4.3 $\min\limits_{X_1\in\mathbb{R}^{q\times p},\ X_2\in\mathbb{R}^{q\times q}} \sum\limits_{i=1}^{m}\|X_2X_1a_i-b_i\|_2^2$ $\quad a_i\in\mathbb{R}^p,\ b_i\in\mathbb{R}^q$

(a) 记 $A=(a_1\cdots a_m)\in\mathbb{R}^{p\times m}$ $\quad B=(b_1\cdots b_m)\in\mathbb{R}^{q\times m}$ 类似最小二乘法，

有 $f(X_1,X_2)=\sum\limits_{i=1}^{m}\|X_2X_1a_i-b_i\|_2^2 = \|X_2X_1A-B\|_2^2$ 先求 $\nabla_{X_2}f$.

任取 $V\in\mathbb{R}^{q\times q}$ $\quad t\in\mathbb{R}$

$$\lim_{t\to0}\frac{f(X_1,X_2+tV)-f(X_1,X_2)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\|X_2X_1A-B+tVX_1A\|_2^2-\|X_2X_1A-B\|_2^2}{t}$$

$$\overset{二次函数}{=} 2\langle VX_1A,\ X_2X_1A-B\rangle = \langle V, 2(X_2X_1A-B)A^TX_1^T\rangle$$

$$\Rightarrow \nabla_{X_2}f = 2(X_2X_1A-B)A^TX_1^T$$

任取 $V_2\in\mathbb{R}^{q\times p}$ $\quad t\in\mathbb{R}$

$$\lim_{t\to0}\frac{f(X_1+tV_1,X_2)-f(X_1,X_2)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\|X_2X_1A-B+tX_2V_1A\|_2^2-\|X_2X_1A-B\|_2^2}{t}$$

$$=2\langle X_2V_1A,\ X_2X_1A-B\rangle=\langle V_1,\ 2X_2^T(X_2X_1A-B)A^T\rangle$$

$$\Rightarrow \nabla_{X_1}f=2X_2^T(X_2X_1A-B)A^T$$

(b) 记 $X=X_2X_1$ 则所求 $=\|XA-B\|_2^2 \overset{def}{=} F(X)$, $X\in\mathbb{R}^{q\times p}$

$\nabla_X F(X)=2(XA-B)A^T$ （求法同上）

由于 F 是 X 的无限制二次函数，（对 X 每个 entry 来考虑知）最小值存在

且 F 取最小值当且仅当 $\nabla_X f(X)=0$，即 $X_2X_1AA^T=BA^T$

4.12 $\max \frac{1}{2}\sum_{i<j} w_{ij}(1-x_ix_j)$

$\text{s.t. } x_j \in \{0,1\},\ j=1,\cdots n$

解：记 $y_i = 2x_i - 1$ 则 $y_i \in \{-1,1\}$, $i=1,\cdots n$ 记 $y=(y_1 \cdots y_n)^T$

$$T = \max_x \frac{1}{2}\sum_{i<j} w_{ij}(1-x_ix_j) = \max_y \frac{1}{2}\sum_{i<j} w_{ij}\left(1-\frac{y_iy_j+y_i+y_j+1}{4}\right)$$

$= \max_y \ -y^TAy - 2b^Ty - c$，其中 $A\in S^n$, $A_{ii}=0$, $i=1,\cdots n$, $A_{ij}=A_{ji}=\frac{w_{ij}}{16}$, $1\le i<j\le n$

$b\in\mathbb{R}^n$, $b_i = \frac{1}{16}\sum_{j\ne i} w_{ij}$, $i=1,\cdots n$, $c\in\mathbb{R}$, $c=\frac{-3}{8}\sum_{i<j} w_{ij}$

而 $\min_y \ y^TAy + 2b^Ty + c = \langle A, Y\rangle + 2b^Ty + c$，其中 $Y=yy^T$, $Y_{ii}=1$, $i=1,\cdots n$

而 $\langle A, Y\rangle + 2b^Ty + c$

$$= \left\langle \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & c\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Y & y \\ y^T & 1\end{bmatrix}\right\rangle$$

$$\overset{def}{=} \langle \bar{A}, \bar{Y}\rangle$$

原问题等价于 $\min \langle \bar{A}, \bar{Y}\rangle$,

$\text{s.t. } Y_{ii}=1,\ i=1,\cdots n+1$

$Y = yy^T$

可松弛为 $Y \succeq yy^T$，与 $\bar{Y}\succeq 0$ 等价

故原问题松弛于 $\min \langle \bar{A}, \bar{Y}\rangle$

$\text{s.t. } Y_{ii}=1,\ i=1,\cdots n+1$

$\bar{Y}\succeq 0$ #