THÉORIE DES JEUX

> Si deux ont proposé entre eux, de dire chacun l'un après l'autre alternativement un nombre à plaisir, qui toutefois ne surpasse pas un certain nombre précis, pour voir ajoutant ensemble les nombres qu'ils diront qui arrivera plutôt à quelque nombre prescrit ; faire si bien quon arrive toujours le premier au nombre destiné.
>
> Claude-Gaspar Bachet de Méziriac, 1612 [**bachet_problemes_1612**]

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ☞ expliquer l'intérêt de la théorie des jeux
- ☞ expliquer le concept de jeu d'accessibilité
- ☞ coder le calcul des attracteurs
- ☞ expliquer la notion d'heuristique
- ☞ appliquer les algorithmes A* et minimax

La théorie des jeux a été initiée par John Von Neumann pendant et après la seconde guerre mondiale. Dans un ouvrage resté célèbre[**von_neumann_theory_1944**], de nombreux problèmes très généraux sont abordés sous la perspective du jeu et de l'économie. Tout comme les algorithmes d'IA développés aujourd'hui, cette théorie a pour objectif d'aider à la décision lorsque l'environnement est incertain, c'est-à-dire complexe et imprévisible. Elle fait intervenir des joueurs considérés comme des individus rationnels, des règles et des contextes d'évolution du jeu.

Le programme de classe préparatoire n'aborde que les jeux d'accessibilité à deux joueurs que l'on peut modéliser avec un graphe orienté biparti. Néanmoins, cela permet de lever le voile sur une théorie puissante et fascinante.

A Introduction à la théorie des jeux

■ **Définition 1 — Jeu.** Dans le cadre de cette théorie, on considère qu'un jeu est une activité humaine définie dans le cadre d'un contexte et dont les participants doivent suivre les règles énoncées et faire des choix pour gagner en s'opposant ou résoudre un problème ensemble. Cette activité nécessite des compétences intellectuelles, des savoirs et incorpore le hasard.

Les jeux ainsi définis englobent donc la plupart des activités humaines : l'économie, la guerre, l'étude du vivant ou même la physique peuvent être le cadre de jeux qui servent alors de modèles pour découvrir, établir des stratégies ou simuler une réalité.

■ **Définition 2 — Jeux coopératifs.** Un jeu coopératif permet la construction de coalitions entre joueurs. Cela suppose une concertation sur la stratégie à adopter et un engagement à coopérer.

■ **Définition 3 — Jeu à somme nulle.** Les jeux à somme nulle sont des jeux à deux joueurs pour lesquels les gains de l'un sont strictement les pertes de l'autre. Si on utilise une fonction de gain pour évaluer les perspectives de gain de chaque joueur, alors la somme des deux fonctions de gain est nulle.

■ **Exemple 1 — Jouer à somme nulle.** Parmi les jeux les plus connus à somme nulle, on trouve :

- les échecs,
- les jeux de carte comme la belote, le tarot ou le poker,
- shi-fu-mi.

R La plupart des situations de la vie quotidienne engendre des jeux à somme non nulle. Par exemple, le commerce est un jeu à somme non nulle plutôt positive : un marchand de voiture est gagnant lors qu'il vend une voiture à un client. Le client a souscrit un crédit pour acheter et semble perdant mais peut utiliser sa voiture comme bon lui semble. Donc, les situations commerciales peuvent être gagnant-gagnant : si vous avez faim, vous serez content d'acheter de la nourriture qu'un marchant voudra bien vous vendre. Elles peuvent également être perdant-perdant...

■ **Définition 4 — Dilemme du prisonnier.** Le dilemme du prisonnier est un exemple fondamental [a] de la théorie des jeux. Il a été formalisé par Tucker en 1950 [**tweedale_william_1993**] pour pointer une insuffisance de la théorie des jeux de l'époque : deux individus rationnels ne coopèrent pas nécessairement [b]. Le principe est le suivant :

Deux membres d'un même gang criminel sont arrêtés et emprisonnés. Chaque prisonnier est mis à l'isolement : il ne peut pas communiquer avec l'autre. La police ne dispose pas de suffisamment de preuves pour les accuser formellement tous les deux et il est envisagé de les condamner à un an de prison tous les deux pour des charges moindre. Pour l'instant les deux prisonniers gardent le silence.

Néanmoins, la police propose à chaque prisonnier A et B un marché diabolique. En voici les termes :

1. Si A et B se dénoncent mutuellement, il seront condamnés à deux ans de prisons.
2. Si A trahit B et que B demeure silencieux, A sera libéré et B sera condamné à trois ans.
3. Symétriquement, si A demeure silencieux et que B le dénonce, alors A fera trois ans et B sera libéré.
4. Enfin, si A et B demeurent silencieux, les deux feront un an de prison.

a. un paradigme

b. On trouve ici [**arte_dilemme_2021**] une fabuleuse introduction à ce dilemme dans la série Voyages au pays des maths d'Arte. À regarder absolument !

R Le dilemme du prisonnier illustre bien des situations (guerre commerciale par exemple) dans lesquelles les acteurs peuvent agir rationnellement, ne pas coopérer spontanément et perdre simultanément. L'incitation à tricher est naturellement au cœur du dilemme.

La répétition du jeu peut cependant amener à considérer d'autres stratégies : chaque joueur peut adapter son comportement par rapport à l'expérience passée et choisir de coopérer ou au contraire de se venger. Lorsque l'incitation à tricher est moins forte que les représailles potentielles, la coopération peut alors s'imposer et le jeu peut atteindre un équilibre de Nash.

■ **Définition 5 — Jeu séquentiel.** Un jeu séquentiel est un jeu au cours duquel les joueurs décident de leur stratégie les uns après les autres et peuvent donc tenir compte des actions des joueurs précédents.

■ **Définition 6 — Jeu à information parfaite.** Un jeu est à information parfaite si chaque joueur est parfaitement informé des actions passées des autres joueurs avant de prendre sa décision : aucune action du jeu n'a été cachée. On se rappelle de tous les coups joués précédemment. Un jeu à information parfaite est un jeu séquentiel.

■ **Définition 7 — Jeu à information complète.** Un jeu à information est à information complète si tous les joueurs ont une connaissance totale des données du jeu : règles, pièces, actions possibles, fonction de gain, objectifs des autres joueurs.

R Les jeux à information incomplète sont appelés jeux bayésiens. Dans ce cas, les joueurs n'ont pas une connaissance commune du jeu : chacun n'a qu'une vision partielle des données du jeu.

■ **Exemple 2 — Jouer à information (in)complète et (im)parfaite.** Aux échecs, s'il s'agit d'une partie d'échec classique, les joueurs évoluent dans un contexte d'information parfaite : chaque joueur a pu voir tous les coups joués précédemment au cours de la partie. De plus, les règles sont connues, toutes les pièces sont toutes visibles, le chronomètre aussi : alors l'information est complète également. Par contre, si une partie est pris en cours de route et que le joueur n'a pas connaissance des coups passés, l'information est imparfaite.

Les jeux de cartes comme le bridge ou le poker sont des jeux à information imparfaite la distribution est inconnue (aléatoire et personne n'en a connaissance puisque les cartes sont retournées lors de la distribution) et incomplète car on ne connaît pas la main des adversaires lors du jeu.

Les aventuriers du rail est un exemple de jeu de plateau à information incomplète car on ne connaît pas les objectifs des autres joueurs mais parfaite car toutes les actions passées sont connues.

■ **Définition 8 — Arbre de jeu ou forme extensive.** La représentation d'un jeu séquentiel sous la forme d'un arbre est appelée forme extensive ou arbre de jeu. Les nœuds représentent les positions du jeu. Les nœuds d'un même niveau sont contrôles par un même joueur.

Un exemple d'arbre de jeu pour une partie de morpion est donné sur la figure 1.

La représentation arborescente est fondamentale pour la plupart des raisonnements sur les jeux et en général pour l'exploration d'un ensemble de possibilités.

B Jeux d'accessibilité, l'exemple des jeux de Nim

■ **Définition 9 — Jeu d'accessibilité.** Un jeu d'accessibilité est un jeu à deux joueurs J_1 et J_2, à information complète et parfaite, séquentiel et pour lequel il n'y a pas de hasard ni mémoire [a]. À la fin du jeu, soit l'un des deux joueurs a gagné soit la partie est nulle.

a. La décision est prise en fonction de la position courante dans le jeu, pas de coups passés.

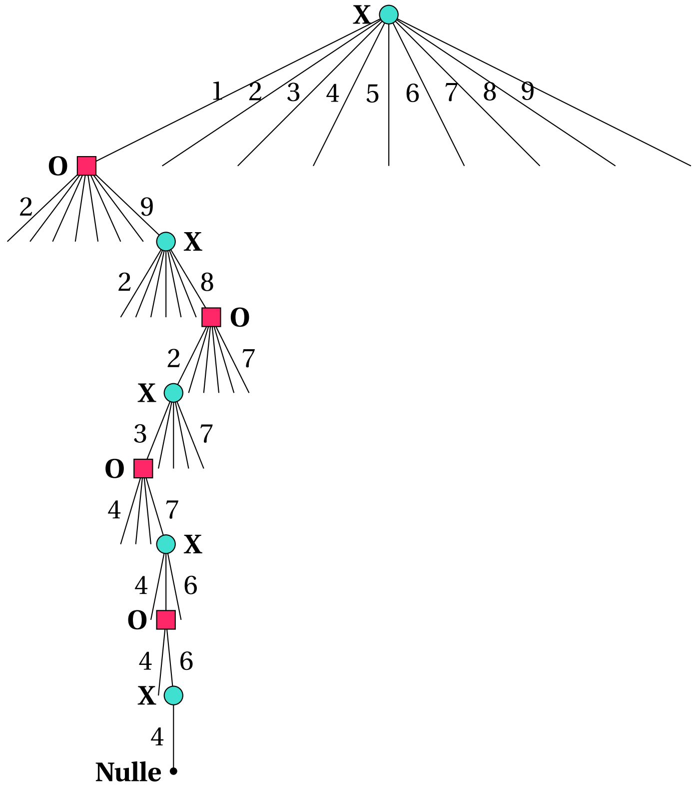
Ces jeux peuvent être modélisés par un **graphe orienté biparti** :

- chaque sommet représente une position dans le jeu.
- chaque sommet est possédé par l'un des deux joueurs : cela signifie que c'est à lui de jouer.
- les arcs sont les décisions prises par les joueurs.

■ **Définition 10 — Jeu de Nim.** Un jeu de Nim est un jeu d'accessibilité dont il existe de nombreuses variantes. Il s'agit de déplacer, de poser ou de retirer un certain nombre d'objets simples (pièces, allumettes, graines, des billes...). Le dernier à jouer gagne ou perd (variante misère). Le jeu de Nim fait donc nécessairement un perdant et un gagnant.

■ **Exemple 3 — Variantes du jeu de Nim.** Parmi les variantes les plus célèbres, on peut citer :

- le jeu de Marienbad (avec des cartes ou des allumettes) [**itemproductions_nim_2010**],



X	O	X
X	X	O
O	X	O

FIGURE 1 – Représentation partielle d'un arbre de jeu d'une partie de morpion. La feuille de l'arbre indique le résultat de la partie (nulle). Chaque nœud interne de l'arbre représente une position de **X** ou de **O** au cours de la partie dans laquelle les joueurs doivent faire un choix. On considère que les cases sont numérotées de 1 à 9 en ligne et en partant du haut. La position finale est donnée sous l'arbre. Le joueur à la croix X joue en premier car il contrôle la racine de l'arbre.

- le jeu des bâtonnets [a] [**fort-boyardfr_batonnets_2011**],
- le jeu de Grundy.

La figure 2 donne un exemple de jeu de Marienbad tel qu'il est présenté dans le film d'Alain Resnais. Chaque joueur peut retirer autant d'allumettes qu'il le veut sur une ligne seulement. Le perdant est celui qui retire la dernière allumette.

Ce jeu est modélisable par un graphe orienté comme l'indique la figure 3. Sur cette figure, on considère que les joueurs jouent alternativement en se déplaçant sur le graphe : un des joueurs est initialement sur la position start, quatre allumettes sont reparties sur deux rangées.

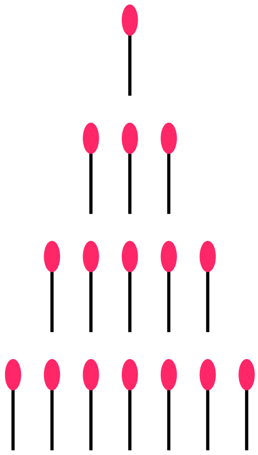


FIGURE 2 – Jeu de Marienbad avec des allumettes

Une modélisation plus exacte peut se faire en utilisant un graphe biparti comme le montre la figure 4. Ces deux figures illustrent la même position de départ. Le graphe biparti distingue les sommes des joueurs par leur forme carrée ou circulaire. Sur ce graphe, on peut jouer tous les cas : le joueur carré est le premier ou le joueur circulaire est premier. Les couleurs indique l'attracteur de chaque joueur : cyan pour le joueur circulaire, rouge pour le joueur carré.

a. type Fort Boyard

C Modélisation d'un jeu d'accessibilité

■ **Définition 11 — Arène de jeu.** Le graphe $G = (V_1, V_2, E)$ est nommé arène de jeu si est biparti si $G = (V = V_1 \cup V_2, E)$ est un graphe orienté biparti et $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Sur cette arène, le joueurs se répartissent les sommets : le joueur J_1 contrôle [a] V_1, le joueur J_2 V_2.

a. cela signifie que c'est à lui de jouer

■ **Définition 12 — Partie.** Une partie est un chemin sur l'arène de jeu : à chaque tour, le joueur J_1 en $v_i \in V_1$ choisit une arête de E dont le premier sommet est v_i et le second un sommet $v_j \in V_2$. J_2 choisit ensuite à partir de v_j le sommet suivant dans V_1. Une partie en n coups s'écrit donc $(v_0, \ldots, v_i, \ldots, v_{n-1})$.

■ **Définition 13 — Condition de gain.** Une condition de gain pour un joueur J_i sur une arène de jeu $G = (V, E)$ est un sous-ensemble C_i^g de V_i. La partie est remportée par le joueur J_i si celui-ci visite un sommet de C_i^g en premier.

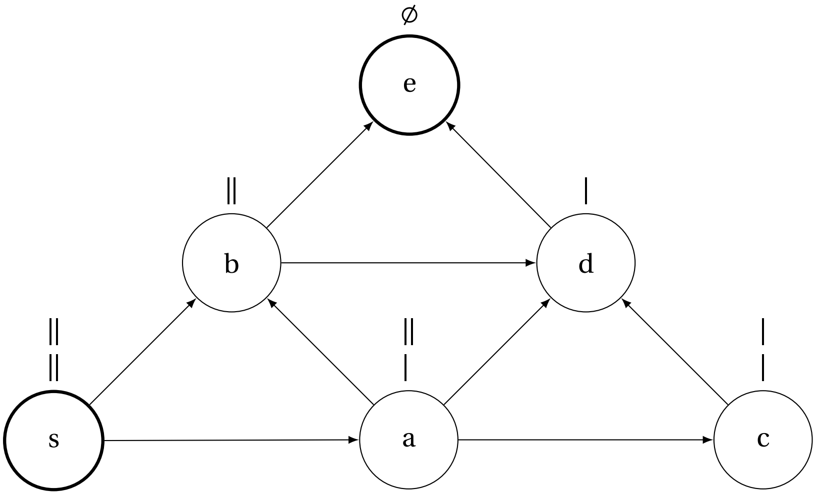


FIGURE 3 – Modélisation par graphe orienté d'une partie de jeu de Nim avec deux rangées de deux allumettes au départ. On peut jouer dessus avec un pion placé en s au départ. Puis chaque joueur fait avancer le pion d'un saut sur le graphe en sélectionnant un successeur en suivant les arcs. Le joueur qui se trouve en position e a gagné ou perdu dans la variante misère.

■ **Définition 14 — Condition de victoire.** Une condition de victoire d'un joueur J_i est un sous-ensemble de toutes les parties possibles $\mathcal{P}$ remportées par ce joueur. On la note :

$$C_i^v = \left\{\mathcal{P}, \mathcal{P} \text{ visite un sommet de } C_i^g\right\} \tag{1}$$

■ **Exemple 4 — Condition de gain et de victoire pour le jeu de Nim.** Pour le jeu de Nim de la figure 4 en choisissant la variante misère et J_1 comme premier joueur, alors $C_1^g = \{c_1\}$ est une condition de gain pour J_1. De plus, $C_1^v = \{(s_1, a_2, c_1)\}$ est la condition de victoire de J_1.

D Stratégies et positions

■ **Définition 15 — Stratégie sans mémoire.** Soit $G = (V, E)$ une arène de jeu. On note $V_i^{>0}$ l'ensemble des sommets contrôlés par le joueur $i \in \{1, 2\}$ de degré sortant non nul. Une stratégie est une application $\phi : V_i^{>0} \to V$ telle que :

$$\forall v \in V_i^{>0}, (v, \phi(v)) \in E \tag{2}$$

Cette stratégie est sans mémoire car elle ne dépend que du sommet courant et pas des sommets précédents de la partie.

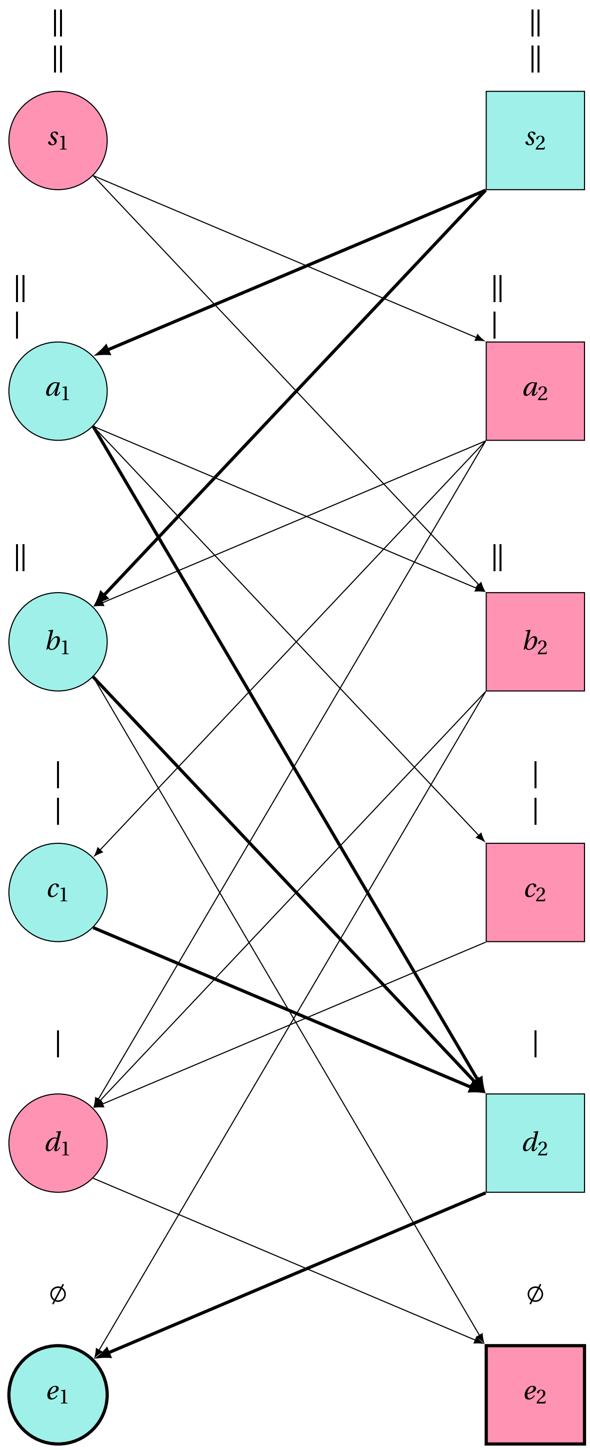


FIGURE 4 – Modélisation par graphe orienté biparti d'un jeu de Nim, variante misère : le dernier à jouer a perdu. Les sommets des joueurs 1 et 2 sont distingués par des cercles (1) et des carrés (2). La couleur cyan représente l'attracteur du joueur $J_1 : \mathcal{A}_1 = \{s_2, a_1, b_1, c_1, d_2, e_1\}$. On voit donc que 1 n'a pas intérêt à commencer à jouer dans cette configuration. Il en est de même pour le joueur 2 dont l'attracteur en rouge. C'est normal car la somme de Nim de la configuration initiale est nulle.

R Une stratégie permet donc de calculer le coup à jouer. Le joueur J_i suit la stratégie ϕ lors d'une partie $\mathcal{P} = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ si $\forall j \in [\![0, n]\!], v_j \in V_i^{>0} \Longrightarrow v_{j+1} = \phi(v_j)$

■ **Définition 16 — Stratégie gagnante.** Une stratégie ϕ est gagnante pour le joueur J_i depuis le sommet $v_0 \in V_i$ si toute partie jouée depuis v_0 par J_i en suivant ϕ est gagnante pour J_i.

■ **Définition 17 — Position gagnante.** Soit $G = (V = V_1 \cup V_2, E)$ un jeu d'accessibilité à deux joueurs. Un sommet $v \in V_i$ est appelé position gagnante pour le joueur J_i si celui-ci possède une stratégie gagnante depuis v.

■ **Exemple 5 — Position gagnante du jeu de Nim.** Sur le jeu de la figure 4, le sommet a_1 est une position gagnante pour J_1. Reste à trouver la stratégie ϕ... Le sommet s_1 n'est pas une position gagnante pour J_1.

E Attracteurs

Pour gagner une partie d'un jeu d'accessibilité, il semble donc logique de chercher les positions gagnantes et une stratégie associée. La notion d'attracteur a été développée pour construire l'ensemble des positions gagnantes. L'idée est de construire cet ensemble en partant de la condition de gain, en remontant les arc du graphe à l'envers et en ne conservant que les positions gagnantes.

■ **Définition 18 — Suite des ensembles attracteurs.** Soit $G = (V = V_1 \cup V_2, E)$ une arène d'un jeu d'accessibilité. On définit par induction la suite des attracteurs $(\mathcal{A}_j^1)_{j\in\mathbb{N}}$ du joueur J_1, c'est-à-dire des ensembles des sommets de V à partir desquels le joueur J_1 peut forcer la partie à arriver en C_1^g, de la manière suivante :

$$\mathcal{A}_0^1 = C_1^g \quad \text{si } j = 0 \tag{3}$$

$$\mathcal{A}_{j+1}^1 = \mathcal{A}_j^1 \cup \{v \in V_1, \exists v' \in \mathcal{A}_j^1, (v, v') \in E\} \cup \{v \in V_2, \forall v' \in V, (v, v') \in E \Rightarrow v' \in \mathcal{A}_j^1\} \forall j \geqslant 0 \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Formulé simplement, le premier terme de cette suite est la condition de gain du joueur, c'est-à-dire les sommets qui lui donnent la victoire. Puis, le terme $j+1$ de la suite est l'union :

- du terme $\mathcal{A}_j^1$,
- des sommets de V_1 qu'un arc peut mener à une position gagnante de $\mathcal{A}_j^1$ de V_2,
- des sommets de V_2 qui font obligatoirement aboutir à une position gagnante de V_1.

■ **Définition 19 — Attracteur du joueur J_i.** L'attracteur du joueur i est l'ensemble des sommets d'une arène de jeu défini par :

$$\mathcal{A}^i = \bigcup_{0}^{+\infty} \mathcal{A}^i_j. \tag{6}$$

Théorème 1 — L'attracteur du joueur J_i contient exactement toutes les positions gagnantes de J_i.

Démonstration. On procède par récurrence sur le rang d'un sommet de G, une fonction $r : V \to \mathbb{N}$ définie comme suit :

$$\forall v \in V, r(v) = \min\{j, v \in \mathcal{A}^i_j\} \tag{7}$$

Pour un sommet n'appartenant pas à l'attracteur $\mathcal{A}$, le rang est infini. Cette définition est possible car la suite $(\mathcal{A}^1_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion.

La propriété à démontrer est la suivante : $\mathcal{P}_j$: *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, les sommets de rang j sont des positions gagnantes du joueur J_1.*

- Initialisation $\mathcal{P}_0$: pour $j = 0$, $\mathcal{A}^1_0 = C^g_1$, donc tous les sommets de $\mathcal{A}^1_0$ sont des positions gagnantes.
- Hérédité : on suppose que, pour un certain entier naturel j, l'ensemble $\mathcal{A}^1_j$ ne contient que des positions gagnantes de J_1 ($\mathcal{P}_j$ est vraie). Considérons maintenant un élément v de l'ensemble $\mathcal{A}_{j+1}$ de rang $j+1$. Supposons de plus [1] que v n'appartient pas à $\mathcal{A}^1_j$. Il reste alors deux possibilités :
  1. Si $v \in V_1$, alors par définition de l'ensemble, il existe un arc qui amène à une position gagnante de $\mathcal{A}^1_j$. Donc, v est une position gagnante.
  2. Si $v \in V_2$, alors par définition de l'ensemble, tous les arcs de l'arène l'amène vers une position gagnante de $\mathcal{A}^1_j$. C'est donc une position gagnante.
- Conclusion : comme le nombre de sommet du graphe est fini et que les ensembles $\mathcal{A}^1_j$ ne contiennent que des positions gagnantes, l'attracteur $\mathcal{A}$ ne possède donc que des positions gagnantes.

■

R On peut maintenant construire une stratégie **gagnante** en considérant la stratégie sans mémoire ϕ qui, au fur et à mesure de la partie, fait diminuer le rang de la position courante :

$$\forall v_j \in \mathcal{A}^1_j \cap V_1, v_{j+1} = \phi(v_j), r(v_{j+1}) < r(v_j) \tag{8}$$

Celle-ci est gagnante, car, en choisissant de diminuer le rang de la position suivante, on se rapproche de la victoire.

1. sinon c'est trivial

★ F Solution des jeux de Nim et impartiaux --→ Hors Programme

S'il est possible de calculer les attracteurs d'un joueur, il reste néanmoins un problème de taille : comment disposer de l'arène? En effet, sur un exemple simple comme le jeu de Marienbad décrit sur la figure 4, il est relativement facile de créer le graphe associé à une arène de jeux. Cependant, dès que les dimensions augmentent, par exemple le nombre de rangées et le nombre de bâtonnets, même sur un jeu fini, il devient difficile de construire le graphe en entier. Il faut donc envisager d'autres méthodes pour trouver des stratégies gagnantes. Le nombre de Grundy permet de calculer la stratégie à adopter sans construire le graphe en entier, en connaissant uniquement la position courante du jeu, c'est à dire les nombre de bâtonnets des n piles $(x_1,\ldots,x_n)$.

L'idée ingénieuse des mathématiciens pour résoudre les jeux d'accessibilité est la suivante :

- ramener un jeu d'accessibilité à un jeu de Nim dans une position donnée, $(x_1,\ldots,x_n)$ où les x_i sont les tailles des piles,
- décomposer ce jeu en n jeux de Nim à une seule pile $G_1, G_2, \ldots, G_n$ et définir une addition sur jeux pour faire en sorte que le jeu initial soit la somme des jeux à une pile.

L'addition a été trouvé par Bouton en 1901, c'est le ou exclusif.

Théorème 2 — Bouton[bouton_nim_1901]. Un position donnée $(x_1,\ldots,x_n)$ d'un jeu de Nim est une position gagnante si et seulement si $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n = 0$, où $\oplus$ est l'opérateur du ou exclusif bit à bit [a].

a. Par exemple, $5 \oplus 3 = 6$

■ **Définition 20 — Nombre de Grundy d'un jeu de Nim.** Le nombre de Grundy est la somme trouvée dans le théorème 2 en utilisant le ou exclusif sur la position du jeu : $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n = 0$.

Mais on peut également la définir récursivement :

- si la pile du jeu de Nim est en position finale, le nombre de Grundy vaut 0,
- sinon, le nombre de Grundy d'une position donnée $(x_1,\ldots,x_n)$ est le plus petit entier positif ou nul qui n'apparaît pas dans la liste des nombres de Grundy des positions qui suivent immédiatement la position donnée.

Ceci s'écrit parfois :

$$\gamma = \mathrm{mex}(x_1,\ldots,x_n) \tag{9}$$

où la fonction mex (**m**inimum **ex**cluded) renvoie le plus petit entier naturel n'appartenant pas à une partie de $\mathbb{N}$.

■ **Exemple 6 — Fonction** mex. Les résultats suivants éclairent le fonctionnement de cette fonction :

- $\mathrm{mex}(1,2) \to 0$

- $\text{mex}(0,1,3,7,9) \rightarrow 2$
- $\text{mex}(0,1,2,3,\ldots k, k+3, k+6) \rightarrow k+1$

Théorème 3 — Sprague et Grundy . Tout jeu d'accessibilité $\mathcal{J}$ est équivalent à un jeu de Nim $\mathcal{N}$.

Pour une position de $\mathcal{J}$ donnée, il existe une position de $\mathcal{N}$ dont le nombre de Grundy est γ. Cette position est équivalente à celle d'un jeu de Nim à un seul tas comportant γ allumettes.

R Les théorèmes 2 et 3 induisent la stratégie gagnante : il s'agit de celle qui consiste à choisir la position suivante de telle manière à ce que son nombre de Grundy soit nul.

■ **Exemple 7 — Utilisation du nombre de Grundy.** Ces théorèmes permettent d'affirmer que la position de départ de la figure 4 est une position perdante, car le nombre de Grundy est nul : $10_2 \oplus 10_2 = 00_2$. Il ne reste plus qu'à vous entraîner au calcul en binaire.