Représentation des nombres entiers

INFORMATIQUE COMMUNE - TP n° 2.7 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ convertir un entier dans une base quelconque
- ☞ manipuler les bases 10, 2 et 16
- ☞ expliquer comment fonctionne un circuit qui additionne deux entiers
- ☞ utiliser des entiers signés
- ☞ gérer des dépassements de capacité

A Manipulations

A1. Convertir le nombre 42_{10} en binaire.

> **Solution :** `0b101010` c'est-à-dire $32+8+2$

A2. Convertir le nombre 10101010_2 en base 10.

> **Solution :** $2^7+2^5+2^3+2^1 = 128+32+8+2 = 170$

A3. Convertir le nombre 333_{10} en hexadécimal.

> **Solution :** $333_{10} = 1\times 256+4\times 16+13 = 14D_{16}$

A4. Une adresse MAC est associée à la carte réseaux de votre ordinateur. Celle-ci peut ressembler à la chaîne de caractères suivante : `BE:50:73:2A:55:2F`.

(a) À votre avis, en quelle base ces nombres sont-ils codés ?

> **Solution :** Hexadécimal (de 0 à F)

(b) Quelle est la taille d'une adresse MAC en octets ?

> **Solution :** Un chiffre hexadécimal représente 4 bits. Donc 6 octets.

(c) Quelle est la taille d'une adresse MAC en bits ?

Solution : 48 bits

(d) Convertir cette adresse en binaire.

Solution : Il y a une correspondance en base 16 entre 1 chiffre et 4 bits, donc c'est direct, pas besoin de calculs.

`1011 1110 0101 0000 0111 0011 0010 1010 0101 0101 0010 1111`

A5. Une image en niveau de gris est représentée par un tableau numpy dont les éléments sont des `uint8`, c'est-à-dire 8 bits unsigned integers.

(a) De combien de niveaux de gris (de blanc à noir) dispose-t-on pour décrire l'intensité de de chaque pixel ?

Solution : Un entier non signé sur 8 bits peut encoder 256 valeurs différentes, de 0 à 255. On dispose donc de 256 niveaux d'intensité de gris.

(b) Vous souhaitez moyenner chaque pixel d'une image définie comme précédemment. Vous écrivez ce code qui moyenne les 8 cases voisines et le pixel :

```python
import numpy as np

def moyenne(a):
    acc = np.uint8(0)
    for i in range(3):
        for j in range(3):
            acc += a[i,j]
    return acc/9

a = np.array([[50,51,52],[51,53,55],[55,57,59]], dtype=np.uint8)
print(moyenne(a))
```

Le résultat est-il juste ? Pourquoi ?

Solution : L'accumulateur est déclaré de type `uint8`. Par conséquent, l'accumulation des additions engendre un dépassement de capacité. Le résultat est faux.

(c) Proposer une version correcte de la fonction `moyenne`. Quel est le type de valeur retournée par cette fonction ?

Solution : Le type retourné est un `numpy.float64`.

```python
def moyenne(a):
    acc = 0
    for i in range(3):
        for j in range(3):
            acc += a[i,j]
    return acc/9
```

(d) Écrire l'instruction qui permet de remplacer la valeur du pixel central par sa moyenne dans le tableau `a`. Vérifier le type de donnée de la case `a[1,1]`. Que s'est-il passé ?

Solution : Le type de `a[1,1]` est `uint8`. Python a donc transtypé la valeur retour de la fonction moyenne (float64) en `uint8`, sans nous le dire ;-)

```
a[1,1] = moyenne(a)    # transtypage implicite : a[1,1] = np.uint8(
    moyenne(a))
print(type(a[1,1]))    # <class 'numpy.uint8'>
```

(e) Proposer une version de la fonction `moyenne` sans boucles `for` !

Solution :

```
def moyenne(a):
    return np.mean(a)
```

B Convertir dans une base quelconque

B1. Écrire une fonction de signature `to_binary(a :int)-> str` qui renvoie la représentation binaire d'un nombre sous la forme d'une chaîne de caractères. Par exemple, `(to_binary(35))` renvoie `"100011"`.

Solution :

```
def to_binary(a :int)-> str:
    s = ""
    while a > 0:
        m = a % 2
        s = str(m) + s
        a = a // 2
    return s
```

B2. En déduire une fonction de signature `to_base(a :int, b: int)-> str` qui renvoie la représentation d'un nombre selon la base `b` sous la forme d'une chaîne de caractères. Par exemple, `to_base(61, 3)` renvoie `"2021"` et `to_base(333, 16)` renvoie `"14D"`.

Solution :

```
def to_base(a :int, b: int)-> str:
    assert b <= 16
    s = ""
    c = "0123456789ABCDEF"
    while a > 0:
        m = a % b
        s = str(c[m]) + s
        a = a // b
    return s
```

C Half-adder et full-adder

On cherche à simuler les circuits électroniques qui réalisent l'opération d'addition sur des entiers sur n bits. On choisit de travailler sur des entiers non signés. On définit les circuits suivants :

- Le Half Adder réalise l'addition de deux bits. Ils prend deux bits A et B en entrée et possède deux sorties : S qui vaut $A \oplus B$ et C qui vaut $A.B$, la retenue.
- Le Full Adder réalise l'addition de deux bits avec retenue éventuelle à l'entrée. Il prend trois bits A, B et R en entrée et possède deux sorties : S qui vaut $A \oplus B \oplus R$ et C qui vaut $(A.B)|(R.(A \oplus B))$, la retenue.

$\oplus$ désigne le OU Exclusif bits à bits, . le ET bit à bits et | le OU bits à bits.

En Python, on a les opérateurs suivants :

- `&` ET bits à bits,
- `|` OU bits à bits,
- `^` OU exclusif bits à bits.

C1. Écrire une fonction de signature `to_binary_nbits(a: int, n: int)-> list`. Il s'agit d'une variation de la fonction `to_binary` précédente, mais qui renvoie une liste d'entier plutôt qu'une chaîne de caractères. Par exemple, `to_binary_nbits(42, 8)` renvoie `[0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0]`. La liste résultat possède n éléments, même si les premiers sont nuls.

Solution :

```
def to_binary_nbits(a: int, n: int) -> list:
    L = []
    while a > 0:
        m = a % 2
        L.append(m)
        a = a // 2
    if len(L) < n:
        while len(L) < n:
            L.append(0)
    for i in range(len(L)//2):
        L[i],L[len(L)-i-1] = L[len(L)-i-1],L[i]
    return L
```

C2. Écrire une fonction de signature `nbits_to_int(u: list)-> int` qui transforme la liste résultat de la fonction `to_binary_nbits` en entier correspondant. Par exemple, `nbits_to_int([0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0])` renvoie 42.

Solution :

```
def nbits_to_int(u: list) -> int:
    n = len(u)
    a = 0
    for k in range(n - 1, -1, -1):
        a += u[k] << (n - k - 1)
    return a
```

C3. Écrire une fonction de signature `half_adder(a: int, b: int)-> (int, int)` qui implémente le circuit Half adder.

Solution :

```python
def half_adder(a: int, b: int) -> (int, int):
    assert ((a & 0x1) == a) and ((b & 0x1) == b)
    return a ^ b, a & b
```

C4. Écrire une fonction de signature `full_adder(a: int, b: int, r: int)-> (int, int)` qui implémente le circuit Full adder.

Solution :

```python
def full_adder(a: int, b: int, r: int) -> (int, int):
    assert ((a & 0x1) == a) and ((b & 0x1) == b) and ((r & 0x1) == r)
    return a ^ b ^ r, (a & b) | (r & (a ^ b))
```

C5. Écrire une fonction de signature `add_words(u: list, v: list)-> list` qui fait l'addition de deux listes représentant des entiers en binaire à l'aide de la fonction `full_adder` en propageant la retenue. Par exemple, `add_words([0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0] , [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0])` renvoie `[0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0]`.

Solution :

```python
def add_words(u: list, v: list) -> list:
    assert len(u) == len(v)
    n = len(u)
    r = 0
    result = []
    for i in range(n - 1, -1, -1):
        (s, r) = full_adder(u[i], v[i], r)
        result.append(s)
    if r == 1:
        result.append(1)
    if len(result) < n:
        while len(result) < n:
            result.append(0)
    result.reverse()
    return result
```

D Connnaître la valeur signée d'entiers

Dans les questions qui suivent, on n'hésitera pas à utiliser les fonctions de calcul bits à bits :

- `<<` décalage binaire à gauche. Par exemple, `1 << 3` vaut 2^3.
- `>>` décalage binaire à droite. Par exemple, `60 >> 2` vaut 15.

- `&` calcule le et bits à bits. Par exemple, `260 & 0xFF` vaut 4.
- `~a` calcule le complément à 1 de a. Par exemple, `~(0b00100011)& 0xFF` vaut 220.

D1. Écrire une fonction de signature `is_neg_signed(a: int, n: int)-> bool` qui teste si un entier positif `a` sur `n` bits possède une valeur négative dans le cas où il est signé. Par exemple, `is_neg_signed (214, 8)` renvoie `True`. Mais `is_neg_signed(33, 8)` renvoie `False`. Au début de la fonction, on s'assurera par une assertion que $a < 2^n$.

Solution :

```python
def is_neg_signed(a: int, n: int) -> bool:
    assert a < (1<<n)
    return (a >> (n - 1)) == 1
```

D2. Écrire une fonction de signature `signed_nbits_to_int(a: int, n: int)-> int` qui renvoie la valeur de `a` sur `n` bits, dans le cas où `a` est signé. Par exemple, `signed_nbits_to_int(214, 8)` renvoie `-42` et `signed_nbits_to_int(33, 8)` renvoie `33`. ă

Solution :

```python
def signed_nbits_to_int(a: int, n: int) -> int:
    assert a < (1 << n)
    if is_neg_signed(a, n):
        #return -(~(a - 1) & ((1 << n) - 1))
        return -(1<<n) + a
    else:
        return a
```
