



## ผลของการฉีดวัคซีนที่มีผลต่อการป้องกันโรคปอดอักเสบภายใต้ตัวแบบทางคณิตศาสตร์

### กรณีศึกษาในจังหวัดภูเก็ต

#### Effect of vaccination on pneumonia prevention under mathematical model

#### Case studies in Phuket

อาชูรา หะแวอาแซ<sup>1</sup> กันตณน ชัยเสนา<sup>2</sup> ประไพพิมพ์ สุรเชษฐคมสัน<sup>3</sup> อนุวัตร จีรวัดนพานิชา<sup>4</sup>

E-mail: s6212229104@pkru.ac.th

โทรศัพท์: 06-1203-0894

#### บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาและวิเคราะห์เสถียรภาพของผลการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคปอดอักเสบ โดยใช้วิธีการวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน ศึกษาจุดสมดุลศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุล หาคำตอบเชิงวิเคราะห์โดยศึกษาผลการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และหาคำตอบเชิงตัวเลข ผลวิจัยพบว่าจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่มีโรคเป็น Local Asymptotically Stable (อัตราการติดเชื้อแบบไม่เชิงเส้นโดยวิเคราะห์เงื่อนไขที่ทำให้จุดสมดุลไม่มีเชื้อโรคและจุดสมดุลที่ติดเชื้อมีเสถียรภาพกำกับเฉพาะที่) และมีค่าระดับการติดเชื้อเป็น

$$R_0 = \frac{\eta\beta N\gamma}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)(\Omega + \mu)} \text{ และ ผลการฉีดวัคซีนเป็นปัจจัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์}$$

ถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการฉีดวัคซีนป้องกัน จำนวนมากจะส่งผลให้การแพร่ระบาดลดลง

**คำสำคัญ:** ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์, โรคปอดอักเสบ, การฉีดวัคซีนป้องกัน

#### Abstract

The objective of this research is to develop and analyze the stability of vaccination results for a mathematical model of vaccination prevent pneumonia. Which analyzed the model using standard analytical methods. Study the equilibrium point study the stability of the equilibrium point. Analytical Answers By studying the vaccination rates in a mathematical model and finding numerical answers. The results showed that the disease-free equilibrium and the disease-associated equilibrium were Local Asymptotically Stable (Nonlinear infection rate by analyzing conditions performed Let the equilibrium point free of pathogens and the equilibrium point infected stabilize locally directed) and the infection level was  $R_0 = \frac{\eta\beta N\gamma}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)(\Omega + \mu)}$  and the vaccination rates was a factor affecting the mathematical model. If a population at risk of infection has a large number of vaccinations, this will reduce the spread of the disease.

**Keywords:** mathematical model, pneumonia, prevention vaccination

<sup>1</sup> นักศึกษาระดับปริญญาตรี, หลักสูตรวิทยาศาสตร์บัณฑิต, สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์, มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

<sup>2</sup> สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์, คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

<sup>3</sup> สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์, คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

<sup>4</sup> สาขาคณิตศาสตร์, คณะครุศาสตร์, มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

## บทนำ

คณิตศาสตร์ได้เข้ามามีบทบาทเกี่ยวข้องในการดำรงชีวิตของมนุษย์ สามารถนำมาประยุกต์ใช้ในหลากหลาย โดยเฉพาะทางการแพทย์สามารถประยุกต์ใช้ คณิตศาสตร์เพื่อจำลองการเกิดโรคและการ รักษาโรคต่างๆ รวมทั้งเป็นเครื่องมือช่วยทำความเข้าใจเกี่ยวกับสุขภาพหลายๆด้าน อาทิสภาพแวดล้อม ที่ทำให้เกิดโรคต่างๆ การป้องกันโรค การทดสอบปริมาณยา เป็นต้น (อนุวัตร จิรวัฒนาพานิชและคณะ, 2562)

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เป็นวิธีการหนึ่งของการอธิบายสถานการณ์ในชีวิตจริงในแบบภาษา คณิตศาสตร์ โดยการเปลี่ยนสถานการณ์ให้อยู่ในรูปของตัวแปรและสมการ โดยจะให้ความสำคัญกับตัวแปรที่สำคัญ แบบจำลองมีจุดมุ่งหมายเพื่อจะจับองค์ประกอบที่สำคัญของเหตุการณ์หนึ่งๆเราสามารถตรวจสอบความถูกต้องของกลไกคณิตศาสตร์หนึ่งที่ถูกสร้างขึ้นมาได้เพื่อจะตรวจสอบว่าแบบจำลองนั้น สะท้อนสถานการณ์ในชีวิตจริงหรือไม่ (แคทลียา ดวงเกตุ, 2556)

โรคปอดอักเสบ (pneumonia) หมายถึง การติดเชื้อในเนื้อเยื่อพาแรงคิมของปอด โดยเชื้อที่เป็นสาเหตุ ได้แก่ แบคทีเรียไวรัสโมคอคคัส ความรุนแรงของโรคปอดอักเสบนั้นมีอาการแสดงแตกต่างกัน ผู้ป่วยอาจมีอาการเพียงเล็กน้อยจนถึงเสียชีวิต อัตราการเป็นโรคและอัตราการเสียชีวิต มีแนวโน้มสูงขึ้น ส่วนใหญ่เป็นการติดเชื้อในกลุ่มผู้สูงอายุ 65 ปี ขึ้นไป โดยสาเหตุส่วนใหญ่เกิดจาก แบคทีเรีย โดยสามารถติดต่อได้จากการหายใจเอาเชื้อที่แพร่กระจายอยู่ในอากาศเข้าไป หรือจาก การไอ จามรดกัน รวมถึงการคลุกคลีใกล้ชิดกับผู้ป่วย โรคปอดอักเสบเป็นโรคเฝ้าระวังของปี 2565 โดยมีผู้ป่วยสะสม 151,687 ราย (กองระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค, 2565) โดยจังหวัดภูเก็ตได้มีการอนุมัติการฉีดวัคซีนในปี 2556 และวัคซีนสามารถฉีดในผู้สูงอายุที่อายุมากกว่า 65 ปี ,ผู้มีอายุตั้งแต่ 2-65 ปี และผู้มีอายุระหว่าง 19-64 ปี ที่สูบบุหรี่ หรือเป็นโรคหืด นอกจากนี้วัคซีนยังจะช่วยป้องกันโรคปอดอักเสบแล้วยังช่วยลดความรุนแรงของโรค หากพบการติดเชื้อในภายหลัง

จากเหตุข้างต้นผู้วิจัยได้ตระหนักและเห็นประโยชน์ที่ได้รับจึงดำเนินการวิจัย เรื่องผลของการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคปอดอักเสบ ซึ่งผู้วิจัยได้เพิ่มค่าพารามิเตอร์ของ ประสิทธิภาพการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคปอดอักเสบ เป็นปัจจัย สำคัญสำหรับการศึกษาในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ เพื่อสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับป้องกันและ ควบคุมโรคปอดอักเสบที่มีประสิทธิภาพสูงขึ้น

## วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1. เพื่อศึกษาพัฒนาผลของการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคปอดอักเสบ กรณีศึกษาในจังหวัดภูเก็ต
2. เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพผลของการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคปอดอักเสบ กรณีศึกษาในจังหวัดภูเก็ต

## วิธีดำเนินการวิจัย

การศึกษาวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาผลการนิเวศวิทยาสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคปอดอักเสบ ที่สอดคล้องกับกลุ่มประชากรและลักษณะของการเกิดโรค ซึ่งมีวิธีการวิจัย 2 ขั้นตอนดังนี้

1. การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้แบ่งประชากรออกเป็น 4 กลุ่ม คือ กลุ่มคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ กลุ่มคนที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ กลุ่มคนที่ติดเชื้อแสดงอาการ และกลุ่มคนที่หายจากโรค ผู้วิจัยได้กำหนดตัวแปรดังนี้  $S(t)$  จำนวนคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ณ เวลา  $t$  ใดๆ,  $E(t)$  จำนวนคนที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ ณ เวลา  $t$  ใดๆ,  $I(t)$  จำนวนคนที่ติดเชื้อ ณ เวลา  $t$  ใดๆ,  $R(t)$  จำนวนคนที่หายจากโรค ณ เวลา  $t$  ใดๆ โดย  $S(t) > 0, E(t) > 0, I(t) > 0$  และ  $R(t) > 0$  เนื่องจากจำนวนประชากรมีค่าคงที่ไม่ขึ้นกับเวลา คือ  $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$  ซึ่งเป็นค่าคงที่

## 2. การวิเคราะห์หาค่าคงที่ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

การวิเคราะห์หาค่าคงที่ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นการวิเคราะห์ตามวิธีการมาตรฐาน (Standart method) โดยศึกษาจุดสมดุลและศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุลเพื่อหาเงื่อนไขของพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของจุดสมดุล หาค่าระดับการติดเชื้อโดยใช้วิธี Next Generations Method หาค่าตอบเชิงวิเคราะห์และหาค่าตอบเชิงตัวเลข โดยวิธี Numerical Analysis ดังวิธีการต่อไปนี้

### 2.1 การวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน

การวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐานเป็นการศึกษาจุดสมดุล ค่าระดับการติดเชื้อ และเสถียรภาพของระบบ ดังนี้

#### 2.1.1 การหาขอบเขตของค่าคงที่

เป็นการหาขอบเขตของค่าคงที่และช่วงคำตอบของตัวแปรต่างๆโดยใช้เทคนิคการอินทิเกรตช่วยในการแสดงหาค่าตอบ  $S(t), E(t), I(t)$  และ  $R(t)$  ซึ่งมีขอบเขตของค่าคงที่ อยู่ในจำนวนจริงบวก

2.1.2 จุดสมดุล การหาจุดสมดุลดำเนินการโดยจัดสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้เท่ากับศูนย์ คือ

$\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$  จะได้ค่าจุดสมดุลที่ไม่มีเชื้อโรค (Disease Free Equilibrium Point :  $E_0$ ) ในกรณีที่ไม่มีเชื้อโรค โดยกำหนดให้  $E_0 = (S, E, I, R) = E_0 \left( \frac{\beta N}{\Omega + \mu}, 0, 0, \frac{\Omega \beta N}{\mu(\Omega + \mu)} \right)$  และจะได้ค่าจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของเชื้อโรค

(Disease Free Equilibrium Point :  $E_1$ ) ในกรณีที่มีการระบาดของเชื้อโรค โดยกำหนดให้  $I \neq 0$  จะได้  $E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*)$

#### 2.1.3 การหาค่าระดับการติดเชื้อ ( $R_0$ )

ค่าระดับการติดเชื้อ ( $R_0$ ) เป็นค่าเฉลี่ยที่ผู้ป่วยหนึ่งคนสามารถทำให้คนกลุ่มเสี่ยงป่วยเป็นจำนวนกี่คนในช่วงเวลาที่เขายังป่วยอยู่ โดยใช้วิธี Next Generation Method โดยจัดการสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นในรูป  $\frac{\partial X}{\partial t} = F(X) - V(X)$  เพื่อหาค่า  $R_0$  จากเมตริกซ์  $P(FV^{-1})$  ซึ่ง  $F(X)$  คือ เมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น,  $V(X)$  คือ เมตริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่ง ได้จากอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} S \\ E \\ I \\ R \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(E_0)}{\partial X_i} \end{bmatrix} \text{ และ } V = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_i(E_0)}{\partial X_i} \end{bmatrix} \text{ โดยพิจารณา } R_0 \text{ ดังนี้}$$

1.  $R_0 > 1$  แสดงว่า โรคมีการระบาดเพิ่มขึ้น (Epidemic)

2.  $R_0 = 1$  แสดงว่า โรคเริ่มเสถียร (Endemic)

3.  $R_0 < 1$  แสดงว่า โรคไม่มีการแพร่ระบาด

2.2 การวิเคราะห์เสถียรภาพ เป็นการหาค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Value) เพื่ออธิบายคำตอบของสมการเกี่ยวกับค่าความ

สมดุสำหรับการตรวจสอบว่าเป็น Local Asymptotically Stable มี 2 กรณี ดังนี้

1. Local Asymptotically Stable ณ จุด  $E_0$  ของจุดสมดุลที่ไม่มีโรค โดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ สภาวะที่ไม่มีโรค ( $E_0$ ) ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก  $\det(J_0 - \lambda I) = 0$  ซึ่ง  $J_0$  คือ จาโคเบียนเมตริกซ์ ณ จุด  $E_0$  และ  $I$  คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ โดยมีข้อกำหนดว่า  $\lambda$  ทุกค่าส่วนจริงจะเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ซึ่งจะส่งผลให้ค่า  $R_0 < 1$

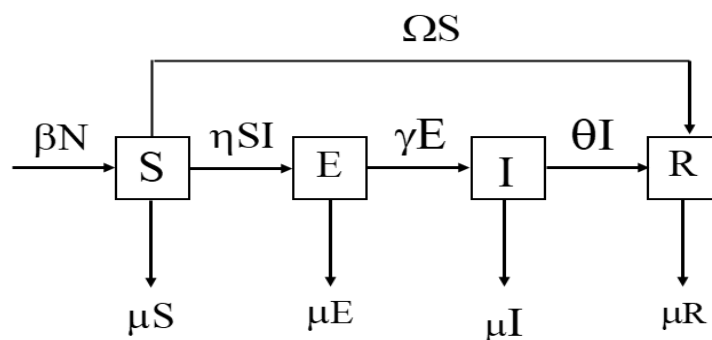
2. Local Asymptotically Stable ณ จุด  $E_1$  ของจุดสมดุลที่มีโรค โดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมตริกซ์ ณ สภาวะที่มีการแพร่ระบาดของโรค ( $E_1$ ) ซึ่งจะได้สมการลักษณะเฉพาะจาก  $\det(J_1 - \lambda I) = 0$  ซึ่ง  $J_1$  คือ จาโคเบียนเมตริกซ์ ณ จุด  $E_1$  และ  $I$  คือ เมตริกซ์เอกลักษณ์ โดยมีข้อกำหนดว่า  $\lambda$  ทุกค่าส่วนจริงจะเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ซึ่งจะส่งผลให้ค่า  $R_0 > 1$

2.3 การวิเคราะห์เชิงตัวเลข การวิเคราะห์เชิงตัวเลขเป็นการพิจารณาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมที่ทำให้จุดสมดุลที่ไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point:  $E_0$ ) และจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของโรค (Endemic Equilibrium Point:  $E_1$ ) ที่ทำให้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เชิงเส้นเป็น Local Asymptotically Stable เพื่อหาค่าพารามิเตอร์ไปคำนวณหาค่าตอบเชิงตัวเลขโดยจำลองแบบด้วยโปรแกรม Matlab (สุกัลยา ศรีสุริฉิน, 2559)

#### ผลการวิจัย

ตอนที่ 1 ผลการพัฒนาผลการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคปอดอักเสบ

จากตัวแปรข้างต้นผู้วิจัยได้สร้างแผนภาพผลการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคปอดอักเสบ



ภาพที่ 1 แผนภาพความสัมพันธ์และองค์ประกอบผลของการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคปอดอักเสบ

จากภาพที่ 1 สามารถเปลี่ยนตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เป็นระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น

$$\frac{dS}{dt} = \beta N - \eta SI - \Omega S - \mu S \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \eta SI - \gamma E - \mu E \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \gamma E - \theta I - \mu I \quad (3)$$

$$\frac{dR}{dt} = \Omega S + \theta I - \mu R \quad (4)$$

โดยมีเงื่อนไขประชากรมนุษย์จำนวนคงที่  $N = S + E + I + R$  เมื่อกำหนดสัญลักษณ์พารามิเตอร์ ได้แก่  $\beta$  เป็นอัตราการเกิด,  $\mu$  เป็นอัตราการเสียชีวิต,  $\eta$  เป็นอัตราการสัมผัสเชื้อ,  $\gamma$  เป็นอัตราการฟักตัว,  $\theta$  เป็นอัตราการหายจากโรค,  $\Omega$  เป็นอัตราการฉีดวัคซีน และ  $N$  เป็นจำนวนประชากรทั้งหมด เนื่องจากค่าอนุพันธ์ของค่าคงที่จะมีค่าเป็นศูนย์ และค่าจำนวนของประชากรแต่ละกลุ่มจะมีค่าไม่เกิน  $N$  โดยดำเนินการดังนี้

## 1. การวิเคราะห์ตามแบบมาตรฐาน

จาก Rate of change = Rate inflow-Rate outflow จะได้

$$F(X) = \beta N - \eta SI - \Omega S - \mu S + \eta SI - \gamma E - \mu E + \gamma E - \theta I - \mu I + \Omega S + \theta I - \mu R$$

ดังนั้น  $\frac{dN}{dt} = \beta N - \mu S - \mu E - \mu I - \mu R$

เมื่อ  $S = N, E = 0, I = 0, R = 0$

จะได้  $\frac{dN}{dt} = \beta N - \mu N - \mu(0) - \mu(0) - \mu(0)$

$$\frac{dN}{dt} = \beta N - \mu N$$

$$\frac{dN}{dt} = (\beta - \mu) N$$

แสดงว่า N เป็นค่าคงที่ เมื่อ  $\beta = \mu$

1.1 การหาจุดสมดุล โดยจัดสมการอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้เท่ากับศูนย์จะได้

$$\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0 \text{ ดังนี้}$$

$$\beta N - \eta SI - \Omega S - \mu S = 0$$

$$-\eta SI - \Omega S - \mu S = -\beta N$$

$$\eta SI + \Omega S + \mu S = \beta N$$

$$S(\eta I + \Omega + \mu) = \beta N$$

จะได้  $S^* = \frac{\beta N}{\eta I^* + \Omega + \mu}$  (5)

$$E^* = \frac{\eta \beta N I^* (\gamma + \mu)}{\eta I^* + \Omega + \mu} \quad (6)$$

$$I^* = \frac{\eta \beta N (\gamma + \mu) (\theta + \mu) - \Omega - \mu}{\eta} \quad (7)$$

$$R^* = \frac{\Omega S + \theta I}{\mu} \quad (8)$$

1.1.1 การหาจุดสมดุลที่ไม่มีโรค ( $E_0$ ) จากสมการ (1), (2), (3) และ (4) จะได้ค่าจุดสมดุลที่ไม่มีโรค (Disease Free Equilibrium Point :  $E_0$ ) ในกรณีที่ไม่มีโรคติดเชื้อ โดยกำหนดให้  $I = 0, S = N$  และ  $R = 0$

$$E_0 = (S, E, I, R) = E_0 \left( \frac{\beta N}{\Omega + \mu}, 0, 0, \frac{\Omega \beta N}{\mu(\Omega + \mu)} \right) \text{ เสถียรของระบบ (stability of Systems) ที่จุด } E_0$$

โดยดำเนินการหาสมการลักษณะเฉพาะ  $\det(J_0 - \lambda I) = 0$  เพื่อหาค่า  $\lambda$  เมื่อ  $\lambda$  เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values )

และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด  $4 \times 4$

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\Omega - \mu & 0 & -\eta S & 0 \\ 0 & -\gamma - \mu & \eta S & 0 \\ 0 & \gamma & -\theta - \mu & 0 \\ \Omega & 0 & \theta & -\mu \end{bmatrix}$$

$$J_0 - \lambda I = \begin{bmatrix} -\Omega - \mu & 0 & -\eta S & 0 \\ 0 & -\gamma - \mu & \eta S & 0 \\ 0 & \gamma & -\theta - \mu & 0 \\ \Omega & 0 & \theta & -\mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(J_0 - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\Omega - \mu - \lambda & 0 & -\eta S & 0 \\ \eta I & -\gamma - \mu - \lambda & \eta S & 0 \\ 0 & \gamma & -\theta - \mu - \lambda & 0 \\ \Omega & 0 & \theta & -\mu - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-\mu - \lambda) [ [(-\Omega - \mu - \lambda)(-\gamma - \mu - \lambda)(-\theta - \mu - \lambda)] - [\gamma \eta (-\Omega - \mu - \lambda)] ] \\ &= (-\mu - \lambda)(-\Omega - \mu - \lambda)(\lambda^2 + \lambda(\theta + \gamma + 2\mu) + \mu^2 + \gamma\mu + \theta\mu + \theta\gamma - \gamma\eta) \\ 0 &= (-\mu - \lambda)(-\Omega - \mu - \lambda)(\lambda^2 + \lambda(\theta + \gamma + 2\mu) + \mu^2 + \gamma\mu + \theta\mu + \theta\gamma - \gamma\eta)\end{aligned}$$

จะได้  $\lambda_1 = -\mu$

$\lambda_2 = -\Omega - \mu$

$$\lambda_3 = \frac{-2\mu - \theta - \gamma - \sqrt{(2\mu + \theta + \gamma)^2 - 4(\mu^2 + \gamma\mu + \theta\mu + \theta\gamma - \gamma\eta)}}{2}$$

และ  $\lambda_4 = \frac{-2\mu - \theta - \gamma + \sqrt{(2\mu + \theta + \gamma)^2 - 4(\mu^2 + \gamma\mu + \theta\mu + \theta\gamma - \gamma\eta)}}{2}$

1.1.2 การหาจุดสมดุลเกิดการแพร่ระบาดของเชื้อโรค ( $E_1$ ) จากสมการ (1),(2),(3) และ (4) จะได้ค่าจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของเชื้อโรค (Endemic Equilibrium Point :  $E_1$ ) ในกรณีที่มีการแพร่ระบาดของเชื้อโรค โดยกำหนดให้  $I > 0$  และ  $S = N$

ซึ่งได้จาก  $E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*) = \left( \frac{\beta N}{(\eta I^* + \Omega + \mu)}, \frac{\eta \beta N I^* (\gamma + \mu)}{\eta I^* + \Omega + \mu}, \frac{\gamma \beta N (\gamma + \mu)(\theta + \mu) - \Omega - \mu}{\eta}, \frac{\Omega S + \theta I^*}{\mu} \right)$  ดังนี้

สมการลักษณะเฉพาะที่จุด  $E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*)$  โดยให้  $\det(J_1 - \lambda I) = 0$  เพื่อหาค่า  $\lambda$  เมื่อ  $\lambda$  เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values)

และ  $\lambda$   $I$   $\mu$   $\eta$   $\theta$   $\gamma$   $\Omega$   $\beta$   $N$   $S$   $E$   $I$   $R$

เมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด  $4 \times 4$  ดังนี้

$$\begin{aligned}J_1 &= \begin{bmatrix} -\Omega - \eta I^* - \mu & 0 & -\eta S^* & 0 \\ \eta I^* & -\gamma - \mu & \eta S^* & 0 \\ 0 & \gamma & -\theta - \mu & 0 \\ \Omega & 0 & \theta & -\mu \end{bmatrix} \\ J_1 - \lambda I &= \begin{bmatrix} -\Omega - \eta I^* - \mu & 0 & -\eta S^* & 0 \\ \eta I^* & -\gamma - \mu & \eta S^* & 0 \\ 0 & \gamma & -\theta - \mu & 0 \\ \Omega & 0 & \theta & -\mu \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ J_1 - \lambda I &= \begin{bmatrix} -\Omega - \eta I^* - \mu - \lambda & 0 & -\eta S^* & 0 \\ \eta I^* & -\gamma - \mu - \lambda & \eta S^* & 0 \\ 0 & \gamma & -\theta - \mu - \lambda & 0 \\ \Omega & 0 & \theta & -\mu - \lambda \end{bmatrix} \\ \det(J_1 - \lambda I) &= \begin{bmatrix} -\Omega - \eta I^* - \mu - \lambda & 0 & -\eta S^* \\ \eta I^* & -\gamma - \mu - \lambda & \eta S^* \\ 0 & \gamma & -\theta - \mu - \lambda \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= (-\mu - \lambda) \left[ (-\Omega - \eta I^* - \mu - \lambda)(-\gamma - \mu - \lambda)(-\theta - \mu - \lambda) + (-\eta S^*)(\eta I^*)(\gamma) \right] - \left[ \eta S^*(-\Omega - \eta I^* - \mu - \lambda) \right]$$

1.2 การหาค่าระดับการติดเชื้อ ( $R_0$ ) เป็นการหารัศมีที่โดดเด่นของการแพร่ระบาดของโรค โดยใช้วิธีการ Next

Generation Method โดยจะได้สมการ (1) - (4) จะได้เมทริกซ์ในรูปแบบ  $\frac{\partial X}{\partial t} = F(X) - V(X)$  เพื่อหาค่า spectral radius  $P(FV^{-1})$  ซึ่ง  $F(X)$  และ  $V(X)$  ได้จากอนุพันธ์ย่อย ดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} S \\ E \\ I \\ R \end{bmatrix}, F = \left[ \frac{\partial V_i(E_0)}{\partial X_i} \right] \text{ และ } V = \left[ \frac{\partial V_i(E_0)}{\partial X_i} \right]$$

เมื่อ  $F(X)$  คือ เมทริกซ์ของอัตราการเพิ่ม และ  $V(X)$  คือเมทริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่งโดยพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ ( $R_0$ ) โดยพิจารณา ดังนี้

$$X = \begin{bmatrix} S \\ E \\ I \\ R \end{bmatrix}, F(X) = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta SI \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V(X) = \begin{bmatrix} -\beta N + \eta SI + \Omega S + \mu S \\ \gamma E + \mu E \\ -\gamma E + \theta I + \mu I \\ -\Omega S - \theta I + \mu R \end{bmatrix}$$

จะได้  $F(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\eta \beta N}{\Omega + \mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V(E_0) = \begin{bmatrix} \Omega + \mu & 0 & \frac{\eta \beta N}{\Omega + \mu} & 0 \\ 0 & \gamma + \mu & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & \theta + \mu & 0 \\ -\Omega & 0 & -\theta & \mu \end{bmatrix}$

ดังนั้น

$$FV^{-1}(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\eta \beta N}{\Omega + \mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{\Omega + \mu} & \frac{\eta \beta N}{(\Omega + \mu)^2 (\gamma + \mu)(\theta + \mu)} & \frac{-\eta \beta N}{(\Omega + \mu)^2 (\theta + \mu)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma + \mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)} & \frac{1}{\theta + \mu} & 0 \\ \frac{\Omega}{\mu(\Omega + \mu)} & \frac{\gamma \theta}{\mu(\gamma + \mu)(\theta + \mu)} - \frac{\Omega \eta \beta N}{\mu(\Omega + \mu)^2 (\gamma + \mu)(\theta + \mu)} & \frac{\theta}{\mu(\theta + \mu)} + \frac{(-\Omega) \eta \beta N}{\mu(\Omega + \mu)^2 (\theta + \mu)} & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix}$$

จะได้  $FV^{-1}(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\eta \beta N \gamma}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)(\Omega + \mu)} & \frac{\eta \beta N}{(\theta + \mu)(\Omega + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

จาก  $\det[FV^{-1}(E_0) - \lambda I_4] = \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\eta \beta N \gamma}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)(\Omega + \mu)} - \lambda & \frac{\eta \beta N}{(\theta + \mu)(\Omega + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$

กำหนด  $\det[FV^{-1}(E_0) - \lambda I_4] = 0$

จะได้  $0 = (-\lambda)(-\lambda)(-\lambda) \left( \frac{\eta\beta N\gamma}{(\gamma+\mu)(\theta+\mu)(\Omega+\mu)} - \lambda \right)$

โดย  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$  และ  $\lambda_4 = \left( \frac{\eta\beta N\gamma}{(\gamma+\mu)(\theta+\mu)(\Omega+\mu)} \right)$

ดังนั้น  $\rho(FV^{-1}(E_0)) = \left( \frac{\eta\beta N\gamma}{(\gamma+\mu)(\theta+\mu)(\Omega+\mu)} \right)$

จะได้ค่าระดับการติดเชื้อ คือ  $R_0 = \left( \frac{\eta\beta N\gamma}{(\gamma+\mu)(\theta+\mu)(\Omega+\mu)} \right)$

ตอนที่ 2 ผลการวิเคราะห์เชิงตัวเลขผลของการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคปอดอักเสบ ภูมิศึกษาในจังหวัดภูเก็ต

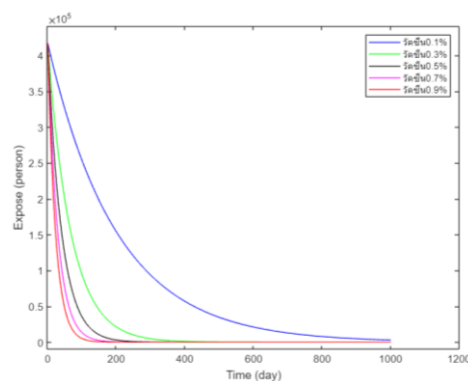
การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้วิเคราะห์เชิงตัวเลข โดยนำค่าพารามิเตอร์ที่ได้มาจากหน่วยงานกระทรวงสาธารณสุข จังหวัดภูเก็ต ในปี พ.ศ. 2563 เกี่ยวกับผลการฉีดวัคซีนป้องกันโรคปอดอักเสบ ซึ่งมีค่าต่างๆ ดังนี้

ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการฉีดวัคซีนป้องกันโรคปอดอักเสบ

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
อัตราการเกิดของประชากร	$\beta$	$4.18111 \times 10^{-5}$	คนต่อวัน
อัตราการเสียชีวิตของประชากร	$\mu$	$1.69608 \times 10^{-5}$	คนต่อวัน
อัตราการฉีดวัคซีน	$\Omega$	0 – 1	คนต่อวัน
อัตราการสัมผัสเชื้อ	$\eta$	$4.2264 \times 10^{-5}$	คนต่อวัน
อัตราการฟักตัวของเชื้อ	$\gamma$	$8.21918 \times 10^{-3}$	คนต่อวัน
อัตราการหายจากโรค	$\theta$	$2.53033 \times 10^{-5}$	คนต่อวัน
จำนวนประชากรมนุษย์ทั้งหมด	N	417,402	คน

#### \*สำนักงานสาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต\*

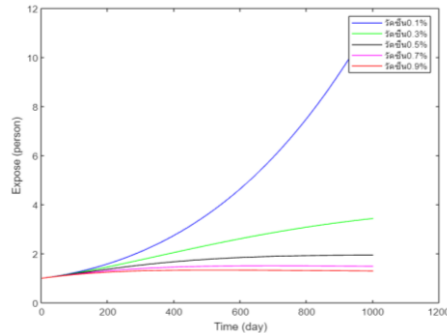
เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบ และสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-hurwitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่  $E_0 = N, 0, 0, 0$  ดังนั้นจุดสมดุลที่ไม่มีโรค  $E_0$  จะเป็น Local Asymptotically (Fred Brauer, Pauline den Driessche and Jianhong Wu(Eds.)2008 ) เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบ และสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-hurwitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่  $E_1 = (S^*, E^*, I^*, R^*)$  ดังนั้นจุดสมดุลที่มีโรค  $E_1$  จะเป็น Local Asymptotically



ภาพที่ 2 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) ณ เวลา t ใดๆ ( $\Omega$ ) = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพ ของจุดสมดุลมีโรค

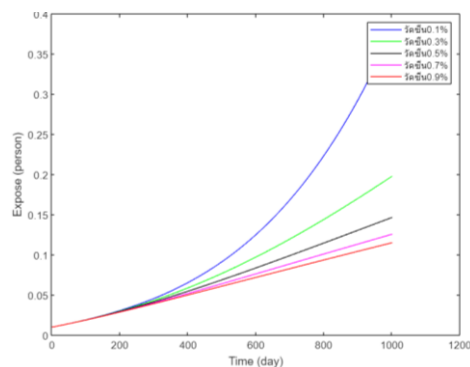


จากภาพที่ 2 เมื่อเพิ่มอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันโรคปอดอักเสบ ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้มากขึ้นจะพบว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง (S) ณ เวลา t ใดๆ จะค่อยๆ ลดลงและเปลี่ยนแปลงอย่างช้าๆ ซึ่งถ้าประชากรได้รับการฉีดวัคซีนป้องกันโรคปอดอักเสบเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้จำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยงลดลงอย่างช้าๆ ซึ่งหมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยงเปลี่ยนไปเป็นกลุ่มติดเชื่อจะและใช้เวลานานขึ้น หมายความว่ามีการแพร่ระบาดของโรคลดน้อยลง



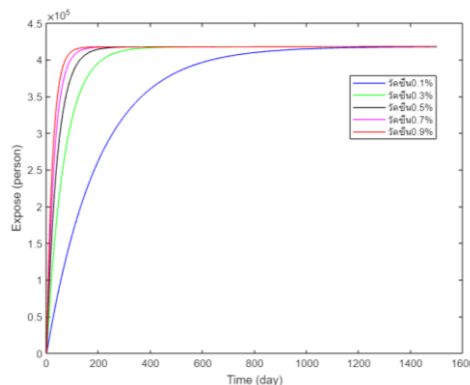
ภาพที่ 3 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื่อแต่ไม่แสดงอาการ (E) ณ เวลา t ใดๆ ( $\Omega = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ ) ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลโรค

จากภาพที่ 3 เมื่อเพิ่มอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันโรคปอดอักเสบ ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้มากขึ้นจะพบว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื่อแต่ไม่แสดงอาการ (E) ณ เวลา t ใดๆ จะลดลงอย่างเห็นได้ชัด และยังพบว่าจุดสูงสุดของประชากรกลุ่มติดเชื่อแต่ไม่แสดงอาการ เปลี่ยนแปลงอย่างเห็นได้ชัด



ภาพที่ 4 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื่อ (I) ณ เวลา t ใดๆ ( $\Omega = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9$ ) ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลโรค

จากภาพที่ 4 เมื่อเพิ่มอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันโรคปอดอักเสบ ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ให้มากขึ้นจะพบว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื่อ (I) ณ เวลา t ใดๆ ลดลงอย่างเห็นได้ชัดซึ่งถ้าประชากรมีการฉีดวัคซีนป้องกันโรคปอดอักเสบเป็นจำนวนมากขึ้น จะส่งผลให้จุดสูงสุดของกลุ่มติดเชื่อลดลงและการแพร่ระบาดของโรคจะลดลงด้วยเช่นกัน



ภาพที่ 5 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่หายจากโรค (R) ณ เวลา  $t$  ใดๆ ( $\Omega$ ) = 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9 ตามลำดับ ณ เสถียรภาพ ของจุดสมดุลมีโรค

จากภาพที่ 5 เมื่อเพิ่มอัตราการฉีดวัคซีนป้องกันโรคปอดอักเสบ ลงในตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการฉีดวัคซีนสำหรับการป้องกันโรคปอดอักเสบ จะส่งผลให้จำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อเปลี่ยนไปเป็นกลุ่มที่หายจากโรครวดเร็วขึ้น เนื่องจากจำนวนคนติดเชื้อน้อยลงจึงส่งผลให้เกิดการแพร่ระบาดลดลง

### บทสรุป

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาผลของการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคปอดอักเสบ และวิเคราะห์เสถียรภาพของผลของการฉีดวัคซีนสำหรับตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์ของการป้องกันโรคปอดอักเสบ ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ ระบบสมการอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วย ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรที่ติดเชื้อแต่ไม่แสดงอาการ ประชากรที่ติดเชื้อ และประชากรที่หายจากโรค ซึ่งผู้วิจัยเพิ่มค่าพารามิเตอร์ ( $\Omega$ ) คือ อัตราการฉีดวัคซีน ลงใน ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ใช้วิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน และวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับตรวจสอบการแพร่ระบาดของโรค

ผู้วิจัยได้พิจารณาจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของโรคโดยการวิเคราะห์จุดสมดุลและเสถียรภาพของจุดสมดุลด้วยวิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐานซึ่งค่าเสถียรภาพของระบบ Local Asymptotically Stable ที่ได้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz เพื่อสามารถหาค่าพารามิเตอร์  $R_0$  ซึ่งมีความจำเป็นภายใต้เงื่อนไขเพื่อให้ Local Asymptotically Stability of Equilibrium Stable ที่มีเสถียรภาพในส่วนจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของโรค โดยที่

$$R_0 = \frac{\eta\beta N\gamma}{(\gamma + \mu)(\theta + \mu)(\Omega + \mu)}$$
 สามารถพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ ( $R_0$ ) โดยค่า  $R_0 < 1$  วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค

จึงไม่เกิดการแพร่ระบาดของโรค และค่า  $R_0 > 1$  วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลที่มีการติดเชื้อจึงเกิดการแพร่ระบาดของโรค จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขพบว่าจุดสมดุลทั้งสองเป็น Local Asymptotically Stable

ดังนั้นสามารถนำผลจากการวิจัยตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์ SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคปอดอักเสบ โดยการฉีดวัคซีนป้องกันโรค เพื่อลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลทางวิชาการให้กับหน่วยงานที่เฝ้าระวังของสำนักงานระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข รวมทั้งนำเสนอข้อมูลต่อหน่วยงานด้านสาธารณสุขดำเนินการมาตรการควบคุมและป้องกันโรคปอดอักเสบ โดยการฉีดวัคซีนป้องกันให้กับประชาชนทั่วไปที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

### เอกสารอ้างอิง

กรมควบคุมโรค.(2563).HDC-Report-กระทรวงสาธารณสุข,จาก. <https://hdcservice.moph.go.th/hdc/main/index.php>

กรมควบคุมโรค.(2565).โรคปอดอักเสบ.สำหรับระบาดวิทยา กระทรวงสาธารณสุข

แคลิยา ดวงเกตุ.(2556).20 คำถามสำคัญของคณิตศาสตร์(พิมพ์ครั้งที่2).(น.247-248).กรุงเทพมหานคร:มติชน.

อนุวัตร จิรวินพนพานิชและคณะ.(2562).ตัวแทนเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการรณรงค์ป้องกันการแพร่ระบาดของโรคตาแดง

(รายงานการวิจัย).ภูเก็ต:มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

กระทรวงสาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต.(2566).โรคปอดอักเสบ.ขอข้อมูลเมื่อ

