FUNCŢII

Problema nr. 1

Fie funcţia $f : R \to R$ definită astfel:

$$f(x) = x^3 - 2$$

a) Să se arate că funcţia $f(x)$ este o funcţie bijectivă.

b) Să se calculeze $f^{-1}(x)$.

Problema nr. 2

Fie A şi B două mulţimi. Fie F(x,y) predicatul „x este în corespondenţă cu y”, în care $x \in A$ şi $y \in B$. Folosiţi cuantificatorii învăţaţi şi predicatul F(x,y) pentru a evidenţia faptul că F(x,y) descrie o funcţie.

Problema nr. 3

Daţi exemple de funcţii definite pe **Z** cu valori în **Z** care să aibă următoarele caracteristici:

a) funcţie surjectivă, dar nu injectivă

b) funcţie injectivă, dar nu surjectivă

c) funcţie injectivă şi surjectivă

d) funcţie nici injectivă, nici surjectivă

Problema nr. 4

Fie trei funcţii $f : N \to N$, $g : N \to N$, $h : N \to N$ definite prin relaţiile:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 100 \\ 2 & x \le 100 \end{cases}$$

$$g(x) = x^2 + 1, \ \forall x \in N$$

$$h(x) = 2x + 1, \ \forall x \in N$$

a) Să se verifice dacă funcţiile f, g, h sunt funcţii injective şi/sau surjective.

b) Să se determine $h \circ (g \circ f)$ şi $(h \circ g) \circ f$ şi relaţia care există între cele două expresii.

Problema nr. 5

a) Fie mulţimea D cu 5 elemente şi mulţimea C cu 2 elemente. Se definesc funcţiile $f : D \to C$.

(i) Câte funcţii f putem defini?

(ii) Câte din aceste funcţii nu sunt surjective?

(iii) Câte din aceste funcţii nu sunt injective?

b) Fie mulţimea D cu 2 elemente şi mulţimea C cu 5 elemente. Se definesc funcţiile $g : D \to C$.

(i) Câte funcţii g putem defini?

(ii) Câte din aceste funcţii nu sunt surjective?

(iii) Câte din aceste funcţii nu sunt injective?

Problema nr. 6

Fie $S = \{x | x \in R \wedge x \geq 1\}$ şi $T = \{x | x \in R \wedge 0 < x \leq 1\}$

Să se găsească o funcţie $f : S \rightarrow T$ astfel încât funcţia *f* să fie funcţie bijectivă.

Indicaţie: trebuie să se demonstreze că expresia găsită este o funcţie şi că această funcţie este funcţie bijectivă.

Problema nr. 7

Fie $f : A \rightarrow B$ o funcţie inversabilă şi *C* şi *D* submulţimi ale mulţimii *B*.

a) Demonstraţi că $|C| = |f^{-1}(C)|$

b) Demonstraţi că dacă *C* şi *D* sunt disjuncte, atunci la fel sunt şi $f^{-1}(C)$ şi $f^{-1}(D)$

c) Demonstraţi că f^{-1} este inversabilă şi că $(f^{-1})^{-1} = f$

d) Demonstraţi că $\overline{f^{-1}(D)} = f^{-1}(\overline{D})$ (unde $\overline{M}$ este complementul mulţimii *M*).

e) Demonstraţi că dacă funcţia *f* este surjectivă şi *A* şi *B* sunt mulţimi finite atunci $|A| = |B|$

Problema nr. 8

Fie $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ şi $h : A \times B \rightarrow C$ trei funcţii şi funcţia $k : A \times B \rightarrow C$ este definită de expresia $k(x, y) = h(g(y), f(x))$, $\forall x \in A$ şi $\forall y \in B$.

(i) Să se demonstreze că dacă *f*, *g*, *h* sunt funcţii injective, atunci *k* este funcţie injectivă.

(ii) Să se demonstreze că dacă *f*, *g*, *h* sunt funcţii surjective, atunci *k* este funcţie surjectivă.

Problema nr. 9

Să se demonstreze că dacă x este un număr real atunci $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$.

Problema nr. 10

Să se demonstreze că $\lceil x + y \rceil = \lceil x \rceil + \lceil y \rceil$.

Problema nr. 11

Fie funcţia $f : A \rightarrow B$ şi S şi T submulţimi ale mulţimii A.

(i) Să se demonstreze că $f(S \cap T) \subseteq f(S) \cap f(T)$.

(ii) Ce condiţie trebuie să îndeplinească funcţia *f* pentru ca să avem egalitate între membrul stâng şi cel drept al relaţiei date? Demonstraţie.

(iii) Să se demonstreze că $f(S \cup T) = f(S) \cup f(T)$.

Problema nr. 12

Fie *S* o submulţime a mulţimii universale *U*. Funcţia caracteristică f_S a lui *S* este o funcţie al cărei domeniu este *U* şi al cărei codomeniu este reprezentat de mulţimea $\{0, 1\}$ astfel încât $f_S(x) = 1$ dacă *x* este element al mulţimii *S* şi $f_S(x) = 0$ dacă *x* nu este element al mulţimii *S*. Fie două mulţimi *A* şi *B*. Să se demonstreze că pentru orice *x* avem relaţiile:

(i) $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$ (ii) $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x)$

Problema nr. 13

Fie $f : S \to T$ şi $g : T \to U$ două funcţii.

Să se demonstreze că dacă $g \circ f$ este o funcţie injectivă atunci f este o funcţie injectivă.

Să se demonstreze că dacă $g \circ f$ este o funcţie surjectivă atunci g este o funcţie surjectivă.

Problema nr. 14

Fie funcţia $f : R^{+} \to R$ definită astfel: $f(x) = x^2$. Să se determine:

a) $f^{-1}(\{1\})$ b) $f^{-1}(\{0 < x < 1\})$ c) $f^{-1}(\{x \mid x > 4\})$

Problema nr. 15

Fie funcţia $g : R \to Z$ definită astfel: $g(x) = \lfloor x \rfloor$. Să se determine:

a) $g^{-1}(\{0\})$ b) $g^{-1}(\{-1,0,1\})$ c) $g^{-1}(\{x \mid 0 < x < 1\})$