矩阵光学应用

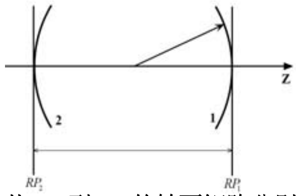
激光稳定谐振腔的设计

近轴光线的折射矩阵：

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{n'-n}{r} & 1\end{bmatrix}$$

折射→反射　　$n'=-n$

球面反射的反射矩阵：$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{-2}{r} & 1\end{bmatrix}$
（空气中）



反射镜**1**和**2**的反射矩阵**:**

$$\mathbf{R}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{-2}{r_1} & 1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{R}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{2}{r_2} & 1\end{bmatrix}$$

从$\mathbf{RP_1}$到$\mathbf{RP_2}$的转面矩阵分别为**:**

$$\mathbf{T}_1=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{d_1}{n_1'}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -d\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{T}_2=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{d_2}{n_2'}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -d\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

谐振腔的特性矩阵**M:**

$$\mathbf{M}=\mathbf{T}_2\mathbf{R}_2\mathbf{T}_1\mathbf{R}_1=\begin{bmatrix}m_{11} & m_{12}\\ m_{21} & m_{22}\end{bmatrix}$$

设特性矩阵**M**的两个特征值分别为λ_1和λ_2，属于λ_1和λ_2的特征向量分别为$\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$，即：

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_1=\lambda_1\mathbf{a}_1\qquad \mathbf{M}\mathbf{a}_2=\lambda_2\mathbf{a}_2$$

将近轴光线**a**表示成两个特征向量的线性组合，即：

$$\mathbf{a}=c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2$$

其中c_1、c_2为系数。

$$\mathbf{Ma} = \mathbf{M}(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2) = c_1\mathbf{Ma}_1 + c_2\mathbf{Ma}_2$$
$$= c_1\lambda_1\mathbf{a}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{M}^2\mathbf{a} = \mathbf{M}(\mathbf{M}(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2)) = \mathbf{M}(c_1\lambda_1\mathbf{a}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{a}_2)$$
$$= c_1\lambda_1\mathbf{Ma}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{Ma}_2 = c_1\lambda_1^2\mathbf{a}_1 + c_2\lambda_2^2\mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{M}^N\mathbf{a} = c_1\lambda_1^N\mathbf{a}_1 + c_2\lambda_2^N\mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{M}^N\mathbf{a} = c_1\lambda_1^N\mathbf{a}_1 + c_2\lambda_2^N\mathbf{a}_2$$

若欲将来回反射的光线保持在腔内而不从腔的侧面跑出去，则始终要求光线的投射高度***h***有限，故：

$$|\lambda_1| \le 1 \qquad |\lambda_2| \le 1$$

只有这样，所有的$\mathbf{M}^N\mathbf{a}$可保持在距离光轴的有限范围内，才能建立稳定振荡。

求λ_1和λ_2？ $|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{M}| = 0$ $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为单位矩阵。

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{M}| = \begin{vmatrix} \lambda - m_{11} & -m_{12} \\ -m_{21} & \lambda - m_{22} \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2 - (m_{11} + m_{22})\lambda + (m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}) = 0$$

$$m_{11} + m_{22} = 2 + \frac{4d}{r_1} - \frac{4d}{r_2} - \frac{4d^2}{r_1 r_2} = -2 + 4(1 + \frac{d}{r_1})(1 - \frac{d}{r_2})$$

$$\lambda^2 - (m_{11} + m_{22})\lambda + (m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12}) = 0$$

根据初等方程理论，可知：

$$\lambda_1 + \lambda_2 = m_{11} + m_{22} = -2 + 4(1 + \frac{d}{r_1})(1 - \frac{d}{r_2})$$

$$|\lambda_1| \le 1 \quad |\lambda_2| \le 1 \Longrightarrow -2 \le \lambda_1 + \lambda_2 \le 2$$

$$0 \le (1 + \frac{d}{r_1})(1 - \frac{d}{r_2}) \le 1$$

近轴光线在腔内反射而不从腔的侧面逸出腔外所必须满足的条件，亦即稳定腔的结构所必须满足的条件。

$$0 \le (1 + \frac{d}{r_1})(1 - \frac{d}{r_2}) \le 1$$