

# Automates finis non déterministes

OPTION INFORMATIQUE - TP n° 4.1 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ reconnaître un automate fini non déterministe (AFND)
- ☞ déterminer un AFND
- ☞ expliquer comment éliminer les transitions spontanées

## A Déterminisme?

Soient les automates décrits sur les figures 1, 2 et 3 sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$ .



FIGURE 1 –  $\mathcal{A}_1$



FIGURE 2 –  $\mathcal{A}_2$



FIGURE 3 –  $\mathcal{A}_3$

A1. Les automates  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}_2$  et  $\mathcal{A}_3$  sont-ils déterministes? Pourquoi?

**Solution :** Non, car ils possèdent tous au moins une transition multiple étiquetée par une même lettre. Par exemple, la lettre  $b$  pour les transitions  $1 \rightarrow 1$  et  $1 \rightarrow 2$  pour l'automate  $\mathcal{A}_1$ .

- A2. L'automate  $\mathcal{A}_1$  reconnaît-il le mot  $aabbb$ ? Construire l'arbre de l'exécution de cet automate pour ce mot.
- A3. Même question pour le mot  $bbbaa$  et l'automate  $\mathcal{A}_2$ .
- A4. Même question pour le mot  $abab$  et l'automate  $\mathcal{A}_3$ .
- A5. Décrire dans le langage naturel les langages reconnus par les automates  $\mathcal{A}_1$ ,  $\mathcal{A}_2$  et  $\mathcal{A}_3$ .

**Solution :**

- $\mathcal{A}_1$  est le langage des mots qui commencent par un  $a$  et finissent par un  $b$ .
- $\mathcal{A}_2$  est le langage des mots dont l'avant dernière lettre est un  $b$ .
- $\mathcal{A}_3$  est le langage des mots formés par le facteur  $ab$ .

## B Déterminisation d'un AFND

Soit l'automate  $\mathcal{A}$  suivant :



- B1. Pourquoi l'automate suivant est-il non déterministe?

**Solution :** Lorsqu'on se trouve en 0, 1 ou 3, il existe des transitions multiples associées à une seule lettre. Par exemple, de 0 lorsqu'on reçoit la lettre  $a$ , on peut aller en 0 ou en 1.

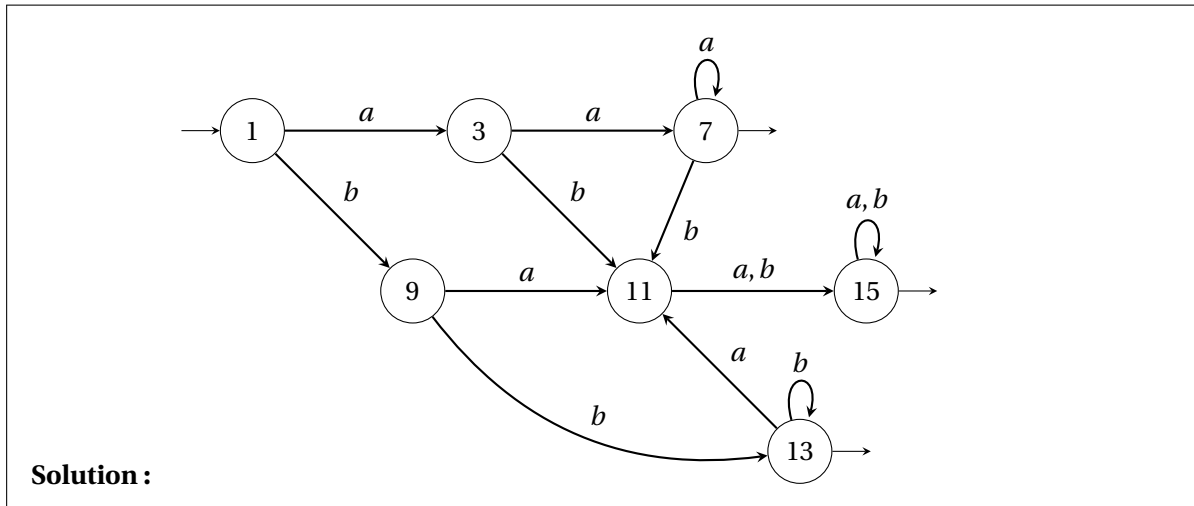
- B2. Quel est le langage reconnu par cet automate?

**Solution :** Le mots composés de  $a$  et de  $b$  contenant au moins deux  $a$  et finissant par  $a$  ou au moins deux  $b$  et finissant par  $b$ .

- B3. Déterminiser l'automate fini non déterministe  $\mathcal{A}$  suivant. On procédera en construisant le tableau des états de l'automate déterministe associé.

Solution :	binaire	$\downarrow\{0\}$	$\{0,1\}$	$\uparrow\{0,1,2\}$	$\{0,1,3\}$	$\uparrow\{0,1,2,3\}$	$\{0,3\}$	$\{0,2,3\}$
		$\downarrow 1$	3	$\uparrow 7$	11	$\uparrow 15$	9	$\uparrow 13$
<i>a</i>		$\{0,1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,1,3\}$
<i>b</i>		$\{0,3\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,1,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,2,3\}$	$\{0,2,3\}$

B4. Dessiner l'automate déterministe calculé précédemment.



## C Modélisation d'un automate non déterministe en OCaml

On choisit de modéliser un automate fini non déterministe par un type algébrique de la manière suivante : les états sont représentés par des types `int`. Les lettres sont des types `char`. On représente les états par une `int list` et l'alphabet par une `char list`. On spécifie les états initiaux et accepteurs par une `int list`. Les transitions possibles forment une `(int * char * int) list`. Cette solution d'implémentation présente l'avantage de coller au plus prêt à la définition mathématique d'un automate.

```
1 type ndfsm = { states : int list;
2               alphabet : char list;
3               initial : int list;
4               transitions : (int * char * int) list;
5               accepting : int list};;
```

C1. Créer une variable `automata` qui représente l'automate non déterministes  $\mathcal{A}$  de la section B.

**Solution :**

```
1 let sigma = ['a'; 'b'];;
2 let states = [0; 1; 2; 3];;
3 let init = [0];;
4 let final = [2];;
5 let trans = [ (0,'a',0); (0,'b',0); (0,'a',1); (0,'b',3);
6 (1,'a',1); (1,'b',1); (1,'a',2);
7 (3,'a',3); (3,'b',3); (3,'b',2)];;
```

```

8
9 let automata = {
10     states = states;
11     alphabet = sigma;
12     initial = init;
13     transitions = trans;
14     accepting = final};;

```

## D Codage de l'algorithme de déterminisation

On souhaite implémenter l'algorithme de déterminisation d'un automate fini non déterministe. Pour cela, on choisit de représenter un élément de  $\mathcal{P}(Q)$ , l'ensemble des parties de  $Q$ , par une `int list`, c'est à dire une liste d'états. Si le nombre d'états de l'automate non déterministe est  $n$ , alors le cardinal de  $\mathcal{P}(Q)$  est  $2^n$ . C'est pourquoi on choisit de coder chaque état par un nombre entre 0 et  $2^n - 1$ . Ce nombre est construit d'une manière univoque comme suit : chaque état de l'automate de départ est codé de 0 à  $n - 1$ ; chaque état associé à un élément de  $\mathcal{P}(Q)$  est obtenu en effectuant la somme des puissances de 2 associées à un état. Par exemple, pour la partition  $[0;2;3]$  on aura  $2^0 + 2^2 + 2^3 = 11 = 1011_2$  : l'état correspondant de l'automate déterministe sera donc le numéro 11.

- D1. Écrire une fonction de signature `get_partition_number_from_list : int list -> int` qui renvoie le numéro associé à un élément de  $\mathcal{P}(Q)$ , c'est à dire l'état de l'automate déterministe associé à un ensemble d'états de l'automate non déterministe. On utilisera la fonction `lsl` qui permet de calculer rapidement une puissance de 2. Par exemple, `1 lsl 3` calcule  $2^3$ .

**Solution :** Deux versions, avec ou sans folding.

```

1 let get_partition_number_from_list qset =
2     List.fold_left (fun acc q -> acc + (1 lsl q)) 0 qset;;
3
4 let rec get_partition_number_from_list qset =
5     match qset with
6     | [] -> 0
7     | q::t -> (1 lsl q) + (get_partition_number_from_list t);;

```

- D2. Écrire une fonction de signature `successors : ndfsm -> int -> char -> int list` qui renvoie les états suivants possibles. L'automate est dans un certain état (`int`) et il reçoit une lettre (`char`), le tout est passé en paramètres.

**Solution :** Deux version, avec ou sans folding.

```

1 let successors a state letter =
2     List.fold_left (fun acc (p,l,n) -> if p = state && l = letter then (n::
3         acc) else acc ) [] a.transitions;;
4
5 let successors a state letter =
6     let rec aux trans succ =
7         match trans with

```

```

7         | [] -> succ
8         | (s,l,q)::t when s = state && l = letter -> aux t (q::succ)
9         | _::t -> aux t succ in
10      aux a.transitions [];;

```

### D3. Écrire une fonction de signature

`successor_part : ndfsm -> int list -> char -> int list * int`

qui renvoie l'état suivant de l'automate déterministe ainsi que le numéro associé à cet état. Les paramètres sont l'automate, l'état courant (`int list`) et la lettre reçue.

Par exemple, l'appel `successor_part automata [0;1] 'a';;` renvoie

`- : int list * int = ([0; 1; 2], 7)` sur l'automate considéré précédemment.

#### Solution :

```

1
2 let rm_dup s = List.fold_left (fun acc x -> if List.mem x acc then acc else
   x :: acc) [] s;;
3
4 let rm_dup s =
5     let rec aux sleft acc =
6         match sleft with
7             | [] -> acc
8             | x::t -> if List.mem x acc then aux t acc else aux t (x :: acc)
9     in aux s [];;
10
11 let successor_part a qset letter =
12     let part = rm_dup (List.flatten (List.fold_left (fun acc state -> (
13         successors a state letter)::acc) [] qset)) in
14     (part, get_partition_number_from_list part);;
15
16 (* Alternativement on pourrait utiliser une table de hachage... puis
   convertir celle-ci en liste*)

```

### D4. Écrire une fonction de signature `build_det_fsm : ndfsm -> ndfsm` qui renvoie l'automate déterministe associé à un automate non déterministe. Il s'agit de construire :

1. les états de l'automate déterministe associé,
2. les transitions de cet automate,
3. d'en déduire l'état initial et les états accepteurs.

Pour la procédure, on utilisera une file d'attente (bibliothèque `Queue`) : cette file est initialisée avec l'état initiale de l'automate déterministe. À chaque itération, on défile (`pop`) un élément et on enfile (`push`) les nouveaux états découverts. La procédure s'arrête lorsque la file est vide. On a alors trouvé tous les états de l'automate et toutes les transitions de l'automate déterministe.

Pour mémoriser les partitions déjà rencontrées, on utilisera une table de hachage de la bibliothèque `Hashtbl`. Les clefs de cette table seront les numéros associés aux états de l'automate déterministe et la valeur associée à une clef sera la liste des états de l'automate non déterministe associée à cette partie de `Q`.

Pour savoir si un état est un état accepteur, on pourra utiliser la fonction `land` qui calcule le ET bit à bit entre deux nombres entiers.

Pour l'automate non déterministe considéré à la section précédente, on obtient :

```

1 { states = [15; 13; 11; 7; 9; 3; 1];
2   alphabet = ['a'; 'b'];
3   initial = [1];
4   transitions = [(15, 'b', 15); (15, 'a', 15);
5                 (13, 'b', 13); (13, 'a', 11);
6                 (11, 'b', 15); (11, 'a', 15);
7                 (7, 'b', 11); (7, 'a', 7);
8                 (9, 'b', 13); (9, 'a', 11);
9                 (3, 'b', 11); (3, 'a', 7);
10                (1, 'b', 9); (1, 'a', 3)];
11  accepting = [15; 13; 7]}

```

### Solution :

```

1 let build_det_fsm a =
2   let n = List.length a.states in
3   let partitions = Hashtbl.create (1 lsl n) in
4   let states = ref [] in
5   let transitions = ref [] in
6   let init_part_number = get_partition_number_from_list a.initial in
7   Hashtbl.add partitions init_part_number a.initial;
8   states := (init_part_number)::!states;
9   let queue = Queue.create () in
10  Queue.push init_part_number queue;
11  let update q letter =
12    let (part, part_number) = successor_part a (Hashtbl.find partitions
13      q) letter in
14    if not (Hashtbl.mem partitions part_number)
15    then
16      begin
17        Hashtbl.add partitions part_number part;
18        states := (part_number)::!states;
19        Queue.push part_number queue;
20        transitions := ((q,letter,part_number)::!transitions);
21      end
22    else transitions := ((q,letter,part_number)::!transitions)
23  in while (Queue.length queue) > 0 do
24    let q = Queue.pop queue in
25    List.iter (update q) a.alphabet;
26  done;
27  let is_final_part a part_number =
28    let f_numbers = get_partition_number_from_list a.accepting in
29    (f_numbers land part_number) != 0 in
30  { states = !states;
31    alphabet = a.alphabet;
32    initial = [init_part_number];
33    transitions = !transitions;
34    accepting = (List.filter (is_final_part a) !states)};;
35 build_det_fsm automata;;

```

D5. Écrire une fonction qui permet de savoir si un mot est reconnu par l'automate déterministe ainsi généré.

**Solution :**

```
1 let up_to a word =
2   let rec aux q size =
3     match size with
4     | k when k = String.length word -> q (* done *)
5     | k -> let t = List.find_opt (fun (p,l,n) -> q = p && word.[k] =
6           l) a.transitions in
7           match t with
8           | None -> failwith "Undefined transition !"
9           | Some((_,_,nq)) -> aux nq (k+1)
10   in aux (List.hd a.initial) 0;;
11
12 let match_word a word =
13   try let final_state = up_to a word in
14     List.mem final_state a.accepting with
15     | Failure "Undefined transition !" -> false;;
```

D6. Proposer un algorithme permettant de savoir si un automate est déterministe.

**Solution :** Il suffit de balayer les transitions sortantes pour une même lettre : si, pour un état donné, il existe une lettre pour laquelle il y a plusieurs transitions différentes conduisant à différents états, alors l'automate n'est pas déterministe. Par ailleurs, s'il contient une transition spontanée, il n'est plus déterministe non plus.