Book I

4.15. $\mathbb{C}$上解析 f 为超越整函数 $\Longleftrightarrow$ $\forall \alpha>0$, $\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\max_{|z|=r}|f(z)|}{r^\alpha}=+\infty$ (*)

若 f 不是超越整函数, f 为多项式 (n次) 则取 $\alpha>n$, (*) 显然不成立.

若 f 是超越整函数, 易知只需证 $\forall n\in\mathbb{Z}_+$, $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{\max_{|z|=r}|f(z)|}{r^n}=+\infty$

设 $f(z)=p(z)+g(z)$, $p(z)$是f 在$n-1$次Taylor展开式 即 $p(z)=a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$

$\max\limits_{|z|=r}\dfrac{|f(z)|}{r^n}\geq\max\limits_{|z|=r}\dfrac{|g(z)|-|p(z)|}{r^n}$ 而 $\dfrac{|p(z)|}{r^n}\leq|a_{n-1}|\dfrac{1}{r}+\cdots+|a_0|\dfrac{1}{r^n}\to0\ (r\to\infty)$

故只需证 $\lim\limits_{r\to\infty}\max\limits_{|z|=r}\dfrac{|g(z)|}{r^n}=+\infty$ (**) 记 $\theta(z)=\dfrac{g(z)}{z^n}$ 在$\mathbb{C}$全纯 显然 $\max\limits_{|z|=r}\left|\dfrac{g(z)}{z^n}\right|$ 关于r 单增趋于$+\infty$ (最大模、Liouville定理) 而 $|z|=r$ 时, $\dfrac{|g(z)|}{r^n}\geq\left|\dfrac{g(z)}{z^n}\right|$ 故(**)得证.

4.16 f 是 H上亚纯, 在$\bar{H}$连续, 在实轴上 $|f(z)|=1$ 且 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}|f(x)|=1$ 则 f 有理

f 在H中只有有限个极点. 否则 $\exists\{z_n\}$ 为极点, $\{z_n\}$ 在 $\bar{H}$ 中有极限点 z_0

由极点定义知 $z_0\notin H$ $\Rightarrow$ $z_0=\infty$ or $z_0\in\mathbb{R}$. 但 f 在 $\mathbb{R}\cup\infty$ 上恒为1. 由连续性矛盾!

故 f 在H中仅有限极点 $z_1\cdots z_n$, 阶为 $\alpha_1\cdots\alpha_n$

且同理可得 f 在 H 上有有限个零点 $w_1\cdots w_m$, 重数 $\beta_1\cdots\beta_m$

设 $g(z)=f(z)\dfrac{(z-\bar{z}_1)^{\alpha_1}\cdots(z-\bar{z}_n)^{\alpha_n}(z-w_1)^{\beta_1}\cdots(z-w_m)^{\beta_m}}{(z-z_1)^{\alpha_1}\cdots(z-z_n)^{\alpha_n}(z-\bar{w}_1)^{\beta_1}\cdots(z-\bar{w}_m)^{\beta_m}}$

则 $\forall z\in\mathbb{R}$, $|g(z)|=1$. $\lim\limits_{\substack{x\to\pm\infty\\ x\in\mathbb{R}}}|g(x)|=1$ g 为H上不为0的解析函数, $\frac{1}{g}$ 也是.

由最大模原理 $|g(z)|\leq1$, $\left|\frac{1}{g(z)}\right|\leq1$, $\forall z\in H$ $\Rightarrow$ $|g(z)|\equiv1$ $\Rightarrow$ $g(z)=e^{i\theta}$ for some fixed θ. #

4.19 f 是$\bar{\mathbb{C}}$ 亚纯 f 在 $\bar{\mathbb{C}}$上零点极点个数相同.

$\bar{\mathbb{C}}$ 上亚纯函数为有理函数 设 $f(z)=a\dfrac{\sum_j (z-b_j)^{k_j}}{\sum_k (z-c_k)^{u_k}}$ $m=\sum_j k_j$ $n=\sum_k u_k$

$m>n$ 时 f 在$\mathbb{C}$上 零点 $\sum_j k_j=m$个 极点 $\sum_k u_k=n$个

在∞处 f 是 $m-n$ 阶极点 (因为 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{f(z)}{z^{m-n}}\neq0$ 且有限)

$m<n$ 时, f 在 $\mathbb{C}$ m零点 n 极点, 在∞处 $n-m$阶零点

$m=n$ 时 f 在$\mathbb{C}$上 m零、极点, 在∞不是零/极点.

#

4.23 $f(z)=u+iv$ 为 $\mathbb{C}$上亚纯，$\exists C$，$u\geq C$ 则 f 为常数

如果f在$\mathbb{C}$上没有极点，则由Liouville定理立得

若不然，设 z_0为极点，f在z_0附近可写为 $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$，$m\geq 1$，$g(z_0)\neq 0$，$g$全纯

设 $0<|z-z_0|<\delta$时，$\begin{cases}|g(z)|\in[A,B], & 0<A<B \\ \arg g(z)\in[c,d], & 0\notin[c,d]\end{cases}$. 由于 $0<|z-z_0|<\delta$时，$\dfrac{1}{(z-z_0)^m}$ 可取到模充分大的一切复数 故 $\exists 0<|z-z_0|<\delta$，$\mathrm{Re} f(z)<a$. 矛盾!（取z_0 使 $\dfrac{g(z_0)}{(z-z_0)^m}$为模充分大的负数）

故 f为常数

4.25 $\mathbb{C}$上亚纯f，$|z|=1$时 $|f(z)|=1$

设 $f(z)=\dfrac{h(z)}{g(z)}$，h,g在$\mathbb{C}$上全纯 h,g在$D(0,1)$有有限个零点 $z_1\cdots z_m$ $z_1'\cdots z_n'$，

阶为 $\alpha_1\cdots\alpha_m$，$\beta_1\cdots\beta_n$.

设 $h_k(z)=\dfrac{(1-\bar{z}_k z)^{\alpha_k}}{(z-z_k)^{\alpha_k}}$. $\forall |z|=1$，$|h_k(z)|=1$ $\forall |z|<1$，$h_k(z)\neq 0$

$g_k(z)=\dfrac{(z-z_k')^{\beta_k}}{(1-\bar{z}_k' z)^{\beta_k}}$ $\forall |z|=1$，$|g_k(z)|=1$，$\forall |z|<1$，$g_k(z)\neq 0$

设 $F(z)=\prod_i h_i(z)\prod_j g_j(z)$ 则 $F(z)=1$，$\forall |z|=1$，F在$D(0,1)$无零点

故 $|F(z)|\leq 1$，$\dfrac{1}{|F(z)|}\leq 1$ $F\equiv e^{i\theta}$ 所有F为 $A(D(0,1))$，即 $D(0,1)$的 biholomorphism 到自身

5.1 求孤立奇点类型，留数

(1) $\dfrac{1}{(z-z_1)^k(z-z_2)}$

z_1：k阶极点. z_1附近 Laurent 展开

$$f=\frac{1}{(z-z_1)^k}\frac{1}{(z_1-z_2)\left(1-\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\right)}$$

$$=\frac{1}{(z_1-z_2)}\frac{1}{(z-z_1)^k}\left(1+\frac{z-z_1}{z_2-z_1}+\cdots+\frac{(z-z_1)^{k-1}}{(z_2-z_1)^{k-1}}+\cdots\right)$$

$\Rightarrow \mathrm{Res}(f,z_1)=-\dfrac{1}{(z_2-z_1)^k}$

$z=z_2$处：1阶极点，$\mathrm{Res}(f,z_2)$

$=\lim\limits_{z\to z_2}(z-z_2)f(z)=\dfrac{1}{(z_2-z_1)^k}$

$z=\infty$处：可去奇点

$\mathrm{Res}(f,\infty)=0$

(2) $z^3\cos\dfrac{1}{z-1}$

$z=1$处：本性奇点

$$z^3\cos\frac{1}{z-1}=\left(1-\frac{1}{2!}\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}+\cdots\right)\left[(z-1)^3+3(z-1)^2+3(z-1)+1\right]$$

$\mathrm{Res}(f,1)=\dfrac{1}{4!}-\dfrac{3}{2!}=\dfrac{-35}{24}$

$z=\infty$处：3阶极点

$\mathrm{Res}(f,\infty)=\dfrac{35}{24}$

(3) $\dfrac{e^z}{z(z-a)}$ $z=0$处：1阶极点，$\mathrm{Res}(f,0)=-\dfrac{1}{a}$ $z=a$处：1阶极点，$\mathrm{Res}(f,a)=\dfrac{e^a}{a}$

$z=\infty$处：本性奇点 $\mathrm{Res}(f,\infty)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{e^a}{a}$

---

3. z_k是 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+a^4}$ 极点，$a\neq 0$

$$\mathrm{Res}(f,z_k)=-\frac{z_k}{4a^4}$$

我们知道 $z^4+a^4=(z-z_k)(z+z_k)(z-iz_k)(z+iz_k)$

$$\lim_{z\to z_k}(z-z_k)f(z)=\frac{1}{2z_k\cdot(1-i)z_k\cdot(1+i)z_k}$$

$$=\frac{1}{4z_k^3}$$

$$\| \qquad\qquad = -\frac{z_k}{4a^4} \quad (\text{因为 } z_k^4=-a^4) \quad \#$$

$\mathrm{Res}(f,z_k)$

(4) $e^{\frac{1}{z}}\dfrac{1}{1-z}$

$z=1$处：1阶极点，$\mathrm{Res}(f,1)=-e$

$z=0$处：本性奇点

$$e^{\frac{1}{z}}\frac{1}{1-z}=\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots\right)(1+z+z^2+\cdots)$$

$$\mathrm{Res}(f,0)=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots=e-1$$

$z=\infty$处：可去奇点

$\mathrm{Res}(f,\infty)=1$

---

5 f偶函数且为$\mathbb{C}$亚纯

(1) $\forall a\in\mathbb{C}$, $\mathrm{Res}(f,a)=-\mathrm{Res}(f,-a)$

(2) f在$|z|=R$无极点，$\displaystyle\int_{|z|=R}f(z)\,dz=0$

(1) 设f在a附近Laurent展开为

$$f(z)=\cdots+\frac{a_{-1}}{z-a}+a_0+a_1(z-a)+\cdots$$

则 $$f(-z)=\cdots+\frac{a_{-1}}{-z-a}+a_0+a_1(-z-a)+\cdots$$

$$-f(-z)=\cdots-\frac{a_{-1}}{z+a}-a_0-a_1(z+a)+\cdots$$

故 $\mathrm{Res}(f,a)=a_{-1}=-\mathrm{Res}(-f,-a)$.

(2) 由留数定理，

$$\int_{|z|=R}f(z)\,dz=2\pi i\sum_k \mathrm{Res}(f,z_k)$$

其中$1\le k\le n$，$z_1,\dots,z_n$为f在$D(0,R)$极点，它们以一对对关于原点对称分组为$(z_1,-z_1)\cdots(z_s,-z_s)$及可能有0

但 $\mathrm{Res}(f,z_j)+\mathrm{Res}(f,-z_j)=0$

且 $\mathrm{Res}(f,0)=0$

$$\Rightarrow \sum_k \mathrm{Res}(f,z_k)=0. \quad \#$$

---

8. 用Rouché定理证明代数基本定理.

不妨设 $f(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$，$g(z)=z^n$，$h(z)=a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$

当$|z|$充分大时，$(|z|>R=2(|a_{n-1}|+\cdots+|a_0|))$

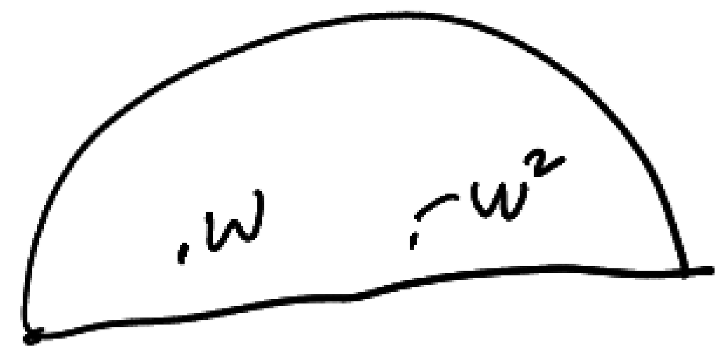
$$\left|\frac{a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0}{z^n}\right|\le(|a_{n-1}|+\cdots+|a_0|)\frac{1}{|z|}<1$$

故取 $K=D(0,R)$ 在∂K上 $|g(z)|>|h(z)|$

故在K中 $f=g+h$ 与 $g=z^n$ 有同样多的根(n个根) #

Book II

P121 记 $w=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$



1 (a) $\int_0^\infty \frac{x^2dx}{x^4+x^2+1}$

考虑 $\int_{\Gamma_R}\frac{z^2dz}{z^4+z^2+1}=2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,w)+\mathrm{Res}(f,-w^2)\right)=\pi i\frac{w+1}{w-1}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$

而 $\left|\int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{im}(z)\geq 0}}\frac{z^2dz}{z^4+z^2+1}\right|\leq\int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{im}(z)\geq 0}}\frac{R^2|dz|}{R^4-R^2-1}=\frac{\pi R^3}{R^4-R^2-1}\to 0\ (R\to\infty)$

故 $\int_0^\infty\frac{x^2dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z^2dz}{z^4+z^2+1}$

$=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$

(c) $\int_0^\pi\frac{\cos 2\theta\, d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$, $a^2<1$ 令 $z=e^{i\theta}$

$=\frac{1}{4}\int_{|z|=1}\frac{z^2+\frac{1}{z^2}}{1-a(z+\frac{1}{z})+a^2}\frac{dz}{iz}=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{z^4+1}{z^2(1-az)(z-a)}dz$

(f 在 a处为1阶极点，0处为二阶)

$=\frac{1}{2}\pi\left(\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,a)\right)=\frac{\pi a^2}{1-a^2}$

$\left(\int_0^\pi\frac{\cos 2\theta\, d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos 2\theta\, d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\right)$

2. (a) $\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{\pi}{4a^3}$, $a>0$

考虑 $\int_{\Gamma_R}\frac{dz}{(z^2+a^2)^2}$. $\Gamma_R=\{x^2+y^2=R^2, y\geq 0\}\cup\{-R\leq x\leq R, y=0\}$

$I=\int_{\Gamma_R}\frac{dz}{(z^2+a^2)^2}=2\pi i\,\mathrm{Res}(f,ai)$

$=\frac{\pi}{2a^3}$

$\left(\frac{1}{(z^2+a^2)^2}=\frac{1}{(z-ai)^2(z+ai)^2}\right.$

$=\frac{1}{(z-ai)^2\left[2ai\left(\frac{z-ai}{2ai}+1\right)\right]^2}$

$=\frac{1}{-4a^2(z-ai)^2}\left(1-\frac{z-ai}{ai}+\cdots\right)$

$\left.\mathrm{Res}(f,ai)=\frac{1}{4a^3i}\right)$

而 $I=2\int_0^R\frac{dx}{(x^2+a^2)^2}+\int_{\substack{|z|=R\\ \mathrm{im}z\geq 0}}\frac{dz}{(z^2+a^2)^2}$

$\left|\int_{|z|=R}\frac{dz}{(z^2+a^2)^2}\right|\leq\int_{|z|=R}\frac{|dz|}{(R^2-a^2)^2}\to 0\quad(R\to\infty)$

故令 $R\to\infty$ 立得#.

(c) $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2}dx = \frac{\pi(a+1)e^{-a}}{4}$, $a>0$

考虑 $\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iaz}}{(1+z^2)^2}dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i) = \frac{\pi(a+1)e^{-a}}{2}$ (用 $\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{e^{iaz}}{(z+i)^2}$ 计算)

(Γ_R 同上一问)

而 $\left|\int_{\substack{|z|=R \\ \operatorname{Im} z>0}} \frac{e^{iaz}}{(z^2+1)^2}dz\right| \le \frac{1}{(R^2-1)^2}\int_0^\pi e^{-aR\sin\theta}R\,d\theta = \frac{2}{(R^2-1)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin\theta}R\,d\theta$

$\le \frac{2}{(R^2-1)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2aR\theta}{\pi}}R\,d\theta = \frac{2\pi}{a(R^2-1)^2}(1-e^{-aR}) \to 0 \quad (R\to\infty)$

故 $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{e^{iaz}}{(1+z^2)^2}dz = \frac{\pi(a+1)e^{-a}}{4}$

(h) $\int_0^{2\pi}\log\sin^2 2\theta\,d\theta = 4\int_0^\pi \log\sin\theta\,d\theta = -4\pi\log 2$

考虑 $f(z)=\log(1-z)$ f 在 $|z|<r<1$ 上解析

易知 $\int_{|z|=r}\frac{\log(1-z)}{z}dz = 0$. (此时 log 任取定一支 e^z 反函数)

设 $z=re^{i\theta}$ $\int_0^{2\pi} r\log(1-re^{i\theta})\,d\theta=0$

令 $r\to1^-$ 有 $\int_0^{2\pi}\log(1-e^{i\theta})\,d\theta=0$

考虑实部, 有 $\int_0^{2\pi}\log|1-e^{i\theta}|\,d\theta=0$

即 $\int_0^{2\pi}\log 4\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta=0$

故 $\int_0^\pi \log\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\log\sin\frac{t}{2}\,dt = -\pi\log 2$.

#

3. $\int_\gamma \exp z^{-1}dz$ all possible values, γ 是任何不经过0的 closed curve

$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 在 $z=0$ 处是本性奇点 $e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\cdots$ $\operatorname{Res}(f,0)=1$

由 Residue theorem, $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\, I(\gamma,0)\operatorname{Res}(f,0)$

其中 $I(\gamma,0)$ 为 γ 对 0 的 winding number

故 $\int_\gamma f(z)dz$ 所有可能取值为 $2\pi k i$, $k\in\mathbb{Z}$.