Automates finis déterministes

OPTION INFORMATIQUE - TP n° 3.9 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ définir un automate fini déterministe
- ☞ représenter un automate fini déterministe
- ☞ qualifier les états d'un automates (accessibilité)
- ☞ compléter un AFD
- ☞ complémenter un AFD
- ☞ faire le produit de deux AFD

A Construction d'automates simples

A1. On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Construire les automates suivants :

(a) $\mathcal{A}_0$ reconnaissant les mots commençant par deux occurrences de a.

(b) $\mathcal{A}_1$ reconnaissant le langage défini par l'expression rationnelle $a|b^* c$.

(c) $\mathcal{A}_2$ reconnaissant les mots contenant un nombre de a égal à 1 modulo 3, sans contrainte sur les autres lettres.

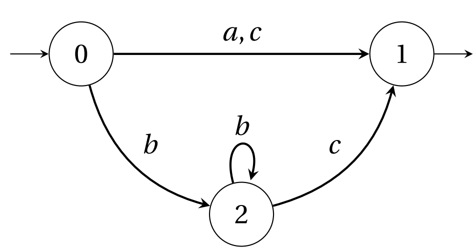
(d) $\mathcal{A}_3$ reconnaissant les mots contenant un nombre pair de a et un nombre impair de b, c'est à dire $\{b, baa, aab, bbb, bababbb, aabbb, abababab, \ldots\}$. On suppose que l'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$.

A2. Donner les représentations tabulaires des automates $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{A}_3$.

A3. Les automates que vous avez dessinés sont-ils complets ?

A4. Combien d'automates complets différents à n états peut-on construire ? On cherchera à exprimer la réponse en fonction de n et $|\Sigma|$

B Complété et complémentaire d'automates finis déterministes



B1. Compléter l'automate fini déterministe $\mathcal{A}$ suivant.

B2. Quels sont les états co-accessibles de l'automate complété de $\mathcal{A}$?

B3. Dessiner le complémentaire de l'automate $\mathcal{A}$ précédent.

B4. Le complémentaire de l'automate $\mathcal{A}$ reconnaît-il le mot vide ϵ ?

C Modélisation d'un automate en OCaml

On choisit de modéliser un automate fini par un type algébrique de la manière suivante : les états sont représentés par des types `int`. Les lettres sont des types `char`. On représente les états par une `int list` et l'alphabet par une `char list`. On spécifie l'état initial (unique) et les états accepteurs résultent d'un test (une fonction). La fonction de transition est une fonction. Cette solution d'implémentation présente l'avantage de coller au plus prêt à la définition mathématique d'un automate.

```
type fsm = { states : int list;
                      alphabet : char list;
                      initial : int;
                       trans_f : int -> char -> int option;
                      accepting : int -> bool};;
```

C1. Créer une variable `automata` qui représente l'automate $\mathcal{A}$ de la section B.

C2. Comment peut-on calculer l'état suivant lorsque l'automate `automata` est dans l'état `2` et qu'il lit la lettre `'c'` ?

D Calcul d'un mot par un automate

D1. Créer une fonction de signature `up_to : fsm -> string -> int` qui renvoie l'état d'arrivée dans lequel se trouve un automate à qui on a donné un mot reconnaître.

D2. Créer une fonction de signature `match_word : fsm -> string -> bool` qui renvoie vrai si un mot est reconnu par l'automate, faux sinon. Se servir de la fonction précédente et de la fonction `List.mem`.

D3. Tester l'automate sur plusieurs mots dans ou en dehors du langage. Que constatez-vous ?

E Algorithmes de transformation simple d'un automate

E1. Créer une fonction de signature `is_complete : fsm -> bool` qui teste la complétude d'un automate. Dès qu'un état est détecté comme incomplet, c'est à dire il manque une transition pour une certaine lettre de l'alphabet, cette fonction renvoie `false`.

E2. Créer une fonction de signature `complete : fsm -> fsm` qui crée l'automate complété d'un automate incomplet.

E3. Créer l'automate complété de $\mathcal{A}$ et le tester sur des mots dans et en dehors du langage.

E4. Créer une fonction de signature `complement : fsm -> fsm` qui crée l'automate complémentaire d'un automate.

F États accessibles et co-accessibles d'un automate

Pour déterminer les états accessibles ou co-accessibles d'un automate, on utilise les algorithmes des graphes sur le graphe orienté que constitue l'automate.

F1. Créer une fonction de signature `succ : fsm -> int -> int list` qui renvoie la liste des successeurs d'un état d'un automate passé en paramètre.

F2. Créer une fonction de signature `fsm_to_graph : fsm -> int list array` qui crée le graphe d'un automate sous la forme d'une liste d'adjacence. On utilisera la fonction précédente et la fonction `Array.of_list` pour transformer la liste résultat `int list list` en `int list array`. On pourra ainsi pouvoir réutiliser les codes sur les graphes de nos TP précédents.

F3. En effectuant un parcours en largeur d'un graphe, créer une fonction de signature `accessible_states : fsm -> int list` qui renvoie la liste des états accessibles.

F4. Créer une fonction de signature `switch_direction : int list array -> int list array` qui transforme un graphe en un autre graphe en inversant le sens de tous ses arcs. On utilisera une boucle `for` et la fonction `List.iter` qu nécessite une fonction renvoyant `unit`.

F5. Créer une fonction de signature `coaccessible_states : fsm -> int list` qui renvoie la liste des états co-accessibles. On s'appuiera sur un parcours en largeur en partant des états accepteurs et la fonction précédente.

G Problème de la finitude d'un langage reconnaissable

Le problème de la finitude d'un langage est décidable pour les AFD. L'idée fondamentale est la suivante : le langage accepté sera infini si et seulement s'il existe un circuit accessible et co-accessible, c'est à dire dans lequel on peut arriver et duquel on peut sortir vers un état accepteur.

G1. Proposer un algorithme pour détecter les cycles dans un graphe orienté.

G2. Pour un automate fini déterministe donné, créer une fonction de signature `is_finite_language : fsm -> bool` qui permet de savoir si le langage reconnu par un automate est fini.

G3. Modifier l'automate $\mathcal{A}$ pour que le langage reconnu soit fini.