5.3

证明下列锥是自对偶锥

(a) $K=\{X \mid X\succeq 0\}$ (全空间 S^n)

S^n 上内积 $\langle X,Y\rangle = Tr(XY^T)$

$K^* := \{Y\in S^n \mid \langle X,Y\rangle \geqslant 0,\ \forall X\succeq 0\}$

下证 $K\subseteq K^*$：设 $X\succeq 0, Y\succeq 0$　$X=P^{-1}\Lambda_1 P$，$Y=Q^{-1}\Lambda_2 Q$，P,Q n阶正交，

Λ_1, Λ_2 对角线 $\geqslant 0$ n阶阵。$Tr(XY^T) = Tr(P^{-1}\Lambda_1 P Q^{-1}\Lambda_2 Q) = Tr(QP^{-1}\Lambda_1 PQ^{-1}\Lambda_2)$

$\underline{\underline{R=PQ^{-1}}}$ $Tr(R^T\Lambda_1 R\Lambda_2) \stackrel{\text{定义}}{=\!=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j R_{ij}^2 \geqslant 0$，其中 $\Lambda_1 = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{pmatrix}$

$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n\end{pmatrix}$，$R=(R_{ij})_n$　故 $K\subseteq K^*$

下证 $K^*\subseteq K$：设 $Y\in K^*$，$Y=S^{-1}\Lambda_3 S$，$S\in O(n)$，Λ_3 为对角阵 $\Lambda_3 = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n\end{pmatrix}$

取 $X_i = S^{-1}\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix} S$，中间矩阵第i个对角元为1

$Tr(X_i Y^T) = Tr\left(S^{-1}\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0\end{pmatrix} S S^{-1}\Lambda_3 S\right) = Tr\left(S^{-1}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0\end{pmatrix}\Lambda_3 S\right)$

$= Tr\left(SS^{-1}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0\end{pmatrix}\Lambda_3\right) = c_i \geqslant 0$，$1\leqslant i\leqslant n$　故 Y 半正定　$K^*\subseteq K$

#

(b) 二次锥 $\{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid t\geqslant \|x\|_2\}$ (全空间 $\mathbb{R}^{n+1}$)

Ω 上内积 $\langle x,y\rangle = x^T y$

$K = \{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid t\geqslant \|x\|_2\}$

$K^* := \{(x_1,t_1)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid x_1\in\mathbb{R}^n, t_1\in\mathbb{R}, x_1^T x + t_1 t\geqslant 0, \forall (x,t)\in K\}$

下证 $K\subseteq K^*$：若 $t_1\geqslant \|x_1\|_2$，$\forall (x,t)\in K$，

$x_1^T x + t_1 t \geqslant x_1^T x + \|x\|_2\|x_1\|_2 \geqslant 0$　(Cauchy 不等式) #

下证 $K^*\subseteq K$：对 $(x_1,t_1)\in K^*$，取 $(-x_1, \|x_1\|_2)\in K$

有 $t_1\|x_1\|_2 - x_1^T x_1 \geqslant 0$

$t_1\|x_1\|_2 \geqslant \|x_1\|_2^2$

$t_1 \geqslant \|x_1\|_2$　#

5.7 求对偶问题

(a) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|x\|_1 \quad \text{s.t. } Ax=b$

Lagrange 函数为 $L(x,\lambda)=\|x\|_1+\langle\lambda, Ax-b\rangle$. 设 $b\in\mathbb{R}^m$ 则 $\lambda\in\mathbb{R}^m$

$$g(\lambda)=\inf_x L(x,\lambda)=\inf_x \|x\|_1+(A^T\lambda)^Tx-b^T\lambda$$

$$=\begin{cases}-b^T\lambda & \|A^T\lambda\|_\infty\le 1\\ -\infty & \text{else}\end{cases}$$

故对偶问题 $\max\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^m} -b^T\lambda \quad \text{s.t. } \|A^T\lambda\|_\infty\le 1$

(b) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_1$

记 $r=Ax-b$

原问题 $\min\limits_{x,r} \|r\|_1 \quad \text{s.t. } r=Ax-b$

Lagrange 函数 $L(x,r,\lambda)=\|r\|_1+\langle\lambda, Ax-b-r\rangle$, 设 $b\in\mathbb{R}^m$ 则 $\lambda\in\mathbb{R}^m$

$$g(\lambda)=\inf_{r,x} L(x,r,\lambda)=\inf_{r,x} \|r\|_1+(A^T\lambda)^Tx-\lambda^Tb-\lambda^Tr$$

$$=\begin{cases}-\lambda^Tb & \text{if } A^T\lambda=0 \text{ and } \|\lambda\|_\infty\le 1\\ -\infty & \text{else}\end{cases}$$

故对偶问题为 $\max\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^m} -\lambda^Tb \quad \text{s.t. } A^T\lambda=0 \text{ and } \|\lambda\|_\infty\le 1$

(c) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax-b\|_\infty$

记 $r=Ax-b$

原问题 $\min\limits_{x,r} \|r\|_\infty \quad \text{s.t. } Ax-b=r$

$L(x,r,\lambda)=\|r\|_\infty+\langle\lambda, Ax-b-r\rangle$ 设 $b\in\mathbb{R}^m$ 则 $\lambda\in\mathbb{R}^m$

$$g(\lambda)=\inf_{x,r} L(x,r,\lambda)=\min_{x,r} \|r\|_\infty+(A^T\lambda)^Tx-\lambda^Tb-\lambda^Tr$$

$$=\begin{cases}-\lambda^Tb & \text{if } A^T\lambda=0 \text{ and } \|\lambda\|_1\le 1\\ -\infty & \text{else}\end{cases}$$

故对偶问题 $\max\limits_{\lambda\in\mathbb{R}^m} -\lambda^Tb \quad \text{s.t. } A^T\lambda=0 \text{ and } \|\lambda\|_1\le 1$

(d) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} x^T A x + 2b^T x \quad s.t.\ \|x\|_2^2 \le 1$, A正定

Lagrange函数 $L(x,\lambda) = x^T A x + 2b^T x + \lambda(\|x\|_2^2 - 1)$, $\lambda \ge 0$

$$g(\lambda) = \inf_x L(x,\lambda) = \inf_x \left[x^T(A+\lambda I_n)x + 2b^T x - \lambda \right]$$

记 $f(x) = x^T(A+\lambda I_n)x + 2b^T x - \lambda$

$\nabla f(x) = 2(A+\lambda I_n)x + 2b$

$\nabla^2 f(x) = 2(A+\lambda I_n) \succeq 0$

故 $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = f(-(A+\lambda I_n)^{-1}b)$ $(A+\lambda I_n$正定$)$

$= b^T(A+\lambda I_n)^{-1}b - 2b^T(A+\lambda I_n)^{-1}b - \lambda$

$= -b^T(A+\lambda I_n)^{-1}b - \lambda$

对偶问题 $\max\limits_{\lambda\in\mathbb{R}} -b^T(A+\lambda I_n)^{-1}b - \lambda \quad s.t.\ \lambda \ge 0$