

Graphes, coloration et plus courts chemins

INFORMATIQUE COMMUNE - TP n° 2.6 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ✎ colorer un graphe d'une manière valide
- ✎ coder l'algorithme de Dijkstra à l'aide d'une file de priorités
- ✎ utiliser une structure parents pour remonter le plus court chemin dans un graphe

A Coloration gloutonne

R On rappelle qu'une coloration valide d'un graphe est une coloration où les sommets voisins n'ont pas la même couleur. Le nombre chromatique du graphe noté χ est le nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorer de manière valide le graphe.

La coloration de graphe est un problème qui se rencontre dans de nombreux domaines. On peut citer notamment : l'attribution de fréquences dans les télécommunications, la conception de puces électroniques ou l'allocation de registres en compilation.

On se donne un graphe g sous la forme d'une liste d'adjacence ainsi qu'une liste de couleur utilisables pour colorer un graphe avec les bibliothèques `matplotlib` et `networkx`.

```
g = [[1, 3, 14], [0, 2, 4, 5], [1, 5, 7], [0, 4, 8, 13, 14], [1, 3, 5, 8],  
     [1, 2, 4, 6, 7], [5, 7], [2, 5, 6], [3, 4, 9, 13], [8, 10, 13], [9, 11, 13],  
     [10, 12, 13], [11, 13], [3, 8, 9, 10, 11, 12, 14], [0, 3, 13]]  
colors = ["deeppink", "darkturquoise", "yellow", "dodgerblue", "magenta", "  
          darkorange", "lime"]
```

L'algorithme de Welsh-Powell est un algorithme de coloration de graphe glouton. Il utilise le degré des sommets pour définir l'ordre avec lequel il colore le graphe. Les sommets dont le degré est le plus élevé sont colorés en premier en choisissant toujours la première couleur disponible dans la liste des couleurs disponibles.

- Écrire une fonction de prototype `couleur_suivante(utilisees, couleurs)` dont les paramètres sont la liste des couleurs utilisées par les voisins d'un sommet et la liste de toutes les couleurs. Cette fonction renvoie la première couleur disponible parmi celles qui ne sont pas utilisées par un voisin. S'il n'y en a aucune, elle renvoie `None`. On n'utilisera **pas** l'opérateur `in` pour tester l'appartenance d'un élément à une liste.
- Écrire une fonction de prototype `WP_color(g, couleurs)` qui implémente l'algorithme de Welsh-Powell : l'ordre glouton des sommets est celui des degrés décroissants. Le graphe g est une liste d'adjacence. Cette fonction renvoie une coloration du graphe sous la forme d'une liste dont les indices sont les sommets du graphe et les éléments les couleurs de ces sommets. Par exemple : `color_map = ['deeppink', 'darkturquoise', 'yellow', 'yellow']`.

A3. En supposant que la complexité de la fonction couleur suivante est linéaire en fonction de l'ordre du graphe¹, quelle est la complexité de cet algorithme de coloration dans le pire des cas?

Les fonction ci-dessous permettent :

1. de transformer un graphe sous la forme d'une liste d'adjacence en un objet graphe de la bibliothèque networkx,
2. de tracer le graphe coloré, le dictionnaire color_map est le résultat de l'algorithme glouton de coloration.

```
import networkx as nx
from matplotlib import pyplot as plt

def ladj_to_nx(g):
    gx = nx.Graph()
    n = len(g)
    gx.add_nodes_from([i for i in range(n)])
    for i in range(n):
        for v in g[i]:
            gx.add_edge(i, v)
    return gx

def show(g, color_map):
    color_nodes = [""] * len(g)
    for k, c in enumerate(color_map):
        color_nodes[k] = c
    gx = ladj_to_nx(g)
    nx.draw_networkx(gx, node_color=color_nodes, with_labels=True)
    plt.show()
```

A4. En utilisant les fonctions ci-dessus, tracer le graphe coloré par l'algorithme glouton. On pourra également tester sur le graphe de Petersen. Combien de couleurs sont-elles nécessaires?

B Plus courts chemins : algorithme de Dijkstra

On considère maintenant un graphe non orienté pondéré g représenté par sa liste d'adjacence : les sommets sont des villes et les poids représentent les distances en kilomètres entre les villes. On cherche à calculer les distances les plus courtes depuis la ville d'indice 0 vers toutes les directions possibles.

L'algorithme de Dijkstra nécessite une file de priorités. L'implémentation via une liste Python n'est pas optimale en termes de complexité (cf. cours). C'est pourquoi, on utilise la bibliothèque queue qui contient notamment une file de priorités présentant une complexité optimale. Voici un exemple d'utilisation :

```
import queue
pq = queue.PriorityQueue()
pq.put((d, s)) # enfile le sommet s à la distance de d
delta, s = pq.get() # défile le sommet s le plus proche, à la distance delta
```

Pour visualiser, on utilisera la bibliothèque networkx comme suit :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import networkx as nx
import math
```

1. c'est-à-dire on néglige le nombre de couleur devant le nombre de sommets du graphe

```

import numpy as np
from matplotlib import cm

def ladj_to_nx(g):
    gx = nx.Graph()
    n = len(g)
    gx.add_nodes_from([i for i in range(n)])
    for i in range(n):
        for v, d in g[i]:
            gx.add_edge(i, v, weight=d)
    return gx

def show(g):
    n = len(g)
    color_list = list(iter(cm.rainbow(np.linspace(0, 1, n))))
    gx = ladj_to_nx(g)
    pos = nx.spring_layout(gx)
    nx.draw_networkx(gx, pos, node_color=color_list, with_labels=True)
    edge_labels = nx.get_edge_attributes(gx, "weight")
    nx.draw_networkx_edge_labels(gx, pos, edge_labels)
    plt.show()

g = [[...], [...], [...], ... , [...]]
show(g)

```

B1. Pour le graphe

```

gp = [[(1, 2), (2, 5), (4, 7), (5, 4)], [(0, 2), (2, 2)],
      [(0, 5), (1, 2), (3, 1)], [(2, 1), (4, 14), (5, 1)],
      [(0, 7), (3, 14)], [(0, 4), (3, 1)]]

```

effectuer à la main l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet 4. On représentera la solution sous la forme d'un tableau dont les colonnes sont les sommets du graphe.

- B2. Écrire une fonction de prototype `pq_dijkstra(g, start)` qui implémente l'algorithme de Dijkstra (cf. algorithme ??). Cette fonction renvoie le tableau des distances les plus courtes depuis le sommet `start` ainsi que le tableau des parents de chaque sommet sur les chemins.
- B3. Quelle est la complexité de la fonction `dijkstra`? On fait l'hypothèse que les opérations défiler et enfiler sont de complexité $O(\log n)$.
- B4. Écrire une fonction de prototype `parents_vers_chemin(parents, s)` qui renvoie le chemin le plus court du sommet de départ au sommet `s`. Cette fonction utilise le tableau `parents` qui a été créé lors de l'exécution de l'algorithme de Dijkstra.
- B5. Écrire une fonction de prototype `build_d_graph(g, parents)` qui construit le graphe des plus courts chemins, c'est-à-dire le graphe construit à partir de `g` où l'on ne conserve que les arêtes sélectionnées par l'algorithme de Dijkstra. Le résultat peut être visualisé sur la figure 1.
- B6. Tester l'algorithme sur le graphe

```

g = [[(1, 393), (3, 240), (14, 209)], [(0, 393), (2, 290), (4, 146), (5,
221)], [(1, 290), (5, 244), (7, 195)], [(0, 240), (4, 105), (8, 216),
(14, 102), (13, 254)], [(3, 105), (5, 258), (1, 146), (8, 217)], [(4,

```

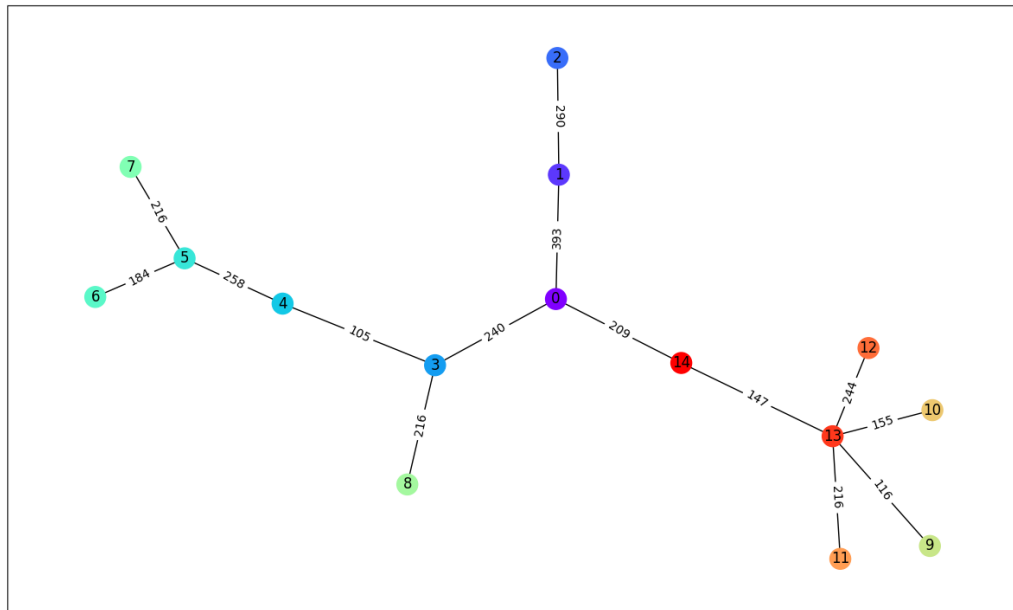


FIGURE 1 – Graphe issu de l'algorithme de Dijkstra : seules les arêtes sélectionnées par l'algorithme ont été conservées

258), (6, 184), (2, 244), (7, 216), (1, 221)], [(5, 184), (7, 114)],
 [(2, 195), (6, 114), (5, 216)], [(3, 216), (9, 113), (4, 217), (13, 113)
], [(8, 113), (10, 60), (13, 116)], [(11, 69), (9, 60), (13, 155)],
 [(10, 69), (12, 71), (13, 216)], [(11, 71), (13, 244)], [(12, 244), (11,
 216), (3, 254), (8, 113), (9, 116), (10, 155), (14, 147)], [(0, 209),
 (3, 102), (13, 147)]]