Syntaxe des formules logiques

OPTION INFORMATIQUE - TP nº 1.1 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ utiliser la définition inductive des formules logiques pour calculer la hauteur ou la taille
- ☞ construire une table de vérité
- ☞ calculer une forme normale conjonctive ou disjonctive associée à une formule logique
- ☞ modéliser un énoncé simple du langage naturel en propositions logiques

A Définition inductive des formules logiques

En s'inspirant de la définition inductive des formules logiques, on se dote du type de données OCaml `formule` suivant :

```
type formule =
    | T (* true *)
    | F (* false *)
    | Var of int (* variable *)
    | Not of formule (* negation *)
    | And of formule *formule (* conjonction *)
    | Or of formule * formule  (* disjonction *)
```

L'expression `Var of int` signifie qu'on représente les variables d'une formule logique par un numéro, ce qui est le cas dans les logiciels standard de logique. Par exemple, pour les variables des formules ci-dessous, on peut choisir la convention suivante : $a \longrightarrow 0$, $b \longrightarrow 1$, $c \longrightarrow 2$.

A1. Représenter les arbres syntaxiques des formules logiques suivantes, puis les coder en OCaml.

(a) $f_1 : a \vee (b \wedge c)$

Solution :

```
let f1 = Or ((Var 0),  And ((Var 1),(Var 2)));;
```

(b) $f_2 : (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge \neg(c \vee a))$

Solution :

```
let f2 = Or (And ((Var 0),(Not (Var 1))), And ((Var 1), Not(Or ((Var 2)
    ,(Var 0))))));;
```

(c) $f_3 : \neg a \vee (a \Longrightarrow b)$

Solution : On transforme l'implication en l'exprimant à l'aide des opérateurs premiers :

$$\neg a \vee (a \Longrightarrow b) \equiv \neg a \vee (\neg a \vee b) \equiv \neg a \vee b$$

```
let f3 = Or (Not(Var 0), (Var 1));;
```

(d) $f_4 : (a \wedge (b \Longleftrightarrow c))$

Solution : On transforme l'équivalent matérielle en l'exprimant à l'aide des opérateurs premiers : il s'agit en fait d'une double implication.

$$a \wedge (b \Longleftrightarrow c) = a \wedge (b \Longrightarrow c) \wedge (c \Longrightarrow b) = a \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg c \vee b)$$

```
let f4 = And ((Var 0), And (Or(Not (Var 1), (Var 2)), Or(Not (Var 2), (
    Var 1))));;
```

A2. Proposer une fonction de signature `valuation : int -> bool` qui implémente une valuation des variables propositionnelles a, b et c telle que les formules f_1 et f_2 soient vraies et f_3 et f_4 fausses. On utilisera le filtrage de motif. Les variables sont représentées par leur numéro : $a \longrightarrow 0$, $b \longrightarrow 1$, $c \longrightarrow 2$. Si le numéro de variable n'est pas connu, la fonction échoue et renvoie le message `"Unknown variable"`!.

Solution :

```
let valuation i =
    match i with
        | 0 -> true  (* a valuation *)
        | 1 -> false (* b valuation *)
        | 2 -> true  (* c valuation *)
        | _ -> failwith "Unknown variable !";;
```

A3. Écrire une fonction **récursive** de signature `evaluation : (int -> bool)-> formule -> bool` qui évalue une formule logique d'après une valuation donnée. On utilisera le firltrage de motif. Cette fonction s'appuie sur la définition inductive de l'évaluation telle que définie dans le cours.

Solution :

```
let rec evaluation v f =
    match f with
        | T -> true
        | F -> false
        | Var x -> v x
        | Not p -> not (evaluation v p)
        | And (p, q) -> evaluation v p && evaluation v q
```

```
        | Or (p, q) -> evaluation v p || evaluation v q
    ;;
```

A4. Vérifier que la valuation choisie est bien telle que spécifiée à la question A.2.

Solution :

```
evaluation valuation f1;;
evaluation valuation f2;;
evaluation valuation f3;;
evaluation valuation f4;;
```

B Taille, hauteur et nombre de termes d'une formule logique

B1. En utilisant la définition de la fonction `taille` d'une formule logique, écrire une fonction de signature `taille : formule -> int` qui renvoie la taille d'une formule.

Solution :

```
let rec taille f =
    match f with
        | T -> 0
        | F -> 0
        | Var _ -> 0
        | Not f -> 1 + (taille f)
        | And (fa,fb) -> 1 + (taille fa) + (taille fb)
        | Or (fa,fb) -> 1 + (taille fa) + (taille fb);;
```

B2. Vérifier sur les arbres des formules f_1, f_2, f_3 et f_4 les résultats produits par la fonction `taille`.

Solution :

```
taille f1;;
taille f2;;
taille f3;;
taille f4;;
```

B3. En utilisant la définition de la fonction `hauteur` d'une formule logique, écrire une fonction de signature `hauteur : formule -> int` qui renvoie la hauteur d'une formule.

Solution :

```
let rec hauteur f =
    match f with
```

```
            | T -> 0
            | F -> 0
            | Var _ -> 0
            | Not f -> 1 + (hauteur f)
            | And (fa,fb) -> 1 + (max (hauteur fa) (hauteur fb))
            | Or (fa,fb) -> 1 + (max (hauteur fa) (hauteur fb));;
```

B4. Vérifier sur les arbres des formules f_1, f_2, f_3 et f_4 les résultats produits par la fonction `hauteur`.

Solution :

```
hauteur f1;;
hauteur f2;;
hauteur f3;;
hauteur f4;;
```

B5. On code conventionnellement les variables par des entiers en commençant par zéro. Proposer une fonction de signature `max_var : formule -> int -> int` qui renvoie l'entier le plus grand représentant une variable propositionnelle dans une formule. En déduire une fonction `nb_var : formule -> int` qui renvoie le nombre de variables propositionnelles utilisées dans une formule.

Solution :

```
let rec max_var f k = (* k is current index *)
    match f with
        | T | F -> k
        | Var i -> max i k
        | Not fa -> max_var fa k
        | And (fa,fb) -> max_var fb (max_var fa k)
        | Or  (fa,fb) -> max_var fb (max_var fa k)

let nb_var f = (max_var f 0) + 1
```

B6. Vérifier sur f_1, f_2, f_3 et f_4 les résultats produits par les fonction `highest_var` et `nb_var`.

Solution :

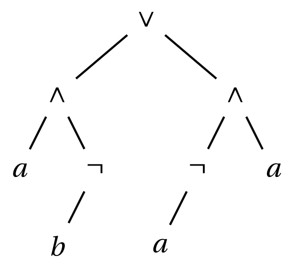
```
max_var f1;;
max_var f2;;
max_var f3;;
max_var f4;;

nb_var f1;;
nb_var f2;;
nb_var f3;;
nb_var f4;;
```

C De la table de vérité à la forme normale (i)

On considère la formule $\psi = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$.

C1. Construire l'arbre syntaxique de ϕ.

Solution :



C2. Établir la table de vérité de ϕ.

Solution :

a	b	$\neg b$	$a \wedge \neg b$	$\neg a$	$\neg a \wedge b$	ϕ
F	F	T	F	T	F	F
F	T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F	T
T	T	F	F	F	F	F

C3. Proposer une forme normale disjonctive de ϕ

Solution : Il suffit de faire la disjonction des modèles de ϕ :

$$\phi = (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b)$$

On l'avait déjà ;-)

C4. Proposer une forme normale conjonctive de ϕ

Solution : On sélectionne les contre-modèles puis on prend la négation de chaque littéral pour construire une clause disjonctive.

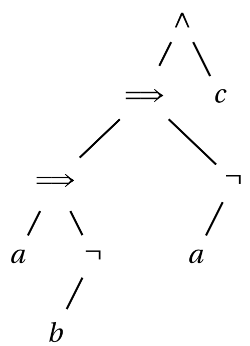
$$\phi = (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$$

D De la table de vérité à la forme normale (ii)

On considère la formule $\phi = ((a \Longrightarrow \neg b) \Longrightarrow \neg a) \wedge c$.

D1. Construire l'arbre syntaxique de ϕ.

Solution :



D2. Établir la table de vérité de ϕ.

Solution :

a	b	c	$\neg b$	$a \Longrightarrow \neg b$	$\neg a$	$(a \Longrightarrow \neg b) \Longrightarrow \neg a$	ϕ
F	F	F	T	T	T	T	F
F	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	F
F	T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	F
T	F	T	T	T	F	F	F
T	T	F	F	F	F	T	F
T	T	T	F	F	F	T	T

D3. Proposer une forme normale disjonctive de ϕ

Solution : Il suffit de faire la disjonction des modèles de ϕ :

$$\phi = (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) = (\neg a \wedge \neg b \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

D4. Proposer une forme normale conjonctive de ϕ

Solution : On sélectionne les contre-modèles puis on prend la négation de chaque littéral pour construire une clause disjonctive. Par la suite, quelques observations permettent de simplifier l'expression.

$$\phi = (a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg b \vee c)$$

On observe que les clauses 1,2,3 et 5 ont en commun c. Pour que la formule soit vraie, il suffit que c soit vraie, quelque soit les valeur de a et de b. Par le calcul, on met en facteur c et cela donne :

$$\phi = (c \vee ((a \vee b) \wedge (a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b))) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c)$$

$$\phi = c \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c)$$

Pour que la formule soit vraie, il faut que c soit vrai. Donc $\neg c$ est faux. On peut donc simplifier en :

$$\phi = c \wedge (\neg a \vee b)$$

E Du langage naturel à la logique propositionnelle

On considère l'énoncé suivant :

> Si le professeur a bien dormi, l'examen est conforme aux exercices de TD. Si j'apprends mon cours, je réussis à trouver la solution des exercices de TD. Si je réussis à trouver la solution des exercices de TD et que l'examen est conforme aux exercices de TD, je réussis l'examen.

E1. Modéliser l'énoncé à l'aide de propositions.

Solution : On pose :

- P le professeur a bien dormi.
- E l'examen est conforme aux exercices de TD.
- A j'apprends mon cours.
- T je réussis à trouver la solution des exercices de TD.
- R je réussis l'examen.

La modélisation est donc :

- $P \Longrightarrow E$
- $A \Longrightarrow T$
- $(T \wedge E) \Longrightarrow R$

E2. Peut-on affirmer que, dans tous les cas, si le professeur dort bien, l'élève réussi à l'examen ?

Solution : Non, naturellement. Comme le professeur dort bien, on a P. D'après notre première règle, on a donc :

$$(P \wedge (P \Longrightarrow E)) \Longrightarrow E$$

(Modus Ponens)

Par contre, on ne peut pas statuer sur T. Donc, R peut ne pas être vraie dans tous les cas car T peut être fausse. .