

# Option informatique

Olivier Reynet

28-11-2022



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>I</b>	<b>Programmation récursive</b>	<b>3</b>
<b>II</b>	<b>Structures de données</b>	<b>5</b>
<b>III</b>	<b>Exploration et graphes</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Retour sur trace</b>	<b>9</b>
A	Exploration . . . . .	9
B	Principe du retour sur trace . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Les mots des graphes</b>	<b>13</b>
A	Typologie des graphes . . . . .	13
B	Implémentation des graphes . . . . .	17
C	Caractérisation structurelle des graphes . . . . .	18
D	Isomorphisme des graphes . . . . .	19
E	Chaînes, cycles et parcours . . . . .	21
F	Sous-graphes et connexité . . . . .	25
G	Coloration de graphes . . . . .	25
H	Distances . . . . .	28
I	Arbres . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Propriétés des graphes</b>	<b>31</b>
A	Des degrés et des plans . . . . .	31
B	Caractérisation des chaînes, des cycles et des graphes . . . . .	32
C	Graphes acycliques et connexes . . . . .	33
D	Coloration, graphes planaires et nombre chromatique . . . . .	33
E	Principe d'optimalité et plus court chemin dans un graphe . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Algorithmes et graphes</b>	<b>35</b>
A	Parcours d'un graphe . . . . .	35
a	Parcours en largeur . . . . .	36
b	Terminaison et correction du parcours en largeur . . . . .	37
c	Complexité du parcours en largeur . . . . .	38
d	Parcours en profondeur . . . . .	38

B	Trouver un chemin dans un graphe . . . . .	39
C	Plus courts chemins dans les graphes pondérés . . . . .	41
a	Algorithme de Dijkstra . . . . .	41
b	Algorithme de Bellman-Ford . . . . .	45
c	Algorithme de Floyd-Warshall . . . . .	47
d	A* . . . . .	49
D	Arbres recouvrants . . . . .	50
a	Algorithme de Prim . . . . .	51
b	Algorithme de Kruskal . . . . .	51
E	Tri topologique d'un graphe orienté . . . . .	52
a	Ordre dans un graphe orienté acyclique . . . . .	52
b	Tri topologique et détection de cycles dans un graphe orienté . . . . .	53
F	Composantes fortement connexes d'un graphe orienté et 2-SAT . . . . .	53
G	Graphes bipartis et couplage maximum . . . . .	54
a	Couplage dans un graphe biparti . . . . .	54
b	Chemin augmentant . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Des arbres aux tas</b>	<b>61</b>
A	Des arbres . . . . .	61
B	Arbres binaires . . . . .	63
C	Induction et arbre binaire . . . . .	64
D	Tas binaires . . . . .	65
a	Définition . . . . .	65
b	Implémentation . . . . .	65
c	Opérations . . . . .	66
E	Tri par tas binaire . . . . .	68
F	File de priorités implémentée par un tas . . . . .	69
<b>IV</b>	<b>Langages et automates</b>	<b>71</b>
<b>6</b>	<b>Introduction aux langages</b>	<b>73</b>
A	Alphabets . . . . .	73
B	Mots . . . . .	74
C	Mots définis inductivement . . . . .	75
D	Langages . . . . .	77
E	Préfixes, suffixes, facteurs et sous-mots . . . . .	79
F	Propriétés fondamentales . . . . .	81
<b>7</b>	<b>Expressions régulières</b>	<b>83</b>
A	Définition des expressions régulières . . . . .	84
B	Définition des langages réguliers . . . . .	86
C	Identités remarquables sur les expressions régulières . . . . .	86
D	Arbre associé à une expression régulière . . . . .	87

## TABLE DES MATIÈRES

E	Expressions régulières dans les langages	---> HORS PROGRAMME	88
<b>8</b>	<b>Automates finis déterministes</b>		<b>91</b>
A	Automate fini déterministe (AFD)		91
B	Représentation d'un automate		92
C	Acceptation d'un mot		92
D	Accessibilité et co-accessibilité		93
E	Complétion d'un AFD		94
F	Complémentaire d'un AFD		95
G	Produit de deux AFD - Automate produit		96
<b>9</b>	<b>Automates finis non déterministes</b>		<b>99</b>
A	Automate fini non déterministe (AFND)		99
B	Représentation d'un AFND		99
C	Acceptation d'un mot		100
D	Déterminisé d'un AFND		101
E	$\epsilon$ -transitions		103
<b>10</b>	<b>Des expressions régulières aux automates</b>		<b>105</b>
A	Théorème de Kleene		105
B	Algorithme de Thompson		106
a	Patron de conception d'un cas de base		106
b	Patron de conception de l'union		107
c	Patron de conception de la concaténation		107
d	Patron de conception de l'étoile de Kleene		108
e	Application		108
f	Élimination des transitions spontanées		108
C	Algorithme de Berry-Sethi et automate de Glushkov		111
a	Langages locaux		111
b	Expressions régulières linéaires		114
c	Automate locaux		115
d	Automate de Glushkov et algorithme de Berry-Sethi		116
D	Comparaison Thompson / Berry-Sethi		118
<b>11</b>	<b>Des automates aux expressions rationnelles</b>		<b>119</b>
<b>12</b>	<b>Lemme de l'étoile</b>		<b>121</b>
<b>V</b>	<b>Logique</b>		<b>123</b>
<b>13</b>	<b>Déduction naturelle</b>		<b>125</b>

<b>VI Annexes</b>	<b>127</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>129</b>
Articles . . . . .	129
Livres . . . . .	130
Sites web . . . . .	130

## LISTE DES ALGORITHMES

---

1	Algorithme de recherche par force brute, problème de satisfaction de contraintes	9
2	Algorithme de retour sur trace . . . . .	11
3	Parcours en largeur d'un graphe . . . . .	36
4	Parcours en profondeur d'un graphe (version récursive) . . . . .	39
5	Parcours en profondeur d'un graphe (version itérative) . . . . .	39
6	Longueur d'une chaîne via un parcours en largeur d'un graphe pondéré . . . . .	40
7	Algorithme de Dijkstra, plus courts chemins à partir d'un sommet donné . . . . .	42
8	Algorithme de Bellman-Ford, plus courts chemins à partir d'un sommet donné .	46
9	Algorithme de Floyd-Warshall, plus courts chemins entre toutes les paires de som- met . . . . .	49
10	A* . . . . .	51
11	Algorithme de Prim, arbre recouvrant . . . . .	51
12	Algorithme de Kruskal, arbre recouvrant . . . . .	52
13	Algorithme de tri topologique . . . . .	53
14	Recherche d'un couplage de cardinal maximum . . . . .	59
15	Tri par tas, ascendant . . . . .	69





**Première partie**

**Programmation récursive**



**Deuxième partie**

**Structures de données**



**Troisième partie**

**Exploration et graphes**



## RETOUR SUR TRACE

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ✎ expliquer le principe du retour sur trace
- ✎ donner des exemples d'utilisation
- ✎ coder un algorithme de retour sur trace en OCaml

### A Exploration

Soit un problème  $\mathcal{P}$  de satisfaction de contraintes tel que les solutions  $\mathcal{S}$  se trouvent dans une ensemble fini  $\mathcal{E}$  de candidats. On cherche à trouver les solutions de  $\mathcal{P}$  en explorant l'ensemble  $\mathcal{E}$  tout en respectant les contraintes.

Il est imaginable aujourd'hui d'envisager l'usage de la force brute pour résoudre des problèmes dont la dimension est pourtant élevée.

■ **Définition 1 — Recherche par force brute.** Énumérer tous les éléments candidats de  $\mathcal{E}$  et tester s'ils sont solution de  $\mathcal{P}$ .

Il s'agit donc d'une approche simple à énoncer et à implémenter comme le montre l'algorithme 1.

---

**Algorithme 1** Algorithme de recherche par force brute, problème de satisfaction de contraintes

---

```

1: Fonction FORCE_BRUTE( $\mathcal{E}$ )
2:    $\mathcal{S} \leftarrow \emptyset$ 
3:   pour  $e \in \mathcal{E}$  répéter
4:     si  $e$  est un solution de  $\mathcal{P}$  alors
5:        $\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{e\}$ 
6:   renvoyer  $\mathcal{S}$ 

```

---

■ **Exemple 1 — Exemple d’algorithmes de recherche par force brute.** Parmi les algorithmes de recherche par force brute utilisés, on note :

- la recherche d’un code secret à quelques chiffres : on teste toutes les permutations possibles jusqu’à trouver la bonne,
- la recherche d’un élément dans un tableau : on teste tous les éléments les uns après les autres jusqu’à trouver le bon,
- le tri bulle : on essaie de placer un élément dans une case, puis on essaie la case du dessus.

■ **Exemple 2 — Problème des huit reines.** On cherche à placer sur un échiquier de 8x8 cases huit reines sans que celles-ci s’attaquent les unes les autres. Une solution est présentée sur la figure 1.1. On connaît les solutions de ce problème [1] et on peut même les formuler simplement.

En choisissant la recherche par force brute, il est nécessaire de tester  $8^8 = 16777216$  configurations. Si le test de la validité de l’échiquier est effectué en moins d’une microseconde<sup>a</sup>, l’intégralité des configurations sera examinée en un temps proche de la seconde.

a. ce qui est très réaliste avec une machine standard et un programme non optimisé

.	.	.	.	.	.	.	♔
.	.	.	♔	.	.	.	.
♔	.	.	.	.	.	.	.
.	.	♔	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	♔	.	.
.	♔	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	♔	.
.	.	.	.	♔	.	.	.

FIGURE 1.1 – Exemple d’échiquier 8x8 solution au problème des huit reines.

Même si elle est simple à énoncer et à implémenter, la recherche par force brute présente un inconvénient majeur : elle ne supporte pas le passage à l’échelle, c’est à dire qu’elle devient rapidement inutilisable à cause de l’explosion du cardinal de l’ensemble  $\mathcal{E}$  à explorer qui induit un temps de calcul nécessaire rédhibitoire.

■ **Exemple 3 — Problème des  $n$  reines.** Le problème des  $n$  reines est la généralisation du problème des huit reines sur un échiquier de taille  $n \times n$  et avec  $n$  reines à placer. L’ensemble des candidats est maintenant de taille  $n^n$ . Pour  $n = 16$ , le temps de calcul dépasse déjà la dizaine de milliers d’années. En effet, admettons que le test de validité de l’échiquier



soit toujours de l'ordre de la microseconde, on a :  $(16^{16} \times 1^{-6}) / (60 \times 60 \times 24 \times 365) \approx 584942$  années...

## B Principe du retour sur trace

Le retour sur trace est une technique exploratoire utilisée afin guider l'exploration et de ne pas tester toutes les configurations possibles.

■ **Définition 2 — Retour sur trace.** Le retour sur trace construit des ensembles de solutions partielles au problème  $\mathcal{P}$ . Ces solutions partielles peuvent être complétées de différentes manières pour former une solution au problème. La complétion des solutions se fait de manière incrémentielle.

Le retour sur trace utilise une représentation de l'espace des candidats  $\mathcal{E}$  sous la forme d'un arbre de recherche. Chaque solution partielle est un nœud de cet arbre. Chaque solution complète forme un chemin descendant de la racine à une feuille de l'arbre. Au niveau de la feuille, on ne peut plus compléter la solution par quoi que ce soit.

L'algorithme de retour sur trace est un algorithme récursif qui parcourt en profondeur l'arbre de recherche en vérifiant qu'il peut compléter la solution partielle par le nouveau nœud trouvé : si c'est le cas, alors il continue l'exploration de cette branche. Si ce n'est pas le cas, cette branche est écartée, car elle ne peut pas donner de solutions.



**Vocabulary 1 — Backtracking** ↔ Retour sur trace

---

### Algorithme 2 Algorithme de retour sur trace

---

```

1: Fonction RETOUR_SUR_TRACE( $\nu$ )                                ▷  $\nu$  est un nœud de l'arbre de recherche
2:   si  $\nu$  est une feuille alors
3:     renvoyer Vrai
4:   sinon
5:     pour chaque fils  $u$  de  $\nu$  répéter
6:       si  $u$  peut compléter une solution partielle au problème  $\mathcal{P}$  alors
7:         RETOUR_SUR_TRACE( $u$ )
8:     renvoyer Faux

```

---

■ **Exemple 4 — Retour sur trace sur le problème des quatre reines.** L'arbre de recherche nécessaire à l'exécution de l'algorithme de retour sur trace pour le problème des quatre reines est représenté sur la figure 1.2. La racine de l'arbre est le début de l'algorithme : on n'a pas encore placé de reines. La première étape est le placement d'une reine sur l'échiquier : sur une même ligne on peut la placer sur quatre colonnes différentes qu'il va falloir tester. Chaque colonne représente donc une solution partielle différente et est un nœud fils de la racine. On peut placer la première reine sur n'importe quelle colonne.

La seconde étape est le placement d'une deuxième reine. Comme on parcourt l'arbre

en profondeur, on teste la première configuration en premier, c'est à dire une reine sur la première case de la première ligne. On teste alors toutes les solutions partielles possibles. Le premier nœud ne satisfait pas les conditions de validité : on ne peut pas placer une reine dans la première colonne car il y en a déjà une sur la première ligne. Tout le sous-arbre lié à cette solution partiel est élagué. De même pour le second nœud pour lequel la première reine peut attaquer en diagonale.

On revient donc là où on en était et on continue avec les autres fils valides.

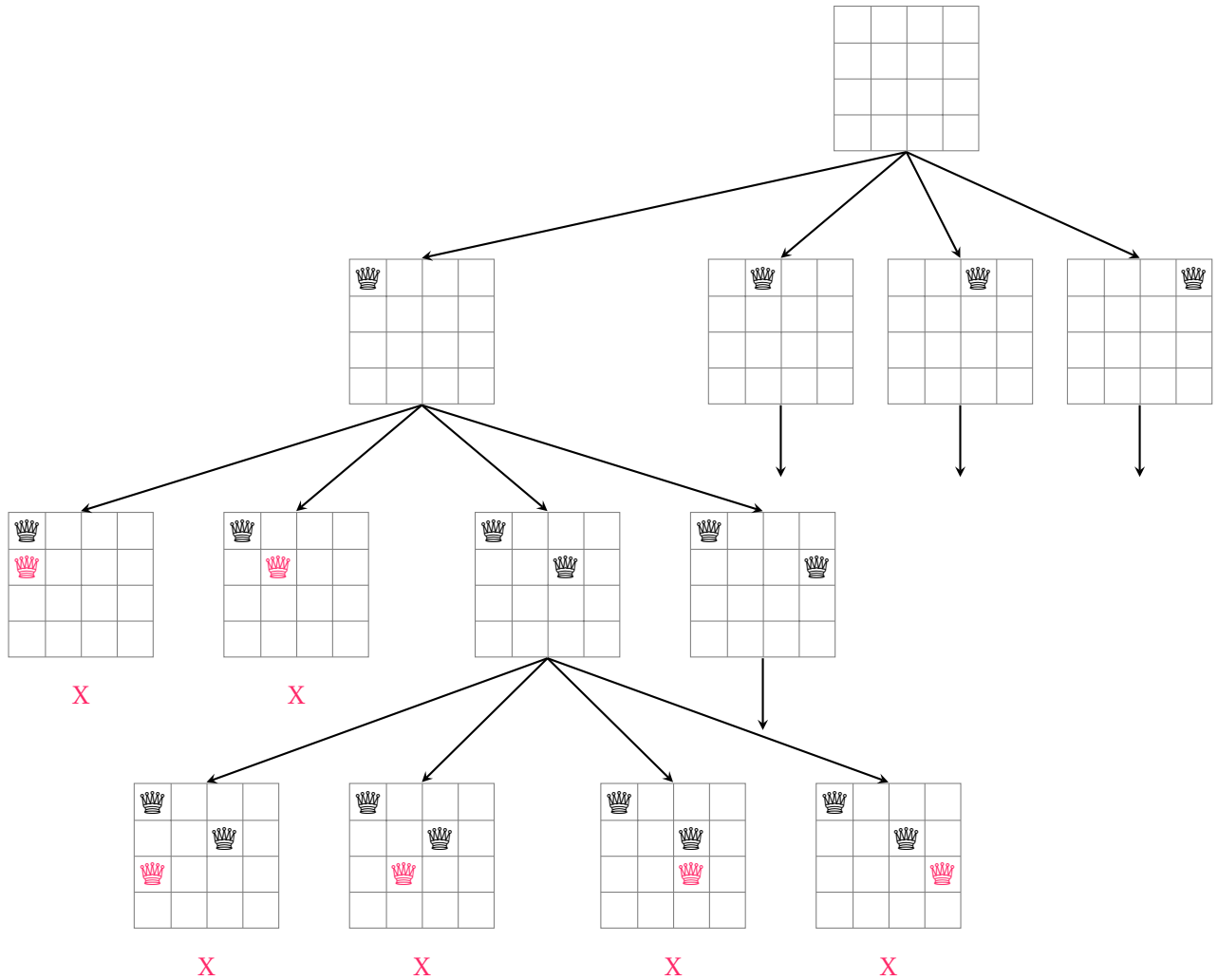


FIGURE 1.2 – Exemple d'arbre de recherche structurant l'algorithme de retour sur trace. Application au problème de quatre reines.

# 2

## LES MOTS DES GRAPHS

### À la fin de ce chapitre, je sais :

- ✎ utiliser des mots pour décrire les graphes
- ✎ énumérer quelques graphes remarquables
- ✎ distinguer un parcours d'une chaîne et d'un cycle
- ✎ distinguer un graphe orienté, non orienté, pondéré et un arbre

La théorie des graphes en mathématiques discrètes étudie les graphes comme objet mathématique. En informatique, en plus de les étudier, on a la chance de pouvoir les programmer, de jouer avec pour résoudre une infinité de problèmes. Les domaines d'application des graphes sont innombrables : les jeux, la planification, l'organisation, la production, l'optimisation, les programmes et modèles informatiques, les trajets dans le domaine des transports, le tourisme, la logistique ou tout simplement la géométrie... **Les graphes sont des objets simples que tout le monde peut dessiner.** Même s'il ne vous apparaît pas immédiatement que résoudre un sudoku est équivalent à la coloration d'un graphe, la pratique de ces derniers vous amènera à regarder le monde différemment.

### A Typologie des graphes

■ **Définition 3 — Graphe.** Un graphe  $G$  est un couple  $G = (V, E)$  où  $V$  est un ensemble fini et non vide d'éléments appelés sommets et  $E$  un ensemble de paires d'éléments de  $V$  appelées arêtes.

🇬🇧 Vocabulary 2 — Graph  $\leftrightarrow$  Graphe

🇬🇧 Vocabulary 3 — Vertex (plural : vertices)  $\leftrightarrow$  Sommet



FIGURE 2.1 – Graphe simple



FIGURE 2.2 – Multigraphe à une boucle est deux arêtes parallèles

**Vocabulary 4 — Edge  $\leftrightarrow$  Arête**

La notation  $G = (V, E)$  dérive donc directement des premières lettres des mots anglais. La définition 3 est en fait celle des **graphes simples et non orientés** : ce sont eux que l'on considèrera la plupart du temps.

- **Définition 4 — Boucle.** Une boucle est une arête reliant un sommet à lui-même.
- **Définition 5 — Arêtes parallèles.** Deux arêtes sont parallèles si elles relient les mêmes sommets.
- **Définition 6 — Graphe simple.** Un graphe simple est un graphe sans arêtes parallèles et sans boucles.
- **Définition 7 — Multigraphe.** Un multigraphe est un graphe avec des boucles et des arêtes parallèles.



FIGURE 2.3 – Graphe pondéré



FIGURE 2.4 – Graphe orienté

■ **Définition 8 — Graphe pondéré.** Un graphe  $G = (V, E)$  est pondéré s'il existe une application  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Le poids de l'arête  $ab$  vaut  $w(ab)$ .

■ **Définition 9 — Graphe orienté.** Un graphe  $G = (V, E)$  est orienté si ses arêtes sont orientées selon une direction. Les arêtes sont alors désignées par le mot arc.

■ **Définition 10 — Graphe complet.** Un graphe  $G = (V, E)$  est complet si et seulement si une arête existe entre chaque sommet, c'est-à-dire si tous les sommets sont voisins.

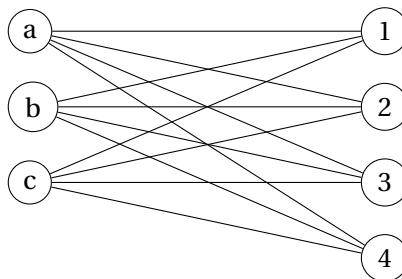
En hommage à Kuratowski, on désigne les graphes complets par la lettre  $K_n$  indiquée par l'ordre du graphe (cf. définition 14). La figure 2.5 représente le graphe complet d'ordre cinq  $K_5$ . Kuratowski a notamment démontré [10] que  $K_5$  n'est pas planaire : quelle que soit la manière de représenter ce graphe sur un plan, des arêtes se croiseront. Le graphe de la figure 2.1 est planaire.

■ **Définition 11 — Graphe planaire.** Un graphe planaire est un graphe que l'on peut représenter sur un plan sans qu'aucune arête ne se croise.

■ **Définition 12 — Graphe biparti.** un graphe  $G = (V, E)$  est biparti si l'ensemble  $V$  de ses sommets peut être divisé en deux sous-ensembles disjoints  $U$  et  $W$  tels que chaque arête de  $E$  ait une extrémité dans  $U$  et l'autre dans  $W$ .

FIGURE 2.5 – Graphe complet  $K_5$ 

FIGURE 2.6 – Graphe biparti

FIGURE 2.7 – Graphe biparti complet  $K_{3,4}$

## B Implémentation des graphes

On peut représenter graphiquement un graphe comme sur les figures précédentes 2.1, 2.3 ou 2.4. On peut également chercher à les implémenter sous la forme d'ensembles, de matrices ou de listes.

■ **Exemple 5 — Graphe et ensembles.** Le graphe de la figure 2.1 est un graphe simple que l'on peut noter  $G = \{V = \{a, b, c, d\}, E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}\}$  ou plus simplement  $G = \{V = \{a, b, c, d\}, E = \{ab, ac, bc, cd\}\}$ .

■ **Définition 13 — Adjacent ou voisins.** Deux sommets  $a$  et  $b$  sont adjacents ou voisins à si le graphe contient une arête  $ab$ . Deux arêtes sont adjacentes ou voisines s'il existe un sommet commun à ces deux arêtes.

■ **Exemple 6 — Graphe et matrice d'adjacence.** Grâce au concept d'adjacence, on peut représenter un graphe par une matrice d'adjacence. Pour construire une telle matrice, il faut d'abord ordonner arbitrairement les sommets du graphes. Par exemple, pour le graphe de la figure 2.1, on choisit l'ordre  $(a, b, c, d)$ . Les coefficients  $m_{ij}$  de la matrice d'adjacence sont calculés selon la règle suivante :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe une arête entre le sommet } i \text{ et le sommet } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.1)$$

Pour le graphe de la figure 2.1, on obtient :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

La matrice d'adjacence d'un graphe simple non orienté est de diagonale nulle (pas de boucles) et symétrique.

La matrice d'un graphe orienté n'est pas forcément symétrique.

Dans le cas d'un graphe pondéré, on peut remplacer le coefficient de la matrice par le poids de l'arête considérée.

En Python, on pourra utiliser une liste de liste ou un tableau numpy pour implémenter une matrice d'adjacence.

■ **Exemple 7 — Graphe et liste d'adjacence.** On peut représenter un graphe par la liste des voisins de chaque sommet. Par exemple, si on dénote les sommets  $a, b, c$  et  $d$  par les indices 1, 2, 3, et 4, alors le graphe de la figure 2.1 peut être décrit par la liste  $[[2, 3], [1, 3], [1, 2, 4], [3]]$ . Si on choisit d'utiliser un dictionnaire, alors on peut l'écrire :  $\{1: [2, 3], 2: [1, 3], 3: [1, 2, 4], 4: [3]\}$ .

Pour résumé, en Python, on a le choix de la représentation :

```

1      G = [[2,3], [1,3], [1,2,4], [3]]
2      G = {1:[2,3], 2:[1,3], 3:[1,2,4], 4:[3]}
3      n = len(G)    # graph order

```

Par ailleurs, si le graphe est pondéré, la liste d'adjacence est une liste de listes de tuples, chaque tuple étant un couple (sommet, poids). Par exemple, en OCaml :

```

1      type adj_list_graph = (int * int) list list;;
2
3      let lcg = [[(2,1); (1,7)];
4                [(3,4); (4,2); (2,5); (0,7)];
5                [(5,7); (4,2); (1,5); (0,1)];
6                [(4,5); (1,4)];
7                [(5,3); (3,5); (2,2); (1,2)];
8                [(4,3); (2,7)]];;

```

**(R)** Ni la représentation graphique de la figure 2.1, ni la matrice d'adjacence  $M$  de l'équation 2.2, ni les listes d'adjacence ne sont des représentations uniques. On peut tracer différemment le graphe ou choisir un autre ordre pour les sommets et obtenir une autre matrice ou une autre liste d'adjacence. Cela traduit l'isomorphisme des graphes.

**(R)** Le choix d'une implémentation ou d'une autre est avant tout lié aux choix des algorithmes que l'on va utiliser. La structure de donnée utilisée est souvent le facteur clef qui permet d'améliorer ou de détériorer les performances d'un algorithme.

## C Caractérisation structurelle des graphes

■ **Définition 14 — Ordre d'un graphe.** L'ordre d'un graphe est le nombre de ses sommets. Pour  $G = (V, E)$ , l'ordre du graphe vaut donc le cardinal de l'ensemble  $V$  que l'on note généralement  $|V|$ . On note parfois l'ordre d'un graphe  $|G|$ .

**(R)** Si  $|V| = n$ , alors une matrice d'adjacence de  $G = (V, E)$  est de dimension  $n \times n$ . Une liste d'adjacence de  $G$  a pour taille  $n$ .

■ **Définition 15 — Taille d'un graphe.** La taille d'un graphe désigne le nombre de ses arêtes. On le note  $|E|$  et parfois  $||G||$

■ **Définition 16 — Voisinage d'un sommet.** L'ensemble de voisins d'un sommet  $a$  d'un graphe  $G = (V, E)$  est le voisinage de ce sommet. On le note généralement  $\mathcal{N}_G(a)$ .

■ **Définition 17 — Incidence.** Une arête est dite incidente à un sommet si ce sommet est une des extrémités de cette arête



■ **Définition 18 — Degré d'un sommet.** Le degré  $d(a)$  d'un sommet  $a$  d'un graphe  $G$  est le nombre d'arêtes incidentes au sommet  $a$ . C'est aussi  $|\mathcal{N}_G(a)|$ .

■ **Définition 19 — Degrés d'un graphe orienté.** Dans un graphe orienté  $G$  et pour un sommet  $a$  de ce graphe, on distingue :

- le degré entrant  $d_+(a)$  : le nombre d'arêtes incidentes à  $a$  et dirigées sur  $a$ ,
- le degré sortant  $d_-(a)$  : le nombre d'arêtes incidentes qui sortent de  $a$  et qui sont dirigées vers un autre sommet.



FIGURE 2.8 – Graphe d'ordre cinq, de taille quatre et de séquence  $[0, 1, 2, 2, 3]$ . Le sommet  $d$  est isolé. Ce graphe n'est ni complet ni connexe.

■ **Définition 20 — Sommet isolé.** Un sommet isolé est un sommet dont le degré vaut zéro.

■ **Définition 21 — Égalité de deux graphes.** Deux graphes  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  sont égaux si et seulement si  $V = V'$  et  $E = E'$ .

■ **Définition 22 — Séquence des degrés.** La séquence des degrés d'un graphe  $G$  est la liste ordonnée par ordre croissant des degrés des sommets de  $G$ .

Sur la figure 2.8, on a représenté un graphe d'ordre cinq avec un sommet isolé. Ce graphe n'est pas connexe ni complet et sa séquence des degrés est  $[0, 1, 2, 2, 3]$ .

■ **Définition 23 — Graphe complémentaire.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe. On dit que  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  est le complémentaire de  $G$  si les arêtes de  $\bar{G}$  sont les arêtes possibles qui ne figurent pas dans  $G$ . On note ces arêtes  $\bar{E}$ .

Par exemple, le complémentaire du graphe 2.8 est représenté sur la figure 2.9.

## D Isomorphisme des graphes

Considérons les graphes des figures 2.10 et 2.11. Ils ne diffèrent que par les noms des sommets et la signification des arêtes. Si on ne prête pas attention aux noms des sommets ni à la signification des arêtes, ces deux graphes sont identiques, leurs caractéristiques sont les mêmes :



FIGURE 2.9 – Graphe complémentaire du graphe de la figure 2.8

FIGURE 2.10 – Graphe d'ordre trois, de taille deux et de séquence  $[1, 1, 2]$ 

ordre, degré, taille. On dit qu'ils sont isomorphes ou qu'ils sont identiques à un isomorphisme près. Finalement, c'est la structure du graphe telle qu'on peut la caractériser qui importe, pas son apparence.

■ **Définition 24 — Graphes isomorphes.** Deux graphes  $G = (V, E)$  et  $G' = (V', E')$  sont isomorphes si et seulement s'il existe une bijection  $\sigma$  de  $V$  vers  $V'$  pour laquelle  $\sigma(E) = E'$ , c'est à dire qu'à chaque arête  $ab$  de  $E$  correspond une seule arête de  $E'$  notée  $\sigma(a)\sigma(b)$ .

■ **Exemple 8 — Isomorphes et bijection.** Considérons les deux graphes  $G$  et  $G'$  représentés sur les figures 2.12 et 2.13.

FIGURE 2.11 – Graphe d'ordre trois, de taille deux et de séquence  $[1, 1, 2]$

FIGURE 2.12 – Graphe d'exemple  $G = (V = \{a, b, c, d\}, E = \{ab, ac, bc, bd, dc\})$ 

On peut les définir par des ensembles de la manière suivante :

$$G = (V = \{a, b, c, d\}, E = \{ab, ac, bc, bd, dc\}) \quad (2.3)$$

$$G' = (V' = \{1, 2, 3, 4\}, E' = \{12, 14, 24, 23, 43\}) \quad (2.4)$$

Formulé de la sorte, on pourrait croire que ces deux graphes ne sont pas isomorphes. Pourtant, c'est le cas. Comment le montrer? En exhibant une bijection ad-hoc!

On cherche donc une bijection entre les deux graphes en comparant les degrés des sommets et en observant leurs arêtes.

On peut proposer la bijection  $\sigma : V \longrightarrow V'$  telle que :

$$\sigma(a) = 1 \quad (2.5)$$

$$\sigma(b) = 2 \quad (2.6)$$

$$\sigma(c) = 4 \quad (2.7)$$

$$\sigma(d) = 3 \quad (2.8)$$

On a également la correspondance des arêtes :

$$\sigma(a)\sigma(b) = 12 \quad (2.9)$$

$$\sigma(a)\sigma(c) = 14 \quad (2.10)$$

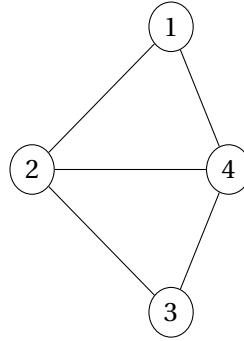
$$\sigma(b)\sigma(c) = 24 \quad (2.11)$$

$$\sigma(b)\sigma(d) = 23 \quad (2.12)$$

$$\sigma(c)\sigma(d) = 43 \quad (2.13)$$

**R** On peut compter le nombre de graphes isomorphes pour un ordre donné. Par exemple, il y a deux graphes isomorphes d'ordre 2 et 8 d'ordre 3.

## E Chaînes, cycles et parcours

FIGURE 2.13 – Graphe d'exemple  $G' = (V' = \{1, 2, 3, 4\}, E' = \{12, 14, 24, 23, 43\})$ 

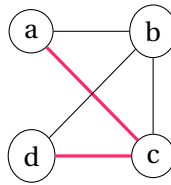
■ **Définition 25 — Chaîne.** Une chaîne reliant deux sommets  $a$  et  $b$  d'un graphe non orienté est une suite finie d'arêtes consécutives reliant  $a$  à  $b$ . Dans le cas d'un graphe orienté on parle de chemin.

■ **Définition 26 — Chaîne élémentaire.** Une chaîne élémentaire ne passe pas deux fois par un même sommet : tous ses sommets sont distincts.

■ **Définition 27 — Chaîne simple.** Une chaîne simple ne passe pas deux fois par une même arête : toutes ses arêtes sont distinctes.

■ **Définition 28 — Longueur d'une chaîne.** La longueur d'une chaîne  $\mathcal{C}$  est :

- le nombre d'arêtes que comporte la chaîne dans un graphe simple non pondéré,
- la somme des poids des arêtes de la chaîne, c'est à dire  $\sum_{e \in \mathcal{C}} w(e)$ , dans le cas d'un graphe simple pondéré dont la fonction de valuation est  $w$ .

FIGURE 2.14 – Exemple de chaîne simple reliant  $a$  à  $d$  en rouge

■ **Définition 29 — Cycle.** Un cycle est une chaîne simple dont les deux sommets extrémités sont identiques.

La longueur d'un cycle est le nombre d'arêtes qu'il contient. Dans le cas des graphes orientés on parle de circuit.



FIGURE 2.15 – Exemple de cycle en turquoise



FIGURE 2.16 – Saurez-vous trouver le cycle eulérien de ce graphe?

■ **Définition 30 — Chaîne eulérienne.** Une chaîne eulérienne est une chaîne simple qui passe par toutes les arêtes d'un graphe.

■ **Définition 31 — Cycle eulérien.** Un cycle eulérien est un cycle passant exactement une fois par chaque arête d'un graphe.

■ **Définition 32 — Cycle hamiltonien.** Un cycle hamiltonien est un sous-graphe couvrant qui est un cycle. Autrement dit, c'est un cycle qui passe par tous les sommets d'un graphe.

**(R)** Rowan Hamilton était un astronome irlandais qui a inventé le jeu icosien <sup>a</sup> en 1857.

<sup>a</sup>. The icosian game, jeu équivalent à l'icosagonal d'Édouard Lucas [11]

**(R)** Les graphes complets  $K_n$  sont eulériens et hamiltoniens : ils possèdent à la fois un cycle eulérien et un cycle hamiltonien.



FIGURE 2.17 – Graphe du jeu icosien et du dodécahèdre (solide régulier à 12 faces pentagonales). C'est un graphe cubique car chaque sommet possède trois voisins. Ce graphe possède un cycle hamiltonien. Saurez-vous le trouver?



FIGURE 2.18 – Graphe  $K_5$  : saurez-vous trouver des cycles hamiltonien et eulérien de ce graphe?

**R** On peut également définir une chaîne comme le graphe d'ordre  $n$  isomorphe au graphe  $P_n = \{V_n = \{1, 2, \dots, n\}, E_n = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{n-1, n\}\}\}$ . Par convention, on pose  $P_1 = \{V_1 = \{1\}\}$  et  $E_1 = \emptyset$ . Les extrémités de la chaînes sont les deux sommets de degré 1.

Avec la même approche et les mêmes notations, un cycle devient alors un graphe isomorphe au graphe  $C_n = \{V_n, E'_n = E_n \cup \{n, 1\}\}$ , c'est à dire que la chaîne finit là où elle a commencé. L'ordre de  $C_n$  est supérieur ou égal à trois.

■ **Définition 33 — Parcours.** Un parcours d'un graphe  $G$  est une liste non vide et ordonnées de sommets de  $G$  telles que deux sommets consécutifs sont adjacents dans  $G$ . Il peut y avoir des répétitions de sommets dans un parcours, mais il n'y a pas de répétitions d'arêtes dans un cycle ou une chaîne simple.

Par exemple,  $\pi = \{a, b, c, d, b\}$  est un parcours sur le graphe de la figure 2.15.

## F Sous-graphes et connexité

■ **Définition 34 — Graphe connexe.** Un graphe  $G = (V, E)$  est connexe si et seulement si pour tout couple de sommets  $(a, b)$  de  $G$ , il existe une chaîne d'extrémités  $a$  et  $b$ .

Par exemple, le graphe de la figure 2.1 est connexe, mais pas celui figure 2.8.

■ **Définition 35 — Sous-graphe.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe, alors  $G' = \{V', E'\}$  est un sous-graphe de  $G$  si et seulement si  $V' \subseteq V$  et  $E' \subseteq E$ .



FIGURE 2.19 – Exemple de sous-graphe couvrant  $G$  en rouge :  $G = (V = \{a, b, c, d\}, E = \{ab, ac, cd\})$

■ **Définition 36 — Sous-graphe couvrant.**  $G'$  est un sous-graphe couvrant de  $G$  si et seulement si  $G'$  est un sous-graphe de  $G$  et  $V' = V$ .

■ **Définition 37 — Sous-graphe induit.** Soit  $S \subset V$  non vide.  $G'$  est un sous-graphe de  $G$  induit par  $S$  et on note  $G[S]$  si et seulement si  $G'$  admet pour arêtes celles de  $G$  dont les deux extrémités sont dans  $S$ .

■ **Définition 38 — Clique.** Une clique est d'un graphe  $G = (V, E)$  un sous-ensemble  $C \subseteq V$  des sommets dont le sous-graphe induit  $G[C]$  est complet.

Sur la figure 2.20, l'ensemble  $S = \{b, c, d\}$  est un clique.

## G Coloration de graphes



FIGURE 2.20 – Exemple de sous-graphe induit par les sommets  $S = \{a, c, d\}$  en turquoise.  $G[S] = (V = \{a, c, d\}, E = \{ac, cd\})$

■ **Définition 39 — Coloration.** Une coloration d'un graphe simple est l'attribution d'une couleur aux sommets de ce graphe.

■ **Définition 40 — Coloration valide.** Une coloration est valide lorsque deux sommets adjacents n'ont jamais la même couleur.

■ **Définition 41 — Nombre chromatique.** Le nombre chromatique d'un graphe  $G$  est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour obtenir une coloration valide de ce graphe. On le note généralement  $\chi(G)$ .



FIGURE 2.21 – Exemple de 4-coloration valide d'un graphe. Cette coloration n'est pas optimale.

■ **Définition 42 — k-coloration.** Lorsqu'une coloration de graphe utilise  $k$  couleurs, on dit d'elle que c'est une  $k$ -coloration.

■ **Définition 43 — Coloration optimale.** Une  $\chi(G)$ -coloration valide est une coloration optimale d'un graphe  $G$ .





FIGURE 2.22 – Exemple de 3-coloration valide d'un graphe. Cette coloration est optimale.



FIGURE 2.23 – Graphe de Petersen : saurez-vous proposer une coloration optimale de ce graphe sachant que son nombre chromatique vaut trois ?

## H Distances

■ **Définition 44 — Distance dans un graphe simple non pondéré.** La distance d'un sommet  $a$  à un sommet  $b$  dans un graphe simple non pondéré  $G$  est la plus courte chaîne d'extrémités  $a$  et  $b$ . On la note  $d_G(a, b)$ .

Ⓡ Cette définition coïncide avec la notion de distance en mathématiques. Pour les sommets  $a$ ,  $b$  et  $c$  de  $G$

- $d_G(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
- $d_G(a, b) = d_G(b, a)$
- $d_G(a, b) \leq d_G(a, c) + d_G(c, b)$

■ **Définition 45 — Valuation d'une chaîne dans un graphe pondéré.** La valuation d'une chaîne dans un graphe pondéré est la somme des poids de chacune de ses arêtes. Pour une chaîne  $P$ , on la note  $v(P)$ .

■ **Définition 46 — Distance dans un graphe pondéré.** La distance d'un sommet  $a$  à un sommet  $b$  dans un graphe pondéré  $G$  est la valuation minimum des chaînes d'extrémités  $a$  et  $b$ . On la note  $d_{G,v}(a, b)$ .

## I Arbres

■ **Définition 47 — Arbre.** Un arbre est un graphe connexe et acyclique.

■ **Définition 48 — Feuilles.** Dans un arbre, les sommets de degré un sont appelés les feuilles.

■ **Définition 49 — Arbre recouvrant.** Un arbre recouvrant d'un graphe  $G$  est un sous-graphe couvrant de  $G$  qui est un arbre.

■ **Définition 50 — Arbre enraciné.** Parfois, on distingue un sommet particulier dans un arbre  $A$  : la racine  $r$ . Le couple  $(A, r)$  est un nommé arbre enraciné. On le représente un tel arbre verticalement avec la racine placée tout en haut comme sur la figure 5.1.

■ **Définition 51 — Arbre binaire.** Un arbre binaire est un graphe connexe acyclique pour lequel le degré de chaque sommet vaut au maximum trois. Le degré de la racine vaut au maximum deux.

■ **Définition 52 — Arbre binaire parfait.** Un arbre binaire parfait est un arbre dans lequel tous les niveaux sauf le dernier doivent être totalement remplis. Si le dernier n'est pas rempli totalement alors il doit être rempli de gauche à droite.

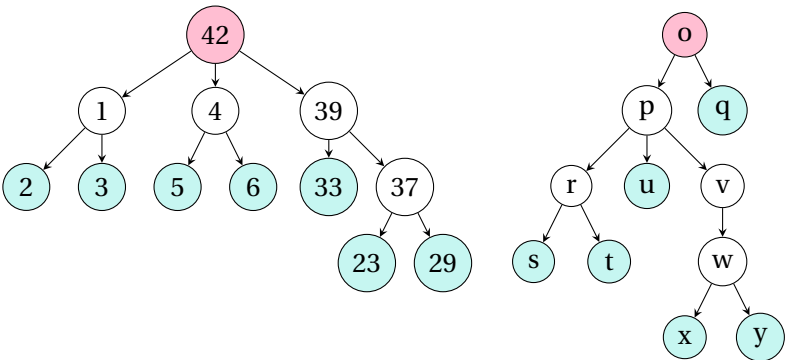


FIGURE 2.24 – Exemples d’arbres enracinés. Les racines des arbres sont en rouge, les feuilles en turquoise. Le tout forme une forêt.

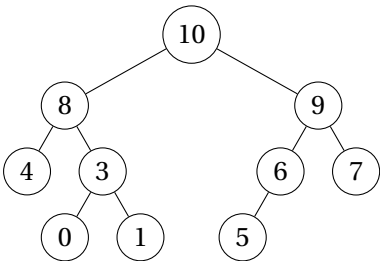


FIGURE 2.25 – Arbre binaire

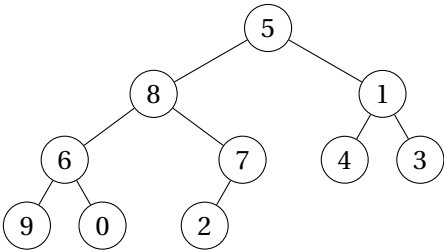


FIGURE 2.26 – Arbre binaire parfait

Ces arbres sont illustrés sur les figure 5.2 et 5.3.



# 3

## PROPRIÉTÉS DES GRAPHS

À la fin de ce chapitre, je sais :

- expliquer le lemme des poignées de mains
- caractériser un cycle eulérien
- caractériser un graphe connexe, acyclique ou un arbre

### A Des degrés et des plans

**Théorème 1 — Somme des degrés d'un graphe.** Le nombre d'arêtes d'un graphe simple est égale à la moitié de la somme des degrés de sommets de ce graphe.

Plus formellement, soit  $G = (V, E)$  un graphe simple alors on a :

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \quad (3.1)$$

**(R)** On appelle souvent ce théorème le lemme des poignées de mains car il peut se traduire par le fait que dans un graphe il y a toujours un nombre pair de sommets de degré impair.

**Théorème 2 — Formule d'Euler pour les graphes planaires.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple.  $G$  est planaire si le nombre de régions du plan qu'il délimite  $R$  vaut :

$$R = 2 + |E| - |V| \quad (3.2)$$

**(R)** Pour vérifier cette formule, il ne faut pas oublier la région extérieur au graphe qui compte également.



FIGURE 3.1 – Sur ces graphes, on peut vérifier les théorèmes de caractérisation des chaînes eulériennes et des cycles eulériens

## B Caractérisation des chaînes, des cycles et des graphes

**Théorème 3 — Caractérisation d'une chaîne eulérienne.** Il existe une chaîne eulérienne dans un graphe lorsque seuls les sommets de départ et d'arrivée sont de degré impair.

**Théorème 4 — Caractérisation d'un cycle eulérien.** Il existe un cycle eulérien dans un graphe si tous les sommets sont de degré pair.

Pour bien visualiser ces caractérisations, on peut s'entraîner sur les graphes de la figure 3.1. Le graphe d'ordre quatre possède une chaîne eulérienne mais pas de cycle eulérien. Le graphe complet  $K_5$  possède les deux.

**Théorème 5 — Chaînes extraites et existence de chaînes.** S'il existe un parcours d'un sommet  $a$  vers un sommet  $b$  dans un graphe  $G$  alors il existe une chaîne de  $a$  vers  $b$  dont les arêtes sont des arêtes du parcours.

Par transitivité, s'il existe une chaîne de  $a$  à  $b$  et une de  $a$  à  $c$  alors il existe une chaîne de  $b$  à  $c$ .

On appelle graphe hamiltonien un graphe qui possède un cycle hamiltonien (cf. définition 32). Un graphe hamiltonien :

- est connexe,
- d'ordre supérieur ou égal à trois,
- n'a pas de sommets de degré un.

**Théorème 6 — Condition nécessaire pour un graphe non hamiltonien.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Soit  $U \subseteq V$  un ensemble de sommets de  $G$ . Si le nombre de composantes connexes de  $G - U = (V \setminus U, E)$  est strictement supérieur au nombre de sommets de  $U$ , alors  $G$  n'est pas hamiltonien.

**Théorème 7 — Condition nécessaire pour un graphe hamiltonien.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe d'ordre supérieur ou égal à deux. Si pour toute paire de sommets  $a$  et  $b$  de  $G$  on a :

$$d(a) + d(b) \geq |V| \quad (3.3)$$

alors  $G$  est hamiltonien.

## C Graphes acycliques et connexes

**Théorème 8 — Condition nécessaire d'acyclicité d'un graphe.** Soit un graphe  $G = (V, E)$  possédant au moins une arête et acyclique alors  $G$  possède au moins deux sommets de degré un et on a :

$$|E| \leq |V| - 1 \quad (3.4)$$

**Théorème 9 — Condition nécessaire de connexité d'un graphe.** Si un graphe  $G = (V, E)$  est connexe alors on a :

$$|E| \geq |V| - 1 \quad (3.5)$$

**R** On déduit des deux théorèmes précédents qu'un arbre (cf. définition 47) possède exactement  $|V| - 1$  arêtes.

## D Coloration, graphes planaires et nombre chromatique

**Théorème 10 — Trois couleurs.** Si tous les degrés des sommets d'un graphe planaire sont pairs, alors trois couleurs suffisent pour obtenir une coloration valide.

**Théorème 11 — Quatre couleurs.** Le nombre chromatique d'un graphe planaire ne dépasse jamais quatre.

On peut chercher à encadrer le nombre chromatique d'un graphe. Dans un premier temps, on peut remarquer que :

- $\chi(G) \leq |V|$ , autrement dit, l'ordre d'un graphe est supérieur ou égal au nombre chromatique. L'égalité est atteinte pour les graphes complets : tous les sommets étant reliés les uns aux autres, on ne peut qu'utiliser des couleurs différentes pour chaque sommet.
- Pour un sous-graphe  $G'$  de  $G$ , on a  $\chi(G') \leq \chi(G)$ .

■ **Définition 53 — Degré maximum des sommets d'un graphe.** On note  $\Delta(G)$  le degré maximum des sommets d'un graphe  $G$ .

■ **Définition 54 — Ordre du plus grand sous-graphe complet d'un graphe.** On note  $\omega(G)$  l'ordre du plus grand sous-graphe **complet** d'un graphe  $G$ .

**Théorème 12 — Encadrement du nombre chromatique.** Pour un graphe  $G$ , on a :

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \quad (3.6)$$

## E Principe d'optimalité et plus court chemin dans un graphe

**Théorème 13 — Optimalité et plus court chemin dans graphe.** Si  $a \rightsquigarrow b$  est le plus court chemin passant par un sommet  $c$ , alors les sous-chemins  $a \rightsquigarrow c$  et  $c \rightsquigarrow b$  sont des plus courts chemins.

*Démonstration.* Soit  $a \rightsquigarrow b$  le plus court chemin passant par un sommet  $c$  dans un graphe  $G$ . Si  $a \rightsquigarrow c$  n'est pas le plus court chemin, alors il suffit de prendre le plus court chemin entre  $a$  et  $c$  et de le joindre à  $c \rightsquigarrow b$  pour obtenir un chemin plus court de  $a$  vers  $b$ . Ce qui est en contradiction avec notre hypothèse que  $a \rightsquigarrow b$  est le plus court chemin. ■



## ALGORITHMES ET GRAPHS

### À la fin de ce chapitre, je sais :

- ✎ parcourir un graphe en largeur et en profondeur
- ✎ utiliser une file ou un pile pour parcourir un graphe
- ✎ énoncer le principe de l'algorithme de Dijkstra (plus court chemin)
- ✎ expliquer l'intérêt d'un tri topologique
- ✎ schématiser le concept de forte connexité
- ✎ expliquer ce qu'est un arbre recouvrant
- ✎ expliquer l'intérêt d'un graphe biparti

### A Parcours d'un graphe

Le parcours d'un graphe est une opération fondamentale et utilisée par de nombreux algorithmes, notamment Dijkstra et A\*. On peut facilement mémoriser les différentes stratégies en observant les types d'ensemble qui sont utilisés pour stocker les sommets à parcourir au cours de l'algorithme :

1. Le parcours en **largeur** passe par tous les voisins d'un sommet avant de parcourir les descendants de ces voisins. Les sommets passent dans une **file** de type First In First Out.
2. Le parcours en **profondeur** passe par tous les descendants d'un voisin d'un sommet avant de parcourir tous les autres voisins de ce sommet. L'implémentation la plus simple et la plus commune est récursive. Mais on peut aussi l'implémenter de manière itérative en utilisant une *pile* de sommets de type Last In First Out.
3. L'algorithme de **Dijkstra** s'applique à un graphe pondéré : il passe par le voisin le plus proche d'un sommet avant de parcourir les autres voisins de ce sommet. C'est un parcours en largeur qui utilise une **file de priorités** : lorsqu'on insère un nouvel élément

dans cette file, celui-ci est placé d'après son niveau de priorité, le plus prioritaire en premier. Dans notre cas, la priorité est la distance la plus faible : la plus petite distance se situe en tête de la file.

## a Parcours en largeur

Parcourir en largeur un graphe signifie qu'on cherche à visiter tous les voisins situés à une même distance d'un sommet (sur un même niveau) avant de parcourir le reste du graphe.



### Vocabulary 5 — Breadth First Search ↔ Parcours en largeur

Le parcours en largeur d'un graphe (cf. algorithme 3) est un algorithme à la base de nombreux développements comme l'algorithme de Dijkstra et de Prim (cf. algorithmes 7 et 11). Il utilise une file FIFO<sup>1</sup> afin de gérer la découverte des voisins dans l'ordre de la largeur du graphe.

Pour matérialiser le parcours en largeur, on opère en repérant les sommets à visiter. Lorsqu'un sommet est découvert, il intègre l'ensemble des éléments à visiter, c'est-à-dire la file  $F$ . Lorsque le sommet a été traité, il quitte la file. Il est donc également nécessaire de garder la trace du passage sur un sommet afin de ne pas traiter plusieurs fois un même sommet : si un sommet a été visité alors il intègre l'ensemble des éléments visités.

Au fur et à mesure de sa progression, cet algorithme construit un arbre de parcours en largeur dans le graphe. La racine de cet arbre est l'origine du parcours. Comme un sommet de cet arbre n'est découvert qu'une fois, il a au plus un parent. L'algorithme 3 peut ne rien renvoyer et servir pour un traitement particulier sur chaque nœud. Il peut aussi renvoyer une trace du parcours dans l'arbre dans une structure de type liste ( $P$ ) qui enregistre le parcours.

---

#### Algorithme 3 Parcours en largeur d'un graphe

---

1: <b>Fonction</b> PARCOURS_EN_LARGEUR( $G, s$ )	▷ $s$ est un sommet de $G$
2: $F \leftarrow$ une file FIFO vide	▷ $F$ comme file FIFO
3: $V \leftarrow \emptyset$	▷ $V$ ensemble des sommets visités
4: $P \leftarrow$ une liste vide	▷ $P$ comme parcours
5:   ENFILER( $F, s$ )	
6:   AJOUTER( $V, s$ )	
7: <b>tant que</b> $F$ n'est pas vide <b>répéter</b>	
8: $v \leftarrow$ DÉFILER( $F$ )	
9:     AJOUTER( $P, v$ )	▷ ou traiter le sommet en place
10: <b>pour</b> chaque voisin $x$ de $v$ dans $G$ <b>répéter</b>	
11: <b>si</b> $x \notin V$ <b>alors</b>	▷ $x$ n'a pas encore été découvert
12:       AJOUTER( $V, x$ )	
13:       ENFILER( $F, x$ )	
14: <b>renvoyer</b> $P$	▷ Facultatif, on pourrait traiter chaque sommet $v$ en place

---



---

1. First In First Out



FIGURE 4.1 – Exemple de parcours en largeur au départ de a :  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow e \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow h$ .

## b Terminaison et correction du parcours en largeur

La terminaison du parcours en largeur peut être prouvée en considérant le variant de boucle  $|F| + |\bar{V}|$ , c'est à dire la somme des éléments présents dans la file et du nombre de nœuds non visités. En effet, au début de la boucle, si  $n$  est l'ordre du graphe, on a  $|F| + |\bar{V}| = 1 + n - 1 = n$ . Puis, à chaque tour de boucle on retire un élément de la file et on ajoute ses  $p$  voisins en même temps qu'on marque les  $p$  voisins comme visités. L'évolution du variant s'écrit :

$$|F| - 1 + p + |\bar{V}| - p = |F| + |\bar{V}| - 1 \quad (4.1)$$

À chaque tour de boucle, le variant décroît donc strictement de un et atteint nécessairement zéro au bout d'un certain nombre de tours. Lorsque le variant vaut zéro  $|F| + |\bar{V}| = 0$ , on a donc  $|F| = 0$  et  $|\bar{V}| = 0$ . La file est nécessairement vide et tous les nœuds ont été visités. L'algorithme se termine alors. La structure de donnée file permet de garantir la correction du parcours en largeur d'abord.

Parcourir un graphe, à partir d'un sommet de départ  $s$ , cela veut dire trouver un chemin partant de  $s$  vers tous les sommets du graphe<sup>2</sup>. On remarque que tous les sommets du graphe sont à un moment ou un autre de l'algorithme **visités** et admis dans l'ensemble  $V$  : ceci vient du fait qu'on procède de proche en proche en ajoutant tous les voisins d'un sommet, sans distinction.

La correction peut se prouver en utilisant l'invariant de boucle  $\mathcal{J}$  : «Pour chaque sommet  $v$  ajouté à  $V$  et enfilé dans  $F$ , il existe un chemin de  $s$  à  $v$ .»

- Initialisation : à l'entrée de la boucle,  $s$  est ajouté à  $V$  et est présent dans la file  $F$ . Le chemin de  $s$  à  $s$  existe trivialement.
- Conservation : on suppose que l'invariant est vérifié jusqu'à une certaine itération. On cherche à montrer qu'il l'est toujours à la fin de l'itération suivante. Lors de l'exécution de cette itération, un sommet  $v$  est défilé. Ce sommet faisait déjà parti de  $V$  et par hypothèse, comme l'invariant était vérifié jusqu'à présent, il existe un chemin de  $s$  à  $v$ . Puis, les voisins de  $v$  sont ajoutés à  $V$  et enfilés. Comme ils sont voisins, il existe donc un chemin de  $v$  à ces sommets et donc il existe un chemin de  $s$  à ces sommets. À la fin de l'itération, l'invariant est donc vérifié.

2. On fait l'hypothèse que le graphe est connexe. S'il ne l'est pas, il suffit de recommencer la procédure avec un des sommets n'ayant pas été parcouru.

- Terminaison : à la fin de l'algorithme, il existe un chemin de  $s$  vers tous les sommets du graphe visités (ajoutés à  $V$ ). Tous les sommets ont été parcourus.

### c Complexité du parcours en largeur

La complexité de cet algorithme est lié, comme toujours, aux structures de données utilisées. Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  et de taille  $m$  implémenté par une liste d'adjacence. On a choisi une file FIFO pour laquelle les opérations ENFILER et DÉFILER sont en  $O(1)$ . On parcourt tous les sommets et chaque liste d'adjacence est parcourue une fois. Ces opérations sont donc en  $O(n + m)$ .

**R** Utiliser une liste d'adjacence pour implémenter le graphe est très important dans ce cas car cela permet d'accéder rapidement aux voisins : le coût de cette opération est l'accès à un élément de la liste. Si on avait utilisé une matrice, on aurait été obligé de rechercher les voisins à chaque étape.

**R** Si le graphe est complet, on note que la complexité  $O(n + m)$  est en fait une complexité en  $O(n^2)$  car  $2|E| = n(n - 1)$  d'après le lemme des poignées de main (cf [t1](#)).

**R** Si l'on avait choisi un type tableau dynamique (typiquement le type `list` en Python) au lieu d'une file FIFO pour implémenter  $F$ , alors l'opération DÉFILER ferait perdre du temps : en effet, le tableau serait réécrit dans sa totalité à chaque fois qu'une opération DÉFILER aurait lieu car on retirerait alors le premier élément du tableau et il faudrait donc allouer un autre espace mémoire à ce nouveau tableau. Une fois encore, le choix de la structure de données est important pour que l'algorithme soit efficace.

**R** L'ensemble  $V$  n'est pas indispensable dans l'algorithme [3](#). On pourrait se servir de la liste qui enregistre le parcours. Néanmoins, son utilisation permet de bien découpler la sortie de l'algorithme (le chemin  $C$ ) de son fonctionnement interne et ainsi de prouver la terminaison.

### d Parcours en profondeur

Parcourir en profondeur un graphe signifie qu'on cherche à emprunter d'abord les arêtes du premier sommet trouvé avant de parcourir les voisins de ce sommet et le reste du graphe.



#### Vocabulary 6 — Depth First Search ↔ Parcours en profondeur

Le parcours en profondeur d'un graphe s'exprime naturellement récursivement (cf. algorithme [4](#)). Il peut également s'exprimer de manière itérative (cf. algorithme [5](#)) en utilisant une pile  $P$  afin gérer la découverte des voisins dans l'ordre de la profondeur du graphe.

La complexité de cet algorithme est lié, comme toujours, aux structures de données utilisées. Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  et de taille  $m$  implémenté par une liste d'adjacence. On a choisi

**Algorithme 4** Parcours en profondeur d'un graphe (version récursive)

---

```

1: Fonction REC_PARCOURS_EN_PROFONDEUR( $G, s, V$ )           ▷  $s$  est un sommet de  $G$ 
2:   AJOUTER( $V, s$ )                                           ▷  $s$  est marqué visité
3:   pour chaque voisin  $x$  de  $s$  dans  $G$  répéter
4:     si  $x \notin V$  alors                                     ▷  $x$  n'a pas encore été découvert
5:       REC_PARCOURS_EN_PROFONDEUR( $G, x, V$ )

```

---

**Algorithme 5** Parcours en profondeur d'un graphe (version itérative)

---

```

1: Fonction PARCOURS_EN_PROFONDEUR( $G, s$ )                 ▷  $s$  est un sommet de  $G$ 
2:    $P \leftarrow$  une file vide                               ▷  $P$  comme pile
3:    $V \leftarrow$  un ensemble vide                           ▷  $V$  comme visités
4:    $C \leftarrow$  un liste vide                               ▷  $C$  pour le parcours
5:   EMPILER( $P, s$ )
6:   tant que  $P$  n'est pas vide répéter
7:      $v \leftarrow$  DÉPILER( $P$ )
8:     AJOUTER( $C, v$ )
9:     si  $v \notin V$  alors                                   ▷  $v$  n'a pas encore été découvert
10:      AJOUTER( $V, x$ )
11:      pour chaque voisin  $x$  de  $v$  dans  $G$  répéter
12:        EMPILER( $P, x$ )
13:   renvoyer  $C$                                            ▷ Facultatif, on pourrait traiter chaque sommet  $v$  en place

```

---



FIGURE 4.2 – Exemple de parcours en profondeur au départ de  $a$  :  $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow g \rightarrow h \rightarrow e \rightarrow f$

une pile LIFO pour laquelle les opérations EMPILER et DÉPILER sont en  $O(1)$ . On parcourt tous les sommets et chaque liste d'adjacence est parcourue une fois. Ces opérations sont donc en  $O(n + m)$ .

## B Trouver un chemin dans un graphe

On peut modifier l'algorithme 3 de parcours en largeur d'un graphe pour trouver un chemin reliant un sommet à un autre et connaître la longueur de la chaîne qui relie ces deux sommets. Il suffit pour cela de :

- garder la trace du prédécesseur (parent) du sommet visité sur le chemin,

- sortir du parcours dès qu'on a trouvé le sommet cherché (early exit),
- calculer le coût du chemin associé.

Le résultat est l'algorithme 6. Opérer cette recherche dans un graphe ainsi revient à chercher dans toutes les directions, c'est à dire sans tenir compte des distances déjà parcourues.

---

**Algorithme 6** Longueur d'une chaîne via un parcours en largeur d'un graphe pondéré

---

```

1: Fonction CD_PEL( $G, a, b$ )                                ▷ Trouver un chemin de  $a$  à  $b$  et la distance associée
2:    $F \leftarrow$  une file FIFO vide                               ▷  $F$  comme file FIFO
3:    $V \leftarrow$  un ensemble vide                               ▷  $V$  comme visités
4:    $P \leftarrow$  un dictionnaire vide                           ▷  $P$  comme parent
5:   ENFILER( $F, s$ )
6:   AJOUTER( $V, s$ )
7:   tant que  $F$  n'est pas vide répéter
8:      $v \leftarrow$  DÉFILER( $F$ )
9:     si  $v$  est le sommet  $b$  alors                               ▷ Objectif atteint, early exit
10:      sortir de la boucle
11:    pour chaque voisin  $x$  de  $v$  dans  $G$  répéter
12:      si  $x \notin V$  alors                                       ▷  $x$  n'a pas encore été découvert
13:        AJOUTER( $V, x$ )
14:        ENFILER( $F, x$ )
15:         $P[x] \leftarrow v$                                        ▷ Garder la trace du parent
16:       $c \leftarrow 0$                                            ▷ Coût du chemin
17:       $s \leftarrow b$ 
18:    tant que  $s$  est différent de  $a$  répéter
19:       $c \leftarrow c + w(s, P[s])$                                ▷  $w$  est la fonction de valuation du graphe  $G$ 
20:      sommet  $\leftarrow P[s]$                                    ▷ On remonte à l'origine du chemin
21:  renvoyer  $c$ 

```

---

**(R)** Il faut noter néanmoins que le chemin trouvé et la distance associée issue de l'algorithme 6 n'est pas nécessairement la meilleure, notamment car on ne tient pas compte de la distance parcourue jusqu'au sommet recherché.

**(R)** Si le graphe n'est pas pondéré, cet algorithme fonctionne néanmoins, il suffit de compter le nombre de sauts pour évaluer la distance (la fonction de valuation vaut toujours 1).

## C Plus courts chemins dans les graphes pondérés

**(R)** Un graphe non pondéré peut-être vu comme un graphe pondéré dont la fonction de valuation vaut toujours 1. La distance entre deux sommets peut alors être interprétée comme le nombre de sauts nécessaires pour atteindre un sommet.

**Théorème 14 — Existence d'un plus court chemin.** Dans un graphe pondéré **sans pondérations négatives**, il existe toujours un plus court chemin.

*Démonstration.* Un graphe pondéré possède un nombre fini de sommets et d'arêtes (cf. définition 3). Il existe donc un nombre fini de chaînes entre les sommets du graphe. Comme les valuations du graphe ne sont pas négatives, c'est à dire que  $\forall e \in E, w(e) \geq 0$ , l'ensemble des longueurs de ces chaînes est une partie non vide de  $\mathbb{N}$  : elle possède donc un minimum. Parmi ces chaînes, il en existe donc nécessairement une dont la longueur est la plus petite, le plus court chemin. ■

■ **Définition 55 — Plus court chemin entre deux sommets d'un graphe.** Le plus court chemin entre deux sommets  $a$  et  $b$  d'un graphe  $G$  est une chaîne  $\mathcal{C}_{ab}$  qui relie les deux sommets  $a$  et  $b$  et :

- qui comporte un minimum d'arêtes si  $G$  est un graphe non pondéré,
- dont le poids cumulé est le plus faible, c'est à dire  $\min_{\mathcal{C}_{ab} \in G} \left( \sum_{e \in \mathcal{C}_{ab}} w(e) \right)$ , dans le cas d'un graphe pondéré de fonction de valuation  $w$ .

■ **Définition 56 — Distance entre deux sommets.** La distance entre deux sommets d'un graphe est la longueur d'un plus court chemin entre ces deux sommets. Pour deux sommets  $a$  et  $b$ , on la note  $\delta_{ab}$ . On a enfin :

$$\delta_{ab} = \min_{\mathcal{C}_{ab} \in G} \left( \sum_{e \in \mathcal{C}_{ab}} w(e) \right) \quad (4.2)$$

On se propose maintenant d'étudier les algorithmes les plus célèbres qui illustrent, dans différentes configurations, le concept de plus court chemin dans un graphe. La majorité de ces algorithmes reposent sur le principe d'optimalité de Bellman et la programmation dynamique et qui a déjà été énoncé dans le théorème 13. On peut formuler ce principe ainsi : **toute sous-chaîne entre  $p$  et  $q$  d'un plus court chemin entre  $a$  et  $b$  est un plus court chemin entre  $p$  et  $q$ .**

### a Algorithme de Dijkstra

L'algorithme de Dijkstra<sup>3</sup>[4] s'applique à des **graphes pondérés**  $G = (V, E, w)$  **dont la valuation est positive**, c'est à dire que  $\forall e \in E, w(e) \geq 0$ . C'est un algorithme glouton optimal (cf.

---

3. à prononcer "Daillekstra"

informatique commune) qui trouve les plus courts chemins entre un sommet particulier  $a \in V$  et tous les autres sommets d'un graphe. Pour cela, l'algorithme classe les différents sommets par ordre croissant de leur distance minimale au sommet de départ. Dans ce but, il **parcourt en largeur le graphe en choisissant les voisins les plus proches en premier**.

---

**Algorithme 7** Algorithme de Dijkstra, plus courts chemins à partir d'un sommet donné

---

```

1: Fonction DIJKSTRA( $G = (V, E, w), a$ )    ▷ Trouver les plus courts chemins à partir de  $a \in V$ 
2:    $\Delta \leftarrow a$                         ▷  $\Delta$  est l'ensemble des sommets dont on connaît la distance à  $a$ 
3:    $\Pi \leftarrow \emptyset$                     ▷  $\Pi[s]$  est le parent de  $s$  dans le plus court chemin de  $a$  à  $s$ 
4:    $d \leftarrow \emptyset$                     ▷ l'ensemble des distances au sommet  $a$ 
5:    $\forall s \in V, d[s] \leftarrow w(a, s)$         ▷  $w(a, s) = +\infty$  si  $s$  n'est pas voisin de  $a$ , 0 si  $s = a$ 
6:   tant que  $\bar{\Delta}$  n'est pas vide répéter    ▷  $\bar{\Delta}$  : sommets dont la distance n'est pas connue
7:     Choisir  $u$  dans  $\bar{\Delta}$  tel que  $d[u] = \min(d[v], v \in \bar{\Delta})$ 
8:      $\Delta = \Delta \cup \{u\}$                 ▷ On prend la plus courte distance à  $a$  dans  $\bar{\Delta}$ 
9:     pour  $x \in \bar{\Delta}$  répéter              ▷ Ou bien  $x \in \mathcal{N}_G(u) \cap \bar{\Delta}$ , pour tous les voisins de  $u$  dans  $\bar{\Delta}$ 
10:      si  $d[x] > d[u] + w(u, x)$  alors
11:         $d[x] \leftarrow d[u] + w(u, x)$     ▷ Mises à jour des distances des voisins
12:         $\Pi[x] \leftarrow u$                 ▷ Pour garder la tracer du chemin le plus court
13:   renvoyer  $d, \Pi$ 

```

---

**(R)** Il faut remarquer que les boucles imbriquées de cet algorithme peuvent être comprises comme deux étapes successives de la manière suivante :

1. On choisit un nouveau sommet  $u$  de  $G$  à chaque tour de boucle *tant que* qui est tel que  $d[u]$  est la plus petite des valeurs accessibles dans  $\bar{\Delta}$ . **C'est le voisin d'un sommet de  $\bar{\Delta}$  le plus proche de  $a$ .** Ce sommet  $u$  est alors inséré dans l'ensemble  $\Delta$  : c'est la **phase de transfert** de  $u$  de  $\bar{\Delta}$  à  $\Delta$ .
2. Lors de la boucle *pour*, on met à jour les distances des voisins de  $u$  qui n'ont pas encore été découverts. En effet, si  $x$  n'est pas un voisin de  $u$ , alors il n'existe pas d'arête entre  $u$  et  $x$  et  $w(u, x) = +\infty$ . La mise à jour de la distance n'a donc pas lieu, on n'a pas trouvé une meilleure distance à  $x$ . C'est la **phase de mise à jour des distances** des voisins de  $u$ .

L'algorithme de Dijkstra procède donc de proche en proche.

■ **Exemple 9 — Application de l'algorithme de Dijkstra.** On se propose d'appliquer l'algorithme 7 au graphe représenté sur la figure 4.3. Le tableau 4.1 représente les distances successivement trouvées à chaque tour de boucle *tant que* de l'algorithme. En rouge figurent les distances les plus courtes à  $a$  à chaque tour. On observe également que certaines distances sont mises à jour sans pour autant que le sommet soit sélectionné au tour suivant.

À la fin de l'algorithme, on note donc que les distances les plus courtes de  $a$  à  $b, c, d, e, f$  sont  $[5, 1, 8, 3, 6]$ . Le chemin le plus court de  $a$  à  $b$  est donc  $a \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow b$ . Le plus court de  $a$  à  $f$  est  $a \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow f$ . C'est la structure de données  $\Pi$  qui garde en mémoire le prédécesseur (parent) d'un sommet sur le chemin le plus court qui permettra de reconstituer les chemins.



$\Delta$	a	b	c	d	e	f	$\bar{\Delta}$
$\{\}$	0	7	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\{a, b, c, d, e, f\}$
$\{a\}$	.	7	1	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\{b, c, d, e, f\}$
$\{a, c\}$	.	6	.	$+\infty$	3	8	$\{b, d, e, f\}$
$\{a, c, e\}$	.	5	.	8	.	6	$\{b, d, f\}$
$\{a, c, e, b\}$	.	.	.	8	.	6	$\{d, f\}$
$\{a, c, e, b, f\}$	.	.	.	8	.	.	$\{d\}$
$\{a, c, e, b, f, d\}$	.	.	.	.	.	.	$\{\}$

TABLE 4.1 – Tableau  $d$  des distances au sommet  $a$  successivement trouvées au cours de l'algorithme de Dijkstra appliqué au graphe de la figure 4.3



FIGURE 4.3 – Graphe pondéré à valeurs positives pour l'application de l'algorithme de Dijkstra.

**Théorème 15 — L'algorithme de Dijkstra se termine et est correct.**

*Démonstration.* Correction de l'algorithme : à chaque étape de cet algorithme, on peut distinguer deux ensembles de sommets : l'ensemble  $\Delta$  est constitué des éléments dont on connaît la distance la plus courte à  $a$  et l'ensemble complémentaire  $\bar{\Delta}$  qui contient les autres sommets.

D'après le principe d'optimalité, tout chemin plus court vers un sommet de  $\bar{\Delta}$  passera nécessairement par un sommet de  $\Delta$ . Ceci s'écrit :

$$\forall u \in \bar{\Delta}, d[u] = \min(d[v] + w[v, u], v \in \Delta) \quad (4.3)$$

On souhaite montrer qu'à la fin de chaque tour de boucle tant que (lignes 6-12),  $d$  contient les distances les plus courtes vers tous les sommets de  $\Delta$ . On peut formuler cet invariant de boucle.

$\mathcal{J}$  : à chaque fin de tour de boucle on a

$$\forall u \in \Delta, d[u] = \delta_{au} \quad (4.4)$$

$$\forall u \in \bar{\Delta}, d[u] = \min (d[v] + w[v, u], v \in \Delta) \quad (4.5)$$

À l'entrée de la boucle, l'ensemble  $\Delta$  ne contient que le sommet de départ  $a$ . On a  $d[a] = 0$ , ce qui est la distance minimale. Pour les autres sommets de  $\bar{\Delta}$ ,  $d$  contient :

- une valeur infinie si ce sommet n'est pas un voisin de  $a$ , ce qui, à cette étape de l'algorithme est le mieux qu'on puisse trouver,
- le poids de l'arête venant de  $a$  s'il s'agit d'un voisin, ce qui, à cette étape de l'algorithme est le mieux que l'on puisse trouver également.

On peut donc affirmer que  $d$  contient les distances entre  $a$  et tous les sommets de  $\Delta$ . L'invariant est vérifié à l'entrée de la boucle.

On se place maintenant à une étape quelconque de la boucle. Notre hypothèse  $\mathcal{H}$  est que toutes les itérations précédentes sont correctes. À l'entrée de la boucle on sélectionne un sommet  $u$ , le premier de la file de priorités. Il nous faut alors montrer que  $d[u] = \delta_{au}$ .

$u$  entre dans  $\Delta$ , c'est à dire que  $u \in \bar{\Delta}$  et  $\forall v \in \bar{\Delta}, d[u] \leq d[v]$ . Considérons un autre chemin de  $a$  à  $u$  passant par un sommet  $v$  de  $\bar{\Delta}$ . Comme on a  $d[u] \leq d[v]$ , cet autre chemin sera au moins aussi long que  $d[u]$ , sauf s'il existe des arêtes de poids négatif (ce qui n'est pas le cas).

Formellement, on peut écrire cela ainsi

$$\delta_{au} = \delta_{av} + \delta_{vu} \quad (4.6)$$

$$\delta_{au} \geq \delta_{av} \quad (4.7)$$

Par ailleurs, comme  $v$  appartient à  $\bar{\Delta}$ , il vérifie l'hypothèse d'induction. On a donc :

$$d[v] = \min (d[x] + w[x, v], x \in \Delta) \quad (4.8)$$

$$= \min (\delta_{ax} + w[x, v], x \in \Delta) \quad (4.9)$$

$$= \delta_{av} \quad (4.10)$$

la deuxième ligne étant obtenue grâce à l'hypothèse d'induction également.

$$d[u] \leq d[v] = \delta_{av} \quad (4.11)$$

$$\leq \delta_{av} \quad (4.12)$$

$$\leq \delta_{au} \quad (4.13)$$

Or,  $d[u]$  ne peut pas être plus petit que la distance de  $a$  à  $u$ . On a donc finalement  $d[u] = \delta_{au}$ .

$d$  contient donc les distances vers tous les sommets à la fin de l'exécution de l'algorithme.

Terminaison de l'algorithme : avant la boucle *tant que*,  $\bar{\Delta}$  possède  $n - 1$  éléments, si  $n \in \mathbb{N}^*$  est l'ordre du graphe. À chaque tour de boucle *tant que*, l'ensemble  $\bar{\Delta}$  décroît strictement d'un élément et atteint donc nécessairement zéro. Le cardinal de  $\bar{\Delta}$  est donc un variant de boucle. L'algorithme se termine lorsque le cardinal de  $\bar{\Delta}$  atteint zéro. ■

La complexité de l'algorithme de Dijkstra dépend de l'ordre  $n$  du graphe considéré et de sa taille  $m$ . La boucle *tant que* effectue exactement  $n - 1$  tours. La boucle *pour* effectue à chaque fois un nombre de tour égal au nombre d'arêtes non découvertes qui partent du sommet  $u$  considéré et vont vers un sommet voisin de  $\bar{\Delta}$ . On ne découvre une arête qu'une seule fois, puisque le sommet  $u$  est transféré dans  $\Delta$  au début de la boucle. Au final, on exécute donc la mise à jour des distances un nombre de fois égal à la taille  $m$  du graphe, c'est à dire son nombre d'arêtes. En notant la complexité du transfert  $c_t$  et la complexité de la mise à jour des distances  $c_d$  et en déroulant la boucle *tant que*, on peut écrire :

$$C(n, m) = (n - 1)c_t + mc_d \quad (4.14)$$

Les complexités  $c_d$  et  $c_t$  dépendent naturellement des structures de données utilisées pour implémenter l'algorithme.

Si on choisit une implémentation de  $d$  par un tableau, alors on a besoin de rechercher le minimum des distances pour effectuer le transfert : cela s'effectue au prix d'un tri du tableau au minimum en  $c_t = O(n \log n)$ . Un accès aux éléments du tableau pour la mise à jour est en  $c_d = O(1)$ . On a donc  $C(n) = (n - 1)O(n \log n) + mO(1) = O(n^2 \log n)$ .

Si  $d$  est implémentée par une file à priorités (un tas) comme le propose Johnson [8], alors on a  $c_t = O(\log n)$  et  $c_d = O(\log n)$ . La complexité est alors en  $C(n) = (n + m) \log n$ . Cependant, pour que le tas soit une implémentation pertinente, il est nécessaire que  $m = O(\frac{n^2}{\log n})$ , c'est à dire que le graphe ne soit pas complet, voire un peu creux!

■ **Exemple 10 — Usage de l'algorithme de Dijkstra** . Le protocole de routage OSPF implémente l'algorithme de Dijkstra. C'est un protocole qui permet d'automatiser le routage sur les réseaux internes des opérateurs de télécommunication. Les routeurs sont les sommets du graphe et les liaisons réseaux les arêtes. La pondération associée à une liaison entre deux routeurs est calculée à partir des performances en termes de débit de la liaison. Plus liaison possède un débit élevé, plus la distance diminue.

OSPF est capable de relier des centaines de routeurs entre eux, chaque routeur relayant les paquets IP de proche en proche en utilisant le plus court chemin de son point de vue<sup>a</sup>. Le protocole garantit le routage des paquets par les plus courts chemins en temps réel. Chaque routeur calcule ses propres routes vers toutes les destinations, périodiquement. Si une liaison réseau s'effondre, le routeurs en sont informés et recalculent d'autres routes immédiatement. La puissance de calcul nécessaire pour exécuter l'algorithme sur un routeur, même dans le cas d'un réseau d'une centaine de routeur, est relativement faible car la plupart des réseaux de télécommunications sont des graphes relativement creux. Ce n'est pas rentable de créer des graphes de télécommunications complets, même si ce serait intéressant pour le consommateur et très robuste!

<sup>a</sup>. Cela fonctionne grâce au principe d'optimalité de Bellman!

## b Algorithme de Bellman-Ford

L'algorithme de Bellman-Ford calcule les plus courts chemins depuis un sommet de départ, comme l'algorithme de Dijkstra. Cependant, il s'applique à des **graphes pondérés et orientés dont les pondérations peuvent être négatives mais sans cycles de longueur négative**[2, 6, 12].

**(R)** Soit un graphe pondéré non orienté qui possède des poids négatifs. Comme les arêtes d'un graphe non orienté sont des cycles, on ne peut pas appliquer l'algorithme de Bellman-Ford. On lui préférera alors Dijkstra.

**(R)** Les poids négatifs peuvent représenter des transferts de flux (chaleur en chimie, argent en économie) et sont donc très courants.

---

**Algorithme 8** Algorithme de Bellman-Ford, plus courts chemins à partir d'un sommet donné

---

```

1 : Fonction BELLMAN_FORD( $G = (V, E, w), a$ )
2 :    $\Pi \leftarrow$  un dictionnaire vide     $\triangleright \Pi[s]$  est le parent de  $s$  dans le plus court chemin de  $a$  à  $s$ 
3 :    $d \leftarrow$  ensemble des distances au sommet  $a$ 
4 :    $d[s] \leftarrow w(a, s)$                  $\triangleright w(a, s) = +\infty$  si  $s$  n'est pas voisin de  $a$ , 0 si  $s = a$ 
5 :   pour _ de 1 à  $|V| - 1$  répéter                 $\triangleright$  Répéter  $n - 1$  fois
6 :     pour  $(u, v) = e \in E$  répéter                 $\triangleright$  Pour toutes les arêtes du graphe
7 :       si  $d[v] > d[u] + w(u, v)$  alors                 $\triangleright$  Si le chemin est plus court par là...
8 :          $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$                  $\triangleright$  Mises à jour des distances des voisins
9 :          $\Pi[v] \leftarrow u$                              $\triangleright$  Pour garder la tracer du chemin
10 :   renvoyer  $d, \Pi$ 

```

---

■ **Exemple 11 — Application de l'algorithme de Bellman-Ford.** On se propose d'appliquer l'algorithme 8 au graphe pondéré et orienté représenté sur la figure 4.4. On note qu'il contient une pondération négative de  $b$  à  $f$  mais pas de cycle à pondération négative. Le tableau 4.2 représente les distances successivement trouvées à chaque itération.

On observe que le chemin de  $a$  à  $f$  emprunte bien l'arc de pondération négative.

Il faut noter que l'algorithme a convergé avant la fin de l'itération dans cas. C'est un des axes d'amélioration de cet algorithme.

N° d'itération	a	b	c	d	e	f
1	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
2	0	5	1	8	3	6
3	0	5	1	8	3	4
4	0	5	1	8	3	4
5	0	5	1	8	3	4

TABLE 4.2 – Tableau  $d$  des distances au sommet  $a$  successivement trouvées au cours de l'algorithme de Bellman-Ford appliqué au graphe de la figure 4.4

La complexité de l'algorithme 8 est en  $O(nm)$  si  $n$  est l'ordre du graphe et  $m$  sa taille.

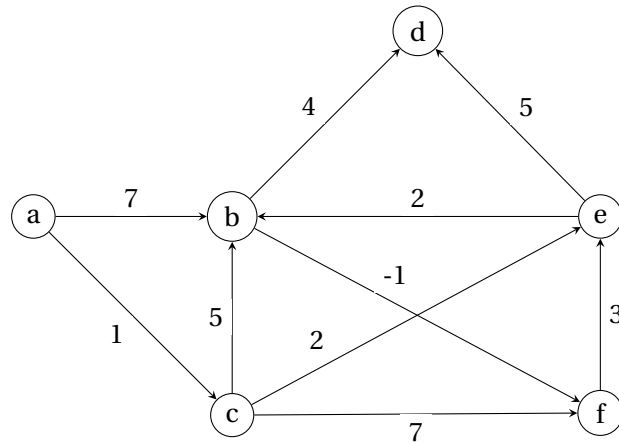


FIGURE 4.4 – Graphe pondéré et orienté à valeurs positives et négatives pour l’application de l’algorithme de Bellman-Ford.

■ **Exemple 12 — Protocole de routage RIP.** Le protocole de routage RIP utilise l’algorithme de Bellman-Ford pour trouver les plus courts chemins dans un réseau de routeur. Il est moins adapté que OSPF pour les grands réseaux.

### c Algorithme de Floyd-Warshall

L’algorithme de Floyd-Warshall [5, 14, 16] est l’application de la programmation dynamique à la recherche de **l’existence d’un chemin entre toutes les paires de sommets d’un graphe orienté et pondéré**. Les distances trouvées sont les plus courtes. Les pondérations du graphe peuvent être négatives mais on exclue tout circuit de poids strictement négatif.

Soit un graphe orienté et pondéré  $G = (V, E, w)$ .  $G$  peut être modélisé par une matrice d’adjacence  $M$

$$\forall i, j \in \llbracket 0, |V| - 1 \rrbracket, M = \begin{cases} w(v_i, v_j) & \text{si } (v_i, v_j) \in E \\ +\infty & \text{si } (v_i, v_j) \notin E \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (4.15)$$

Un exemple de graphe associé à la matrice d’adjacence :

$$M_{\text{init}} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & +\infty & 0 & +\infty \\ +\infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

est donné sur la figure 4.5. Sur cet exemple, le chemin le plus court de  $v_4$  à  $v_3$  vaut 3 et passe par  $v_2$ .

Pour trouver le plus court chemin entre deux sommets, on essaye tous les chemins de toutes les longueurs possibles et on ne garde que les plus courts. Chaque étape  $p$  de l’algo-

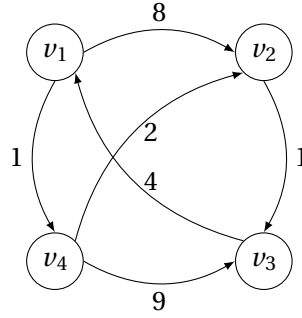


FIGURE 4.5 – Exemple de graphe orienté et pondéré pour expliquer le concept de matrice d'adjacence.

l'algorithme de Floyd-Warshall est donc constitué d'un allongement **éventuel** du chemin par le sommet  $v_p$ . À l'étape  $p$ , on associe une matrice  $M_p$  qui contient la longueur des chemins les plus courts d'un sommet à un autre passant par des sommets de l'ensemble  $\{v_0, v_1, \dots, v_p\}$ . On construit ainsi une suite de matrice finie  $(M_p)_{p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket}$  et on initialise la matrice  $M$  avec avec  $M_{\text{init}}$ .

Supposons qu'on dispose de  $M_{p-1}$ . Considérons un chemin  $\mathcal{C}$  entre  $v_i$  et  $v_j$  dont la longueur est minimale et dont les sommets intermédiaires sont dans  $\{v_0, v_1, \dots, v_{p-1}\}$ ,  $p \leq n$ . Pour un tel chemin :

- soit  $\mathcal{C}$  passe par  $v_p$ . Dans ce cas,  $\mathcal{C}$  est la réunion de deux chemins dont les sommets sont dans  $\{v_0, v_1, \dots, v_p\}$  : celui de  $v_i$  à  $v_p$  et celui de  $v_p$  à  $v_j$ .
- soit  $\mathcal{C}$  ne passe pas par  $v_p$ .

Entre ces deux chemins, on choisira le chemin le plus court.

Disposer d'une formule de récurrence entre  $M_p$  et  $M_{p-1}$  permettrait de montrer que le problème du plus court chemin entre deux sommets d'un graphe orienté et pondéré est à sous-structure optimale. On pourrait alors utiliser la programmation dynamique pour résoudre le problème. Or, on peut traduire notre explication ci-dessus par la relation de récurrence suivante :

$$\forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall i, j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, M_p(i, j) = \min(M_{p-1}(i, j), M_{p-1}(i, p) + M_{p-1}(p, j)) \quad (4.17)$$

Pour  $p = 0$ , on pose  $M_{-1} = M_{\text{init}}$ .

L'algorithme de Floyd-Warshall 9 n'est que le calcul de la suite de ces matrices. C'est un bel exemple de programmation dynamique.

**(R)** Cet algorithme effectue le même raisonnement que Bellman-Ford mais avec une vision globale, à l'échelle du graphe tout entier, pas uniquement par rapport à un sommet de départ.

---

**Algorithme 9** Algorithme de Floyd-Warshall, plus courts chemins entre toutes les paires de sommet

---

```

1 : Fonction FLOYD_WARSHALL( $G = (V, E, w)$ )
2 :    $M \leftarrow$  la matrice d'adjacence de  $G$ 
3 :   pour  $p$  de 0 à  $|V| - 1$  répéter
4 :     pour  $i$  de 0 à  $|V| - 1$  répéter
5 :       pour  $j$  de 0 à  $|V| - 1$  répéter
6 :          $M(i, j) = \min(M(i, j), M(i, p) + M(p, j))$ 
7 :   renvoyer  $M$ 

```

---

■ **Exemple 13 — Application de l'algorithme de Floyd-Warshall.** Si on applique l'algorithme au graphe de la figure 4.5, alors on obtient la série de matrices suivantes :

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & +\infty & 0 & +\infty \\ +\infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & +\infty & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ +\infty & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 1 \\ +\infty & 0 & 1 & +\infty \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ +\infty & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 9 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 12 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 0 & 5 \\ 7 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

#### d A\*

L'algorithme A\*<sup>4</sup> est un algorithme couteau suisse qui peut être considéré comme un algorithme de Dijkstra muni d'une heuristique : là où Dijkstra ne tient compte que du coût du chemin déjà parcouru, A\* considère ce coût et une heuristique qui l'informe sur le reste du chemin à parcourir. Il faut bien remarquer que le chemin qu'il reste à parcourir n'est pas nécessai-

---

4. prononcer *A étoile* ou *A star*

rement déjà exploré : parfois il est même impossible d'explorer tout le graphe. Si l'heuristique pour évaluer le reste du chemin à parcourir est bien choisie, alors A\* converge aussi vite voire plus vite que Dijkstra[15].

■ **Définition 57 — Heuristique admissible.** Une heuristique  $\mathcal{H}$  est admissible si pour tout sommet du graphe,  $\mathcal{H}(s)$  est une borne inférieure de la plus courte distance séparant le sommet de départ du sommet d'arrivée.

■ **Définition 58 — Heuristique cohérente.** Une heuristique  $\mathcal{H}$  est cohérente si pour toute arête  $(s, p)$  du graphe  $G = (V, E, w)$ ,  $\mathcal{H}(s) \leq \mathcal{H}(p) + w(s, p)$ .

■ **Définition 59 — Heuristique monotone.** Une heuristique  $\mathcal{H}$  est monotone si l'estimation du coût **total** du chemin ne décroît pas lors du passage d'un sommet à ses successeurs. Pour un chemin  $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ , on  $\forall 0 \leq i < j \leq n, c(s_j) \geq c(s_i)$ .

Soit  $G = (V, E, w)$  un graphe orienté. Soit  $d$  la fonction de distance utilisée par l'algorithme de Dijkstra (cf. algorithme 7). A\*, muni d'une fonction  $h$  permettant d'évaluer l'heuristique, calcule alors le coût total pour aller jusqu'à un sommet  $p$  comme suit :

$$c(p) = d(p) + h(p) \quad (4.23)$$

Le coût obtenu n'est pas nécessairement optimal, il dépend de l'heuristique.

Supposons que l'on cherche le chemin le plus court entre les sommets  $s_0$  et  $p$ . Supposons que l'on connaisse un chemin optimal entre  $s_0$  et un sommet  $s$ . Alors on peut écrire que le coût total vers le sommet  $p$  vaut :

$$c(p) = d(p) + h(p) \quad (4.24)$$

$$= d(s) + w(s, p) + h(p) \quad (4.25)$$

$$= d(s) + h(s) + w(s, p) - h(s) + h(p) \quad (4.26)$$

$$= c(s) + w(s, p) - h(s) + h(p) \quad (4.27)$$

Ainsi, on peut voir l'algorithme A\* comme un algorithme de Dijkstra muni :

- de la distance  $\tilde{d} = c$ ,
- et de la pondération  $\tilde{w}(s, p) = w(s, p) - h(s) + h(p)$ .

L'algorithme 10 donne le détail de la procédure à suivre.

## D Arbres recouvrants

Les arbres recouvrants sont des éléments essentiels de l'industrie, notamment du point de vue de l'efficacité, de la robustesse et de l'optimisation. En ce sens, ils sont également indispensables à toute vision durable de notre développement. L'idée d'un arbre recouvrant est de ne sélectionner que certaines arêtes dans un graphe pondéré afin de garantir un service optimale (en fonction des pondérations). Les arbres recouvrants sont donc utilisés dans les domaines



**Algorithme 10 A\***


---

```

1: Fonction ASTAR( $G = (V, E, w), a$ ) ▷ Sommet de départ  $a$ 
2:    $\Delta \leftarrow a$ 
3:    $\Pi \leftarrow$ 
4:    $\tilde{d} \leftarrow$  l'ensemble des distances au sommet  $a$ 
5:    $\forall s \in V, \tilde{d}[s] \leftarrow \tilde{w}(a, s)$  ▷ Le graphe est partiel, l'heuristique fait le reste
6:   tant que  $\tilde{\Delta}$  n'est pas vide répéter ▷  $\tilde{\Delta}$  : sommets dont la distance n'est pas connue
7:     Choisir  $u$  dans  $\tilde{\Delta}$  tel que  $\tilde{d}[u] = \min(\tilde{d}[v], v \in \tilde{\Delta})$ 
8:      $\Delta = \Delta \cup \{u\}$ 
9:     pour  $x \in \tilde{\Delta}$  répéter ▷ Ou bien  $x \in \mathcal{N}_G(u) \cap \tilde{\Delta}$ , pour tous les voisins de  $u$  dans  $\tilde{\Delta}$ 
10:      si  $\tilde{d}[x] > \tilde{d}[u] + \tilde{w}(u, x)$  alors
11:         $\tilde{d}[x] \leftarrow \tilde{d}[u] + \tilde{w}(u, x)$ 
12:         $\Pi[x] \leftarrow u$  ▷ Pour garder la tracer du chemin le plus court
13:   renvoyer  $\tilde{d}, \Pi$ 

```

---

des réseaux d'énergie, des télécommunications, des réseaux de fluides mais également en intelligence artificielle et en électronique. Les deux algorithmes phares pour construire des arbres recouvrants sont l'algorithme de Kruskal [9] et l'algorithme de Prim [13].

**a Algorithme de Prim**

L'algorithme de Prim est un algorithme glouton optimal qui s'applique aux graphes pondérés connexes. Pour construire l'arbre, l'algorithme part d'un sommet et fait croître l'arbre en choisissant un sommet dont la distance est la plus faible et n'appartenant pas à l'arbre, garantissant ainsi l'absence de cycle.

**Algorithme 11** Algorithme de Prim, arbre recouvrant

---

```

1: Fonction PRIM( $G = (V, E, w)$ )
2:    $T \leftarrow \emptyset$  ▷ la sortie : l'ensemble des arêtes de l'arbre recouvrant
3:    $S \leftarrow s$  un sommet quelconque de  $V$ 
4:   tant que  $S \neq V$  répéter
5:      $(u, v) \leftarrow \min(w(u, v), u \in S, v \in E)$  ▷ Choix glouton!
6:      $S \leftarrow S \cup \{v\}$ 
7:      $T \leftarrow T \cup \{(u, v)\}$ 
8:   renvoyer  $T$ 

```

---

La complexité de cet algorithme, si l'on utilise un tas binaire, est en  $O(m \log n)$ .

**b Algorithme de Kruskal**

L'algorithme de Kruskal (cf. algorithme 12) est un algorithme glouton optimal qui s'applique aux graphes pondérés. Le graphe peut ne pas être connexe et dans ce cas on obtient

un forêt d'arbres recouvrants. Pour construire la forêt et effectuer un choix d'arête, il ordonne les arêtes du graphe par ordre de pondération croissante.

---

**Algorithme 12** Algorithme de Kruskal, arbre recouvrant
 

---

```

1: Fonction KRUSKAL( $G = (V, E, w)$ )
2:    $T \leftarrow \emptyset$  ▷ la sortie : l'ensemble des arêtes de l'arbre recouvrant
3:   pour  $k$  de 1 à  $|E|$  répéter
4:      $e \leftarrow$  l'arête de pondération la plus faible de  $E$  ▷ Choix glouton!
5:     si  $(S, T \cup \{e\}, w)$  est un graphe acyclique alors
6:        $T \leftarrow T \cup \{e\}$ 
7:   renvoyer  $T$ 

```

---

Si on utilise une structure de tas ainsi la complexité de cet algorithme est en  $O(m \log m)$  si  $m = |E|$  est le nombre d'arêtes du graphe.

## E Tri topologique d'un graphe orienté

### a Ordre dans un graphe orienté acyclique

Dans un graphe orienté (cf. définition 9) acyclique, les arcs définissent un **ordre partiel**, le sommet à l'origine de l'arc pouvant être considéré comme le prédécesseur du sommet à l'extrémité de l'arc. Par exemple, sur la figure 4.6,  $a$  et  $b$  sont des prédécesseurs de  $d$  et  $e$  est un prédécesseur de  $g$ . Mais ces arcs ne disent rien de l'ordre entre  $e$  et  $h$ , l'ordre n'est pas total.

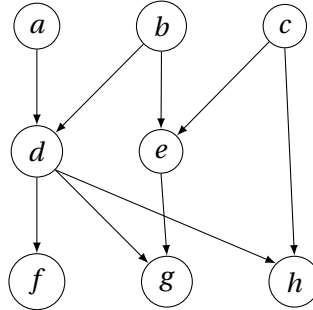


FIGURE 4.6 – Exemple de graphe orienté acyclique

**L'algorithme de tri topologique permet de créer un ordre total  $\leq$  sur un graphe orienté acyclique.** Formulé mathématiquement :

$$\forall (v, u) \in V^2, (v, u) \in E \implies v \leq u \quad (4.28)$$

Sur l'exemple de la figure 2.4, plusieurs ordre topologiques sont possibles. Par exemple :

- a,b,c,d,e,f,g,h
- a,b,d,f,c,h,e,g

## b Tri topologique et détection de cycles dans un graphe orienté

L'algorithme de tri topologique permet de construire un ordre dans un graphe orienté acyclique. C'est en fait un parcours en profondeur du graphe qui construit une pile en ajoutant le concept de date à chaque sommet : une date de début qui correspond au début du traitement du sommets et une date de fin qui correspond à la fin du traitement du sommet par l'algorithme. La pile contient à la fin les sommets dans un ordre topologique, les sommets par ordre de date de fin de traitement.

Au cours du parcours en profondeur, un sommet passe tout d'abord de l'ensemble des sommets non traités à l'ensemble des sommets en cours de traitement (date de début). Puis, lorsque la descente est finie (plus aucun arc ne sort du sommet courant), le sommet passe de l'ensemble en cours de traitement à l'ensemble des sommets traités (date de fin).

---

### Algorithme 13 Algorithme de tri topologique

---

```

1: Fonction TOPO_SORT( $G = (V, E)$ )
2:   pile  $\leftarrow$  une pile vide  $\triangleright$  Contiendra les sommets dans l'ordre topologique
3:   états  $\leftarrow$  un tableau des états des sommets  $\triangleright$  pas traité, en cours de traitement ou traité
4:   dates  $\leftarrow$  un tableau des dates associées aux sommets
5:   Les cases du tableau états sont initialisées à «pas traité»
6:   Les cases du tableau dates sont initialisées à max_int  $\triangleright$  Date inconnue représentée par max_int
7:   pour chaque sommet  $v$  de  $G$  répéter
8:     si  $v$  n'est pas traité alors
9:       TOPO_DFS( $G = (V, E)$ , pile, états, dates,  $v$ , 0)
10:  renvoyer (pile, dates)
11:
12: Fonction TOPO_DFS( $G = (V, E)$ , pile, états, dates,  $v$ , date)
13:  états[ $v$ ]  $\leftarrow$  «en cours de traitement»
14:  dates[ $v$ ]  $\leftarrow$  date  $\triangleright$  Au début de l'exploration la date de  $v$  vaut date
15:  pour chaque voisin  $u$  de  $v$  répéter
16:    si  $u$  n'est pas traité alors TOPO_DFS( $G = (V, E)$ , pile, états, dates,  $u$ , (date + 1))
17:  états[ $v$ ]  $\leftarrow$  «traité»
18:  dates[ $v$ ] + = 1  $\triangleright$  Pour distinguer le début de la fin de l'exploration
19:  EMPILER( $v$ , pile)

```

---

## F Composantes fortement connexes d'un graphe orienté et 2-SAT

■ **Définition 60** — **Composante fortement connexe d'un graphe orienté**  $G = (V, E)$ . Une composante fortement connexe d'un graphe orienté  $G$  est un sous-ensemble  $S$  de ses sommets, maximal au sens de l'inclusion, tel que pour tout couple de sommets  $(s, t) \in S$  il existe un chemin de  $s$  à  $t$  dans  $G$ .

Le calcul des composantes connexes d'un graphe est par exemple utilisé pour résoudre le problème 2-SAT. Dans le cadre de ce problème, on dispose d'une formule logique sous la forme conjonctive normale et chaque clause comporte deux variables. L'idée est de construire un graphe à partir de la formule de cette formule  $F$ . Supposons qu'elle soit constituée de  $m$  clauses et  $n$  variables  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ . On élabore alors un graphe  $G = (V, E)$  à  $2n$  sommets et  $2m$  arêtes. Les sommets représentent les  $n$  variables  $v_i$  ainsi que leur négation  $\neg v_i$ . Les arêtes sont construites de la manière suivante : on transforme chaque clause de  $F$  de la forme  $v_i \vee v_j$  en deux implications  $\neg v_1 \Rightarrow v_2$  ou  $\neg v_2 \Rightarrow v_1$ . Cette transformation utilise le fait que la formule  $a \Rightarrow b$  est équivalent à  $\neg a \vee b$ .

**Théorème 16**  $F$  n'est pas satisfaisable si et seulement s'il existe une composante fortement connexe contenant une variable  $v_i$  et sa négation  $\neg v_i$ .

*Démonstration.* ( $\Leftarrow$ ) S'il existe une composante fortement connexe contenant  $a$  et  $\neg a$ , alors cela signifie  $F : (a \Rightarrow \neg a) \wedge (\neg a \Rightarrow a)$ . Or cette formule n'est pas satisfaisable. En effet, si  $a$  est vrai alors  $(a \Rightarrow \neg a)$  est faux, car du vrai on ne peut pas conclure le faux d'après la définition sémantique de l'implication. De même, si  $a$  est faux alors  $(\neg a \Rightarrow a)$  est faux, pour la même raison. Dans tous les cas, la formule est fausse.  $F$  n'est pas satisfaisable.

( $\Rightarrow$ ), par contraposée. Supposons qu'il n'existe pas de composante fortement connexe contenant  $a$  et  $\neg a$ . Cela peut se traduire en la formule  $F : (a \Rightarrow \neg a) \vee (\neg a \Rightarrow a)$  : soit il n'existe aucun chemin de  $a$  à  $\neg a$ , soit il existe un chemin dans un seul sens, mais pas dans les deux. Cette formule  $F$  est toujours satisfaisable. En effet, si  $a$  est vrai, alors  $\neg a \Rightarrow a$  est vraie, car *ex falso quodlibet*, et donc  $F$  est vraie. Si  $a$  est faux, alors  $a \Rightarrow \neg a$  est vraie pour la même raison. Dans tous les cas,  $F$  est vraie. On peut également le montrer en remarquant que  $F$  s'écrit  $(a \vee \neg a) \vee (\neg a \vee a) = a \vee \neg a$ .  $F$  est donc satisfaisable. ■

On peut montrer que SAT-2 est un problème de décision polynomial. C'est une restriction à des clauses de deux variables du problème général SAT qui lui est NP-complet.

## G Graphes bipartis et couplage maximum

**Théorème 17 — Caractérisation des graphes bipartis.** Un graphe est biparti si et seulement s'il ne possède aucun cycle de longueur impair.

Pour savoir si un graphe est biparti on pourrait donc rechercher les cycles et évaluer leurs longueurs. Il existe cependant une autre approche. Un graphe biparti est un graphe bicolorable comme le montre la figure 2.6.

### a Couplage dans un graphe biparti

■ **Définition 61 — Couplage.** Un couplage  $\Gamma$  dans un graphe non orienté  $G = (V, E)$  est un

ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. Formellement :

$$\forall (e_1, e_2) \in E^2, e_1 \neq e_2 \implies e_1 \cap e_2 = \emptyset \quad (4.29)$$

c'est à dire que les sommets de  $e_1$  et  $e_2$  ne sont pas les mêmes.

■ **Définition 62 — Sommets couplés, sommets exposés.** Un sommet est couplé s'il fait parti d'une arête de  $\Gamma$ . Un sommet est exposé s'il ne fait pas parti des arêtes de  $\Gamma$ , c'est-à-dire il n'est pas couplé.

■ **Définition 63 — Couplage maximal.** Un couplage maximal est tel que si on lui ajoute une arête, ce n'est plus un couplage. Il est donc maximal au sens de l'inclusion.

■ **Définition 64 — Couplage de cardinal maximum.** Un couplage de cardinal maximum est un couplage contenant le plus grand nombre d'arêtes possible.

■ **Exemple 14 — Affectation des cadeaux sous le sapin .** Au pied du sapin de Noël, un papa a disposé six cadeaux dont les paquets sont tous différents et numérotés de 0 à 5 <sup>a</sup>. Il a décidé que les cadeaux seraient répartis en fonction des paquets que les enfants préfèrent.

Ses cinq enfants expriment donc leurs préférences. Le papa pourra-t-il affecter un cadeau à chaque enfant et faire en sorte que ce cadeau soit un de leurs préférés?

Évidemment la réponse à cette question dépend des préférences émises par les enfants. Supposons qu'ils se soient exprimés ainsi :

**Alix** 0,2

**Brieuc** 1,3,4,5

**Céline** 1,2

**Dimitri** 0,1,2

**Enora** 2

On peut représenter par un graphe biparti cette situation comme sur la figure 4.7. Dans ce cas précis, comme il y a quatre enfants qui ne veulent que trois les trois premiers cadeaux, il n'y a pas de solution. Mais si Enora avait choisit 4 et 5???

<sup>a</sup>. Ce papa est informaticien!

**(R)** Si les arêtes du graphe sont valuées (graphe pondéré), alors la recherche d'un couplage de cardinal maximum et de poids minimum dans un graphe biparti est en fait le problème de l'**affectation des ressources**. Ceci n'est pas au programme.

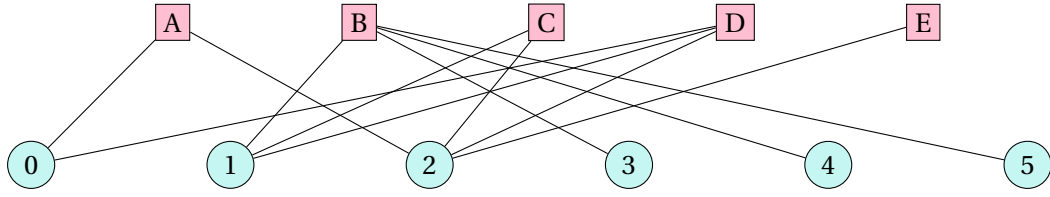


FIGURE 4.7 – Exemple de graphe biparti pour un problème d'affectation sans solution.

## b Chemin augmentant

Pour résoudre le problème de trouver un couplage de cardinal maximum, on peut procéder en suivant l'algorithme 14. Il s'agit de construire un chemin augmentant pour atteindre un couplage de cardinal maximum.

■ **Définition 65 — Chemin alternant.** Un chemin alternant dans un graphe non orienté  $G$  et pour un couplage  $\Gamma$  est tel que les arêtes appartiennent successivement à  $\Gamma$  et  $E \setminus \Gamma$ .

■ **Définition 66 — Chemin augmentant.** Un chemin augmentant est un chemin alternant dont les extrémités sont des sommets exposés, c'est-à-dire qui n'appartiennent pas au couplage  $\Gamma$ .

La stratégie de l'algorithme de recherche d'un couplage de cardinal maximum est la suivante : à partir d'un couplage  $\Gamma$ , on construit un nouveau couplage de cardinal supérieur à l'aide d'un chemin augmentant comme le montre la figure 4.8.

Dans un graphe **biparti**, il est facile d'augmenter la taille d'un couplage jusqu'au cardinal maximum :

1. s'il existe deux sommets exposés reliés par une arête, il suffit d'ajouter cette arête au couplage. Puis, on appelle récursivement l'algorithme sur ce nouveau couplage.
2. sinon il faut trouver un chemin augmentant  $\pi$  dans le graphe.
  - (a) s'il n'y en a pas, l'algorithme est terminé.
  - (b) sinon on effectue la différence symétrique entre le couplage  $\Gamma$  et l'ensemble des arêtes du chemin augmentant  $\pi$  pour obtenir le nouveau couplage :  $\Gamma \oplus \pi = \{e \in E, e \in \Gamma \setminus \pi \cup e \in \pi \setminus \Gamma\}$ . Puis, on appelle récursivement l'algorithme avec ce nouveau couplage.

Il faut noter que le cardinal du couplage n'augmente pas nécessairement lorsqu'on effectue la différence symétrique mais il ne diminue pas.

Pour trouver un chemin augmentant dans un graphe biparti  $G = ((U, D), E)$ , on cherche le plus court chemin entre deux sommets exposés dans un graphe orienté auxiliaire  $G_o$  construit de la manière suivante :

1. toutes les arêtes de  $E$  qui n'appartiennent pas au couplage  $\Gamma$  sont orientées de  $U$  vers  $D$ .
2. toutes les arêtes de  $\Gamma$  sont orientées de  $D$  vers  $U$ .

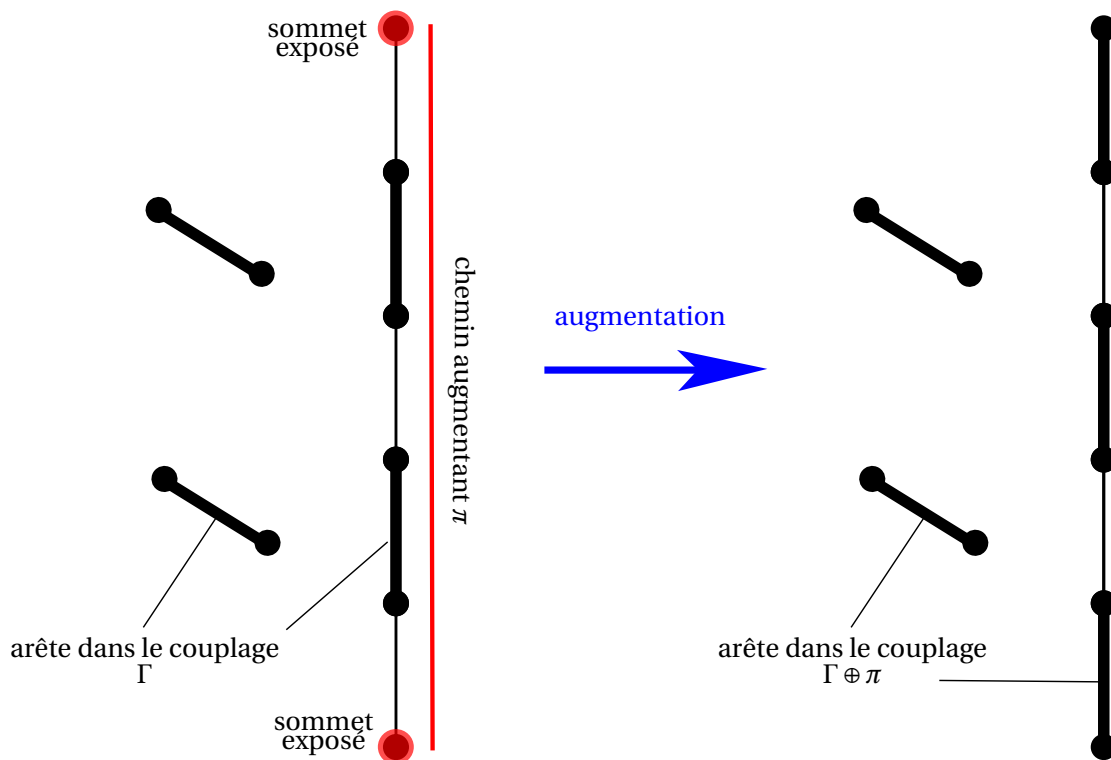
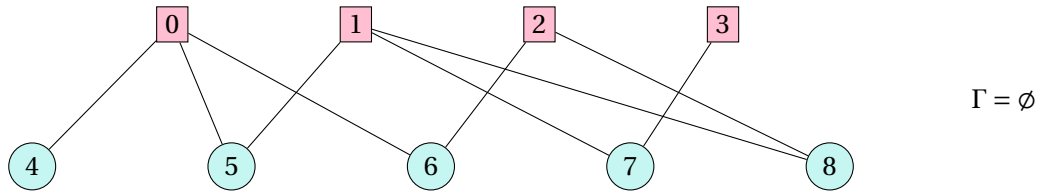


FIGURE 4.8 – Illustration de la construction d'un couplage de cardinal supérieur grâce à un chemin augmentant. (Source originale : Wikimedia Commons)

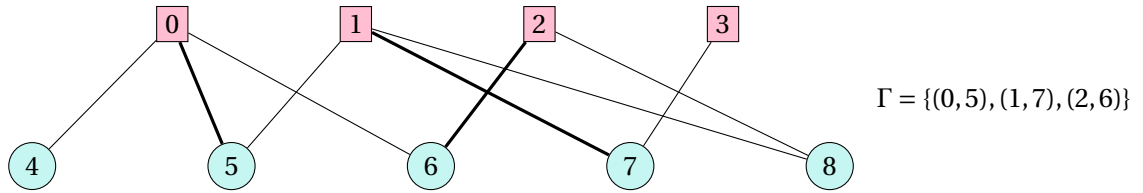
Le plus court chemin entre deux sommets exposés de  $G_o$  est nécessairement un chemin augmentant, son caractère alternant vient du fait que le graphe est biparti.

La figure 4.9 illustre les différentes étapes de l'algorithme. On vérifie bien que le résultat est correct : chaque enfant aura bien un cadeau qu'il avait mis sur sa liste.

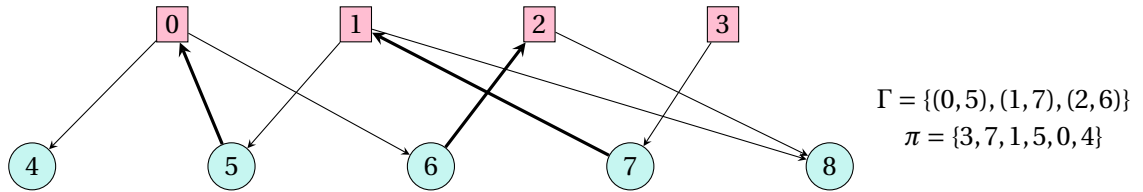
Le graphe de départ de l'algorithme est le suivant :



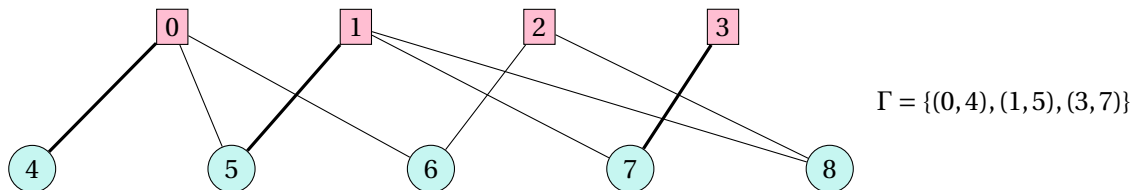
On effectue **trois appels récursifs** et, à chaque fois, on a trouvé une arête dont les sommets sont tous les deux exposés.



À ce stade de l'algorithme, aucun sommet exposé n'est relié par une arête à un autre sommet exposé. Donc, on construit le graphe  $G_o$  d'après le couplage  $\Gamma$ . On trouve le chemin le plus court entre les deux premiers sommets exposés 3 et 4 :  $\pi$ .



On en déduit un nouveau couplage  $\Gamma = \Gamma \oplus \pi$  :



On effectue **un appel récursif** et on trouve une arête dont les sommets sont tous les deux exposés : (2,6). On effectue un dernier appel récursif et l'algorithme se termine car un seul sommet est non couplé.

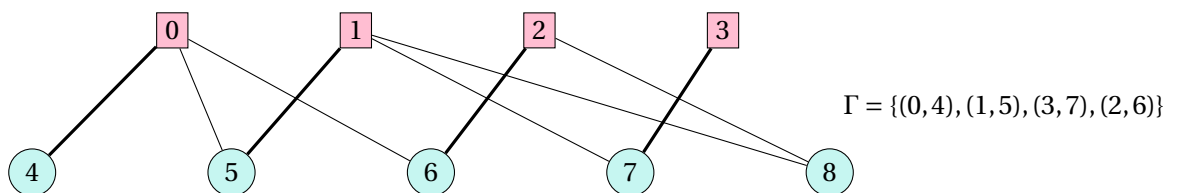


FIGURE 4.9 – Étapes de l'algorithme de recherche d'un couplage de cardinal maximum



---

**Algorithme 14** Recherche d'un couplage de cardinal maximum

---

**Entrée :** un graphe biparti  $G = ((U, D), E)$ **Entrée :** un couplage  $\Gamma$  initialement vide**Entrée :**  $F_U$ , l'ensemble de sommets exposés de  $U$  initialement  $U$ **Entrée :**  $F_D$ , l'ensemble de sommets exposés de  $D$  initialement  $D$ 

```

1: Fonction CHEMIN_AUGMENTANT( $G = (V = (U, D), E), \Gamma, F_U, F_D$ )  $\triangleright M$  est le couplage, vide
   initialement
2:   si une arête  $e = (u, v)$  entre un sommet de  $F_U$  et un sommet de  $F_D$  existe alors
3:     CHEMIN_AUGMENTANT( $G, \Gamma \cup \{e\}, F_U \setminus \{u\}, F_D \setminus \{v\}$ )
4:   sinon
5:     Créer le graphe orienté  $G_o$   $\triangleright \forall e \in E, e$  de  $U$  vers  $D$  si  $e \notin \Gamma$ , l'inverse sinon
6:     Calculer le plus court chemin  $\pi$  entre un sommet de  $F_U$  et un de  $F_D$  dans  $G_o$ 
7:     si un tel chemin  $\pi$  n'existe pas alors
8:       renvoyer  $M$ 
9:     sinon
10:      CHEMIN_AUGMENTANT( $G, \Gamma \oplus \pi, F_U \setminus \{\pi_{start}\}, F_D \setminus \{\pi_{end}\}$ )
11:       $\triangleright \pi_{start}$  début du chemin  $\pi, \pi_{end}$  fin du chemin  $\pi$  et
       $\Gamma \oplus \pi = \{e \in E, e \in \Gamma \setminus \pi \cup e \in \pi \setminus \Gamma\}$ 

```

---



## DES ARBRES AUX TAS

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ définir un tas-min et un tas-max
- ☞ expliquer l'algorithme du tri par tas
- ☞ utiliser un tas pour créer une file de priorité
- ☞ appliquer les files de priorités à l'algorithme de Dijkstra

### A Des arbres

■ **Définition 67 — Arbre.** Un arbre est un graphe connexe, acyclique et enraciné.

Ⓡ La racine d'un arbre  $\mathcal{A}$  est un sommet  $r$  particulier que l'on distingue : le couple  $(\mathcal{A}, r)$  est un nommé arbre enraciné. On le représente un tel arbre verticalement avec la racine placée tout en haut comme sur la figure 5.1. Dans le cas d'un graphe orienté, la représentation verticale permet d'omettre les flèches.

Ⓡ On confondra par la suite les arbres enracinés et les arbres.

■ **Définition 68 — Nœuds.** Les nœuds d'un arbre sont les sommets du graphe associé. Un nœud qui n'a pas de fils est une feuille (ou nœud externe). S'il possède des descendants, on parle alors de nœud interne.

■ **Définition 69 — Descendants, père et fils.** Si une arête mène du nœud  $i$  au nœud  $j$ , on dit que  $i$  est le **père** de  $j$  et que  $j$  est le **fils** de  $i$ . On représente l'arbre de telle sorte que le père soit toujours au-dessus de ses fils.

■ **Définition 70 — Arité d'un nœud.** L'arité d'un nœud est le nombre de ses fils.

■ **Définition 71 — Feuille.** Un nœud d'arité nulle est appelé une feuille.

■ **Définition 72 — Profondeur d'un nœud.** La profondeur d'un nœud est le nombre d'arêtes qui le sépare de la racine.

■ **Définition 73 — Hauteur d'un arbre.** La hauteur d'un arbre est la plus grande profondeur d'une feuille de l'arbre.

■ **Définition 74 — Taille d'un arbre.** La taille d'un arbre est le nombre de ses nœuds.

**(R)** Attention, la taille d'un graphe est le nombre de ses arêtes... Un arbre possède toujours  $n - 1$  arêtes si sa taille est  $n$ .

■ **Définition 75 — Sous-arbre.** Chaque nœud d'un arbre  $\mathcal{A}$  est la racine d'un arbre constitué de lui-même et de ses descendants : cette structure est appelée sous-arbre de l'arbre  $\mathcal{A}$ .

**(R)** La notion de sous-arbre montre qu'un arbre est une structure intrinsèquement récursive ce qui sera largement utilisé par la suite!

■ **Définition 76 — Arbre recouvrant.** Un arbre recouvrant d'un graphe  $G$  est un sous-graphe couvrant de  $G$  qui est un arbre.

ä

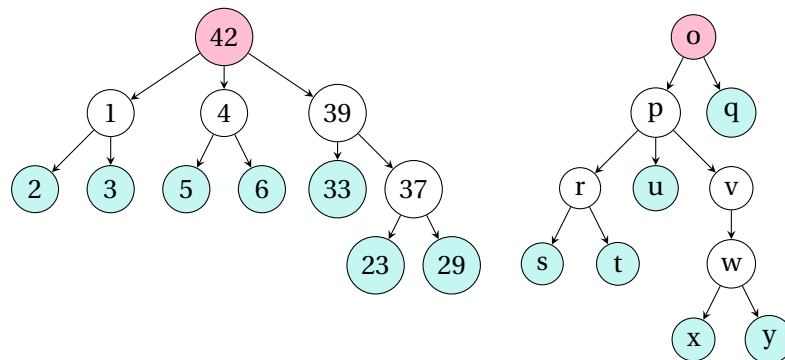


FIGURE 5.1 – Exemples d'arbres enracinés. Les racines des arbres sont en rouge, les feuilles en turquoise. Le tout forme une forêt.

## B Arbres binaires

■ **Définition 77 — Arbre binaire.** Un arbre binaire est un arbre tels que tous les nœuds ont une arité inférieure ou égale à deux : chaque nœud possède au plus deux fils.

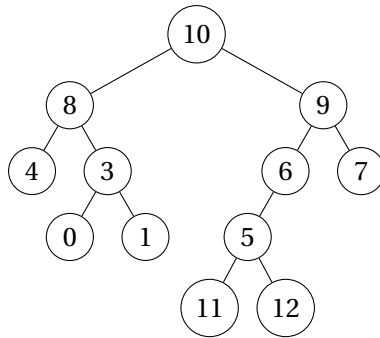


FIGURE 5.2 – Arbre binaire

■ **Définition 78 — Arbre binaire strict.** Un arbre binaire strict est un arbre dont tous les nœuds possèdent zéro ou deux fils.

■ **Définition 79 — Arbre binaire parfait.** Un arbre binaire parfait est un arbre dans lequel tous les niveaux sauf le dernier doivent être totalement remplis. Si le dernier n'est pas rempli totalement alors il doit être rempli de gauche à droite.

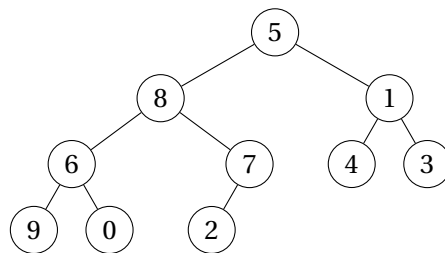


FIGURE 5.3 – Arbre binaire parfait

■ **Définition 80 — Arbre binaire équilibré.** Un arbre binaire est équilibré si sa hauteur est minimale, c'est à dire  $h(a) = O(\log|a|)$ .

**R** Un arbre parfait est un arbre équilibré.

**Théorème 18 — La hauteur d'un arbre parfait de taille  $n$  vaut  $\lfloor \log n \rfloor$ .** Soit  $a$  un arbre binaire parfait de taille  $n$ . Alors on a :

$$h(a) = \lfloor \log n \rfloor \quad (5.1)$$

*Démonstration.* Soit  $a$  un arbre binaire parfait de taille  $n$ . Comme  $a$  est parfait, on sait que tous les niveaux sauf le dernier sont remplis. Ainsi, il existe deux niveaux de profondeur  $h(a) - 1$  et  $h(a)$ . On peut encadrer le nombre de nœuds de  $a$  en remarquant que chaque niveau  $k$  possède  $2^k$  nœuds, sauf le dernier. On a donc :

$$1 + 2 + \dots + 2^{h(a)-1} < |a| \leq 1 + 2 + \dots + 2^{h(a)} \quad (5.2)$$

$$\sum_{k=0}^{h(a)-1} 2^k < |a| \leq \sum_{k=0}^{h(a)} 2^k \quad (5.3)$$

$$2^{h(a)} - 1 < |a| \leq 2^{h(a)+1} - 1 \quad (5.4)$$

$$2^{h(a)} \leq |a| < 2^{h(a)+1} \quad (5.5)$$

On en conclut que  $\lfloor \log_2 |a| \rfloor - 1 < h(a) \leq \lfloor \log_2 |a| \rfloor$  et donc que  $h(a) = \lfloor \log_2(n) \rfloor$ . ■

## C Induction et arbre binaire

La plupart des caractéristiques et des résultats importants liés aux arbres binaires peuvent se démontrer par induction structurelle. Cette méthode est une généralisation des démonstrations par récurrences sur  $\mathbb{N}$  pour un ensemble défini par induction.

■ **Définition 81 — Étiquette d'un nœud.** Une étiquette d'un nœud est une information portée au niveau d'un nœud.

■ **Définition 82 — Définition inductive d'un arbre binaire.** Soit  $E$  un ensemble d'étiquettes. L'ensemble  $\mathcal{A}_E$  des arbres binaires étiquetés par  $E$  est défini inductivement par :

1. NIL est un arbre binaire appelé arbre vide (parfois noté  $\circ$ ),
2. Si  $e \in E$ ,  $f_g \in \mathcal{A}$  et  $f_d \in \mathcal{A}$  sont deux arbres binaires, alors  $(f_g, e, f_d) \in \mathcal{A}_E$ , c'est à dire que le triplet  $(f_g, e, f_d)$  est un arbre binaire étiqueté par  $E$ .

$f_g$  et  $f_d$  sont respectivement appelés fils gauche et fils droit.

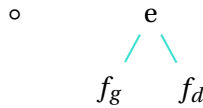


FIGURE 5.4 – Arbre binaire et définition inductive : arbre vide à gauche, arbre induit par  $e$ ,  $f_g$  et  $f_d$  à droite

■ **Définition 83 — Démonstration par induction structurelle sur un arbre binaire.** Soit  $\mathcal{P}(a)$  un prédicat exprimant une propriété sur un arbre  $a$  de  $\mathcal{A}_E$ , l'ensemble des arbres binaires étiquetés sur un ensemble  $E$ . On souhaite démontrer cette propriété.

La démonstration par induction structurelle procède comme suit :

1. (**CAS DE BASE**) Montrer que  $\mathcal{P}(\text{NIL})$  est vraie, c'est-à-dire que la propriété est vraie pour l'arbre vide,
2. (**PAS D'INDUCTION**) Soit  $e \in E$  une étiquette et  $f_g \in \mathcal{A}$  et  $f_d \in \mathcal{A}$  deux arbres binaires pour lesquels  $\mathcal{P}(f_g)$  et  $\mathcal{P}(f_d)$  sont vraies. Montrer que  $\mathcal{P}((f_g, e, f_d))$  est vraie.
3. (**CONCLUSION**) Conclure que quelque soit  $a \in \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{P}(a)$  est vraie.

■ **Définition 84 — Définition inductive d'une fonction à valeur dans  $\mathcal{A}_E$ .** On définit une fonction  $\phi$  de  $\mathcal{A}_E$  à valeur dans un ensemble  $\mathcal{Y}$  par :

1. la donnée de la valeur de  $\phi(\text{NIL})$ ,
2. en supposant connaître  $e \in E$ ,  $\phi(f_g)$  et  $\phi(f_d)$  pour  $f_g$  et  $f_d$  dans  $\mathcal{A}_E$ , la définition de  $\phi((f_g, e, f_d))$ .

■ **Exemple 15 — Définition inductive de la hauteur d'un arbre.** Soit  $a \in \mathcal{A}$  un arbre binaire. La hauteur  $h(a)$  de  $a$  est donnée par :

1.  $h(\text{NIL}) = 0$ ,
2.  $h((f_g, e, f_d)) = 1 + \max(h(f_g), h(f_d))$ .

■ **Exemple 16 — Définition inductive de la taille d'un arbre.** Soit  $a \in \mathcal{A}$  un arbre binaire. La taille  $|a|$  de  $a$  est donnée par :

1.  $|\text{NIL}| = 0$ ,
2.  $|(f_g, e, f_d)| = 1 + |f_g| + |f_d|$ .

## D Tas binaires

### a Définition

■ **Définition 85 — Tas max et tas min.** On appelle tas max (resp. tas min) un arbre binaire parfait étiqueté par un ensemble ordonné  $E$  tel que l'étiquette de chaque nœud soit inférieure (resp. supérieure) ou égale à l'étiquette de son père. La racine est ainsi la valeur maximale (resp. minimale) du tas.

### b Implémentation

On peut naturellement implémenter un tas par un type a' arbre mais également par un tableau Array en numérotant les nœuds selon la numérotation Sosa-Stradonitz (cf. figure 5.7).



FIGURE 5.5 – Tas max



FIGURE 5.6 – Tas min

**R** Un tas implémenté par un tableau est une structure de taille donnée, fixée dès la construction du tas : on ne pourra donc pas représenter tous les tas, uniquement ceux qui pourront s’inscrire dans le tableau. Par ailleurs, pour construire cette structure et la préserver lors de l’exécution d’algorithmes, il est important que l’on puisse faire évoluer les éléments à l’intérieur du tas. C’est pourquoi cette structure de donnée doit être muable.

■ **Définition 86 — Numérotation Sosa-Stradonitz d’un arbre binaire.** Cette numérotation utilise les puissances de deux pour identifier les nœuds d’un arbre binaire. La racine se voit attribuer la puissance 0. Le premier élément de chaque niveau  $k$  de la hiérarchie possède l’indice  $2^k$ . Ainsi, sur le troisième niveau d’un arbre binaire, on trouvera les numéros 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 et 15. Cette numérotation est utilisée dans le domaine de la généalogie.

**R** Comme les langages de programmation comptent à partir de 0, on choisit souvent la convention de positionner la racine dans la case d’indice 0 et décaler ensuite tous les indices de 1.

### c Opérations

On s’intéresse à la construction et à l’évolution d’un tas au cours du temps : comment préserver la structure de tas lorsqu’on ajoute ou retire un élément ?

On définit des opérations descendre et faire monter un élément dans un tas qui préservent la structure du tas. Ce sont des opérations dans un tas sont des opérations dont la complexité





FIGURE 5.7 – Implémentation d'un tas min par un tableau selon les indices de la numérotation Sosa-Stradonitz. On vérifie que les fils du nœud à l'indice  $k$  se trouvent à l'indice  $2k$  et  $2k + 1$

est  $O(h(a)) = O(\log n)$ .

#### Faire monter un élément dans le tas

Cette opération est expliquée sur la figure 5.8.



FIGURE 5.8 – Tas min : à gauche, l'élément 3 doit monter dans le tas min. À droite, on a échangé les places de 3 avec les pères jusqu'à ce que la structure soit conforme à un tas min

#### Faire descendre un élément dans le tas

Faire descendre dans le tas se dit aussi tamiser le tas et est expliqué sur la figure 5.9.

#### Construire un tas

On peut imaginer construire un tas en faisant monter les éléments ou en faisant descendre les éléments au fur et à mesure. Ces deux méthodes ne présentent pas la même complexité.

Si l'on procède en faisant monter les éléments, on considère que la racine est un tas à un élément et on intègre les éléments restant du tableau dans ce tas en les faisant monter. Dans



FIGURE 5.9 – Tas min : à gauche, l'élément 3 doit descendre dans le tas min. À droite, on a échangé la place de 3 avec le fils le plus petit pour que la structure soit conforme à un tas min

le pire des cas, on doit faire monter les  $n - 1$  nœuds depuis le niveau de profondeur maximale (hauteur de l'arbre) jusqu'à la racine et donc répéter l'opération monter (de complexité  $\log n$ ). C'est pourquoi cette méthode présente une complexité en  $O(n \log n)$ .

La seconde méthode considère que chaque feuille est un tas à un élément. On fait descendre les  $\lfloor n/2 \rfloor$  premiers éléments à partir du  $\lfloor n/2 \rfloor^e$  dans les tas. Au fur et à mesure, on réunit ces tas en un plus gros tas. Dans le pire des cas, on peut montrer que cette méthode est linéaire en  $O(n)$ . En effet, un élément  $i$  est à la hauteur  $\lfloor \log_2 i \rfloor$  et il descend au maximum de  $h - \lfloor \log_2 i \rfloor$  pour trouver sa place. Il est donc plus efficace de faire descendre les éléments pour créer un tas.

**R** Dans un tas de taille  $n$ , la première feuille se situe à l'indice  $n/2$ .

## E Tri par tas binaire

■ **Définition 87 — Tri par tas.** Le tri par tas procède en formant d'un tas à partir du tableau à trier. Pour un tri ascendant, on utilise un tas-max et pour un tri descendant un tas-min.

On peut considérer que cette méthode est une amélioration du tri par sélection : la structure de tas permet d'éviter la recherche de l'élément à sélectionner.

Le tri par tas est un tri comparatif en place et non stable. Sa complexité dans le pire des cas est en  $O(n \log n)$  car il nécessite au pire de descendre les  $n$  éléments au niveaux des feuilles dans le tas.

 **Vocabulary 7 — Heap sort**  $\longleftrightarrow$  Tri par tas

L'algorithme 15 fait appel à un tas-max et son implémentation est radicalement simple, tout le cœur du mécanisme de tri reposant sur la structure de tas.

**Algorithme 15** Tri par tas, ascendant

---

```

1: Fonction TRI_PAR_TAS( $t$ )
2:    $n \leftarrow$  nombre d'éléments de  $t$ 
3:   Faire un tas-max de  $t$ 
4:   pour  $k$  de  $n - 1$  à  $0$  répéter
5:     Échanger  $t[0]$  et  $t[k]$                                 ▷ Le plus grand va à la fin
6:     Faire descendre  $t[0]$  dans le tas  $t[:k]$                 ▷ Le nouvel élément descend
7:   renvoyer  $t$ 

```

---

**F File de priorités implémentée par un tas**

Une autre application des tas binaires est l'implémentation d'une file à priorités.

■ **Définition 88 — TAD File de priorités.** Une file de priorités est une extension du TAD file dont les éléments sont à valeur dans un ensemble  $E = (V, P)$  où  $P$  est un ensemble totalement ordonné. Les éléments de la file sont donc des couples valeur - priorité.

Les opérations sur une file de priorités sont :

1. créer une file vide,
2. insérer dans la file une valeur associée à une priorité (ENFILER),
3. sortir de la file la valeur associée la priorité maximale (ou minimale) (DÉFILER).

L'utilisation d'un tas permet d'obtenir une complexité en  $O(\log n)$  pour les opérations DÉFILER et ENFILER d'une file de priorités. Pour des algorithmes comme celui du plus court chemin de Dijkstra, c'est une solution intéressante pour améliorer les performances de l'algorithme.



**Quatrième partie**

**Langages et automates**



## INTRODUCTION AUX LANGAGES

---

### À la fin de ce chapitre, je sais :

- ✎ définir les concepts d'alphabet, de mot, de mot vide et de langage
- ✎ expliquer les concepts de suffixe, de préfixe, de facteur et de sous-mot
- ✎ expliquer le résultat du lemme de Levi

L'informatique est la construction de l'information par le calcul. Force est de constater que le seul outil conceptuel, universel et pratique pour construire et manipuler l'information est le langage : un langage est un moyen de communiquer, stocker et transformer de l'information. Le calcul de l'information par un ordinateur au moyen d'un ou plusieurs langages peut créer un sens ou pas, tout comme l'interprétation d'un texte par un humain.

C'est pourquoi la théorie des langages est un des principaux fondements de l'informatique. Qui dit langage dit alphabet, mots, préfixes, suffixes mais aussi ensembles de mots, agrégation de mots... Comment définir clairement ces concepts afin de pouvoir les calculer ? C'est la question qui guide ce chapitre.

## A Alphabets

- **Définition 89 — Ensemble.** Un ensemble est une collection de concepts qu'on appelle éléments. L'ensemble vide est noté  $\emptyset$ .
- **Définition 90 — Cardinal d'un ensemble fini.** Le cardinal d'un ensemble fini  $E$  est son nombre d'éléments. On le note  $|E|$ .
- **Définition 91 — Alphabet.** Un alphabet est un ensemble  $\Sigma$  de lettres (ou symboles) non vide.

■ **Définition 92 — Longueur d'un alphabet.** La longueur d'un alphabet est le nombre de lettres de celui-ci, c'est-à-dire  $|\Sigma|$ .

■ **Exemple 17 — Alphabet latin commun.** L'alphabet latin commun

$$\Sigma = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, X, Y, Z\}$$

a une longueur de 26.

■ **Exemple 18 — Hexasidécimal.** L'alphabet hexasidécimal

$$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$$

a une longueur de 16.

■ **Exemple 19 — ASCII.** L'alphabet ASCII est constitué des nombres entiers de 0 à 127 et représente les caractères nécessaires à l'écriture de l'américain, y compris les caractères de contrôle nécessaires à la pagination. Il possède une longueur de 128.

## B Mots

Un mot d'un alphabet  $\Sigma$  est une séquence de lettres de  $\Sigma$ . Un mot peut être une séquence vide notée  $\epsilon$ , car  $\emptyset \subset \Sigma$  par définition d'un ensemble. On peut donner plusieurs définition d'un mot.

■ **Définition 93 — Mot (comme application).** Un mot de longueur  $n \in \mathbb{N}^*$  est une application de  $\llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \Sigma$ . À chaque position dans le mot correspond une lettre de l'alphabet.

■ **Définition 94 — Mot vide  $\epsilon$ .** Le mot vide  $\epsilon$  est l'application de l'ensemble vide dans  $\Sigma$ .

(R) Le mot vide  $\epsilon$  est un mot ne comportant aucun symbole. Dans le contexte des mots, le mot vide est l'élément neutre de la concaténation de mots. On peut comparer son rôle au 1 pour la multiplication des entiers naturels  $\mathbb{N}$ .

■ **Définition 95 — Longueur d'un mot.** La longueur d'un mot  $w$  est le nombre de lettres qui composent sa séquence. On note souvent cette longueur  $|w|$ .

■ **Définition 96 — Ensemble de mots possibles.** On note  $\Sigma^*$  l'ensemble des mots possibles créés à partir d'un alphabet  $\Sigma$ .

■ **Définition 97 — Ensemble de mots de longueur  $n$ .** On note  $\Sigma^n$  l'ensemble de tous les mots de longueur  $n$  créés à partir d'un alphabet  $\Sigma$ .



■ **Définition 98 — Concaténation de mots.** Soit  $v, w \in \Sigma^*$ . On appelle concaténation de  $v$  et  $w$  l'opération  $\circ$  notée  $vw = v \circ w$  qui est obtenue par agrégation du mot  $w$  à la suite du mot  $v$ .

(R) Dans les notations suivantes, on omettra d'écrire le symbole  $\circ$  entre les éléments, la concaténation étant juste une agrégation de symboles.

**Théorème 19 — La concaténation est une loi de composition interne sur un ensemble  $\Sigma^*$  et  $\epsilon$  en est l'élément neutre. .**

*Démonstration.* Soit  $v, w \in \Sigma^*$ . On observe que  $vw \in \Sigma^*$ . Donc c'est une application de  $\Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ . De plus, on peut observer que  $v\epsilon = \epsilon v = v$ . Donc  $\epsilon$  est l'élément neutre de cette loi. ■

■ **Définition 99 — Monoïde.** Un ensemble  $E$  muni d'une loi de composition interne associative et d'un élément neutre  $e$  est nommée monoïde  $(E, \star)$ .

(R) On peut facilement montrer que la concaténation de mots est une loi de composition interne associative. C'est pourquoi,  $(\Sigma^*, \circ)$  est un **monoïde**.

Il faut bien remarquer cependant qu'il n'existe pas a priori de concept d'inverse dans un monoïde, c'est-à-dire il **n'existe pas** de mots  $v$  et  $w$  tels que  $vw = \epsilon$ .

Toutefois, on peut simplifier par la gauche ou la droite :

$$vw = vx \implies w = x \quad (6.1)$$

$$wv = xv \implies w = x \quad (6.2)$$

(R) La longueur d'un mot est un morphisme de monoïde car  $|vw| = |v| + |w|$ .

■ **Définition 100 — Ensemble de mots non vides.** On note  $\Sigma^+$  l'ensemble des mots non vides créés à partir d'un alphabet  $\Sigma$ . C'est le plus petit ensemble tel que :

$$\forall a \in \Sigma, a \in \Sigma^+ \quad (6.3)$$

$$\forall w \in \Sigma^+, \forall a \in \Sigma, wa \in \Sigma^+ \quad (6.4)$$

On a  $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\epsilon\}$ .

## C Mots définis inductivement

■ **Définition 101 — Mot (inductivement par la droite).** Soit  $\Sigma$  un alphabet. Alors on définit un mot de manière inductive par la droite ainsi :

**Base**  $\epsilon$  est un mot sur  $\Sigma$ ,

**Règle de construction** si  $w$  est un mot sur  $\Sigma$  et  $a$  une lettre de  $\Sigma$ , alors  $w.a$  est un mot sur  $\Sigma$ .  
où l'opération  $.$  est l'ajout d'une lettre à droite à un mot.

■ **Définition 102 — Mot (inductivement par la gauche)).** Soit  $\Sigma$  un alphabet. Alors on définit un mot de manière inductive par la droite ainsi :

**Base**  $\epsilon$  est un mot sur  $\Sigma$ ,

**Règle de construction** si  $w$  est un mot sur  $\Sigma$  et  $a$  une lettre de  $\Sigma$ , alors  $a.w$  est un mot sur  $\Sigma$ .

où l'opération  $.$  est l'ajout d'une lettre à gauche à un mot.

■ **Définition 103 — Concaténation de mots (définie inductivement sur la première opérande).** On définit l'opérateur concaténation de mots  $\circ$  par

$$\forall w \in \Sigma^*, \epsilon \circ w = w \text{ (Base)} \quad (6.5)$$

$$\forall v, w \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma, (a.v) \circ w = a.(v \circ w) \text{ (Règle de construction)} \quad (6.6)$$

où l'opération  $.$  est l'ajout d'une lettre à gauche à un mot.

■ **Définition 104 — Concaténation de mots (définie inductivement sur la seconde opérande).** On définit l'opérateur concaténation de mots  $\circ$  par

$$\forall w \in \Sigma^*, w \circ \epsilon = w \quad (6.7)$$

$$\forall v, w \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma, v \circ (w.a) = (v \circ w).a \quad (6.8)$$

où l'opération  $.$  est l'ajout d'une lettre à droite à un mot.

**Théorème 20 —  $\epsilon$  est l'élément neutre de la concaténation.**

*Démonstration.* on procède par induction sur la première opérande.

- Cas de base : pour  $w = \epsilon$ , on a  $\epsilon \circ \epsilon = \epsilon$ .
- Pas d'induction : soit  $w \in \Sigma^*$ . On suppose que  $\epsilon$  est l'élément neutre pour ce mot :  $w \circ \epsilon = \epsilon \circ w = w$ . Considérons maintenant un élément  $a$  de l'alphabet  $\Sigma$  pour créer un mot plus long à partir de  $w$ . Par construction on a :

$$(a.w) \circ \epsilon = a.(w \circ \epsilon)$$

En utilisant l'hypothèse d'induction, on en déduit que  $(a.w) \circ \epsilon = a.w$ .

$\epsilon$  est donc toujours l'élément neutre. On procède de même avec la définition sur la deuxième opérande.

■

**(R)** Une conséquence de ces définitions est qu'on peut confondre les opérateurs  $.$  et  $\circ$  dans les notations. C'est ce qui est fait dans la suite de ce cours. On omettra également souvent l'opérateur lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïtés.

■ **Définition 105 — Puissances d'un mot.** Les puissances d'un mot sont définies inductivement :

$$w^0 = \epsilon \quad (6.9)$$

$$w^n = ww^{n-1} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \quad (6.10)$$

## D Langages

■ **Définition 106 — Langage.** Un langage sur un alphabet  $\Sigma$  est un ensemble de mots sur  $\Sigma$ .

**(R)** Un langage peut être vide, on le note alors  $\mathcal{L} = \emptyset$ , son cardinal est nul. C'est l'élément neutre de l'union des langages et l'élément absorbant de la concaténation de langages<sup>a</sup>. Il ne faut pas confondre ce langage vide avec le langage qui ne contient que le mot vide  $\mathcal{L} = \{\epsilon\}$  dont le cardinal vaut un et qui est l'élément neutre de la concaténation des langages.

<sup>a</sup>. comme le zéro pour l'addition et la multiplication des entiers

**(R)**  $\Sigma^*$ , l'ensemble de tous les mots sur  $\Sigma$ , est également appelé langage universel.

■ **Exemple 20 — Langages courants et concrets.** Voici quelques exemples de langages concrets utilisés couramment :

- le langage des dates : une expression est-elle une date ? Par exemple, les dates 21/11/1943 et 11/21/43 sont-elles admissibles ?
- le langage des emails : utilisé pour détecter la conformité ou les erreurs dans les adresses emails,
- les protocoles réseaux : par exemple le protocole DHCP.

■ **Exemple 21 — Langage des mots de longueur paire.** Soit l'ensemble  $E$  de mots sur l'alphabet  $\Sigma$  de longueur paire. On peut définir ce langage en compréhension comme suit :

$$E = \{w \in \Sigma^*, |w| = 0 \bmod 2\}$$

■ **Exemple 22 — Langage des puissances  $n$  d'un alphabet.** Soit l'ensemble  $E$  de mots sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$  qui comportent autant de  $a$  que de  $b$ . On peut définir ce langage en

compréhension comme suit :

$$E = \{w \in \Sigma^*, \exists n \in \mathbb{N}, w \text{ est une permutation de } (a^n b^n)\}$$

Un langage est un ensemble. On peut donc définir les opérations ensemblistes sur les langages.

Soit deux langages  $\mathcal{L}_1$  sur  $\Sigma_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sur  $\Sigma_2$ .

■ **Définition 107 — Union de deux langages.** L'union de  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  est le langage défini sur  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  contenant tous les mots de  $\mathcal{L}_1$  et de  $\mathcal{L}_2$ .

$$\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \{w, w \in \mathcal{L}_1 \text{ ou } w \in \mathcal{L}_2\} \quad (6.11)$$

■ **Définition 108 — Intersection de deux langages.** L'intersection de  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  est le langage défini sur  $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$  contenant tous les mots à la fois présents dans  $\mathcal{L}_1$  et dans  $\mathcal{L}_2$ .

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{w, w \in \mathcal{L}_1 \text{ et } w \in \mathcal{L}_2\} \quad (6.12)$$

■ **Définition 109 — Complémentaire d'un langage.** Le complémentaire d'un langage  $\mathcal{L}$  est le langage défini sur  $\Sigma$  qui contient tous les mots non qui ne sont pas dans  $\mathcal{L}$ .

$$C(\mathcal{L}) = \overline{\mathcal{L}} = \{w, w \in \Sigma^* \text{ et } w \notin \mathcal{L}\} \quad (6.13)$$

■ **Définition 110 — Différence de deux langages .** La différence de  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  est le langage défini sur  $\Sigma_1$  contenant tous les mots présents dans  $\mathcal{L}_1$  qui ne sont pas dans  $\mathcal{L}_2$ .

$$\mathcal{L}_1 \setminus \mathcal{L}_2 = \{w, w \in \mathcal{L}_1 \text{ et } w \notin \mathcal{L}_2\} \quad (6.14)$$

■ **Définition 111 — Produit de deux langages ou concaténation .** Le produit de  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  est le langage défini sur  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  contenant tous les mots formés par un mot de  $\mathcal{L}_1$  suivi d'un mot de  $\mathcal{L}_2$ .

$$\mathcal{L}_1 . \mathcal{L}_2 = \{vw, v \in \mathcal{L}_1 \text{ et } w \in \mathcal{L}_2\} \quad (6.15)$$

■ **Définition 112 — Puissances d'un langage.** Les puissances d'un langage  $\mathcal{L}$  sont définies par induction :

$$\mathcal{L}^0 = \{\epsilon\} \quad (6.16)$$

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{L} . \mathcal{L}^{n-1} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \quad (6.17)$$

■ **Définition 113 — Fermeture de Kleene d'un langage.** La fermeture de Kleene d'un langage  $\mathcal{L}$  ou étoile de Kleene notée  $\mathcal{L}^*$  est l'ensemble des mots formés par un nombre fini de

concaténation de mots de  $\mathcal{L}$ . Formellement :

$$\mathcal{L}^* = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{L}^n \quad (6.18)$$

La fermeture d'un langage peut également être définie inductivement par :

$$\epsilon \in \mathcal{L}^* \quad (6.19)$$

$$v \in \mathcal{L}, w \in \mathcal{L}^* \implies vw \in \mathcal{L}^* \quad (6.20)$$

$$v \in \mathcal{L}^*, w \in \mathcal{L} \implies vw \in \mathcal{L}^* \quad (6.21)$$

**(R)** Il existe un nombre dénombrable de mots sur un alphabet  $\Sigma$ , c'est à dire qu'on peut les mettre en bijection avec  $\mathbb{N}$ , il y en a une infinité mais on peut les compter. Néanmoins, le nombre de langages sur  $\Sigma$  n'est pas dénombrable puisqu'il s'agit des parties d'un ensemble dénombrable.

## E Préfixes, suffixes, facteurs et sous-mots

■ **Définition 114 — Préfixe.** Soit  $v$  et  $w$  deux mots sur  $\Sigma$ .  $v$  est un préfixe de  $w$  et on le note  $v \leq w$  si et seulement s'il existe un mot  $u$  sur  $\Sigma$  tel que :

$$vu = w \quad (6.22)$$

■ **Définition 115 — Suffixe.** Soit  $v$  et  $w$  deux mots sur  $\Sigma$ .  $w$  est un suffixe de  $v$  si et seulement s'il existe un mot  $u$  sur  $\Sigma$  tel que :

$$uw = v \quad (6.23)$$

■ **Définition 116 — Facteur.** Soit  $v$  et  $w$  deux mots sur  $\Sigma$ .  $v$  est un facteur de  $w$  si et seulement s'il existe deux mots  $t$  et  $u$  sur  $\Sigma$  tel que :

$$tvu = w \quad (6.24)$$



**Vocabulary 8 — Subword**  $\longleftrightarrow$  Facteur. Attention l'imbroglia n'est pas loin...

■ **Définition 117 — Sous-mot.** Soit  $w = a_1 a_2 \dots a_n$  un mot sur  $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  de longueur  $n$ . Alors  $v = a_{\psi(1)} a_{\psi(2)} \dots a_{\psi(p)}$  est un sous-mot de  $w$  de longueur  $p$  si et seulement s'il  $\psi : [1, p] \longrightarrow [1, n]$  est une application strictement croissante.

**(R)** Cette définition implique que l'ordre d'apparition des lettres dans un sous-mot est préservé par rapport à l'ordre de lettres du mot.



### Vocabulary 9 — Scattered Subword $\longleftrightarrow$ Sous-mot...

■ **Exemple 23 — Illustrations des concepts précédents.** Prenons par exemple le mot le plus long de la langue française, *anticonstitutionnellement*. Alors

- *anti* est un préfixe, tout comme *antico* mais uniquement pour les informaticiens, pas les linguistes...
- *ment* est un suffixe,
- *constitution* est un facteur,
- *colle* est un sous-mot.

**Théorème 21 — Relations d'ordre partielles.** Les relations «être préfixe de», «être suffixe de» et «être facteur de» sont des relations d'ordre partiel.

*Démonstration.* Il suffit de montrer que ces relations sont réflexives, transitives et antisymétriques. C'est un exercice à faire. ■

■ **Définition 118 — Ordre lexicographique.** Soit  $v$  et  $w$  deux mots sur un alphabet  $\Sigma$  sur lequel on dispose d'un ordre total  $\leq_\Sigma$ . Alors on peut définir<sup>a</sup> l'ordre lexicographique  $\leq_l$  entre deux mots  $v \leq_l w$  par :

- $v$  est un préfixe de  $w$
- ou bien  $\exists t, v', w' \in \Sigma^+, v = tv', w = tw'$  et la première lettre de  $v'$  précède celle de  $w'$  dans l'alphabet, c'est-à-dire au sens de  $\leq_\Sigma$ .

<sup>a</sup>. Il était temps après 18 ans d'école!

■ **Définition 119 — Distance entre deux mots.** Supposons que l'on dispose d'une fonction  $\lambda$  capable de calculer le plus long préfixe, le plus long suffixe ou le plus long facteur commun entre deux mots. Alors on peut définir une distance entre deux mots  $v$  et  $w$  par :

$$d(v, w) = |vw| - 2\lambda(v, w) \quad (6.25)$$

■ **Définition 120 — Fermeture d'un langage par préfixe.** La fermeture par préfixe d'un langage  $\mathcal{L}$  notée  $\text{Pref}(\mathcal{L})$  est le langage formé par l'ensemble des préfixes des mots de  $\mathcal{L}$ .

$$\text{Pref}(\mathcal{L}) = \{w \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^*, wv \in \mathcal{L}\} \quad (6.26)$$

■ **Définition 121 — Fermeture d'un langage par suffixe.** La fermeture par suffixe d'un langage  $\mathcal{L}$  notée  $\text{Suff}(\mathcal{L})$  est le langage formé par l'ensemble des suffixes des mots de  $\mathcal{L}$ .

$$\text{Suff}(\mathcal{L}) = \{w \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^*, vw \in \mathcal{L}\} \quad (6.27)$$

■ **Définition 122 — Fermeture d'un langage par facteur.** La fermeture par facteur d'un langage  $\mathcal{L}$  notée  $\text{Fact}(\mathcal{L})$  est le langage formé par l'ensemble des facteurs des mots de  $\mathcal{L}$ .

$$\text{Fact}(\mathcal{L}) = \{w \in \Sigma^*, \exists u, v \in \Sigma^*, uwv \in \mathcal{L}\} \quad (6.28)$$

## F Propriétés fondamentales

On peut d'ores et déjà observer plusieurs faits :

- Soit  $v$  et  $w$  deux mots de  $\Sigma^*$ . A priori  $vw \neq wv$ , la concaténation n'est pas commutative.
- La décomposition d'un mot de  $\Sigma^*$  est unique en élément de  $\Sigma$ . Ceci est dû au fait qu'il n'y a pas d'inverse dans un monoïde. On peut le démontrer en raisonnant par l'absurde, en supposant qu'il existe deux décompositions différentes d'un même mot. Comme les lettres ne peuvent pas disparaître par inversion et qu'elles sont atomiques, c'est à dire non décomposables, on aboutit à une contradiction.

Ces deux observations engendrent de nombreux développements dans la théorie des langages.

**Théorème 22 — Lemme de Levi.** Soient  $t, u, v$  et  $w$  quatre mots de  $\Sigma^*$ . Si  $tu = vw$  alors il existe un unique mot  $z \in \Sigma^*$  tel que :

- soit  $t = vz$  et  $zu = w$ ,
- soit  $v = tz$  et  $zw = u$ .

*Démonstration.* Supposons que  $|t| \geq |v|$ . Alors  $v$  est un préfixe de  $t$  et il existe un mot  $z$  tel que  $t = vz$ . Or, on a  $tu = vw = vzu$ . Par simplification à gauche, on obtient  $w = zu$ . On procède de même pour la seconde égalité. ■

Le lemme de Levi est illustré sur la figure 6.1.



FIGURE 6.1 – Illustration du lemme de Levi





## EXPRESSIONS RÉGULIÈRES

### À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ expliquer les définitions inductives des expressions régulières et des langages réguliers
- ☞ utiliser la sémantique des langages réguliers
- ☞ utiliser les identités remarquables sur les expressions régulières pour simplifier une expression
- ☞ construire un arbre représentant une expressions régulière

On peut décrire un langage de différentes manières :

- par compréhension :  $\mathcal{L} = \{u \in \Sigma^*, |u| = 0 \bmod 2\}$ , c'est-à-dire en utilisant une propriété spécifique au langage. Néanmoins, ceci n'est pas toujours évident et, de plus, cela n'implique pas de méthode concrète pour construire des mots de ce langage.
- pour les langages réguliers, par une expression régulière ou une grammaire régulière.

Les expressions régulières sont un moyen de caractériser de manière inductive certains langages et offre des **règles pour construire les mots** de ces langages. Tout comme en couture, on dit qu'elles constituent un **patron de conception**. À chaque expression régulière est associé un langage, c'est à dire l'ensemble des mots qu'elle permet d'élaborer. L'avantage principal des expressions régulières est qu'elles fournissent en plus une vision algébrique des langages réguliers et permettent donc le calcul.

**(R)** Régulier ou rationnel? Ces deux adjectifs sont employés de manière équivalente en français dans le cadre de la théorie des langages. Il existe des arguments en faveur de l'utilisation de chacun :

- rationnel : c'est le mot historique utilisé en France. Sa racine latine évoque le calcul et il s'agit donc des langages que l'on peut calculer.

- régulier : c'est un anglicisme mais dont la racine latine <sup>a</sup> évoque la conformation à une norme ou un règle. Il s'agit donc des langages que l'on peut décrire par une règle.

Ces deux adjectifs sont donc cohérents et utilisables en français pour décrire les langages et les expressions qui font l'objet de ce chapitre. L'un est plus pragmatique que l'autre!

<sup>a</sup>. via les anglo-normands et Guillaume le conquérant

## A Définition des expressions régulières

■ **Définition 123 — Syntaxe des expressions régulières.** L'ensemble des expressions régulières  $\mathcal{E}_R$  sur un alphabet  $\Sigma$  est défini inductivement par :

(Base)  $\{\emptyset, \epsilon\} \cup \Sigma \in \mathcal{E}_R$ ,

(Règle de construction (union))  $\forall e_1, e_2 \in \mathcal{E}_R, e_1 \mid e_2 \in \mathcal{E}_R$

(Règle de construction (concaténation))  $\forall e_1, e_2 \in \mathcal{E}_R, e_1 e_2 \in \mathcal{E}_R$ ,

(Règle de construction (fermeture de Kleene))  $\forall e \in \mathcal{E}_R, e^* \in \mathcal{E}_R$ .

**(R)** Cette définition peut s'exprimer ainsi : les expressions régulières sont constituées à la base de l'ensemble vide, du mot vide et des lettres de l'alphabet. On peut construire d'autres expressions régulières à partir de ces éléments de base en appliquant un nombre fini de fois les opérateurs d'union, de concaténation et de fermeture de Kleene.

**(R)** Le symbole de la concaténation est omis pour plus de lisibilité.

**(R)** L'utilisation des parenthèses est possible et souhaitable pour réduire les ambiguïtés. La priorité des opérateurs est l'étoile de Kleene, la concaténation puis l'union. Par défaut, l'associativité des opérateurs est choisie à gauche.

Par exemple, pour une alphabet  $\{a, b, c\}$ , on peut écrire :

- $a \mid b \mid c$  à la place de  $a \mid (b \mid c)$
- $a \mid cb^*$  à la place de  $a \mid (c(b^*))$

■ **Exemple 24 — Quelques expressions régulières.** Voici quelques expressions régulières pratiques dans la vie de tous jours :

$(P \mid MP \mid PC)SI$  sur l'alphabet latin désigne l'ensemble  $\{PSI, MPSI, PCSI\}$

$(19 \mid 20)00$  sur l'alphabet  $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  désigne l'année 1900 ou l'année 2000.

$1010101^*$  sur l'alphabet  $\Sigma = \{0, 1\}$  désigne l'ensemble des mots binaires préfixés par 101010 et se terminant par des 1.

$\Sigma^* k \Sigma^+ q \Sigma^*$  il y a un mot de sept lettres engendré par cette expression régulière en français. Comme quoi, il y a toujours de l'espoir au Scrabble.

■ **Exemple 25 — D'autres expressions régulières.** Ces exemples sont typiques des expressions utilisées lors des épreuves de concours.

- $\Sigma^*$  tous les mots
- $a\Sigma^*$  les mots commençant par  $a$
- $\Sigma^*a$  les mots finissant par  $a$
- $a^*|b^*$  les mots ne comportant que des  $a$  ou que des  $b$
- $(ab^*a|b)^*$  les mots comportant un nombre pair de  $a$
- $(aa|b)^*$  les mots comportant des blocs de  $a$  de longueur paire
- $(b|ab)^*(a|e)$  les mots ne comportant pas deux fois  $a$  consécutivement

**(R)** Les expressions régulières sont très puissantes et il est illusoire d'imaginer qu'on peut les exprimer simplement avec des mots. C'est très rarement possible, uniquement sur des cas simples comme ci-dessus.

■ **Définition 124 — Langage dénoté par une expression régulière.** Pour toute expression régulière  $e$ , on note  $\mathcal{L}_{ER}(e)$  le langage unique qui dénote cette expression. C'est en fait le résultat de l'application  $\mathcal{L}_{ER} : \mathcal{E}_R(\Sigma^*) \longrightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)$  qui, à une expression régulière, fait correspondre l'ensemble des mots (le langage) engendré par cette expression régulière.

■ **Définition 125 — Sémantique des expressions régulières.** L'interprétation des expressions régulières en termes de langages, la sémantique d'une expression régulière, permet de définir inductivement l'ensemble des langages dénotés par une expression régulière ainsi :

**(Base (i))**  $\mathcal{L}_{ER}(\emptyset) = \{\} = \emptyset$ ,

**(Base (ii))**  $\mathcal{L}_{ER}(e) = \{e\}$ ,

**(Base (iii))**  $\forall a \in \Sigma, \mathcal{L}_{ER}(a) = \{a\}$ ,

**(Règle de construction (i union))**  $\forall e_1, e_2 \in \mathcal{E}_R, \mathcal{L}_{ER}(e_1 | e_2) = \mathcal{L}_{ER}(e_1) \cup \mathcal{L}_{ER}(e_2)$ ,

**(Règle de construction (ii concaténation))**  $\forall e_1, e_2 \in \mathcal{E}_R, \mathcal{L}_{ER}(e_1 e_2) = \mathcal{L}_{ER}(e_1) \cdot \mathcal{L}_{ER}(e_2)$ ,

**(Règle de construction (iii fermeture de Kleene))**  $\forall e \in \mathcal{E}_R, \mathcal{L}_{ER}(e^*) = \mathcal{L}_{ER}(e)^*$ .

**Théorème 23 — Un langage  $\mathcal{L}$  est régulier si et seulement s'il existe une expression régulière  $e$  telle que  $\mathcal{L}_{ER}(e) = \mathcal{L}$ .**

**(R)** Les apparences sont parfois trompeuses. Soit  $\Sigma = \{a, b\}$  un alphabet et  $\mathcal{L}$  le langage défini par  $\mathcal{L} = \{a^n b^n, n \in \llbracket 0, n \rrbracket\} = \{\epsilon, ab, aabb, aaabbb, \dots\}$ .  $\mathcal{L}$  n'est pas un langage régulier. Si la formule entre crochets dénote bien un langage, un ensemble de mots, on ne peut cependant pas exprimer l'ensemble de ces mots par une expression régulière. Par exemple,  $a^* b^*$  est

une expression régulière dont le langage associé dénote l'ensemble  $\mathcal{L}$  ainsi que d'autres mots comme  $\{a, b, aaa, bbb, aab, abb, abbb, \dots\}$ . Le lemme de l'étoile (cf. chapitre suivant) permet de démontrer que  $\mathcal{L}$  n'est pas un langage régulier.

## B Définition des langages réguliers

Il est également possible de donner une définition inductive directe des langages réguliers.

■ **Définition 126 — Ensemble des langages réguliers.** L'ensemble des langages réguliers  $\mathcal{L}_{ER}$  sur un alphabet  $\Sigma$  est défini inductivement par :

(Base (i))  $\emptyset \in \mathcal{L}_{ER}$ ,

(Base (ii))  $\{\epsilon\} \in \mathcal{L}_{ER}$ ,

(Base (iii))  $\forall a \in \Sigma, \{a\} \in \mathcal{L}_{ER}$ ,

(Règle de construction (i))  $\forall \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathcal{L}_{ER}, \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{ER}$

(Règle de construction (ii))  $\forall \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathcal{L}_{ER}, \mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{ER}$ ,

(Règle de construction (iii))  $\forall \mathcal{L} \in \mathcal{L}_{ER}, \mathcal{L}^* = \mathcal{L}_{ER}$ .

(R) Cette définition peut s'exprimer ainsi : les langages réguliers sont constitués à la base de l'ensemble vide, du langage ne contenant que le mot vide et des lettres de l'alphabet. On peut construire d'autres langages réguliers à partir de ces éléments de base en appliquant un nombre fini de fois les opérateurs d'union, de concaténation et de fermeture de Kleene.

■ **Définition 127 — Opérations régulières sur les langages.** L'union, la concaténation et la fermeture de Kleene sont les trois opérations régulières sur les langages.

(R) On note que l'intersection et la complémentation ne sont pas des opérations régulières.

**Théorème 24 — Stabilité des langages réguliers.** Les langages réguliers sont stables pour les opérations d'**union**, de **concaténation** et de **fermeture de Kleene**. Cela signifie que l'union, l'intersection ou la fermeture de Kleene de langages réguliers est un langage régulier.

*Démonstration.* Conséquence directe de la définition inductive. ■

## C Identités remarquables sur les expressions régulières

Le tableau 7.1 recense quelques identités remarquables à connaître sur les expressions régulières. Leurs démonstrations s'appuient sur la sémantique des expressions régulières et les opérations sur les langages. Elles constituent un excellent exercice.

*Démonstration.* Par exemple, démontrons que  $e|\emptyset = e$ . D'après la sémantique des expressions régulières, on a :

$$\mathcal{L}_{ER}(e|\emptyset) = \mathcal{L}_{ER}(e) \cup \mathcal{L}_{ER}(\emptyset) \quad (7.1)$$

$$= \mathcal{L}_{ER}(e) \cup \emptyset \quad (7.2)$$

$$= \mathcal{L}_{ER}(e) \quad (7.3)$$

car l'ensemble vide est l'élément neutre de l'union ensembliste. ■

Expression régulière	Équivalent	Raison
$e \emptyset$	$e$	$\emptyset$ est l'élément neutre de l'union ensembliste
$e\emptyset$	$\emptyset$	Déf. de la concaténation, $\emptyset$ seul élément commun à $\mathcal{L}_{ER}(e)$ et $\{\emptyset\}$
$e\epsilon$	$e$	Déf. de la concaténation, $\epsilon$ élément neutre de la concaténation
$(e f) g$	$e f g$	Associativité de l'union ensembliste
$(e.f).g$	$e.f.g$	Associativité de la concaténation sur les langages
$e(f g)$	$ef eg$	Distributivité de la concaténation sur l'union
$(e f).g$	$eg fg$	Idem
$e f$	$f e$	Commutativité de l'union ensembliste
$e^*$	$\epsilon ee^*$	Définition de l'étoile de Kleene
$e^*$	$\epsilon e^*e$	Idem
$(\emptyset)^*$	$\epsilon$	Définition de l'étoile de Kleene et des puissances d'un langage
$e e$	$e$	Idempotence
$(e^*)^*$	$e^*$	Idempotence

TABLE 7.1 – Identités remarquables des expressions régulières.

■ **Exemple 26 — Exemple de calcul sur les expressions régulières.** À l'aide des identités remarquables du tableau 7.1, il est possible de transformer des expressions régulières, de les simplifier par calcul. Voici un exemple sur  $\Sigma = \{a, b\}$  :

$$bb^*(a^*b^*|\epsilon)b = bb^*a^*b^*b \quad (7.4)$$

Cette expression est généralement exprimée ainsi  $b^+a^*b^+$  et elle désigne l'ensemble des mots comportant au moins deux lettres qui commencent et terminent par un b. On notera que le langage associé  $\mathcal{L}_{ER}(b^+a^*b^+)$  ne contient pas le mot vide.

## D Arbre associé à une expression régulière

De part sa nature inductive, une expression régulière peut naturellement être représentée sous la forme d'un arbre dont les feuilles sont les éléments de bases et les nœuds les opéra-

teurs réguliers. Ces arbres permettent de prouver par induction de nombreuses propriétés des expressions régulières.



FIGURE 7.1 – Arbre associé à l'expression régulière  $(a^*|b)c$

## E Expressions régulières dans les langages ---> HORS PROGRAMME

Les expressions régulières sont intensivement utilisées par les informaticiens en pratique pour le test, le filtrage ou la transformation de l'information. Tous les langages évolués proposent une interface qui permet d'utiliser les expressions régulières.

Concrètement, les expressions rationnelles s'appuient sur un ensemble de caractères et de métacaractères qui permettent d'abstraire un motif de chaîne de caractères.

■ **Exemple 27 — Ensemble des lignes d'un fichier qui commencent au moins par un chiffre et qui se termine par Z.** On peut utiliser l'expression régulière suivante : `"^[0-9]+.*Z$"` où :

- `^` désigne le début d'une ligne
- `[0-9]` désigne l'ensemble des caractères 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
- `+` signifie au moins une occurrence du caractère précédent
- `.` symbolise n'importe quel caractère
- `*` signifie 0 ou un nombre quelconque d'occurrences du caractère précédent
- `Z` est le caractère Z
- `$` signifie la fin d'une ligne

■ **Définition 128 — Métacaractère.** Un métacaractère est un caractère qui a une signification abstraite, autre que son interprétation littérale.

Selon le langage utilisé, on pourra utiliser les classes ou les séquences spéciales (mode Perl).

■ **Exemple 28 — Les expressions célèbres.** Voici une liste non exhaustive d'expressions régulières couramment utilisées :

- `\d+` les entiers naturels

Métacaractère	Signification
^	début de la chaîne
\$	fin de la chaîne
.	n'importe quel caractère sauf retour à la ligne
*	0 ou plusieurs fois le caractère précédent
+	au moins 1 fois le caractère précédent
?	0 ou 1 fois le caractère précédent
	alternative (union)
()	groupement, motif
[]	ensemble de caractères
{ }	nombre de répétition du motif

TABLE 7.2 – Liste des métacaractères

Expression	Signification
e*	zéro ou plusieurs e
e+	un ou plusieurs e
e?	0 ou 1 fois e
e{m}	exactement m fois e
e{m, }	au moins m fois e
e{m, n}	au minimum m fois a et au maximum n fois e

TABLE 7.3 – Répétition des motifs

Séquence	Signification
\t	tabulation
\n	nouvelle ligne
\r	retour chariot
\b	bordure de mot
\B	pas en bordure de mot
\d	correspond à n'importe quel chiffre [0-9]
\D	correspond à n'importe quel caractère sauf un chiffre
\w	correspond à n'importe quel mot [0-9a-zA-Z_]
\W	correspond à n'importe quelle séquence qui n'est pas un mot
\s	correspond à n'importe quel espace (espace, tabulation, nouvelle ligne)
\S	correspond à n'importe quel caractère qui n'est pas un espace

TABLE 7.4 – Séquences spéciales (mode Perl disponible en Python)

Classe	Signification
<code>[:alnum:]</code>	correspond aux caractères alphabétiques et numériques. [A-Za-z0-9]
<code>[:alpha:]</code>	correspond aux caractères alphabétiques. [A-Za-z]
<code>[:blank:]</code>	correspond à un espace ou à une tabulation
<code>[:cntrl:]</code>	correspond aux caractères de contrôle
<code>[:digit:]</code>	correspond aux chiffres [0-9]
<code>[:graph:]</code>	caractères graphiques affichables
<code>[:lower:]</code>	correspond aux caractères alphabétiques minuscules. [a-z]
<code>[:print:]</code>	caractères imprimables
<code>[:space:]</code>	correspond à tout espace blanc (espace, tabulation, nouvelle ligne)
<code>[:upper:]</code>	correspond à tout caractère alphabétique majuscule. [A-Z]
<code>[:xdigit:]</code>	correspond aux chiffres hexadécimaux. [0-9A-Fa-f]

TABLE 7.5 – Classes (mode expressions régulières étendues de grep)

- `-\d+` les entiers
- `(\d{2}|\s)]{5}` un numéro de téléphone avec des espaces
- `[A-Za-z0-9_-]{3,16}` les noms des utilisateurs d'un système (login),
- `[[:alnum:]]_~@#!$% ]{8,42}` les mots de passe,
- `([a-z0-9_.-]+)@([0-9a-z.-]+) . ([a-z.]{2,24})` les adresses email



## AUTOMATES FINIS DÉTERMINISTES

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ définir un automate fini déterministe
- ☞ représenter un automate fini déterministe
- ☞ qualifier les états d'un automates (accessibilité)
- ☞ compléter un AFD
- ☞ compléter un AFD
- ☞ faire le produit de deux AFD

Les automates sont des machines simples dont les entrées sont des lettres et la sortie un résultat. Ces machines sont constituées par des états qui sont interconnectés par des liens permettant le passage d'un état à un autre selon une entrée et une direction. Selon les entrées reçues, l'automate réagit et se positionne donc dans un certain état. Les automates sont des éléments essentiels de l'informatique : ils établissent un lien fort entre la théorie des graphes et la théorie des langages.

Les chapitres de ce cours se focalisent sur les automates dont le résultat est l'acceptation ou non d'un mot d'un langage. Plus particulièrement, ce chapitre traite des automates finis déterministes (AFD), le déterminisme étant la capacité de l'automate à se positionner dans un seul état possible après la réception d'un lettre.

### A Automate fini déterministe (AFD)

■ **Définition 129 — Automate fini déterministe (AFD).** Un automate fini déterministe est un quintuplet  $(Q, \Sigma, q_i, \delta, F)$  tel que :

1.  $Q$  est un ensemble non vide et fini dont les éléments sont les états,

2.  $\Sigma$  est l'alphabet,
3.  $q_i \in Q$  est l'état initial,
4.  $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$  est la **fonction** de transition de l'automate,
5.  $F \subseteq Q$  est l'ensemble des états accepteurs ou terminaux.

**R** Le déterminisme d'un AFD est dû aux faits que :

- l'état initial est un singleton,
- $\delta$  est une fonction : à un couple (état, lettre)  $(q, a)$ ,  $\delta$  associe au plus un état  $q'$ .

■ **Définition 130 — Fonction de transition partielle.** On dit que la fonction de transition  $\delta$  est partielle s'il existe au moins un couple (état, lettre) pour lequel elle n'est pas définie.

■ **Définition 131 — Automate complet.** Un AFD  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_i, \delta, F)$  est dit complet si  $\delta$  est une application, c'est-à-dire  $\delta$  n'est pas partielle, il existe une transition pour chaque lettre de  $\Sigma$  pour tous les états.

■ **Définition 132 — Automate normalisé.** Un automate est normalisé s'il ne possède pas de transition entrante sur son état initial et s'il possède un seul état final sans transition sortante.

## B Représentation d'un automate

Les automates peuvent être représentés sous la forme de tableaux ou de graphes comme le montre les figures 8.1 et 8.1. Les algorithmes sur les graphes pourront être d'une aide précieuse pour l'étude des automates.

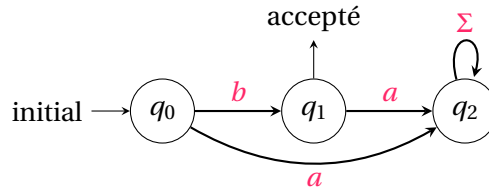


FIGURE 8.1 – Exemple d'automate fini déterministe représenté sous la forme d'un graphe

## C Acceptation d'un mot

■ **Définition 133 — Fonction de transition étendue aux mots.** La fonction de transition peut être étendue aux mots par passages successifs d'un état à un autre en lisant les lettres

	$\downarrow q_0$	$\uparrow q_1$	$q_2$
a	$q_2$	$q_2$	$q_2$
b	$q_1$		$q_2$

	a	b
$\downarrow q_0$	$q_2$	$q_1$
$\uparrow q_1$	$q_2$	
$q_2$	$q_2$	$q_2$

TABLE 8.1 – Exemple d'automate fini déterministe représenté sous la forme de tableaux : on peut choisir de représenter les états en ligne ou en colonne.

d'un mot.

On définit inductivement cette fonction étendue noté  $\delta^*$  :

$$\forall q \in Q, \delta^*(q, \epsilon) = q \quad (8.1)$$

$$\forall q \in Q, \forall w \in \Sigma^*, \forall a \in \Sigma, \delta^*(q, w.a) = \delta(\delta^*(q, w), a) \quad (8.2)$$

■ **Définition 134 — Acceptation d'un mot par un automate.** Un mot  $w \in \Sigma^*$  est accepté par un automate  $\mathcal{A}$  si et seulement si  $\delta^*(q_i, w) \in F$ , c'est-à-dire la lecture du mot  $w$  par l'automate conduit à un état accepteur.

■ **Définition 135 — Langage reconnu par un AFD.** Le langage  $\mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A})$  reconnu par un automate fini déterministe  $\mathcal{A}$  est l'ensemble des mots reconnus par  $\mathcal{A}$  :

$$\mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^*, w \text{ est accepté par } \mathcal{A}\} \quad (8.3)$$

■ **Définition 136 — Langage reconnaissable.** Un langage  $\mathcal{L}$  sur un alphabet  $\Sigma$  est reconnaissable s'il existe un automate fini déterministe  $\mathcal{A}$  d'alphabet  $\Sigma$  tel que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A})$ .

## D Accessibilité et co-accessibilité

■ **Définition 137 — Accessibilité d'un état.** Un état  $q$  d'un automate est dit accessible s'il existe un mot  $w \in \Sigma^*$  tel que  $\delta^*(q_i, w) = q$ , c'est-à-dire il est possible de l'atteindre depuis l'état initial.

■ **Définition 138 — Co-accessibilité d'un état.** Un état  $q$  d'un automate est dit co-accessible s'il existe un mot  $w \in \Sigma^*$  tel que  $\delta^*(q, w) \in F$ , c'est-à-dire à partir de cet état, il est possible d'atteindre un état accepteur.

■ **Définition 139 — Automate émondé.** Un automate est dit émondé tous ses états sont à la fois accessibles et co-accessibles.

**Théorème 25 — Automate d'un langage reconnaissable.** Si un langage est reconnaissable alors il existe un automate fini déterministe :

- normalisé qui le reconnaît.
- émondé qui le reconnaît.
- complet qui le reconnaît.

## E Complétion d'un AFD

**M Méthode 1 — Complété d'un AFD** Le complété d'un automate fini déterministe  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_i, \delta, F)$  noté  $C(\mathcal{A})$  est l'automate

$$C(\mathcal{A}) = (Q \cup \{q_p\}, \Sigma, q_i, C(\delta), F) \quad (8.4)$$

tel que :

- $q_p \notin Q$  est appelé l'état puits,
- $C(\delta)$  est l'application de  $Q \cup \{q_p\} \times \Sigma$  dans  $Q \cup \{q_p\}$  telle que :

$$C(\delta)(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) & \text{si } \delta \text{ est définie pour } (q, a) \\ q_p & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.5)$$

Cette méthode consiste donc à ajouter un état puits qui n'est pas co-accessible et à y faire converger toutes les transitions manquantes.

■ **Exemple 29 — Complétion d'un automate.** On considère l'automate fini déterministe suivant :



On observe que la fonction de transition n'est pas défini pour  $b$  en partant de l'état 2 ni pour  $a$  en partant de 1. La complétion de l'automate selon la méthode 1 donne :



**Théorème 26 — Langage reconnu par un automate et son complété.** Un automate  $\mathcal{A}$  et son complété  $C(\mathcal{A})$  reconnaissent le même langage :

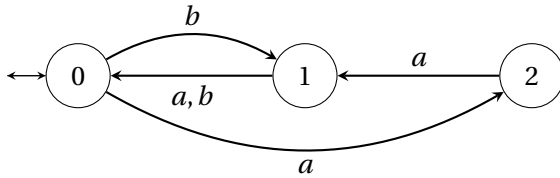
$$\mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_{auto}(C(\mathcal{A})) \quad (8.6)$$

*Démonstration.* La fonction de transition pour un mot reconnu est la même sur les automates  $\mathcal{A}$  et  $C(\mathcal{A})$ . Pour un mot non reconnu, elle diffère mais dans ce cas le mot n'appartient pas au langage. Donc les mots reconnus sont les mêmes. ■

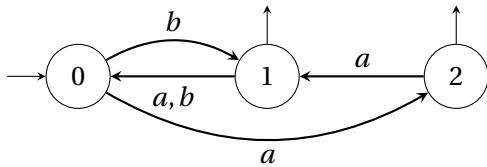
## F Complémentaire d'un AFD

**(M) Méthode 2 — Complémentaire d'un AFD** Le complémentaire d'un automate fini déterministe  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_i, \delta, F)$  noté  $\mathcal{A}^c$  est l'automate complet  $\mathcal{A}^c = (Q, \Sigma, q_i, \delta, Q \setminus F)$ .

■ **Exemple 30 — Complémentaire d'AFD.** On considère l'automate fini déterministe suivant :



On observe que seul l'état 0 est un état accepteur. Le complémentaire de l'automate selon la méthode 2 donne :



**Théorème 27 — Langage reconnu par un automate et son complémentaire.** Le langage reconnu par l'automate complémentaire d'un automate est le complémentaire du langage reconnu par cet automate :

$$\mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A}^c) = \Sigma^* \setminus \mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A}) \quad (8.7)$$

*Démonstration.* On procède par double inclusion.

- ( $\subset$ ) Si  $w$  est un mot reconnu par l'automate complémentaire. Alors l'état accepteur de  $w$  n'appartient pas  $F$ ,  $w \notin Q \setminus F$ . Donc  $w$  n'appartient pas à  $\mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A})$ .
- ( $\supset$ ) Soit  $w$  un mot de l'ensemble  $\Sigma^* \setminus \mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A})$ . En utilisant l'automate  $\mathcal{A}$ , le chemin emprunté en suivant les lettres de  $w$  ne mène donc pas à un état accepteur de  $\mathcal{A}$ . Comme tous les autres états de  $\mathcal{A}$  sont des états accepteurs de  $\mathcal{A}^c$ ,  $w$  est donc un mot de  $\mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A}^c)$ . ■

**Théorème 28 — Stabilité des langages reconnaissables par complémentation.** Les langages reconnaissables sont stable par complémentation : s'il existe un langage reconnaissable sur  $\Sigma$  par un automate  $\mathcal{A}$ , alors le complémentaire de ce langage est reconnaissable par  $\mathcal{A}^c$ .

*Démonstration.* Ce théorème est une conséquence du théorème précédent et de la définition de l'automate complémentaire : si un langage est reconnaissable, alors son complémentaire l'est aussi puisqu'il existe un automate fini qui le reconnaît. ■

## G Produit de deux AFD - Automate produit

**(M) Méthode 3 — Produit de deux automates** Le produit de deux automates sur  $\Sigma$ ,  $\mathcal{A}^a = (Q^a, \Sigma, q_i^a, \delta^a, F^a)$  et  $\mathcal{A}^b = (Q^b, \Sigma, q_i^b, \delta^b, F^b)$ , noté  $\mathcal{A}^a \times \mathcal{A}^b$  est l'automate  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_i, \delta, F)$  tel que :

- $Q = Q^a \times Q^b$
- $q_i = (q_i^a, q_i^b)$
- $\delta : (Q^a \times Q^b) \times \Sigma \longrightarrow (Q^a \times Q^b)$  est définie par :  $\delta((q^a, q^b), s) = (\delta^a(q^a, s), \delta^b(q^b, s))$
- $F = F^a \times F^b$

**Théorème 29 — Langage reconnu par un produit d'automates.** Le langage reconnu par un produit d'automates est l'intersection des langages reconnus par ces automates :

$$\mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A}^a \times \mathcal{A}^b) = \mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A}^a) \cap \mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A}^b) \quad (8.8)$$

*Démonstration.* On procède par double inclusion et on utilise la fonction de transition étendue aux mots.

- ( $\subset$ ) Soit  $w$  un mot reconnu par l'automate produit. Alors, par définition de l'automate produit :  $\delta^*((q^a, q^b), w) = (\delta^{a*}(q^a, w), \delta^{b*}(q^b, w))$  et  $\delta^{a*}(q^a, w) \in F^a$  et  $\delta^{b*}(q^b, w) \in F^b$ . Donc  $w \in \mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A}^a) \cap \mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A}^b)$ .
- ( $\supset$ ) soit  $w$  un mot reconnu par  $\mathcal{A}^a$  et par  $\mathcal{A}^b$ . Alors un existe un chemin dans  $\mathcal{A}^a$  qui, d'après le mot  $w$ , mène à un état accepteur de  $F^a$ . De même pour  $F^b$ . Donc  $(\delta^a(q^a, w), \delta^b(q^a, w)) \in F^a \times F^b$ .  $w$  appartient à  $\mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A}^a \times \mathcal{A}^b)$ . ■

**Théorème 30 — Stabilité des langages reconnaissables par l'intersection.** Les langages reconnaissables sont stables par l'intersection : l'intersection de deux langages reconnaissables est un langage reconnaissable.

*Démonstration.* Ce théorème est un corolaire du théorème précédent. ■

**R** La stabilité des langages reconnaissables est importante car nous montrerons par la suite que les langages reconnaissables sont les langages réguliers. Or, les langages réguliers ne sont pas stables par définition pour les opérations non régulières, tout comme les langages reconnaissables ne sont pas stables par définition pour les opérations régulières (union, concaténation et fermeture de Kleene). Le théorème de Kleene va nous permettre d'étendre ces résultats d'une représentation à une autre.





## AUTOMATES FINIS NON DÉTERMINISTES

À la fin de ce chapitre, je sais :



### A Automate fini non déterministe (AFND)

■ **Définition 140 — Automate fini non déterministe (AFND).** Un automate fini non déterministe est un quintuplet  $(Q, \Sigma, q_i, \Delta, F)$  tel que :

1.  $Q$  est un ensemble non vide et fini dont les éléments sont les états,
2.  $\Sigma$  est l'alphabet,
3.  $q_i \in Q$  est l'état initial,
4.  $\Delta \subseteq Q \times \Sigma \times Q$  est la **relation** de transition de l'automate,
5.  $F \subseteq Q$  est l'ensemble des états accepteurs ou terminaux.

**(R)** Le non déterminisme d'un AFND est dû au fait que  $\Delta$  n'est pas une fonction mais une relation : une même lettre peut faire transiter l'AFND vers des états différents. Lequel choisir ? Là est le non déterminisme.

**(R)** Qui peut le plus peut le moins : un AFD est un cas particulier d'AFND pour lequel  $\Delta = \{(q, a, q'), \delta(q, a) = q'\}$ .

### B Représentation d'un AFND

Les AFND peuvent être représentés de la même manière que les AFD sous la forme de tableaux ou de graphes comme le montre les figures 9.1 et 9.1.

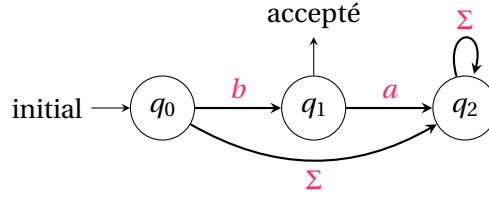


FIGURE 9.1 – Exemple d’automate fini non déterministe représenté sous la forme d’un graphe

	$\downarrow q_0$	$\uparrow q_1$	$q_2$
a	$q_2$	$q_2$	$q_2$
b	$q_1, q_2$		$q_2$

	a	b
$\downarrow q_0$	$q_2$	$q_1, q_2$
$\uparrow q_1$	$q_2$	
$q_2$	$q_2$	$q_2$

TABLE 9.1 – Exemple d’automate fini non déterministe représenté sous la forme de tableaux : on peut choisir de représenter les états en ligne ou en colonne.

**(R)** Pour un même mot, il peut donc exister plusieurs exécution possibles sur un AFND. La programmation des AFND n’est donc pas aussi simple que celles de AFD.

## C Acceptation d’un mot

■ **Définition 141 — Relation de transition étendue aux mots.** La relation de transition peut être étendue aux mots par passages successifs d’un état à un autre en lisant les lettres d’un mot. On la note  $\Delta^*$ .

■ **Définition 142 — Langage reconnu par un AFND.** Le langage  $\mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A})$  reconnu par un automate fini non déterministe  $\mathcal{A}$  est l’ensemble des mots reconnus par  $\mathcal{A}$  :

$$\mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^*, w \text{ est accepté par } \mathcal{A}\} \quad (9.1)$$

■ **Définition 143 — Langage reconnaissable par un AFND.** Un langage  $\mathcal{L}$  sur un alphabet  $\Sigma$  est reconnaissable s’il existe un automate fini non déterministe  $\mathcal{A}$  d’alphabet  $\Sigma$  tel que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A})$ .

## D Déterminisé d'un AFND

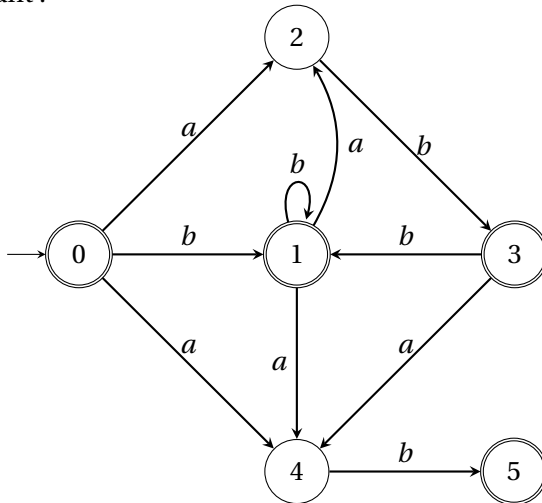
**M** **Méthode 4 — Déterminisé d'un AFND** Le déterminisé d'un automate fini non déterministe  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_i, \Delta, F)$  est l'automate  $\mathcal{A}_d = (\mathcal{P}(Q), \Sigma, q_i, \delta, \mathcal{F})$  défini par :

- $\mathcal{P}(Q)$  est l'ensemble des parties de  $Q$ ,
- $\forall \pi \in \mathcal{P}(Q), \delta = \{(\pi, a, \pi') / \pi, \pi' \in \mathcal{P}(Q), a \in \Sigma\}$  tels que  $\pi' = \{q' / (q, a, q') \in \Delta, q \in \pi\}$ ,
- $\mathcal{F} = \{\pi \in \mathcal{P}(Q), \pi \cap F \neq \emptyset\}$ .

Ce qui signifie que :

- l'état initial du déterminisé est l'état initial de l'AFND,
- toute partie de  $Q$  est susceptible d'être un état. En fait, en pratique dans les exercices, vous construirez les états au fur et à mesure à partir de l'état initial comme dans l'exemple 31. L'ensemble des parties de  $Q$  n'a donc souvent pas besoin d'être explicité.
- les états accepteurs sont les parties qui contiennent un état accepteur de l'AFND.

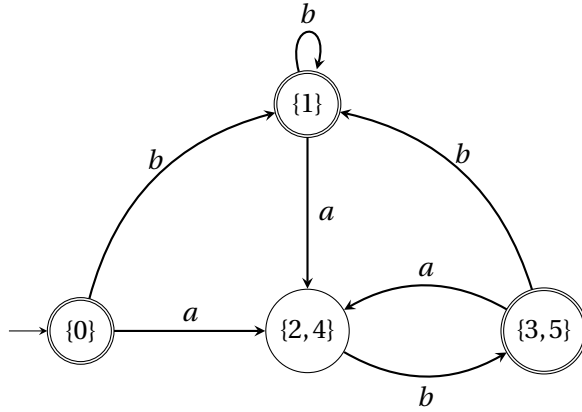
■ **Exemple 31 — Déterminer un AFND.** On considère l'automate fini non déterministe suivant :



En construisant les parties  $\mathcal{P}(Q)$  au fur et mesure à partir de l'état initial, on obtient la fonction de transition :

	$\downarrow \{0\}$	$\uparrow \{1\}$	$\{2, 4\}$	$\uparrow \{3, 5\}$
$a$	$\{2, 4\}$	$\{2, 4\}$	$\emptyset$	$\{2, 4\}$
$b$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\{3, 5\}$	$\{1\}$

On en déduit l'AFD suivant :



Il est possible de renommer les états arbitrairement.

**Théorème 31** Un AFND  $\mathcal{A}$  et son déterminisé  $\mathcal{A}_d$  reconnaissent le même langage.

$$\mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A}_d) \quad (9.2)$$

*Démonstration.*  $\mathcal{A}_d$  est bien un automate fini déterministe car :

- il possède au plus  $2^{|Q|}$  états et  $|Q|$  est fini puisque  $\mathcal{A}$  est fini.
- son état de départ est unique,
- d'après la définition de  $\delta$ , s'il existait deux états tels que  $(\pi, a, \pi_1) \in \delta$  et  $(\pi, a, \pi_2) \in \delta$ , alors on aurait :  $\pi_1 = \{q' / (q, a, q') \in \Delta, q \in \pi\} = \pi_2$ , c'est-à-dire ces deux états seraient égaux. Donc  $\delta$  est bien une fonction de transition et  $\mathcal{A}_d$  est déterministe.
- comme  $\mathcal{A}$  possède au moins un état final,  $\mathcal{F}$  n'est pas vide.

Ensuite, il nous faut montrer que  $\mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A}_d) = \mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A})$ .

Tout d'abord, dire que le mot vide  $\epsilon$  est dans le langage  $\mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A})$  est équivalent à dire que  $q_i \cap F \neq \emptyset$ . Sur le déterminé, cela se traduit par  $q_i \in \mathcal{F}$ . Donc, si le mot vide appartient à l'un, il appartient à l'autre.

( $\implies$ ) Soit  $w$  un mot non vide sur  $\Sigma^*$ . Si  $w = a_1 \dots a_n$  est accepté par  $\mathcal{A}$ , alors cela signifie qu'il existe une succession d'états  $(q_i, q_1, \dots, q_n)$  de  $\mathcal{A}$  telle que  $q_n \in F$ . Mais alors on peut trouver une succession d'états  $(q_i, \pi_1, \dots, \pi_n)$  de  $\mathcal{A}_d$  telle que  $\pi_n \in \mathcal{F}$ .

( $\impliedby$ ) On procède de même dans l'autre sens. ■

**(R)** Le déterminisé d'un AFND  $\mathcal{A}$  comporte donc plus d'états que  $\mathcal{A}$ . Dans le pire des cas, l'algorithme de détermination a une complexité exponentielle.

## E $\epsilon$ -transitions

■ **Définition 144** —  $\epsilon$ -transition. Une  $\epsilon$ -transition est une transition dans un automate non déterministe dont l'étiquette est le mot vide  $\epsilon$ . C'est une transition spontanée d'un état à un autre.

(R) Les automates à transition spontanée ou automates asynchrones sont utilisés notamment par l'algorithme de Thompson pour passer d'une expression régulière à un automate. Ces transitions peuvent aussi servir à normaliser un automate. La plupart du temps on les insère dans un automate pour les éliminer par la suite.

Un exemple d'un tel automate est donné sur la figure 9.2. Cet automate reconnaît les mots commençant par un nombre de b quelconque suivi d'un a ou bien les mots commençant par un nombre quelconque de a suivi par b. En fait, on va voir qu'on peut très bien exprimer un tel automate de manière non déterministe sans transitions spontanées et même de manière déterministe. Les  $\epsilon$ -transitions n'apportent donc pas d'expressivité en plus en terme de langage.

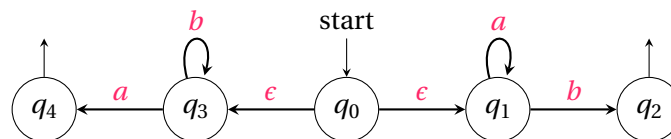


FIGURE 9.2 – Exemple d'automate fini non déterministe avec transition spontanée représenté sous la forme d'un graphe



## DES EXPRESSIONS RÉGULIÈRES AUX AUTOMATES

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ✎ expliquer le théorème de Kleene et ses conséquences
- ✎ transformer une expression régulière en automate
- ✎ montrer qu'un langage est local
- ✎ appliquer l'algorithme de Thompson et de Berry-Sethi
- ✎ décrire l'automate de Glushkov

### A Théorème de Kleene

Les chapitres précédents ont permis de construire deux ensembles de langages :

1. l'ensemble des langages réguliers, c'est-à-dire dénotés par une expressions régulière,
2. et l'ensemble des langages reconnaissables, c'est-à-dire reconnus par un automate fini.

Il s'agit maintenant d'établir une correspondance entre ces deux ensembles de langages.

**Théorème 32 — Kleene.** Un langage  $\mathcal{L}$  sur un alphabet  $\Sigma$  est un langage régulier si et seulement s'il est reconnaissable.

*Démonstration.* ( $\Rightarrow$ ) Soit  $\mathcal{L}$  un langage régulier. On utilise la définition inductive des langages réguliers pour montrer que ce langage est reconnaissable.

- Cas de base :
  - l'ensemble vide est reconnu par un automate dont l'ensemble des états accepteurs  $F$  est vide.  $\mathcal{L}_{ER}(\emptyset)$  est un langage reconnaissable.
  - le mot vide est reconnu par un automate à un seul état dont l'état initial est accepteur.  $\mathcal{L}_{ER}(\epsilon)$  est un langage reconnaissable.
  - les lettres de l'alphabet sont des langages reconnaissables de la même manière.

- Règles de construction (union, concaténation et fermeture de Kleene) : on peut montrer que l'union, la concaténation et l'étoile de Kleene d'un nombre fini de langages reconnaissables sont des langages reconnaissables.

Donc,  $\mathcal{L}$  est un langage reconnaissable. Pour ce sens de la démonstration, on peut aussi utiliser l'automate de Glushkov et l'algorithme de Berry-Sethi.

( $\Leftarrow$ ) L'algorithme de Mac Naughton-Yamada permet de calculer l'expression régulière associée à un automate fini (  $\rightarrow$  HORS PROGRAMME ). On le montrera via l'élimination des états. ■

**(R)** Le théorème de Kleene permet d'affirmer que les langages réguliers sont stables par intersection, complémentation ce qui n'était pas évident d'après la définition des expressions régulières. Inversement, les langages reconnaissables sont stables par union, concaténation et passage à l'étoile de Kleene. Tout résultat sur un type de langage (reconnaissable ou régulier) peut se transposer à l'autre type grâce au théorème de Kleene.

Les sections qui suivent présentent les algorithmes au programme qui permettent de passer du formalisme d'une expression régulière à celui d'un automate et inversement.

## B Algorithme de Thompson

L'algorithme de Thompson permet de construire un automate reconnaissant le langage dénoté par une expression régulière en utilisant des patrons de conception d'automate normalisé pour chaque cas de base et chaque opération (union, concaténation, étoile de Kleene). Cet algorithme porte également le nom de méthode compositionnelle car on compose des automates correspondants à des expressions simples.

### a Patron de conception d'un cas de base


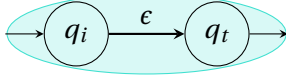
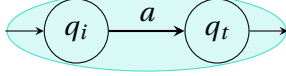
Expressions régulière	Automate associé
$\emptyset$	
$\epsilon$	
$a \in \Sigma$	

TABLE 10.1 – Automates associés aux cas de bases des expressions régulières.



### b Patron de conception de l'union

On associe à l'union de deux expressions régulières  $e_1 | e_2$  l'automate décrit sur la figure 10.2. Au démarrage de la procédure, les deux expressions possèdent un automate équivalent comme le montre la figure 10.1.

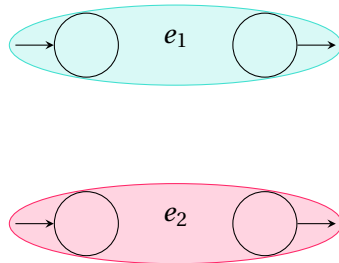


FIGURE 10.1 – Automates équivalents à  $e_1$  et  $e_2$  avant l'opération

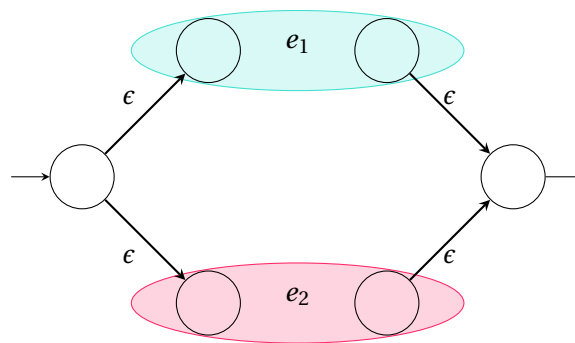


FIGURE 10.2 – Automate associé à l'union de deux expressions régulières  $e_1 | e_2$

### c Patron de conception de la concaténation

On associe à la concaténation de deux expressions régulières l'automate décrit sur la figure 10.3.

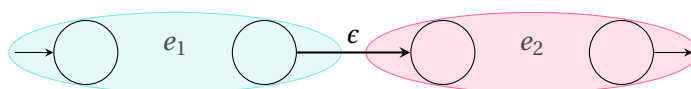


FIGURE 10.3 – Automate associé à la concaténation de deux expressions régulières  $e_1 e_2$

### d Patron de conception de l'étoile de Kleene

On associe à la fermeture de Kleene d'une expression régulière l'automate décrit sur la figure 10.4.

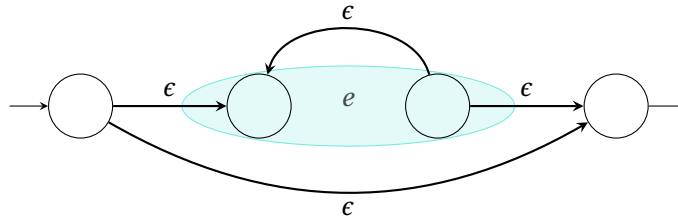
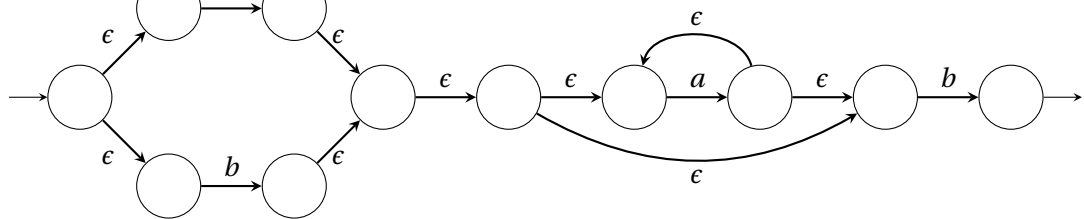


FIGURE 10.4 – Automate associé à la fermeture de Kleene de  $e$

### e Application

■ **Exemple 32** —  $(a|b)a^*b$ . On décompose l'expression régulière en éléments simples concaténés ( $a|b$ ,  $a^*$  et  $b$ ) et on enchaîne les automates associés. L'automate équivalent est :



### f Élimination des transitions spontanées

L'automate de la figure 32 comporte un certain nombre de transitions spontanées. Si, parfois, ces transitions permettent de rendre plus lisible l'automate, elles multiplie cependant les états ce qui n'est pas souhaitable, surtout dans l'optique de programmer cet automate en le déterminisant... Il faut donc trouver une méthode pour éliminer ces transitions spontanées.

**(R)** Même s'il est possible d'éliminer les transitions spontanées une fois qu'on a construit tout l'automate associé à une expression régulière, il est souvent souhaitable de le faire à la volée afin de ne pas aboutir à un automate illisible.

**(M) Méthode 5 — Élimination des transitions spontanées** Il existe deux procédures similaires, une par l'avant, une par l'arrière.

1. Fermeture par l'avant :

- $(p \xrightarrow{a} q \xrightarrow{\epsilon} r) \rightsquigarrow (p \xrightarrow{a} r \text{ et } p \xrightarrow{a} q)$  Pour chaque transition d'un état  $p$  à un état  $q$  portant une lettre  $a$  et pour chaque transition spontanée de  $q$  à un état  $r$ , ajouter une transition de  $q$  à  $r$  portant la lettre  $a$ . Éliminer la transition spontanée.
- $(\rightarrow p \xrightarrow{\epsilon} q) \rightsquigarrow q \in Q_{init}$  Pour chaque transition spontanée d'un état  $p$  initial à un état  $q$ , ajouter  $q$  à l'ensemble des états initiaux. Éliminer la transition spontanée.

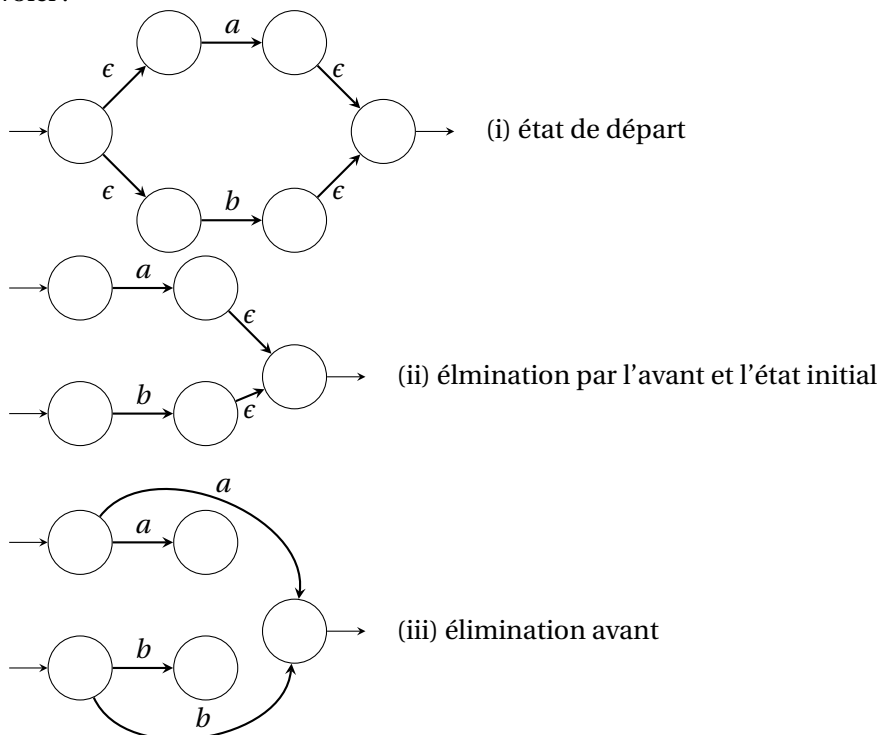
2. Fermeture par l'arrière :

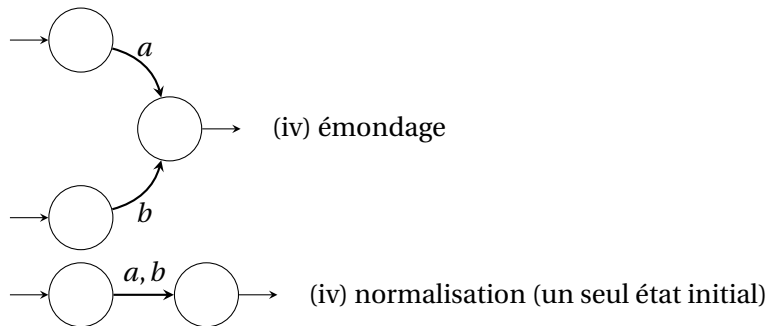
- $(p \xrightarrow{\epsilon} q \xrightarrow{a} r) \rightsquigarrow (p \xrightarrow{a} r \text{ et } q \xrightarrow{a} r)$  Pour chaque transition spontanée d'un état  $p$  à un état  $q$  et pour chaque transition de  $q$  à un état  $r$  portant la lettre  $a$ , ajouter une transition de  $p$  à  $r$  portant la lettre  $a$ . Éliminer la transition spontanée.
- $(p \xrightarrow{\epsilon} q \rightarrow) \rightsquigarrow p \in F$  Pour chaque transition spontanée d'un état  $p$  initial à un état  $q$ , ajouter  $q$  à l'ensemble des états initiaux. Éliminer la transition spontanée.

■ **Exemple 33 — Élimination des transitions spontanées de l'automate de l'exemple 32.**

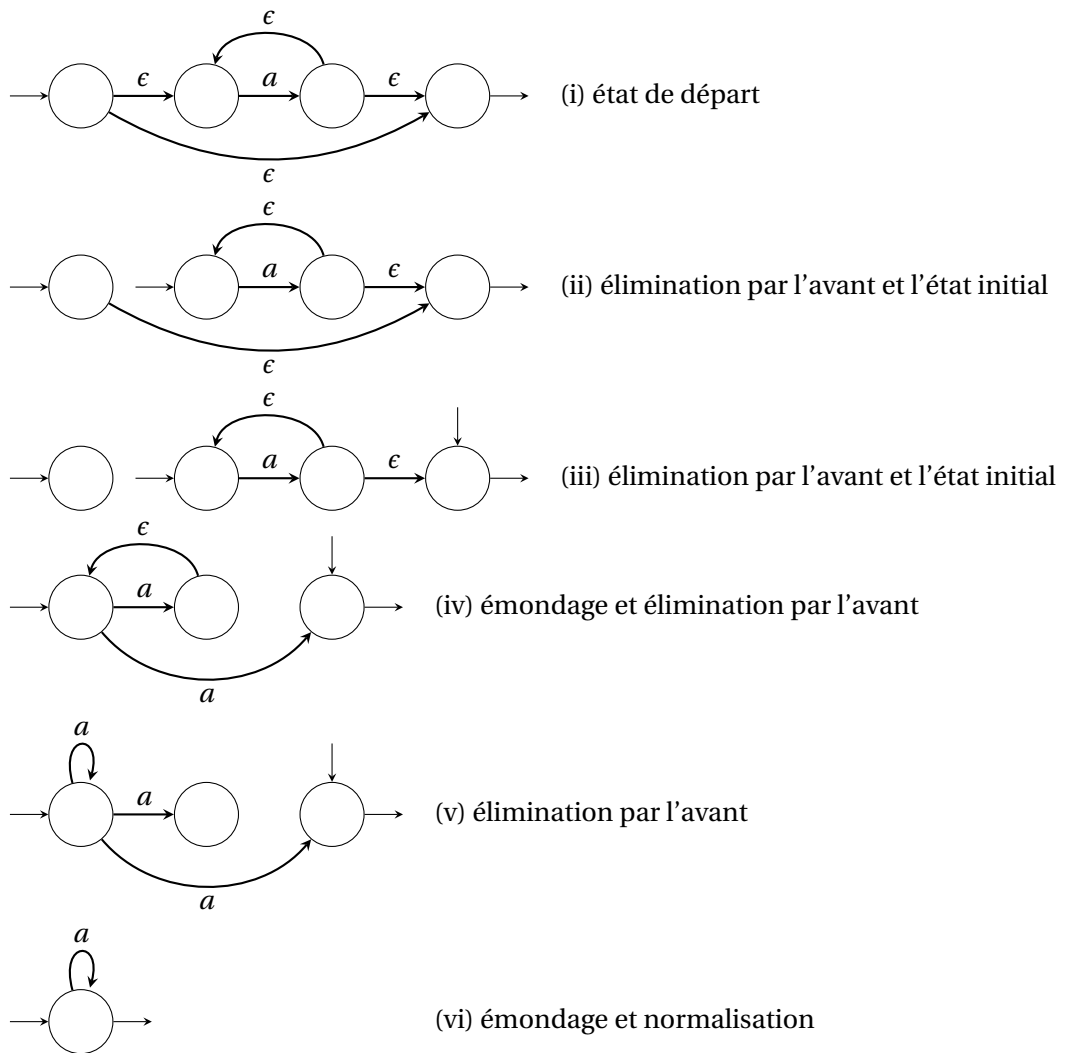
Pour chaque automate associé, on peut déjà appliquer la fermeture avant ou arrière.

Pour l'union  $a|b$ , on trouve l'automate sans transitions spontanées en plusieurs étapes que voici :

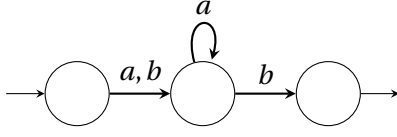




Pour la fermeture de Kleene, on procède de la même manière :



Finalement, on peut maintenant représenter l'automate normalisé (et déterministe) après élimination des transitions spontanées :



## C Algorithme de Berry-Sethi et automate de Glushkov

Les notions de langage local et d'expression régulière linéaire sont introduites dans la seule perspective de construire l'automate de Glushkov[7] associé à une expression régulière linéaire par l'algorithme de Berry-Sethi[3], conformément au programme. C'est un long développement pour une procédure finale relativement simple.

### a Langages locaux

■ **Définition 145 — Ensembles .** Soit  $\mathcal{L}$  un langage sur  $\Sigma$ . On définit quatre ensembles de la manière suivante :

- les premières lettres des mots de  $\mathcal{L}$

$$P(\mathcal{L}) = \{a \in \Sigma, \exists w \in \Sigma^*, aw \in \mathcal{L}\} \quad (10.1)$$

- les dernières lettres des mots de  $\mathcal{L}$  :

$$S(\mathcal{L}) = \{a \in \Sigma, \exists w \in \Sigma^*, wa \in \mathcal{L}\} \quad (10.2)$$

- les facteurs de longueur 2 des mots de  $\mathcal{L}$  :

$$F(\mathcal{L}) = \{v \in \Sigma^*, |v| = 2, \exists u, w \in \Sigma^*, uvw \in \mathcal{L}\} \quad (10.3)$$

- les facteurs de longueur 2 impossibles :

$$N(L) = \Sigma^2 \setminus F(L) \quad (10.4)$$

■ **Définition 146 — Langage local.** Un langage  $\mathcal{L}$  sur  $\Sigma$  est local s'il existe deux parties  $P$  et  $S$  de  $\Sigma$  et une partie  $N$  de  $\Sigma^2$  tels que :

$$\mathcal{L} \setminus \{\epsilon\} = (P\Sigma^* \cap \Sigma^*S) \setminus (\Sigma^*N\Sigma^*) \quad (10.5)$$

Dans ce cas, on a nécessairement  $P = P(\mathcal{L})$ ,  $S = S(\mathcal{L})$ ,  $N = N(\mathcal{L})$ .

**(R)** Cette définition signifie que l'appartenance d'un mot à un langage local peut être établie uniquement en regardant la première lettre, la dernière lettre et tous les blocs de deux lettres de ce mot. On peut imaginer que, pour vérifier, on fait glisser pour comparer tous les blocs de deux lettres non autorisés ( $N$ ) sur le mot. D'où le nom local : on n'a pas besoin d'exa-

miner dans sa globalité le mot, mais uniquement chaque lettre et sa voisine.  $P$ ,  $S$  et  $N$  suffisent donc pour définir un langage local.

■ **Exemple 34 — Langages locaux.** Sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ , on peut déterminer pour chacun des langages suivants les langages  $P$ ,  $S$  et  $N$  et dire s'ils sont locaux :

1.  $\mathcal{L}_{ER}(a^*) : P = \{a\}, S = \{a\}$  et  $N = \{ab, ba, bb\}$ .
2.  $\mathcal{L}_{ER}((ab)^*) : P = \{a\}, S = \{b\}$  et  $N = \{aa, bb\}$ .

■ **Exemple 35 — Langages non locaux.** Sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ , on peut déterminer pour chacun des langages suivants les langages  $P$ ,  $S$  et  $N$  et trouver un contre-exemple pour montrer qu'ils ne sont pas locaux :

1.  $\mathcal{L}_{ER}(a^*(ab)^*) : P = \{a\}, S = \{a, b\}$  et  $N = \{bb\}$ . Mais on observe que le mot  $aba$  est dans  $(P\Sigma^* \cap \Sigma^*S) \setminus (\Sigma^*N\Sigma^*)$  mais pas dans  $\mathcal{L}$ .
2.  $\mathcal{L}_{ER}(a^*|(ab)^*) : \text{idem}$

**(R)** Le dernier exemple montre que les langages locaux ne sont pas stables par union et concaténation.

**Théorème 33 — L'ensemble des langages locaux est stable par intersection.**

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  deux langages locaux, et  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$ . On pose  $P = P(\mathcal{L})$ ,  $S = S(\mathcal{L})$  et  $N = N(\mathcal{L})$ , les ensembles définis comme en 145. Alors on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \setminus \{\epsilon\} &= (\mathcal{L}_1 \setminus \{\epsilon\}) \cap (\mathcal{L}_2 \setminus \{\epsilon\}) \\ &= ((P(\mathcal{L}_1)\Sigma^* \cap \Sigma^*S(\mathcal{L}_1)) \setminus (\Sigma^*N(\mathcal{L}_1)\Sigma^*)) \cap ((P(\mathcal{L}_2)\Sigma^* \cap \Sigma^*S(\mathcal{L}_2)) \setminus (\Sigma^*N(\mathcal{L}_2)\Sigma^*)) \\ &= (P(\mathcal{L}_1)\Sigma^* \cap \Sigma^*S(\mathcal{L}_1) \cap P(\mathcal{L}_2)\Sigma^* \cap \Sigma^*S(\mathcal{L}_2)) \setminus (\Sigma^*N(\mathcal{L}_1)\Sigma^* \cup \Sigma^*N(\mathcal{L}_2)\Sigma^*) \\ &= (P\Sigma^* \cap \Sigma^*S) \setminus (\Sigma^*N\Sigma^*). \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{L}$  est bien local. ■

**Théorème 34 — L'union de deux langages locaux définis sur deux alphabets disjoints est un langage local.**

*Démonstration.* Soit  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  les alphabets **disjoints** sur lesquels sont définis  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ , deux langages locaux et  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$  défini sur  $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ . On pose  $P = P(\mathcal{L})$ ,  $S = S(\mathcal{L})$  et  $N = N(\mathcal{L})$ , les ensembles définis comme en 145.

On doit montrer l'inclusion  $(P(\mathcal{L})\Sigma^* \cap \Sigma^*S(\mathcal{L})) \setminus (\Sigma^*N(\mathcal{L})\Sigma^*) \subset \mathcal{L}$  puisque l'inclusion réciproque est toujours vraie.

Considérons donc un mot  $w \in (P(\mathcal{L})\Sigma^* \cap \Sigma^*S(\mathcal{L})) \setminus (\Sigma^*N(\mathcal{L})\Sigma^*)$  que l'on décompose en lettres  $w = a_1 \dots a_n$ . Montrons que  $w \in \mathcal{L}$

- Soit  $a_1 \in P(\mathcal{L}) = P(\mathcal{L}_1) \cup P(\mathcal{L}_2)$ , on peut supposer sans perte de généralité que  $a_1 \in P(\mathcal{L}_1)$ , alors  $a_1 \in \Sigma_1$ .

- $a_1.a_2 \in \Sigma^2 \setminus N(\mathcal{L}) = F(\mathcal{L}_1) \cup F(\mathcal{L}_2)$ , or  $a_1 \in \Sigma_1$  et les alphabets  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont disjoints, donc nécessairement  $a_1.a_2 \in F(\mathcal{L}_1)$  et  $a_2 \in \Sigma_1$ .
- De proche en proche, on montre que  $a_i.a_{i+1} \in F(\mathcal{L}_1)$  et  $a_i \in \Sigma_1$  pour tout  $i$ .
- Enfin,  $a_n \in S(\mathcal{L}) = S(\mathcal{L}_1) \cup S(\mathcal{L}_2)$  et  $a_n \in \Sigma_1$  donc  $a_n \in S(\mathcal{L}_1)$ .
- Finalement  $w \in (P(\mathcal{L}_1)\Sigma^* \cap \Sigma^*S(\mathcal{L}_1)) \setminus (\Sigma^*N(\mathcal{L}_1)\Sigma^*) = \mathcal{L}_1$  car  $\mathcal{L}_1$  est local.

En partant de l'hypothèse que  $a_1 \in \Sigma_2$ , on en aurait conclu que  $w \in \mathcal{L}_2$ . On en déduit que  $w \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$  et, donc,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$  est un langage local. ■

**Théorème 35 — La concaténation de deux langages locaux définis sur deux alphabets disjoints est un langage local.**

*Démonstration.* Soit  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  les alphabets **disjoints** sur lesquels sont définis  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ , deux langages locaux et  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$  défini sur  $\Sigma = \Sigma_1\Sigma_2$ . On pose  $P = P(\mathcal{L})$ ,  $S = S(\mathcal{L})$  et  $N = N(\mathcal{L})$ , les ensembles définis comme en 145.

On doit montrer l'inclusion  $(P(\mathcal{L})\Sigma^* \cap \Sigma^*S(\mathcal{L})) \setminus (\Sigma^*N(\mathcal{L})\Sigma^*) \subset \mathcal{L}$  puisque l'inclusion réciproque est toujours vraie.

$$P(\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2) = \begin{cases} \{a \in \Sigma_2, \exists w \in \Sigma_2^*, aw \in \mathcal{L}_2\} & \text{si } \epsilon \in \mathcal{L}_1 \\ \{a \in \Sigma_1, \exists w \in \Sigma_1^*\Sigma_2^*, aw \in \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$S(\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2) = \begin{cases} \{a \in \Sigma_1, \exists w \in \Sigma_1^*, wa \in \mathcal{L}_1\} & \text{si } \epsilon \in \mathcal{L}_2^* \\ \{a \in \Sigma_2, \exists w \in \Sigma_1^*\Sigma_2^*, wa \in \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2) = \{v \in \Sigma_1^*\Sigma_2^*, |v| = 2, \exists u, w \in \Sigma_1^*\Sigma_2^*, uvw \in \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\}$$

On considère un mot  $w \in (P(\mathcal{L})\Sigma^* \cap \Sigma^*S(\mathcal{L})) \setminus (\Sigma^*N(\mathcal{L})\Sigma^*)$  et on le décompose en lettres  $w = a_0 \dots a_n$ . On traite différents cas :

- Si  $a_0 \in \Sigma_2$ , alors  $\epsilon \in \mathcal{L}_1$  et  $a_2 \in P(\mathcal{L}_2)$ . De proche en proche on montre que  $a_i.a_{i+1} \in F(\mathcal{L}_2)$ ,  $a_i \in \Sigma_2$  pour tout  $i$  et  $a_n \in S(\mathcal{L}_2)$ , donc  $w \in \mathcal{L}_2$  car  $\mathcal{L}_2$  est local.
- Si  $a_0 \in \Sigma_1$ , alors  $a_0 \in P(\mathcal{L}_1)$ . Notons  $a_0 \dots a_k$  le plus long préfixe de  $w$  qui soit dans  $\Sigma_1^*$ . On montre de proche en proche que  $a_i.a_{i+1} \in F(\mathcal{L}_1)$  pour  $i < k$ . Puis deux cas se présentent :
  - Si  $k = n$  alors  $a_n \in S(\mathcal{L}_1)$ , donc  $w \in \mathcal{L}_1$  car  $\mathcal{L}_1$  est local.
  - Si  $k < n$ , on a  $a_k.a_{k+1} \in S(\mathcal{L}_1)P(\mathcal{L}_2)$  donc  $a_k \in S(\mathcal{L}_1)$  et  $a_{k+1} \in P(\mathcal{L}_2)$ . On prouve alors que  $a_0 \dots a_k \in \mathcal{L}_1$  et  $a_{k+1} \dots a_n \in \mathcal{L}_2$  avec les mêmes arguments.

Finalement,  $w \in \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$  et  $\mathcal{L}$  est local. ■

**Théorème 36 — La fermeture de Kleene d'un langage local est un langage local.**

*Démonstration.* On pose  $P = P(\mathcal{L})$ ,  $S = S(\mathcal{L})$  et  $N = N(\mathcal{L})$ , les ensembles définis comme en 145.

On a :

$$P(\mathcal{L}^*) = \{a \in \Sigma, \exists w \in \Sigma^*, aw \in \mathcal{L}^*\}$$

$$S(\mathcal{L}^*) = \{a \in \Sigma, \exists w \in \Sigma^*, wa \in \mathcal{L}^*\}$$

$$F(\mathcal{L}^*) = \{v \in \Sigma^*, |v| = 2, \exists u, w \in \Sigma^*, uvw \in \mathcal{L}^*\}$$

On considère un mot  $u = a_0 \dots a_n \in (P(\mathcal{L}^*)\Sigma^* \cap \Sigma^*S(\mathcal{L}^*)) \setminus (\Sigma^*N(\mathcal{L}^*)\Sigma^*)$  et on cherche à montrer qu'il appartient à  $\mathcal{L}^*$

De la même manière que précédemment, si  $a_0 \in \Sigma$  alors  $a_0 \in P(\mathcal{L})$ . Les facteurs de longueur 2 de  $w$  sont dans  $F(\mathcal{L})$  et  $a_n \in \mathcal{L}$ . On en déduit une décomposition de  $w$  en mots dans  $(P(\mathcal{L})\Sigma^* \cap \Sigma^*S(\mathcal{L})) \setminus (\Sigma^*N(\mathcal{L})\Sigma^*)$  donc dans  $\mathcal{L}$  car  $\mathcal{L}$  est local. Finalement,  $w \in \mathcal{L}^*$ , car qui peut le plus peut le moins et  $\mathcal{L}^*$  est local. ■

## b Expressions régulières linéaires

Les langages définis par des expressions régulières ne sont donc pas toujours locaux. En revanche les langages définis par une expression régulière linéaire le sont.

■ **Définition 147 — Expression régulière linéaire.** Une expression régulière  $e$  sur  $\Sigma$  est linéaire si toute lettre de  $\Sigma$  apparaît **au plus une fois** dans  $e$ .

■ **Exemple 36 — Expression régulière linéaire.** L'expression  $(ab)^*$  est linéaire mais pas  $(ab)^*a^*$ .

**Théorème 37 — Toute expression régulière linéaire dénote un langage local.**

*Démonstration.* On procède par induction structurelle et en utilisant les propriétés des langages locaux.

**Cas de base :**  $\emptyset, \epsilon$  et  $a \in \Sigma$  sont des expressions régulières linéaires.

- $\mathcal{L}_{ER}(\emptyset) = \emptyset$  et on a bien  $(P\Sigma^* \cap \Sigma^*S) \setminus (\Sigma^*N\Sigma^*) = \emptyset \setminus (\Sigma^*\Sigma^2\Sigma^*) = \emptyset$
- $\mathcal{L}_{ER}(\epsilon) = \epsilon$  et on a bien  $(P\Sigma^* \cap \Sigma^*S) \setminus (\Sigma^*N\Sigma^*) = \epsilon \setminus (\Sigma^*(\Sigma^2 \setminus \{\epsilon\})\Sigma^*) = \epsilon$
- $\mathcal{L}_{ER}(a) = \{a\}$  et on a bien  $(P\Sigma^* \cap \Sigma^*S) \setminus (\Sigma^*N\Sigma^*) = \{a\} \setminus (\Sigma^*(\Sigma^2 \setminus \{a\})\Sigma^*) = \{a\}$

**Pas d'induction :**

**(union)** Soit  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  des alphabets **disjoints**. Soient  $e_1$  et  $e_2$  deux expressions régulières linéaires définies respectivement sur  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Alors  $e_1|e_2$  est régulière et linéaire et la sémantique des expressions régulières permet d'affirmer que  $\mathcal{L}_{ER}(e_1|e_2) = \mathcal{L}_{ER}(e_1) \cup \mathcal{L}_{ER}(e_2)$ . Or, l'union de deux langages locaux dont les alphabets sont disjoints est un langage local. Donc  $\mathcal{L}_{ER}(e_1|e_2)$  est un langage local.

**(concaténation)** on procède de même en utilisant la concaténation de deux langages locaux.

**(union)** on procède de même en utilisant la fermeture de Kleene de deux langages locaux.



Finalement, les expressions régulières linéaires dénotent des langages locaux. ■

Ⓡ La réciproque de ce théorème est fausse : par exemple, le langage  $L(aa^*)$  est local mais ne peut pas être représenté par une expression régulière linéaire.

### c Automate locaux

#### Automates locaux

■ **Définition 148** — . Un automate fini déterministe  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_i, \delta, F)$  est local si pour toute lettre  $a \in \Sigma$ , il existe un état  $q \in Q$  tel que toutes les transitions étiquetées par  $a$  arrivent dans  $q$ .

**Théorème 38** — Tout langage local  $\mathcal{L}$  est reconnaissable par un automate local. De plus, si  $\mathcal{L}$  ne contient pas le mot vide  $\epsilon$ , alors l'automate est normalisé.

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{L}$  un langage local. On pose  $P = P(\mathcal{L})$ ,  $S = S(\mathcal{L})$  et  $N = N(\mathcal{L})$ , les ensembles définis comme en 145.

On considère l'automate  $\mathcal{A} = (Q, \Sigma \cup \{\epsilon\}, \{\epsilon\}, \delta, S \cup \{\epsilon\})$  et la fonction  $\delta$  définie par :

$$\forall \lambda \in P, \delta(\epsilon, \lambda) = \lambda \quad (10.6)$$

$$\forall \lambda, \mu \in F, \delta(\lambda, \mu) = \mu \quad (10.7)$$

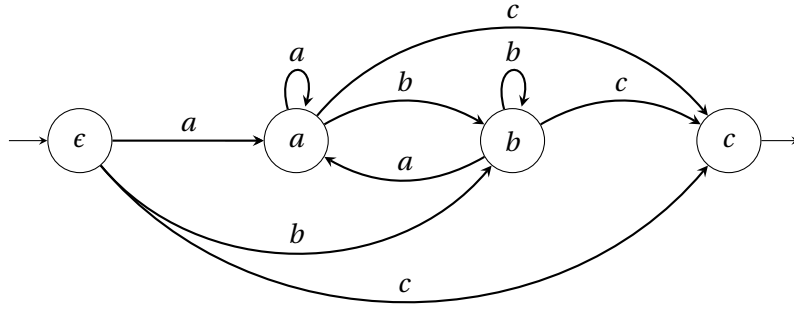
$$(10.8)$$

Par construction de cet automate, un mot  $w = a_0 a_1 \dots a_n$  est reconnu si et seulement si :

- $a_0 \in P$ ,
- $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, a_i a_{i+1} \in F$
- et  $a_n \in S$ .

Comme  $\mathcal{L}$  est local, on a bien  $\mathcal{L}_{auto}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}$ . Si  $\mathcal{L}$  ne contient pas le mot vide, il suffit de l'exclure des états accepteurs et on obtient un automate normalisé. ■

■ **Exemple 37** — **Automate associé à l'expression régulière linéaire  $(a|b)^*c$**  . Le langage dénoté par cette expression régulière est local (le montrer!). On construit l'automate défini lors de la démonstration du théorème 38. Comme ce langage ne comporte pas le mot vide, on a retiré  $\epsilon$  des états accepteurs et l'automate est normalisé.



#### d Automate de Glushkov et algorithme de Berry-Sethi

On cherche maintenant un algorithme pour transformer une expression régulière (pas nécessairement linéaire) en un automate fini.

**M** **Méthode 6 — Algorithme de Berry-Sethi** Pour obtenir un automate fini local reconnaissant le langage  $\mathcal{L}_{ER}(e)$  à partir d'une expressions régulière  $e$  sur un alphabet  $\Sigma$  :

1. Linéariser l'expression  $e$  : cela consiste à numéroter toutes les lettres qui apparaissent afin de créer une expression rationnelle linéaire  $e'$ .
2. Déterminer les ensembles  $P$ ,  $S$  et  $F$  associés au langage local  $\mathcal{L}(e')$ .
3. Déterminer un automate local  $\mathcal{A}$  reconnaissant  $\mathcal{L}_{ER}(e')$  à partir de  $P, S$  et  $F$ .
4. Supprimer les numéros sur les transitions et faire réapparaître l'alphabet initial  $\Sigma$ .

L'automate obtenu est nommé automate de Glushkov[7]. C'est un automate sans transitions spontanées qui n'est pas nécessairement déterministe mais on peut le déterminer en utilisant la procédure de déterminisation d'un AFND (cf méthode 4). Il possède  $|\Sigma_e|$  états où  $\Sigma_e$  est l'alphabet étendu obtenu en faisant le marquage.  $|\Sigma_e|$  correspond donc au nombre total de lettres dans  $e$  en comptant les répétitions. Dans le pire des cas, le nombre de transitions de l'automate est en  $O(|\Sigma_e|^2)$ .

**M** **Méthode 7 — Linéarisation de l'expression régulière** À partir de l'expression régulière de départ, on numérote à partir de 1 chaque lettre de l'expression dans l'ordre de lecture.

Si une lettre apparaît plusieurs fois, elle est numérotée autant de fois qu'elle apparaît avec un numéro différent.

Par exemple, la linéarisation de  $ab|(ac)^*$  est  $a_1b_1|(a_2c_1)$ .

**R** La linéarisation d'une expression est en fait un marquage par une fonction

$$m : \{a_1, a_2, \dots, b_1, \dots\} \longrightarrow \Sigma \quad (10.9)$$

que l'on utilise également à la fin de l'algorithme de Berry-Sethi 6 pour supprimer les numéros.

La complexité de l'algorithme de Berry-Sethi est quadratique dans le pire des cas. Si  $n$  est le nombre de lettres rencontrées dans l'expression linéarisée, on a :

- la linéarisation est en  $O(n)$ ,
- la construction des ensembles  $P$ ,  $S$ , et  $F$  est linéaire en  $O(n)$ ,
- la construction de l'automate avec les ensembles précédents est au pire quadratique en  $O(n^2)$  (on construit  $n$  chemins qui peuvent être de longueur  $n$ ),
- la suppression des marquages est linéaire en  $O(n)$ .

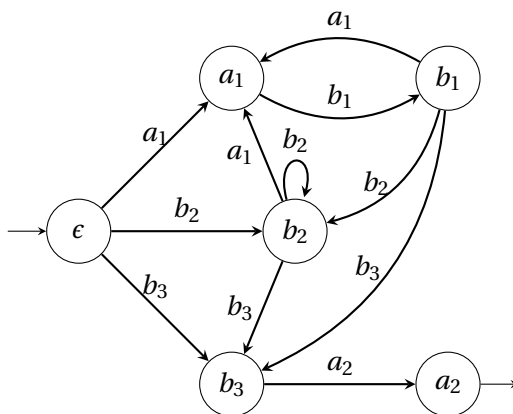
■ **Exemple 38 — Construire l'automate de Glushkov associé à l'expression régulière  $(ab|b)^*ba$ .** 1.

Linéarisation :  $(ab|b)^*ba \longrightarrow (a_1b_1|b_2)^*b_3a_2$ ,

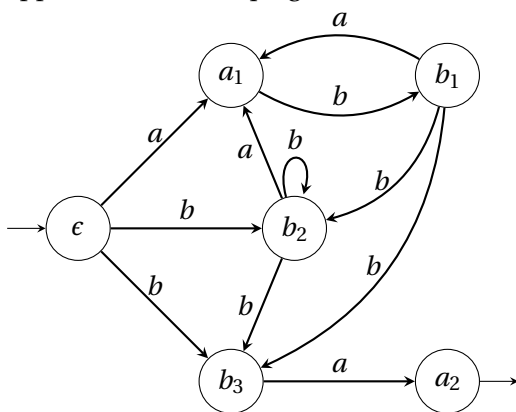
2. Construction des ensembles associés au langage local de l'expression linéarisée :

- $P = \{a_1, b_2, b_3\}$
- $S = \{a_2\}$
- $F = \{a_1b_1, b_1a_1, b_1b_3, b_2b_2, b_2b_3, b_2a_1, b_3a_2, b_1b_2\}$

3. Construction de l'automate local associé :



Suppression des marquages des transitions (numéros) :

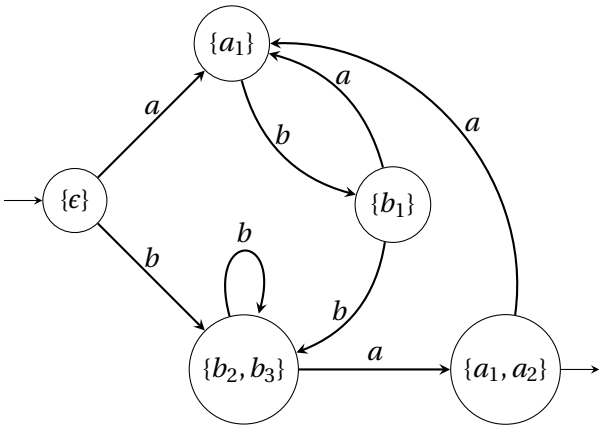


Déterminisation :

On construit la fonction de transition de proche en proche à partir de l'état initial :

	$\downarrow \{\epsilon\}$	$\{a_1\}$	$\{b_1\}$	$\{b_2, b_3\}$	$\uparrow \{a_1, a_2\}$
a	$\{a_1\}$		$\{a_1\}$	$\{a_1, a_2\}$	
b	$\{b_2, b_3\}$	$\{b_1\}$	$\{b_2, b_3\}$	$\{b_2, b_3\}$	$\{b_1\}$

ce qui se traduit par l'AFD :



D Comparaison Thompson / Berry-Sethi

Étape	Thompson	Berry-Sethi
Préparation	Aucune	Linéariser l'expression Construire les ensembles $P$ , $S$ et $F$
Automate	Construction directe en $O(n)$	Construction en $O(n^2)$
Finition	Supprimer les transitions spontanées	Aucun

TABLE 10.2 – Comparaison des algorithmes de Thompson et Berry-Sethi.

## **DES AUTOMATES AUX EXPRESSIONS RATIONNELLES**

---

**À la fin de ce chapitre, je sais :**



Passage d'un automate à une expression régulière. Élimination des états. Théorème de Kleene. On se limite à la description du procédé d'élimination et à sa mise en œuvre sur des exemples d'automates de petite taille ; cela constitue la preuve du sens réciproque du théorème de Kleene.



# 12

## LEMME DE L'ÉTOILE

---

À la fin de ce chapitre, je sais :



Lemme de étoile. Soit le langage reconnu par un automate à états : pour tout tel que  $\|$  , il existe ,, tels que  $=$  ,  $\|$  , et.





## **Cinquième partie**

### **Logique**



## DÉDUCTION NATURELLE

---

**À la fin de ce chapitre, je sais :**



2.3 Dédution naturelle pour la logique propositionnelle Il sagit de présenter les preuves comme permettant de pallier deux problèmes de la présentation du calcul propositionnel faite en première année : nature exponentielle de la vérification dune tautologie, faible lien avec les preuves mathématiques. Il ne sagit, en revanche, que dintroduire la notion darbre de preuve. La déduction naturelle est présentée comme un jeu de règles dinférence simple permettant de faire un calcul plus efficace que létude de la table de vérité. Toute technicité dans les preuves dans ce système est à proscrire. On sabstient dimplémenter ces règles. Lambition est dêtre capable décrire de petites preuves dans ce sys- tème. l Ministère de lenseignement supérieur, de la recherche et de linnovation, 2021 Option informatique Filière MP <https://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr> 7/10



## **Sixième partie**

### **Annexes**



## BIBLIOGRAPHIE

---

### Articles

- [1] Walter William Rouse BALL. “The eight queens problem”. In : *Mathematical recreations and essays* (1960), pages 97-102 (cf. page 10).
- [2] Richard BELLMAN. “On a routing problem”. In : *Quarterly of applied mathematics* 16.1 (1958), pages 87-90 (cf. page 45).
- [3] Gerard BERRY et Ravi SETHI. “From regular expressions to deterministic automata”. In : *Theoretical computer science* 48 (1986). Publisher : Elsevier, pages 117-126 (cf. page 111).
- [4] E. W. DIJKSTRA. “A note on two problems in connexion with graphs”. In : *Numerische Mathematik* 1.1 (1<sup>er</sup> déc. 1959), pages 269-271. ISSN : 0945-3245. DOI : [10.1007/BF01386390](https://doi.org/10.1007/BF01386390). URL : <https://doi.org/10.1007/BF01386390> (visité le 27/07/2022) (cf. page 41).
- [5] Robert W FLOYD. “Algorithm 97 : shortest path”. In : *Communications of the ACM* 5.6 (1962). Publisher : ACM New York, NY, USA, page 345 (cf. page 47).
- [7] Victor Mikhaylovich GLUSHKOV. “The abstract theory of automata”. In : *Russian Mathematical Surveys* 16.5 (1961). Publisher : IOP Publishing, page 1 (cf. pages 111, 116).
- [8] Donald B JOHNSON. “Efficient algorithms for shortest paths in sparse networks”. In : *Journal of the ACM (JACM)* 24.1 (1977). Publisher : ACM New York, NY, USA, pages 1-13 (cf. page 45).
- [9] Joseph B KRUSKAL. “On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem”. In : *Proceedings of the American Mathematical society* 7.1 (1956). Publisher : JSTOR, pages 48-50 (cf. page 51).
- [10] Casimir KURATOWSKI. “Sur le probleme des courbes gauches en topologie”. In : *Fundamenta mathematicae* 15.1 (1930), pages 271-283 (cf. page 15).
- [13] Robert Clay PRIM. “Shortest connection networks and some generalizations”. In : *The Bell System Technical Journal* 36.6 (1957). Publisher : Nokia Bell Labs, pages 1389-1401 (cf. page 51).
- [14] Bernard ROY. “Transitivité et connexité”. In : *Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances De L Academie Des Sciences* 249.2 (1959). Publisher : GAUTHIER-VILLARS/EDITIONS ELSEVIER 23 RUE LINOIS, 75015 PARIS, FRANCE, pages 216-218 (cf. page 47).
- [16] Stephen WARSHALL. “A theorem on boolean matrices”. In : *Journal of the ACM (JACM)* 9.1 (1962). Publisher : ACM New York, NY, USA, pages 11-12 (cf. page 47).

## **Livres**

- [11] Édouard LUCAS. *Récréations mathématiques*. Tome 2. Gauthier-Villars et fils, 1883 (cf. page 23).

## **Sites web**