GRAFURI

1. Să se deseneze grafurile simple şi conexe care au următoarele secvenţe de grade:

a. (1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 6)

b. (3, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5)

c. (1, 2, 3, 3, 3, 4, 4)

d. (2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)

2. Desenaţi grafuri cu următoarele proprietăţi sau demonstraţi de ce astfel de grafuri nu există:

(i) un graf simplu cu cinci vârfuri, fiecare de grad 2

(ii) un graf simplu cu secvenţa de grade (3,3,3,3,4)

(iii) un graf simplu cu 6 muchii şi secvenţa de grade (1,2,3,4,6)

(iv) un graf simplu cu 6 vârfuri şi secvenţa de grade (2,2,2,4,5,5)

(v) un graf simplu cu cinci vârfuri construit astfel încât fiecare vârf este incident cu cel puţin o muchie, dar nu sunt două muchii adiacente.

3. La o petrecere unii oameni au dat mâna de un număr par de ori, alţii de un număr impar de ori. Să se demonstreze că un număr par de oameni au dat mâna de un număr impar de ori.

4. Este posibil ca într-un grup de 115 persona fiecare persoană să fie prietenă cu exact alte 11 persoane?

5. Se defineşte un semigraf ca fiind un graf simplu cu **2n** noduri, fiecare nod având gradul **n**, **n**≥**1**. Poate un semigraf să aibă mai mult de o componentă conexă? Dacă da, daţi un exemplu. Dacă nu, explicaţi.

6. Să se demonstreze că într-un graf neorientat, suma pătratelor gradelor nodurilor este un număr par sau daţi un contraexemplu.

7. Să se demonstreze că într-un graf simplu şi conex de ordin **n≥2**, cel puţin două noduri au acelaşi grad.

8. Să se demonstreze că un graf neorientat bipartit nu poate conţine un ciclu care are un număr impar de noduri.

9. Fie **G** un graf neorientat. Să se demonstreze că există un drum de la fiecare nod de grad impar la un alt nod de grad impar.

10. Fie V = {A, B, C, D, E, F} şi E = {A-F, B-D, B-E, C-D, C-E, D-E} şi graful G = (V, E).

a) Să se deseneze graful G şi să se marcheze componentele conexe.

b) Fie graful J = ({A, B, C, D}, {D-B, C-D}). Să se deseneze graful complementar grafului **J**.

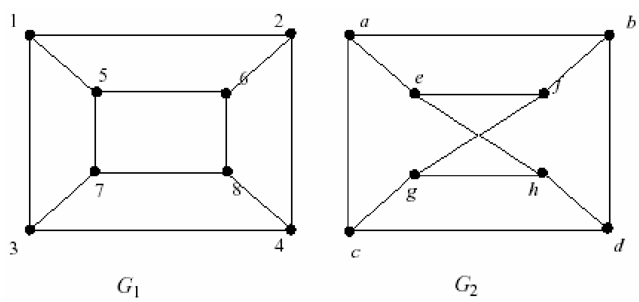
c) Să se demonstreze următoarea teoremă:

*Dacă un graf neorientat **G** nu este conex, atunci complementul său este un graf conex.*

d) Reciproca teoremei de la punctul c) este adevărată? Demonstraţi.

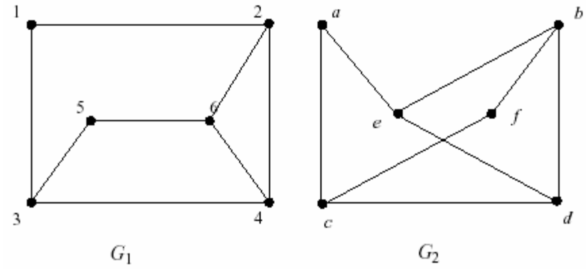
11. a). Fie G1 şi G2 două grafuri izomorfe. Să se demonstreze că dacă există un ciclu de lungime **k** în graful G1, atunci există un ciclu de lungime **k** în graful G2.

(b) Fie următoarele grafuri:

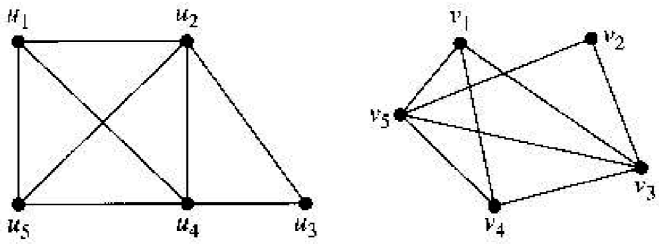


Sunt grafurile din figură izomorfe? Justificaţi răspunsul. Se poate obţine matricea de adiacenţă a grafului G2 din matricea de adiacenţă a grafului G1? Cum? În cazul în care cele două grafuri sunt izomorfe care este bijecţia asociată?

12. Sunt următoarele două grafuri izomorfe? Justificaţi răspunsul. Se poate obţine matricea de adiacenţă a grafului G2 din matricea de adiacenţă a grafului G1? Cum? În cazul în care cele două grafuri sunt izomorfe care este bijecţia asociată?

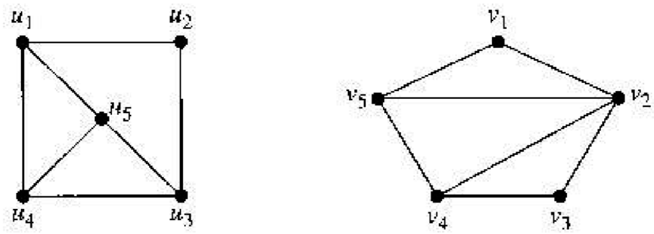


13. Sunt următoarele două grafuri izomorfe? Justificaţi răspunsul. Se poate obţine matricea de adiacenţă a grafului G2 din matricea de adiacenţă a grafului G1? Cum? În cazul în care cele două grafuri sunt izomorfe care este bijecţia asociată?



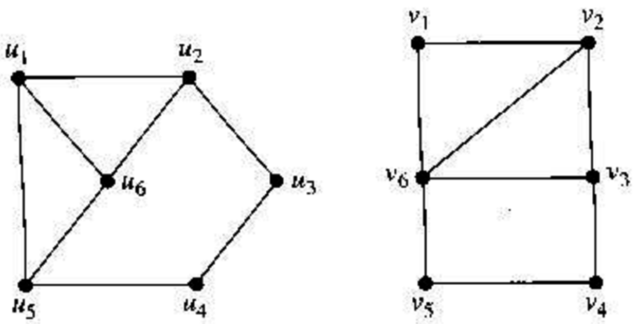
G1 G2

(a)



G1 G2

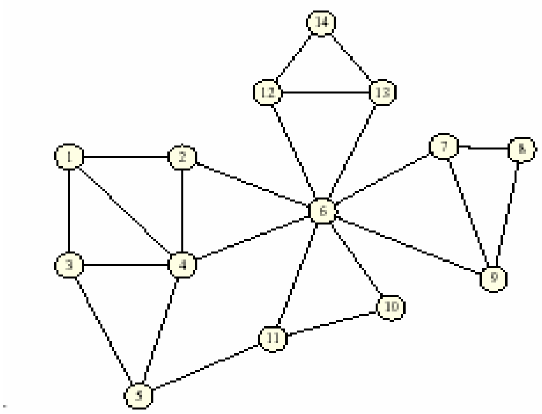
(b)



G1 G2

(c)

14. Pentru graful din figură (notat cu G = (V,E)), determinaţi:



(i) matricea de adiacenţă (ii) secvenţa de grade

(iii) numărul cromatic (iv) ordinul şi mărimea grafului

(v) $\Delta(G)$ şi $\delta(G)$ (vi) desenaţi două subgrafuri

(vii) dacă graful este hamiltonian (viii) dacă graful este eulerian

15. Fie următoarea matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) Poate această matrice reprezenta matricea de adiacenţă a unui graf simplu neorientat? Justificaţi.

(ii) Fără să desenaţi graful determinaţi secvenţa de grade. Cum faceţi acest lucru?

(iii) În cazul în care avem de a face cu matricea de adiacenţă a unui graf, câte componente conexe are acest graf? Desenaţi graful, încercuiţi şi numerotaţi componentele conexe.

(iv) Determinaţi ordinul şi mărimea grafului.

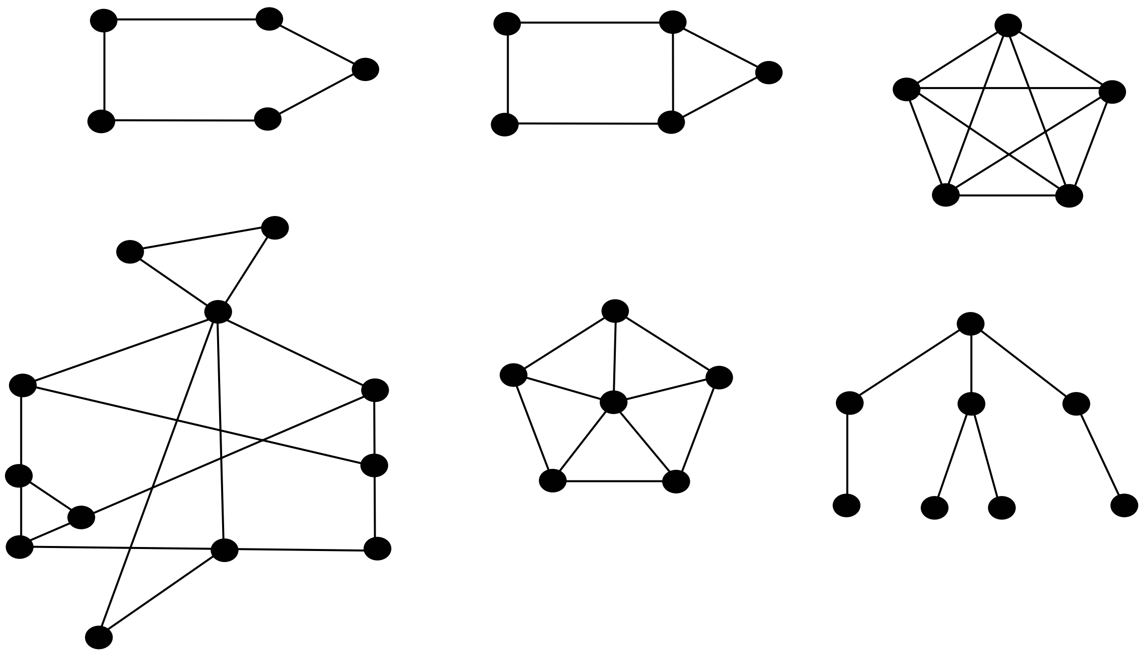
(v) Care este gradul maxim şi gradul minim?

(vi) Câte vârfuri pendante şi câte vârfuri izolate are graful?

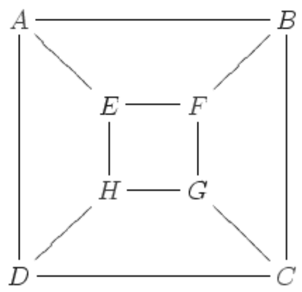
(vii) Determinaţi numărul cromatic al grafului.

(viii) Care este mărimea grafului complet de ordin 6?

16. Să se determine numărul cromatic al următoarelor grafuri:



17. Fie graful din figură:



(i) Determinaţi secvenţa de grade a grafului.

(ii) Este graful bipartit? De ce?

(iii) Desenaţi suggraful grafului dat determinat de vârfurile {E, F, B, C, G}

(iv) Desenaţi graful complementar

(v) Scrieţi matricea de adiacenţă a grafului.

(vi) Este graful hamiltonian. Justificaţi şi în caz afirmativ indicaţi un circuit hamiltonian.

(vii) Este graful eulerian? Justificaţi şi în caz afirmativ indicaţi un circuit eulerian.

18. Care este numărul cromatic al grafului C_n (graful circuit de ordin n)?

19. Calul pe o tablă de şah.

Un cal aflat pe poziţia (x,y) pe o tablă de şah se poate muta pe una din poziţiile $(x \pm 2, y \pm 1)$ sau $(x \pm 1, y \pm 2)$, dacă aceste poziţii există. Turneul unui cal este o secvenţă de mutări pornind dintr-o anumită poziţie şi vizitând fiecare pătrat o singură dată. Turneul unui cal se numeşte reentrant dacă există o mişcare legală care să permită aducerea calului de pe ultima poziţie pe prima (se închidă un circuit). Putem modela turneul unui cal folosind un graf care are ca vârfuri pătratele de pe tabla de şah şi ca muchii mutările posibile ale calului.

a. Să se arate că determinarea unui turneu reentrant pe o tablă de şah de dimensiuni $m \times n$ este echivalentă cu determinarea unui circuit hamiltonian în graful respectiv.

b. Să se arate că graful reprezentând mişcările permise ale unui cal pe o tablă de şah de dimensiuni $m \times n$ este un graf bipartit indiferent de valorile lui *m* şi *n*.

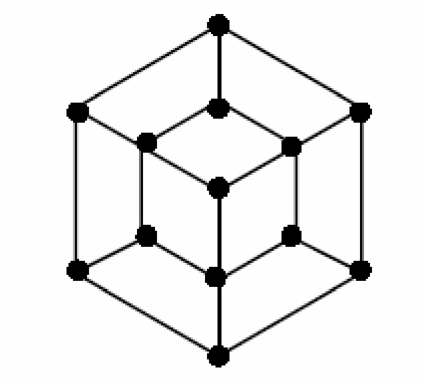
c. Să se demonstreze că nu există un turneu reentrant pe o tablă de şah de dimensiuni $m \times n$, cu *m* şi *n* numere impare.

20. a. Este posibil pentru un cal de pe o tablă de şah să fie mutat astfel încât fiecare mişcare să fie făcută o singură dată?

b. Dar pentru un turn?

21. a. Fie G = (V,E) un graf bipartit cu un număr impar de vârfuri. Să se demonstreze că graful G nu este graf hamiltonian.

b. Să se demonstreze că graful de mai jos nu este hamiltonian.



c. Fie o tablă de şah de dimensiuni $n \times n$, n număr impar. Să se demonstreze că un cal nu poate fi mutat pe această tablă de şah astfel încât să viziteze toate pătratele şi să revină (printr-o mutare permisă0 în poziţia de start.

22. Într-o sesiune de examene 15 studenţi (notaţi cu A ... O) trebuie să susţină 6 examene (E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6) astfel:

E_1 ={B, C, M, N, G, J} E_2 ={A, B, G, O} E_3 ={A, C, D, E, I}

E_4 ={D, O, L, K, H} E_5 ={M, E, F, L, I} E_6 ={N, F, K, H, J}

Fiecare examen se desfăşoară pe durata unei zile. Care este numărul minim de zile necesar pentru programarea celor 6 examene astfel încât fiecare student să poată susţine toate examenele care-l interesează (nici un student să nu aibă suprapuse examene)? Justificaţi răspunsul.

Există examene care pot fi programate în aceeaşi zi? Care şi de ce?

23. Într-un departament al unei universităţi americane există şase comitete care trebuie să se întâlnească lunar. Aceste comitete sunt: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6. Componenţa acestor comitete este următoarea:

C_1 = {A, M, K} C_2 = {M, L, R} C_3 = {A, R, K}

C_4 = {L, R, K} C_5 = {A, M} C_6 = {M, R, K}

Care este numărul minim de zile în care se pot întruni cele şase comitete, fără ca să existe suprapuneri de activitate pentru nici unul din membrii comisiilor? Justificaţi răspunsul.

Există comitete care îşi pot desfăşura activitatea în aceeaşi zi? Care comitete şi de ce?

24. Un turist **T** ajunge în oraşul **O** cu trenul (deci la gară) şi trebuie să plece mai departe cu avionul (de la aeroport). În afară de aceste două obiective, în oraş mai există alte patru obiective interesante. Ceea ce a făcut faima acestui oraş sunt însă străzile sale care leagă cele şase obiective astfel încât turistul nostru îşi propune să le parcurgă pe toate, fără a trece însă de două ori pe aceeaşi stradă.. Notăm cele şase obiective cu A, B, C, D, E, F. Turistul nostru nu are harta întregului oraş, dar ştie că din A poate ajunge la B şi F; din B la C, D şi E; din C la D, E şi F; din D la F şi din E la F.

a) Este posibilă parcurgerea tuturor străzilor din oraş? Care este itinerarul turistului prin oraş în acest caz şi care din cele 6 obiective este gara şi care este aeroportul? Justificarea se face pe baza teoriei grafurilor. Cum?

b) Este posibil ca turistul nostru să plece de la gară (stabilită la punctul a) şi să viziteze fiecare obiectiv din oraş o singură dată? Care sunt străzile parcurse de turist? Justificaţi răspunsul folosind noţiunile de teoria grafurilor învăţate.

25. **(a)** Fie *n* un întreg, n ≥ 3. Arătaţi că un graf simplu cu n – 2 vârfuri are cel mult $\frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6)$ muchii.

(b) Fie un graf conex simplu de ordin *n*, cu n ≥ 3 şi fie ***v*** şi ***w*** vârfuri ale lui ***G*** care nu sunt adiacente.

(i) Arătaţi că graful G_1, format din graful ***G*** prin îndepărtarea vârfurilor ***v*** şi ***w*** şi a tuturor muchiilor incidente lor, are exact $|E(G)| - (d_G(v) + d_G(w))$ muchii.

(ii) Folosiţi punctele (a) şi (b)(i) pentru a demonstra că: $d_G(v) + d_G(w) \geq |E(G)| - \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6)$

(iii) Să presupunem că $|E(G)| \geq \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$. Arătaţi că $d_G(v) + d_G(w) \geq n$.

(c) Se poate trage concluzia, bazată pe o anumită teoremă din curs (care?) că dacă ***G*** este un graf simplu conex cu *n* ≥ 3 vârfuri şi $|E(G)| \geq \frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$, atunci ***G*** este hamiltonian?

26. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor propoziţii. Pentru fiecare din ele daţi un contraexemplu sau o demonstraţie:

(a) Dacă G_1 şi G_2 sunt subgrafuri ale unui graf G cu $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ atunci $E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$.

(b) Dacă G_1 şi G_2 sunt subgrafuri ale unui graf G cu $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ atunci G este neconex.

27. Câte canale TV diferite sunt necesare pentru şase staţii de emisie situate la distanţele date în tabelul următor ştiind că două staţii de emisie nu pot folosi acelaşi canal dacă ele se găsesc la o distanţă mai mică de 150 km.

	1	2	3	4	5	6
1		85	175	200	50	100
2	85		125	175	100	160
3	175	125		100	200	250

4	200	175	100		210	220
5	50	100	200	210		100
6	100	160	250	220	100	

28. Într-o buclă a unui program scris în limbajul **C** apar şapte variabile. Variabilele şi paşii în timpul cărora variabilele trebuie memorate sunt:

Variabila t: paşii de la 1 la 6

Variabile u: pasul 2

Variabile v: paşii de la 2 la 4

Variabila w: paşii 1, 3, 5

Variabila x: paşii 1 şi 6

Variabila y: paşii de la 3 la 6

Variabile z: paşii 4 şi 5.

Câte registre index sunt necesare pentru stocarea variabilelor din buclă?

29. O grădină zoologică vrea să amenajeze habitate naturale pentru animalele pe care le deţine. Din nefericire, unele animale vor fi mâncate de altele, dacă acestea din urmă ajung în preajma primelor. Cum poate fi folosit un graf pentru modelarea amplasării animalelor şi cum poate fi folosită colorarea vârfurilor grafului obţinut pentru a determina care animale pot fi puse în ac4laşi habitate şi care nu.

Care este numărul minim de habitate care trebuie amenajate?