PROYECTO FINAL

Cálculo vectorial, Facultad de Ingeniería, UNAM

18 de noviembre de 2016

1. Objetivos

El presente proyecto tiene como objetivos

- Realizar aplicaciones prácticas de las siguientes herramientas teóricas: Integrales dobles, Integrales triples y Teorema de Stokes.
- Profundizar en los significados físicos y en algunas implicaciones matemáticas de los temas mencionados.

2. Instrucciones

Este proyecto debe ser entregado

- El día **miércoles 23 de noviembre** en el salón A303, Edificio Principal, de las 8:30-8:45 am. No habrá flexibilidad en la fecha y hora de entrega.
- En equipos de máximo 4 personas
- El documento a entregar consiste en los desarrollos de solución de 3 problemas marcados con rojo. Las preguntas en magenta son opcionales y su objetivo es reforzar la comprensión de los procedimientos de solución.

Aprovecho para desearte mucho éxito en tus estudios, ¡gracias por todo!

3. Integrales dobles y momentos de inercia

El momento de inercia (también llamado segundo momento) de una partícula de masa m que gira alrededor de un eje de rotación está definido por mr^2 donde r es la distancia de la partícula al eje de giro. Extendamos este concepto a una lámina bidimensional con densidad variable $\rho(x, y)$ con forma de una región regular R que gira alrededror de un eje que atraviesa la lámina.

- Investiga un procedimiento iterativo (basado en la división de R en pequeños rectángulos de dimensiones Δx y Δy) para calcular los momentos de inercia respecto al eje x, respecto al eje y y respecto al origen.
- ¿Cómo podemos hacer más precisa la aproximación del inciso anterior?
- Escribe las fórmulas exactas de los momentos de inercia respecto al eje x, respecto al eje y y respecto al orígen (estas fórmulas involucran integrales dobles).

- **(Primer problema obligatorio en el documento a entregar)** Calcula los momentos de inercia respecto al eje x, al eje y y al origen de un disco homogéneo D con densidad constante $\rho(x, y) = \rho$ y radio a.

4. Integrales triples y momentos de inercia

El concepto de momento de inercia puede extenderse al caso de sólidos tridimensionales. Las fórmulas son similares a las de objetos bidimensionales.

- Investiga una fórmula para calcular el momento de inercia de un sólido con densidad variable $\rho(x, y, z)$ que gira respecto al eje x, al eje y, al eje z o respecto al origen.
- ¿De qué manera están involucradas las integrales triples en las fórmulas del inciso anterior?
- ¿Podríamos reescribir el problema usando fórmulas que involucran integrales dobles?
- **(Segundo problema obligatorio en el documento a entregar)** Calcula los momentos de inercia respecto al eje x, al eje y y al eje z de una placa rectangular de ancho a, largo b y profundidad c con densidad constante $\rho(x, y, z) = \rho$. (Sugerencia: considera el centro de la placa localizado en el origen de un sistema cartesiano).

5. Teorema de Stokes, circulación de un campo e independencia de superficies de integración

Como hemos visto, el teorema de Stokes relaciona la integral del rotacional del campo $\mathbf{F}(x, y, z)$ sobre una superficie S con la integral de línea de $\mathbf{F}(x, y, z)$ a lo largo de la *frontera* de S. Responde las siguientes preguntas

Tercer problema obligatorio

- Supongamos que se tienen dos superficies orientadas distintas pero *con la misma frontera*. ¿La siguiente igualdad se cumple?

$$\iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_1}\, dS = \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n_2}\, dS \tag{1}$$

  Justifica tu respuesta.

- Investiga el concepto de circulación de un campo vectorial. ¿Cómo puedes usar el teorema de Stokes para calcular la circulación de un campo vectorial?
- Usa el teorema de Stokes para calcular $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ donde S es la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ por encima del plano XY. El campo vectorial es $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.