Sfinksin arvoitus

Suurella Sfinksillä on sinulle arvoitus. Sinulle annetaan verkko, jossa on N solmua. Solmut on numeroitu välillä 0: sta $N-1$ asti. Verkossa on M kaarta, jotka on numeroitu 0:sta $M-1$ asti. Jokainen kaari yhdistää kaksi eri solmua ja on kaksisuuntainen. Tarkemmin sanottuna jokaista j:tä kohden 0:sta $M-1$ asti (mukaan lukien) kaari j yhdistää solmut $X[j]$ ja $Y[j]$. Mitä tahansa solmuparia yhdistää enintään yksi kaari. Kahta solmua kutsutaan **viereisiksi** jos ne on yhdistetty kaarella.

Jonoa solmuja $v_0, v_1, \ldots, v_k$ $(k \geq 0)$ kutsutaan **poluksi** jos kaikki peräkkäiset solmut v_l ja v_{l+1} (jokaista l kohden siten, että $0 \leq l < k$) ovat viereisiä. Sanomme, että polku $v_0, v_1, \ldots, v_k$ **yhdistää** solmut v_0 ja v_k. Sinulle annetussa verkossa jokainen solmupari on yhdistetty jollakin polulla.

On olemassa $N+1$ väriä, numeroitu 0:sta N asti. Väri N on erityinen ja sitä kutsutaan **Sfinksin väriksi**. Jokaiselle solmulle on määritetty väri. Tarkemmin sanottuna solmulla i $(0 \leq i < N)$ on väri $C[i]$. Useilla solmuilla voi olla sama väri, ja voi olla värejä, joita ei ole määritetty mihinkään solmuun. Millään solmulla ei ole sfinksin väriä, eli $0 \leq C[i] < N$ $(0 \leq i < N)$.

Polkua $v_0, v_1, \ldots, v_k$ $(k \geq 0)$ kutsutaan **monokromaattiseksi**, jos sen kaikilla solmuilla on sama väri, eli $C[v_l] = C[v_{l+1}]$ (jokaiselle l:lle siten, että $0 \leq l < k$). Lisäksi sanomme, että solmut p ja q $(0 \leq p < N$, $0 \leq q < N)$ ovat samassa **monokromaattisessa komponentissa**, jos ja vain jos ne on yhdistetty monokromaattisella polulla.

Tiedät solmut ja kaaret, mutta et tiedä mikä väri kullakin solmulla on. Haluat selvittää solmujen värit, suorittamalla **uudelleenvärjäyskokeita**.

Uudelleenvärjäyskokeessa voit värjätä mielivaltaisesti useita solmuja. Tarkemmin ottaen uudelleenvärjäyskokeen suorittamiseen valitset ensin taulukon E jonka koko on N, missä jokaiselle i $(0 \leq i < N)$, $E[i]$ on välillä -1 ja N **mukaan lukien**. Sitten kunkin solmun i väristä tulee $S[i]$, jossa $S[i]$:n arvo on:

- $C[i]$, eli i :n alkuperäinen väri, jos $E[i] = -1$, tai
- $E[i]$, muuten.

Huomaa, että tämä tarkoittaa, että voit käyttää Sfinksin väriä uudelleenvärjäyksessä.

Lopulta Suuri Sfinksi ilmoittaa monokromaattisten komponenttien lukumäärän verkossa, kun olet asettanut kunkin solmun i väriksi $S[i]$ ($0 \leq i < N$). Uusi väritys on käytössä vain tässä uudelleenvärjäyskokeessa, joten **kaikkien solmujen värit palautuvat alkuperäisiksi kokeen päätyttyä**.

Sinun tehtäväsi on tunnistaa verkon solmujen värit suorittamalla korkeintaan $2\,750$ uudelleenvärjäyskoetta. Voit saada myös osittaiset pisteet jos määrität oikein jokaiselle vierekkäisten solmujen parille, onko niillä sama väri.

Toteutuksen yksityiskohdat

Sinun tulee toteuttaa seuraava funktio.

```
std::vector<int> find_colours(int N,
    std::vector<int> X, std::vector<int> Y)
```

- N: verkon solmujen lukumäärä.
- X, Y: M:n pituiset taulukot, jotka kuvaavat kaaria.
- Tämän funktion pitäisi palauttaa taulukko G, jonka pituus on N, jossa on verkon solmujen värit.
- Tätä funktiota kutsutaan täsmälleen kerran jokaisessa testitapauksessa.

Yllä oleva funktio voi tehdä kutsuja seuraavaan funktioon uudelleenvärjäyskokeiden suorittamiseen:

```
int perform_experiment(std::vector<int> E)
```

- E: N:n pituinen taulukko, joka määrittää kuinka solmut tulee värjätä.
- Tämä funktio palauttaa monokromaattisten komponenttien määrän solmujen uudelleenvärjäyksen jälkeen E mukaisesti.
- Tätä funktiota voidaan kutsua enintään $2\,750$ kertaa.

Testijärjestelmä **ei ole mukautuva**, eli solmujen värit päätetään ennen kuin `find_colours`:ia kutsutaan.

Rajat

- $2 \le N \le 250$
- $N - 1 \le M \le \frac{N \cdot (N-1)}{2}$
- $0 \le X[j] < Y[j] < N$ kaikilla j siten, että $0 \le j < M$.
- $X[j] \ne X[k]$ tai $Y[j] \ne Y[k]$ kaikilla j ja k siten, että $0 \le j < k < M$.
- Jokainen solmupari on yhdistetty jollakin polulla
- $0 \le C[i] < N$ kaikilla i siten, että $0 \le i < N$.

Osatehtävät

Osatehtävä	Pisteet	Lisäehdot
1	3	$N = 2$
2	7	$N \le 50$
3	33	Verkko on polku: $M = N - 1$ ja solmut j ja $j + 1$ ovat viereisiä ($0 \le j < M$).
4	21	Verkko on täydellinen: $M = \frac{N \cdot (N-1)}{2}$ ja mitkä tahansa kaksi solmua ovat viereiset.
5	36	Ei lisäehtoja.

Jokaisesta osatehtävästä voit saada osittaisen pistemäärän, jos ohjelma määrittää oikein jokaiselle vierekkäiselle pisteparille onko niillä sama väri.

Tarkemmin sanottuna saat osatehtävän koko pistemäärän, jos kaikissa testitapauksissa taulukko G jonka `find_colours` palauttaa on täsmälleen sama kuin taulukko C (eli $G[i] = C[i]$ kaikille i siten, että $0 \le i < N$). Muuten, saat 50% alatehtävän pisteistä jos seuraavat ehdot täyttyvät kaikissa testitapauksissaan:

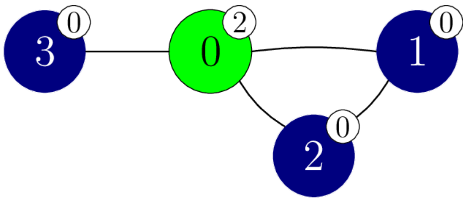
- $0 \le G[i] < N$ jokaiselle i lle siten, että $0 \le i < N$;
- Jokaiselle j lle siten, että $0 \le j < M$:
  - $G[X[j]] = G[Y[j]]$ jos ja vain jos $C[X[j]] = C[Y[j]]$.

Esimerkki

Tarkastellaan seuraavaa kutsua

```
find_colours(4, [0, 1, 0, 0], [1, 2, 2, 3])
```

Tässä esimerkissä oletetaan, että solmujen (piilotetut) värit annetaan $C = [2, 0, 0, 0]$. Tämä tapaus on esitetty seuraavassa kuvassa. Värit esitetään lisäksi numeroilla jokaiseen solmuun kiinnitetyissä valkoisissa tarroissa.



Funktio voi kutsua `perform_experiment` seuraavasti.

```
perform_experiment([-1, -1, -1, -1])
```

Tässä kutsussa yhtään solmua ei värjätä uudelleen, koska kaikki solmut säilyttävät alkuperäiset värinsä.

Tarkastele solmuja 1 ja 2. Molemmilla on väri 0 ja polku $1, 2$ on monokromaattinen polku. Tämän seurauksena solmut 1 ja 2 ovat samassa monokromaattisessa komponentissa.

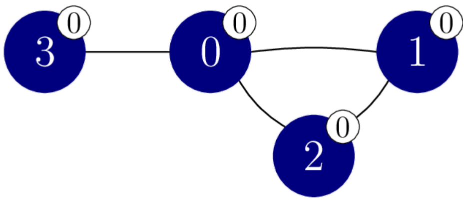
Tarkastele solmuja 1 ja 3. Vaikka molemmilla on väri 0, ne ovat eri monokromaattisissa komponenteissa, koska niitä ei yhdistä monokromaattinen polku.

Kaiken kaikkiaan monokromaattisia komponentteja on 3, joihin kuuluvat solmut $\{0\}$, $\{1, 2\}$ ja $\{3\}$. Siten tämä kutsu palauttaa 3.

Nyt funktio voi kutsua `perform_experiment` seuraavasti.

```
perform_experiment([0, -1, -1, -1])
```

Tässä kutsussa vain solmu 0 värjätään uudelleen väriksi 0, mikä johtaa seuraavassa kuvassa näkyvään väritykseen.

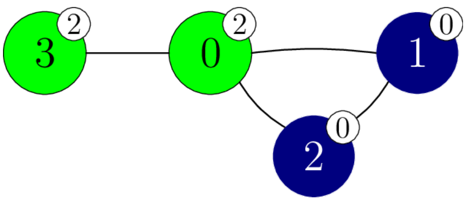


Tämä kutsu palauttaa 1, koska kaikki solmut kuuluvat samaan monokromaattiseen komponenttiin. Voimme nyt päätellä, että solmujen 1 , 2 ja 3 väri on 0 .

Funktio voi sitten kutsua `perform_experiment` seuraavasti.

```
perform_experiment([-1, -1, -1, 2])
```

Tässä kutsussa solmu 3 on värjätty värillä 2, mikä johtaa seuraavassa kuvassa näkyvään väritykseen.



Tämä kutsu palauttaa 2, koska monokromaattisia komponentteja on 2, joihin kuuluvat solmut $\{0, 3\}$ ja $\{1, 2\}$. Voimme päätellä, että solmussa 0 on väri 2 .

Funktio `find_colours` palauttaa sitten taulukon $[2, 0, 0, 0]$. Koska $C = [2, 0, 0, 0]$, annetaan täydet pisteet.

Huomaa, että on myös useita palautusarvoja, joille annettaisiin 50% pisteestä, esimerkiksi $[1, 2, 2, 2]$ tai $[1, 2, 2, 3]$.

Esimerkki testijärjestelmästä

Syötteen muoto:

```
N  M
C[0]  C[1] ... C[N-1]
X[0]  Y[0]
X[1]  Y[1]
...
X[M-1]  Y[M-1]
```

Tulosteen muoto:

```
L  Q
G[0]  G[1] ... G[L-1]
```

Tässä, L on taulukon G pituus, jonka palauttaa `find_colours`, ja Q on funktion `perform_experiment` kutsujen määrä.