Automates finis déterministes

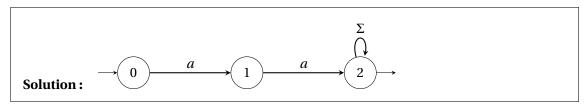
Option informatique $\,$ - $\,$ TP n° 3.9 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

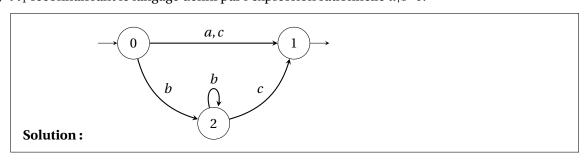
- définir un automate fini déterministe
- représenter un automate fini déterministe
- qualifier les états d'un automates (accessibilité)
- 🎏 compléter un AFD
- 🎏 complémenter un AFD
- faire le produit de deux AFD

A Construction d'automates déterministes simples

- A1. On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Construire les automates déterministes suivants :
 - (a) A_0 reconnaissant les mots commençant par deux occurrences de a.



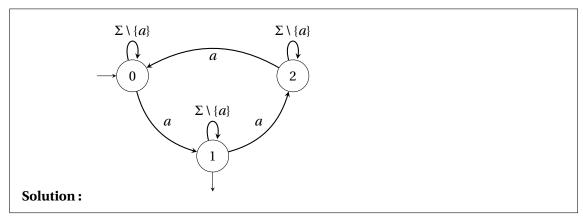
(b) A_1 reconnaissant le langage défini par l'expression rationnelle $a|b^*c$.



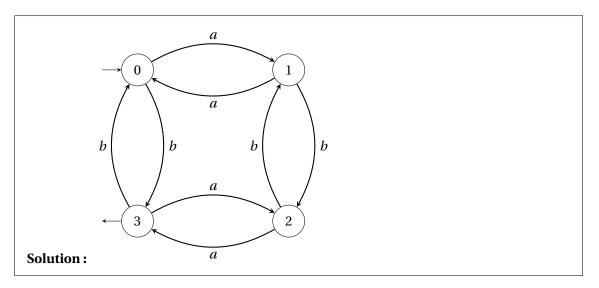
(c) A_2 reconnaissant les mots contenant un nombre de a égal à 1 modulo 3, sans contrainte sur les autres lettres.

OPTION INFORMATIQUE

TP nº 3.9



(d) A_3 reconnaissant les mots contenant un nombre pair de a et un nombre impair de b, c'est-àdire $\{b, baa, aab, bbb, bababbb, aabbb, aabbb, ababaab, ...\}$. On suppose que l'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$.



- A2. Donner les représentations tabulaires des automates A_0 , A_1 , A_2 et A_3 .
- A3. Les automates que vous avez dessinés sont-ils complets?
- A4. Combien d'automates complets différents à n états peut-on construire? On cherchera à exprimer la réponse en fonction de n et $|\Sigma|$

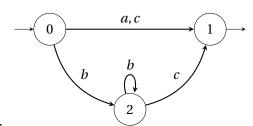
Solution: $n \times n^{n \times |\Sigma|} \times 2^n$

- 1. on a n états initiaux possibles
- 2. le nombre de fonctions de transition possibles est $|Q|^{|Q \times \Sigma|} = |Q|^{|Q| \times |\Sigma|} = n^{n \times |\Sigma|}$
- 3. le nombre d'ensembles possibles des états accepteurs, le cardinal des parties de Q : $|\mathcal{P}(Q)| = 2^n$

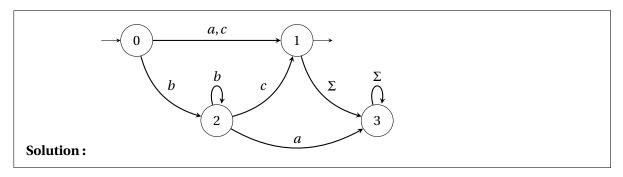
Pour un alphabet à deux lettres et deux états, on a $2 \times 2^4 \times 2^2 = 2^7 = 128$ automates possibles.

OPTION INFORMATIQUE TP no 3.9

B Complété et complémentaire d'automates finis déterministes



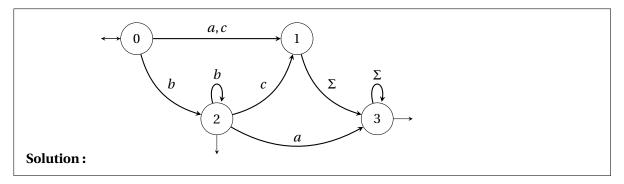
B1. Compléter l'automate fini déterministe $\mathcal A$ suivant.



B2. Quels sont les états co-accessibles de l'automate complété de A?

Solution: 0,1,2

B3. Dessiner le complémentaire de l'automate $\mathcal A$ précédent.



B4. Le complémentaire de l'automate \mathcal{A} reconnaît-il le mot vide ϵ ?

Solution: Oui, car l'état initial est également un état accepteur.

C Modélisation d'un automate en OCaml

On choisit de modéliser un automate fini par un type algébrique de la manière suivante : les états sont représentés par des types int. Les lettres sont des types char. On représente les états par une int list et l'alphabet par une char list. On spécifie l'état initial (unique) et les états accepteurs forment une int list. La fonction de transition est une fonction. Cette solution d'implémentation présente l'avantage de coller au plus prêt à la définition mathématique d'un automate.

OPTION INFORMATIQUE TP no 3.9

C1. Créer une variable automata qui représente l'automate \mathcal{A} de la section B.

```
Solution:
   let sigma = ['a'; 'b'; 'c'];;
   let states = [0; 1; 2];;
   let delta prev letter =
       match (prev, letter) with
           | (0,'a') -> Some 1
           | (0, c') -> Some 1
           | (0,'b') -> Some 2
           | (2, b') -> Some 2
           | (2,'c') -> Some 1
           | _ -> None;;
   let final_states = [1];;
   let automata = {states = states;
                   alphabet = sigma;
                   initial = 0;
                   trans_f = delta;
                   accepting = final_states};;
```

C2. Comment peut-on calculer l'état suivant lorsque l'automate automata est dans l'état 2 et qu'il lit la lettre 'c'?

```
Solution:

automata.trans_f 2 'c';;

C3. Comment peut-on savoir si un état 2 est accepteur?

Solution:

List.mem 2 automata.accepting;;
```

D Calcul d'un mot par un automate

D1. Créer une fonction de signature up_to : fsm -> string -> int qui renvoie l'état d'arrivée dans lequel se trouve un automate à qui on a donné un mot reconnaître.

OPTION INFORMATIQUE TP no 3.9

```
Solution:
   let up_to a word =
       let rec aux q size =
           match size with
               | k when k = String.length word -> q (* done *)
               | k -> let next = a.trans_f q word.[k] in
                               match next with
                                    | None -> q
                                    | Some(ng) -> aux ng (k+1)
       in aux a.initial 0;;
   (* string to char list *)
   let explode s = List.init (String.length s) (String.get s);;
   let l = explode("ma jolie chaine");;
   (* via char list *)
   let up_to a word =
       let w = explode word in
       let rec aux state ch = match ch with
           | [] -> state
           | c::t -> let next = a.trans_f state c in
                               match next with
                                    | None -> state
                                    | Some(ng) -> aux ng t
       in aux 0 w;;
```

D2. Créer une fonction de signature match_word : fsm -> string -> bool qui renvoie vrai si un mot est reconnu par l'automate, faux sinon. Se servir de la fonction précédente et de la fonction List. mem.

```
Solution:
    let match_word a word =
        let final_state = up_to a word in
        List.mem final_state a.accepting;;
```

D3. Tester l'automate sur plusieurs mots dans ou en dehors du langage. Que constatez-vous?

Solution : Certains sont reconnus alors qu'ils ne devraient pas : l'automate est resté bloqué dans le dernier état qui se trouve être l'état final. Ceci est dû au fait que l'automate n'est pas complété.

```
match_word automata "a";;
match_word automata "c";;
match_word automata "bc";;
match_word automata "bbbc";;
match_word automata "bbbcc";; (* should not !*)
match_word automata "bca";; (* should not !*)
match_word automata "cb";; (* should not !*)
```

E Algorithmes de transformation simple d'un automate

E1. Créer une fonction de signature is_complete : fsm -> bool qui teste la complétude d'un automate. Dès qu'un état est détecté comme incomplet, c'est-à-dire il manque une transition pour une certaine lettre de l'alphabet, cette fonction renvoie false.

```
Solution:
   let is_complete a =
       let check_letter q letter =
           match a.trans_f q letter with
               | None -> false
               | Some(_) -> true in
       let rec check_state q alpha =
           match alpha with
               | [] -> true
               | h::t -> if check_letter q h then check_state q t else false in
       let rec check s =
           match s with
               | [] -> true
               | q::t -> if check_state q a.alphabet then check t else false
       in check a.states;;
   is_complete automata ;;
```

E2. Créer une fonction de signature complete : fsm -> fsm qui crée l'automate complété d'un automate incomplet.

```
Solution:
   let complete a =
       if not (is_complete a)
       then
           begin
               let well = List.length states in (* le puits ! *)
               let new_trans_f prev letter = (* fonction de transition *)
                   match a.trans_f prev letter with
                                | None -> Some(well) (* dans le puits *)
                                | Some(next) -> Some(next) in
               {states = (well::a.states);
                alphabet = a.alphabet;
                initial = a.initial;
                trans_f = new_trans_f;
                accepting = a.accepting}
           end
       else a;;
```

OPTION INFORMATIQUE

TP no 3.9

```
is_complete (complete automata);;
```

E3. Créer l'automate complété de A et le tester sur des mots dans et en dehors du langage.

```
Solution:
    let cautomata = (complete automata);;
    match_word cautomata "a";;
    match_word cautomata "c";;
    match_word cautomata "bbbc";;
    match_word cautomata "bbbcc";;
    match_word cautomata "bbbcc";; (* yes, better !*)
    match_word cautomata "bca";;
    match_word cautomata "bca";; (* yes !*)
    match_word cautomata "cb";; (* yes !*)
    match_word cautomata "bca";; (* yes !*)
    match_word cautomata "bca";; (* yes !*)
    match_word cautomata "";;
```

E4. Quelle est la complexité de la fonction match_word?

```
Solution : La complexité est linéaire en fonction de la longueur du mot.
```

E5. Créer une fonction de signature complement : fsm -> fsm qui crée l'automate complémentaire d'un automate.

```
Solution:

let complement a =
    {states = a.states;
    alphabet = a.alphabet;
    initial = a.initial;
    trans_f = a.trans_f;
    accepting = List.filter (fun q -> not (List.mem q a.accepting)) a.states
    };;

automata;;
complement(automata);;
complement(complete automata);;
```

F États accessibles et co-accessibles d'un automate

Pour déterminer les états accessibles ou co-accessibles d'un automate, on utilise les algorithmes des graphes sur le graphe orienté que constitue l'automate.

F1. Créer une fonction de signature succ : fsm -> int -> int list qui renvoie la liste des successeurs d'un état d'un automate passé en paramètre.

OPTION INFORMATIQUE

TP no 3.9

F2. Créer une fonction de signature fsm_to_graph : fsm -> int list array qui crée le graphe d'un automate sous la forme d'une liste d'adjacence. On utilisera la fonction précédente et la fonction Array.of_list pour transformer la liste résultat int list list en int list array. On pourra ainsi pouvoir réutiliser les codes sur les graphes de nos TP précédents.

F3. En effectuant un parcours en largeur d'un graphe, créer une fonction de signature accessible_states : fsm -> int list qui renvoie la liste des états accessibles.

```
Solution:

let accessible_states a =
    let g = fsm_to_graph a in
    let visited = Array.make (Array.length g) false in
    let rec explore queue =
        match queue with
        | [] -> []
        | v::t when visited.(v) -> explore t
        | v::t -> visited.(v) <- true; v::(explore (t @ g.(v)))
    in explore [a.initial] ;;

accessible_states (complement (complete automata));;</pre>
```

F4. Créer une fonction de signature switch_direction: int list array -> int list array qui transforme un graphe en un autre graphe en inversant le sens de tous ses arcs. On utilisera une boucle for et la fonction List.iter qu nécessite une fonction renvoyant unit.

OPTION INFORMATIQUE

TP no 3.9

```
Solution:

let switch_direction g =
    let n = Array.length g in
    let sg = Array.make n [] in
    for i = 0 to (n - 1) do
        List.iter (fun v -> sg.(v) <- i::sg.(v)) g.(i)
    done;
    sg;;

fsm_to_graph automata;;
    switch_direction (fsm_to_graph automata);;
</pre>
```

F5. Créer une fonction de signature coaccessible_states : fsm -> int list qui renvoie la liste des états co-accessibles. On s'appuiera sur un parcours en largeur en partant des états accepteurs et la fonction précédente.

```
Solution:

let coaccessible_states a =
    let g = switch_direction (fsm_to_graph a) in
    let visited = Array.make (Array.length g) false in
    let rec explore queue =
        match queue with
        | [] -> []
        | v::t when visited.(v) -> explore t
        | v::t -> visited.(v) <- true; v::(explore (t @ g.(v)))
    in explore a.accepting;;

coaccessible_states (complete automata);;</pre>
```

G Problème de la finitude d'un langage reconnaissable

Le problème de la finitude d'un langage est décidable pour les AFD. L'idée fondamentale est la suivante : le langage accepté sera infini si et seulement s'il existe un circuit accessible et co-accessible, c'est-à-dire dans lequel on peut arriver et duquel on peut sortir vers un état accepteur.

G1. Proposer un algorithme pour détecter les cycles dans un graphe orienté. La fonction créée renverra faux si un cycle est détecté.

```
in explore [v0] ;;
```

G2. En vous inspirant du parcours précédant, créer une fonction de signature is_finite_language : fsm -> bool qui permet de savoir si le langage reconnu par un automate est fini. On s'assurera qu'il fonctionne même s'il existe des états non co-accessibles dans l'automate.

```
Solution:

let is_finite_language a =
    let g = fsm_to_graph a in
    let co = coaccessible_states a in
    let visited = Array.make (Array.length g) false in
    let rec explore stack =
    match stack with
    | [] -> true
    | v::t when visited.(v) -> if List.mem v co then false else explore t
    | v::t -> visited.(v) <- true; explore (g.(v) @ t)
    in explore [a.initial] ;;

is_finite_language automata;;
is_finite_language (complete automata);;</pre>
```

G3. Modifier l'automate \mathcal{A} pour que le langage reconnu soit fini.