

Introduction aux langages

OPTION INFORMATIQUE - TP n° 3.7 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ utiliser le lemme de Levi
- ☞ manipuler un alphabet, un langage et ses puissances,
- ☞ programmer en OCaml des outils pour manipuler les langages.

A Mots, alphabets et lemme de Levi

On considère une alphabet Σ contenant au moins deux éléments.

- A1. Soit Σ un alphabet. Soient a et b deux **lettres** de Σ . Montrer que $\forall u \in \Sigma^*, ua = bu \implies a = b$ et $u \in \{a\}^*$. On utilisera la définition inductive des mots.

Solution : On procède par induction en utilisant la définition inductive des mots.

(Cas de base) Soit $u = \epsilon$. Alors $ua = \epsilon a = a$ et $bu = b\epsilon = b$. Si $ua = bu$ alors on a $a = b$. De plus, comme $\epsilon \in \{a\}^*$, la propriété est vérifiée.

(Pas d'induction) On suppose maintenant qu'on dispose d'un mot u vérifiant la propriété \mathcal{P} : $ua = bu \implies a = b$ et $u \in \{a\}^*$. On cherche à construire v un mot à partir de u et à montrer que ce mot v vérifie également \mathcal{P} . Soit c une lettre de Σ . On peut construire un mot par la droite d'après la définition inductive des mots : soit $v = uc$. Alors on a $va = uca$. De même, $bv = buc$. Supposons que $va = bv$, c'est-à-dire $uca = buc$. Comme les lettres sont des éléments atomiques et la décomposition des mots uniques sur Σ , on a donc nécessairement : $a = c$ et $uc = bu$, c'est-à-dire $ua = bu$. Or, d'après notre hypothèse, u vérifie la propriété \mathcal{P} et donc ceci implique de $a = b$ et $u \in \{a\}^*$. On a alors $va = uca = uaa$ et on en déduit que $v \in \{a\}^*$.

(Conclusion) Quelque soit le mot u de Σ^* , la propriété \mathcal{P} est vérifiée.

- A2. Soient r, s, u, v et w quatre mots de Σ^* tels que $w = ur$ et $w = vs$. Montrer que u est un préfixe de v ou que v est un préfixe de u .

Solution : D'après le lemme de Levi, comme $ur = vs$, il existe un unique mot $z \in \Sigma^*$ tel que :

- soit $v = zu$
- soit $u = vz$

Quoiqu'il en soit, v est préfixe de u ou le contraire.

- A3. Soient u et v deux mots de Σ^* qui vérifient $uv = vu$. Démontrer par induction structurale sur les mots que :

$$\exists w \in \Sigma^*, \exists n, m \in \mathbb{N}, u = w^n \text{ et } v = w^m$$

Solution : On procède par induction sur la définition d'un mot. La propriété à vérifier est :

$$\mathcal{P} : \forall u, v \in \Sigma^*, uv = vu \implies \exists w \in \Sigma^*, \exists n, m \in \mathbb{N}, u = w^n \text{ et } v = w^m$$

(Cas de base) Ce sont les cas où l'on considère le mot vide.

1. Si $u = v = \epsilon$ alors $w = \epsilon$, n'importe quelles valeurs de n ou de m conviennent.

(Pas d'induction) On suppose qu'on dispose de deux mots u et v qui vérifient \mathcal{P} . On construit un mot t à partir de u et on cherche à montrer que t vérifie \mathcal{P} .

Supposons que $uv = vu$. Par hypothèse d'induction, il existe donc deux entiers n et m tels que $u = w^n$ et $v = w^m$. Soit une lettre c de l'alphabet Σ . On peut construire par induction un mot $t = cu$ par la gauche. Supposons que $tv = vt$. Alors on a $cuv = vcu$. ce qui s'écrit $cw^{n+m} = w^m cw^n$. On peut simplifier par la droite par w^n . On obtient alors $cw^m = w^m c$ ce qui n'est possible que si $w = c$ (cf. résultat de la première question) puisque la décomposition d'un mot en lettres est unique (la lettre est atomique). On a donc $t = cu = w^{n+1}$. Le couple t et v vérifient la propriété \mathcal{P} . À partir de n'importe quel couple de mots vérifiant \mathcal{P} , la construction d'un autre mot par concaténation engendre un mot la vérifiant.

(Conclusion) La propriété \mathcal{P} est vraie dans le cas de base et la règle de construction des mots ne modifie pas la propriété. \mathcal{P} est donc vérifiée pour tout mots u et v de Σ^* .

- A4. Soient deux mots u et v de Σ^* . Montrer que :

$$\exists p, q \in \mathbb{N}, u^p = v^q \iff \exists w \in \Sigma^*, \exists n, m \in \mathbb{N}, u = w^n \text{ et } v = w^m$$

Solution :

(\Leftarrow) Soit p et q deux entiers. On a donc $u^p = w^{np}$ et $v^q = w^{mq}$. Il suffit donc de choisir $p = m$ et $q = n$ pour vérifier $u^p = v^q$.

(\Rightarrow) On a $u^p = uu^{p-1} = vv^{q-1} = v^q$. On applique le lemme de Lévi. Il existe alors un mot z de Σ^* tel que $vz = u^{p-1}$ et $zu = v^{q-1}$. On en déduit que $zuv = uvz$. D'après l'exercice précédent, il existe un mot w et deux entiers r et s tels que : $z = w^r$ et $uv = w^s$. Et donc il existe deux entiers n et m tels que $u = w^n$ et $v = w^m$.

- A5. On définit les mots de Fibonacci sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ par :

$$w_0 = \epsilon \tag{1}$$

$$w_1 = a \tag{2}$$

$$w_2 = b \tag{3}$$

$$w_n = w_{n-1} w_{n-2}, \forall n > 2 \tag{4}$$

- (a) On suppose $n > 2$. Montrer que le suffixe de longueur deux de w_n est ba si n est impair et ab sinon.

Solution : Démonstration par récurrence sur n .

- (b) On suppose $n > 3$ et on définit le mot v_n comme le préfixe de w_n obtenu en supprimant les deux dernières lettres. Montrer que v_n est un palindrome.

Solution : Par récurrence et en remarquant que $w_{n+1} = w_n w_{n-1} = v_n x y v_{n-1} y x$ avec $x = a$ et $y = b$ si n est pair, l'inverse sinon.

Le cœur de la démonstration s'appuie sur, si n est pair :

$$w_n = v_n ab = v_{n-1} b a v_{n-2} ab \quad (5)$$

$$w_{n+1} = w_n w_{n-1} = (v_{n-1} b a v_{n-2} a b v_{n-1}) b a \quad (6)$$

Comme par hypothèse de récurrence v_{n-1} et v_{n-2} sont des palindromes, alors $(v_{n-1} b a v_{n-2} a b v_{n-1})$ est un palindrome.

- (c) Écrire une fonction récursive de signature `is_palindrome : string -> bool` qui permet de tester si une chaîne de caractères est un palindrome. Le pattern matching sur le type `string` n'est pas possible en OCaml car, contrairement aux listes, ce n'est pas type défini inductivement.

Solution :

```
let rec is_palindrome str =
  let n = String.length str in
  match n with
  | 0 | 1 -> true
  | _ -> if str.[0] = str.[n-1]
         then is_palindrome (String.sub str 1 (n-2))
         else false

;;

is_palindrome("non");;
is_palindrome("pas");;
is_palindrome("essayasse");;
is_palindrome("girafarig");;
is_palindrome("esope reste ici et se repose");;
is_palindrome("esoperesteicietserepose");;
```

- (d) Écrire quatre version de la fonction signature `fib_word : int -> string` qui renvoie le nième mot de Fibonacci. Ces quatre versions correspondent à :

1. une version à récursivité multiple,
2. une version à récursivité terminale,
3. une version itérative (programmation dynamique par le bas)
4. une version avec mémoïsation (programmation dynamique récursive).

Vérifier le résultat de la question b.

Solution :

```

let rec rec_fib_word n =
  match n with
  | 0 -> ""
  | 1 -> "a"
  | 2 -> "b"
  | _ -> rec_fib_word (n - 1) ^ rec_fib_word (n - 2);;

let ite_fib_word n =
  let u1 = ref "a" and u2 = ref "b" in
  match n with
  | 0 -> ""
  | 1 -> "a"
  | 2 -> "b"
  | _ -> for _ = 3 to n do
      let tmp = !u2 in
      u2 := !u2 ^ !u1; u1 := tmp;
    done;
    !u2;;

let term_rec_fib_word n =
  let rec aux u2 u1 k = if k < n
    then aux (u2 ^ u1) u2 (k + 1)
    else u2 ^ u1

  in match n with
  | 0 -> ""
  | 1 -> "a"
  | 2 -> "b"
  | _ -> aux "b" "a" 3
  ;;

let memo_fib_word n =
  let memo = Hashtbl.create n in
  let rec aux k = match k with
    | 0 -> ""
    | 1 -> "a"
    | 2 -> "b"
    | _ -> if Hashtbl.mem memo k
      then Hashtbl.find memo k
      else (Hashtbl.add memo k ((aux (k - 1)) ^ (aux (k - 2))))
    ;
    Hashtbl.find memo k;)
  in aux n;;

for i=0 to 9 do
  Printf.printf "rec_fib_word %i -> %s\n" i (rec_fib_word i);
  Printf.printf "term_rec_fib_word %i -> %s\n" i (term_rec_fib_word i)
  ;
  Printf.printf "ite_fib_word %i -> %s\n" i (ite_fib_word i);
  Printf.printf "memo_fib_word %i -> %s\n" i (memo_fib_word i);
  assert ((rec_fib_word i) = (ite_fib_word i));
  assert ((rec_fib_word i) = (term_rec_fib_word i));
  assert ((rec_fib_word i) = (memo_fib_word i));

```

```

done;;

for i=4 to 9 do
  let result = memo_fib_word i in
  Printf.printf "Fibonacci word -> %s -> %b\n" result (is_palindrome(
    String.sub result 0 ((String.length result) - 2)));
  assert (is_palindrome(String.sub result 0 ((String.length result) -
    2)));
done;;

```

B Langage et concaténation

B1. Soit \mathcal{L} un langage sur Σ . Démontrer que $\mathcal{L}.\emptyset = \emptyset, \mathcal{L} = \emptyset$.

Solution : On utilise la définition de la concaténation d'un langage.

$$\mathcal{L}.\emptyset = \{vw, v \in \mathcal{L} \wedge w \in \emptyset\} \quad (7)$$

$$= \emptyset \text{ car } w \in \emptyset \text{ est impossible par définition} \quad (8)$$

On procède de la même manière pour l'autre expression.

B2. Soit Σ un alphabet. Que vaut le cardinal de Σ^n en fonction du cardinal de Σ ? (S'appuyer sur la définition inductive de la puissance d'un langage)

Solution : On cherche à montrer que le cardinal de la puissance n d'un langage est le cardinal de ce langage à la puissance n . On fait donc l'hypothèse que $|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$. On la démontre par induction en utilisant la définition inductive de la puissance d'un langage.

- Cas de base : pour $n = 0$, $|\Sigma^0| = |\{e\}| = 1 = |\Sigma|^0$
- Pas d'induction : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$. Considérons maintenant :

$$|\Sigma^{n+1}| = |\Sigma.\Sigma^n| \quad (9)$$

$$= |\{vw, v \in \Sigma \wedge w \in \Sigma^n\}| \quad (10)$$

Or, il n'y a que $|\Sigma|$ choix possible pour v . Il y a $|\Sigma|^n$ choix possibles pour w , par hypothèse d'induction. Donc, on a :

$$|\Sigma^{n+1}| = |\Sigma| \times |\Sigma|^n = |\Sigma|^{n+1} \quad (11)$$

B3. On se donne l'alphabet `let sigma = ["a"; "b"; "c"]`, c'est à dire qu'on l'implémente par une liste. Écrire une fonction OCaml de signature `sigma_k : 'a list -> int -> 'a list list` qui génère le langage Σ^k sous la forme d'un liste de liste. Les éléments de cette liste seront les mots. Par exemple, `sigma_k sigma 2` renvoie :

```

[["a"; "a"]; ["a"; "b"]; ["a"; "c"]; ["b"; "a"]; ["b"; "b"]; ["b"; "c"]; ["c";
  "a"]; ["c"; "b"]; ["c"; "c"]]

```

Solution :

```
let sigma = ["a"; "b"; "c"];; (* Sigma *)

let rec sigma_k alphabet k =
  match k with
  | 0 -> []
  | 1 -> List.map (fun letter -> [letter]) alphabet
  | k -> List.fold_left
    (fun words letter ->
      words@(List.map (fun word -> letter::word) (sigma_k
        alphabet (k - 1))))
    [] alphabet;;
sigma_k sigma 5;;
```

B4. Peut-on représenter Σ^* avec cette implémentation?

Solution : Non, car le nombre d'éléments d'une liste est fini et Σ^* est un infini dénombrable.