Syntaxe des formules logiques

OPTION INFORMATIQUE - TP nº 2.1 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

☞ utiliser la définition inductive des formules logiques pour calculer la hauteur ou la taille

☞ construire une table de vérité

☞ calculer une forme normale conjonctive ou disjonctive associée à une formule logique

☞ modéliser un énoncé simple du langage naturel en propositions logiques

A Définition inductive des formules logiques

En s'inspirant de la définition inductive des formules logiques, on se dote du type de données OCaml `formule` suivant :

```
type formule =
    | T (* true *)
    | F (* false *)
    | Var of int (* variable *)
    | Not of formule (* negation *)
    | And of formule *formule (* conjonction *)
    | Or of formule * formule  (* disjonction *)
```

L'expression `Var of int` signifie qu'on représente les variables d'une formule logique par un numéro, ce qui est le cas dans les logiciels standard de logique. Par exemple, pour les variables des formules ci-dessous, on peut choisir la convention suivante : $a \longrightarrow 0$, $b \longrightarrow 1$, $c \longrightarrow 2$.

A1. Représenter les arbres syntaxiques des formules logiques suivantes, puis les coder en OCaml.

(a) $f_1 : a \vee (b \wedge c)$

(b) $f_2 : (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg(c \vee a))$

(c) $f_3 : \neg a \vee (a \Longrightarrow b)$

(d) $f_4 : (a \wedge (b \Longleftrightarrow c))$

A2. Proposer une fonction de signature `valuation : int -> bool` qui implémente une valuation des variables propositionnelles a, b et c telle que les formules f_1 et f_2 soient vraies et f_3 et f_4 fausses. On utilisera le filtrage de motif. Les variables sont représentées par leur numéro : $a \longrightarrow 0$, $b \longrightarrow 1$, $c \longrightarrow 2$. Si le numéro de variable n'est pas connu, la fonction échoue et renvoie le message `"Unknown variable"`!.

A3. Écrire une fonction **récursive** de signature `evaluation : (int -> bool)-> formule -> bool` qui évalue une formule logique d'après une valuation donnée. On utilisera le firltrage de motif. Cette fonction s'appuie sur la définition inductive de l'évaluation telle que définie dans le cours.

A4. Vérifier que la valuation choisie est bien telle que spécifiée à la question A.2.

B Taille, hauteur et nombre de termes d'une formule logique

B1. En utilisant la définition de la fonction `taille` d'une formule logique, écrire une fonction de signature `taille : formule -> int` qui renvoie la taille d'une formule.

B2. Vérifier sur les arbres des formules f_1, f_2, f_3 et f_4 les résultats produits par la fonction `taille`.

B3. En utilisant la définition de la fonction `hauteur` d'une formule logique, écrire une fonction de signature `hauteur : formule -> int` qui renvoie la hauteur d'une formule.

B4. Vérifier sur les arbres des formules f_1, f_2, f_3 et f_4 les résultats produits par la fonction `hauteur`.

B5. On code conventionnellement les variables par des entiers en commençant par zéro. Proposer une fonction de signature `max_var : formule -> int -> int` qui renvoie l'entier le plus grand représentant une variable propositionnelle dans une formule. En déduire une fonction `nb_var : formule -> int` qui renvoie le nombre de variables propositionnelles utilisées dans une formule.

B6. Vérifier sur f_1, f_2, f_3 et f_4 les résultats produits par les fonction `highest_var` et `nb_var`.

C De la table de vérité à la forme normale (i)

On considère la formule $\psi = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$.

C1. Construire l'arbre syntaxique de ϕ.

C2. Établir la table de vérité de ϕ.

C3. Proposer une forme normale disjonctive de ϕ

C4. Proposer une forme normale conjonctive de ϕ

D De la table de vérité à la forme normale (ii)

On considère la formule $\phi = ((a \Longrightarrow \neg b) \Longrightarrow \neg a) \wedge c$.

D1. Construire l'arbre syntaxique de ϕ.

D2. Établir la table de vérité de ϕ.

D3. Proposer une forme normale disjonctive de ϕ

D4. Proposer une forme normale conjonctive de ϕ

E Du langage naturel à la logique propositionnelle

On considère l'énoncé suivant :

> Si le professeur a bien dormi, l'examen est conforme aux exercices de TD. Si j'apprends mon cours, je réussis à trouver la solution des exercices de TD. Si je réussis à trouver la solution des exercices de TD et que l'examen est conforme aux exercices de TD, je réussis l'examen.

E1. Modéliser l'énoncé à l'aide de propositions.

E2. Peut-on affirmer que, dans tous les cas, si le professeur dort bien, l'élève réussi à l'examen ?

On considère maintenant l'énoncé suivant :

Un comité d'éthique composé de quatre membres (Alice, Bruno, Clara et David) doit prendre une décision concernant un projet de recherche. Chaque membre peut soit approuver le projet, soit s'y opposer.

Lors d'une réunion préliminaire, les membres ont exprimé leurs positions :

- Alice dit : «Si Bruno approuve le projet, alors je l'approuve aussi.»
- Bruno dit : «J'approuve le projet si et seulement si Clara s'y oppose.»
- Clara dit : «J'approuve le projet si et seulement si David l'approuve.»
- David dit : «Si au moins l'un des trois autres membres l'approuve, alors j'approuve le projet.»

Par ailleurs, le règlement du comité stipule que :

- Au moins l'un des deux membres seniors (Alice ou Bruno) doit approuver le projet.
- Une décision n'est valide que si au moins l'un des deux membres juniors (Clara ou David) approuve le projet.

On définit quatre variables booléennes A, B, C et D qui valent VRAI si le membre correspondant (Alice, Bruno, Clara, David) approuve le projet, et FAUX s'il s'y oppose.

E3. Traduire toutes ces contraintes en une formule de logique propositionnelle de forme normale conjonctive (FNC).

E4. Déterminez quels membres approuvent le projet et quels membres s'y opposent. Justifiez rigoureusement votre réponse.