академия
больших
данных

mail.ru
group

Базовая вычислительная геометрия

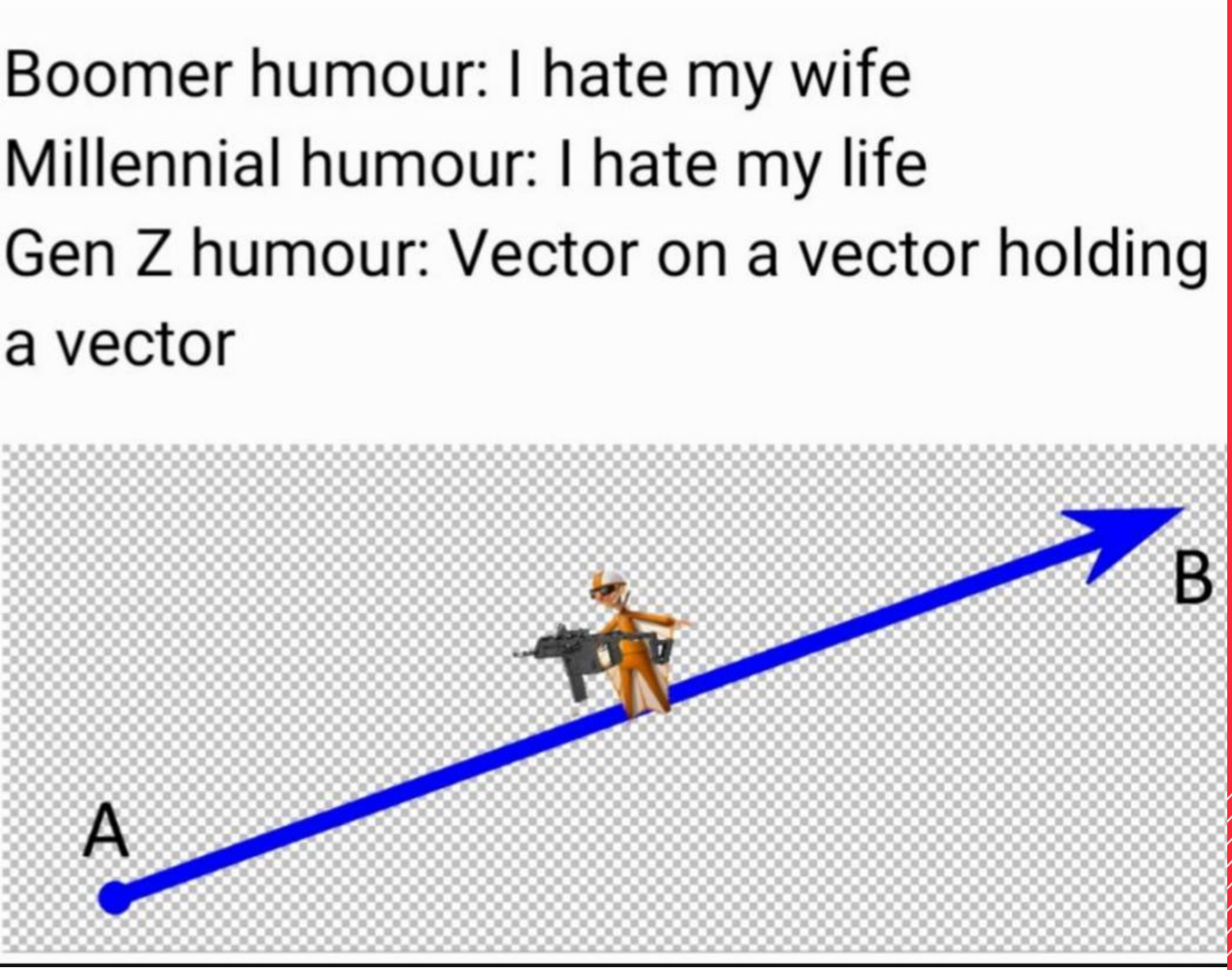
Шовкопляс Григорий

Введение в алгоритмы и структуры данных

Введение

Введение

- Работаем на плоскости (В 2D)
- Работаем в координатах (чтобы можно было хранить)
- Основные объекты
  - Точка (x, y)
  - Вектор
    - Задается двумя точками $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$
    - Координаты вектора: $x_1 - x_0, y_1 - y_0$



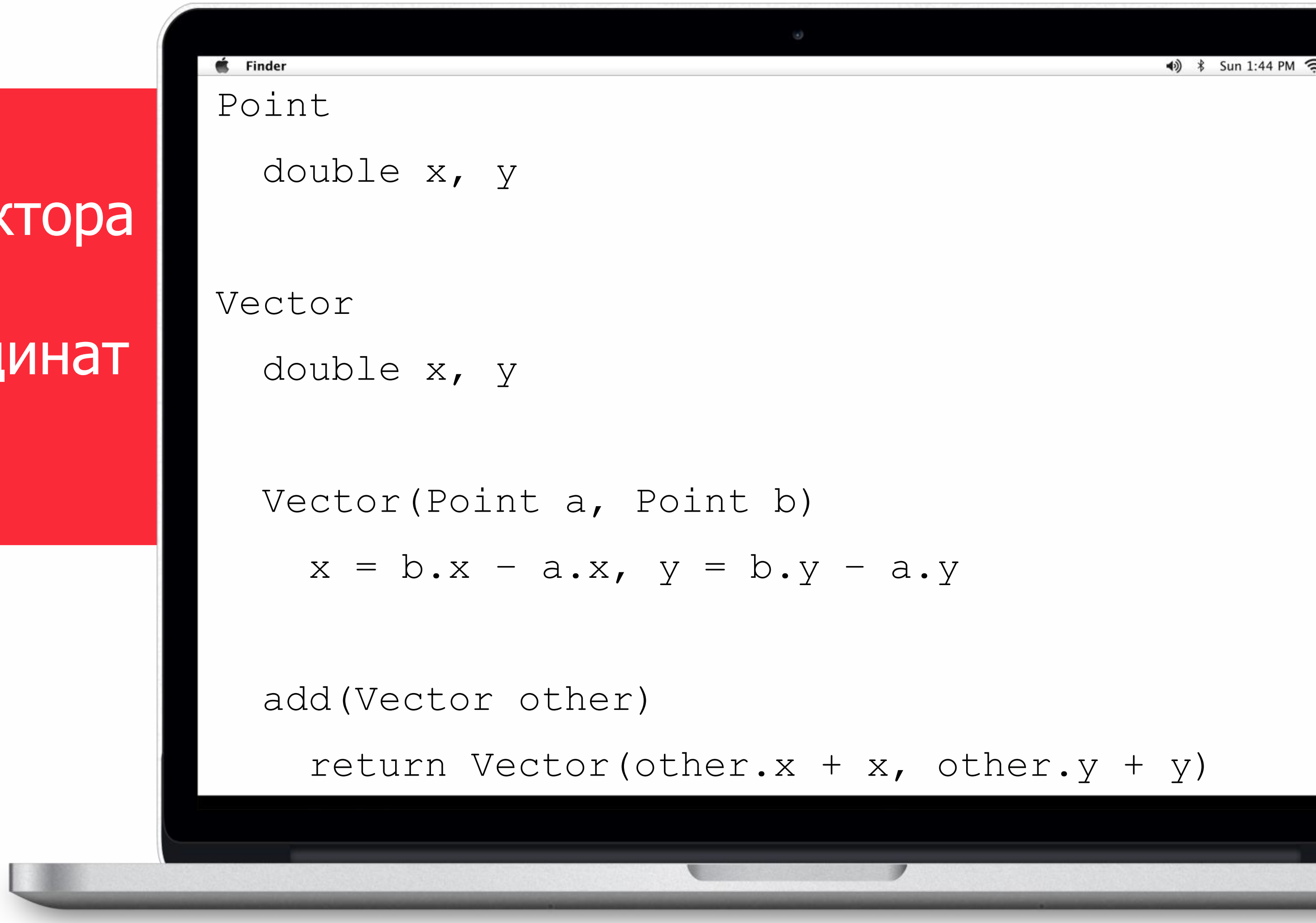
Что можно делать с векторами

Что можно делать с векторами

- Сложение, вычитание
- Умножение на скаляр
- Длина вектора $\sqrt{x^2 + y^2}$
- Полярный угол
- Скалярное произведение
- Векторное произведение

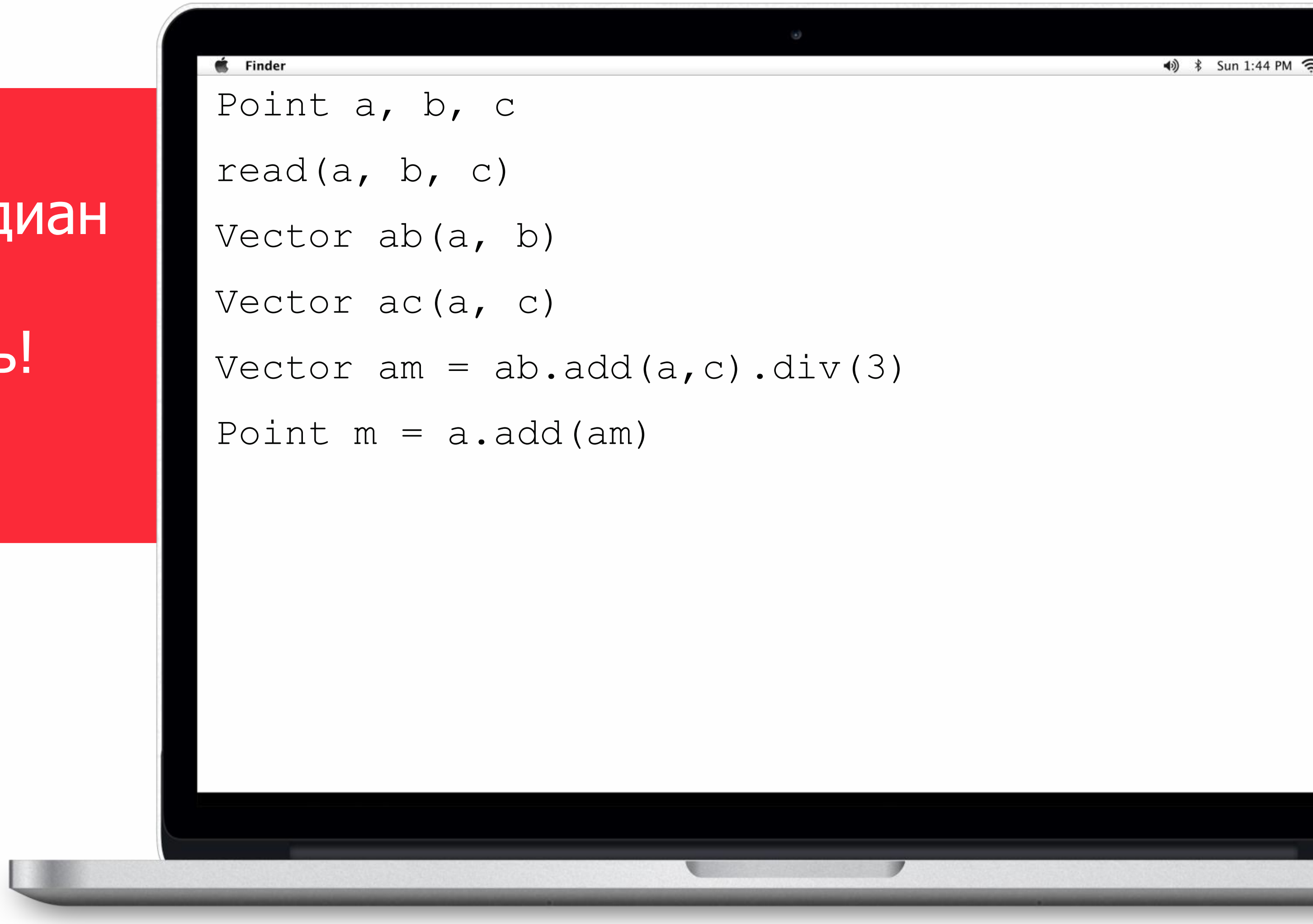
Как будем писать?

- Классы для точки и вектора
- Операции в методы
- Конструкторы от координат скипнул



Как будем писать?

- Точка пересечения медиан треугольника
- Это даже можно читать!



Полярный угол

- В радианах
- $360° = 2\pi \Rightarrow \alpha_r = \frac{\alpha_d \pi}{180}$
- План плохой: через arccos/arcsin
  - $\mathrm{acos}(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$
  - Положительный и отрицательный угол имеют одинаковый косинус
  - Что делать с вектором длины 0?
- Arctan тоже плохо (x = 0)

Полярный угол

- Есть ли решение?
- $\text{atan2}(y, x)$ есть в C++, Python…
- Делает ровно то, что нужно!
- $\text{atan2}(y, x) \in (-\pi; \pi]$

Скалярное произведение

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$ (dot product)
- $(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$
- Свойства:
  - $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$, $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2$
  - $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Rightarrow \varphi = \pm 90°$
  - $(\vec{a}, \vec{b}) > 0 \Rightarrow$ угол острый, $(\vec{a}, \vec{b}) < 0 \Rightarrow$ угол тупой
  - $(k\vec{a}, \vec{b}) = k(\vec{a}, \vec{b})$
  - $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$ так как $|\vec{a}| \cos\varphi$ — длина проекции

Скалярное произведение

- Не очень точно умеем считать углы
- Нужна бы формула в координатах!
- $(\vec{a}, \vec{b}) = (a_x \overrightarrow{e_1} + a_y \overrightarrow{e_2}, b_x \overrightarrow{e_1} + b_y \overrightarrow{e_2}) = \cdots$
- $= a_x b_x + a_y b_y$

Векторное произведение

- $\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$ (cross product, как бы вектор, но для нас число)
- $[\vec{a}, \vec{b}] = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$
- Свойства:
    - $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$, $[\vec{a}, \vec{a}] = 0$
    - $[\vec{a}, \vec{b}] = 0 \Rightarrow$ вектора на одной прямой
    - $[\vec{a}, \vec{b}] > 0 \Rightarrow$ полож. вращение, $[\vec{a}, \vec{b}] < 0 \Rightarrow$ отрицательное
    - $[k\vec{a}, \vec{b}] = k[\vec{a}, \vec{b}]$
    - $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$ так как $|\vec{a}| \sin\varphi$ – длина проекции

Векторное произведение

- Нужна бы формула в координатах!
- $[\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}] = 1, [\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_1}] = -1$
- $[\vec{a}, \vec{b}] = [a_x \overrightarrow{e_1} + a_y \overrightarrow{e_2}, b_x \overrightarrow{e_1} + b_y \overrightarrow{e_2}] = \cdots$
- $= a_x b_y - a_y b_x$

Как будем писать?

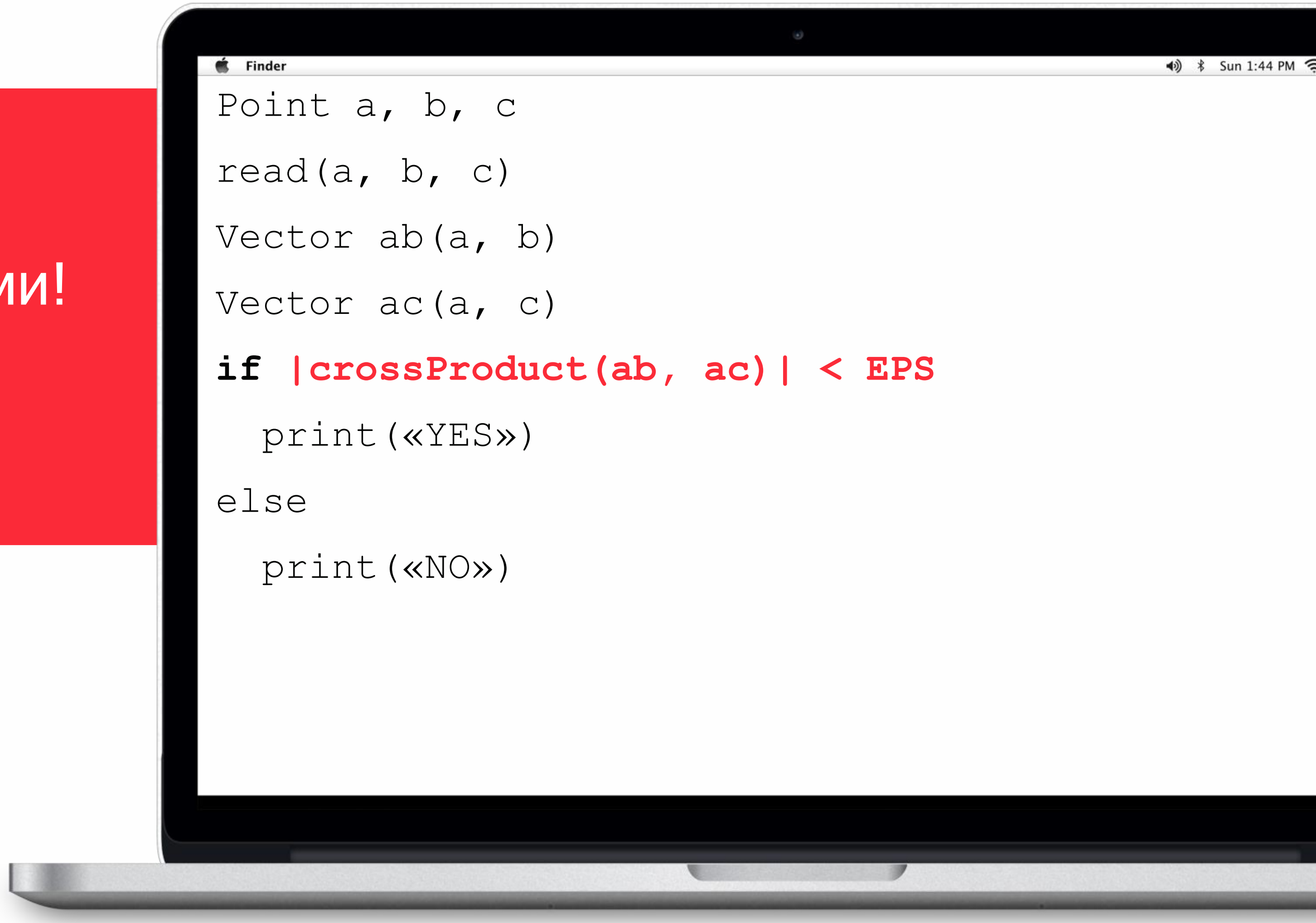
Как проверить, что точки A, B и C лежат на одной прямой?

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$$

```
Point a, b, c
read(a, b, c)
Vector ab(a, b)
Vector ac(a, c)
if crossProduct(ab, ac) == 0
  print(«YES»)
else
  print(«NO»)
```

Как будем писать?

Аккуратнее с вещественными числами!



Площадь треугольника

- Формула Герона (нет)
- $S_{ABC} = \frac{1}{2}|AB||AC| \sin \alpha = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|$
- Отсюда же получаем расстояние от точки до прямой, заданной двумя точками
- $S_{ABC} = \frac{1}{2}h|BC| \Rightarrow h = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right|}{|BC|}$
- Про прямые через уравнения мы сегодня обсуждать не будем☹

Еще применение

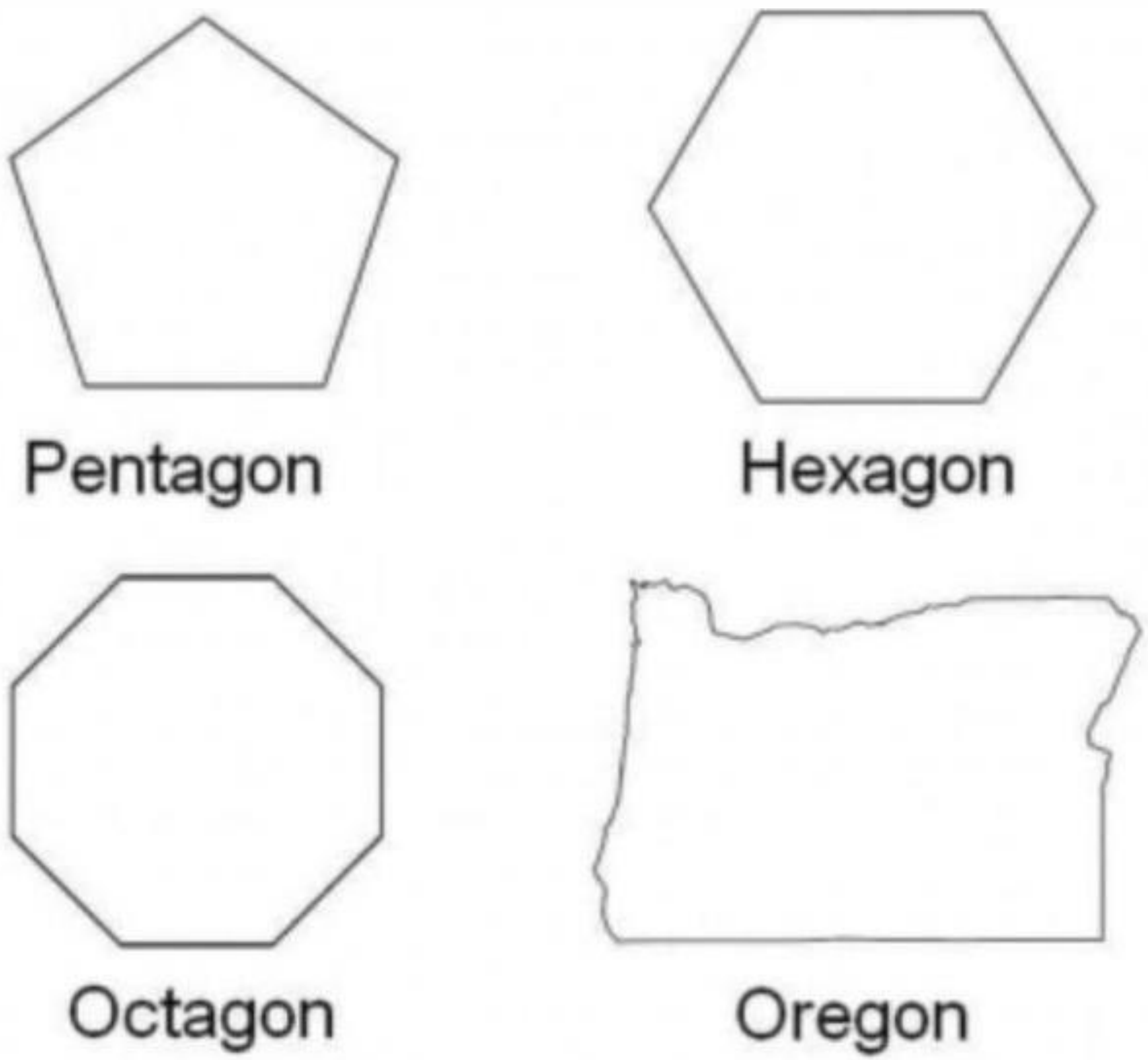
- Хотим найти расстояние от точки O до отрезка (A, B)
- Либо высота, либо расстояние до ближайшей точки?
- Как различить два случая?
- С помощью скалярного произведения посмотрим остроту угла!
- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right) > 0$ и $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}\right) > 0 \Rightarrow$ расстояние h
- Иначе $\min\left(|\overrightarrow{AO}|, |\overrightarrow{BO}|\right)$

Угол между векторами

- $a_x b_x + a_y b_y = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi = R\cos\varphi$
- $a_x b_y - a_y b_x = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi = R\sin\varphi$
- $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{[\vec{a},\vec{b}]}{(\vec{a},\vec{b})}$
- Тангенс нам не нужен, умеем считать полярный угол же!
- $\varphi = atan2([\vec{a},\vec{b}],(\vec{a},\vec{b}))$

Пересечение отрезков

- Много случаев, прямые пересекать больно
- Надо посмотреть на что края отрезка с разных сторон от другого
- $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ и $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]$ – разного знака!
- $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \times [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] \leq 0$
- Этого мало
- Нужно еще $[\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA}] \times [\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}] \leq 0$
- Еще бывает проблема, когда все точки лежат на одной прямой
- Все векторные произведения нулевые
- Проверим концы отрезков на принадлежность другому



Многоугольники

Многоугольник

- Замкнутая ломанная без самопересечений
- Бывают выпуклые и невыпуклые
- Можем хранить, как последовательность точек
- Упражнение: Как посчитать периметр?

Площадь многоугольника

- Пока что выпуклого
- Считать будем через площади треугольника
- Разобьем на треугольники $P_0 P_i P_{i+1}$
- Так как площадь ориентированная можно вместо P_0 взять любую точку
- Рассмотрим на примере треугольнгика
- На самом деле этот подход будет работать и для невыпуклого многоугольника

Как проверить выпуклость многоугольника?

- Рассмотрим векторные произведения $[\overrightarrow{P_iP_{i+1}}, \overrightarrow{P_{i+1}P_{i+2}}]$
- По знаку можем понять положительное вращение или отрицательное
- У выпуклого многоугольника все такие векторные произведения одного знака!
- Нулевые формально допустимы

Принадлежность точки многоугольнику

- Два метода, оба за $O(n)$
- Метод, который знают все
  - Пускаем луч, проверяем пересечения со сторонами
  - Очень грустно, если он попал в вершину
  - Разбираем кучу случаев, либо лайфхаков
- Простой
  - Просуммируем углы, под которыми точка смотрит на каждую сторону
  - Более долгий (ибо atan2)
- Принадлежность стороне нужно проверить отдельно

Выпуклая оболочка (convex hull)

Алгоритм Джарвиса

- Заворачивание подарка
- Возьмем точку p_0 множества с самой маленькой y-координатой (если таких несколько, берем самую правую из них). Добавляем ее в ответ.
- На каждом следующем шаге для последнего добавленного p_i ищем p_{i+1} среди всех недобавленных точек и p_0 с максимальным полярным углом относительно p_i
- Добавляем p_{i+1} в ответ. Если $p_{i+1} = p_0$, заканчиваем алгоритм
- Время работы $O(nk) = O(n^2)$

Алгоритм Грэхема

- Находим точку p_0 нашего множества с самой маленькой y-координатой и добавляем в ответ
- Сортируем все остальные точки по полярному углу относительно p_0
- Добавляем в ответ p_1 – самую первую из отсортированных точек.
- Берем следующую по счету точку t
- Пока t и две последних точки в текущей оболочке p_i и p_{i-1} образуют неправый поворот, удаляем из оболочки p_i
- Добавляем в оболочку t
- Повторяем пока не закончатся точки
- Работает за $O(nlogn)$

Алгоритм Эндрю

- Тоже самое, что Грэхем, но без сортировки по полярному углу
- Возьмем точку p_0 множества с самой маленькой x-координатой
- Возьмем точку p_1 множества с самой большой x-координатой
- Поделим множество на две части относительно прямой $p_0 p_1$
- Построим полуоболочки, и объединим
- Фишка в том, что сортировать после разделения можно по координате, а не по полярному углу

Все!