El Acertijo de la Esfinge

La Gran Esfinge tiene un acertijo para ti. Te da un grafo de N vértices, enumerados del 0 al $N-1$. Existen M aristas en el grafo, enumeradas de 0 a $M-1$. Cada arista es bidireccional y conecta a un par de vértices distintos entre sí. Específicamente, para cada j de 0 a $M-1$(inclusive) la arista j conecta a los vértices $X[j]$ y $Y[j]$. Existe a lo mucho una arista conectando a cualquier pareja de vértices. Dos vértices son llamados **adyacentes** si están conectados por una arista.

Una secuencia de vértices $v_0, v_1, \ldots, v_k$ (para $k \geq 0$) es llamada un **camino** si cada dos vértices consecutivos v_l y v_{l+1} (para cada l tal que $0 \leq l < k$) son adyacentes. Decimos que un camino $v_0, v_1, \ldots, v_k$ **conecta** a los vértices v_0 y v_k. En el grafo que se te entrega, cada pareja de vértices está conectada por algún camino.

Existen $N+1$ colores, numerados del 0 al N. El color N es especial y es llamado el **color de la Esfinge**. Se asigna un color a cada vértice. Específicamente, el vértice i ($0 \leq i < N$) tiene el color $C[i]$. Múltiples vértices pueden tener el mismo color, y pueden existir colores que no son asignados a algún vértice. Ningún vértice tiene el color de la Esfinge; es decir, $0 \leq C[i] < N$ ($0 \leq i < N$).

Un camino $v_0, v_1, \ldots, v_k$ (para $k \geq 0$) es llamado **monocromático** si todos sus vértices tienen el mismo color; es decir, $C[v_l] = C[v_{l+1}]$ (para cada l tal que $0 \leq l < k$). Adicionalmente, decimos que los vértices p y q ($0 \leq p < N$, $0 \leq q < N$) están en el mismo **componente monocromático** si y solo si están conectados por un camino monocromático.

Tú conoces los vértices y las aristas, pero no sabes qué color tiene cada vértice. Quieres encontrar los colores de los vértices realizando **experimentos de recoloración**.

En un experimento de recoloración, puedes cambiar arbitrariamente el color de muchos vértices. Específicamente, para realizar un experimento de recoloración primero eliges un arreglo E de tamaño N donde, para cada i ($0 \leq i < N$), $E[i]$ es un entero entre -1 y N **inclusive**. Entonces, el color de cada vértice i se convierte en $S[i]$, donde el valor de $S[i]$ es:

- $C[i]$, es decir, el color original de i, si $E[i] = -1$, o
- $E[i]$, de lo contrario.

Nota que esto significa que puedes usar el color de la Esfinge en tu recoloración.

Finalmente, la Gran Esfinge anuncia el número de componentes monocromáticos en el grafo después de asignar $S[i]$ al color de cada vértice i ($0 \leq i < N$). La nueva coloración es aplicada únicamente para este experimento en particular, por lo que **los colores de todos los vértices vuelven a ser los colores originales después que termina el experimento de recoloración**.

Tu tarea es identificar los colores de los vértices en un grafo realizando a lo sumo $2\,750$ experimentos de recoloración. También puedes recibir un puntaje parcial si determinas para cada par de vértices adyacentes, si tienen o no el mismo color.

Detalles de Implementación

Debes implementar la siguiente función.

```
std::vector<int> find_colours(int N,
    std::vector<int> X, std::vector<int> Y)
```

- N: el número de vértices en el grafo.
- X, Y: arreglos de tamaño M describiendo las aristas.
- Esta función debe devolver un arreglo G de tamaño N, representando los colores de los vértices en el grafo.
- Esta función es llamada exactamente una vez para cada caso de prueba.

La anterior función puede realizar llamadas a la siguiente función para realizar experimentos de recoloración:

```
int perform_experiment(std::vector<int> E)
```

- E: un arreglo de tamaño N especificando cómo se deben recolorear los vértices.
- Esta función devuelve el número de componentes monocromáticos después de recolorear los vértices de acuerdo a E.
- Esta función puede ser llamada a lo sumo $2\,750$ veces.

El calificador **no es adaptativo**; es decir, los colores de los vértices son fijados antes de realizar la llamada a `find_colours`.

Limites

- $2 \leq N \leq 250$
- $N - 1 \leq M \leq \frac{N \cdot (N-1)}{2}$
- $0 \leq X[j] < Y[j] < N$ para cada j tal que $0 \leq j < M$.
- $X[j] \neq X[k]$ o $Y[j] \neq Y[k]$ para cada j y k tales que $0 \leq j < k < M$.
- Cada pareja de vértices está conectada por algún camino.
- $0 \leq C[i] < N$ para cada i tal que $0 \leq i < N$.

Subtareas

Subtarea	Puntuación	Restricciones Adicionales
1	3	$N = 2$
2	7	$N \leq 50$
3	33	El grafo es un camino: $M = N - 1$ y los vértices j y $j + 1$ son adyacentes ($0 \leq j < M$).
4	21	El grafo es completo: $M = \frac{N \cdot (N-1)}{2}$ y cualesquiera dos vértices son adyacentes.
5	36	Limites originales.

En cada subtarea, puedes obtener una puntuación parcial si tu programa determina correctamente para cada pareja de vértices adyacentes, si estas tienen el mismo color.

Más precisamente, obtienes la puntuación completa para una subtarea si en todos los casos de prueba el arreglo G retornada por `find_colours` es exactamente el mismo arreglo C (es decir $G[i] = C[i]$ para toda i tal que $0 \leq i < N$).

De lo contrario, obtienes 50% de la puntuación de una subtarea si se cumplen las siguientes condiciones en todos sus casos de prueba:

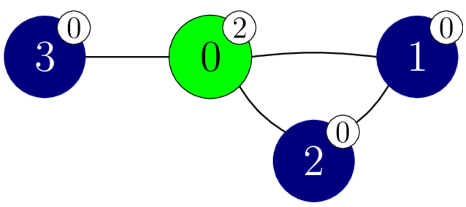
- $0 \leq G[i] < N$ para cada i tal que $0 \leq i < N$;
- Para cada j tal que $0 \leq j < M$:
  - $G[X[j]] = G[Y[j]]$ si y solo si $C[X[j]] = C[Y[j]]$.

Ejemplo

Considera la siguiente llamada.

```
find_colours(4, [0, 1, 0, 0], [1, 2, 2, 3])
```

Para este ejemplo, supongamos que los colores (ocultos) de los vértices están dados por $C = [2, 0, 0, 0]$. Este escenario se muestra en la siguiente figura. Los colores están representados por números en etiquetas blancas adjuntas a cada vértice.



La función puede llamar a `perform_experiment` de la siguiente manera.

```
perform_experiment([-1, -1, -1, -1])
```

En esta llamada, no se recolorea a ningún vértice, ya que todos los vértices mantienen su color original.

Considera al vértice 1 y al vértice 2. Ambos tienen el color 0 y el camino $1, 2$ es un camino monocromático. Como resultado, los vértices 1 y 2 están en el mismo componente monocromático.

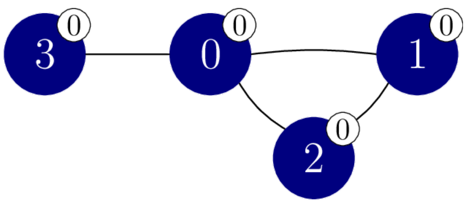
Considera al vértice 1 y el vértice 3. Aunque tienen el mismo color 0, están en componentes monocromáticos distintos ya que no existe un camino monocromático entre ellos.

En general, existen 3 componentes monocromáticos, con vértices $\{0\}$, $\{1, 2\}$, y $\{3\}$. Entonces, esta llamada devuelve 3.

Ahora la función puede llamar a `perform_experiment` de la siguiente manera.

```
perform_experiment([0, -1, -1, -1])
```

En esta llamada, únicamente el vértice 0 es recoloreado al color 0, que resulta en la coloración mostrada en la siguiente figura.

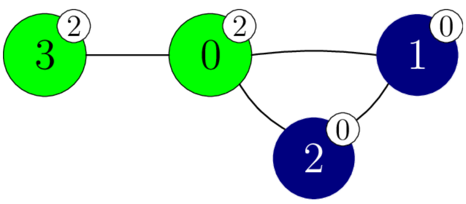


Esta llamada devuelve 1, ya que todos los vértices pertenecen al mismo componente monocromático. Podemos entonces deducir que los vértices 1, 2 y 3 tienen el color 0.

La función puede entonces llamar a `perform_experiment` como sigue.

```
perform_experiment([-1, -1, -1, 2])
```

En esta llamada, el vértice 3 es recoloreado al color 2, que resulta en la coloración mostrada en la siguiente figura.



Esta llamada devuelve 2, ya que hay 2 componentes monocromáticos, con vértices $\{0, 3\}$ y $\{1, 2\}$ respectivamente. Podemos deducir que el vértice 0 tiene color 2.

La función `find_colours` entonces devuelve el arreglo $[2, 0, 0, 0]$. Ya que con $C = [2, 0, 0, 0]$, se obtiene la puntuación completa.

Note que existen múltiples valores de retorno para los cuales se otorga el 50% de la puntuación. Por ejemplo, $[1, 2, 2, 2]$ o $[1, 2, 2, 3]$

Evaluador

Formato de entrada:

```
N  M
C[0]  C[1] ... C[N-1]
X[0]  Y[0]
X[1]  Y[1]
...
X[M-1]  Y[M-1]
```

Formato de salida:

```
L  Q
G[0]  G[1] ... G[L-1]
```

Aquí, L es el tamaño del arreglo G devuelto por `find_colours`, y Q es el número de llamadas a `perform_experiment`.