12. $X \sim N(0, \sigma^2)$　$X_1 \cdots X_n \sim X$　$\sigma_0 > 0$

(1) $H_0: \sigma = \sigma_0 \longleftrightarrow H_a: \sigma > \sigma_0$　UMP test

由 exponential family 的UMP检验知

已知 $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$

检验法为 $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 > C\sigma_0^2$ 时拒绝

其中 C满足　$\alpha = \int_C^{\infty} f(x;n)\,dx$,　$f(x;n)$ 为 $\chi^2(n)$ 的PDF

(2) $H_0: \sigma = \sigma_0 \longleftrightarrow H_a: \sigma < \sigma_0$　UMP test

由 exponential family 的 UMP 检验知

$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$

检验法为 $\sum_{i=1}^{n} X_i^2 < C\sigma_0^2$ 拒绝

其中 C 满足 $\alpha = \int_{-\infty}^{C} f(x;n)\,dx$　$f(x;n)$ 为 $\chi^2(n)$ 的PDF

(3) $H_0: \sigma = \sigma_0 \longleftrightarrow H_a: \sigma \neq \sigma_0$ 不存在 UMP test

若不然, 假设有 level α 的 UMP test φ_0

现考虑 $H'_0: \sigma \le \sigma_0 \longleftrightarrow H'_a: \sigma > \sigma_0$

由 exponential family 结论, 记 $T(x) = \frac{\sum X_i^2}{\sigma_0^2}$

H' 的UMP test为 $\varphi_1(x) = \begin{cases} 1 & T(x) \ge C_1 \\ 0 & T(x) < C_1 \end{cases}$

H''_0 $\sigma \ge \sigma_0 \longleftrightarrow H''_a: \sigma < \sigma_0$

H'' 的UMP test为 $\varphi_2(x) = \begin{cases} 1 & T(x) \le C_2 \\ 0 & T(x) > C_2 \end{cases}$

φ_1, φ_2 为 level α 的对H_0的检验. 取 $\sigma_1 > \sigma_0$, $\sigma_2 < \sigma_2$

故 $E_{\sigma_1}\varphi_0(X) \ge E_{\sigma_1}\varphi_1(X)$, $E_{\sigma_2}\varphi_0(X) \ge E_{\sigma_2}\varphi_2(X)$

故 φ_0 为 $\sigma = \sigma_0 \longleftrightarrow \sigma = \sigma_1$ 的UMP, 为 $\sigma = \sigma_0 \longleftrightarrow \sigma = \sigma_2$ 的UMP

由N-P引理 $\varphi_0(x)=\begin{cases}1 & P_{\sigma_1}(x)>k_1P_{\sigma_0}(x)\\ 0 & P_{\sigma_1}(x)<k_1P_{\sigma_0}(x)\end{cases}$ $\varphi_0(x)=\begin{cases}1 & P_{\sigma_2}(x)>k_2P_{\sigma_0}(x)\\ 0 & P_{\sigma_2}(x)<k_2P_{\sigma_0}(x)\end{cases}$

也即 $\varphi_0(x)=\begin{cases}1 & T(x)>C_1'\\ 0 & T(x)<C_1'\end{cases}$ $\varphi_0(x)=\begin{cases}1 & T(x)<C_2'\\ 0 & T(x)>C_2'\end{cases}$ $-\infty\le C_1', C_2'\le+\infty$

除非 $\varphi_0(x)\equiv 1$ or 0 否则矛盾 但 φ_0 size 为 α, $0<\alpha<1$ 矛盾!

故不存在UMP.

13. $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $\mu=15$, $\sigma^2=0.05$

14.7, 15.1, 14.8, 15.0, 15.2, 14.6

平均重量还为15? ($\alpha=0.05$)

$H_0: \mu=15 \longleftrightarrow H_a: \mu\neq15$

我们知道 $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum X_i\sim N(\mu,\frac{\sigma_0^2}{n})$ $(\bar{X}=14.9)$

否定域 $\bar{X}<C_1$ or $\bar{X}>C_2$

其中 $\begin{cases}\Phi\left(\frac{C_1-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}\right)=\frac{\alpha}{2}\\ C_2=2\mu_0-C_1\end{cases}\Rightarrow \frac{C_1-\mu_0}{\sigma_0}=-1.96$, $C_1=14.5617$

$C_2=15.4363$

故不拒绝

15. $X_1X_2X_3X_4\sim N(\mu,1)$

$H_0: \mu\geq10 \longleftrightarrow H_a: \mu<10$

(a) $\alpha=0.1$ UMP test (b) $\mu=9$ 时 size, (c) $\mu=11$ 时接收 H_0 概率

(a) 根据指数分布的UMP检验

$\bar{X}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}X_i\sim N(\mu,\frac{1}{4})=\mu+\frac{1}{2}Z$, $Z\sim N(0,1)$

UMP检验为 $\bar{X}<C$

其中 $0.1=\Phi(2C-2\mu_0)\Rightarrow C=9.36$

(b) size $\alpha=\mathbb{P}(\bar{X}<9.36\mid\mu=9)=\mathbb{P}(Z<0.72)=76.42\%$

(c) 概率 $p=\mathbb{P}(\bar{X}\geq9.36\mid\mu=11)=\mathbb{P}(Z\geq-0.82)=79.39\%$

16. 正态 $\bar{X}=0.4$ $S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}=1.0$, $n=9$

(a) $\alpha=0.05$ / $\alpha=0.01$

(1) $H_0: \mu\le 0 \longleftrightarrow H_a: \mu>0$ 解释结果意义

(2) $H_0: \mu\ge 0 \longleftrightarrow H_a: \mu<0$

(b) $n=25$，检测及结果意义

本问题检验法为 $T=\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu_0)}{S}=\frac{\sqrt{n}\,\bar{X}}{S} \sim t(n-1)$

对(1) 在 $T>C_1$ 拒绝，其中 C_1 满足 $\alpha=\int_{C_1}^{\infty} t(x;n-1)\,dx$

对(2) 在 $T<C_2$ 拒绝 其中 C_2 满足 $\alpha=\int_{-\infty}^{C_2} t(x;n-1)\,dx$

$C_2=-C_1$

对(a)，$T=3.6$

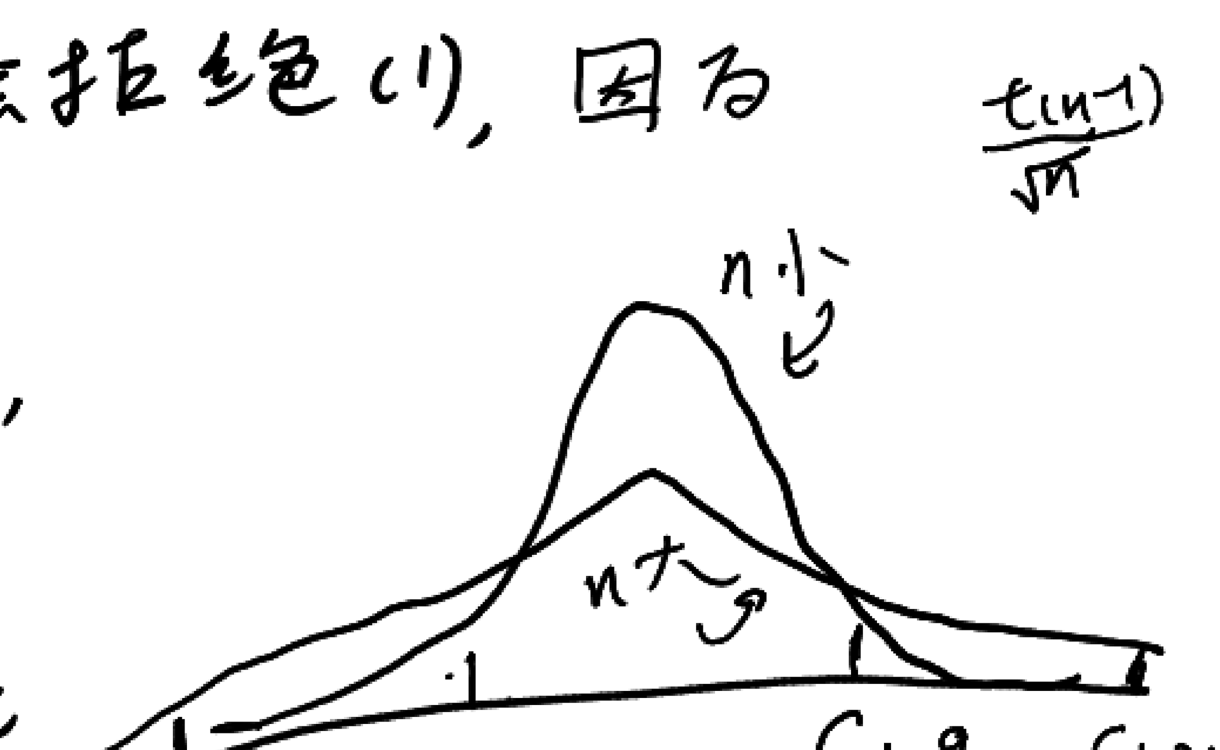
α \ C	C_1	C_2	(1)接收?	(2)接收?
0.05	1.86	-1.86	×	✓
0.01	2.90	-2.90	×	✓

此时 α 对拒绝与否无影响，(2)提法一定会接收，而本例(1)提法均拒绝

对(b)，$T=2.0$

α \ C	C_1	C_2	(1)接收?	(2)接收?
0.05	1.71	-1.71	×	✓
0.01	2.49	-2.49	✓	✓

与小的n相比，n变大时，当 α 较小时不会拒绝(1)，因为 α 比较小时候拒绝域会变小，同时 $\frac{t(n-1)}{\sqrt{n}}$ 的PDF在n大时更低更分散，使假设更不易拒绝



结论：为了让检验有意义，需选对提法(能被拒)，α 不能太小，n较大时方法可能失效 #