

Terminaison et correction

INFORMATIQUE COMMUNE - TP n° 2.1 - Olivier Reynet

À la fin de ce chapitre, je sais :

- ✎ programmer les algorithmes donnés en exemples.
- ✎ prouver la terminaison d'un algorithme simple.
- ✎ prouver la correction d'un algorithme simple.

A Terminaison

A1. Prouver la terminaison de l'algorithme 1 puis le traduire en Python.

Algorithme 1 Palindrome

```
1: Fonction PALINDROME( $w$ )
2:    $n \leftarrow$  la taille de la chaîne de caractères  $w$ 
3:    $i \leftarrow 0$ 
4:    $j \leftarrow n - 1$ 
5:   tant que  $i < j$  répéter
6:     si  $w[i] = w[j]$  alors
7:        $i \leftarrow i + 1$ 
8:        $j \leftarrow j - 1$ 
9:     sinon
10:      renvoyer Faux
11:   renvoyer Vrai
```

Solution : Si la condition en ligne 6 est invalidée, l'algorithme se termine. Si ce n'est pas le cas, on utilise le variant de boucle $v(i, j) = j - i$. On vérifie qu'il est bien initialement positif ($n-1$), à valeurs entières (i et j sont des entiers) et qu'il décroît strictement (de deux unités à chaque tour de boucle car i est incrémenté de 1 et j décrémenté de 1). Nécessairement, v va donc atteindre ou dépasser la valeur 0. Dans ce cas, la condition $i < j$ est invalidée et la boucle se termine. L'algorithme palindrome se termine.

```
1 def palindrome(s):
2     deb = 0
3     fin = len(s) - 1
4     v = fin - deb
5     while v > 0 :
6         v_prec = fin - deb
```

```

7         if s[deb] == s[fin]:
8             deb += 1
9             fin -= 1
10        else:
11            return False
12        v = fin - deb
13        assert v < v_prec # loop variant
14    return True

```

A2. Prouver la terminaison de l'algorithme 2 puis le traduire en Python.

Algorithme 2 Est une puissance de deux

```

1: Fonction EST_PUISSANCE_DE_DEUX( $n$ )
2:   si  $n < 2$  alors
3:     renvoyer Faux
4:   sinon
5:      $m \leftarrow n \bmod 2$ 
6:     tant que  $m = 0$  répéter
7:        $n \leftarrow n // 2$ 
8:        $m \leftarrow n \bmod 2$ 
9:     renvoyer  $n = 1$ 

```

Solution : Si la condition en ligne 2 est validée, l'algorithme se termine. Si le nombre n est impair, l'algorithme se termine également trivialement. Si ce n'est pas le cas, on utilise le variant de boucle $v = n$. On vérifie qu'il est bien initialement positif, à valeurs entières et qu'il décroît strictement (car divisé par deux en division entière) à chaque tour de boucle. Nécessairement, v va donc atteindre la valeur 1 (car n est pair et $2 // 2$ vaut 1). La condition $m = 0$ est donc invalidée car $1 \bmod 2 = 1$ et la boucle se termine. L'algorithme est_puissance_de_deux se termine.

```

1 def is_power_of_two(n):
2     m = n % 2
3     while m == 0:
4         n = n // 2
5         m = n % 2
6     return n == 1

```

A3. Prouver la terminaison de l'algorithme récursif 3 puis le traduire en Python.

Algorithme 3 Somme des n premiers entiers

```

1: Fonction INT_SUM( $n$ )
2:   si  $n=0$  alors
3:     renvoyer 0
4:   sinon
5:     renvoyer  $n + \text{INT\_SUM}(n-1)$ 

```

Solution : On procède par récurrence sur n .

Initialisation : pour $n = 0$, l'algorithme se termine en renvoyant 0.

Hérédité : On suppose que l'algorithme se termine pour le paramètre $n - 1$. L'opération $n + \text{int_sum}(n - 1)$ n'est qu'une addition et donc se termine.

Conclusion : l'algorithme se termine pour toute valeur de n .

```

1 def int_sum(n):
2     if n==0:
3         return 0
4     else:
5         return n + int_sum(n-1)

```

B Correction

- B1. Prouver la correction partielle de l'algorithme 4 puis le traduire en Python en matérialisant l'invariant utilisé par des assertions.

Algorithme 4 Élément maximum d'un tableau

```

1: Fonction MAX( $t$ )
2:   si  $t$  est vide alors
3:     renvoyer  $\emptyset$ 
4:   sinon
5:      $n \leftarrow$  la taille du tableau
6:      $m = t[0]$ 
7:     pour  $i = 1$  à  $n - 1$  répéter
8:       si  $m < t[i]$  alors
9:          $m \leftarrow t[i]$ 
10:    renvoyer  $m$ 

```

Solution : On choisit l'invariant $\mathcal{I} : m$ est le plus grand élément de $t[0 : i]$.

Initialisation : à l'entrée de la boucle, $i = 0$ et $m = t[0]$. L'invariant est trivialement vérifié puisque le tableau possède un seul élément.

Hérédité : On suppose que l'invariant est vérifié pour l'itération $k - 1$, c'est à dire que m est le plus grand élément de $t[0 : k - 1]$. À la fin de l'itération k , si $t[k]$ est plus grand que m , alors celui-ci est affecté à m . Donc, m est le plus grand élément de $t[0 : k]$ à la fin de l'itération k . La propriété \mathcal{I} est invariante par les instructions de la boucle.

Conclusion : \mathcal{I} est vérifié à l'entrée de la boucle et est invariant par les instructions de la boucle. À la sortie de la boucle, on a parcouru tout le tableau, i vaut $n - 1$ et m est le plus grand élément du tableau. L'algorithme est correct.

```

1 def max_val(L):
2     if len(L) > 0:
3         maxi = L[0]

```

```

4         assert maxi == L[0]  # before the loop
5         for i in range(1, len(L)):
6             if L[i] > maxi:
7                 maxi = L[i]
8             assert maxi == max(L[0:i + 1])  # loop invariant
9         return maxi
10    else:
11        return None

```

B2. Prouver la correction partielle de l'algorithme de tri par sélection 5

Algorithme 5 Tri par sélection

```

1: Fonction TRIER_SELECTION(t)
2:    $n \leftarrow \text{taille}(t)$ 
3:   pour  $i$  de 0 à  $n - 1$  répéter
4:     min_index  $\leftarrow i$                                 ▷ indice du prochain plus petit
5:     pour  $j$  de  $i + 1$  à  $n - 1$  répéter                    ▷ pour tous les éléments non triés
6:       si  $t[j] < t[\text{min\_index}]$  alors
7:         min_index  $\leftarrow j$                                 ▷ c'est l'indice du plus petit non trié!
8:     échanger( $t[i]$ ,  $t[\text{min\_index}]$ )                        ▷ c'est le plus grand des triés!

```

Solution : On choisit les invariants suivants :

1. $\mathcal{I}_1 : t[0 : i]$ est trié et ses éléments sont plus petits que les autres éléments de t . pour la boucle sur i
2. $\mathcal{I}_2 : t[\text{min_index}]$ est le plus petit élément de $t[i : j]$. pour la boucle sur j .

On commence par prouver la correction de la boucle sur j , avec l'invariant \mathcal{I}_2 .

Initialisation : à l'entrée de la boucle, min_index vaut i et $j = i$. $t[\text{min_index}]$ est bien le plus petit élément de $t[i]$.

Hérédité : supposons que l'invariant est vérifié à l'entrée de l'itération k , c'est à dire que $t[\text{min_index}]$ est le plus petit élément de $t[i : k - 1]$. À la fin de l'itération, $t[\text{min_index}]$ est nécessairement le plus petit élément de $t[k - 1 : k]$ et donc de $t[i : k]$.

Conclusion : \mathcal{I}_2 est vérifié à l'entrée de la boucle et est invariant par les instructions de la boucle. À la fin de la boucle, $t[\text{min_index}]$ est le plus petit élément de $t[i:n-1]$.

Pour l'invariant \mathcal{I}_1 :

Initialisation : avant la boucle, on considère le tableau pour lequel on ne prend aucun éléments. Il est vide et donc trivialement trié. Comme il ne possède pas d'éléments, l'invariant \mathcal{I}_1 est vérifié avant la boucle.

Hérédité : supposons que \mathcal{I}_1 soit vérifié à l'entrée de la k ème itération. Alors $t[0 : k - 1]$ est correctement trié et tous les éléments du restant du tableau (à droite de $k - 1$) sont plus grands que $t[k - 1]$. Le minimum du restant du tableau de droite restant est alors placé à l'indice k . Comme il est plus grand que $t[k - 1]$, le tableau $t[0 : k]$ est correctement trié. L'invariant \mathcal{I}_1 n'est pas modifié par les instructions de la boucle.

Conclusion : L'invariant \mathcal{I}_1 est vérifié à l'entrée de la boucle et est invariant par les instructions de la boucle. À la fin de la boucle, i vaut $n - 1$ et donc $t[0:n-1]$, c'est à dire l'entièreté du tableau, est trié. L'algorithme de tri est correct.

```

1 def swap(t, i, j):
2     t[i], t[j] = t[j], t[i]
3
4
5 def selection_sort(t):
6     assert is_sorted(t[0:0]) # Invariant Ii -> t[0:0] is empty and sorted !
7     for i in range(len(t)):
8         min_index = i
9         for j in range(i + 1, len(t)):
10            if t[j] < t[min_index]:
11                min_index = j
12            for k in range(i, j+1): # invariant Ij
13                assert t[min_index] <= t[k] # Invariant Ij
14        swap(t, i, min_index)
15        assert is_sorted(t[0:i + 1]) # Invariant Ii
16        for k in range(i + 1, len(t)): # Invariant Ii
17            assert t[i] <= t[k] # Invariant Ii

```

B3. Prouver la correction de l'algorithme du tri par insertion 6.

Algorithme 6 Tri par insertion

```

1: Fonction INSERTION(t, i)
2:   à_insérer ← t[i]
3:   j ← i
4:   tant que t[j-1] > à_insérer et j>0 répéter
5:     t[j] ← t[j-1]                                ▷ faire monter les éléments
6:     j ← j-1
7:   t[j] ← à_insérer                                ▷ insertion de l'élément
8: Fonction TRIER_INSERTION(t)
9:   n ← taille(t)
10:  pour i de 1 à n-1 répéter
11:    INSERTION(t,i)

```

Solution : On choisit d'abord de prouver la correction de l'algorithme d'insertion.

La terminaison de la fonction est garantie par j qui est un variant de la boucle tant que.

On utilise l'invariant suivant pour la correction de la boucle tant que \mathcal{I} : *le tableau $t[0:i-1]$ est correctement trié.*

Initialisation : avant la boucle, j vaut i . Le tableau $t[0:i-1]$ est supposé trié.

Hérédité : supposons que l'invariant est vérifié à l'entrée d'une certaine itération : $t[0,i-1]$ est trié et on a $t[j] = t[j+1]$. À la fin de l'itération, on a fait monter (recopie) l'élément $j-1$ en j . Le tableau $t[0,i-1]$ est toujours trié et $t[j-1] = t[j]$. L'invariant n'est pas modifié par ces instructions.

Conclusion : \mathcal{I} est donc vérifié à l'entrée de la boucle et est invariant par les instructions de la boucle. À la fin de la boucle, on a $t[j-1] < \text{à_insérer}$ et $t[j] = t[j+1]$. L'élément à insérer se voit attribuer la place j : il n'écrase aucune valeur du tableau puisqu'on les a décalées. Cet élément est à sa place. Le tableau $t[0:i]$ est donc correctement trié, l'insertion est correcte.

Pour la correction de la fonction *trier_insertion*, on choisit l'invariant de boucle suivant : \mathcal{I} : à chaque itération, le tableau $t[0:i]$ est trié.

Initialisation : avant la boucle, i vaut 0 et $t[0]$ est un tableau trivialement trié.

Hérédité : supposons que l'invariant est vérifié pour l'itération $k-1$: $t[0,k-1]$ est trié. À la fin de l'itération k , comme la fonction d'insertion est correcte, $t[0:k]$ est correctement trié.

Conclusion : \mathcal{I} est vérifié à chaque itération. C'est bien un invariant de boucle. À la fin de la boucle, on a parcouru tous les éléments du tableau et i vaut $n-1$. t est donc complètement trié. L'algorithme est donc correct.

```

1 def is_sorted(t):
2     if len(t) == 0:
3         return True
4     else:
5         for i in range(1, len(t)):
6             if t[i-1] > t[i]:
7                 return False
8         return True
9
10
11 def insert(t, i):
12     to_insert = t[i]
13     j = i
14     assert is_sorted(t[0:i]) # before loop
15     while t[j-1] > to_insert and j > 0:
16         t[j] = t[j-1]
17         j -= 1
18     assert is_sorted(t[0:i+1]) # invariant
19     assert t[j] == t[j+1] # invariant
20     t[j] = to_insert
21
22
23 def insertion_sort(t):
24     assert is_sorted(t[0:0]) # before loop
25     for i in range(1, len(t)):
26         insert(t, i)
27         assert is_sorted(t[0:i+1]) # loop invariant

```

C Algorithme d'Euclide du PGCD

Algorithme 7 Algorithme d'Euclide (optimisé)

```

1: Fonction PGCD( $a, b$ )                                ▷ On suppose pour simplifier que  $a \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$  et  $b \leq a$ .
2:    $r \leftarrow a \bmod b$ 
3:   tant que  $r > 0$  répéter                               ▷ On connaît la réponse si  $r$  est nul.
4:      $a \leftarrow b$ 
5:      $b \leftarrow r$ 
6:      $r \leftarrow a \bmod b$ 
7:   renvoyer  $b$                                              ▷ Le pgcd est  $b$ 

```

On cherche à prouver la terminaison et la correction de l'algorithme d'Euclide 7. Dans ce but, on rappelle quelques éléments mathématiques importants.

Théorème 1 — Division euclidienne. Soient $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que les deux critères suivants sont vérifiés :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

Démonstration. 1. Existence : a et b étant donné, on pose $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$. Par définition de partie entière, on a : $0 \leq \frac{a}{b} - \lfloor \frac{a}{b} \rfloor < 1$. En multipliant par b , on obtient : $0 \leq a - b \times \lfloor \frac{a}{b} \rfloor < b$. En choisissant donc $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ et $r = a - b \times \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$, on a bien :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

2. Unicité : supposons que l'on ait deux couples (q, r) et (q', r') appartenant à $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$: $a = bq + r = bq' + r'$ avec $0 \leq r < b$ et $0 \leq r' < b$. Cela peut également s'écrire : $b(q' - q) = r - r'$. Or, on a l'encadrement $-b < r - r' < b$. On en conclut que $-b < b(q' - q) < b$ et donc que $-1 < q' - q < 1$. Mais q et q' sont des entiers d'après nos hypothèses de départ. Donc, on en déduit de $q' - q = 0$. Il s'en suit que $q = q'$ et que $r = r'$. Il s'agit donc bien du même couple. ■

Théorème 2 — Existence du PGCD. Parmi tous les diviseurs communs de deux entiers a et b non nuls, il y en a un qui est le plus grand. Ce dernier est nommé plus grand commun diviseur de a et de b . On le note PGCD(a, b).

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{N}^*$. Tous les diviseurs de a sont bornés par $|a|$. On peut tenir le même raisonnement pour ceux de b . Donc, parmi les diviseurs de a et de b , il y en a donc un plus grand. ■

Théorème 3 — Propriété du PGCD. Soit a et b deux entiers.

1. Si $b = 0$, alors PGCD(a, b) = a .
2. Si $b \neq 0$, alors PGCD(a, b) = PGCD($b, a \bmod b$).

Démonstration. Démonstration de l'égalité de l'ensemble \mathcal{D}_{ab} des diviseurs de a et de b et de l'ensemble \mathcal{D}_{br} des diviseurs de b et de r par double inclusion.

$\mathcal{D}_{ab} \subset \mathcal{D}_{br}$: La division euclidienne étant unique comme nous l'avons montré au théorème 1, il existe un entier q tel que $a = qb + r$. Ce qui peut s'écrire : $a - qb = r$. Si γ est un diviseur de a et de b , alors on peut écrire : $a - bq = \gamma a' + \gamma b' q = \gamma(a' - b' q) = r$. On a donc montré qu'un diviseur de a et de b est un diviseur de r .

$\mathcal{D}_{br} \subset \mathcal{D}_{ab}$: De même, si η est un diviseur de b et de r , alors on a : $a = bq + r = \eta(b'q + r')$, ce qui signifie que η est un diviseur de a .

Donc, $\mathcal{D}_{ab} = \mathcal{D}_{br}$. Ceci est vrai, y compris pour le plus grand des diviseurs de a et de b . ■

■ **Définition 1 — Suite des restes de la division euclidienne.** Soient a et b des entiers. On définit la suite des restes de la division euclidienne comme suit :

$$r_0 = |a| \quad (1)$$

$$r_1 = |b| \quad (2)$$

$$q_k = \lfloor r_{k-1} / r_k \rfloor, 1 \leq k \leq n \quad (3)$$

Alors on a :

$$r_{k-1} = q_k r_k + r_{k+1} \quad (4)$$

$$r_{k+1} = r_{k-1} \bmod r_k \quad (5)$$

Théorème 4 — Stricte décroissance de $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$. La suite des restes de la division euclidienne est positive, strictement décroissante et minorée par zéro.

C1. Coder l'algorithme 7 en Python.

Solution :

```
1 def pgcd(a, b):
2     r = a % b
3     assert rec_pgcd(a, b) == rec_pgcd(b, r) # invariant (before loop)
4     while r > 0:
5         a = b
6         b = r
7         r = a % b
8         assert 0 <= r < b # loop variant
9         assert rec_pgcd(a, b) == rec_pgcd(b, r) # invariant inside loop
10    return b
```

C2. Grâce au théorème 3, coder une version récursive de l'algorithme du PGCD.

```
1 def rec_pgcd(a, b):
2     if b == 0:
3         return a
4     else:
5         return rec_pgcd(b, a % b)
```


C3. Donner une preuve du théorème 4.

Solution : D'après le théorème 1, le reste r de la division euclidienne de a et de b est tel que : $0 \leq r < b$. Donc, la suite est minorée par zéro. Cette borne est atteinte lorsque r_k est un multiple de r_{k-1} . C'est une suite positive car elle est initialisée à des valeurs positives. Elle est strictement décroissante car $r_{k-1} < r_k$ d'après la définition de la division euclidienne 1.

C4. Montrer que r est un variant de boucle pour l'algorithme d'Euclide.

Solution : On observe qu'un élément de la suite des restes est calculé à chaque tour de boucle (cf. algorithme 7 ligne 6). D'après la question précédente, r est positif, **strictement** décroissant et minoré par zéro. r est donc un variant de boucle. La condition d'arrêt, $r > 0$, est donc invalidée au bout d'un certain nombre d'itérations. Le programme se termine.

C5. Prouver la correction de l'algorithme d'Euclide.

Solution : On choisit l'invariant \mathcal{I} : *le PGCD de b et r est le PGCD de a et de b .*

Initialisation : L'invariant est vérifié à l'entrée de la boucle car $r = a \bmod b$ et d'après le point 2 du théorème 3 on a $\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(b, a \bmod b)$.

Hérédité : Si l'invariant est vérifié à l'entrée de la boucle, la propriété du PGCD fait qu'il est vérifié à la fin de la boucle.

Conclusion : \mathcal{I} n'a pas été modifié par les instructions de la boucle. Comme il est vérifié à l'entrée de la boucle, il est donc vérifié également à la fin de celle-ci. Le reste est nul (d'après la démonstration de la terminaison) et la propriété du PGCD nous indique que le PGCD de b et r est le PGCD recherché. Or $\text{PGCD}(b, 0) = b$. Le PGCD vaut donc b , ce que renvoie la fonction. L'algorithme est correct.