Complexité

INFORMATIQUE COMMUNE - TP n° 2.2 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ calculer la complexité d'un algorithme simple
- ☞ donner les complexités dans le pire des cas des tris comparatifs génériques
- ☞ expliquer la différence entre le tri rapide et le tri fusion

A Complexité d'algorithmes simples

A1. Calculer la complexité de l'algorithme 1. Y-a-il un pire et un meilleur des cas ?

Algorithme 1 Produit scalaire

```
1 : Fonction PRODUIT_SCALAIRE(x, y)          ▷ x et y sont des vecteurs à n éléments
2 :     s ← 0
3 :     pour i = 0 à n − 1 répéter
4 :         s ← s + x_i y_i                  ▷ coût ?
5 :     renvoyer s
```

A2. Calculer la complexité de l'algorithme 2 dans le meilleur et dans le pire des cas.

Algorithme 2 Palindrome

```
1 : Fonction PALINDROME(w)
2 :     n ← la taille de la chaîne de caractères w
3 :     i ← 0
4 :     j ← n − 1
5 :     tant que i < j répéter
6 :         si w[i] = w[j] alors
7 :             i ← i + 1
8 :             j ← j − 1
9 :         sinon
10 :            renvoyer Faux
11 :    renvoyer Vrai
```

A3. Calculer la complexité de l'algorithme 3. Y-a-t-il un pire et un meilleur des cas ? On fait l'hypothèse que la fonction PUISSANCE(a,b) est de complexité constante $O(1)$. Cette hypothèse vous semble-t-elle raisonnable ?

Algorithme 3 Évaluation simple d'un polynôme

```
1 : Fonction EVAL_POLYNÔME(p, v)
2 :     d ← degré de p
3 :     r ← p[0]
4 :     pour i = 1 à d répéter
5 :         r ← r + p[i] ×PUISSANCE(v, i)
6 :     renvoyer r
```

A4. Utiliser la méthode de Horner (cf. algorithme 4) pour écrire un autre algorithme pour évaluer un polynôme. Quelle complexité pouvez-vous obtenir ? Est-ce plus rapide ?

Algorithme 4 Évaluation d'un polynôme par la méthode d'Horner

```
1 : Fonction HORNER(p, d, v)
2 :     r ← p[d]
3 :     pour i = d − 1 à 0 répéter
4 :         r ← r × v
5 :         r ← r + p[i]
6 :     renvoyer r
```

B Tri fusion

Algorithme 5 Tri fusion

```
1 : Fonction TRI_FUSION(t)
2 :     n ← taille de t
3 :     si n < 2 alors
4 :         renvoyer t
5 :     sinon
6 :         t1, t2 ← DÉCOUPER_EN_DEUX(t)
7 :         renvoyer FUSION(TRI_FUSION(t1),TRI_FUSION(t2) )
```

B1. Programmer le tri fusion en Python.

B2. Quelle est la complexité de cet algorithme ? Y-a-t-il un pire et un meilleur cas ?

B3. Vérifier, en mesurant le temps d'exécution, la justesse de votre calcul précédent.

C Tri rapide

C1. Programmer le tri rapide en Python.

C2. Quelle est la complexité de cet algorithme ? Y-a-t-il un pire et un meilleur cas ?

C3. Vérifier, en mesurant le temps d'exécution, la justesse de vos calculs précédents.

Algorithme 6 Découper en deux

```
1 : Fonction DÉCOUPER_EN_DEUX(t)
2 :     n ← taille de t
3 :     t1, t2 ← deux listes vides
4 :     pour i = 0 à n//2 − 1 répéter
5 :         AJOUTER(t1, t[i])
6 :     pour j = n//2 à n − 1 répéter
7 :         AJOUTER(t2, t[j])
8 :     renvoyer t1, t2
```

Algorithme 7 Fusion de deux sous-tableaux triés

```
1 : Fonction FUSION(t1, t2)
2 :     n1 ← taille de t1
3 :     n2 ← taille de t2
4 :     n ← n1 + n2
5 :     t ← une liste vide
6 :     i1 ← 0
7 :     i2 ← 0
8 :     pour k de 0 à n - 1 répéter
9 :         si i1 ⩾ n1 alors
10 :            AJOUTER(t, t2[i2])
11 :            i2 ← i2 + 1
12 :        sinon si i2 ⩾ n2 alors
13 :            AJOUTER(t, t1[i1])
14 :            i1 ← i1 + 1
15 :        sinon si t1[i1] ⩽ t2[i2] alors
16 :            AJOUTER(t, t1[i1])
17 :            i1 ← i1 + 1
18 :        sinon
19 :            AJOUTER(t, t2[i2])
20 :            i2 ← i2 + 1
21 :    renvoyer t
```

Algorithme 8 Tri rapide

```
1 : Fonction TRI_RAPIDE(t)
2 :     n ← taille de t
3 :     si n < 2 alors
4 :         renvoyer t
5 :     sinon
6 :         t1, pivot, t2 ← PARTITION(t)
7 :         renvoyer CONCATÉNER(TRI_RAPIDE(t1), pivot, TRI_RAPIDE(t2))
```

Algorithme 9 Partition en deux sous-tableaux

```
1 : Fonction PARTITION(t)
2 :     n ← taille de t
3 :     pivot ← 0
4 :     i_pivot ← un nombre au hasard entre 0 et n − 1 inclus
5 :     t1, t2 deux listes vides
6 :     pour k = 0 à n répéter
7 :         si k = i_pivot alors
8 :             pivot ← t[k]
9 :         sinon si t[k] ⩽ t[i_pivot] alors
10 :            AJOUTER(t1, t[k])
11 :        sinon
12 :            AJOUTER(t2, t[k])
13 :    renvoyer t1, pivot, t2
```

D Versions en place des tris

Algorithme 10 Tri fusion

```
1 : Fonction TRI_FUSION(t, g, d)
2 :     si g < d alors
3 :         m ← (g+d)//2                          ▷ on découpe au milieu
4 :         TRI_FUSION(t, g, m)
5 :         TRI_FUSION(t, m+1, d)
6 :         FUSION(t, g, m, d)
                                                  ▷ Sinon on n'arrête!
```

Algorithme 11 Fusion de sous-tableaux triés

```
1 : Fonction FUSION(t, g, m, d)
2 :     ng ← m - g +1
3 :     nd ← d - m
4 :     G, D ← deux tableaux de taille ng et nd
5 :     pour k de 0 à ng répéter
6 :         G[k] ← t[g + k]
7 :     pour k de 0 à nd répéter
8 :         D[k] ← t[m + 1 + k ]
9 :     i ← 0
10 :    j ← 0
11 :    k ← g
12 :    tant que i < ng et j <nd répéter
13 :        si G[i] ⩽ D[j] alors
14 :            t[k] ← G[i]
15 :            i ← i + 1
16 :        sinon
17 :            t[k] ← D[j]
18 :            j ← j + 1
19 :        k ← k + 1
20 :    tant que i < ng répéter
21 :        t[k] ← G[i]
22 :        i ← i + 1
23 :        k ← k + 1
24 :    tant que j < nd répéter
25 :        t[k] ← D[j]
26 :        j ← j + 1
27 :        k ← k + 1
```

Algorithme 12 Tri rapide

```
1 : Fonction TRI_RAPIDE(t, p, d)
2 :     si p < d alors
3 :         i_pivot ← PARTITION(t, p, d)
4 :         TRI_RAPIDE(t, p, i_pivot -1)
5 :         TRI_RAPIDE(t, i_pivot+1, d)
                                        ▷ Sinon on n'arrête!
```

Algorithme 13 Partition en deux sous-tableaux

```
1 : Fonction PARTITION(t, p, d)
2 :     i_pivot ← un nombre au hasard entre p et d inclus
3 :     pivot ← t[i_pivot]
4 :     ÉCHANGER(t,d,i_pivot)                ▷ On met le pivot à la fin du tableau
5 :     i = p - 1                            ▷ i va pointer sur le dernier élément du premier tableau
6 :     pour j = p à d -1 répéter
7 :         si t[j] ⩽ pivot alors
8 :             i ← i + 1
9 :             ÉCHANGER(t,i,j)              ▷ On échange les places de t[i] et t[j]
10 :    t[d] ← t[i+1]                        ▷ t[i+1] appartient au tableau de droite
11 :    t[i+1] ← pivot                       ▷ Le pivot est entre les deux tableaux
12 :    renvoyer i + 1                       ▷ La place du pivot!
```