

## Tema nr. 2

Date:  $n$  - dimensiunea sistemului,  $\epsilon$  - precizia calculelor, matricea sistemului  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , vectorul termenilor liberi  $b \in \mathbb{R}^n$ :

- Să se calculeze, când este posibil, o descompunere  $LU$  a matricei  $A$  ( $A = LU$ ), unde  $L$  este matrice inferior triunghiulară, iar  $U$  este matrice superior triunghiulară cu 1 pe diagonală ( $u_{ii} = 1, \forall i$ ) ;
- Folosind această descompunere, să se calculeze determinantul matricei  $A$  ( $\det A = \det L \det U$ ) ;
- Utilizând descompunerea  $LU$  calculată mai sus și metodele substituției directe și inverse, să se calculeze  $x_{LU}$ , o soluție aproximativă a sistemului  $Ax = b$ ;
- Să se verifice soluția calculată prin afișarea normei:

$$\|A^{init}x_{LU} - b^{init}\|_2$$

(această normă ar trebui să fie mai mică decât  $10^{-8}, 10^{-9}$ )

$A^{init}$  și  $b^{init}$  sunt datele inițiale, nu cele modificate pe parcursul algoritmului. Am notat cu  $\|\cdot\|_2$  norma Euclidiană.

- *Restricție:* în program să se alocă doar două matrice,  $A$  și  $A^{init}$  (o copie a matricei inițiale). Descompunerea  $LU$  se va calcula direct în matricea  $A$ . Cu acest tip de memorare nu se reține diagonală matricei  $U$ , dar se va ține cont de faptul că  $u_{ii} = 1, \forall i$  în rezolvarea sistemului superior triunghiular  $Ux = y$  (se modifică procedura de rezolvare a sistemelor superior triunghiulare).
- Folosindu-se una din bibliotecile menționate în pagina laboratorului, să se calculeze și să se afișeze soluția sistemului  $Ax = b$  și inversa matricei  $A$ ,  $A_{lib}^{-1}$ . Să se afișeze următoarele norme:

$$\|x_{LU} - x_{lib}\|_2$$

$$\|x_{LU} - A_{lib}^{-1}b^{init}\|_2.$$

Scrieți programul astfel încât să poată fi testat (și) pe sisteme de dimensiuni mai mari ca 100.

**Bonus 25 pt.:** Să se calculeze descompunerea  $LU$  a matricei  $A$  cu următoarele restricții de memorare: să se aloce o singură matrice în program pentru memorarea matricei  $A$ , matrice care va rămâne neschimbată (se va folosi pentru calculul descompunerii  $LU$ ). Pentru calculul matricelor  $L$  și  $U$  se vor folosi doi vectori de dimensiune  $n(n+1)/2$  în care se vor memora elementele din partea inferior triunghiulară, respectiv superior triunghiulară a matricelor  $L$  și  $U$ . Cu acest tip nou de memorare a datelor, să se calculeze soluția sistemului liniar  $Ax = b$ ,  $x_{LU}$ .

### Observații

1. Precizia calculelor  $\epsilon$ , este un număr pozitiv de forma  $\epsilon = 10^{-t}$  (cu  $t = 5, 6, \dots, 10, \dots$  la alegere) care este dată de intrare în program (se citește de la tastatură sau din fișier) la fel ca și dimensiunea  $n$  a datelor. Acest număr se folosește atunci când testăm dacă o variabilă este 0 sau nu înaintea unei operații de împărțire. Dacă vrem să efectuăm operația de împărțire  $s = 1/v$  unde  $v \in \mathbb{R}$ , **NU** vom scrie:

```
if(v! = 0) s = 1/v;
else Write(" nu se poate face impartirea");
```

ci vom scrie în program:

```
if(Math.Abs(v) > eps) s = 1/v;
else Write(" nu se poate face impartirea");
```

2. Dacă pentru o matrice  $A$  avem descompunerea  $LU$ , rezolvarea sistemului  $Ax = b$  se reduce la rezolvarea a două sisteme triunghiulare:

$$Ax = b \longleftrightarrow LUx = b \longleftrightarrow \begin{cases} Ly = b, \\ Ux = y. \end{cases}$$

Se rezolvă întâi sistemul inferior triunghiular  $Ly = b$ . Apoi se rezolvă sistemul superior triunghiular  $Ux = y$  unde  $y$  este soluția obținută din rezolvarea sistemului precedent,  $Ly = b$ . Vectorul  $x$  rezultat din rezolvarea sistemului  $Ux = y$  este și soluția sistemului inițial  $Ax = b$ .

3. Pentru calculul  $\|A^{init}x_{LU} - b^{init}\|_2$  avem:

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad Ax = y \in \mathbb{R}^n, \quad y = (y_i)_{i=1}^n$$

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$z = (z_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n, \quad \|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n z_i^2}$$

### Metodele substituției

Fie sistemul liniar:

$$Ax = b \tag{1}$$

unde matricea sistemului  $A$  este triunghiulară. Pentru a găsi soluția unică a sistemului (1), trebuie ca matricea să fie nesingulară. Determinantul matricelor triunghiulare este dat de formula:

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

Prin urmare pentru rezolvarea sistemului (1) vom presupune că:

$$\det A \neq 0 \iff a_{ii} \neq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Vom considera întâi cazul când matricea  $A$  este inferior triunghiulară. Sistemul (1) are forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii}x_i &= b_i \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{ni}x_i + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Necunoscutele  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se deduc folosind ecuațiile sistemului de la prima către ultima.

Din prima ecuație se deduce  $x_1$ :

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \tag{2}$$

Din a doua ecuație, folosind (2), obținem  $x_2$ :

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1}{a_{22}}$$

Când ajungem la ecuația  $i$ :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ii-1}x_{i-1} + a_{ii}x_i = b_i$$

folosind variabilele  $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$  calculate anterior, avem:

$$x_i = \frac{b_i - a_{i1}x_1 - \cdots - a_{ii-1}x_{i-1}}{a_{ii}}$$

Din ultima ecuație se deduce  $x_n$  astfel:

$$x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}}$$

Algoritmul de calcul a soluției sistemelor (1) cu matrice inferior triunghiulară este următorul:

$$x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\right)}{a_{ii}} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n-1, n \quad (3)$$

Acest algoritm poartă numele de *metoda substituției directe*. Pentru matricele inferior triunghiulare cu 1 pe diagonală ( $a_{ii} = 1, \forall i$ ) formula de mai sus devine:

$$x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n-1, n \quad (4)$$

Vom considera, în continuare sistemul (1) cu matrice superior triunghiulară:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1i}x_i & + & \cdots & + & a_{1n-1}x_{n-1} & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & \ddots & & & & & & & & & & \\ & & & & a_{ii}x_i & + & \cdots & + & a_{in-1}x_{n-1} & + & a_{in}x_n & = & b_i \\ & & & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & & & & a_{n-1n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1n}x_n & = & b_{n-1} \\ & & & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Necunoscutele  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se deduc pe rând, folosind ecuațiile sistemului de la ultima către prima.

Din ultima ecuație găsim  $x_n$ :

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \quad (5)$$

Folosind valoarea lui  $x_n$  dedusă mai sus, din penultima ecuație a sistemului obținem:

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{n-1n}x_n}{a_{n-1n-1}}$$

Când ajungem la ecuația  $i$ :

$$a_{ii}x_i + a_{ii+1}x_{i+1} + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

se cunosc deja  $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n$  și deducem:

$$x_i = \frac{b_i - a_{ii+1}x_{i+1} - \dots - a_{in}x_n}{a_{ii}}$$

Din prima ecuație găsim valoarea lui  $x_1$ :

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}$$

Procedeul descris mai sus poartă numele de *metoda substituției inverse* pentru rezolvarea sistemelor liniare cu matrice superior triunghiulară:

$$x_i = \frac{\left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j\right)}{a_{ii}} \quad , \quad i = n, n-1, \dots, 2, 1 \quad (6)$$

Pentru matricele superior triunghiulare cu  $a_{ii} = 1, \forall i$  formula de mai sus devine:

$$x_i = b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j \quad , \quad i = n, n-1, \dots, 2, 1 \quad (7)$$

## Descompunerea LU

Dacă  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  este o matrice reală pătratică de dimensiune  $n$  astfel încât  $\det A_k \neq 0, \forall k = 1, \dots, n$ , unde  $A_k = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ . Atunci, se știe că există o unică matrice inferior triunghiulară  $L = (l_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  și o unică matrice superior triunghiulară  $U = (u_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$  cu  $u_{ii} = 1, i = 1, \dots, n$  astfel încât

$$A = LU \quad (8)$$

### Algoritmul Crout de calcul al descompunerii LU

Fie  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  o matrice reală pătratică de dimensiune  $n$  care satisface ipotezele teoremei de mai sus. Algoritmul de calcul al matricelor  $L$  și  $U$  are  $n$  etape. La fiecare pas se determină simultan câte o coloană din matricea  $L$  și câte o linie din matricea  $U$ .

#### Pasul $p$ ( $p = 1, 2, \dots, n$ )

Se determină elementele coloanei  $p$  ale matricei  $L$ ,  $l_{ip}, i = p, \dots, n$ , și elementele liniei  $p$  ale matricei  $U$ ,  $u_{pi}, i = p + 1, \dots, n$ .

Sunt cunoscute de la pașii anteriori elementele primelor  $p - 1$  coloane din  $L$  (elemente  $l_{jk}$  cu  $k = 1, \dots, p - 1$ ) și elementele primelor  $p - 1$  linii din  $U$  (elemente  $u_{ki}$  cu  $k = 1, \dots, p - 1$ ).

Calculul elementelor coloanei  $p$  din matricea  $L$ :  $l_{ip}, i = p, \dots, n$   
( $l_{ip} = 0, i = 1, \dots, p - 1$ )

$$a_{ip} = \sum_{k=1}^n l_{ik} u_{kp} = \sum_{k=1}^p l_{ik} u_{kp} = l_{ip} u_{pp} + \sum_{k=1}^{p-1} l_{ik} u_{kp}$$

$$(u_{kp} = 0, k = p + 1, \dots, n)$$

Știind că  $u_{pp} = 1$ , putem calcula elementele coloanei  $p$  a matricei  $L$  astfel:

$$l_{ip} = a_{ip} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{ik} u_{kp}, \quad i = p, \dots, n, \quad l_{ip} = 0 \quad i = 1, \dots, p - 1. \quad (9)$$

( $u_{kp}, k = 1, \dots, p - 1$  sunt elemente de pe linii ale matricei  $U$  calculate în pașii anteriori iar  $l_{ik}, k = 1, \dots, p - 1$ , sunt elemente cunoscute de pe coloanele din  $L$ , fiind calculate la pașii anteriori)

Calculul elementelor liniei  $p$  din matricea  $U$ :  $u_{pi}$ ,  $i = p + 1, \dots, n$   
 $(u_{pp} = 1, u_{pi} = 0, i = 1, \dots, p - 1)$

$$a_{pi} = \sum_{k=1}^n l_{pk} u_{ki} = \sum_{k=1}^p l_{pk} u_{ki} = l_{pp} u_{pi} + \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk} u_{ki}$$

$$(l_{pk} = 0, k = p + 1, \dots, n)$$

Dacă  $l_{pp} \neq 0$ , putem calcula  $u_{pi}$  astfel:

$$u_{pi} = \frac{a_{pi} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk} u_{ki}}{l_{pp}}, \quad i = p + 1, \dots, n \quad (10)$$

(elementele  $l_{pk}$ ,  $k = 1, \dots, p - 1$  sunt elemente de pe coloane ale matricei  $L$  calculate la pașii anteriori iar  $u_{ki}$ ,  $k = 1, \dots, p - 1$ , sunt elemente de pe linii deja cunoscute ale matricei  $U$ , fiind calculate anterior)

Dacă  $l_{pp} = 0$ , calculele se opresc, în acest caz descompunerea  $LU$  nu poate fi calculată, matricea  $A$  are un minor nul,  $\det A_p = 0$ .

### Observație:

Pentru memorarea matricelor  $L$  și  $U$  se poate folosi matricea  $A$  inițială. Vom folosi partea strict superior triunghiulară a matricei  $A$  pentru a memora elementele nenule  $u_{ij}$  ale matricei  $U$  cu  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = i + 1, \dots, n$  (cu excepția elementelor de pe diagonală) iar partea inferior triunghiulară a matricei  $A$  pentru a memora elementele  $l_{ij}$  ale matricei  $L$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, i$ . Se observă că nu am memorat nicăieri elementele  $u_{ii} = 1 \forall i = 1, \dots, n$ . Vom ține cont de acest lucru la rezolvarea sistemului superior triunghiular. Calculele (9) și (10) se pot face direct în matricea  $A$ .

### Exemplu

$$A = \begin{pmatrix} 2.5 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 6.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.8 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluția sistemului:

$$\begin{pmatrix} 2.5 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 6.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{este} \quad \begin{pmatrix} 1.6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$