Automates finis déterministes

OPTION INFORMATIQUE - TP nº 3.9 - Olivier Reynet

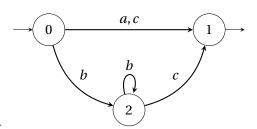
À la fin de ce chapitre, je sais :

- 🕼 définir un automate fini déterministe
- représenter un automate fini déterministe
- qualifier les états d'un automates (accessibilité)
- 🎏 compléter un AFD
- 🎏 complémenter un AFD
- faire le produit de deux AFD

A Construction d'automates simples

- A1. On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Construire les automates suivants :
 - (a) A_0 reconnaissant les mots commençant par deux occurrences de a.
 - (b) A_1 reconnaissant le langage défini par l'expression rationnelle $a|b^*c$.
 - (c) A_2 reconnaissant les mots contenant un nombre de a égal à 1 modulo 3, sans contrainte sur les autres lettres.
 - (d) \mathcal{A}_3 reconnaissant les mots contenant un nombre pair de a et un nombre impair de b, c'est à dire $\{b, baa, aab, bbb, bababbb, aabbb, aabbb, ababaab, ...\}$. On suppose que l'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$.
- A2. Donner les représentations tabulaires des automates A_0 , A_1 , A_2 et A_3 .
- A3. Les automates que vous avez dessinés sont-ils complets?
- A4. Combien d'automates complets différents à n états peut-on construire? On cherchera à exprimer la réponse en fonction de n et $|\Sigma|$

B Complété et complémentaire d'automates finis déterministes



- B1. Compléter l'automate fini déterministe $\mathcal A$ suivant.
- B2. Quels sont les états co-accessibles de l'automate complété de A?
- B3. Dessiner le complémentaire de l'automate \mathcal{A} précédent.
- B4. Le complémentaire de l'automate \mathcal{A} reconnaît-il le mot vide ϵ ?

OPTION INFORMATIQUE TP no 3.9

C Modélisation d'un automate en OCaml

On choisit de modéliser un automate fini par un type algébrique de la manière suivante : les états sont représentés par des types int. Les lettres sont des types char. On représente les états par une int list et l'alphabet par une char list. On spécifie l'état initial (unique) et les états accepteurs forment une int list. La fonction de transition est une fonction. Cette solution d'implémentation présente l'avantage de coller au plus prêt à la définition mathématique d'un automate.

- C1. Créer une variable automata qui représente l'automate \mathcal{A} de la section B.
- C2. Comment peut-on calculer l'état suivant lorsque l'automate automata est dans l'état 2 et qu'il lit la lettre 'c'?

D Calcul d'un mot par un automate

- D1. Créer une fonction de signature up_to : fsm -> string -> int qui renvoie l'état d'arrivée dans lequel se trouve un automate à qui on a donné un mot reconnaître.
- D2. Créer une fonction de signature match_word : fsm -> string -> bool qui renvoie vrai si un mot est reconnu par l'automate, faux sinon. Se servir de la fonction précédente et de la fonction List.
- D3. Tester l'automate sur plusieurs mots dans ou en dehors du langage. Que constatez-vous?

E Algorithmes de transformation simple d'un automate

- E1. Créer une fonction de signature is_complete : fsm -> bool qui teste la complétude d'un automate. Dès qu'un état est détecté comme incomplet, c'est à dire il manque une transition pour une certaine lettre de l'alphabet, cette fonction renvoie false.
- E2. Créer une fonction de signature complete : fsm -> fsm qui crée l'automate complété d'un automate incomplet.
- E3. Créer l'automate complété de A et le tester sur des mots dans et en dehors du langage.
- E4. Créer une fonction de signature complement : fsm -> fsm qui crée l'automate complémentaire d'un automate.

F États accessibles et co-accessibles d'un automate

Pour déterminer les états accessibles ou co-accessibles d'un automate, on utilise les algorithmes des graphes sur le graphe orienté que constitue l'automate.

F1. Créer une fonction de signature succ : fsm -> int -> int list qui renvoie la liste des successeurs d'un état d'un automate passé en paramètre.

OPTION INFORMATIQUE TP no 3.9

F2. Créer une fonction de signature fsm_to_graph : fsm -> int list array qui crée le graphe d'un automate sous la forme d'une liste d'adjacence. On utilisera la fonction précédente et la fonction Array.of_list pour transformer la liste résultat int list list en int list array. On pourra ainsi pouvoir réutiliser les codes sur les graphes de nos TP précédents.

- F3. En effectuant un parcours en largeur d'un graphe, créer une fonction de signature accessible_states : fsm -> int list qui renvoie la liste des états accessibles.
- F4. Créer une fonction de signature switch_direction : int list array -> int list array qui transforme un graphe en un autre graphe en inversant le sens de tous ses arcs. On utilisera une boucle for et la fonction List.iter qu nécessite une fonction renvoyant unit.
- F5. Créer une fonction de signature coaccessible_states : fsm -> int list qui renvoie la liste des états co-accessibles. On s'appuiera sur un parcours en largeur en partant des états accepteurs et la fonction précédente.

G Problème de la finitude d'un langage reconnaissable

Le problème de la finitude d'un langage est décidable pour les AFD. L'idée fondamentale est la suivante : le langage accepté sera infini si et seulement s'il existe un circuit accessible et co-accessible, c'est à dire dans lequel on peut arriver et duquel on peut sortir vers un état accepteur.

- G1. Proposer un algorithme pour détecter les cycles dans un graphe orienté. La fonction créée renverra faux si un cycle est détecté.
- G2. Pour un automate fini déterministe donné, créer une fonction de signature is_finite_language : fsm -> bool qui permet de savoir si le language reconnu par un automate est fini.
- G3. Modifier l'automate A pour que le langage reconnu soit fini.