

# 社会博弈论 Homework #4

1(a) 画出 1 的收益矩阵 2

	H	D
H	$-2(1-p)$	$6(1-p)$
D	1	$p+3(1-p)$

$\downarrow p = \frac{1}{2}$

	H	D
H	-1	3
D	1	2

2 的收益矩阵

	H	D
H	0	6
D	1	3

	H	D
H	2	6
D	1	3

$p = \frac{1}{2}$  时, 1 的最优反应

(D, HH), (H, HD), (D, DH), (H, DH), (H, DD)

2 的最优反应 (H, DH), (D, HH)

Bayes Nash 均衡为 (H, DH), (D, HH)

(b) 2 的最优反应总是 (H, DH), (D, HH)

2 取 DH 时,  $6p - 2(1-p) - 3p - (1-p) = 3(2p-1)$

$p \geq \frac{1}{2}$  (H, DH) 是均衡  
 $p < \frac{1}{2}$  (H, DH) 不是均衡

而  $1 > -2(1-p)$  (D, HH) 总是均衡。

综上  $p < \frac{1}{2}$  时, 均衡为 (D, HH)。  $p \geq \frac{1}{2}$  时 与 (a) 相同。

2. (a)  $u_1 + u_2 = 10\sqrt{y} - y + 200$

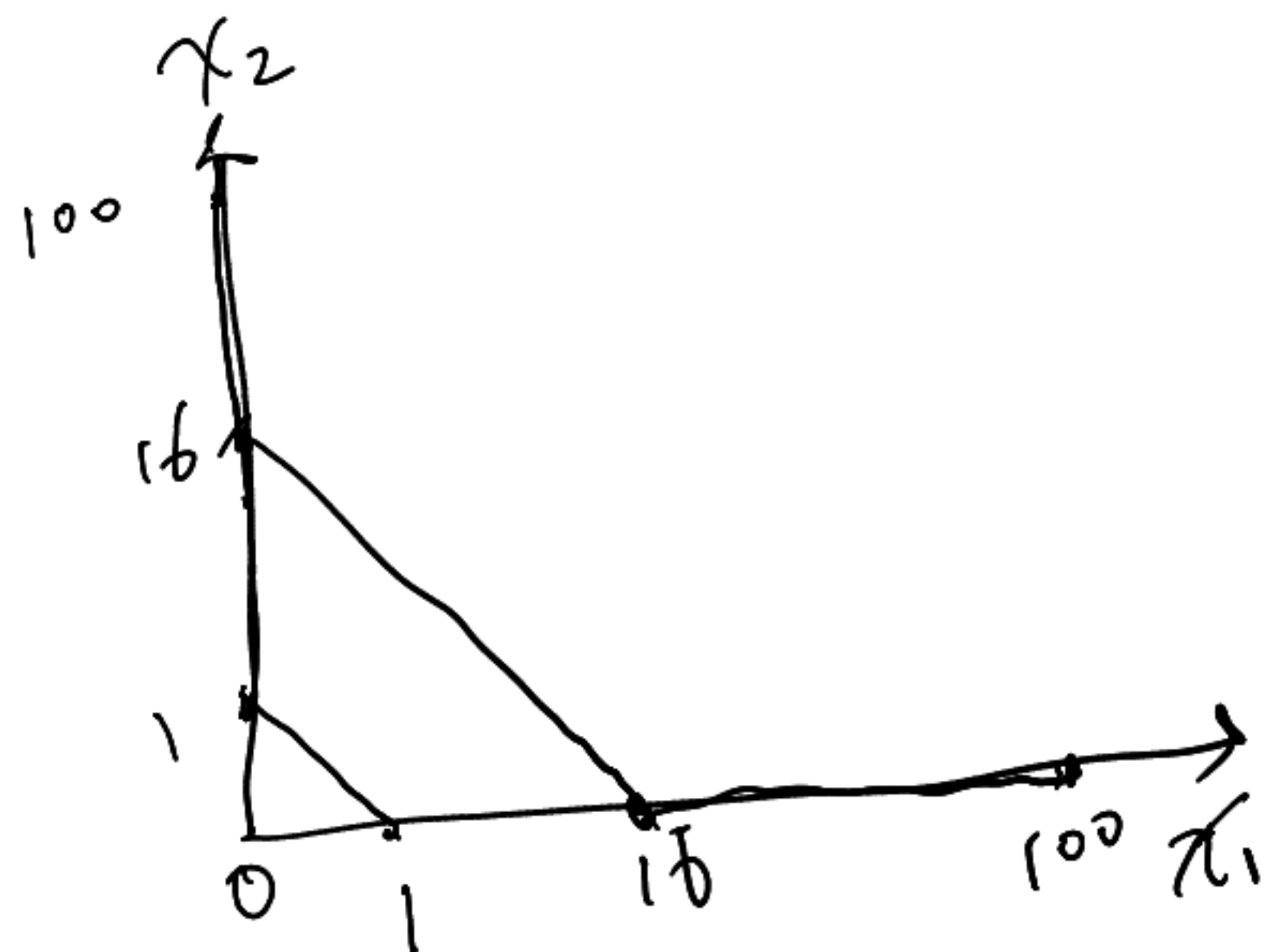
$\frac{\partial (u_1 + u_2)}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = 25$  总面积及投入资源均为 25

(b)  $u_1 = 2\sqrt{x_1 + x_2} - x_1 + m_1$

$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow x_1 = 1 - x_2$

$u_2 = 8\sqrt{x_1 + x_2} - x_2 + m_2$

$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x_1 + x_2}} - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 16 - x_1$



交于 (0, 16)

$$\text{即 } x_1=0 \quad x_2=16$$

$$y=16$$

(c)  $16 < 25$ , 不足

(d) 假设 1 讲真话, 报告  $v_1(y) = 2\sqrt{y}$   $u_1(y) = 2\sqrt{y} - \frac{y}{2} + m_1$

那么对 2 来说, 他讲真话报告  $8\sqrt{y}$  的话,

$$u_2 = 8\sqrt{y} - \frac{y}{2} + m_2$$

$$u_1 + u_2 = 10\sqrt{y} - y + m_1 + m_2 \Rightarrow y^* = 25, u_2 = 40 - \frac{25}{2} + m_2 = \frac{55}{2} + m_2$$

但如果他报告  $v_2 = 10\sqrt{y}$  的话,

$$\text{那么会优化 } u_1 + u_2 = 12\sqrt{y} - y + m_1 + m_2 \Rightarrow y^* = 36, u_2 = 8 \times 6 - \frac{6}{2} + m_2 = 45 + m_2$$

此时  $u_2$  更大 故讲真话是劣势选择

(e) 根据 VCG 理论, 应该设计

$$t_1 = \hat{v}_2(y^*) - \frac{y^*}{2} - \hat{v}_2(\hat{y}_1) + \frac{\hat{y}_1}{2}$$

$$t_2 = \hat{v}_1(y^*) - \frac{y^*}{2} - \hat{v}_1(\hat{y}_2) + \frac{\hat{y}_2}{2}$$

$$\hat{y}_1 \text{ 优化 } \hat{v}_2(y) - \frac{y}{2}$$

$$\hat{y}_2 \text{ 优化 } \hat{v}_1(y) - \frac{y}{2}$$

(f) 此时  $y^* = 25$   $\hat{y}_1$  优化  $8\sqrt{y} - \frac{y}{2}$   $\hat{y}_1 = 64$   
 $\hat{y}_2$  优化  $2\sqrt{y} - \frac{y}{2}$   $\hat{y}_2 = 4$

$$t_1 = v_2(25) - \frac{25}{2} - v_2(64) + 32 = 40 - \frac{25}{2} - 64 + 32 = -\frac{9}{2}$$

$$t_2 = v_1(25) - \frac{25}{2} - v_1(4) + 2 = 10 - \frac{25}{2} - 4 + 2 = -\frac{9}{2}$$

有盈余.  $1 \text{ 的收益 } u_1 = 2\sqrt{y} - \frac{y}{2} + m_1 + t_1 = 10 - \frac{25}{2} - \frac{9}{2} + 100 = 93$   
 $2 \text{ 的收益 } u_2 = 8\sqrt{y} - \frac{y}{2} + m_2 + t_2 = 40 - \frac{25}{2} - \frac{9}{2} + 100 = 122$

(g) 此时  $y^*$  优化  $8\sqrt{y} - y$   $y^* = 16$   $\hat{y}_1$  还是 64

$$\hat{y}_2 \text{ 优化 } -\frac{y}{2} \quad \hat{y}_2 = 0$$

$$t_1 = v_2(16) - 8 - v_2(64) + 32 = 8 + 4 - 8 - 64 + 32 = -8$$

$$u_1 = 2\sqrt{16} - 8 + 100 - 8 = 92$$

变 1-