Arbres couvrants

OPTION INFORMATIQUE - TP n° 3.6 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ expliquer le fonctionnement de l'algorithme de Prim
- ☞ expliquer le fonctionnement de l'algorithme de Kruskal
- ☞ programmer dans un style fonctionnel ou impératif en OCaml

Dans tout ce TP, on considère des graphes pondérés non orientés représentés par des listes d'adjacence. L'objectif est d'exploiter au maximum le module `List` d'OCaml et de programmer dans un style fonctionnel, c'est-à-dire sans références et sans structures itératives.

A Algorithme de Prim

L'algorithme de Prim est un algorithme glouton optimal qui s'applique aux graphes pondérés connexes. L'algorithme part d'un sommet et fait croitre un arbre en choisissant un sommet dont la distance est la plus faible et qui n'appartient pas à l'arbre, garantissant ainsi l'absence de cycle.

Algorithme 1 Algorithme de Prim, arbre recouvrant

```
1 : Fonction PRIM(G = (V, E, w))
2 :     T ← ∅                                  ▷ la sortie : l'ensemble des arêtes de l'arbre recouvrant
3 :     S ← s un sommet quelconque de V
4 :     tant que S ≠ V répéter
5 :         (u, v) ← min(w(u, v), u ∈ S, v ∈ V \ S)        ▷ Choix glouton !
6 :         S ← S ∪ {v}
7 :         T ← T ∪ {(u, v)}
8 :     renvoyer T
```

A1. Montrer que l'algorithme de Prim termine.

Solution :

$$\begin{aligned} v : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ |S| &\longmapsto |V| - |S| \end{aligned}$$

La fonction v est un variant de boucle pour la boucle *tant que* de l'algorithme de Prim. En effet, un graphe possède toujours un nombre fini de sommets, donc $|V|$ est un entier naturel. Au premier tout de boucle, $|S| = 1$ et à chaque tour le cardinal de S augmente de 1. Donc, v est une

fonction à valeurs entières **strictement** décroissante. Elle atteint donc 0 (Th. de la limite monotone) lorsque la condition de boucle est invalidée, c'est-à-dire lorsque $|S| = |V|$. L'algorithme de Prim se termine.

A2. Montrer que l'algorithme de Prim est correct, c'est-à-dire qu'il calcule un arbre couvrant de poids minimal.

Solution : On peut dans un premier temps remarquer que l'algorithme construit bien un arbre car :

1. il effectue exactement $n-1$ tours de boucle et donc on a choisit $n-1$ arêtes parmi E,
2. il construit un graphe connexe puisqu'il choisit toujours d'ajouter un sommet voisin via une arête commune à l'ensemble des sommets visités S.
3. (redondant) il est acyclique car il choisit un nouveau sommet parmi ceux qui n'ont pas encore été visités.

Il nous reste à montrer que l'arbre construit est de poids minimal. On choisit l'invariant suivant : «à chaque tour de boucle, le graphe (S,T) est un arbre couvrant minimal de (S,E). »

- **Initialisation** : à l'entrée de la boucle, on a $|S| = 1$ et $T = \emptyset$, donc (S,T) est un arbre couvrant de poids minimal.
- **Conservation** : Supposons que, au début d'une intération, (S,T) soit un arbre couvrant minimal de (S,E). Soit $e = (a,b)$ l'arête que l'algorithme souhaite ajouter à T. Comme b n'appartient pas encore à S, $(S, \cup\{b\}, T \cup \{(a,b)\})$ est toujours connexe et acyclique. Comme (a,b) est l'arête de poids minimal parmi celles qui ne sont pas encore utilisées, alors $(S \cup \{b\}, T \cup \{(a,b)\})$ est nécessairement un arbre couvrant de poids minimal à cause de la propriété de la coupe. Les instructions ne modifient donc pas l'invariant.
- **Conclusion** : L'invariant est vérifié à l'entrée de la boucle et n'est pas modifié par les instructions de la boucle. Il est donc vérifié à la fin de la boucle et on a alors $S = V$. T est donc un arbre couvrant G de poids minimal.

A3. Peut-on évaluer la complexité de l'algorithme de Prim ?

Solution : À ce stade, c'est prématuré. En effet, on n'a fait aucune hypothèse sur les structures de données utilisées. Il va donc falloir faire des choix et ces choix vont grandement conditionner le résultat.

B Implémentation de l'algorithme de Prim

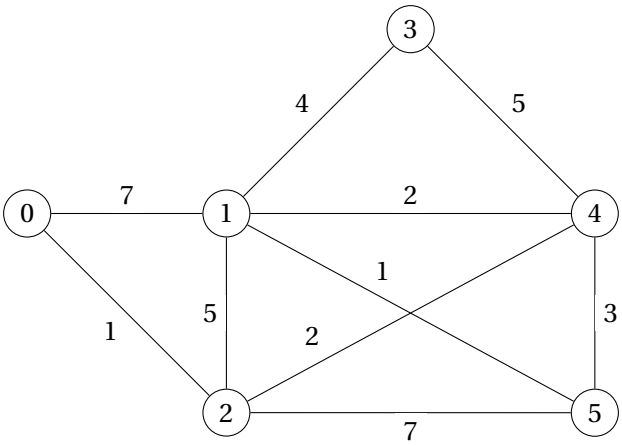
Pour ce premier essai, on utilise une représentation des graphes par liste d'adjacence.
On définit donc un type graphe comme suit :

```
type list_graph = ((int * int) list) list;;

let lcg = [| [(2,1); (1,7)];
             [(3,4); (4,2); (2,5); (0,7)];
             [(5,7); (4,2); (1,5); (0,1)];
```

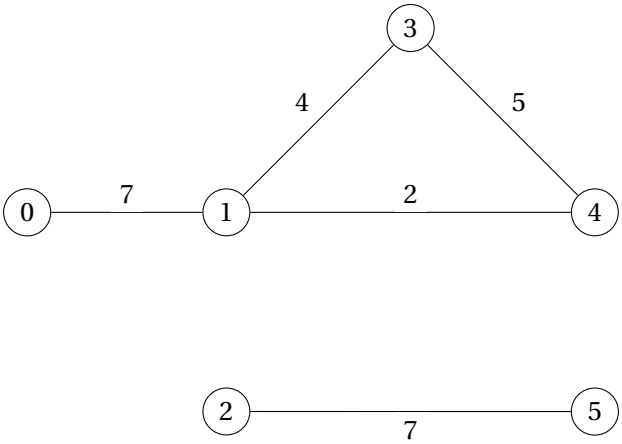
```
                [(4,5); (1,4)];
                [(5,3); (3,5); (2,2); (1,2)];
                [(4,3); (2,7)] |];;

let uclg = [| [(1,7)];
              [(4,1); (3,4); (0,7)];
              [(5,7)];
              [(4,5); (1,4)];
              [(3,5); (1,2)];
              [(2,7)] |];;
```

B1. Dessiner les deux graphes `lcg` et `uclg`. Quelle différence y-a-t-il entre les deux? Peut-on appliquer l'algorithme de Prim à ces deux graphes?

Solution :



Le second graphe n'est pas connexe, donc on ne peut pas lui appliquer l'algorithme de Prim :



On choisit d'utiliser une file de priorité pour implémenter l'algorithme de Prim. On dispose du code suivant :

```
type 'a qdata = {valeur: 'a; priorite: int};;
type 'a file_priorites = {mutable taille: int; tas: 'a qdata array};;

let echanger t i j = let tmp = t.(i) in t.(i) <- t.(j); t.(j) <- tmp;;
```

```
let rec faire_monter tas k = match k with
    | 0 -> ()
    | _ -> let p = (k - 1)/2 in
           if tas.(k).priorite < tas.(p).priorite
           then (echanger tas k p ; faire_monter tas p);;

let rec faire_descendre tas taille k = match k with
    | n when 2*n + 1 >= taille -> () (* pas d'enfants *)
    | n when 2*n + 1 = (taille - 1) -> (* un seul enfant *)
       if tas.(n).priorite > tas.(2*n + 1).priorite
       then echanger tas (2*n + 1) n
    | n -> begin (* deux enfants *)
            let f = if tas.(2*n + 1).priorite < tas.(2*n + 2).priorite then  2*n
                 +  1 else 2*n + 2 in
            if tas.(n).priorite > tas.(f).priorite then (echanger tas n f;
                faire_descendre tas taille f;)
          end;;

let creer_file_priorites n (v,p) = {taille = 0; tas = Array.init n (fun _ -> {
    valeur = v; priorite=p})};;

let inserer filep (v,p) =
  let size = Array.length filep.tas in
  if filep.taille + 1 > size then failwith "FULL_PRIORITY_QUEUE";
  filep.tas.(filep.taille) <- {valeur=v; priorite=p}; (* Placer l'élément à la
      fin *)
  faire_monter filep.tas filep.taille; (* recréer la structure de tas *)
  filep.taille <- filep.taille + 1;;

let retirer_minimum filep =
  if filep.taille = 0 then failwith "EMPTY_PRIORITY_QUEUE";
  let premier = filep.tas.(0) in (* sauvegader l'élément le plus prioritaire *)
    filep.taille <- filep.taille - 1;
    filep.tas.(0) <- filep.tas.(filep.taille);  (* Placer le dernier élément au
        sommet *)
    faire_descendre filep.tas filep.taille 0;   (* Recréer la structure de tas
        *)
    premier;;   (* renvoyer le résultat *)
```

B2. Compléter le code de la fonction `prim : (int * int)list array -> int -> int array * int` afin d'implémenter l'algorithme de Prim. Cette fonction renvoie un tuple constitué de :

- un tableau 'parents' d'entiers : 'parents.(i)' contient le père du sommet 'i' dans l'arbre,c'est-à-dire le sommet par lequel on l'a ajouté à l'arbre recouvrant. ăPar exemple, `[|-1; 0; 1; 0; 3; 3; 4|]` signifie que 0 est le père de 1 et de 3 dans l'arbre recouvrant trouvé. ă
- le poids minimal trouvé.

```
let prim g start =
     (* INITIALISATION *)
     let n = Array.length g in
     let cout = Array.make n max_int in (* distance minimale vers chaque sommet
         *)
     let parents = Array.make n max_int in (* connaître le parent d'un sommet
         dans l'arbre *)
     let selected = Array.make n false in (* savoir si un sommet est dans S *)
     let pq = creer_file_priorites 50 (max_int,max_int) in
```

```
parents.(start) <- -1;  (* personne n'est parent de start dans l'arbre *)
cout.(start) <- 0;
inserer pq (start, cout.(start));
let count = ref 0 in (* pour faire exactement n itérations *)
(* PROCESS *)
while !count < n do
   (* TODO *)
   (* sélectionner le sommet le plus proche parmi tous les sommets (et donc
        l'arête la plus faible) *)
   (* insérer u dans S *)
   (* pour chaque voisin de u, mettre à jour les distance et la file *)
   incr count;
done;
(parents, Array.fold_left (+) 0 cout);;
```

Solution :

```
let prim g start =
     (* INITIALISATION *)
     let n = Array.length g in
     let cout = Array.make n max_int in (* distance minimale vers chaque
         sommet *)
     let parents = Array.make n max_int in (* connaître le parent d'un
         sommet dans l'arbre *)
     let selected = Array.make n false in (* savoir si un sommet est dans S
         *)
     let pq = creer_file_priorites 50 (max_int,max_int) in
     parents.(start) <- -1;  (* personne n'est parent de start dans l'arbre
         *)
     cout.(start) <- 0;
     inserer pq (start, cout.(start));
     let count = ref 0 in (* pour faire exactement n itérations *)
     (* PROCESS *)
     while !count < n do
        let u = (retirer_minimum pq).valeur in
        selected.(u) <- true; (* insérer u est dans S *)
        let update (v,poids) = if not selected.(v) then (* v n'est pas dans
            S *)
                       begin
                           if  cout.(v) >= cout.(u) + poids (* si plus près
                               *)
                           then (cout.(v) <- poids; parents.(v) <- u;
                               inserer pq  (v, poids))
                                (* mettre à jour le coût et la file *)
                       end;
        in List.iter update g.(u); (* pour chaque voisin de u, mettre à jour
             les distance et la file *)
        incr count;
     done;
     (parents, Array.fold_left (+) 0 cout);;
```

B3. Calculer la complexité de la fonction précédente.

Solution : (Soit G un graphe à n sommets et m arêtes. On trouve :

$$C(n) = n + 1 + (n+m)log\,n = O((n+m)log(n)$$

Il faut compter :

- la création de la file de priorités O(n)
- l'insertion du sommet start dans la file de priorités vide. O(1)
- la sélection de l'arête de poids minimum en O(log(n)) (n fois)
- la mise à jour de la file de priorités en O(log(n)) (m fois)

C Algorithme de Kruskal

L'algorithme de Kruskal est un algorithme glouton optimal qui s'applique aux graphes pondérés. Le graphe peut ne pas être connexe et dans ce cas on obtient un forêt d'arbres recouvrants. Pour construire la forêt et effectuer un choix d'arête, il ordonne les arêtes du graphe par ordre de pondération croissante.

Algorithme 2 Algorithme de Kruskal, forêt d'arbres recouvrants

```
1 : Fonction KRUSKAL(G = (V, E, w))
2 :     T ← ∅                          ▷ la sortie : l'ensemble des arêtes de la forêt recouvrante
3 :     pour k de 1 à |E| répéter
4 :         e ← l'arête de pondération la plus faible de E \ T          ▷ Choix glouton !
5 :         si (S, T ∪ {e}, w) est un graphe acyclique alors
6 :             T ← T ∪ {e}
7 :     renvoyer T
```

La principale difficulté de l'algorithme de Kruskal réside au niveau du test d'acyclicité : comment savoir si le nouvel arbre qu'on projette de construire est bien acyclique ? On pourrait utiliser un parcours en profondeur car dès qu'on trouve un sommet déjà découvert un cycle est détecté. Cependant ce n'est pas optimal au niveau de la complexité. C'est pourquoi il est préférable d'utiliser une structure de type Union-Find (UF) : c'est une structure très efficace qui permet de réunir des ensembles disjoints en les étiquetant sous la même étiquette. On distingue ainsi les sommets du graphe qui sont connexes dans l'arbre en cours de construction et des autres.

La structure UF est essentiellement composée d'un tableau dont les éléments dont des tuples (étiquette de l'ensemble connexe, rang). Deux fonctions définissent la mécanique de la structure :

- `find_root` permet de trouver l'étiquette de la racine de l'ensemble auquel appartient un élément.
- `union` qui permet de réunir sous une même étiquette deux ensembles disjoints.

Selon la manière dont cette structure est implémentée (UF), le coût d'une union d'ensembles disjoints est $O(\alpha(n))$ où α est l'inverse de la fonction d'Ackermann $A(n,n)$, c'est-à-dire une fonction qui croît infiniment lentement, $\alpha(n)$ valant moins de 5 en pratique quelque soit la valeur de n. Avec la meilleure implémentation, l'union est donc de complexité amortie quasi-constante (1).

On se place dans le cadre du graphe `lcg` défini plus haut. C'est un graphe à six sommets. On va donc créer une structure Union-Find à partir du tableau `uf = [|(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),(4,0),(5,0)]`. Chaque élément de la liste représente le numéro de l'ensemble connexe auquel appartient le sommet

du graphe et son rang. Au début de l'algorithme, comme on n'a pas encore sélectionné d'arête, tous les sommets apparaissent donc déconnectés, chacun dans un ensemble différent : le sommet 0 est dans l'ensemble 0, le sommet 1 dans l'ensemble 1… L'étiquette de chaque sommet est sa propre racine.

Lorsqu'on connecte deux sommets par une arête, les sommets doivent appartenir au même ensemble connexe. On doit donc modifier `uf` et faire en sorte que les racines des deux sommets considérés portent le même étiquette. Par exemple, si on connecte le sommet 1 et le sommet 5, alors on aura `uf = [|(0,0),(1,1),(2,0),(3,0),(4,0),(1,0)]` ou bien `uf = [|(0,0),(5,0),(2,0),(3,0),(4,0),(5,1)]`.

Au fur et à mesure de l'algorithme, on va faire donc évoluer à la fois la liste des arêtes de l'arbre en construction et la structure `uf`. À chaque tour de boucle, on choisit une arête et on vérifie que ses sommets n'appartiennent pas au même ensemble connexe, c'est-à-dire que les étiquettes des racines de ces sommets dans `uf` sont différentes. Par exemple, si on a `uf = [|(0,0),(5,0),(2,0),(3,0),(4,0),(5,1)]`, on ne pourra pas ajouter l'arête (1,5) car les deux sommets sont déjà dans le même ensemble connexe.

À la fin de l'algorithme, la structure UF sera telle que :

- tous les sommets sont dans le même ensemble connexe si le graphe est connexe , par exemple `[|(0, 2); (0, 1); (0, 0); (0, 0); (1, 0); (0, 0)|]`.
- les sommets sont dans des ensembles connexes différents si le graphe n'est pas connexe, par exemple `[|(1, 0); (1, 1); (2, 1); (1, 0); (1, 0); (2, 0)|]`.

Pour utiliser la structure UF, on s'appuie sur le code suivant. Le code ci-dessous est plutôt orienté approche impérative, car la fonction `union` modifie directement le tableau, sans le renvoyer. Selon qu'on utilise une approche impérative ou récursive, ce code pourra être modifié à la marge.

```
(* fst -> étiquette du sommet *)
let rec find_root e uf =
   if fst uf.(e) <> e
  then find_parent (fst uf.(e)) uf
  else e;;

(* fst -> étiquette du sommet, snd -> rang du sommet *)
let union r1 r2 uf =
  if snd uf.(r1) < snd uf.(r2)
  then uf.(r1) <- (r2, snd uf.(r1))
  else
    begin
      uf.(r2) <- (r1, snd uf.(r2));
        if snd uf.(r1) = snd uf.(r2)
        then uf.(r1) <- (fst uf.(r1), (snd uf.(r1)) + 1)
  end;;

(* créer une structure uf*)
uf = Array.init n (fun i -> (i, 0));;
(* union des deux ensembles des sommets i et j si  pas déjà fait  *)
let r1 = find_root i uf and r2 = find_root j uf in
  if r1 <> r2
  then union r1 r2 uf;:
```

Le résultat de l'algorithme de Kruskal est une forêt d'arbre. On représente une forêt d'arbre comme les arbres précédemment, c'est-à-dire par une liste de triplets `(i,j,w)` où `i` et `j` sont des sommets et `w` le poids associé à l'arête `(i,j)`. La liste représente donc indifféremment un arbre ou une forêt. La seule différence est que, dans le cas d'une forêt, tous les sommets ne sont pas connexes.

On choisit renvoyer également la structure UF lié à l'algorithme afin de rapidement visualiser le résultat.

Pour la valeur de retour de l'algorithme, on choisit donc un tuple de type `(uf, forest)` où `uf` est de type `(int * int)array` et `forest` de type `(int * int * int)list`. **Au fur et à mesure de l'algorithme, la forêt s'épaissit, la structure `uf` s'homogénéise.**

C1. Écrire une fonction de signature `make_triplets : (int * 'a)list list -> (int * int * 'a) array` qui transforme les listes d'adjacence d'un graphe en un tableau de triplets représentant les arêtes de ce graphe. Concrètement, pour un sommet `i` et chaque arête `(j,w)`, on ajoute le triplet `(i,j,w)` au tableau des triplets.

Solution :

```
let make_triplets lg =
  let filter triplets edges = triplets@List.filter_map (fun (i,j,w) ->
    if not (List.mem (i,j,w) triplets) && not (List.mem (j,i,w) triplets)
      then Some (i,j,w)
    else None
      ) edges in
  Array.of_list (List.fold_left filter [] (List.mapi (fun i edges ->  List.
     map (fun (j,w) -> (i,j,w) ) edges) lg));;
```

C2. Écrire une fonction de signature `compare_edges : 'a * 'b * int -> 'c * 'd * int -> int` afin de l'utiliser pour trier le tableau de triplets en fonction du poids de l'arête avec `Array.sort`. On s'inspirera de ce qu'on a fait pour l'algorithme de Prim.

Solution :

```
    let compare_edges e1 e2 = let (_,_,w1) = e1 and (_,_,w2) = e2 in w1 - w2
        ;;
```

C3. Écrire une fonction de signature `sort_edges : ('a * 'b * int)array -> unit` qui trie le tableau de triplets selon le poids du triplet dans l'ordre croissant.

Solution :

```
  let sort_edges edges = Array.sort compare_edges edges;;
```

C4. Écrire une fonction de signature `imp_kruskal : (int * int)list list -> (int * int * int) list * (int * int)array`
qui implémente l'algorithme de Kruskal. Les paramètres est le graphe donné sous la forme d'une liste d'adjacence. La fonction renvoie le tuple `(uf, forest)`.

Solution :

```
let imp_kruskal g =
    let n = List.length g  in
```

```
        let edges = make_triplets g in
        Array.sort compare_edges edges;
        let forest = ref [] in
        let uf = Array.init n (fun i -> (i, 0)) in
        for k = 0 to (Array.length edges) - 1 do
            let (i,j,w) = edges.(k) in
            let r1 = find_root i uf and r2 = find_root j uf in
            if r1 <> r2 then (union r1 r2 uf; forest := (i,j,w)::!forest;)
        done;
        (!forest, uf);;

    imp_kruskal lcg;;
    imp_kruskal uclg;;
```

C5. Évaluer la complexité de l'algorithme de Kruskal ainsi implémenté.

Solution : Comme on parcourt toutes les arêtes et que la structure UF fait l'union en $O(\alpha(n))$, la complexité est en $O(m\alpha(n))$: c'est excellent...

C6. Démontrer la correction et la terminaison de l'algorithme de Kruskal.

Solution :

- Terminaison : la boucle `for` n'est exécutée que $|E|-1$ fois.
- Correction : L'algorithme de Kruskal construit un graphe acyclique. Or, on sait que pour tout graphe acyclique $G=(V,E)$, on a : $|E| \leqslant |V|-1$. Donc le nombre d'arêtes du graphe généré est au maximum $n-1$ (cas d'un arbre). Comme le graphe n'est pas nécessairement connexe, l'algorithme construit une forêt et on peut avoir moins de $n-1$ arêtes.

  Il suffit donc maintenant de montrer que cette forêt est de poids minimum. On procède comme pour l'algorithme de Prim. L'invariant peut être : «à chaque tour de boucle, le graphe (S,T) est une forêt couvrante de poids minimal. »