Expressions régulières

OPTION INFORMATIQUE - TP nº 3.8 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

☞ faire le lien entre un ensemble de mots et une expression régulière
☞ utiliser la syntaxe des expressions régulières
☞ utiliser la sémantique des expressions régulières pour simplifier une expression régulière
☞ utiliser le filtrage (pattern matching) sur un type algébrique
☞ définir et utiliser un type algébrique

A Exprimer par des mots des expressions régulières

Tenter de décrire en français les langages dénotés par les expressions régulières suivantes :

A1. $\Sigma\Sigma$

Solution : Le langage des mots de longueur deux.

A2. $(\epsilon + \Sigma)(\epsilon + \Sigma)$

Solution : Le langage des mots dont la longueur est au plus deux.

A3. $(\Sigma\Sigma)^*$

Solution : Le langage des mots de longueur paire.

A4. $\Sigma^* a \Sigma^*$

Solution : Le langage des mots comportant au moins une occurrence de a.

A5. $\Sigma^* ab \Sigma^*$

Solution : Le langage des mots comportant au moins une occurrence du facteur ab

A6. $\Sigma^* a \Sigma^* b \Sigma^*$

Solution : Le langage des mots comportant au moins une occurrence de a puis au moins une occurrence de b.

A7. $(ab)^*$

Solution : Le langage des mots commençant par a, finissant par b et où les a et les b n'apparaissent jamais consécutivement.

B Des mots aux expressions régulières

Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Trouver une expression régulière qui dénote l'ensemble des mots :

B1. de longueur paire

Solution : $(\Sigma\Sigma)^*$

B2. de longueur impaire

Solution : $(\Sigma\Sigma)^*\Sigma$

B3. de longueur au moins un et au plus trois

Solution : $\Sigma(\epsilon|\Sigma|\Sigma\Sigma)$

B4. qui possèdent un nombre pair de b

Solution : $(a^*ba^*b)^*$

B5. qui possèdent un nombre impair de a

Solution : $b^*a(b^*|b^*ab^*ab^*)^*$

B6. qui possèdent un nombre de a multiple de 3

Solution : $(b^*ab^*ab^*a)^*b^*$

On peut recommencer l'exercice avec $\Sigma = \{a, b, c\}$.

C Combien de mots dans le langage ?

Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Combien de mots de longueur 100 sont-ils dans $\mathcal{L}_{ER}(e)$?

C1. $e = a(a|b)^* b$

Solution : Les premières et dernières lettres étant fixées, il reste 98 lettres au milieu à choisir entre a et b. Cela fait donc 2^{98} mots.

C2. $e = a^* bab^*$

Solution : Les lettres du milieu étant fixées, on peut mettre :

- zéro a à gauche et zéro b à droite
- zéro a à gauche et 98 b à droite
- un a à gauche et 97 b à droite
- ....
- 98 a à gauche et 0 b à droite.

Cela fait donc 100 mots.

C3. $e = (a|ba)^*$ (On peut utiliser $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le nombre de mots de longueur n dans $\mathcal{L}_{ER}(e)$.)

Solution : Si on définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme le nombre de mots de longueur n dans $\mathcal{L}_{ER}(e)$, alors on peut dire que lorsqu'on choisit une lettre dans un mot de 100 lettres, il nous reste à choisir soit une lettre dans un mot de 99 lettres, soit deux lettres dans un mot de 98 lettres. Ce qui s'écrit : $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. On a $u_0 = 1$, le mot vide et $u_1 = 1$, a . On reconnaît la suite de Ficonnacci.
On a donc $u_{100} = \alpha\phi^{100} + \beta\phi'^{100}$ avec $\alpha = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$, $\beta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$, $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\phi' = -\frac{1}{\phi}$.

D Simplification d'expressions régulières

Simplifier les expressions régulières suivantes :

D1. $\epsilon|ab|abab(ab)^*$

Solution : On passe par la sémantique des expressions régulières.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{ER}(e) =& \mathcal{L}_{ER}(\epsilon) \cup \mathcal{L}_{ER}(ab) \cup \mathcal{L}_{ER}(abab(ab)^*) && (1)\\
&= \mathcal{L}_{ER}(\epsilon) \cup \mathcal{L}_{ER}(ab) \cup \mathcal{L}_{ER}(abab(ab)^*) && (2)\\
&= \{\epsilon\} \cup \{ab\} \cup \{abab \bigcup_{n\geqslant 0} (ab)^n\} && (3)\\
&= \{\epsilon\} \cup \{ab)\} \cup \{\bigcup_{n\geqslant 2} (ab)^n\} && (4)\\
&= \{\epsilon\} \cup \{\bigcup_{n\geqslant 1} (ab)^n\} && (5)\\
&= \{\bigcup_{n\geqslant 0} (ab)^n\} && (6)\\
&= \mathcal{L}_{ER}((ab)^*) && (7)\\
& && (8)
\end{aligned}$$

On a donc $e = (ab)^*$.

D2. $aa(b^*|a)|a(ab^*|aa)$

Solution : De la même manière, on trouve : $e = aa(b^*|a)$

D3. $a(a|b)^*|aa(ab^*)|aaa(a|b)^*$

Solution : On trouve : $e = a(a|b)^*$. On remarquera que certains langages sont inclus dans les autres. Par exemple $\mathcal{L}_{ER}(aa) \subset \mathcal{L}_{ER}(aab^*)$

E Miroirs et induction

■ **Définition 1 — Mot miroir.** Le mot miroir d'un mot $w = a_1a_2\ldots a_n$ est $w^R = a_na_{n-1}\ldots a_1$.

■ **Définition 2 — Langage miroir.** Soit $\mathcal{L}$ un langage sur Σ. Le langage miroir de $\mathcal{L}$ est :

$$\mathcal{L}^R = \{w^R, w \in \mathcal{L}\} \tag{9}$$

E1. Montrer que pour deux mots v et w d'un langage $\mathcal{L}$ on a $(vw)^R = w^Rv^R$.

Solution : Il suffit de revenir à la définition : soit $v = a_1a_2\ldots a_n$ et $w = b_1b_2\ldots b_n$.
On a $(vw)^R = (a_1a_2\ldots a_nb_1b_2\ldots b_n)^R = b_n\ldots b_1a_n\ldots a_1 = w^Rv^R$.

E2. Montrer que si $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont deux langages, on a $\mathcal{L}_1^R \cup \mathcal{L}_2^R = (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)^R$.

Solution : $\mathcal{L}_1^R \cup \mathcal{L}_2^R = \{w^R, w \in \mathcal{L}_1\} \cup \{w^R, w \in \mathcal{L}_2\} = \{w^R, w \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2\} = (\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2)^R$

E3. Montrer que si $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont deux langages, on a $\mathcal{L}_1^R\mathcal{L}_2^R = (\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1)^R$.

Solution : $\mathcal{L}_1^R\mathcal{L}_2^R = \{v^Rw^R, v \in \mathcal{L}_1 \wedge w \in \mathcal{L}_2\} = \{(wv)^R, v \in \mathcal{L}_1 \wedge w \in \mathcal{L}_2\} = \{u^R, u \in \mathcal{L}_2\mathcal{L}_1\} = (\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1)^R$

E4. Montrer que si $\mathcal{L}$ est un langage, on a $(\mathcal{L}^*)^R = (\mathcal{L}^R)^*$.

Solution : $(\mathcal{L}^*)^R = \{w^R, w \in \mathcal{L}^*\} = \bigcup_{n\geqslant 0} \{w^R, w \in \mathcal{L}^n\} = \bigcup_{n\geqslant 0} \{w, w \in (\mathcal{L}^n)^R\}$.
Or, on peut montrer par induction, d'après la définition inductive des puissances d'un langage, que $(\mathcal{L}^n)^R = (\mathcal{L}^R)^n$.

(Cas de base) comme $\epsilon = \epsilon^R$, on a $(\mathcal{L}^0)^R = (\mathcal{L}^R)^0$.

(Pas d'induction) supposons que $(\mathcal{L}^n)^R = (\mathcal{L}^R)^n$. Alors on a : $(\mathcal{L}^{n+1})^R = (\mathcal{L}\mathcal{L}^n)^R = (\mathcal{L})^R(\mathcal{L}^n)^R = (\mathcal{L})^R(\mathcal{L}^R)^n = (\mathcal{L}^R)^{n+1}$.

(Conclusion) $(\mathcal{L}^n)^R = (\mathcal{L}^R)^n$ est vrai pour tout n.

C'est pourquoi, $(\mathcal{L}^*)^R = \bigcup_{n\geqslant 0} \{w, w \in (\mathcal{L}^R)^n\} = (\mathcal{L}^R)^*$.

E5. Définir de manière inductive une fonction miroir dont le paramètre d'entrée est une expression régulière e et qui renvoie l'expression régulière miroir e^R qui dénote le langage $\mathcal{L}^R_{ER}(e)$.

Solution : On définit la fonction miroir $m : ER \longrightarrow ER$ comme suit

(Base (i) $\emptyset^R = \emptyset$,

(Base (ii) $\epsilon^R = \epsilon$,

(Base (iii)) $\forall a \in \Sigma, a^R = a$,

(Règle de construction (i)) $\forall e_1, e_2 \in ER, (e_1|e_2)^R = e_1^R|e_2^R$

(Règle de construction (ii)) $\forall e_1, e_2 \in ER, (e_1 e_2)^R = e_2^R e_1^R$

(Règle de construction (iii)) $\forall e \in ER, (e^*)^R = (e^R)^*$.

E6. Démontrer que $\forall e \in ER, \mathcal{L}_{ER}(e^R) = \mathcal{L}^R_{ER}(e)$, c'est à dire démontrer que l'algorithme de construction inductive de l'expression régulière miroir est correct.

Solution : On démontre par induction la correction de m :

(Cas de base (i) $\mathcal{L}_{ER}(\emptyset^R) = \mathcal{L}_{ER}(\emptyset) = \{\emptyset\} = \mathcal{L}^R_{ER}(\emptyset)$. Le miroir du langage vide est le langage vide.

(Cas de base (ii) $\mathcal{L}_{ER}(\epsilon^R) = \mathcal{L}_{ER}(\epsilon) = \{\epsilon\} = \mathcal{L}^R_{ER}(\epsilon)$.

(Cas de base (iii)) $\forall a \in \Sigma, \mathcal{L}_{ER}(a^R) = \mathcal{L}_{ER}(a) = \{a\} = \mathcal{L}^R_{ER}(a)$.

(Pas d'induction (i)) On suppose maintenant qu'on dispose de deux expressions régulières $e_1, e_2 \in ER$ telles que $\mathcal{L}_{ER}(e_1^R) = \mathcal{L}^R_{ER}(e_1)$ et $\mathcal{L}_{ER}(e_2^R) = \mathcal{L}^R_{ER}(e_2)$. On cherche à construire le langage miroir de l'union de ces deux expressions en utilisant la sémantique des expressions régulières, la définition inductive des expressions miroirs et l'hypothèse d'induction :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{ER}((e_1|e_2)^R) &= \mathcal{L}_{ER}(e_1^R|e_2^R) && \text{définition du miroir} \quad (10)\\
&= \mathcal{L}_{ER}(e_1^R) \cup \mathcal{L}_{ER}(e_2^R) && \text{sémantique ER} \quad (11)\\
&= \mathcal{L}^R_{ER}(e_1) \cup \mathcal{L}^R_{ER}(e_2) && \text{hypothèse d'induction} \quad (12)\\
&= (\mathcal{L}_{ER}(e_1) \cup \mathcal{L}_{ER}(e_2))^R && \text{résultat précédent} \quad (13)\\
&= \mathcal{L}^R_{ER}(e_1|e_2) && \text{sémantique ER} \quad (14)
\end{aligned}$$

(Pas d'induction (ii)) Avec la même hypothèse sur e_1 et e_2, on cherche maintenant à construire le langage miroir de la concaténation de ces deux expressions :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{ER}((e_1 e_2)^R) &= \mathcal{L}_{ER}(e_2^R e_1^R) && \text{définition du miroir} \quad (15)\\
&= \mathcal{L}_{ER}(e_2^R)\mathcal{L}_{ER}(e_1^R) && \text{sémantique ER} \quad (16)\\
&= \mathcal{L}_{ER}^R(e_2)\mathcal{L}_{ER}^R(e_1) && \text{hypothèse d'induction} \quad (17)\\
&= (\mathcal{L}_{ER}(e_1)\mathcal{L}_{ER}(e_2))^R && \text{résultat précédent} \quad (18)\\
&= \mathcal{L}_{ER}^R(e_1 e_2) && \text{sémantique ER} \quad (19)
\end{aligned}$$

(Pas d'induction (iii)) On suppose maintenant qu'on dispose d'une expression régulière $e \in ER$ telle que $\mathcal{L}_{ER}(e^R) = \mathcal{L}_{ER}^R(e)$. On cherche maintenant à construire le langage miroir de la fermeture de Kleene de l'expression e :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{ER}((e^*)^R) &= \mathcal{L}_{ER}((e^R)^*) && \text{définition du miroir} \quad (20)\\
&= \left(\mathcal{L}_{ER}(e^R)\right)^* && \text{sémantique ER} \quad (21)\\
&= \left(\mathcal{L}_{ER}^R(e)\right)^* && \text{hypothèse d'induction} \quad (22)
\end{aligned}$$

F Implémentation d'un type expression régulière

■ **Définition 3 — Syntaxe des expressions régulières.** L'ensemble des expressions régulières $\mathcal{E}_R$ sur un alphabet Σ est défini inductivement par :

(Base) $\{\emptyset, \epsilon, \} \cup \Sigma \in \mathcal{E}_R$,

(Règle de construction (union)) $\forall e_1, e_2 \in \mathcal{E}_R, e_1 \mid e_2 \in \mathcal{E}_R$

(Règle de construction (concaténation)) $\forall e_1, e_2 \in \mathcal{E}_R, e_1 e_2 \in \mathcal{E}_R$,

(Règle de construction (fermeture de Kleene)) $\forall e \in \mathcal{E}_R, e^* \in \mathcal{E}_R$.

F1. Créer un type algébrique `regexp` OCaml qui représente une expression régulière selon la définition 3.

Solution :

```
type regexp =     EmptySet
        | Epsilon
        | Letter of char
        | Sum of  regexp * regexp
        | Concat of regexp * regexp
        | Kleene of regexp ;;
```

F2. Créer en OCaml une variable `e` représentant l'expression régulière $(a^*|b)c$ sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

Solution :

```
let e = Concat (Sum (Kleene (Letter 'a'), Letter 'b'), Letter 'c');;
```

F3. Créer une variable `esigma` de type `regexp` dont le langage dénote l'alphabet $\Sigma = \{A, B, C\}$.

Solution :

```
  let a = Letter 'A';;
  let b = Letter 'B';;
  let c = Letter 'C';;
let esigma = Sum (Sum (a, b), c);;
```

F4. Créer une variable `esigmastar` de type `regexp` dont le langage dénote l'alphabet Σ^*.

Solution :

```
let esigmastar = Kleene esigma;;
```

F5. Créer une fonction récursive et utilisant le pattern matching de signature `regexp_to_string : regexp -> string` qui permet d'afficher lisiblement un type `regexp` sur la console. Par exemple, pour l'expression `esigma`, celle-si renvoie la chaîne de caractère `((A|B)|C)`, pour `e` elle renvoie `(((a)*|b)c)`. On rappelle que la concaténation de chaîne de caractères se fait via l'opérateur `^` en OCaml.

Solution :

```
  let rec regexp_to_string e =
    match e with
      | EmptySet -> "{}"
      | Epsilon -> "Epsilon"
      | Letter a -> String.make 1 a
      | Sum (e1, e2) -> "(" ^ (regexp_to_string e1) ^ "|" ^ (
        regexp_to_string e2) ^ ")"
      | Concat (e1, e2) -> "(" ^ (regexp_to_string e1) ^ "" ^ (
        regexp_to_string e2) ^ ")"
      | Kleene e -> "(" ^ (regexp_to_string e) ^ ")*"
      ;;
regexp_to_string e;;
regexp_to_string esigma;;
regexp_to_string esigmastar;;
```

G Langages vides, réduits au mot vide ou finis

G1. Créer une fonction de signature `is_emtpy_language : regexp -> bool` qui teste si une expression régulière dénote le langage vide.

Solution :

```
let rec is_emtpy_language e = match e with
  | EmptySet -> true
  | Epsilon -> false
  | Letter _ -> false
  | Kleene _ -> false
  | Sum (e1,e2) | Concat(e1,e2) -> is_emtpy_language e1 &&
    is_emtpy_language e2
  ;;
is_emtpy_language e;;
is_emtpy_language (Kleene EmptySet);;
is_emtpy_language EmptySet;;
```

G2. Créer une fonction de signature `is_reduced_to_epsilon : regexp -> bool` qui teste si une expression régulière dénote le langage réduit au mot vide.

Solution :

```
let rec is_reduced_to_epsilon e = match e with
  | EmptySet -> false
  | Epsilon -> true
  | Letter _ -> false
  | Kleene e -> is_reduced_to_epsilon e
  | Sum (e1,e2) | Concat(e1,e2) -> is_reduced_to_epsilon e1 &&
    is_reduced_to_epsilon e2
;;
```

G3. Créer une fonction de signature `is_finite_language : regexp -> bool` qui teste si une expression régulière dénote un langage fini, c'est à dire qui comporte un nombre fini de mots.

Solution :

```
let rec is_finite_language e = match e with
  | EmptySet -> true
  | Epsilon -> true
  | Letter _ -> false
  | Sum (e1, e2) | Concat (e1, e2) -> is_finite_language e1 &&
    is_finite_language e2
  | Kleene e -> is_reduced_to_epsilon e || is_emtpy_language e
;;

is_finite_language e;;
is_finite_language EmptySet;;
is_finite_language Epsilon;;
is_finite_language (Kleene EmptySet);;
is_finite_language (Kleene Epsilon);;
is_finite_language (Kleene a);;
```

H Jouer avec les expressions régulières --→ Hors Programme

Lors d'une campagne de tests, on a collecté l'évolution de la position GPS d'un véhicule. Le fichier contient toutes les positions du test.

H1. À l'aide d'une ligne de commande et en utilisant `grep`, isoler la latitude et la longitude dans un fichier. Chaque ligne contiendra une information comme suit :
`5920.7009,N,01803.2938,E`

> **Solution :** grep -oE "[[:digit:]]+[̇[:digit:]]+,(S|N),[[:digit:]]+[̇[:digit:]]+,(E|W)" gps.dat