การศึกษาอัตราการฉีดวัคซีนในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการป้องกันโรคโควิด 19 กรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ต
A mathematical model of vaccination rates for COVID-19 prevention, a case study of Phuket Province

ปริญญรัตน์ ลิลาพันธิสิทธิ[1] อนุรักษ์ วีระประเสริฐสกุล[2] อนุวัตร จิรวัฒนพาณิช[3]
E-mail: s6212229102@pkru.ac.th
โทรศัพท์: **09-8680-3825**

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาและวิเคราะห์เสถียรภาพของผลการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคโควิด-19 ในจังหวัดภูเก็ต วิเคราะห์ตัวแบบโดยใช้วิธีมาตรฐาน ศึกษาจุดสมดุล ศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุล หาคำตอบเชิงวิเคราะห์ ศึกษาผลการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และหาคำตอบเชิงตัวเลข ผลวิจัยพบว่าจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่มีโรคเป็น Local Asymptotically Stable และมีค่าระดับการติดเชื้อ $R_0 = \frac{\nu\mu N\varepsilon}{(\varepsilon+\theta)(\varepsilon+\omega)(\sigma+\omega+\beta)}$ และอัตราฉีดวัคซีนเป็นปัจจัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการฉีดวัคซีนป้องกันเป็นจำนวนมาก จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลง

คำสำคัญ: ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์, โรคโควิด-19, วัคซีนป้องกัน

Abstract

The purpose of this research was to develop and analyze the stability of mathematical model for COVID-19 prevention through vaccination in Phuket. The model was analyzed using standard methods for study the balance point, the stability of the equilibrium point, analytical solutions, study effect of vaccination on the mathematical model and find a numerical solutions. The results showed that the equilibrium point without disease and the equilibrium point with disease were local asymptotically stable and the level of infection was $R_0 = \frac{\nu\mu N\varepsilon}{(\varepsilon+\theta)(\varepsilon+\omega)(\sigma+\omega+\beta)}$ and vaccination rate are factors affecting the mathematical model. If populations at high risk of infection are vaccinated in large numbers, the spread of the disease will decrease.

Keywords: mathematical model, COVID-19, vaccination

[1] **นักศึกษาระดับปริญญาตรี, หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต, สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์, มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต**

[2] **สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์, คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต**

[3] **สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์, คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต**

[4] **สาขาคณิตศาสตร์, คณะครุศาสตร์, มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต**

บทนำ

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นวิธีการหนึ่งของการอธิบายสถานการณ์ในชีวิตจริงในแบบภาษาคณิตศาสตร์ โดยการเปลี่ยนสถานการณ์จริงให้อยู่ในรูปของตัวแปรและสมการ โดยจะให้ความสำคัญกับตัวแปรที่สำคัญ แบบจำลองมีจุดมุ่งหมายเพื่อจะจับองค์ประกอบที่สำคัญของเหตุกาณ์หนึ่งๆ เราสามารถตรวจสอบความถูกต้องของกลไกคณิตศาสตร์หนึ่งที่ถูกสร้างขึ้นมาได้เพื่อจะตรวจสอบว่าแบบจำลองนั้นสะท้อนสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือไม่ (แคทลียา ดวงเกตุ,2556)

จากการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แสดงให้เห็นถึงบทบาทและประโยชน์ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีส่วนช่วยในการแก้ไขวิกฤตการณ์ที่กำลังจะเกิดขึ้นจากโรคภัยต่างๆโดยจำลองประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ตัวเชื้อโรค ตัวพาหนะนำโรค และผู้ติดเชื้อโดยแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ เพื่ออธิบายลักษณะของการระบาดแลการดำเนินของโรคโดยผู้ที่วิจัยไม่จำเป็นต้องไปศึกษากับมนุษย์โดยตรงซึ่งอาจเกิดอันตรายต่อชีวิตของผู้วิจัยและผู้ป่วยได้อีก ทั้งยังช่วยลดงบประมาณสำหรับการเสริมมาตรการการรักษาและการป้องกันโรคตามความต้องการ (ธีรวัฒน์ นาคะบุตร,2546)

ไวรัสโคโรนา 2019 หรือโรคโควิด-19 (Coronavirus Disease 2019(COVID-19)) จัดอยู่ในกลุ่มเชื้อไวรัสโคโรนา เริ่มต้นจากเมืองอู่ฮั่น เมืองหลวงของมณฑลหูเป่ย์ ประเทศจีน เป็นไวรัสที่อันตรายทำให้เสี่ยงถึงชีวิต จะเกิดขึ้นเมื่อระบบภูมิต้านทานโรคของเราไม่แข็งแรง หรือเชื้อไวรัสเข้าไปทำลายการทำงานของปอดโดยเชื้อไวรัสจะแพร่กระจายลุกลามอย่างรวดเร็วและเพิ่มมากขึ้นจนทำให้ปอดเกิดการเสียหายและสูญเสียการทำงานหากไม่ได้รับการรักษาอย่างทันท่วงทีจะทำให้ผู้ป่วยเสียชีวิตได้อย่างรวดเร็ว (กรมควบคุมโรค)

จากเหตุข้างต้นผู้วิจัยได้ตระหนักและเห็นประโยชน์ที่ได้รับจึงสนใจศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของโรคโควิด 19 โดยการฉีดวัคซีน ซึ่งผู้วิจัยได้เพิ่มตัวแปรอัตราการฉีดวัคซีนเป็นปัจจัยสำหรับการศึกษาในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับป้องกันและควบคุมโรคโควิด 19 ที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้น

วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1.เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับควบคุมการแพร่ระบาดของโรคโควิด-19 โดยการฉีดวัคซีน

2. เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับควบคุมการแพร่ระบาดของไวรัส โดยการฉีดวัคซีน

วิธีดำเนินการวิจัย

การศึกษาวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาผลการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคโควิด-19 ในจังหวัดภูเก็ต ซึ่งมีวิธีการวิจัย 3 ขั้นตอนดังนี้

1. การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้แบ่งประชากรออกเป็น 4 กลุ่ม คือ กลุ่มคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มคนที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ กลุ่มคนที่ติดเชื้อแสดงอาการ และกลุ่มคนที่หายจากโรค ผู้วิจัยได้กำหนดตัวแปรดังนี้ $S(t)$ จำนวนคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลา t ใดๆ , $E(t)$ จำนวนคนที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ ณ เวลา t ใดๆ , $I(t)$ จำนวนคนที่ติดเชื้อ ณ เวลา t ใดๆ , $R(t)$ จำนวนคนที่หายจากโรค ณ เวลา t ใดๆ โดยที่ $S(t)>0, E(t)>0, I(t)>0$ และ $R(t)>0$ เนื่องจากจำนวนประชากรมีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับเวลา คือ $N(t)=S(t)+E(t)+I(t)+R(t)$

2.การตรวจสอบตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การตรวจสอบตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การควบคุมการแพร่ระบาดของไวรัสโดยการฉีดวัคซีน เป็นการตรวจสอบความถูกต้องของตัวแบบโดยผู้เชี่ยวชาญที่เกี่ยวข้อง

3. การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ การวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นการวิเคราะห์ตามวิธีการมาตรฐาน (Standard method) โดยศึกษาจุดสมดุลและศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุลเพื่อหาเงื่อนไขของพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของจุดสมดุล หาค่าระดับการติดเชื้อโดยใช้วิธี Next Generations Method หาคำตอบเชิงวิเคราะห์และหาคำตอบเชิงตัวเลข โดยวิธี Numerical Analysis ดังวิธีการต่อไปนี้

3.1การวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน

การวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐานเป็นการศึกษาจุดสมดุล ค่าระดับการติดเชื้อ และเสถียรภาพของระบบ ดังนี้

3.1.1 การหาขอบเขตของค่าคงที่ เป็นการหาขอบเขตของค่าคงที่และช่วงคำตอบของตัวแปรต่างๆโดยการใช้เทคนิคการอินทิเกรตช่วยในการแสดงหาคำตอบ $S(t), E(t), I(t)$ และ $R(t)$ ซึ่งมีขอบเขตของค่าคงที่ อยู่ในจำนวนจริงบวก

3.1.2 จุดสมดุล การหาจุดสมดุลดำเนินการโดยจัดสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้เท่ากับศูนย์ คือ $\frac{dS}{dt}=0, \frac{dE}{dt}=0, \frac{dI}{dt}=0, \frac{dR}{dt}=0$ จะได้ค่าจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค (Disease Free Equilibrium Point : E_0) ในกรณีที่ไม่มีการติดเชื้อโรค โดยกำหนดให้ $E_0=(S,E,I,R)=E_0\left(\frac{\mu N}{\omega+\theta},0,0,\frac{\theta\mu N}{\omega(\omega+\theta)}\right)$และจะได้ค่าจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของ เชื้อโรค (Disease Free Equilibrium Point : E_1) ในกรณีที่มีการระบาดของเชื้อโรค โดยกำหนดให้ $I\neq 0$ จะได้ $E_1=\left(S^*,E^*,I^*,R^*\right)$

3.1.3 การหาค่าระดับการติดเชื้อ ค่าระดับการติดเชื้อเป็นค่าเฉลี่ยที่ผู้ป่วยหนึ่งคนสามารถทำให้คนกลุ่มเสี่ยงป่วยเป็นจำนวนกี่คนในช่วงเวลาที่เขายังป่วยอยู่ โดยใช้วิธี Next Generation Method โดยจัดการสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นในรูป $\frac{\partial X}{\partial t}=F(X)-V(X)$ เพื่อหาค่า R_0 จากเมตริกซ์ $P\left(Fv^{-1}\right)$ ซึ่ง $F(X)$ คือ เมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น, $V(X)$ คือ เมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่ง ได้จากอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

$$X=\begin{bmatrix}S\\E\\I\\R\end{bmatrix}, F=\left[\frac{\partial F_i(E_0)}{\partial X_i}\right] \text{ และ } V=\left[\frac{\partial V_i\left(E_0\right)}{\partial X_i}\right]$$ โดยพิจารณา R_0 ดังนี้

1. $R_0>1$ แสดงว่า โรคมีการระบาดเพิ่มขึ้น (Epidemic)
2. $R_0=1$ แสดงว่า โรคเริ่มเสถียร (Endemic)
3. $R_0<1$ แสดงว่า โรคไม่มีการแพร่ระบาด

3.2 การวิเคราะห์เสถียรภาพ เป็นการหาค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Value) เพื่ออธิบายคำตอบของสมการเกี่ยวกับค่าความสมดุลสำหรับการตรวจสอบว่าเป็น Local Asymptotically Stable มี 2 กรณี ดังนี้

1. Local Asymptotically Stable ณ จุด E_0 ของจุดสมดุลที่ไม่มีโรค โดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ ณ สภาวะที่ไม่มีโรค $\left(E_0\right)$ ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J_0-\lambda I)=0$ ซึ่ง J_0 คือ จาโคเบียนเมทริกซ์ ณ จุด E_0 และ I คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ โดยมีข้อกำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงจะเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ซึ่งจะส่งผลให้ค่า $R_0<1$

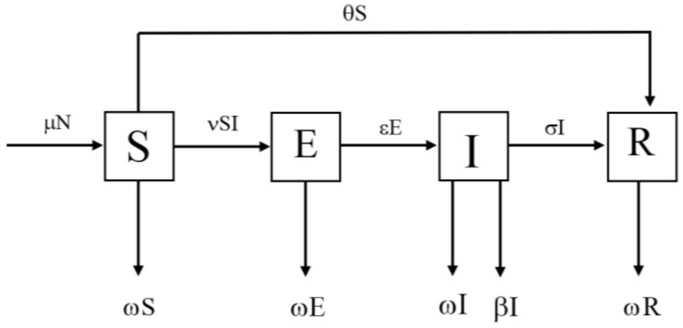
2. Local Asymptotically Stable ณ จุด E_1 ของจุดสมดุลที่มีโรค โดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ ณ สภาวะที่มีการแพร่ระบาดของโรค $\left(E_1\right)$ ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J_1-\lambda I)=0$ ซึ่ง J_1 คือ จาโคเบียนเมทริกซ์ ณ จุด E_1 และ I คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ โดยมีข้อกำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงจะเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ซึ่งจะส่งผลให้ค่า $R_0>1$

3 .3 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเป็นการพิจารณาหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่ทำให้จุดสมดุลที่ไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point: E_0) และจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของโรค (Endemic Equilibrium Point: E_1) ที่ทำให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นเป็น Local Asymptotically Stable เพื่อนำค่าพารามิเตอร์ไปคำนวณหาคำตอบเชิงตัวเลขโดยจำลองแบบด้วยโปรแกรม MATLAB (สุกัลยา ศรีสุริฉัน,2559)

ผลการวิจัย

ตอนที่ 1 ผลการพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์จากการเพิ่มตัวแปรการฉีดวัคซีนเพื่อป้องกันการระบาดของโรคโควิด-19

จากตัวแปรข้างต้นผู้วิจัยได้สร้างแผนภาพผลการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคโควิด-19



ภาพที่ 1 แผนภาพความสัมพันธ์และองค์ประกอบผลของการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคโควิด-19

จากภาพที่ 1 สามารถเปลี่ยนตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น

$$\frac{dS}{dt} = \mu N - \nu SI - \omega S - \theta S \tag{1}$$

$$\frac{dE}{dt} = \nu SI - \varepsilon E - \omega E \tag{2}$$

$$\frac{dI}{dt} = \varepsilon E - \sigma I - \omega I - \beta I \tag{3}$$

$$\frac{dR}{dt} = \sigma I + \theta S - \omega R \tag{4}$$

โดยมีเงื่อนไขประชากรมนุษย์จำนวนคงที่ $N = S + E + I + R$ เมื่อกำหนดสัญลักษณ์พารามิเตอร์ เป็นอัตราการเกิดของประชากร, ω เป็นอัตราการเสียชีวิตของประชากร, ν เป็นอัตราการสัมผัสเชื้อ, ε เป็นอัตราการฟักตัวของเชื้อ, σ เป็นอัตราภูมิคุ้มกัน, β เป็นอัตราการตายที่เกิดจากโรคโควิด-19 และ N เป็นจำนวนประชากรทั้งหมด เนื่องจากค่าอนุพันธ์ของค่าคงที่จะมีค่าเป็นศูนย์ และค่าจำนวนของประชากรแต่ละกลุ่มจะ มีค่าไม่เกิน N โดยดำเนินการดังนี้

1. การวิเคราะห์ตามแบบมาตรฐาน

จาก Rate of change = Rate inflow-Rate outflow

จะได้ $$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt}$$

$$= \mu N - \nu SI - \omega s - \theta S + \nu SI - \varepsilon E - \omega E + \varepsilon E - \sigma I - \omega I - \beta I + \sigma I + \theta S - \omega R$$

ดังนั้น $$\frac{dN}{dt} = \mu N - \omega S - \omega E - \omega I - \beta I - \omega R$$

เมื่อ $S = N, E = 0, I = 0, R = 0$

จะได้ $$\frac{dN}{dt} = \mu N - \omega N - \omega(0) - \beta(0) - \omega(0)$$

$$\frac{dN}{dt} = \mu N - \omega N$$

$$\frac{dN}{dt}=(\mu-\omega)N$$

แสดงว่า N เป็นค่าคงที่ เมื่อ $\mu=\omega$

1.1 กาหาจุดสมดุล โดยจัดสมการอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้เท่ากับศูนย์ดังนี้ $\frac{dS}{dt}=0,\frac{dE}{dt}=0,\frac{dI}{dt}=0,\frac{dR}{dt}=0$ จะได้

$$s^*=\frac{\mu N}{\nu I^*+\omega+\theta} \tag{5}$$

$$E^*=\frac{\nu\mu NI(\varepsilon+\omega)}{VI+\omega+\theta} \tag{6}$$

$$I^*=\frac{\varepsilon\nu\mu N(\varepsilon+\omega)(\sigma+\omega+\beta)-\omega+\theta}{\nu} \tag{7}$$

$$R^*=\frac{\sigma I^*+\theta\mu N\omega}{VI^*+\omega+\theta} \tag{8}$$

1.1.1การหาจุดสมดุลที่ไม่มีโรค (E_0) จากสมการ (1), (2), (3) และ (4) จะได้ค่าจุดสมดุลที่ไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point : E_0) ในกรณีที่ไม่มีการติดเชื้อ โดยกำหนดให้ $I=0, S=N$ และ $R=0$

$E_0=(S,E,I,R)=E_0\left(\frac{\mu N}{\omega+\theta},0,0\,\frac{\theta\mu N}{\omega(\omega+\theta)}\right)$ เสถียรของระบบ (stability of Systems) ที่จุด E_0 โดยดำเนินการหาสมการลักษณะเฉพาะ $\det(J_0-\lambda I)=0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด

$$J_0=\begin{bmatrix}-\omega-\theta & 0 & -\nu S & 0\\ \nu I & -\varepsilon-\omega & \nu S & 0\\ 0 & \varepsilon & -\sigma-\omega-\beta & 0\\ \theta & 0 & \sigma & -\omega\end{bmatrix}, J_0-\lambda I=\begin{bmatrix}-\omega-\theta & 0 & -\nu S & 0\\ \nu I & -\varepsilon-\omega & \nu S & 0\\ 0 & \varepsilon & -\sigma-\omega-\beta & 0\\ \theta & 0 & \sigma & -\omega\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$\det(J_0-\lambda I)=\begin{bmatrix}-\omega-\theta-\lambda & 0 & -\nu S & 0\\ \nu I & -\varepsilon-\omega-\lambda & \nu S & 0\\ 0 & \varepsilon & -\sigma-\omega-\beta-\lambda & 0\\ \theta & 0 & \sigma & -\omega-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det(J_0-\lambda I)=(-\omega-\lambda)(-\theta-\lambda-\omega)\left(\beta\varepsilon+\beta\lambda+\varepsilon\lambda+\lambda^2-\varepsilon\nu+\varepsilon\sigma+\lambda\sigma+\beta\omega+\varepsilon\omega+2\lambda\omega+\sigma\omega+\omega^2\right)$$

จะได้ $(-\omega-\lambda)=0$ หรือ $(-\theta-\lambda-\omega)=0$ หรือ $\left(\beta\varepsilon+\beta\lambda+\varepsilon\lambda+\lambda^2-\varepsilon\nu+\varepsilon\sigma+\lambda\sigma+\beta\omega+\varepsilon\omega+2\lambda\omega+\sigma\omega+\omega^2\right)=0$

จะได้ค่าสมการลักษณะเฉพาะดังนี้

ดังนั้น $\lambda_1=-\omega, \lambda_2=(-\theta-\omega), \lambda_3=\frac{1}{2}\left(-\beta-\varepsilon-\sigma-\sqrt{\beta^2-2\beta\varepsilon+\varepsilon^2+4\varepsilon\nu+2\beta\sigma-2\varepsilon\sigma+\sigma^2}-2\omega\right)$,

$\lambda_4=\frac{1}{2}\left(-\beta-\varepsilon-\sigma+\sqrt{\beta^2-2\beta\varepsilon+\varepsilon^2+4\varepsilon\nu+2\beta\sigma-2\varepsilon\sigma+\sigma^2}-2\omega\right)$

1.1.2 การหาจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของเชื้อโรค (E_1)

จากสมการ (1),(2),(3) และ (4) จะได้ค่าจุดสมดุลที่เกิดจากการแพร่ระบาดของเชื้อโรค (Endemic Equilibrium Point : E_1) ในกรณีที่มีการแพร่ระบาดของเชื้อโรค โดยกำหนดให้ $I>0$ และ $S=N$

ซึ่งได้จาก $E_1=\left(S^*,E^*,I^*,R^*\right)=\left(\frac{\mu N}{\nu I^*+\omega+\theta},\frac{\nu\mu NI(\varepsilon+\omega)}{VI+\omega+\theta},\frac{\varepsilon\nu\mu N(\varepsilon+\omega)(\sigma+\omega+\beta)-\omega+\theta}{\nu},\frac{\sigma I^*+\theta\mu N\omega}{VI^*+\omega+\theta}\right)$ ดังนั้น สมการลักษณะเฉพาะที่จุด $E_1=\left(S^*,E^*,I^*,R^*\right)$ โดยให้ $\det(J_1-\lambda I_3)=0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I_3 เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 ดังนี้

$$J_1=\begin{bmatrix}-\nu I^{*}-\omega-\theta & 0 & -\nu S^{*} & 0\\ \nu I^{*} & -\varepsilon-\omega & \nu S & 0\\ 0 & \varepsilon & -\sigma-\omega-\beta & 0\\ \theta & 0 & \sigma & -\omega\end{bmatrix}, J_1-\lambda I=\begin{bmatrix}-\nu I^{*}-\omega-\theta-\lambda & 0 & -\nu S^{*} & 0\\ \nu I^{*} & -\varepsilon-\omega-\lambda & \nu S & 0\\ 0 & \varepsilon & -\sigma-\omega-\beta-\lambda & 0\\ \theta & 0 & \sigma & -\omega-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det\left(J_1-\lambda I\right)=\left(-\omega-\lambda\right)\left[\left[\left(-\nu I^{*}-\omega-\theta-\lambda\right)\left(-\varepsilon-\omega-\lambda\right)\left(-\sigma-\omega-\beta-\lambda\right)+\left(-\nu S^{*}\right)\left(\nu I^{*}\right)\left(\varepsilon\right)\right]\right]-\left[\varepsilon\nu S\left(-\nu I^{*}-\omega-\theta\lambda\right)\right]$$

จัดในรูปของ $\lambda^3+\lambda^2+\lambda+C=0$ เมื่อ

$a_1=\left(-\beta-\varepsilon-\theta-I\nu-\sigma-3\omega\right)$

$a_2=\left(-\beta\varepsilon-\beta\theta-\varepsilon\theta-I\beta\nu-I\varepsilon\nu+S\varepsilon\nu-\varepsilon\sigma-\theta\sigma-I\nu\sigma-2\beta\omega-2\varepsilon\omega-2I\nu\varepsilon-2\sigma\omega-3\omega^2\right)$

$a_3=-\left(-\beta\varepsilon\theta-I\beta\varepsilon\nu+S\varepsilon\theta\nu-\varepsilon\theta\sigma-I\varepsilon\nu\sigma-\beta\varepsilon\omega-\beta\theta\omega-\varepsilon\theta\omega-I\beta\nu\omega-I\varepsilon\nu\omega+S\varepsilon\nu\omega-\varepsilon\sigma\omega-\theta\sigma\omega-I\nu\sigma\omega-\beta\omega^2-\varepsilon\omega^2-\theta\omega^2-I\nu\omega^2-\sigma\omega^2-\omega^3\right)$

1.2 การหาค่าระดับการติดเชื้อ $\left(R_0\right)$ เป็นการหารัศมีที่โดดเด่นของการแพร่ระบาดของโรค โดยใช้วิธีการ Next Generation Method โดยจะได้สมการ (1) - (4) จะได้เมทริกซ์ในรูป $\frac{\partial X}{\partial t}=F(X)-V(X)$ เพื่อหาค่า spectral radius $P\left(FV^{-1}\right)$ ซึ่ง $F(X)$ และ $V(X)$ ได้จากอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

$$X=\begin{bmatrix}S\\E\\I\\R\end{bmatrix}, F=\left[\frac{\partial V_i\left(E_0\right)}{\partial X_i}\right] \text{ และ } V=\left[\frac{\partial V_i\left(E_0\right)}{\partial X_i}\right]$$

เมื่อ $F(X)$ คือเมทริกซ์ของผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น และ $V(X)$ คือเมทริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่งโดยพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ $\left(R_0\right)$ โดยพิจารณา ดังนี้

$$F(X)=\begin{bmatrix}0\\ \nu SI\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, V(X)=\begin{bmatrix}-\mu N+\nu SI+\omega S+\theta S\\ \varepsilon E+\omega E\\ -\varepsilon E+\sigma I+\omega I+\beta I\\ -\sigma I+\omega R-\theta S\end{bmatrix}$$

ให้ $E_0=\left(S,E,I,R\right)=\left(N,0,0,N\right)$

จะได้

$$F\left(E_0\right)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\nu\mu N}{(\omega+\theta)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, V\left(E_0\right)=\begin{bmatrix}\omega+\theta & 0 & \frac{\nu\mu N}{\omega+\theta} & 0\\ 0 & \varepsilon+\omega & 0 & 0\\ 0 & -\varepsilon & \sigma+\omega+\beta & 0\\ -\theta & 0 & -\sigma & \omega\end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$FV^{-1}(E_0)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{\nu\mu N}{\omega+\theta} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{(\omega+\theta)} & \frac{-\varepsilon\nu\mu N}{(\omega+\theta)^2(\varepsilon+\omega)(\sigma+\omega+\beta)} & \frac{-\nu\mu N}{(\omega+\theta)^2(\sigma+\omega+\beta)} & 0\\ 0 & \frac{1}{(\varepsilon+\omega)} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\varepsilon}{(\varepsilon+\omega)(\sigma+\omega+\beta)} & \frac{1}{(\sigma+\omega+\beta)} & 0\\ \frac{\theta}{\omega(\omega+\theta)} & \frac{\varepsilon\sigma}{\omega(\varepsilon+\omega)(\sigma+\omega+\beta)}-\frac{-\theta\varepsilon\nu\mu N}{(\omega+\theta)^2(\varepsilon+\omega)(\sigma+\omega+\beta)} & \frac{\sigma}{\omega(\sigma+\omega+\beta)}-\frac{-\theta\nu\mu N}{(\omega+\theta)^2(\sigma+\omega+\beta)} & \frac{1}{\omega}\end{bmatrix}$$

จะได้

$$FV^{-1}(E_0)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\nu\mu N\varepsilon}{(\omega+\theta)(\varepsilon+\omega)(\sigma+\omega+\beta)} & \dfrac{\nu\mu N}{(\omega+\theta)(\sigma+\omega+\beta)} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

จาก

$$\det\left[FV^{-1}(E_0)\right]=\begin{bmatrix}0-\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{\nu\mu N\varepsilon}{(\omega+\theta)(\varepsilon+\omega)(\sigma+\omega+\beta)}-\lambda & \dfrac{\nu\mu N}{(\omega+\theta)(\sigma+\omega+\beta)} & 0\\ 0 & 0 & 0-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0-\lambda\end{bmatrix}$$

จะได้ $\det\left[FV^{-1}(E_0)-\lambda I\right]=(-\lambda)(-\lambda)\left(\dfrac{\nu\mu N\varepsilon}{(\varepsilon+\theta)(\varepsilon+\omega)(\sigma+\omega+\beta)}-\lambda\right)$

ดังนั้น $\lambda_1=0,\lambda_2=0,\lambda_3=0,\lambda_4=\dfrac{\nu\mu N\varepsilon}{(\varepsilon+\theta)(\varepsilon+\omega)(\sigma+\omega+\beta)}$

จากบทนิยาม $p\left(Fv^{-1}(E_0)\right)=\max\left\{0,0,0,\dfrac{\nu\mu N\varepsilon}{(\varepsilon+\theta)(\varepsilon+\omega)(\sigma+\omega+\beta)}\right\}$

ดังนั้น $p\left(Fv^{-1}(E_0)\right)=\dfrac{\nu\mu N\varepsilon}{(\varepsilon+\theta)(\varepsilon+\omega)(\sigma+\omega+\beta)}$ **จะได้ค่าระดับการติดเชื้อ คือ** $R_0=\dfrac{\nu\mu N\varepsilon}{(\varepsilon+\theta)(\varepsilon+\omega)(\sigma+\omega+\beta)}$

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขผลของการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคโควิด-19 กรณีศึกษาในจังหวัดภูเก็ต

การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้วิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยนำค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการฉีดวัคซีนป้องกันโรคโควิด-19 ซึ่งมีค่าต่างๆ ดังนี้

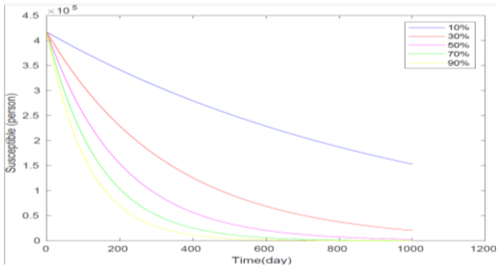
ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการฉีดวัคซีนป้องกันโรคโควิด-19

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
จำนวนประชากรมนุษย์ทั้งหมด	N	417,161	คน
อัตราการเกิดของประชากร	μ	2.17058×10^{-5}	คนต่อวัน
อัตราการเสียชีวิตของประชากร	ω	1.12962×10^{-5}	คนต่อวัน
อัตราการฉีดวัคซีน	θ	2.34843×10^{-3}	คนต่อวัน
อัตราการสัมผัสเชื้อ	ν	1.22964×10^{-4}	คนต่อวัน
อัตราการฟักตัวของเชื้อ	ε	1.369863×10^{-2}	คนต่อวัน
อัตราการหายจากธรรมชาติ	σ	1.369863×10^{-4}	คนต่อวัน
อัตราการตายจากโรคโควิด-19	β	9.26025×10^{-7}	คนต่อวัน

***สำนักงานสาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต**

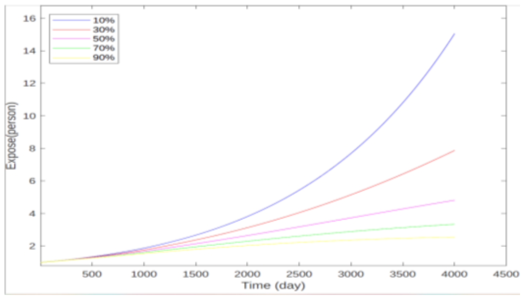
เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบ และสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-hurwitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่ $E_0 = N,0,0,0$ ดังนั้นจุดสมดุลที่ไม่มีโรค E_0 จะเป็น Local Asymptotically (Fred Brauer, Pauline den Driessche and Jianhong Wu(Eds.)2008)

เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบ และสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-hurwitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่ $E_1 = \left(S^*, E^*, I^*, R^*\right)$ ดังนั้นจุดสมดุลที่มีโรค E_1 จะเป็น Local Asymptotically



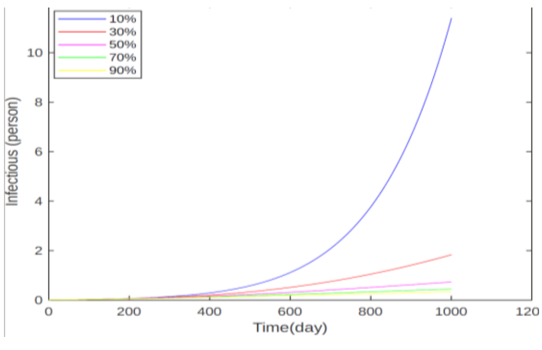
รูปที่ 2 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) ณ เวลา t ใด ๆ (θ) =0.1,0.3,0.5,0.7,0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลมีโรค

จากรูปที่ 2 เมื่อเพิ่มอัตราการฉีดวัคซีนลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้มากขึ้นจะพบว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของกลุ่มประชากรกลุ่มเสี่ยงจะค่อย ๆ ลดลงและเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ซึ่งถ้าประชากรได้รับการฉีดวัควีนเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้จำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยงลดลงอย่างช้าๆ และใช้เวลานานขึ้น นั้นหมายความว่ามีการแพร่ระบาดของโรคลดน้อยลง



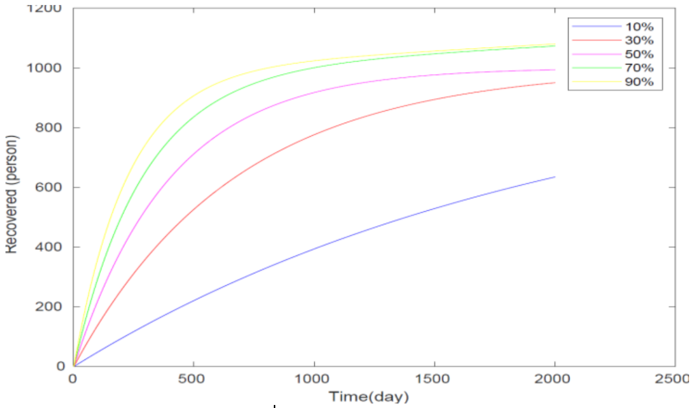
รูปที่ 3 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ (E) ณ เวลา t ใด ๆ (θ) =0.1,0.3,0.5,0.7,0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลมีโรค

จากรูปที่ 3 เมื่อเพิ่มอัตราการฉีดวัคซีนลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้มากขึ้นจะพบว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของกลุ่มประชากรกลุ่มติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการจะลดลงอย่างเห็นได้ชัด และยังพบว่าจุดสุงสุดของประชากรกลุ่มติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการเปลี่ยนแปลงอย่างเห็นได้ชัดเจน



รูปที่ 4 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อ (I) ณ เวลา t ใด ๆ (θ) =0.1,0.3,0.5,0.7,0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลมีโรค

จากรูปที่ 4 เมื่อเพิ่มอัตราการฉีดวัคซีนลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้มากขึ้นจะพบว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของกลุ่มประชากรกลุ่มติดเชื้อ จะลดลงอย่างเห็นได้ชัด และพบว่าจำนวนคนติดเชื้อ ณ จุดสูงสุดของกราฟของประชากรกลุ่มติดเชื้อเปลี่ยนแปลงอย่างเห็นได้ชัดเจน ดังภาพที่ 5



รูปที่ 5 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มที่หายจากโรค (R) ณ เวลา t ใด ๆ (θ) =0.1,0.3,0.5,0.7,0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลมีโรค

จากรูปที่ 5 เมื่อเพิ่มอัตราการฉีดวัคซีนลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ จะส่งผลให้จำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อเปลี่ยนไปเป็นกลุ่มที่หายป่วยจากโรครวดเร็วขึ้น เนื่องจากคนติดเชื้อน้อยลงจึงส่งผลให้เกิดการแพร่ระบาดลง

จากการศึกษาพบว่าอัตรากรฉีดวัคซีนป้องกันเป็นผลปัจจัยหนึ่งต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการฉีดวัคซีนป้องกันโรคโควิด-19 โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการฉีดวัคซีนป้องกันน้อยจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้นและถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการฉีดวัคซีนป้องกันเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลง

บทสรุป

จากการวิจัยพบว่าประสิทธิภาพการฉีดวัคซีนป้องกันเป็นผลปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรค ถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโควิด-19มีการฉีดวัคซีนป้องกันจำนวนมาก จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลง แต่อย่างไรก็ตามในปัจจุบันสถานการณ์โรคโควิด-19ในประเทศไทยค่า (R_0) ยังคงมีการเปลี่ยนแปลงอยู่เสมอ เนื่องจากการวิวัฒนาการของสายพันธุ์ไวรัสโรคโควิด-19 การสร้างภูมิคุ้มกันในร่างกายลดน้อยลง และยังมีการพบปะสังสรรค์ การเดินทางไปหาสู่กัน การอยู่ร่วมกันในสังคมแออัด ดังนั้น เราจึงต้องมีการปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์ตลอดเวลา ตามสถานการณ์ในปัจจุบัน ผู้ที่สนใจสามารถนำตัวแบบนี้ไปสร้างตัวแบบประเภทอื่นที่มีความละเอียดมากขึ้น

เอกสารอ้างอิง

ธีรวัฒน์ นาคะบุตร.(2546).ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์.นครปฐม:ราชภัฏนครปฐม

แคทลียา ดวงเกตุ.(2556).20 คำถามสำคัญของคณิตศาสตร์(พิมพ์ครั้งที่2).(น.247-248).กรุงเทพมหานคร:มติชน.

กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณะสุข.(2563-2565)รายงานสถาณการ์การติดเชื้อไวรัสโคโรนา2019.
อ้างอิงจากธีรวัฒน์ https://ddc.moph.go.th/covid19-dashboard/?dashboard=province

อิทธิพล นวาระสุจิต และคณะ. (2565).ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคโควิด-19ในประเทศไทย.วารสารการวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี : มหาวิทยาลัยราชภัฏนครศวรรค์

อนุวัตร จิรวัฒนพาณิช, อนุรักษ์ วีระประเสริฐสกุล, สุดาทิพย์ หาญเชิงชัย, และจุฬาลักษณ์ ใจอ่อน. (2559).
ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคอีสุกอีใสโดยการรณรงค์ให้ความรู้.
วารสารวิชาการมหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต, 13(2), 254-275.

Fred Brauer, Pauline den Driessche and Jianhong Wu. (2008). Mathematical Epidemilogy.
2563, จาก http://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-540-789911-6

Contributions to the mathematical theory of epidemics--III. Further studies of the problem of endemicity. 1933

Kermack, W. O., and McKendrick, A. G. (1927). A Contribution to the Mathematical Theory of
Epidemics. Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 115(772),
700-721. https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118