MULŢIMI 1. Definiţii. Operaţii cu mulţimi.

1. Fie $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$. Fie următoarele enunţuri:

1) $\{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$ este mulţimea putere a lui A.
2) $A \times \{\varnothing\} = \varnothing$
3) Fie $B = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Atunci $B \in A$ şi $B \subseteq A$.
4) $A \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

Care din cele patru enunţuri este adevărat? Justificaţi răspunsul pentru fiecare enunţ.

2. Fie următoarele mulţimi:

A = {68, 28}

B = { ploaie, zăpadă, soare}

C = {apă, gheaţă}

D = {{apă}, {lapte}}

E = {(apă, gheaţă)}

F = {cerneală}

Pentru fiecare din următoarele expresii, listaţi elementele mulţimii sau calculaţi valoarea (după cum este cazul):

a) $P(B)$

b) $P(E)$

c) $(A \times F) \cup D$

d) $P(C) - D$

e) $P(C) \cap P(E)$

f) $|P(A \cup B) \cup P(D \cup E)|$

Justificaţi fiecare răspuns.

3. Fie ***R*** mulţimea cursurilor pe care le frecventează Radu şi ***S*** mulţimea cursurilor pe care le frecventează Simona. Folosiţi aceste două mulţimi pentru a descrie următoarele mulţimi:

a) mulţimea cursurilor pe care le frecventează atât Radu, cât şi Simona.

b) mulţimea cursurilor pe care nu le frecventează nici Radu şi nici Simona. (Definiţi mulţimea universală la care ne raportăm).

c) Mulţimea cursurilor pe care le frecventează Radu, dar nu le frecventează Simona.

4. *Definiţie*: un tabel de apartenenţă este similar unui tabel de adevăr: prima coloană cuprinde elementele mulţimilor analizate, iar următoarele coloane conţin valorile de adevăr ale propoziţiilor de tipul "elementul α aparţine mulţimii A". Exemplu: Fie mulţimile X = {1,2,4,8} şi Y = {3,5,8}. Să se construiască tabelul de apartenenţă pentru cele două mulţimi şi pentru reuniunea lor:

α	X	Y	$X \cup Y$
1	1	0	1
2	1	0	1
3	0	1	1
4	1	0	1
5	0	1	1
8	1	1	1

Fie mulţimile $A = \{a, b, c\}$ şi $B = \{a, b, d, e\}$. Să se determine elementele mulţimilor:

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A \setminus B$

d) $B \setminus A$

e) $A \Delta B$

f) $A \times B$

g) $P(A)$

h) $P(A \cap B)$

Să se construiască tabelele de apartenenţă şi să se deseneze (unde este posibil) diagramele Venn.

5. Să se determine mulţimile A şi B ştiind că sunt satisfăcute simultan egalităţile:

a) $A \cap B = \{3,4\}$

b) $A \setminus B = \{1\}$

c) $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$

6. Să se determine mulţimile A şi B care satisfac simultan condiţiile:

a) $A \setminus B = \{b,e,h\}$

b) $B \setminus A = \{a,m,f\}$

c) $A \cap B = \{g,i\}$

7. Să se determine mulţimile **A** şi **B** ştiind că:

(1) $A \cap B = \{b,g\}$

(2) $A \Delta B = \{a,c,d,e,f,h,i,j\}$

(3) $\{\{b,c,d\},\{b,c,d,e\}\} \not\subset P(A)$

(4) $\{b,c,e\} \in P(A)$

(5) $\{(b,a),(c,h)\} \subset A \times B$

(6) $(a,f) \in B \times A$

(7) $\{i\} \setminus A = \varnothing$

(8) $|P(A)| = 128$

Pentru fiecare element plasat într-o mulţime sau alta se va specifica şi condiţia care a permis acest lucru.

8. Să se determine elementele mulţimilor **A** şi **B** ştiind că:

a). $|A| = |B|$

b). $A \cap B = \{d,e\}$

c) $\{a,c,d,e\} \notin P(A)$

d) $A \Delta B = \{a,b,c,f,g,h\}$

e) $\{(h,d),(d,e)\} \not\subset B \times A$

f) $\{a,d,e\} \notin P(B)$

g) $\{f\} \setminus A = \varnothing$

Pentru fiecare element plasat într-o mulţime sau alta se va specifica şi condiţia care a permis acest lucru.

9. Să se determine elementele mulţimilor A şi B ştiind că:

a. $A \Delta B = \{1,2,5,6,7,8\}$

b. $A \cap B = \{3,4\}$

c. $\{1,3,4,6\} \in P(A)$

d. $\{(3,7),(5,7),(6,8)\} \subset A \times B$

e. $|P(B)| = 16$

Argumentaţi fiecare plasare a unui element în una din mulţimile A sau B

10. Demonstraţi următoarele propoziţii (se vor folosi definiţiile operaţiilor cu mulţimi):

a) $(A \cap B) \subseteq A$ b) $A \subseteq (A \cup B)$ c) $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$

d) $(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus C$

11. Demonstraţi sau daţi un contraexemplu pentru fiecare din enunţurile următoare:

a) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

b) $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

c) $P(A \setminus B) = P(A) \setminus P(B)$

12. Fie X, Y, Z submulţimi nevide ale mulţimii universale U. Să se demonstreze că $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$ ştiind că $A = B \leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$.

13. a) Fiind dată mulţimea $A = \{x, y\}$ scrieţi toate 3-tuplele care se pot forma plecând de la această mulţime.

b) Fiind dată mulţimea $A = \{1,2\}$ scrieţi toate 4-tuplele care se pot forma plecând de la această mulţime.

14. Fiind dată mulţimea $A = \{a, b, c, d\}$ să se calculeze:

a) numărul de şiruri de 6 caractere care pot fi formate cu elementele mulţimii A.

Indicaţie: Un şir de 6 caractere format din elementele mulţimii A poate fi privit ca un n-tuplu, n-tuplu care este un element al mulţimii $A^6 = A \times A \times A \times A \times A \times A$.

b) numărul de şiruri de 6 caractere care pot fi formate cu elementele mulţimii A şi care au ca prim caracter litera *a* sau litera *c*.

c) numărul de şiruri de 6 caractere care pot fi formate cu elementele mulţimii A şi care au ca prim caracter litera *a* sau litera *c* şi care conţin cel puţin o apariţie a caracterului *b*.

d) numărul de şiruri de 6 caractere care pot fi formate cu elementele mulţimii A şi care au ca prim caracter litera *a* sau litera *c* şi care conţin cel puţin o apariţie a caracterului *b* sau a caracterului *d*.

e) numărul de şiruri de 6 caractere care pot fi formate cu elementele mulţimii A şi care au ca prim caracter litera *a* sau litera *c* şi care conţin cel puţin o apariţie a caracterului *b* şi cel puţin o apariţie a caracterului *d*.

15. Să se determine câte şiruri de biţi de lungime 8 încep cu 1 sau se termină cu 00.

16. Câte şiruri diferite de patru caractere alfanumerice

a. încep cu litera a.

b. încep cu o vocală.

17. Un oficiu juridic foloseşte 3 litere urmate de trei cifre pentru a identifica fiecare caz. Câte cazuri pot fi înregistrate în oficiu?

18. Fiind date mulţimile A, B, C, D, să se deducă formula de calcul pentru cardinalul următoarelor mulţimi:

1) $A \cup B \cup C$

2) $A \cup B \cup C \cup D$

19. În urma unui sondaj, se constată ca elevii dintr-o şcoală din oraş au 3 pasiuni:

a) jocurile pe calculator

b) mersul pe role

c) literatura SF

Din analiza rezultatelor sondajului a reieşit faptul că 15 elevi au toate cele 3 pasiuni, 45 de elevi sunt pasionaţi de jocuri pe calculator şi mersul pe role, 40 de elevi sunt pasionaţi de mersul pe role şi literatura SF, iar 25 de elevi sunt pasionaţi de jocuri pe calculator şi literatura SF.

Ştiind că fiecare elev din şcoală are cel puţin o pasiune şi că de jocuri pe calculator sunt pasionaţi 70 de elevi, mersul pe role are 80 de adepţi, iar literatura SF pasionează 90 de elevi, să se determine:

1) numărul elevilor din şcoală.
2) numărul elevilor care pe lângă jocurile pe calculator mai au o pasiune (fie mersul pe role, fie literatura SF).
3) numărul elevilor care au o singură pasiune.
4) numărul elevilor care au două pasiuni.

Pentru rezolvare se vor folosi diagrame Venn şi relaţii între cardinalele mulţimilor.

20. Se face o monitorizare a 200 de studenţi pentru a vedea dacă au promovat examenele de matematică, fizică şi informatică. Rezultatele arată că 90 de studenţi au luat examenul la informatică, 110 au luat examenul la matematică şi 60 pe cel de fizică.

S-a mai constatat că există 20 de studenţi care au luat examenul de informatică şi pe cel de matematică, 20 de studenţi au luat examenul de informatică şi pe cel de fizică, iar 30 de studenţi au luat examenele de matematică şi fizică.

Ne interesează câţi studenţi au luat toate cele trei examene?

21. Pe un şantier de construcţii lucrează 3 muncitori. Fie aceştia A, B, C. Muncitorii au truse personale de scule, dar anumite unelte le folosesc în comun. Se ştie că muncitorul A foloseşte 8 unelte, muncitorul B foloseşte 10 unelte, iar muncitorul C foloseşte 5 unelte. De asemenea, 3 unelte sunt folosite în comun de muncitorii A şi B, 2 unelte sunt folosite de muncitorii A şi C şi tot 2 unelte folosesc în comun muncitorii B şi C. Toţi cei trei muncitori folosesc în comun 2 unelte.

1) Câte unelte distincte sunt necesare pentru lucru?

2) Câte unelte personale foloseşte fiecare muncitor?

22. Fie A, B, C trei trasee de autobuz din oraş. Notăm tot cu A, B şi C mulţimile staţiilor de autobuz de pe fiecare traseu.

Se cunosc următoarele:

a) traseul A are 25 de staţii, traseul B are 30 de staţii, iar traseul C are 40 de staţii.

b) Traseele A şi B au 6 staţii comune, traseele A şi C au 5 staţii comune, iar traseele B şi C au 4 staţii comune.

c) Există 2 staţii comune celor trei trasee.

Să se determine:

1) Câte staţii diferite există pe cele trei trasee de autobuz?

2) Câte staţii de pe traseul A nu sunt şi staţii de pe traseul B?

3) Câte staţii de pe traseul A nu sunt staţii pentru nici un alt traseu?

23. În Japonia are loc un turneu la care participă trei echipe de fotbal. Fie aceste echipe A, B şi C. Pentru acest turneu s-au vândut 35000 de bilete. Dintre cei care au cumpărat bilete 20000 nu sunt suporterii nici unei echipe, ei şi-au cumpărat bilete doar pentru a vedea spectacolul. Dar, 15000 sunt suporterii echipelor B şi C (sau ai ambelor echipe). 13000 susţin echipele A sau B (sau pe amândouă). 7000 dintre cei care şi-au cumpărat bilete susţin echipa B, 1000 din spectatori susţin toate cele trei echipe.

Să se determine câţi suporteri au în comun echipele A şi C. (Nu se vor folosi diagrame Venn).