

Des expressions régulières aux automates

OPTION INFORMATIQUE - TP n° 4.1 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ✍ coder la linéarisation d'une expressions régulière
- ✍ déterminer les composantes P,S et F relatives à une expression régulière linéaire
- ✍ coder l'algorithme de Berry-Sethi et trouver l'automate de Glushkov associé à une expression régulière

A Linéarisation d'une expression régulière

On souhaite réaliser la linéarisation d'une expression régulière dans le but d'implémenter l'algorithme de Berry-Sethi. On dispose du type `regex` algébrique suivant :

```
type regex =
  | EmptySet
  | Epsilon
  | Letter of char
  | Sum of regex * regex
  | Concat of regex * regex
  | Kleene of regex ;;
```

On se donne le type algébrique `lregex` qui représente une expression régulière linéarisée :

```
type lregex =
  | Letter_ind of char * int
  | SumL of lregex * lregex
  | ConcatL of lregex * lregex
  | KleeneL of lregex ;;
```

Un littéral est donc codé par une lettre associée à un numéro qui code l'ordre d'apparition de la lettre dans l'expression régulière. Le mot vide et l'ensemble vide n'ont pas leur place dans les expressions linéarisées car l'automate local est déterministe et ne transite que sur des lettres de l'alphabet.

A1. Écrire une fonction récursive de signature

```
linearize_and_count : regex -> int -> lregex * int
```

qui linéarise une expression régulière. Le paramètre de type `int` est le compteur de variable : on l'incrémente à chaque fois qu'on découvre un littéral ou une occurrence d'un littéral. La fonction renvoie l'expression linéarisée ainsi que l'état du compteur de variable. Si l'expression contient l'ensemble vide ou le mot vide, une exception est levée. La fonction s'utilise ainsi :

```
linearize_and_count e 1
```

en initialisant le compteur à 1. Pour l'expression régulière $(a|b)^*c$, la fonction renvoie :

```
(ConcatL (KleeneL (SumL (Letter_ind ('a', 1), Letter_ind ('b', 2))), Letter_ind ('c', 3)), 4)
```

- A2. Écrire une fonction «wrapper» de signature `linearize : regexp -> lregexp` qui permette de ne récupérer que l'expression régulière linéarisée, sans le compteur.

B Calcul des composantes P, S et F associées à une expression régulière

Toujours dans l'optique d'implémenter l'algorithme de Glushkov, on cherche maintenant à caractériser les ensembles P (préfixes à une lettre), S (suffixes à une lettre) et F (facteurs possibles de deux lettres) d'une expression régulière linéarisée.

- B1. Pour les expressions régulières suivantes, trouver les ensembles P, S et F tels que définis dans le cours : $(a|b)^*c$ et $((a|b)^*c)|b$.
- B2. **Ensemble P.** Écrire une fonction récursive de signature
`first_letter_prefix : lregexp -> (char * int)list`
 qui renvoie la liste des préfixes à une lettre d'une expression régulière linéarisée. Par exemple pour $(a|b)^*c$ linéarisée, la fonction renvoie `(char * int)list = [('a', 1); ('b', 2); ('c', 3)]`.
- B3. **Ensemble S.** Écrire une fonction récursive de signature
`last_letter_suffix : lregexp -> (char * int)list`
 qui renvoie la liste des suffixes à une lettre d'une expression régulière linéarisée. Par exemple pour $(a|b)^*c$ linéarisée, la fonction renvoie `(char * int)list = [('c', 3)]`.
- B4. Écrire une fonction de signature
`cartesian_product : 'a list -> 'b list -> ('a * 'b)list`
 qui renvoie le produit cartésien de deux listes d'entiers. Par exemple, `cartesian_product [1;3] [2;4;6;8]` renvoie `[(1, 2); (1, 4); (1, 6); (1, 8); (3, 2); (3, 4); (3, 6); (3, 8)]`.
- B5. **Ensemble F.** Écrire une fonction récursive de signature `two_factors : lregexp -> ((char * int) * (char * int))list` qui renvoie les facteurs possibles de longueur 2 d'une expression régulière linéarisée.

C Algorithme de Berry-Sethi

L'algorithme de Berry-Sethi permet d'obtenir l'automate de Glushkov qui n'est pas déterministe a priori. C'est pourquoi on choisit de modéliser l'automate comme suit :

```
type ndfsm = { states : int list;
               alphabet : char list;
               initial : int list;
               transitions : (int * char * int) list;
               accepting : int list};;
```

On choisit de représenter les états par un numéro. **Le zéro est l'état initial. Les états sont ensuite numérotés d'après l'indice des lettres de l'expression régulière linéarisée.** On s'appuie par ailleurs sur toutes les fonctions précédemment écrites.

- C1. Linéariser à la main l'expression régulière $(ab|b)^*ba$ telle que l'effectue la fonction `linearize` déjà programmée.
- C2. Déterminer à la main l'automate de Glushkov associé à l'expression régulière $(ab|b)^*ba$.

- C3. Écrire une fonction de signature `all_states : regexp -> int list` qui renvoie la liste de tous les états de l'automate de Glushkov associés à une expression régulière. On utilisera la fonction `linearize`. Par exemple, pour $(a|b)^*c$, cette fonction renvoie `[0; 1; 2; 3]`.
- C4. Les états accepteurs de l'automate de Glushkov sont déterminés par l'ensemble `S` obtenu grâce à la fonction `last_letter_suffix`. Écrire une fonction de signature `accepting_states : lregexp -> 'b list` qui prend comme paramètre une expression régulière linéarisée et qui renvoie l'ensemble des états accepteurs de l'automate de Glushkov.
- C5. Écrire une fonction récursive de signature `initial_transitions : ('a * 'b)list -> (int * 'a * 'b)list` dont le paramètre est un ensemble `P` et qui renvoie la liste des transitions depuis l'état initial de l'automate de Glushkov.
- C6. Écrire une fonction récursive de signature `inner_transitions : (('a * 'b)* ('c * 'd))list -> ('b * 'c * 'd)list` dont le paramètre est un ensemble `F` et qui renvoie la liste des transitions internes de l'automate de Glushkov.
- C7. Écrire une fonction de signature `all_transitions : lregexp -> (int * char * int)list` qui renvoie la liste des transitions de l'automate de Glushkov.
- C8. Écrire une fonction de signature `get_alphabet_from_trans : ('a * 'b * 'c)list -> 'b list` qui renvoie l'alphabet de l'automate de Glushkov d'après ses transitions.
- C9. Écrire une fonction de signature `glushkov : regexp -> ndfsm` qui renvoie l'automate de Glushkov associé à une expression régulière.
- C10. Déterminer à la main l'automate de Glushkov obtenu grâce la fonction précédente à partir de l'expression régulière $(ab|b)^*ba$.

D Entraînement

- D1. En utilisant l'algorithme de Berry-Sethi, trouver l'automate associé aux expressions régulières suivantes :
- (a) aab^*ab
 - (b) $a(ab)^*|b^*a$
 - (c) $(b|ab)^*(\epsilon|ab)$
- D2. En utilisant l'algorithme de Thompson, trouver l'automate associé aux expressions régulières suivantes :
- (a) a^*b
 - (b) aab^*ab
 - (c) $(a|b)^*a^*b^*$
 - (d) $(b|ab)^*(\epsilon|ab)$
 - (e) $a(ab)^*|b^*a$