

Complexité

INFORMATIQUE COMMUNE - TP n° 2.2 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ calculer la complexité d'un algorithme simple
- ☞ donner les complexités dans le pire des cas des tris comparatifs génériques
- ☞ expliquer la différence entre le tri rapide et le tri fusion

A Complexité d'algorithmes simples

A1. Calculer la complexité de l'algorithme 1. Y-a-il un pire et un meilleur des cas?

Algorithme 1 Produit scalaire

```
1: Fonction PRODUIT_SCALAIRE( $x, y$ )                                ▷  $x$  et  $y$  sont des vecteurs à  $n$  éléments
2:    $s \leftarrow 0$ 
3:   pour  $i = 0$  à  $n - 1$  répéter
4:      $s \leftarrow s + x_i y_i$                                        ▷ coût?
5:   renvoyer  $s$ 
```

A2. Calculer la complexité de l'algorithme 2 dans le meilleur et dans le pire des cas.

Algorithme 2 Palindrome

```
1: Fonction PALINDROME( $w$ )
2:    $n \leftarrow$  la taille de la chaîne de caractères  $w$ 
3:    $i \leftarrow 0$ 
4:    $j \leftarrow n - 1$ 
5:   tant que  $i < j$  répéter
6:     si  $w[i] = w[j]$  alors
7:        $i \leftarrow i + 1$ 
8:        $j \leftarrow j - 1$ 
9:     sinon
10:      renvoyer Faux
11:   renvoyer Vrai
```

A3. Calculer la complexité de l'algorithme 3. Y-a-t-il un pire et un meilleur des cas? On fait l'hypothèse que la fonction PUISSANCE(a, b) est de complexité constante $O(1)$. Cette hypothèse vous semble-t-elle raisonnable?

Algorithme 3 Évaluation simple d'un polynôme

```
1: Fonction EVAL_POLYNÔME(p, v)
2:    $d \leftarrow$  degré de p
3:    $r \leftarrow p[0]$ 
4:   pour  $i = 1$  à  $d$  répéter
5:      $r \leftarrow r + p[i] \times \text{PUISSANCE}(v, i)$ 
6:   renvoyer r
```

A4. Utiliser la méthode de Horner (cf. algorithme 4) pour écrire un autre algorithme pour évaluer un polynôme. Quelle complexité pouvez-vous obtenir? Est-ce plus rapide?

Algorithme 4 Évaluation d'un polynôme par la méthode d'Horner

```
1: Fonction HORNER(p, d, v)
2:    $r \leftarrow p[d]$ 
3:   pour  $i = d - 1$  à 0 répéter
4:      $r \leftarrow r \times v$ 
5:      $r \leftarrow r + p[i]$ 
6:   renvoyer r
```

B Tri fusion

Algorithme 5 Tri fusion

```
1: Fonction TRI_FUSION(t)
2:    $n \leftarrow$  taille de t
3:   si  $n < 2$  alors
4:     renvoyer t
5:   sinon
6:      $t_1, t_2 \leftarrow \text{DÉCOUPER\_EN\_DEUX}(t)$ 
7:     renvoyer FUSION(TRI_FUSION( $t_1$ ), TRI_FUSION( $t_2$ ))
```

B1. Programmer le tri fusion en Python.

B2. Quelle est la complexité de cet algorithme? Y-a-t-il un pire et un meilleur cas?

B3. Vérifier, en mesurant le temps d'exécution, la justesse de votre calcul précédent.

C Tri rapide

C1. Programmer le tri rapide en Python.

C2. Quelle est la complexité de cet algorithme? Y-a-t-il un pire et un meilleur cas?

C3. Vérifier, en mesurant le temps d'exécution, la justesse de vos calculs précédents.

Algorithme 6 Découper en deux

```
1: Fonction DÉCOUPER_EN_DEUX( $t$ )
2:    $n \leftarrow$  taille de  $t$ 
3:    $t_1, t_2 \leftarrow$  deux listes vides
4:   pour  $i = 0$  à  $n//2 - 1$  répéter
5:     AJOUTER( $t_1$ ,  $t[i]$ )
6:   pour  $j = n//2$  à  $n - 1$  répéter
7:     AJOUTER( $t_2$ ,  $t[j]$ )
8:   renvoyer  $t_1, t_2$ 
```

Algorithme 7 Fusion de deux sous-tableaux triés

```
1: Fonction FUSION( $t_1, t_2$ )
2:    $n_1 \leftarrow$  taille de  $t_1$ 
3:    $n_2 \leftarrow$  taille de  $t_2$ 
4:    $n \leftarrow n_1 + n_2$ 
5:    $t \leftarrow$  une liste vide
6:    $i_1 \leftarrow 0$ 
7:    $i_2 \leftarrow 0$ 
8:   pour  $k$  de 0 à  $n - 1$  répéter
9:     si  $i_1 \geq n_1$  alors
10:      AJOUTER( $t$ ,  $t_2[i_2]$ )
11:       $i_2 \leftarrow i_2 + 1$ 
12:     sinon si  $i_2 \geq n_2$  alors
13:      AJOUTER( $t$ ,  $t_1[i_1]$ )
14:       $i_1 \leftarrow i_1 + 1$ 
15:     sinon si  $t_1[i_1] \leq t_2[i_2]$  alors
16:      AJOUTER( $t$ ,  $t_1[i_1]$ )
17:       $i_1 \leftarrow i_1 + 1$ 
18:     sinon
19:      AJOUTER( $t$ ,  $t_2[i_2]$ )
20:       $i_2 \leftarrow i_2 + 1$ 
21:   renvoyer  $t$ 
```

Algorithme 8 Tri rapide

```
1: Fonction TRI_RAPIDE( $t$ )
2:    $n \leftarrow$  taille de  $t$ 
3:   si  $n < 2$  alors
4:     renvoyer  $t$ 
5:   sinon
6:      $t_1$ , pivot,  $t_2 \leftarrow$  PARTITION( $t$ )
7:     renvoyer CONCATÉNER(TRI_RAPIDE( $t_1$ ), pivot, TRI_RAPIDE( $t_2$ ))
```

Algorithme 9 Partition en deux sous-tableaux

```
1: Fonction PARTITION(t)
2:    $n \leftarrow$  taille de t
3:   pivot  $\leftarrow$  0
4:   i_pivot  $\leftarrow$  un nombre au hasard entre 0 et  $n - 1$  inclus
5:    $t_1, t_2$  deux listes vides
6:   pour  $k = 0$  à  $n$  répéter
7:     si  $k = i\_pivot$  alors
8:       pivot  $\leftarrow$  t[k]
9:     sinon si  $t[k] \leq t[i\_pivot]$  alors
10:      AJOUTER( $t_1$ , t[k])
11:    sinon
12:      AJOUTER( $t_2$ , t[k])
13:  renvoyer  $t_1$ , pivot,  $t_2$ 
```

D Versions en place des tris

Algorithme 10 Tri fusion

```
1: Fonction TRI_FUSION(t, g, d)
2:   si  $g < d$  alors
3:      $m \leftarrow (g+d)/2$  ▷ on découpe au milieu
4:     TRI_FUSION(t, g, m)
5:     TRI_FUSION(t, m+1, d)
6:     FUSION(t, g, m, d) ▷ Sinon on n'arrête!
```

Algorithme 11 Fusion de sous-tableaux triés

```
1: Fonction FUSION(t, g, m, d)
2:    $ng \leftarrow m - g + 1$ 
3:    $nd \leftarrow d - m$ 
4:   G, D  $\leftarrow$  deux tableaux de taille ng et nd
5:   pour k de 0 à ng répéter
6:      $G[k] \leftarrow t[g + k]$ 
7:   pour k de 0 à nd répéter
8:      $D[k] \leftarrow t[m + 1 + k]$ 
9:    $i \leftarrow 0$ 
10:   $j \leftarrow 0$ 
11:   $k \leftarrow g$ 
12:  tant que  $i < ng$  et  $j < nd$  répéter
13:    si  $G[i] \leq D[j]$  alors
14:       $t[k] \leftarrow G[i]$ 
15:       $i \leftarrow i + 1$ 
16:    sinon
17:       $t[k] \leftarrow D[j]$ 
18:       $j \leftarrow j + 1$ 
19:     $k \leftarrow k + 1$ 
20:  tant que  $i < ng$  répéter
21:     $t[k] \leftarrow G[i]$ 
22:     $i \leftarrow i + 1$ 
23:     $k \leftarrow k + 1$ 
24:  tant que  $j < nd$  répéter
25:     $t[k] \leftarrow D[j]$ 
26:     $j \leftarrow j + 1$ 
27:     $k \leftarrow k + 1$ 
```

Algorithme 12 Tri rapide

```
1: Fonction TRI_RAPIDE(t, p, d)
2:   si  $p < d$  alors
3:      $i\_pivot \leftarrow PARTITION(t, p, d)$ 
4:     TRI_RAPIDE(t, p,  $i\_pivot - 1$ )
5:     TRI_RAPIDE(t,  $i\_pivot + 1$ , d)
```

▷ Sinon on n'arrête!

Algorithme 13 Partition en deux sous-tableaux

```
1: Fonction PARTITION(t, p, d)
2:   i_pivot ← un nombre au hasard entre p et d inclus
3:   pivot ← t[i_pivot]
4:   ÉCHANGER(t,d,i_pivot)                                ▷ On met le pivot à la fin du tableau
5:   i = p - 1                                              ▷ i va pointer sur le dernier élément du premier tableau
6:   pour j = p à d -1 répéter
7:     si t[j] ≤ pivot alors
8:       i ← i + 1
9:       ÉCHANGER(t,i,j)                                    ▷ On échange les places de t[i] et t[j]
10:  t[d] ← t[i+1]                                           ▷ t[i+1] appartient au tableau de droite
11:  t[i+1] ← pivot                                           ▷ Le pivot est entre les deux tableaux
12:  renvoyer i + 1                                         ▷ La place du pivot!
```
