1. 五 9, 12, 15 (2)(4)(6)(10) 七 1.3.4.7.12

2. P126 2, 4, 9,

9. $a>e$, $e^z=az^n$ 在 $|z|<1$ 恰 n 个根.

记 $F(z)=az^n-e^z$ $f(z)=az^n$ $g(z)=-e^z$

$|z|=1$ 时, $\underbrace{|-e^z|}_{=|g(z)|} = |e^z| \le e^{|z|} \le e < a = |az^n| = |f(z)|$ 由Rouché定理,

$F(z)$ 与 $f(z)=az^n$ 在 $D(0,1)$ 内有相同个零点.

(另外, 显然 $e^z=az^n$ 在 $D(0,1)$ 内无重根, 否则 $e^z=az^n=anz^{n-1}$.)

12. 整函数 f $\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$ 则 $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$

考虑 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z\in\mathbb{C}$

$g(z):=f(\frac{1}{z})=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\frac{1}{z})^n$

又 $\infty=f(\infty)=g(0)$ 故 0 是 g 的极点 $f(z)=\sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, $N\in\mathbb{N}$

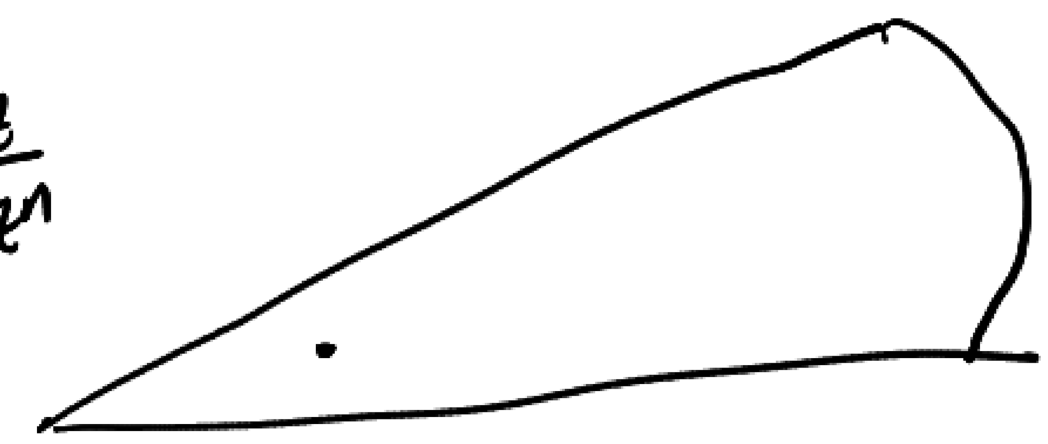
且 f 不是常数 由代数基本定理, $f(z)=w$ 对任意 $w\in\mathbb{C}$ 有解了

故 $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$.

15 (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$, $n \geq 3$ 　　记 $\varepsilon = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

按如图方式取围道积分,

$$2\pi i \,\mathrm{Res}\left(\frac{1}{1+x^n},\ e^{i\frac{\pi}{n}}\right) = \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^n}$$



$$+ \int_0^R \frac{\varepsilon dx}{1+x^n} = \frac{2\pi i \varepsilon}{n}$$

令 $R \to \infty$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{2\pi i \varepsilon}{n(1-\varepsilon)} = \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}$$

$$\left(\mathrm{Res}(f, \varepsilon) = \lim_{z\to\varepsilon} \frac{z-\varepsilon}{z^n+1} = \lim_{z\to\varepsilon} \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{\varepsilon}{n}\right)$$

(4) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$, $|a|<1$

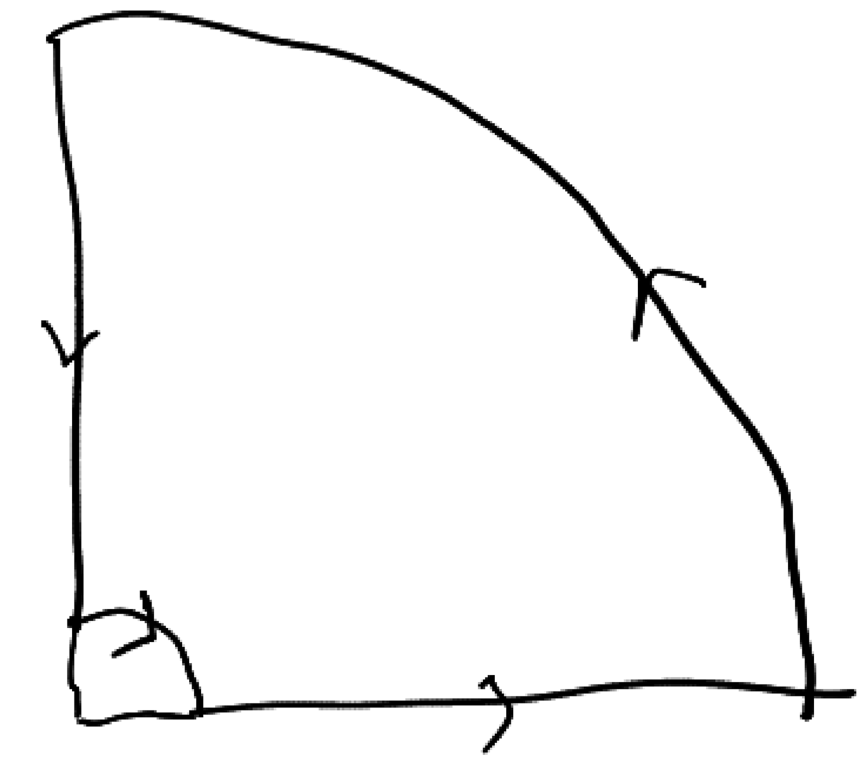
$$= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a^2-a(e^{i\theta}+e^{-i\theta})} = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{in\theta} \sum_{m=0}^{\infty} a^m e^{-im\theta}\, d\theta$$

(由$|a|<1$)

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a^{m+n} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\, d\theta \quad \text{(由一致收敛)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n}\, 2\pi = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

(6) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx$



考虑如图所示围道积分

$I = \int_{\gamma_R} \frac{e^{ix} - e^{-x}}{x} dx = 0$

$= \underbrace{\int_\varepsilon^R \frac{e^{ix} - e^{-x}}{x} dx}_{A} + \underbrace{\int_R^\varepsilon \frac{e^{-x} - e^{-ix}}{x} dx}_{B} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{iRe^{i\theta}} - e^{-Re^{i\theta}}\right) d\theta}_{C}$

$+ \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(e^{i\varepsilon e^{i\theta}} - e^{-\varepsilon e^{i\theta}}\right) d\theta}_{D}$

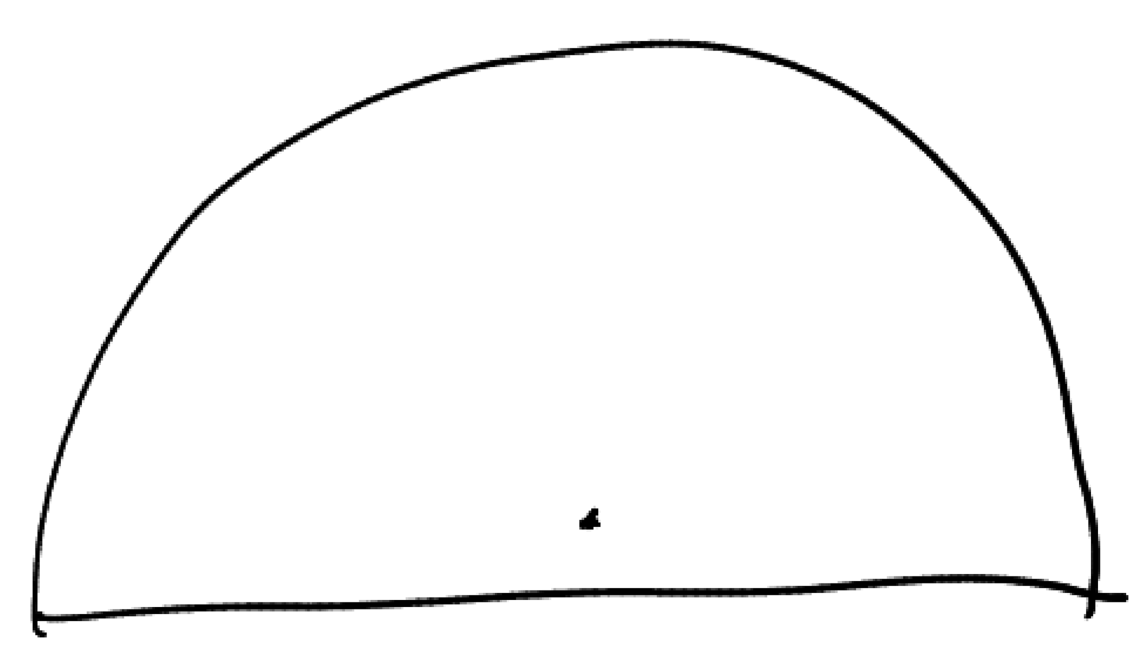
当 $\varepsilon \to 0^+$ 时, $D \to 0$ 当 $R \to +\infty$ 时, $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta} - e^{-R\cos\theta} e^{-iR\sin\theta}\right) d\theta$

由约当引理 $C \to 0$

故 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix} - e^{-x}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-ix}}{x} dx$

取实部, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - e^{-x}}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - \cos x}{x} dx = 0.$

(10) $\int_0^{+\infty} x(x^2+1)^{-2} \sin x \, dx$



取如图围道

$\int_{\gamma_R} \frac{z e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$

$= 2\pi i \frac{1}{4e}$

$= \int_{-R}^R x(x^2+1)^{-2} e^{ix} dx + \int_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z > 0}} \frac{z e^{iz}}{(1+z^2)^2} dz$

$\left| \int_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z > 0}} \frac{z e^{iz}}{(1+z^2)^2} dz \right| \le \frac{R}{R^2-1} \left| \int_0^\pi e^{i\theta} e^{iR\cos\theta} e^{-R\sin\theta} d\theta \right|$

$\le \frac{R}{R^2-1} \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta \to 0 \ (R \to +\infty)$ 故 $\int_0^{+\infty} x(x^2+1)^{-2} \sin x \, dx$

$= \frac{1}{2} 2\pi \frac{1}{4e} = \frac{\pi}{4e}$

1. $a=i$

级数 $1+az+a^2z^2+\cdots$

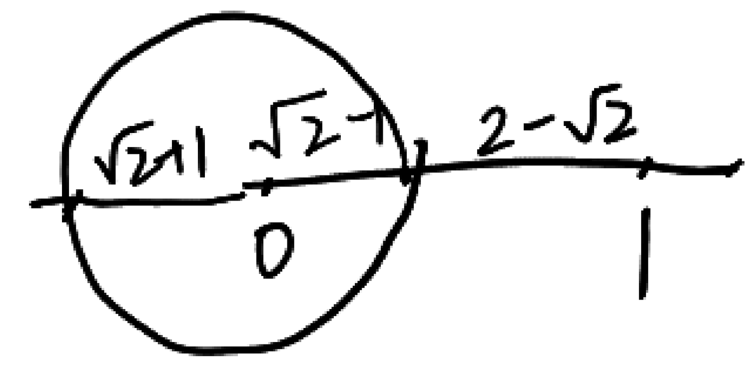
与 $\frac{1}{1-z} - \frac{(1-a)z}{(1-z)^2} + \frac{(1-a)^2 z^2}{(1-z)^3} - \cdots$ 互为直接解析延拓

级数1 在 $|z|<1$ 收敛，和函数 $\frac{1}{1-az}$.

级数2 一般项 $a_n = \frac{(-1)^n (1-a)^n z^n}{(1-z)^{n+1}}$ $n=0,1,\cdots$

$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt{2}\,|z|}{|1-z|} < 1 \iff |z+1| < \sqrt{2}$

故级数2 收敛圆盘 $|z+1|<\sqrt{2}$



而 $f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{(1-a)z}{(1-z)^2} + \frac{(1-a)^2 z^2}{(1-z)^3} - \cdots$

$(1-z)f(z) - 1 = -\frac{(1-a)z}{1-z} + \frac{(1-a)^2 z^2}{(1-z)^2} + \cdots$

$\frac{(1-z)f(z)-1}{(a-1)z} = \frac{1}{1-z} - \frac{(1-a)z}{(1-z)^2} + \cdots = f(z)$

$f(z)(az-1) = -1$ $\quad f(z) = \frac{1}{1-az}$

由定义立得. #

3. f 在 $|z|<1$ 解析 $\quad z=0$ 邻域内 $f(2z) = z f(z) f'(z)$

f 可解析延拓至 $\mathbb{C}$. 易知 $f(0)=0$

设 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $|z|<1$. 有 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n+1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$, $|z|<1$.

有 $a_1=0$

对 $k\geq 2$

$2^k a_k z^k = \sum_{j=2}^{k} a_{j-1} z^j \,(k-j+1)\, a_{k-j+1} z^{k-j}$

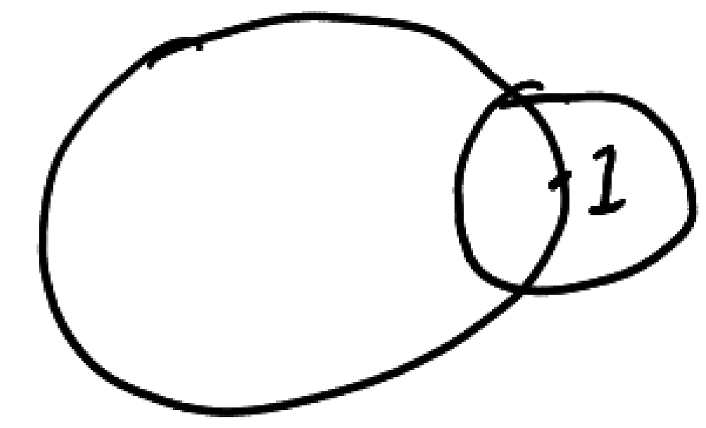
$2^k a_k = \sum_{j=1}^{k-1} (k-j)\, a_j\, a_{k-j} \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = 0$

f 在 $|z|<1$ 恒为0. f 可延拓至 $\mathbb{C}$.

4. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在收敛圆周上只有唯一极点. 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在圆周每一点发散

先假设极点是1. 由(i)想证明 $|a_n|\not\to 0$ $(n\to\infty)$

从而,若 $\exists |z_0|=1$ 使 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 收敛, 这级数一般项 $a_n z^n$ 模不趋于0. 故矛盾.



若不然, $\forall \varepsilon>0$, $\exists N$, $\forall n>N$, $|a_n|<\varepsilon$. 当 $|z|<1$ 时,

$|f(z)| \le \sum_{n=0}^{N-1}|a_n| + \frac{\varepsilon}{1-|z|}$ 令 $z=x\in\mathbb{R}_+\to 1^-$ 故 $\lim_{x\to 1^-}(1-x)|f(x)|=0$ (*)

$0\le \limsup_{x\to 1^-}(1-x)|f(x)| \le 0+\varepsilon=\varepsilon$

但在 $z=1$ 附近 $f(z)=\sum_{n\ge 0} b_n(z-1)^n+\frac{b_{-1}}{z-1}+\frac{b_{-2}}{(z-1)^2}+\cdots+\frac{b_{-N}}{(z-1)^N}$, $N\ge 1$, $b_{-N}\ne 0$

$(1-z)f(z)\to b_{-1}\ne 0$ or ∞, 总之与(*)矛盾.

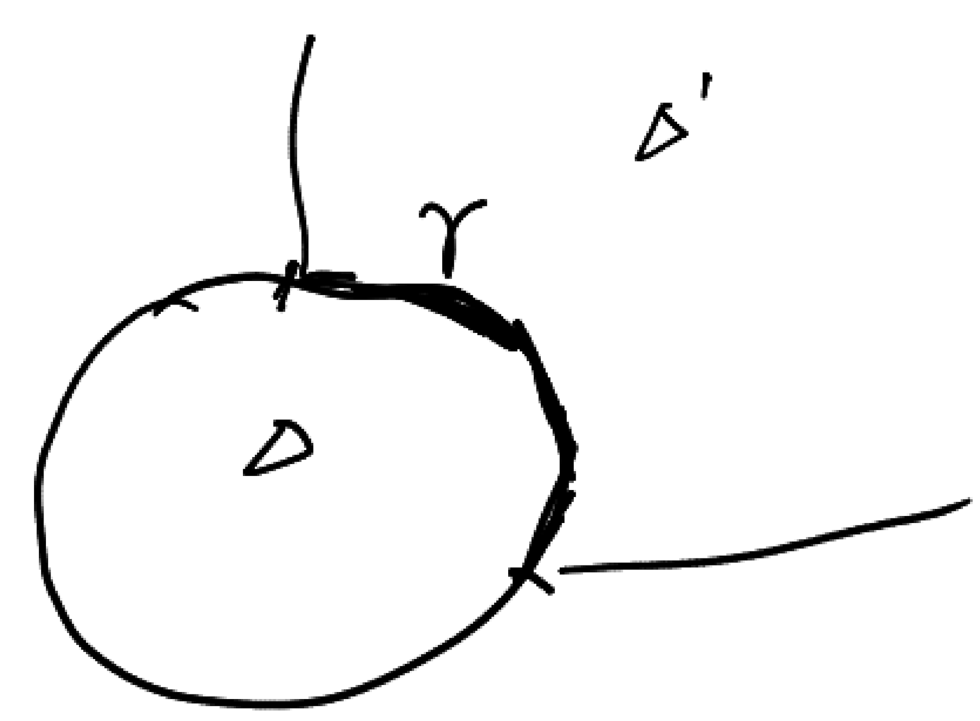
$f(z)\sim\frac{b_{-N}}{(z-1)^N}$, 即 $z\to 1$ 时,

回到原题, 设极点是 ξ, 则 $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\xi^n z^n$ 收敛半径为1, 且唯一极点是1

故其在 $|z|=1$ 上都不收敛 即 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $|z|=|\xi|$ 上都不收敛. #

7. f 在单位圆盘 Δ 解析, 在 $\Delta\cup\partial\Delta$ 连续. $f\not\equiv C$.

$\gamma\subset\partial\Delta$ 为一段弧, 则 $f(\gamma)$ 不是单点集



若不然, $f(\gamma)=\{z_0\}$

$f(\gamma)$ 是 $\mathbb{C}$ 上

f 在 Δ 上解析, 在 $\Delta\cup\gamma$ 连续,

任意圆心适当半径圆的一部分

故令 Δ' 为 Δ 的对称区域

则 f 可延拓到 $\Delta\cup\gamma\cup\Delta' := \Omega$ 上. (解析延拓)

记 $g(z)=f(z)-z_0$

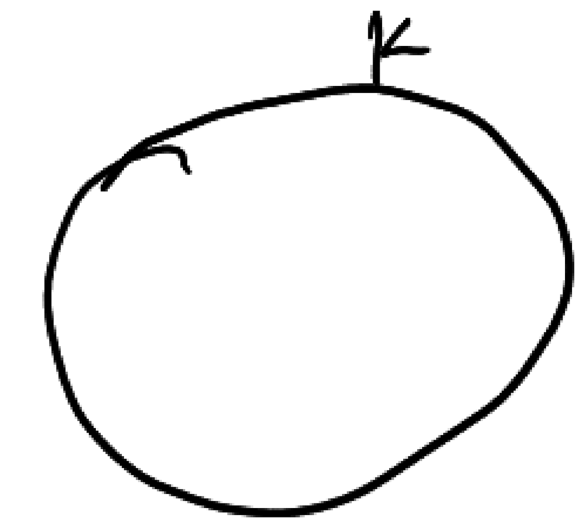
则在 γ 上 $g(z)\equiv 0$ g 在 Ω 中零点有聚点 故 $g\equiv 0$

故 Δ 上 $f\equiv z_0$ 由连续性, $\bar{\Delta}$ 上也有 $f\equiv z_0$ 与题设矛盾.

12. f 在 $\mathbb{C}$ 亚纯，$\exists$ 圆周 K, K'，$f(K) \subset K'$，则 f 是有理函数

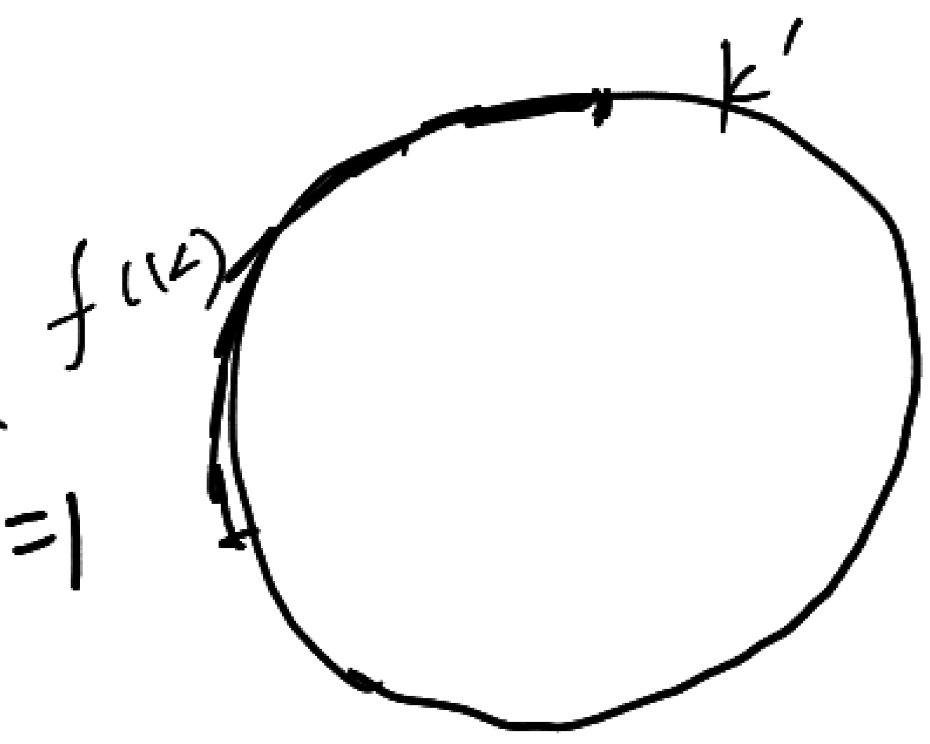
考虑 Möbius 变换 σ_1, σ_2，σ_1 将 $|z|=1$ 变为 K

σ_2 将 K' 变为 $|z|=1$



考虑 $g(z) = \sigma_2(f(\sigma_1(z)))$ g 在 $\mathbb{C}$ 亚纯且 $g(T) \subset T$，

$T=\{z: |z|=1\}$ 显然 g 在 T 上无极点



设 $z_1, \dots, z_n$ 为 $|z|<1$ 内 g 的极点，阶为 $\beta_1 \dots \beta_n$

考虑 $h(z) = g(z) \cdot \frac{(z-z_1)^{\beta_1}}{(1-\bar{z}_1 z)^{\beta_1}} \cdots \frac{(z-z_n)^{\beta_n}}{(1-\bar{z}_n z)^{\beta_n}}$ 则 h 在 $D(0,1)$ 解析

在 $\overline{D(0,1)}$ 连续 且 $|z|=1$ 时，$|h(z)| = |g(z)| \prod_{j=1}^{n} \left|\frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z}\right|^{\beta_j} = 1$

由 Schwarz symmetry principle

h 可被延拓至 $D(0,1) \cup D^*(0,1) = \overline{\mathbb{C}}$ 故 h 是 $\overline{\mathbb{C}}$ 上解析函数，为有理函数

故 g 也是有理函数，$f(z) = \sigma_2^{-1}(g(\sigma_1^{-1}(z)))$ 也是有理函数.

P126

2. f 在 $\overline{B(0,1)}$ 解析 $|z|=1$ 时，$|f(z)|<1$ 求 $f(z)=z^n$ 解的个数，$n \geq 1$

考虑 $F(z) = z^n - f(z) = g(z) + (-f(z))$. $z^n, f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 上解析

$|z|=1$ 时，$|g(z)| = 1 > |f(z)|$

故由 Rouche 定理，$|z|<1$ 时，$F(z)$ 与 $g(z) = z^n$ 解数相同，为 n 个.

且 $|z|=1$ 时，显然 $f(z) \neq z^n$

故恰有 n 个解.

4. f 在 G 亚纯 $\tilde{f}: G \to \overline{\mathbb{C}}$ $\tilde{f}(z)=\begin{cases}\infty & z\text{ 是极点} \\ f(z) & \text{else}\end{cases}$

则 $\tilde{f}$ 连续.

只需证 $\tilde{f}$ 在极点连续.

设 $w \in \mathbb{C}$ 是极点. $f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-w)^n}+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-w}+a_0+a_1(z-w)+\cdots$

显然 $\lim_{z\to w}|f(z)|=\infty$ (因 $\lim_{z\to w}\left|\frac{1}{(z-w)^k}\right|=\infty$) 故 $\forall M>0, \exists \delta>0, 0<|z-w|<\delta$

$\Rightarrow |f(z)|>M$. 此即 $\tilde{f}$ 在 w 连续, (即 $\lim_{z\to w} f(z)=\infty$).

若 ∞ 为极点 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{z}\right)^n+a_0+a_1 z+\cdots+a_N z^N$

显然, $\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$ 故 $\forall M>0$, $\exists N>0$, $|z|>N \Rightarrow |f(z)|>M$

此即 $\tilde{f}$ 在 ∞ 连续 (即 $\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$).

9. $\lambda>1$ $\lambda-z-e^{-z}=0$ 在 $\mathrm{Re}\, z>0$ 恰有一个解(1) 此解是实数(2)

$\lambda\to 1$ 时, $z(\lambda)$ 有什么变化? (3)

设 $z=a+bi$ $a,b\in\mathbb{R}$. 是解

引理: $x\neq 0 \Rightarrow |\sin x|<|x|$.

Proof: $g(x)=x-\sin x$ $g'(x)=1-\cos x\geq 0$ $x>0$ 时, $g(x)>g(0)=0$, $x>\sin x$; $x<0$ 时, $-x>\sin(-x)$, i.e. $|x|>|\sin x|$ #

故在考虑 $\lambda=a+bi+e^{-a}(\cos b-i\sin b)$ 对比虚部, $b=e^{-a}\sin b$

但 $\mathrm{Re}(z)=a>0$. $|b|=|e^{-a}\sin b|<|\sin b| \Rightarrow$ 只能 $b=0$ 故 $z\in\mathbb{R}$.

下设 $z=x\in\mathbb{R}$ $f(x)=x+e^{-x}$, $x>0$ $f'(x)=1-e^{-x}>0$ $f(x)$ 单增

$f(+\infty)=+\infty$, $f(0^+)=1$ 而 $\lambda>1$ 故 $f(x)=\lambda$ 有且仅有一个解 $x\in(0,+\infty)$.

至此已解答(1)(2)

对于(3). 由于 f 为 $(0,+\infty)$ 到 $(1,+\infty)$ 一一对应, 有连续反函数 $\lambda(x)$

故 $\lambda\to 1^+$ 时, $\lambda(x)\to 0^+$ 至此解决(3).

即 x 从右侧趋于0.