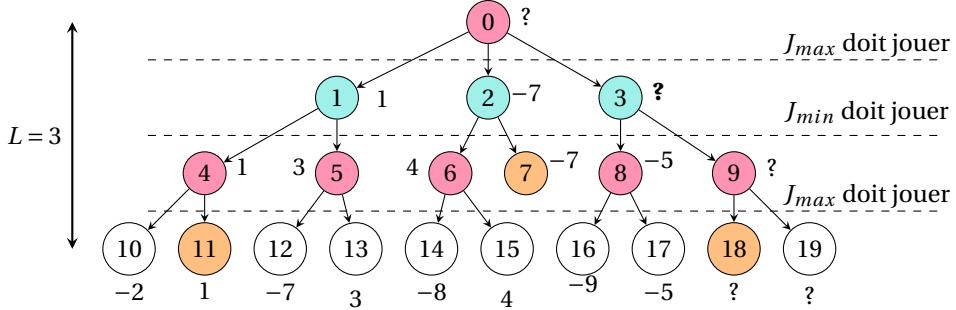


FIGURE 28.3 – L’élagage $\alpha\beta$ permet sur cet exemple d’éviter l’exploration complète du sous-arbre du nœud numéro 3. En effet, comme c’est un nœud de J_{min} , que le premier nœud du niveau a un score de 1 et que le score calculé du nœud 8 vaut -5, alors on comprend que J_{min} remontera au moins -5 et que J_{max} ne choisira pas ce nœud numéro 3 car ce n’est pas le maximum du niveau.

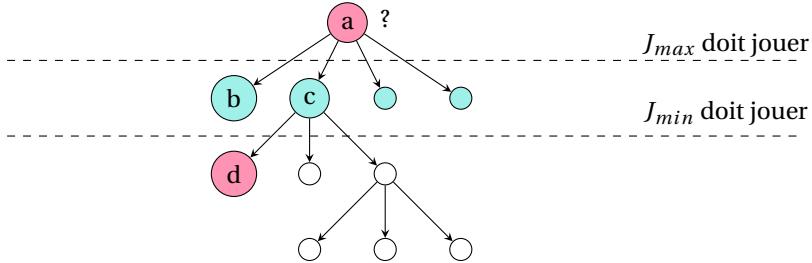


FIGURE 28.4 – L’élagage α : supposons que $S(b)$ ait déjà été calculé par l’algorithme Minimax. Si $S(b) \geq S(d)$, alors il est inutile d’explorer le sous-arbre c : J_{max} ne choisira pas le nœud c , il lui préférera b .

L’algorithme A^* ² évalue chaque sommet du graphe à l’aide de la distance au sommet de départ et d’une heuristique qui l’informe sur le reste du chemin à parcourir jusqu’au sommet de destination. Le chemin qu’il reste à parcourir est rarement déjà exploré : la plupart du temps, le graphe est trop grand pour être exploré dans son entièreté. C’est pourquoi, l’heuristique évalue le reste du chemin à parcourir sans le parcourir : c’est une **estimation**. Si h est bien choisie, alors A^* converge aussi vite voire plus vite que Dijkstra[24].

Soit $G = (S, A, w)$ un graphe orienté pondéré. Soit d la fonction de distance utilisée par l’algorithme de Dijkstra (cf. algorithme 48). Soit h une fonction permettant d’évaluer la distance

2. prononcer *A étoile* ou *A star*

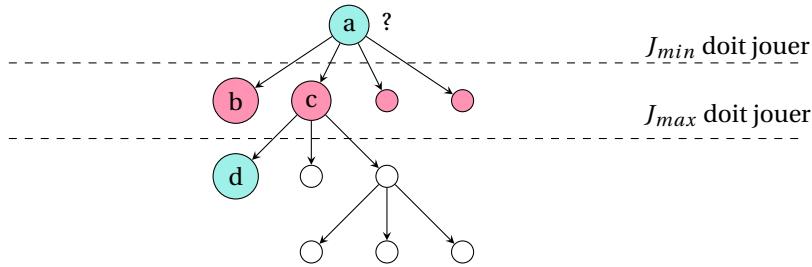


FIGURE 28.5 – L’élagage β : supposons que $\mathcal{S}(b)$ ait déjà été calculé par l’algorithme Minimax. Si $\mathcal{S}(b) \leq \mathcal{S}(d)$, alors il est inutile d’explorer le sous-arbre c : J_{min} ne choisira pas le nœud c , il lui préfèrera b .

au point d’arrivée. **L’évaluation de la priorité p d’un sommet s par A^* se fait comme suit :**

$$p(s) = d(s) + h(s) \quad (28.2)$$

p est la somme de la distance réelle au sommet de départ et de l’estimation de la distance au point d’arrivée procurée par l’heuristique.

L’algorithme A^* fonctionne comme un algorithme de Dijkstra pour lequel la priorité dans la file est p . Inversement, on peut considérer que Dijkstra c’est A^* avec une heuristique nulle. Le choix d’une heuristique est particulièrement important.

■ **Définition 231 — Heuristique admissible.** Une heuristique \mathcal{H} est admissible si pour tout sommet du graphe d’état, $\mathcal{H}(s)$ est une borne inférieure de la plus courte distance séparant le sommet de départ du sommet d’arrivée.

(R) Une heuristique admissible ne surestime jamais le coût.

(R) Une heuristique admissible est toujours nulle sur le sommet d’arrivée.

■ **Définition 232 — Heuristique monotone.** Une heuristique \mathcal{H} est monotone si pour tout arête (a, b) du graphe d’état $G = (S, A, w)$, $\mathcal{H}(a) \leq w(a, b) + \mathcal{H}(b)$.

(R) Une heuristique monotone garantit qu’ A^* ne revisite jamais de sommets avec un coût plus bas, ce qui améliore son efficacité.

(R) Une heuristique monotone est admissible, mais l’inverse n’est pas vrai.

Comment choisir une heuristique pour A^* ?

- Si l'heuristique est monotone, A^* fonctionne de manière optimale, les sommets n'ont pas besoin d'être redécouverts.
- Si l'heuristique est seulement admissible, mais pas monotone, A^* peut encore trouver un chemin optimal, mais il peut être plus lent car certains nœuds doivent être réévalués.
- Si l'heuristique n'est ni admissible ni monotone, A^* ne garantit plus d'obtenir un chemin optimal et peut même ne pas terminer dans certains cas.

Cinquième partie

Annexes

BIBLIOGRAPHIE

Articles

- [3] Richard BELLMAN. "The theory of dynamic programming". In : *Bulletin of the American Mathematical Society* 60.6 (1954), pages 503-515 (cf. page 231).
- [4] Richard BELLMAN. "On a routing problem". In : *Quarterly of applied mathematics* 16.1 (1958), pages 87-90 (cf. page 234).
- [6] E. W. DIJKSTRA. "A note on two problems in connexion with graphs". In : *Numerische Mathematik* 1.1 (1^{er} déc. 1959), pages 269-271. ISSN : 0945-3245. DOI : 10.1007/BF01386390. URL : <https://doi.org/10.1007/BF01386390> (visité le 27/07/2022) (cf. page 163).
- [8] Ronald A FISHER. "The use of multiple measurements in taxonomic problems". In : *Annals of eugenics* 7.2 (1936). Publisher : Wiley Online Library, pages 179-188 (cf. page 284).
- [10] Robert W FLOYD. "Algorithm 97 : shortest path". In : *Communications of the ACM* 5.6 (1962). Publisher : ACM New York, NY, USA, page 345 (cf. page 235).
- [14] Donald B JOHNSON. "Efficient algorithms for shortest paths in sparse networks". In : *Journal of the ACM (JACM)* 24.1 (1977). Publisher : ACM New York, NY, USA, pages 1-13 (cf. page 167).
- [16] Casimir KURATOWSKI. "Sur le probleme des courbes gauches en topologie". In : *Fundamenta mathematicae* 15.1 (1930), pages 271-283 (cf. page 135).
- [18] John MCCARTHY et al. "A proposal for the dartmouth summer research project on artificial intelligence, august 31, 1955". In : *AI magazine* 27.4 (2006), pages 12-12 (cf. page 275).
- [19] A. MILINOWSKI et G. CANTOR. "Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen." In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 77 (1874), pages 258-262. URL : <http://www.digizeitschriften.de/main/dms/img/?PPN=GDZPPN002155583> (visité le 20/03/2019) (cf. page 169).
- [21] Henry Gordon RICE. "Classes of recursively enumerable sets and their decision problems". In : *Transactions of the American Mathematical Society* 74.2 (1953). Publisher : JSTOR, pages 358-366 (cf. page 98).
- [22] Bernard ROY. "Transitivité et connexité". In : *Comptes Rendus Hebdomadaires Des Séances De L'Academie Des Sciences* 249.2 (1959). Publisher : GAUTHIER-VILLARS/EDITIONS ELSEVIER 23 RUE LINOIS, 75015 PARIS, FRANCE, pages 216-218 (cf. page 235).

- [23] Geoffrey TWEEDALE. "William Poundstone, Prisoner's Dilemma : John von Neumann, Game Theory, and the Puzzle of the Bomb. Oxford : Oxford University Press, 1992. Pp. xi+ 290. ISBN 0-19-286162-X.\pounds 7.99 (paperback edition)." In : *The British Journal for the History of Science* 26.3 (1993). Publisher : Cambridge University Press, pages 375-376 (cf. page 291).
- [27] Stephen MARSHALL. "A theorem on boolean matrices". In : *Journal of the ACM (JACM)* 9.1 (1962). Publisher : ACM New York, NY, USA, pages 11-12 (cf. page 235).

Livres

- [2] Claude Gaspar BACHET. *Problèmes plaisans et delectables, qui se font par les nombres.* chez Pierre Rigaud, 1612. 200 pages (cf. page 289).
- [15] Luc JULIA. *L'intelligence artificielle n'existe pas.* First, 2019 (cf. page 275).
- [17] Édouard LUCAS. *Récréations mathématiques.* Tome 2. Gauthier-Villars et fils, 1883 (cf. page 143).
- [25] John VON NEUMANN. *Can we survive technology?* Time, Incorporated, 1955 (cf. page 305).
- [26] John VON NEUMANN et Oscar MORGENSTERN. *Theory of Games and Economic Behaviour.* Press, Princeton, 1944 (cf. page 289).

Vidéos

- [1] ARTE. *Le dilemme du prisonnier | Voyages au pays des maths | ARTE.* 9 oct. 2021. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=G9ER5bLxQEU> (visité le 23/08/2022) (cf. page 291).
- [12] FORT-BOYARD.FR. *Bâtonnets.* 5 juill. 2011. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=10CUpu1Wxww> (visité le 23/08/2022) (cf. page 295).
- [13] ITEMPRODUCTIONS. *Nim game from "last year at marienbad".* 7 juill. 2010. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=8218FtL60g4> (visité le 23/08/2022) (cf. page 295).
- [24] UNSWMECHATRONICS. *Dijkstra's Algorithm vs. A* Search vs. Concurrent Dijkstra's Algorithm.* 24 juin 2013. URL : <https://www.youtube.com/watch?v=cSxn0m5aceA> (visité le 26/08/2022) (cf. page 311).

Sites web

- [5] Regis DEVOLDERE et Carlos SACRÉ. *Cardinal d'un ensemble-Cardinal d'un ensemble.* 2000. URL : http://uel.unisciel.fr/mathematiques/logique1/logique1_ch09/co/apprendre_ch9_02.html (visité le 14/03/2019) (cf. page 170).

TABLE DES FIGURES

4.1	Comparaison des chaînes d'exécution des langages compilés (à gauche) et des langages interprétés (à droite)	17
4.2	Bytecode Python du code 4.1 de la fonction produit.	18
4.3	Paradigmes des langages de programmation	19
4.4	Positionnement du système d'exploitation et des bibliothèques logicielles entre les éléments logiciels et le matériel électronique	21
4.5	Arborescence typique d'un système de fichier Unix/Linux/Mac OS X	23
5.1	Types de données composés du langage Python : les conteneurs	31
5.2	Variable de type immuable, affectation et référencement en mémoire (à gauche) et programme Python pour la visualisation des adresses en mémoire (à droite) . .	36
5.3	Variable de type mutable, affectation et référencement en mémoire (à gauche) et programme Python pour la visualisation des adresses en mémoire (à droite) . .	36
9.1	Illustration de la recherche dichotomique de la valeur 7 dans un tableau trié (Source : Wikimedia Commons)	68
10.1	Vision de la pile d'exécution de l'algorithme factoriel récursif 12 pour le calcul de 3! .	77
11.1	Représentation d'un tableau statique en mémoire. Il peut représenter un tableau t de cinq entiers codés sur huit bits. On accède directement à l'élément i en écrivant $t[i]$	84
13.1	Comparaison des croissances des complexités usuelles	110
13.2	Principe de la décomposition d'un problème en sous-problèmes indépendants pour un algorithme de type diviser pour régner.	114
13.3	Structure d'arbre et appels récursifs pour la récurrence : $T(n) = rT(n/d) + f(n)$ ET $n/d^k = s$. On a choisi $r = 3$ pour l'illustration, c'est-à-dire chaque nœud possède trois enfants au maximum : on opère trois appels récursifs à chaque étape de l'algorithme.	115
13.4	Structure d'arbre et appels récursifs pour la récurrence de la recherche dichotomique : $T(n) = T(n/2) + c$. Hors appel récursif, la fonction opère un nombre constant d'opérations c indépendant de n en $O(1)$	116
13.5	Structure d'arbre et appels récursifs pour le tri fusion : $T(n) = 2T(n/2) + f(n)$ et $\frac{n}{2^k} = 1$. La fonction FUSION opère un nombre d'opérations $f(n)$	120

14.1 Étape de résolution d'un problème d'optimisation par décomposition en sous-problèmes et approche gloutonne.	126
14.2 Exemple de réservations de place au port correspondant à l'ensemble $\{[0,7], [2,5], [6,8], [1,2], [5,6]\}$	128
14.3 Illustration du problème du sac à dos (d'après Wikipedia). On a cinq objets de poids 9, 12, 2, 7 et 5 kg et de valeur 10, 7, 1, 3 et 2 . Le poids total admissible dans le sac est 15kg.	130
 15.1 Graphe simple	134
15.2 Multigraphe à deux boucle et deux arêtes parallèles	134
15.3 Graphe pondéré	135
15.4 Graphe orienté	135
15.5 Graphe complet K_5	136
15.6 Graphe biparti	136
15.7 Graphe biparti complet K_{34}	136
15.8 Graphe d'ordre cinq, de taille quatre et de séquence $[0,1,2,2,3]$. Le sommet d est isolé. Ce graphe n'est ni complet ni connexe.	139
15.9 Graphe complémentaire du graphe de la figure 15.8	139
15.10Graphe d'ordre trois, de taille deux et de séquence $[1,1,2]$	140
15.11Graphe d'ordre trois, de taille deux et de séquence $[1,1,2]$	140
15.12Graphe d'exemple $G = (S = \{a, b, c, d\}, A = \{ab, ac, bc, bd, dc\})$	141
15.13Graphe d'exemple $G' = (S' = \{1, 2, 3, 4\}, A' = \{12, 14, 24, 23, 43\})$	141
15.14Exemple de chaîne simple reliant a à d en rouge	142
15.15Exemple de cycle en turquoise	142
15.16Saurez-vous trouver le cycle eulérien de ce graphe?	143
15.17Graphe du jeu icosien et du dodécahèdre (solide régulier à 12 faces pentagonales). C'est un graphe cubique car chaque sommet possède trois voisins. Ce graphe possède un cycle hamiltonien. Saurez-vous le trouver?	144
15.18Graphe K_5 : saurez-vous trouver des cycles hamiltonien et eulérien de ce graphe?	144
15.19Exemple de sous-graphe couvrant G en rouge : $G = (S = \{a, b, c, d\}, A = \{ab, ac, cd\})$	145
15.20Exemple de sous-graphe induit par les sommets $S = \{a, c, d\}$ en turquoise. $G[S] = (S = \{a, c, d\}, A = \{ac, cd\})$	145
15.21Exemple de 4-coloration valide d'un graphe. Cette coloration n'est pas optimale.	146
15.22Exemple de 3-coloration valide d'un graphe. Cette coloration est optimale.	146
15.23Graphe de Petersen : saurez-vous proposer une coloration optimale de ce graphe sachant que son nombre chromatique vaut trois?	147
15.24Exemples d'arbres enracinés. Les racines des arbres sont en rouge, les feuilles en turquoise. Le tout forme une forêt.	149
15.25Arbre binaire	149
15.26Arbre binaire parfait	149
 16.1 Sur ces graphes, on peut vérifier les théorèmes de caractérisation des chaînes eulériennes et des cycles eulériens.	152

16.2 On peut vérifier que K5 possède un chemin hamiltonien.	153
17.1 Exemple de parcours en largeur au départ de a : a → b → c → d → e → g → f → h.	157
17.2 Exemple de parcours en profondeur au départ de a : a → b → c → d → g → h → e → f	161
17.3 Graphe pondéré à valeurs positives pour l'application de l'algorithme de Dijkstra.	165
18.1 Ensembles de nombres : naturels \mathbb{N} , relatifs \mathbb{Z} , dyadiques rationnels \mathcal{D} , décimaux \mathbb{D} , rationnels \mathbb{Q} , algébriques \mathbb{A} et réels \mathbb{R}	172
20.1 Schématisation du format IEEE 754.	190
20.2 Représentation IEEE 754 simple précision de $39,125_{10}$	191
20.3 Illustration de la répartition des nombres flottants IEEE754 en simple précision sur la droite des réels.	195
22.1 Illustration du concept de dictionnaire	216
22.2 Illustration du concept de dictionnaire, ensembles concrets	217
22.3 Illustration de l'implémentation d'un dictionnaire par table de hachage. La fonction de hachage h permet de calculer les indices du tableau. La valeur a associée à α se trouve à la case $h(\alpha)$ du tableau. Toutes les clefs n'ont pas forcément de valeur associée à un moment donnée de l'algorithme. Dans ce cas, à l'indice associé à cette clef, le tableau est vide.	222
22.4 Illustration de l'implémentation d'un dictionnaire par table de hachage avec chaînage. Les clefs β et ϕ , engendrent des collisions. On stocke donc les valeurs possibles pour un même code (indice) dans une liste.	225
23.1 Schématisation des différentes approches des algorithmes de décomposition d'un problème en sous-problèmes : diviser pour régner, approche gloutonne et programmation dynamique itérative.	228
23.2 Programmation itérative du calcul de $\binom{6}{3}$. Les rectangles correspondent à un cas terminal de la récursivité, les cercles à l'application de la formule récursive. Les sous-problèmes se chevauchent : par exemple, le calcul de $\binom{3}{2}$ est utilisé par le calcul de $\binom{4}{2}$ et $\binom{4}{3}$. En complétant le tableau de résolution, l'idée est de ne le calculer qu'une seule fois ces éléments.	229
23.3 Illustration du principe d'optimalité et de sous-structure optimale : trouver le plus court chemin dans un graphe orienté et pondéré. Les lignes droites sont des arcs. Les lignes ondulées indiquent les chemins connus dans le graphe : il faut imaginer qu'on n'a pas représenté tous les sommets. Les nombres représentent des distances ou les poids des arcs.	232
23.4 Graphe orienté et pondéré pour application de l'algorithme de Bellman-Ford (sans circuit à pondération négative)	234
23.5 Exemple de graphe orienté et pondéré pour expliquer le concept de matrice d'adjacence.	236

23.6 Illustration du problème du sac à dos (d'après Wikipedia). On a cinq objets de poids 9, 12, 2, 7 et 5 kg et de valeur 10, 7, 1, 3 et 2 €. Le poids total admissible dans le sac est 15kg.	238
23.7 Formulation récursive du problème du sac à dos.	239
23.8 Schéma de remplissage du tableau pour le problème KP(n, π). Le poids se trouve sur l'axe horizontal et le nombre d'objets sur l'axe vertical. Pour calculer $S(i, P)$ on a besoin de $S(i - 1, P)$ et de $S(i - 1, P - p_i)$	241
24.1 Un modèle conceptuel de type entité-association associé à la réalité de l'exemple 104. Les entités sont inscrites dans des rectangles, les attributs des entités dans des ovales et les associations entre les entités dans des losanges. Des cardinalités sont précisées sur les arcs qui relient les entités aux associations	248
24.2 Modèle relationnel construit à partir du modèle conceptuel 24.1. Seules les en-têtes de colonne des relations sont représentées. Les associations du modèle conceptuel ont été intégrées aux tables en ajoutant des colonnes qui contiennent les clefs primaires et les clefs étrangères nécessaires ou en créant une nouvelle table (direction). Les flèches mettent en évidence ces associations.	252
24.3 Traduction d'une association de un à un dans un modèle relationnel. Modèle relationnel spécifiant les tables résidence et orchestre du modèle relationnel de la figure 24.2.	254
24.4 Traduction d'une association de un à plusieurs dans un modèle relationnel. Modèle relationnel spécifiant les tables orchestre et style du modèle relationnel de la figure 24.2.	255
24.5 Traduction d'une association de plusieurs à plusieurs dans un modèle relationnel. Modèle relationnel spécifiant les tables orchestre, direction et chef qui implémente l'association <i>dirige</i> du modèle conceptuel de la figure 24.1.	257
24.6 Modèle physique de la base de données du modèle relationnel 24.2.	258
25.1 Modèle relationnel utilisé pour les exemples de projection et de sélection.	263
25.2 Représentation des étapes de la requête <code>SELECT ville.nom, pays.population FROM ville JOIN pays ON ville.nom_pays = pays.nom WHERE pays.population < 60000000</code> ; du code 25.5 qui opère une jointure entre les tables ville et pays. Étape 1 : les lignes des deux tables sont mises côtes à côtes d'après le critère de jointure. Étape 2 : seules les lignes qui respectent la condition de sélection sont gardées. Étape 3 : la projection sélectionne les colonnes résultats.	269
26.1 Visualisation de la dispersion des paramètres sur le jeu de données des manchots répartis sur trois îles et en trois espèces	278
26.2 Résultats de l'apprentissage de l'algorithme KNN sur le jeu de données de l'iris. Les régions de décisions du classificateur sont superposées au valeurs vraies des espèces d'iris.	279
26.3 Illustration de différentes distances dans le plan	282
26.4 Illustration de l'influence du nombre de voisins k sur une régression de modèle non linéaire dans le cadre de l'algorithme KNN	284

26.5 Matrice de confusion dans le cadre de la classification des variétés d'Iris : Setosa, Versicolor et Virginica. Les paramètres d'entrées sont les largeurs et longueurs des pétales et sépales. La prédiction est correcte dans plus de 90% des cas comme le montre la matrice de confusion.	285
26.6 Illustration des conséquences du choix du paramètre k dans k-moyennes. Sur cet exemple, seules quatre classes existent dans les données. k varie entre 3 et 6. Les barycentres des classes sont représentés par des croix noires.	287
27.1 Synthèse des catégories de jeu en fonction de la nature des informations	292
27.2 Représentation partielle d'un arbre de jeu d'une partie de morpion. La feuille de l'arbre indique le résultat de la partie (nulle). Chaque nœud interne de l'arbre représente une position de X ou de O au cours de la partie dans laquelle les joueurs doivent faire un choix. On considère que les cases sont numérotées de 1 à 9 en ligne et en partant du haut. La position finale est donnée sous l'arbre. Le joueur à la croix X joue en premier car il contrôle la racine de l'arbre.	294
27.3 Jeu de Marienbad avec des allumettes	296
27.4 Modélisation par graphe orienté acyclique (DAG) d'une partie de jeu de Marienbad avec deux rangées de deux allumettes au départ. On peut jouer dessus avec un pion placé en s au départ. Puis chaque joueur fait avancer le pion d'un saut sur le graphe en sélectionnant un successeur en suivant les arcs. Le joueur qui doit jouer en position e a perdu (convention normale).	296
27.5 Modélisation par graphe orienté biparti d'un jeu de Nim, variante misère : le dernier à jouer a perdu. Les sommets des joueurs 1 et 2 sont distingués par des cercles (1) et des carrés (2). La couleur cyan représente l'attracteur du joueur J_1 : $\mathcal{A}_1 = \{s_2, a_1, b_1, c_1, d_2, e_1\}$. On voit donc que 1 n'a pas intérêt à commencer à jouer dans cette configuration. Il en est de même pour le joueur 2 dont l'attracteur en rouge.	299
28.1 Exemples d'arbre minimax. Chaque niveau est contrôlé par un seul joueur, J_{max} en rouge et J_{min} en cyan . La hauteur de l'arbre L est telle que seule une partie de l'arbre de jeu est accessible. Certaines feuilles sont visibles (en orange , c'est l'automne). L'arbre minimax s'achève donc parfois sur des nœuds internes pour lesquels on donne une estimation du gain (non coloré).	307
28.2 Exemples d'arbre minimax complété avec les scores. Chaque niveau est contrôlé par un seul joueur, J_{max} en rouge et J_{min} en cyan	308
28.3 L'élagage $\alpha\beta$ permet sur cet exemple d'éviter l'exploration complète du sous-arbre du nœud numéro 3. En effet, comme c'est un nœud de J_{min} , que le premier nœud du niveau a un score de 1 et que le score calculé du nœud 8 vaut -5, alors on comprend que J_{min} remontera au moins -5 et que J_{max} ne choisira pas ce nœud numéro 3 car ce n'est pas le maximum du niveau.	311
28.4 L'élagage α : supposons que $\mathcal{S}(b)$ ait déjà été calculé par l'algorithme Minimax. Si $\mathcal{S}(b) \geq \mathcal{S}(d)$, alors il est inutile d'explorer le sous-arbre c : J_{max} ne choisira pas le nœud c , il lui préfèrera b	311

28.5 L'élagage β : supposons que $S(b)$ ait déjà été calculé par l'algorithme Minimax. Si $S(b) \leq S(d)$, alors il est inutile d'explorer le sous-arbre c : J_{min} ne choisira pas le nœud c , il lui préfèrera b	312
---	-----

LISTE DES TABLEAUX

5.1 Priorités des opérateurs en Python : dans l'ordre d'apparition, du plus prioritaire (1) au moins prioritaire (13)	33
5.2 Mots-clefs du langage Python	37
8.1 Comparatif des caractéristiques des algorithmes de tri. Ils existent de nombreuses variantes de ces algorithmes. Les informations de ce tableau concernent les versions implémentées en cours ou en TP.	65
8.2 Complexité des différents algorithmes de tri.	65
11.1 Complexité des opérations associées à l'utilisation d'un tableau statique.	84
11.2 Complexité des opérations associées à l'utilisation d'un tableau dynamique.	85
11.3 Complexité des opérations associées à l'utilisation des listes et des tableaux.	86
13.1 Hiérarchie des complexités temporelles de la moins complexe à la plus complexe.	109
13.2 Sur une machine cadencée à 2 Ghz, quelle est la durée prévisible d'exécution d'un algorithme en fonction de la taille des données d'entrée et de sa complexité? On suppose qu'une seule période d'horloge est nécessaire au traitement d'une donnée.	109
13.3 Récurrences et complexités associées utiles et à connaître	124
17.1 Tableau d des distances au sommet a successivement trouvées au cours de l'algorithme de Dijkstra appliqué au graphe de la figure 17.3	165
19.1 Plage de valeurs atteintes et nombre de valeurs encodées selon la taille des entiers non signés sur 8 , 16, 32 ou 64 bits	182
19.2 Plage d'entiers accessibles en fonction du nombre de bits de la représentation signée.	184
20.1 Plus petit (dé)normalisé et plus grand (dé)normalisé.	193
20.2 Plage de valeurs accessibles aux flottants.	193
20.3 Opérations spéciales sur les flottants.	194
20.4 Synthèse de l'écriture des flottants.	194
22.1 Complexité des opérations associées à l'utilisation des tables de hachage ou des arbres pour implémenter un TAD dictionnaire. Les coûts indiqués sont dans le pire des cas ou en moyenne.	217

22.2 Probabilité de collision p_c dans l'hypothèse d'une répartition uniforme des valeurs dans le tableau d'une table de hachage. Même dans le cas d'un tableau à un million d'éléments, la probabilité de collision est quasi-certaine dès que le nombre de clefs utilisé est supérieure à 2500. C'est le paradoxe des anniversaires.	223
23.1 Triangle de Pascal à mettre en parallèle de la figure 23.2. On a représenté le triangle du bas vers le haut.	230
23.2 Tableau lié à l'application de l'algorithme de Bellman-Ford au départ du sommet 0 du graphe de la figure 23.4. Application de la formule de récurrence 23.2 : i représente le nombre de sauts autorisés, v les sommets. Complétion du bas vers le haut.	234
23.3 Synthèse des informations relatives au problème de la figure 23.6.	240
23.4 Tableau de résolution du sac à dos dans le cas de la figure 23.6 donnant les valeurs de $S(i, P)$, avec $i \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$ et $P \in \llbracket 0, 15 \rrbracket$	240
25.1 Synthèse des opérateurs SQL au programme	274

LISTE DES CODES

4.1	Un exemple de programme en Python - traduction de l'algorithme produit	15
4.2	Importer un module et l'utiliser	24
4.3	Importer toutes les fonctions d'un module et en utiliser certaines	24
4.4	Importer quelques fonctions d'un module et les utiliser	24
5.1	Types simples	30
5.2	Affectations de type immuable	36
5.3	Affectations de type mutable	36
6.1	Anatomie d'un programme Python (importations, variables globales, fonctions, indentation, blocs, programme principal)	40
6.2	blocs conditionnels	41
6.3	Expression conditionnelle	42
6.4	Boucle inconditionnelle for	42
6.5	Utilisation de range	43
6.6	Boucle conditionnelle while	43
6.7	Fonction Python à un paramètre renvoyant un entier	46
6.8	Procédure Python	47
6.9	Fonction avec paramètre optionnel et plusieurs chemin d'exécution avec valeur retour	47
7.1	Algorithmes simples et incontournables	56
7.2	Passage en paramètre d'un type mutable et d'un type immuable à une fonction	58
11.1	Créer des tableaux Numpy	89
11.2	Accéder aux éléments d'un tableau numpy	90
11.3	Opérer élément par élément	91
11.4	Calcul matriciel	92
11.5	Types de données numpy	93
24.1	Création du modèle physique d'une base de données	259
25.1	Structure de base d'une requête SQL : projection et sélection	262
25.2	Exemples de projections	264
25.3	Sélections	265
25.4	Sélections - ordre des résultats - projection non redondante	266
25.5	Exemples de jointures	268
25.6	Exemples d'utilisation des fonctions d'agrégation	270
25.7	Exemple d'utilisation de GROUP BY	271
25.8	Exemple d'utilisation de GROUP BY ... HAVING	271
25.9	Exemple d'opération ensembliste	272

25.10 Requêtes imbriquées	272
-------------------------------------	-----

INDEX

Clef primaire, 250

Clef étrangère, 250

correction, 102

Entiers relatifs, 183

Complément à deux, 184

invariant de boucle, 103

list

constructeurs, 51

indexing, 54

indicable, 54

itération, 55

opération, 53

slicing, 55

tronçonnage, 55