Vedere Artificială (Computer Vision)

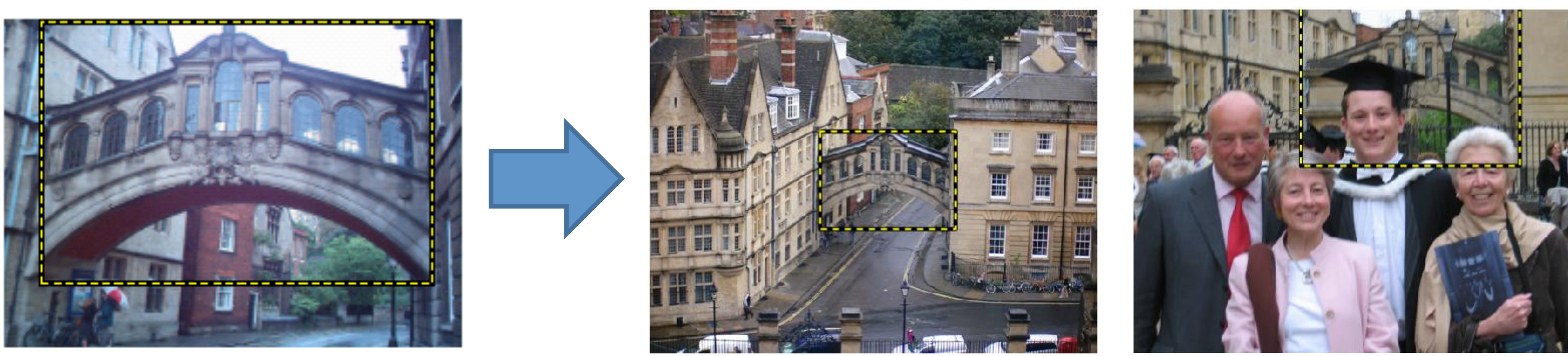
Bogdan Alexe

bogdan.alexe@fmi.unibuc.ro

anul 2, master Informatică, semestrul I, 2019-2020

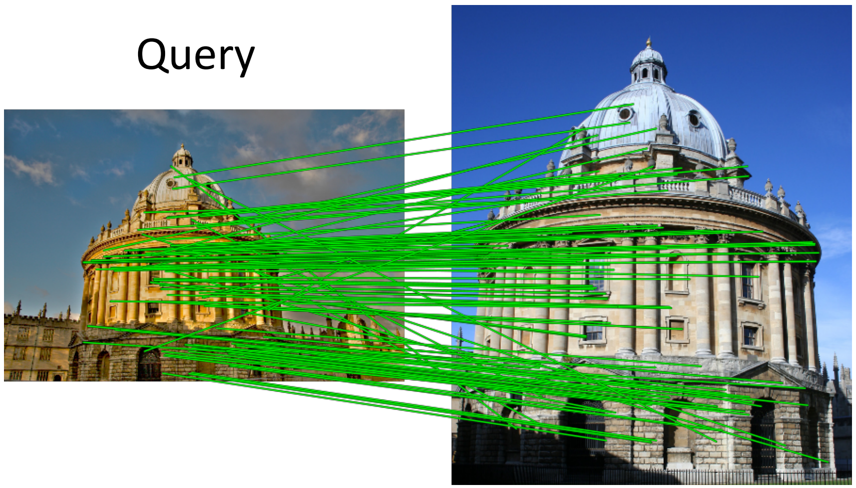
Recapitulare – cursul trecut

- Recunoașterea specifică de obiecte
  - indexarea eficientă a trăsăturilor locale
  - modelul Bag of Visual Words
  - verificare spațială



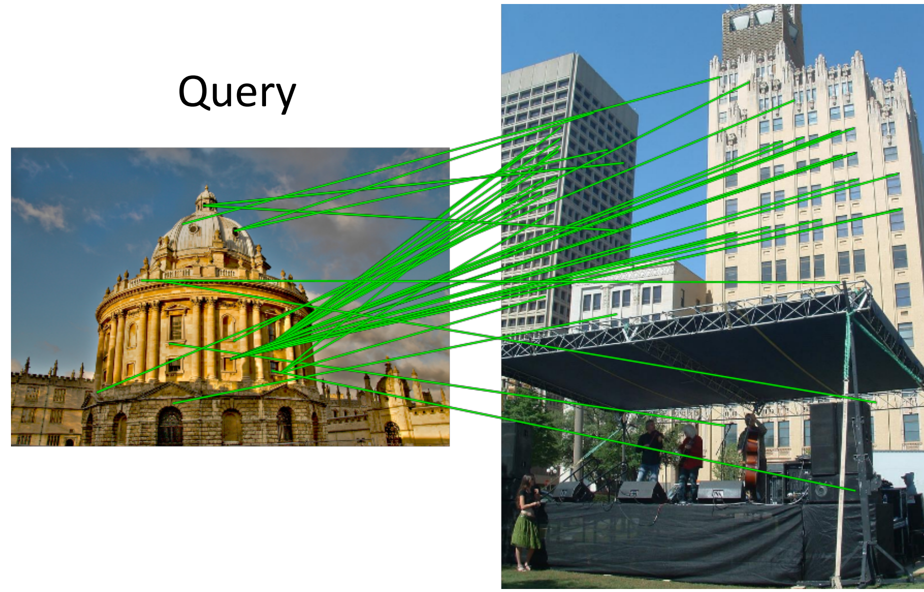
Verificare spațială

Query



Imagine din baza de date
cu similaritate mare BOW

Query

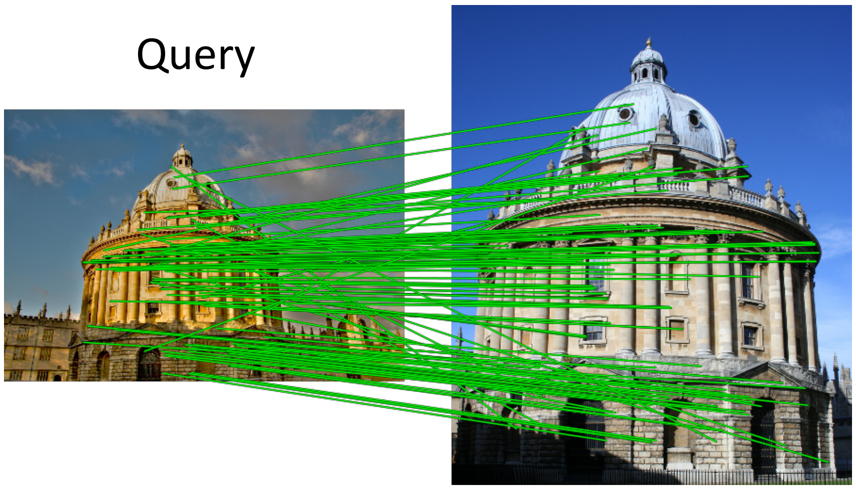


Imagine din baza de date
cu similaritate mare BOW

Ambele perechi de imagini au multe cuvinte vizuale în comun

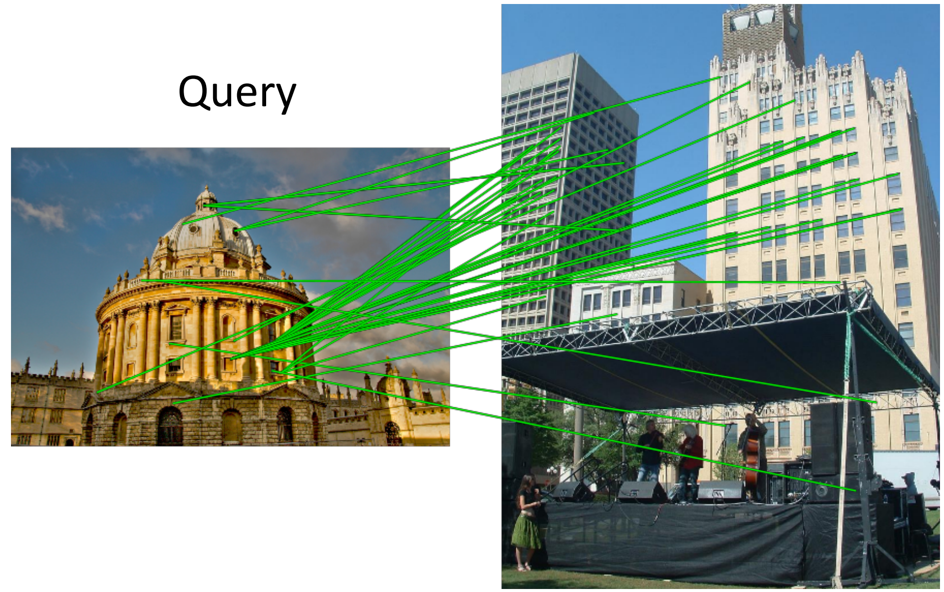
Verificare spațială

Query



Imagine din baza de date
cu similaritate mare BOW

Query



Imagine din baza de date
cu similaritate mare BOW

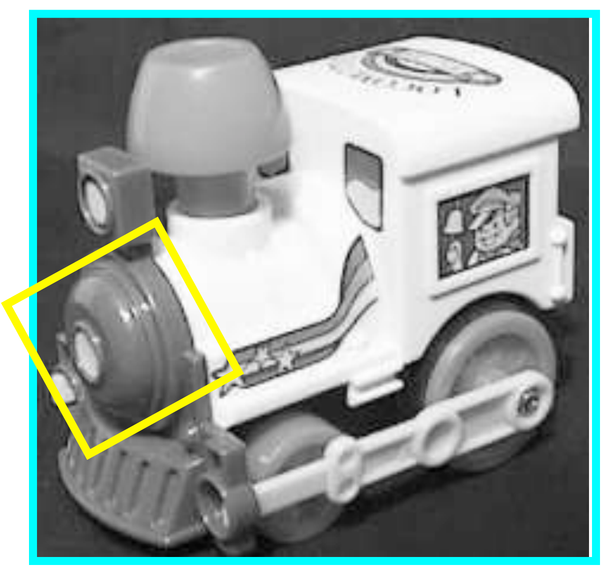
Numai o parte din corespondențe sunt mutual consistente.

Verificare spațială: două strategii de bază

- Transformata Hough generalizată
  - fiecare corespondeță votează pentru poziție, mărime, orientare în spațiul Hough parametrizat al modelului obiectului
  - verificarea parametrilor cu număr de voturi mare
- RANSAC
  - estimează o transformare geometrică și verifică numărul de puncte inlier (numărul de corespondențe care verifică transformarea geometrică)

Transformata Hough generalizată

- Dacă folosim trăsături locale (ca SIFT) care sunt invariante la mărime, rotație și translație, atunci fiecare trăsătură găsită drept corespondentă votează pentru o anumită mărime, translație și orientare a modelului în imagine.

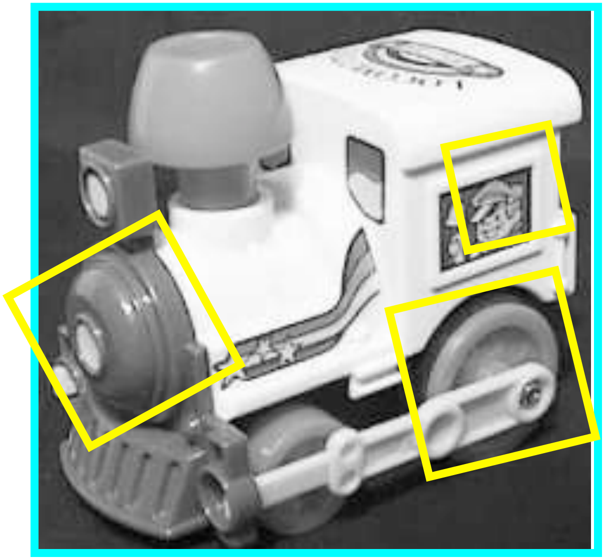


Model

Imagine test

Transformata Hough generalizată

- O ipoteză generată de o singură corespondență poate fi insuficientă;
- Fiecare corespondeță **votează** pentru a ipoteză în spațiul Hough asociat



Model

Imagine test

Detalii de implementare (Lowe'04)

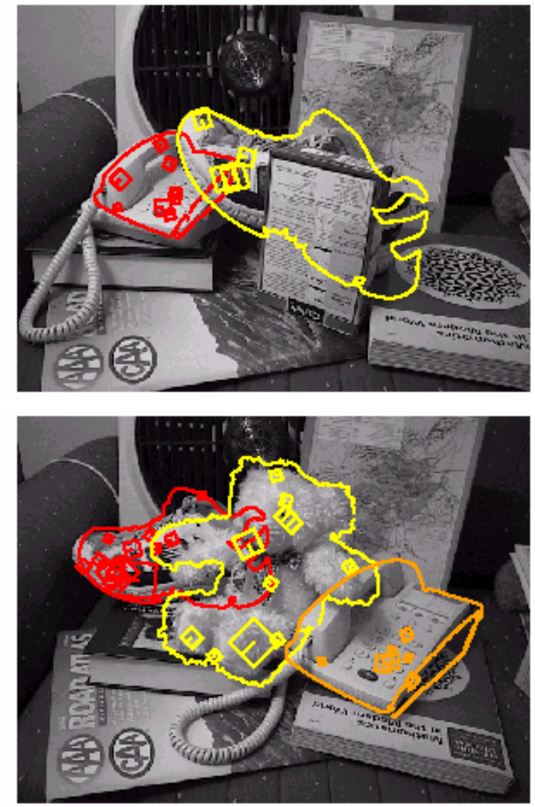
- **Antrenare:** pentru fiecare trăsătură a modelului, înregistrează poziția în 2D, mărimea și orientarea modelului (relativ la un cadru normalizat – bounding-box)
- **Testare:** fiecare trăsătură SIFT găsită drept corespondeță în imaginea test votează într-un spațiu Hough 4D asociat
  - Intervale de 30 de grade în orientare, factor 2 pentru mărime, 0.25 *diagonala imaginii pentru poziție
  - O trăsătură votează pentru cele mai apropiate 2 intervale în fiecare dimensiune (16 voturi)
- Găsește toate punctele din matricea de acumulare Hough care au cel puțin 3 puncte și realizează o verificare geometrică
  - Estimează o trasformare afină

David G. Lowe. **"Distinctive image features from scale-invariant keypoints."** *IJCV* 60 (2), pp. 91-110, 2004.

Rezultate (Lowe'04)

Background extras

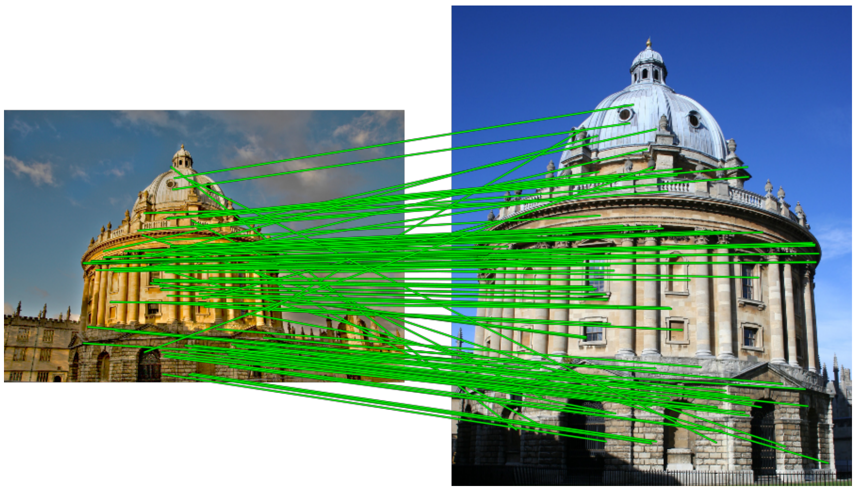
Obiecte găsite

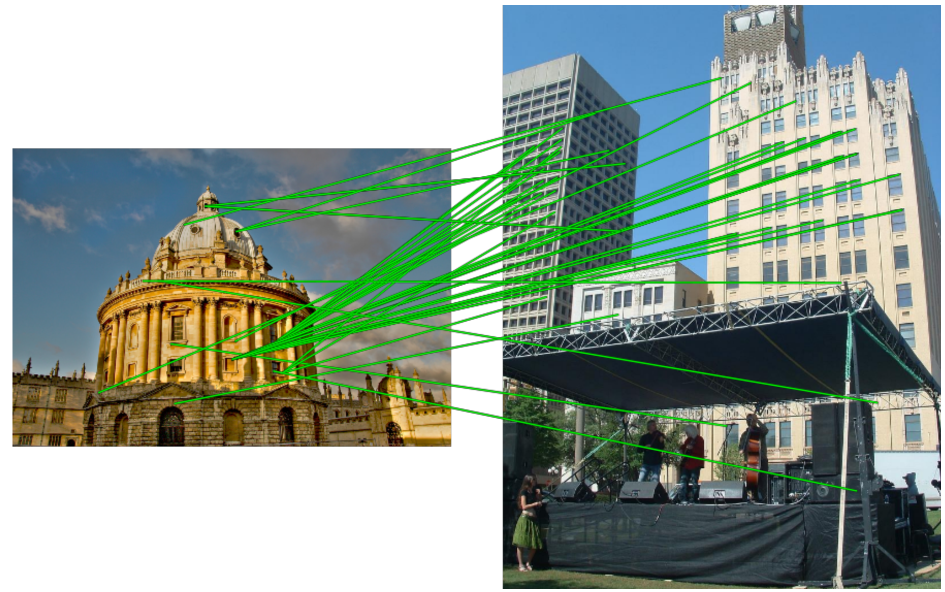


Obiecte găsite chiar dacă sunt mascate

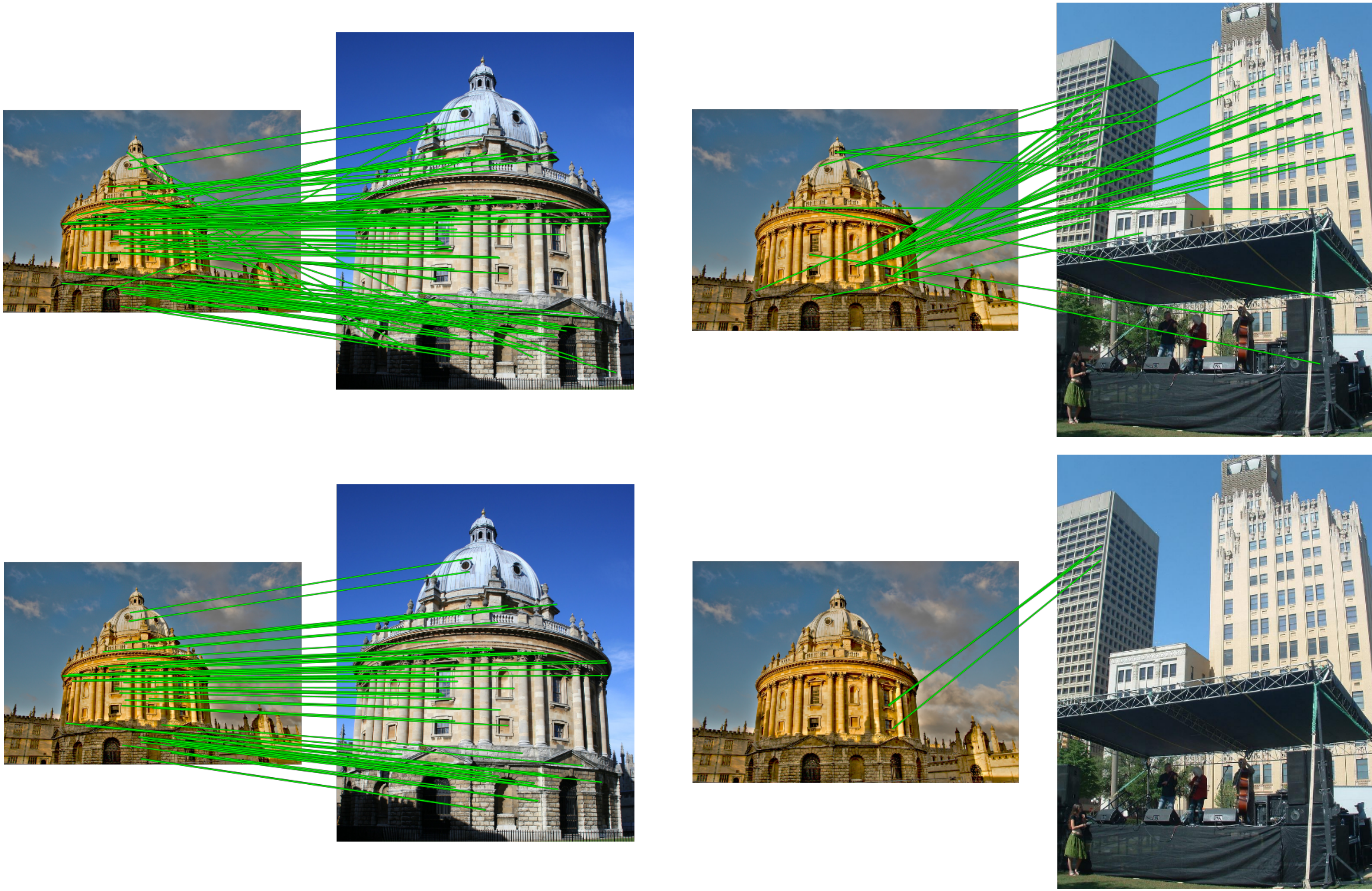
[Lowe]

Verificare cu RANSAC



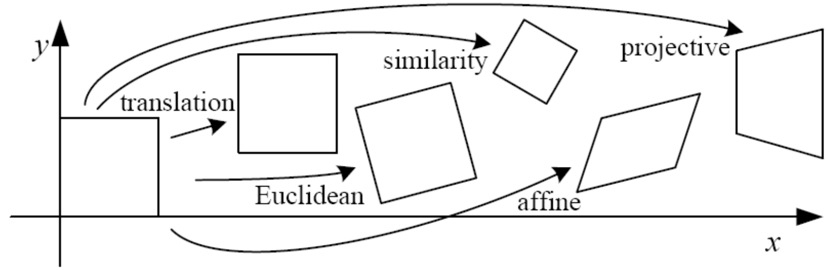


Verificare cu RANSAC

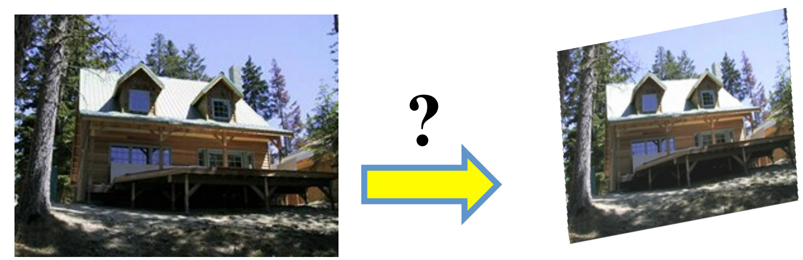


Cursul de azi

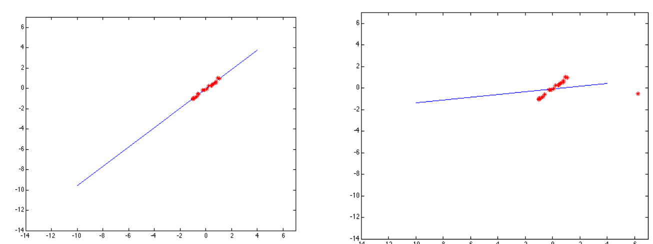
- Transformări geometrice 2D



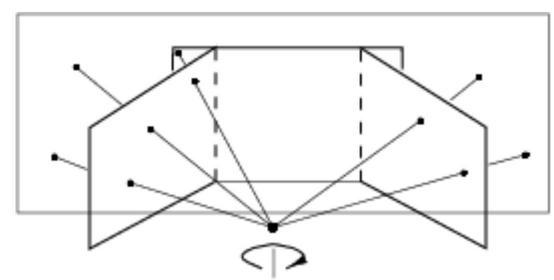
- Calculul unei transformări



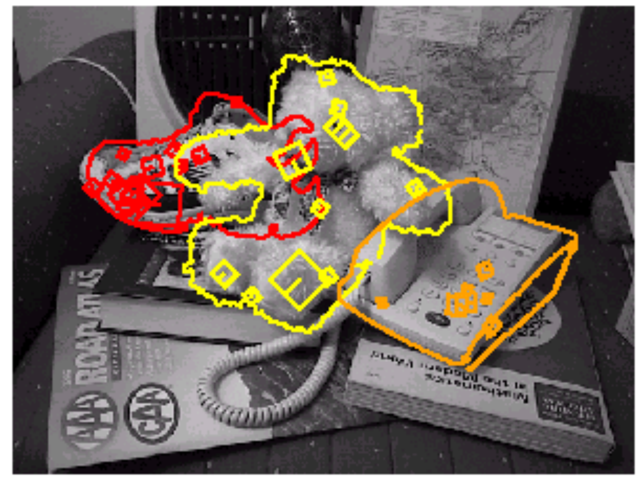
- RANSAC pentru transformări

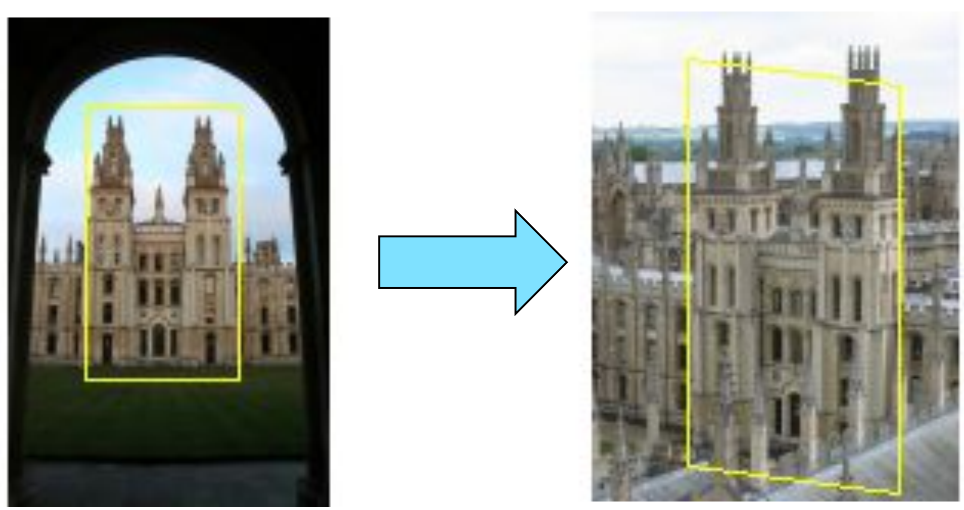


- Construcția de panorame

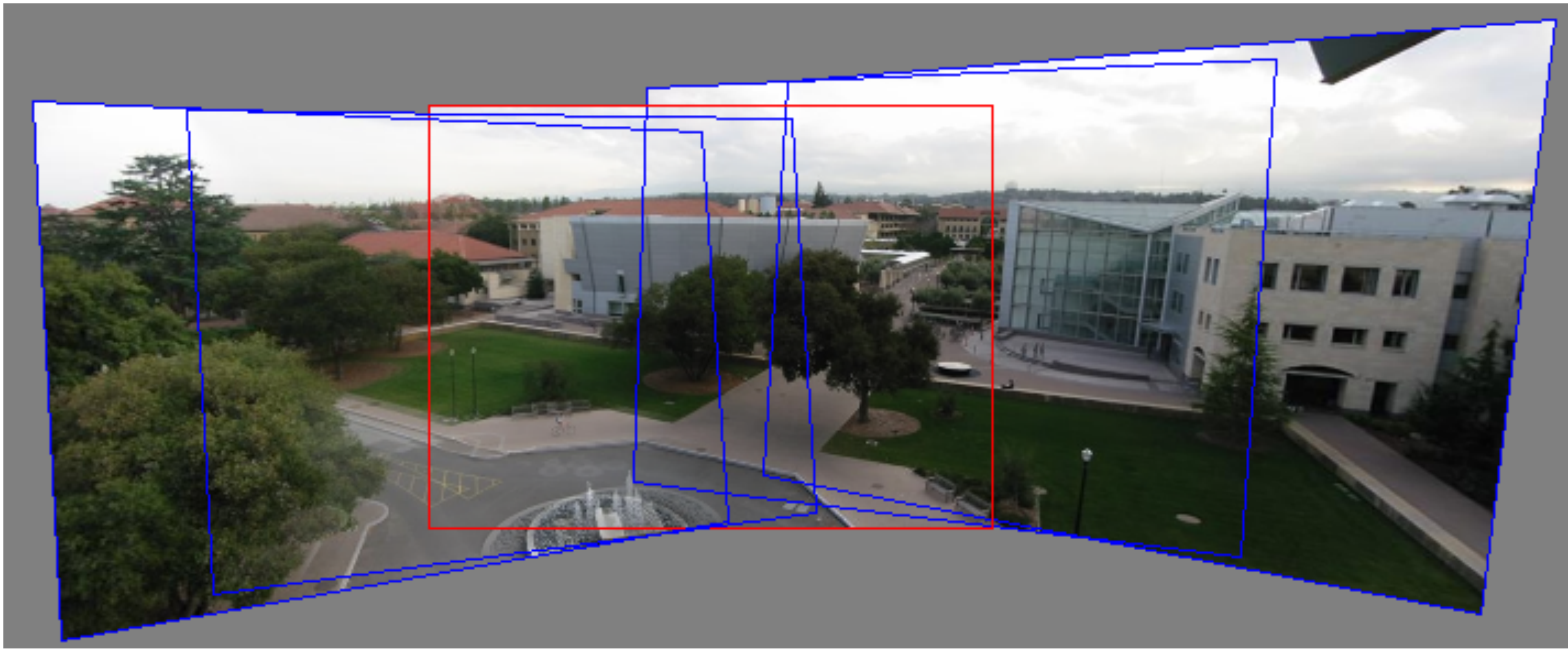


Motivație: Recunoașterea specifică de obiecte/scene



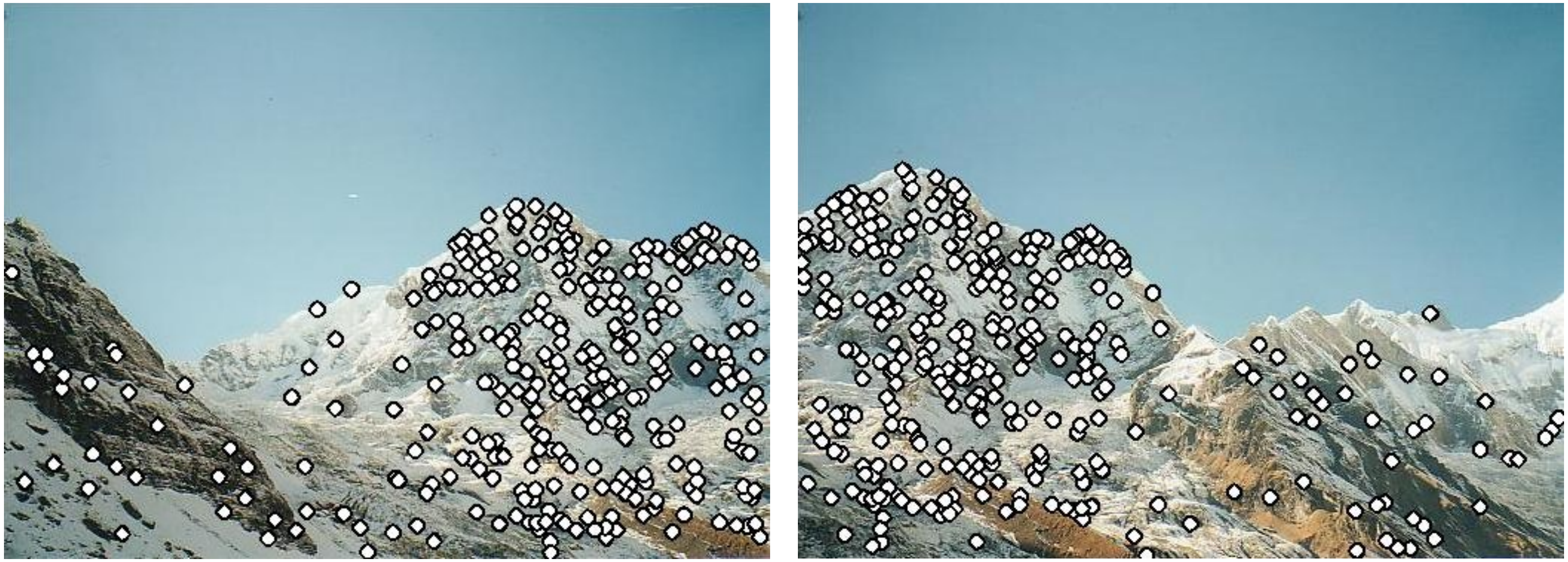


Motivație: Realizare de panorame



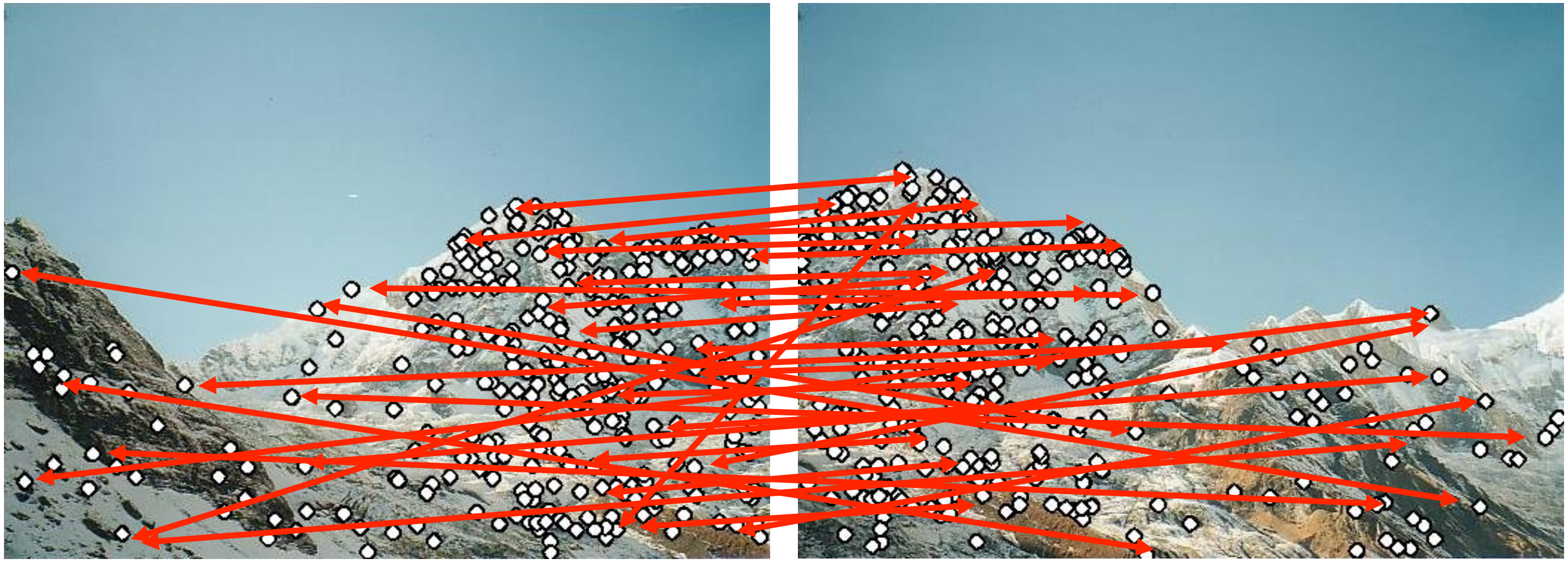
Alinierea robustă a imaginilor pe bază de trăsături

Alinierea robustă a imaginilor pe bază de trăsături



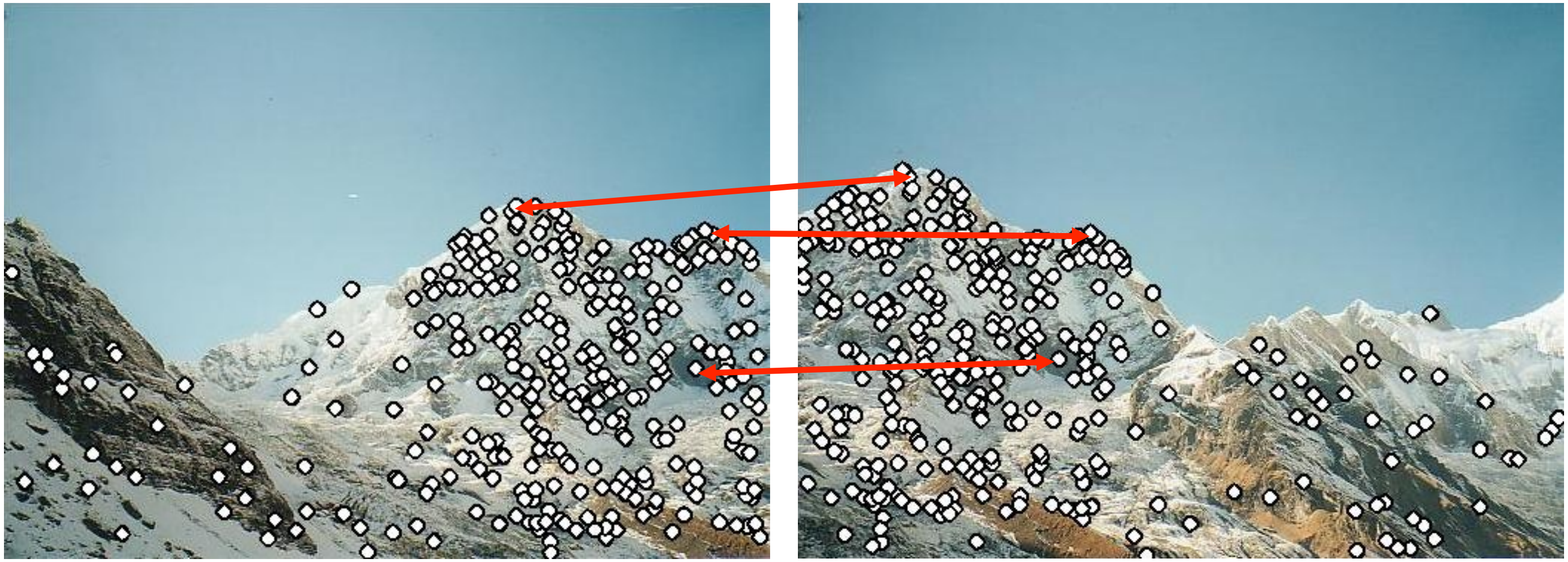
- Extrage trăsături

Alinierea robustă a imaginilor pe bază de trăsături



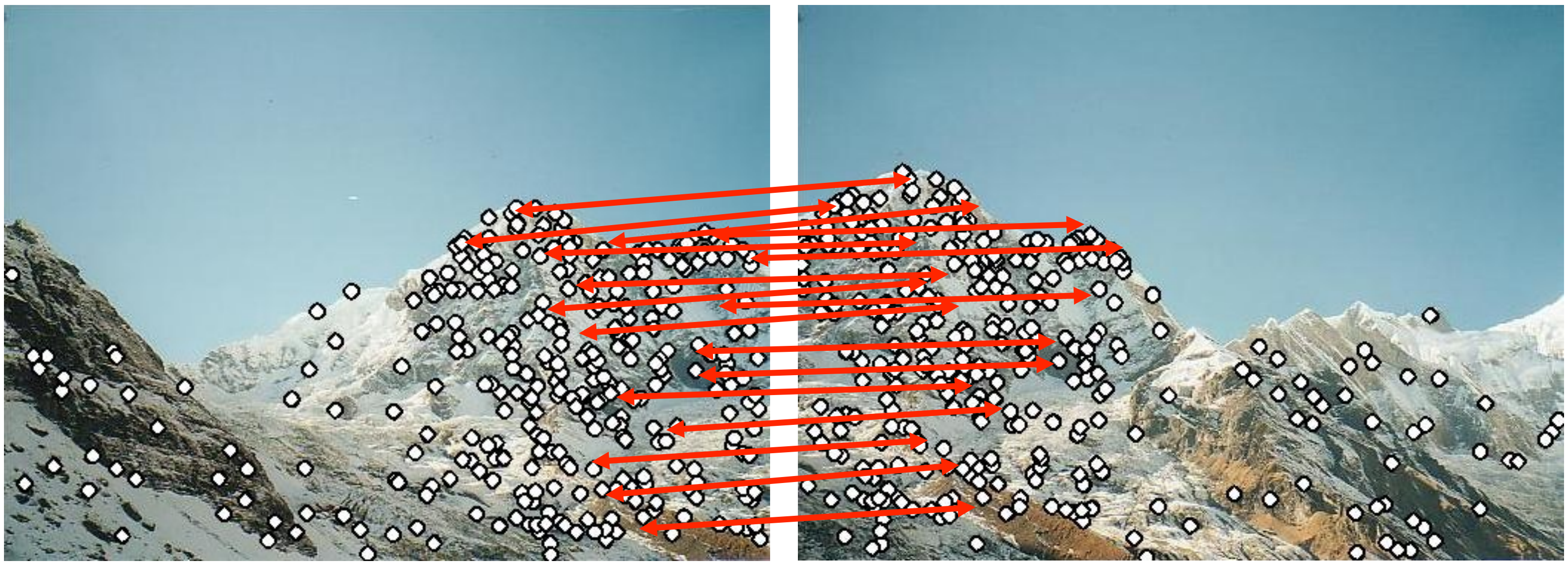
- Extrage trăsături
- Calculează *perechi de corespondențe posibile*

Alinierea robustă a imaginilor pe bază de trăsături



- Extrage trăsături
- Calculează *perechi de corespondențe posibile*
- Repetă:
  - *estimează* transformarea *T pe baza unui număr mic de puncte* de corespondențe posibile

Alinierea robustă a imaginilor pe bază de trăsături



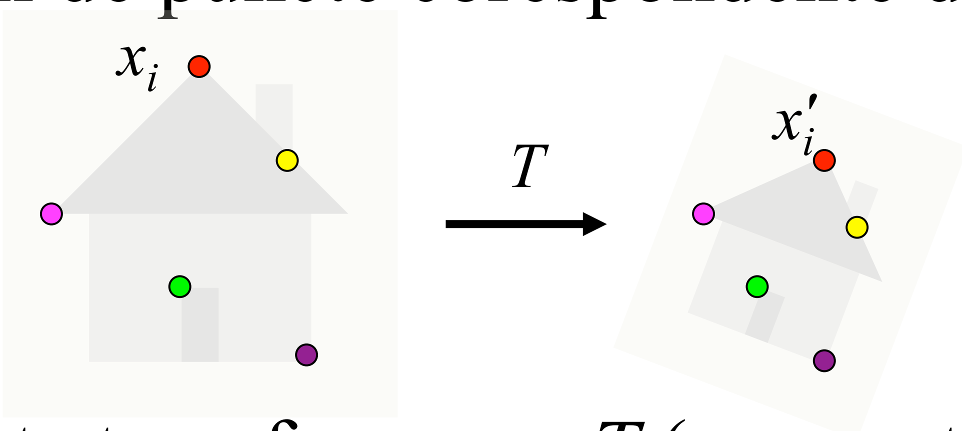
- Extrage trăsături
- Calculează *perechi de corespondențe posibile*
- Repetă:
  - *estimează* transformarea *T pe baza unui număr mic de puncte* de corespondențe posibile
  - *verifică* transformarea T (găsește ale perechi de corespondențe care susțin ipoteza T)

Alinierea robustă a imaginilor pe bază de trăsături

- Extrage trăsături
- Calculează *perechi de corespondențe posibile*
- Repetă:
  - *estimează* transformarea *T pe baza unui număr mic de puncte* de corespondențe posibile
  - *verifică* transformarea T (găsește ale perechie de corespondențe care susțin ipoteza T)

Alinierea imaginilor pe bază de trăsături

- Găsirea unei transformări geometrice între perechi de puncte corespondente din 2 imagini



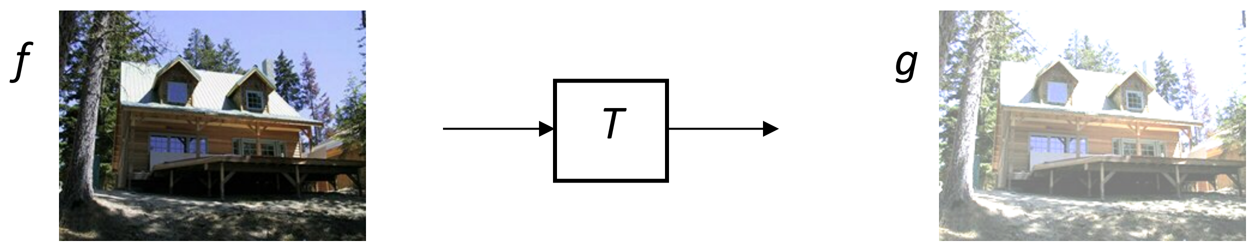
- Găsește transformarea T (parametrii ei) care minimizează: $\sum_i rezi duu(T(x_i), x_i')$

- Dificultăți:
  - zgomot (de obicei 1-3 pixeli)
  - outlieri (de obicei 30-50%)
  - corespondențe many-to-one sau obiecte multiple

Transformări geometrice

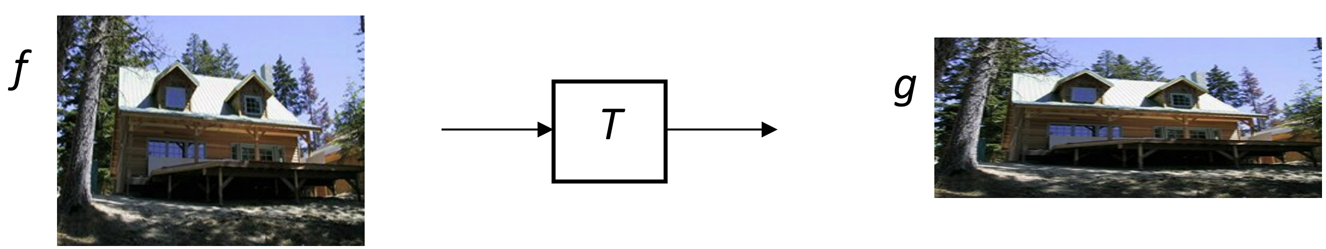
- Filtrarea imaginii: schimbăm ***valorile*** pixelilor imaginii

$$g(x) = T(f(x))$$

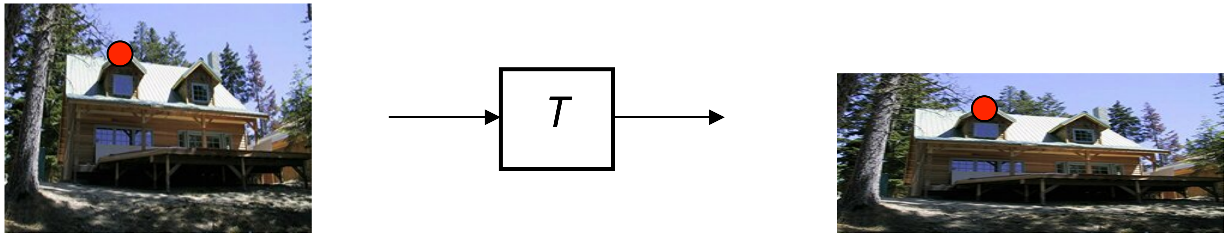


- Transformarea geometrică a imaginii: schimbă **poziția** pixelilor imaginii

$$g(x) = f(T(x))$$



Transformări (globale) parametrice



p = (x,y) **p’** = (x’,y’)

- Transformarea T schimbă coordonatele unui pixel p:

  $$p' = T(p)$$

- Ce înseamnă că *T* este globală?
  - este aceeași pentru fiecare pixel p
  - poate fi descrisă prin câțiva parametrii
- Pentru transformări liniare, putem reprezenta transformarea T ca o matrice: $p' = \mathbf{M}p$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformări (globale) parametrice

Exemple de transformări parametrice:

translație

rotație

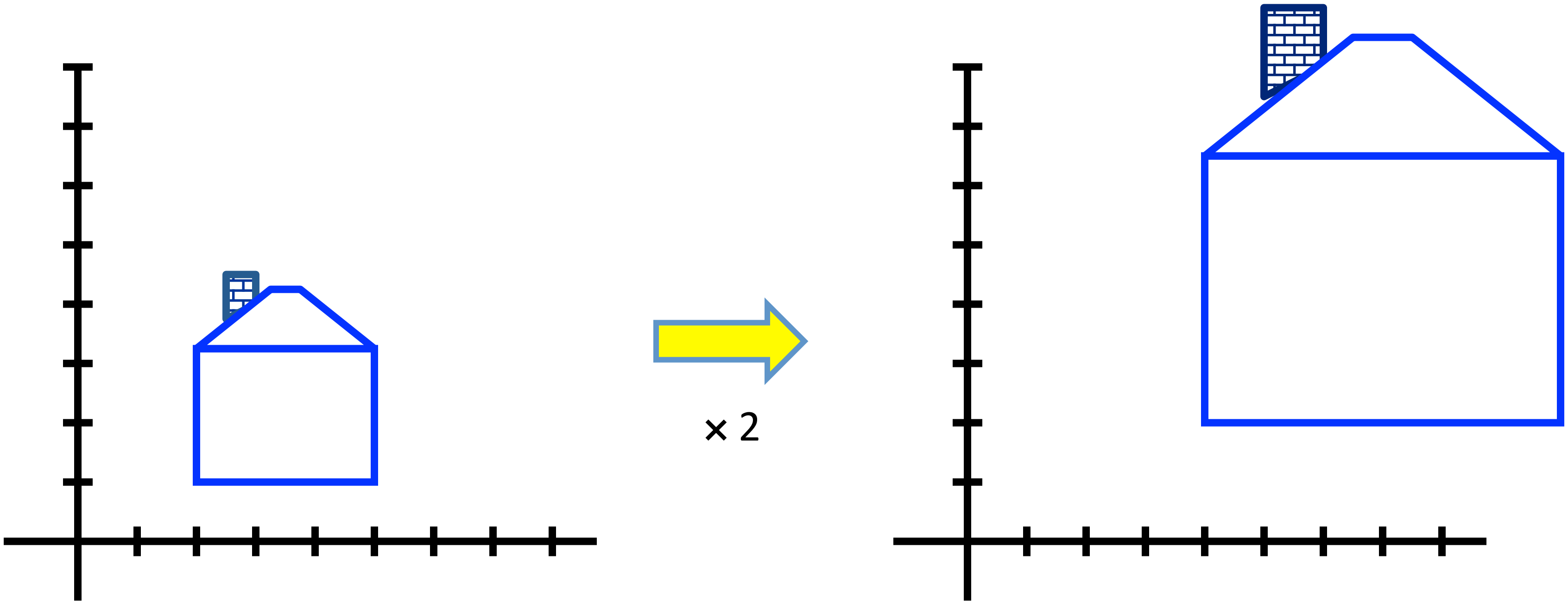
scalare

afină

perspectivă

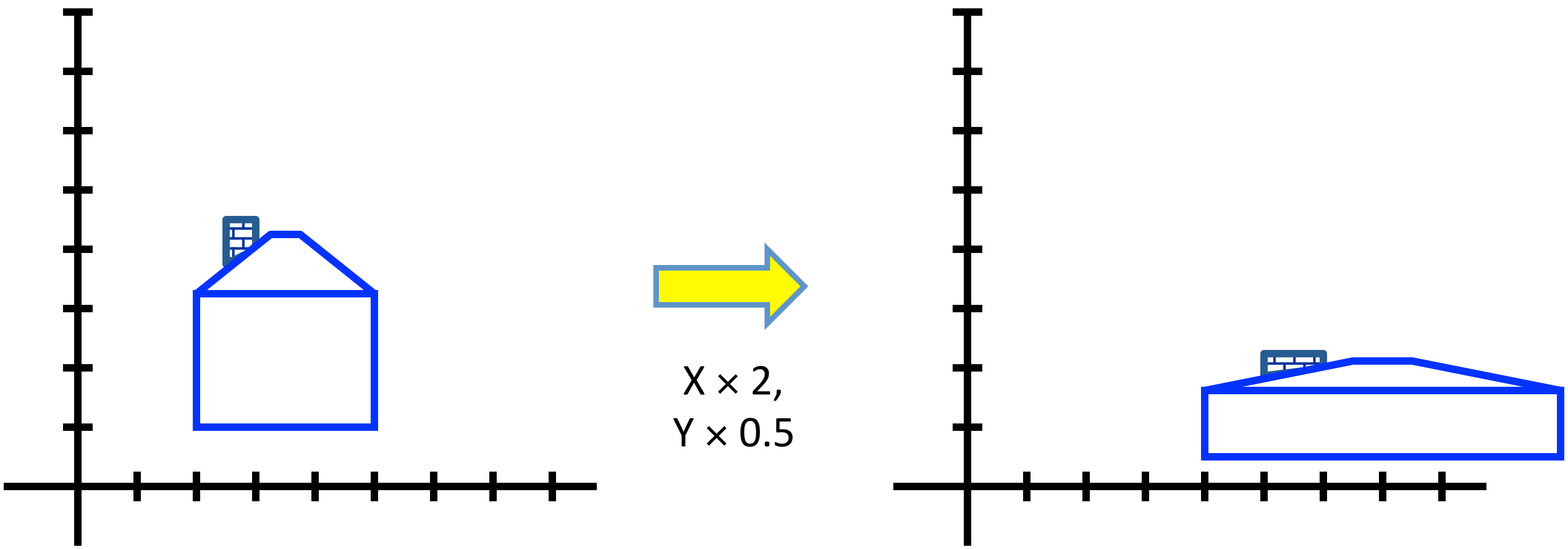
Scalare

- *Scalarea* unei coordonate = înmulțirea coordonatei cu un scalar
- *Scalarea uniformă* = același scalar pentru ambele componente



Scalare

- *Scalarea neuniformă* = scalari diferiți pentru componente



Scalare

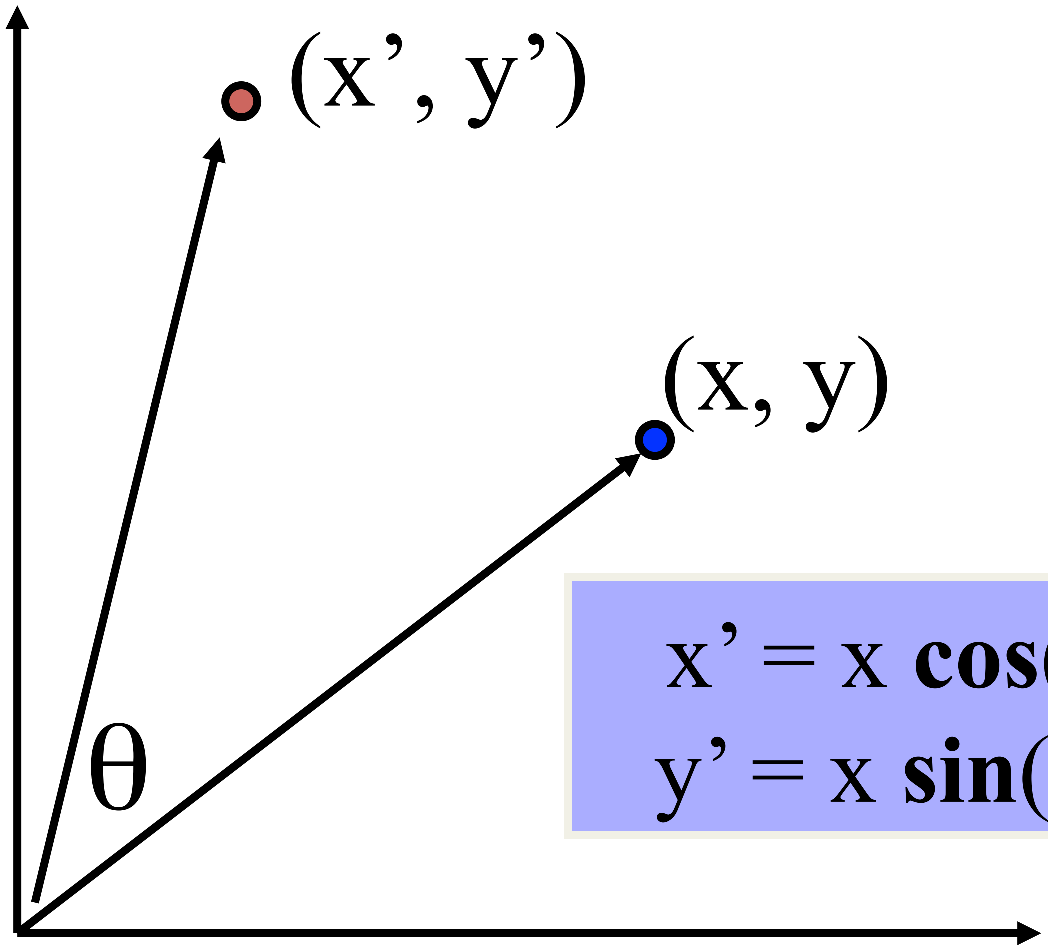
- Operația de scalare: $$x' = ax$$ $$y' = by$$

- Sau, în formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}}_{\textit{matricea de scalare } S} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

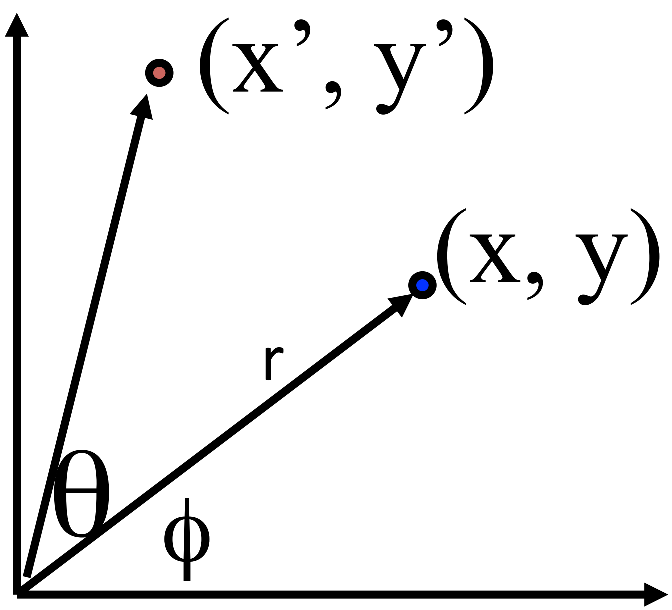
Care este transformarea de la (x', y') la (x, y)?

Rotație 2D



$$x' = x\ \mathbf{cos}(\theta) - y\ \mathbf{sin}(\theta)$$
$$y' = x\ \mathbf{sin}(\theta) + y\ \mathbf{cos}(\theta)$$

Rotație 2D



Coordonate polare

$x = r \cos(\phi)$

$y = r \sin(\phi)$

$x' = r \cos(\phi + \theta)$

$y' = r \sin(\phi + \theta)$

Identități trigonometrice

$x' = r \cos(\phi) \cos(\theta) - r \sin(\phi) \sin(\theta)$

$y' = r \sin(\phi) \cos(\theta) + r \cos(\phi) \sin(\theta)$

Substituim…

$x' = x \,\mathbf{cos}(\theta) - y \,\mathbf{sin}(\theta)$

$y' = x \,\mathbf{sin}(\theta) + y \,\mathbf{cos}(\theta)$

Rotație 2D

Sub formă matriceală:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Chiar dacă sin(θ) și cos(θ) sunt funcții neliniare în θ, avem că:

- ***x' este o combinație liniară de x și y***
- ***y' este o combinație liniară de x și y***

Care este transformarea inversă?

- rotație cu –θ
- pentru matrice de rotație avem: $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{T}$

Matrice 2 × 2

- Ce fel de transformări putem reprezenta cu o matrice 2 × 2?

Identitate în 2D?

$$x' = x \qquad \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$y' = y$$

Scalare în 2D în jurul lui (0,0)?

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{s}_x * \boldsymbol{x} \qquad \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_x & 0 \\ 0 & \boldsymbol{s}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{s}_y * \boldsymbol{y}$$

Matrice 2 × 2

- Ce fel de transformări putem reprezenta cu o matrice 2 × 2?

Rotație în 2D în jurul lui (0,0)?

$$x' = \cos\Theta * x - \sin\Theta * y$$
$$y' = \sin\Theta * x + \cos\Theta * y$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta \\ \sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix}$$

Shear (forfecare) în 2D?

$$x' = x + k_x * y$$
$$y' = k_y * x + y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_x \\ k_y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Matrice 2 × 2

- Ce fel de transformări putem reprezenta cu o matrice 2 × 2?

Oglindire în 2D față de axa Oy?

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Oglindire în 2D față de(0,0)?

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Matrice 2×2

- Ce fel de transformări putem reprezenta cu o matrice 2×2?

Translație în 2D?

$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

NU!

Transformări liniare în 2D

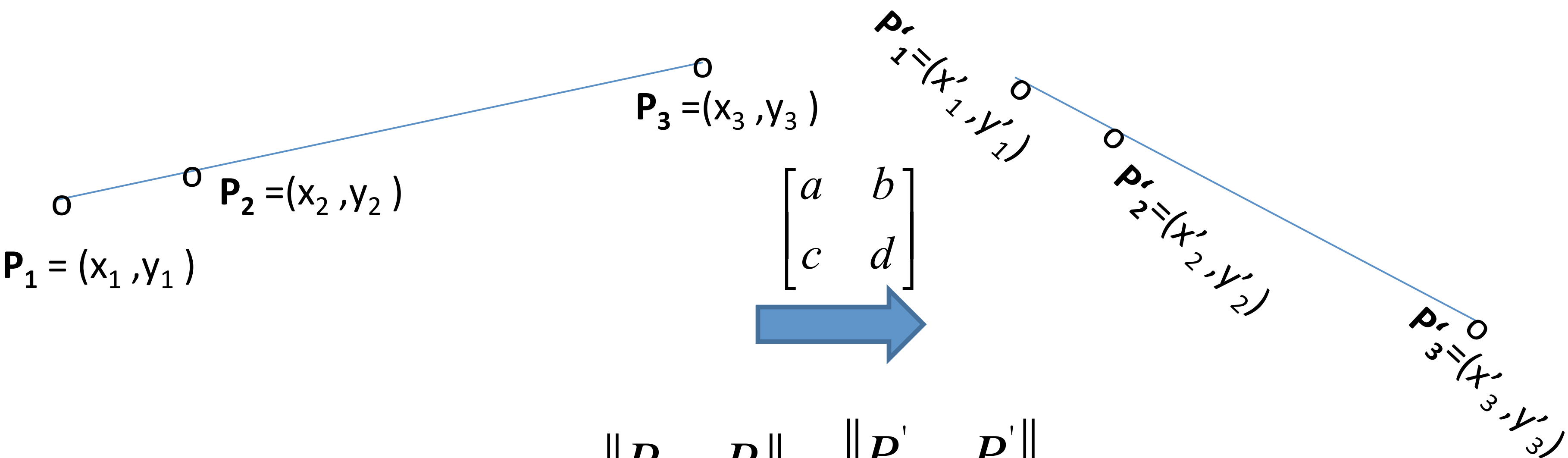
- Transformările liniea în 2D sunt combinații de…
  - scalări,
  - rotații,
  - shear,
  - oglindiri

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

- Proprietăți ale transformatelor liniare:
  - duce originea O(0,0) în origine
  - duce liniile în linii
  - liniile paralele rămân linii paralele
  - rapoartele de segmente sunt păstrate
  - închisă la compunere: combinarea a două transformări liniare este o transformare liniară

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rapoartele de segmente sunt păstrate



$$\frac{\|P_2 - P_1\|}{\|P_3 - P_1\|} = \frac{\|P_2' - P_1'\|}{\|P_3' - P_1'\|}$$

Coordonate omogene

- Cum putem reprezenta translația sub formă matriceală?

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

- Reprezentăm coordonatele din 2 dimensiuni cu un vector cu 3 componente:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{coordonate omogene}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordonate omogene

Puncte 2D → Coordonate omogene

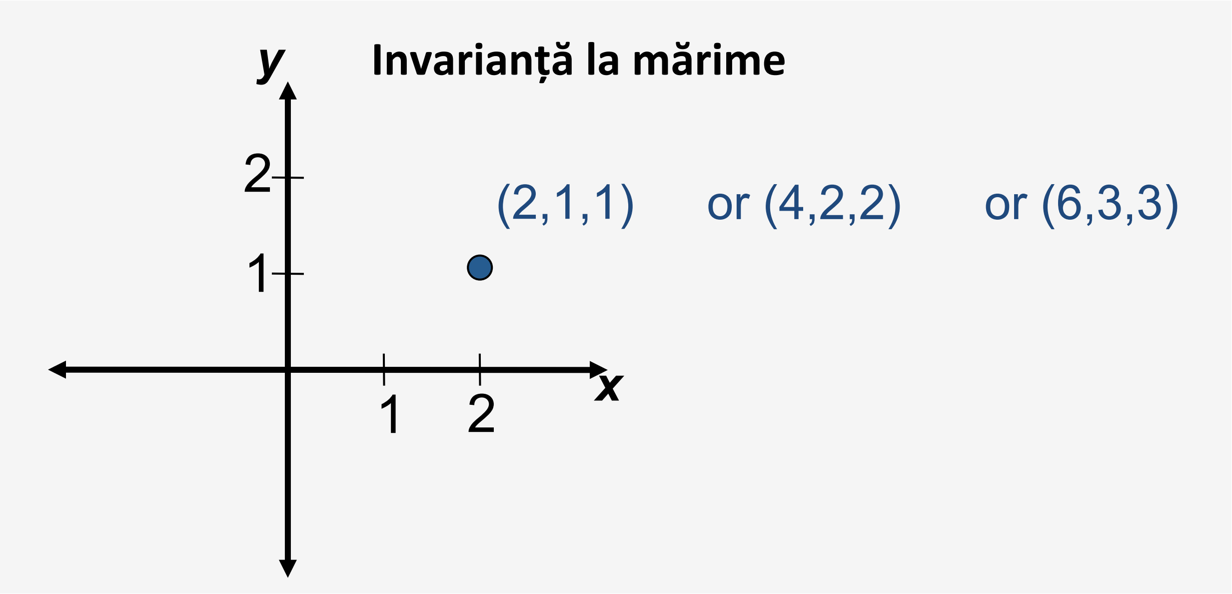
- adaugăm 1 fiecărui punct 2D: (x y) → (x y 1)

Coordonate omogene → Puncte 2D

- Împărțim prin a treia coordonată (x y w) → (x/w y/w)

Proprietăți:

- invariante la mărime: (x y w) = k * (x y w)
- (x, y, 0) reprezintă un punct la infinit
- (0, 0, 0) nu este punct admis



Coordonate omogene

- Cum putem reprezenta translația sub formă matriceală?

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{t}_x$$
$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{t}_y$$

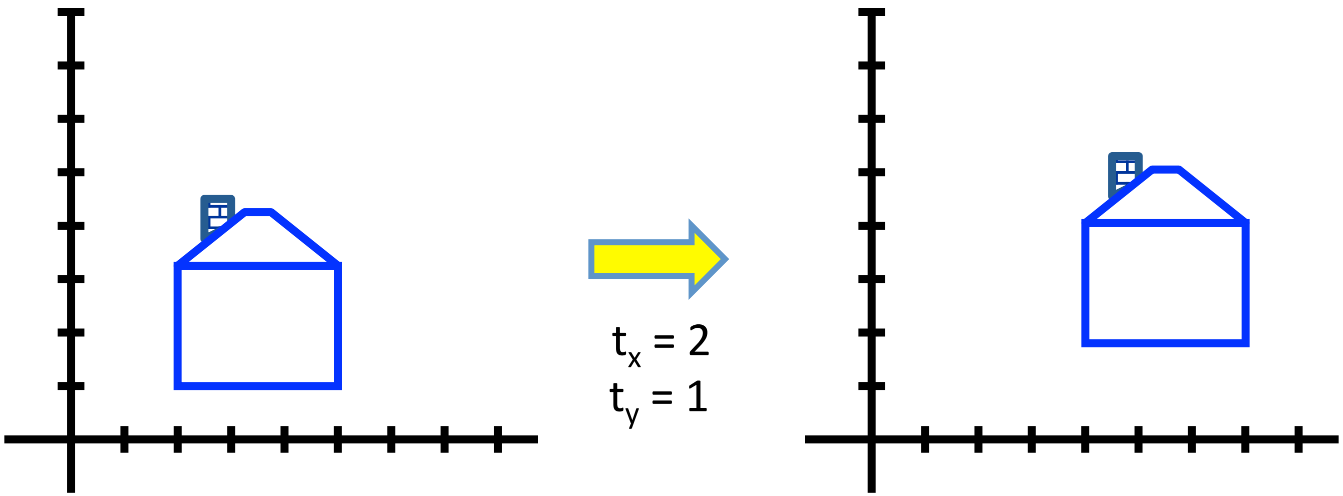
- Folosim cea de-a treia coloană:

$$\mathbf{T}ranslatie = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translație - exemplu

Coordonate omogene

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$



Transformări 2D sub formă de matrice 3 × 3

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translație

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' \\ \boldsymbol{y}' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Scalare

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotație

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta_x & 0 \\ \beta_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Shear

Compunerea transformărilor

Transformările pot fi combinate folosind înmulțirea matricelor:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

p' = $T(t_x,t_y)$ $R(\Theta)$ $S(s_x,s_y)$ **p**

Transformări afine

Transformările afine sunt combinații de:

- transformări liniare
- translații

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Proprietăți ale transformărilor afine:

- nu duce neapărat originea O(0,0) în origine
- duce liniile în linii
- liniile paralele rămân paralele
- rapoartele de segmente sunt păstrate
- închisă la compunere: combinarea a două transformări afine este o transformare afină

Transformările proiective (perspective)

Transformările proiective sunt combinații de:

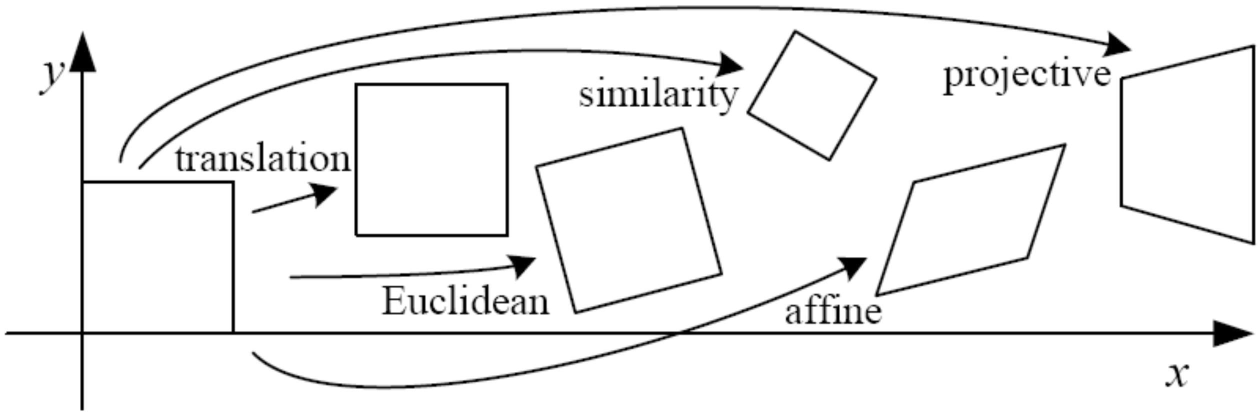
- transformări afine
- deformări proiective (projective warps)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

Proprietăți ale transformărilor proiective:

- nu duce neapărat originea O(0,0) în origine
- duce liniile în linii
- liniile paralele nu rămân neapărat paralele
- rapoartele de segmente nu sunt neapărat păstrate
- închisă la compunere: combinarea a două transformări afine este o transformare afină
- matricea proiectivă are 8 grade libertate (unul din 9 este pentru scală)

Transformări 2D ale imaginilor

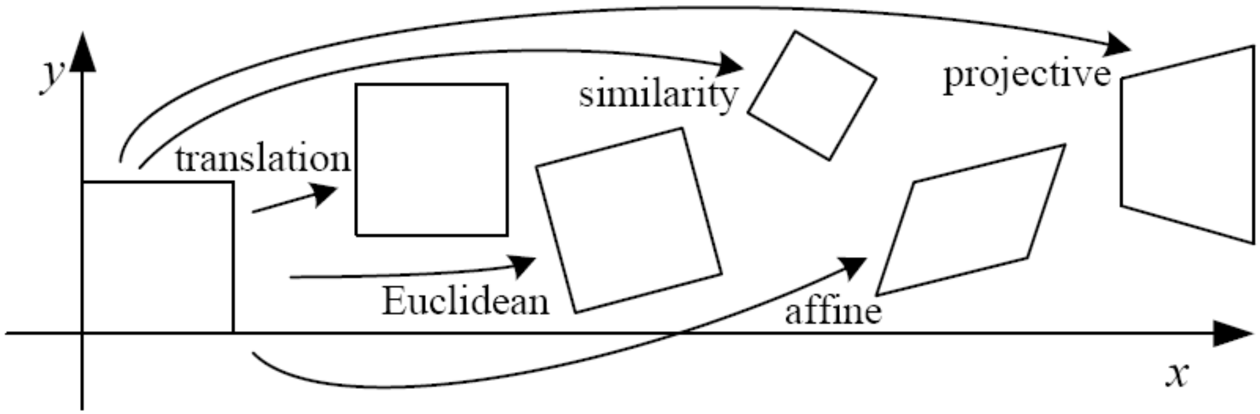


Name	Matrix	# D.O.F.	Preserves:	Icon
translation	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{t} \end{bmatrix}_{2\times 3}$			
rigid (Euclidean)	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{t} \end{bmatrix}_{2\times 3}$			
similarity	$\begin{bmatrix} s\boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{t} \end{bmatrix}_{2\times 3}$			
affine	$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \end{bmatrix}_{2\times 3}$			
projective	$\begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{H}} \end{bmatrix}_{3\times 3}$			

Aceste transformări formează un grup:

- închise la compunere
- transformarea inversă este o transformare de același tip

Transformări 2D ale imaginilor

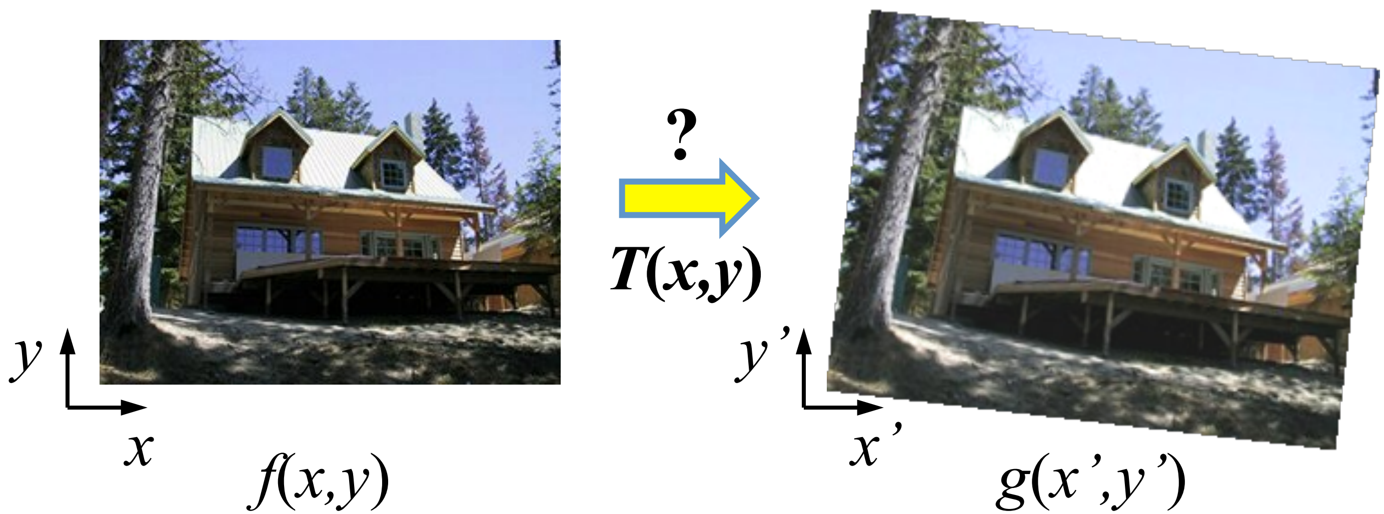


Name	Matrix	# D.O.F.	Preserves:	Icon
translation	$\left[\, \boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{t} \,\right]_{2\times 3}$	2	orientation $+ \cdots$	
rigid (Euclidean)	$\left[\, \boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{t} \,\right]_{2\times 3}$	3	lengths $+ \cdots$	
similarity	$\left[\, s\boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{t} \,\right]_{2\times 3}$	4	angles $+ \cdots$	
affine	$\left[\, \boldsymbol{A} \,\right]_{2\times 3}$	6	parallelism $+ \cdots$	
projective	$\left[\, \tilde{\boldsymbol{H}} \,\right]_{3\times 3}$	8	straight lines	

Aceste transformări formează un grup:

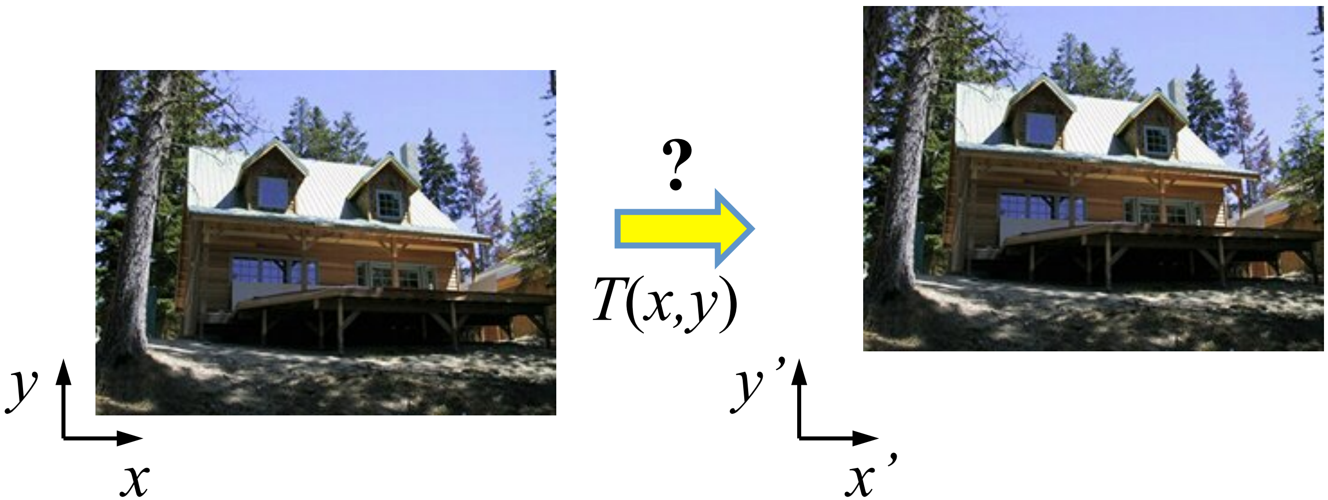
- închise la compunere
- transformarea inversă este o transformare de același tip

Calculul transformărilor



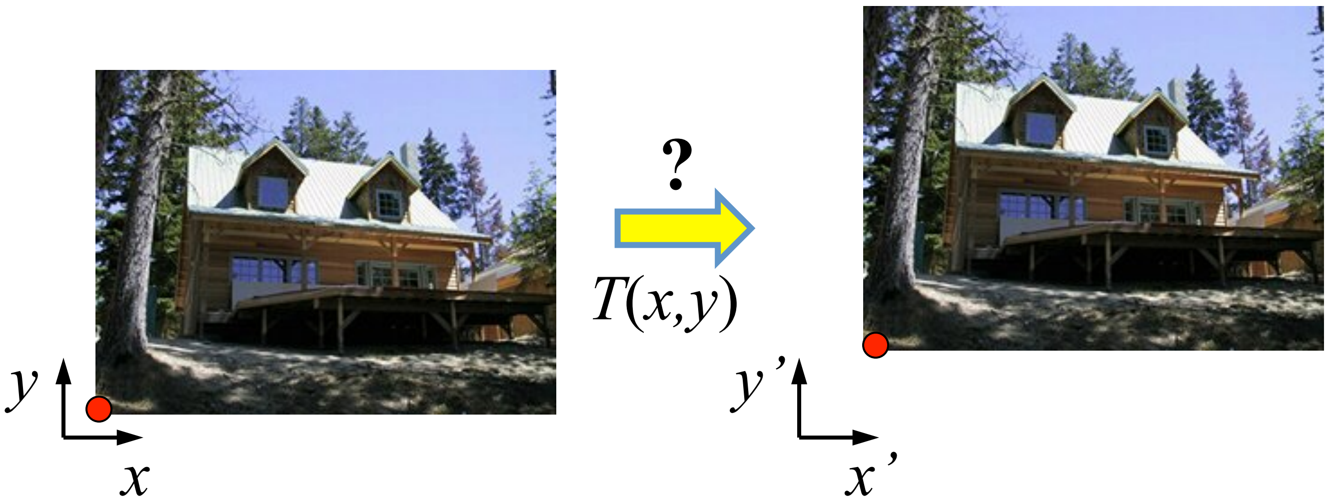
- Dacă știu *f* și *g* cum calculez transformarea T?
  - presupunem că avem perechi de puncte corespondente (date de utilizator sau calculate automat)
    - de câte asemenea perechi este nevoie?

Translație: # corespondențe?



- Câte grade de libertate are o asemenea transformare?
- De câte corespondențe am nevoie?
- Care este matricea transformării?

Translație: # corespondențe?



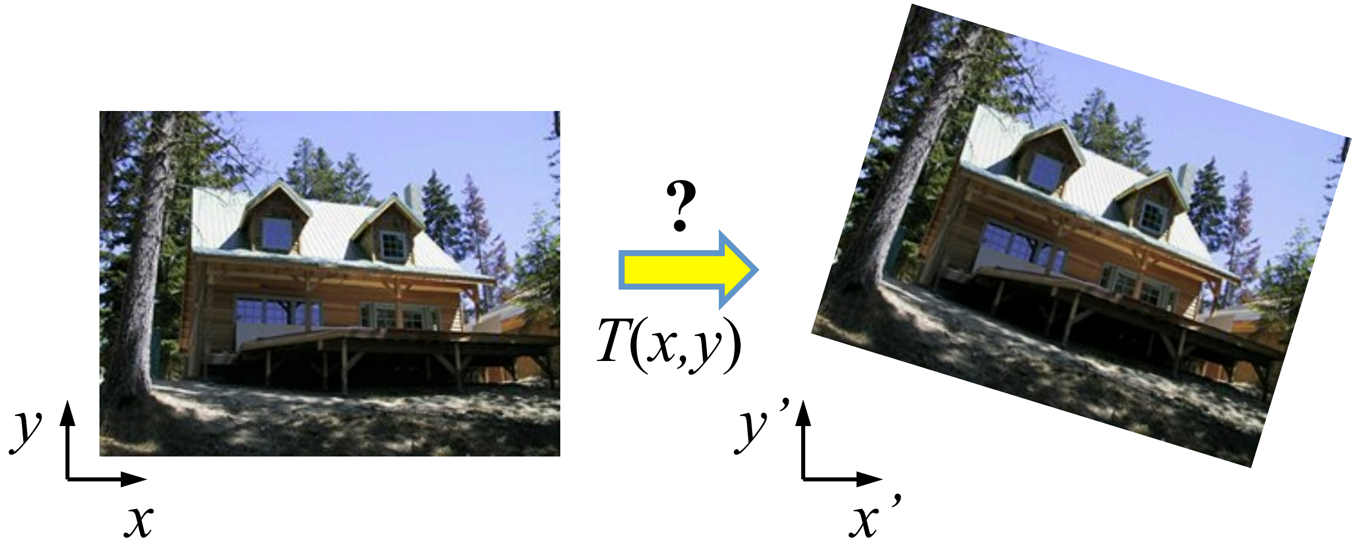
O singură pereche de puncte corespondente este suficientă pentru a găsi translația (2 grade de libertate).

Coordonate omogene

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ 1 \end{bmatrix}$$

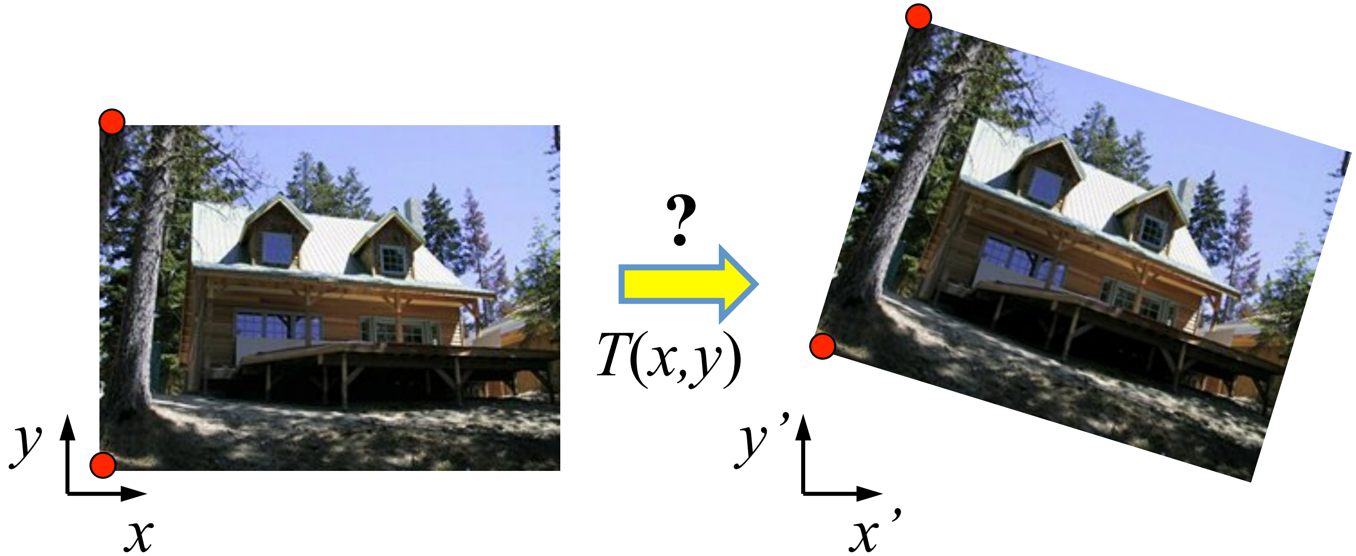
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformarea euclidiană (translație + rotație): # corespondențe?



- Câte grade de libertate are o asemenea transformare?
- De câte corespondențe am nevoie?
- Care este matricea transformării?

Transformarea euclidiană (translație + rotație): # corespondențe?



Două perechi de puncte corespondente sunt suficiente pentru a găsi transformarea euclidiană (3 grade de libertate).

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

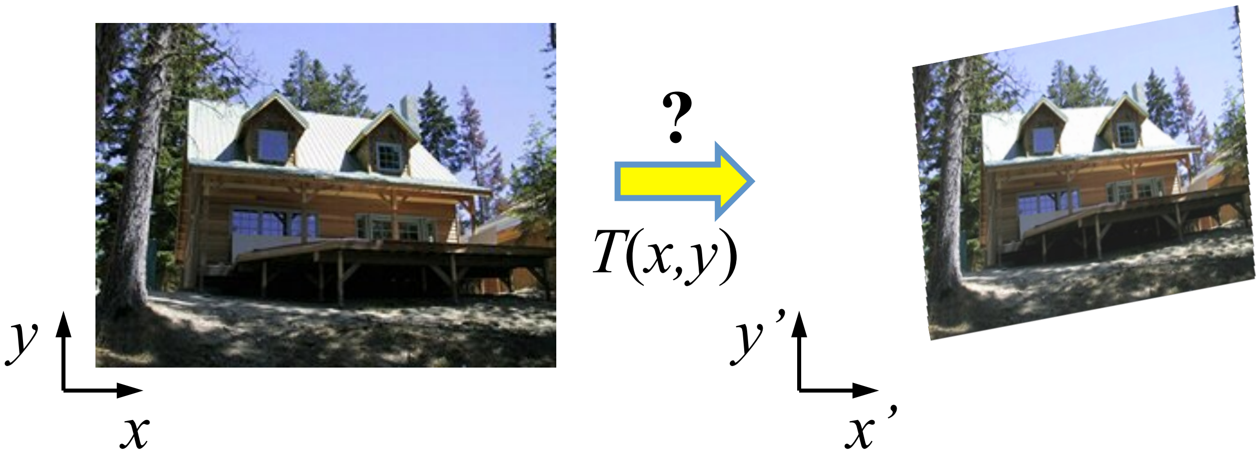
translație

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

rotație

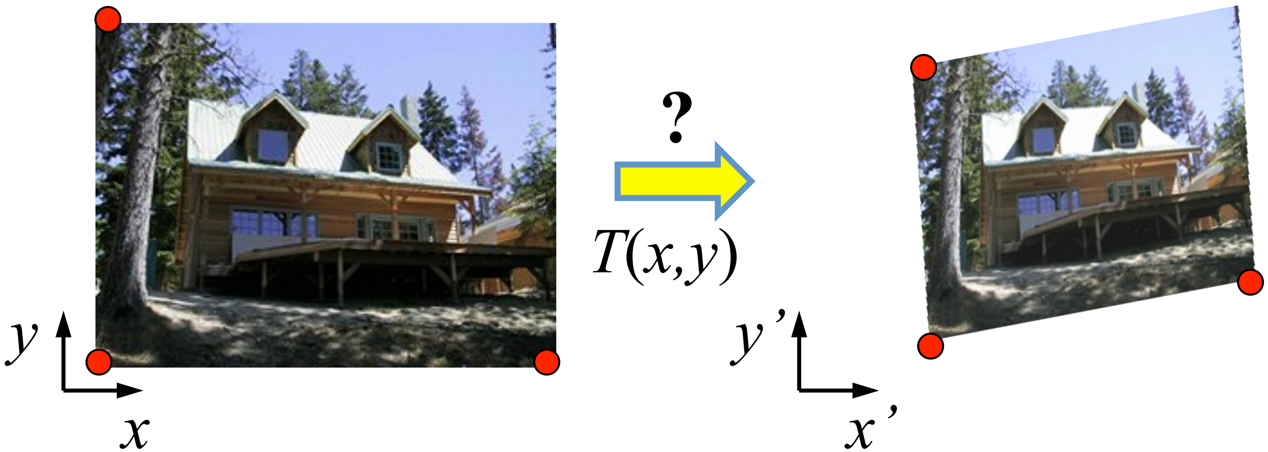
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & t_x \\ \sin\Theta & \cos\Theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformarea afină: # corespondențe?



- Câte grade de libertate are o asemenea transformare?
- De câte corespondențe am nevoie?
- Care este matricea transformării?

Transformarea afină: # corespondențe?



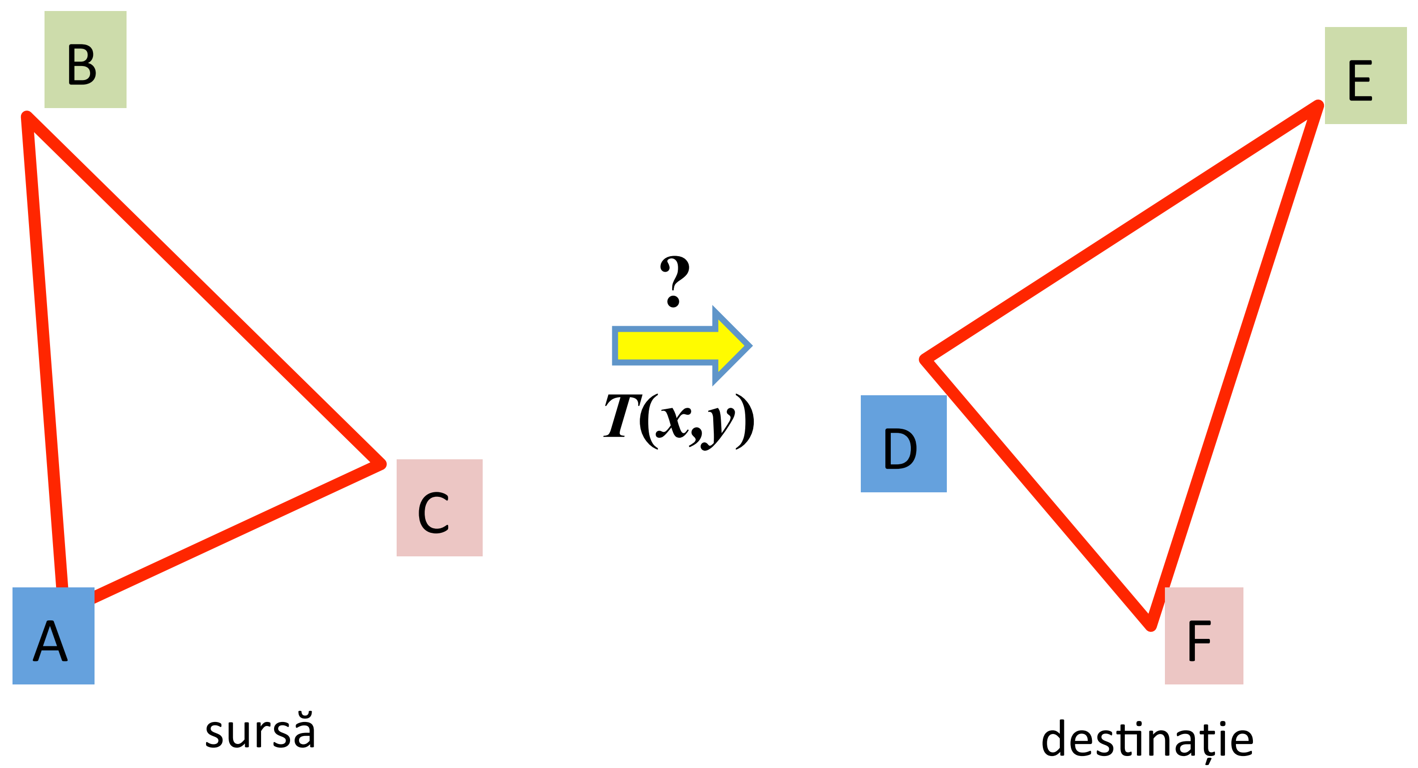
Trei perechi de puncte corespondente sunt suficiente pentru a găsi transformarea afină (6 grade de libertate).

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformări afine aplicate triunghiurilor

Pentru două triunghiuri ABC și DEF pot găsi transformarea afină care îmi transformă A în D, B în E și C în F rezolvând un sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute



Transformări afine aplicate triunghiurilor

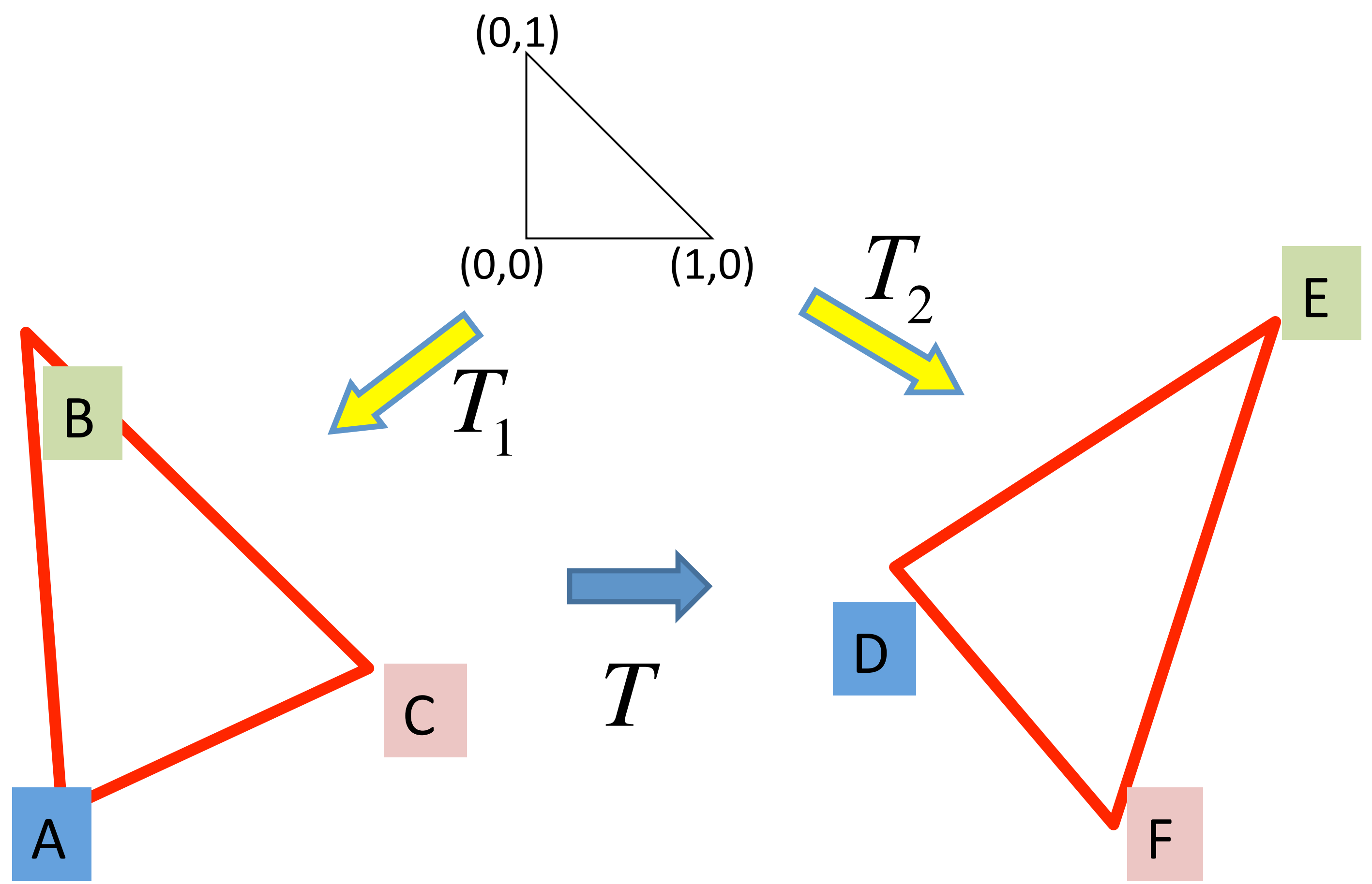
Pentru două triunghiuri ABC și DEF pot găsi transformarea afină care îmi transformă A în D, B în E și C în F rezolvând un sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute

$$\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ 1 \end{bmatrix}$$

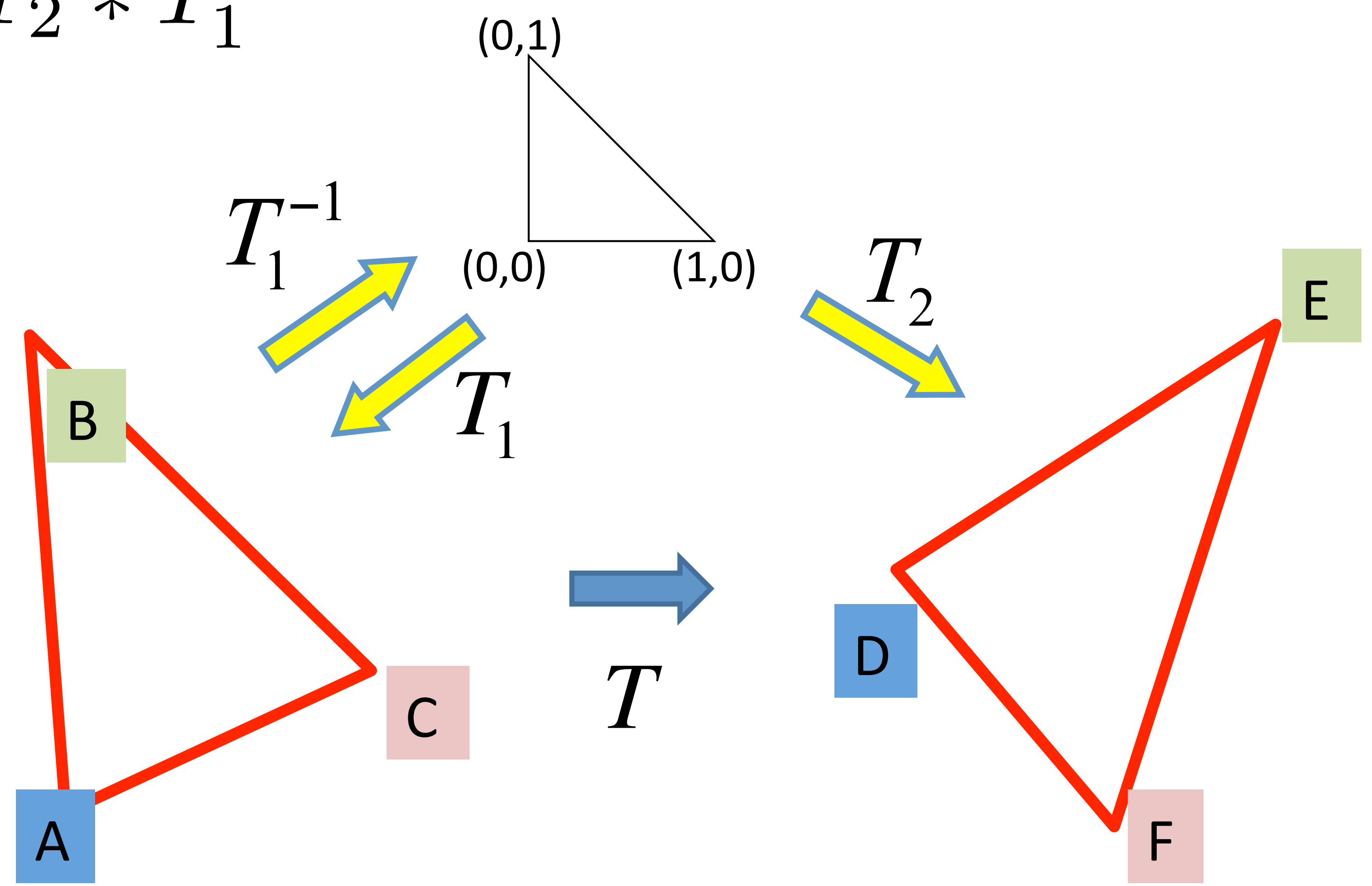
Abordare echivalentă: compunere de transformări afine

Folosesc un triunghi cu coordonate “convenabile” (sistemul de 6 ecuații și 6 necunoscute este ușor de rezolvat) pentru a calcula T_2, T_1. Pe baza lor aflu T.



Abordare echivalentă: compunere de transformări afine

$$T = T_2 * T_1^{-1}$$



Exemplu: Calculul lui T_2

Sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute, mult mai simplu:

$$\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplu: Calculul lui T_2

Sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute, mult mai simplu:

$$\begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

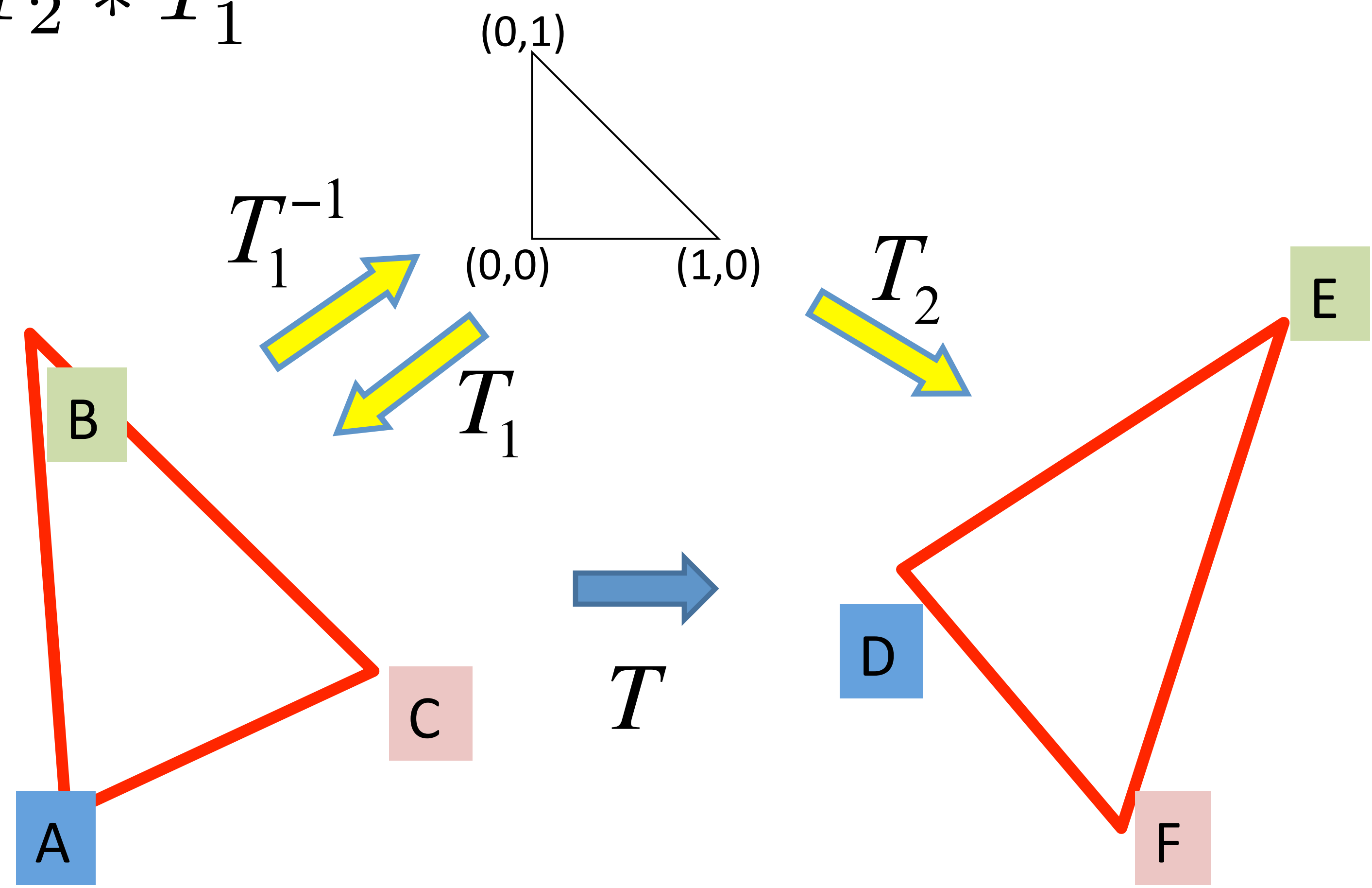
$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_E \\ y_E \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

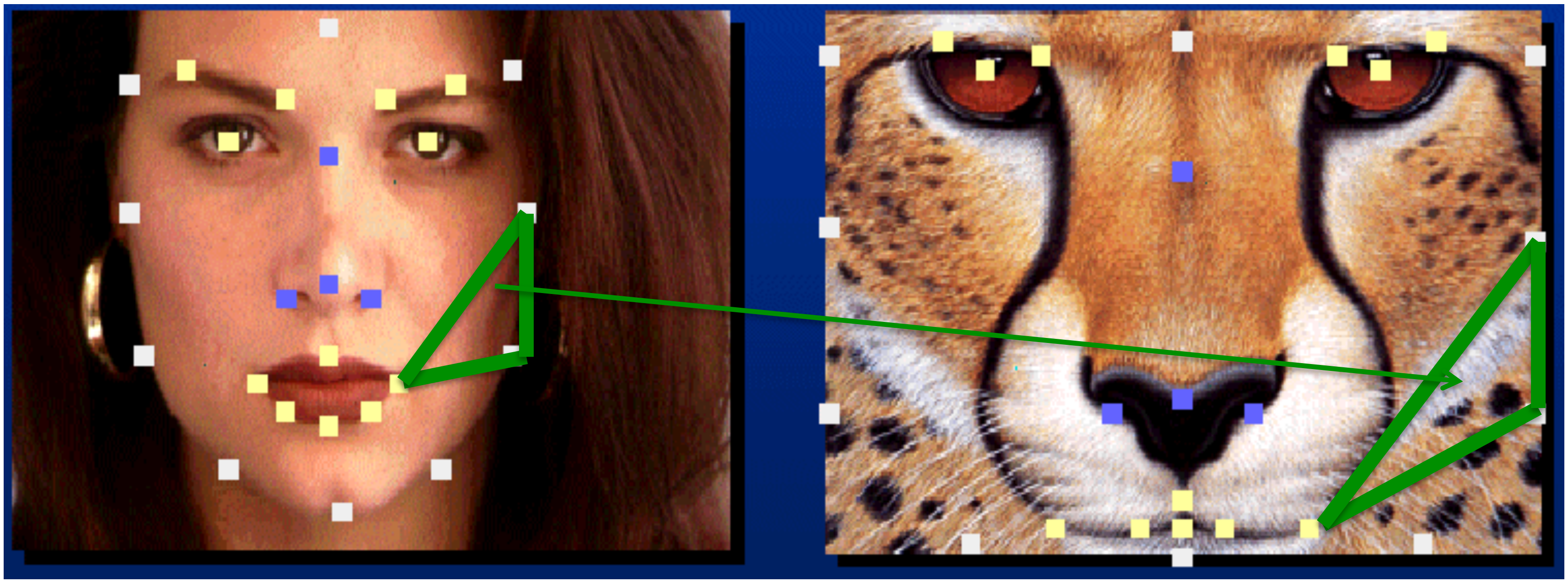
$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} c &= x_D \\ f &= y_D \\ a &= x_F - x_D \\ d &= y_F - y_D \\ b &= x_E - x_D \\ e &= y_E - y_D \end{aligned}$$

Abordare echivalentă: compunere de transformări afine

$$T = T_2 * T_1^{-1}$$



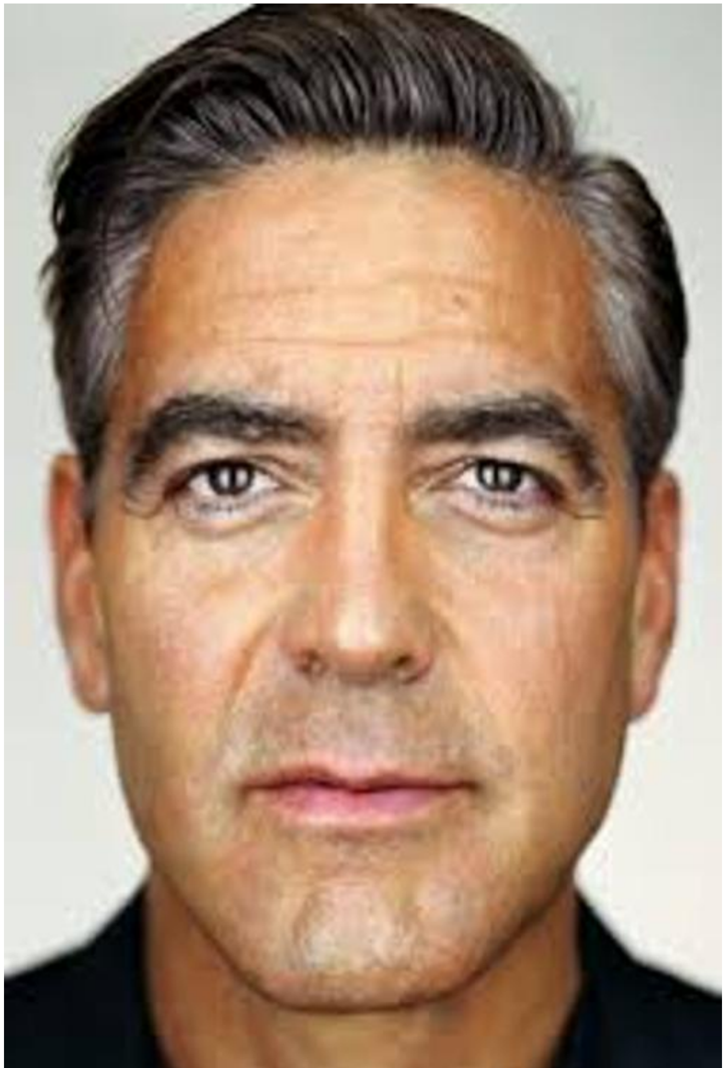
Tranziția geometrică și fotometrică între două triunghiuri



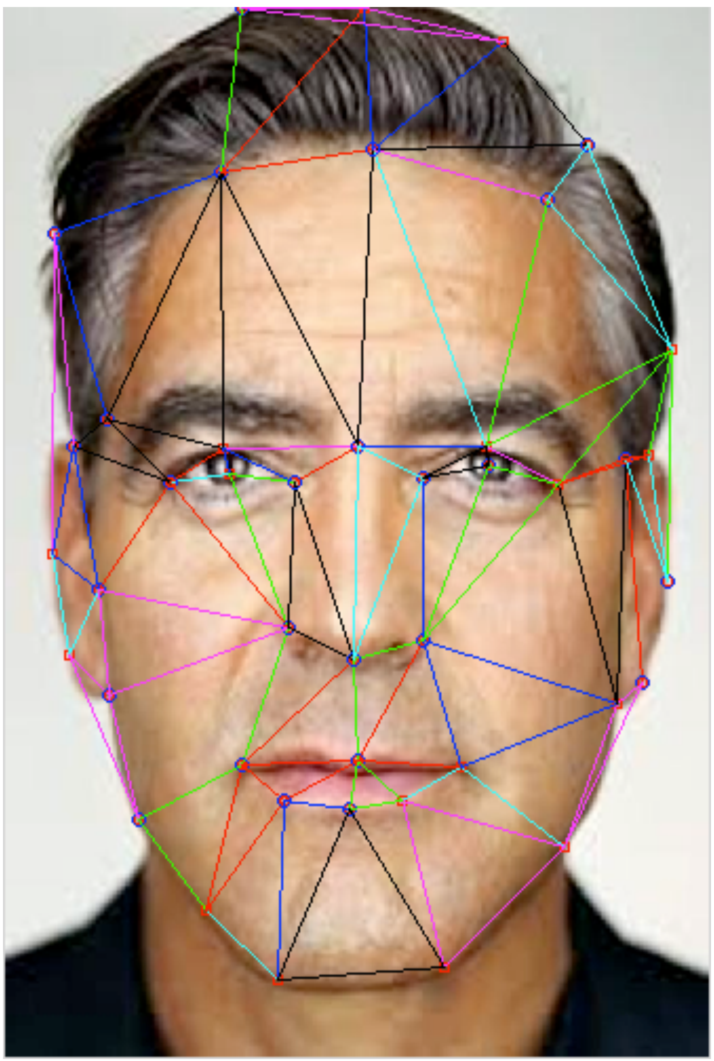
- fiecare regiune (triunghi) din imaginea sursă va fi transformată geometric + fotometric pentru a ajunge la regiunea corespondentă (triunghiul corespondent) din imaginea țintă

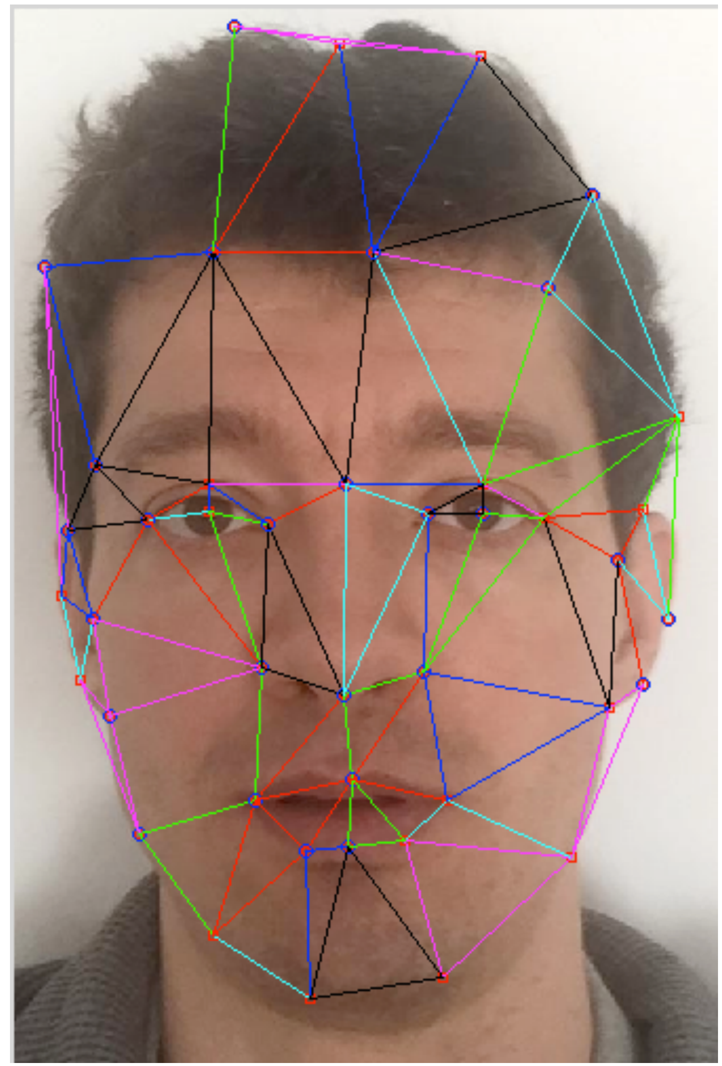
Morfarea obiectelor

Morfarea a două fețe



Triangulare Delaunay

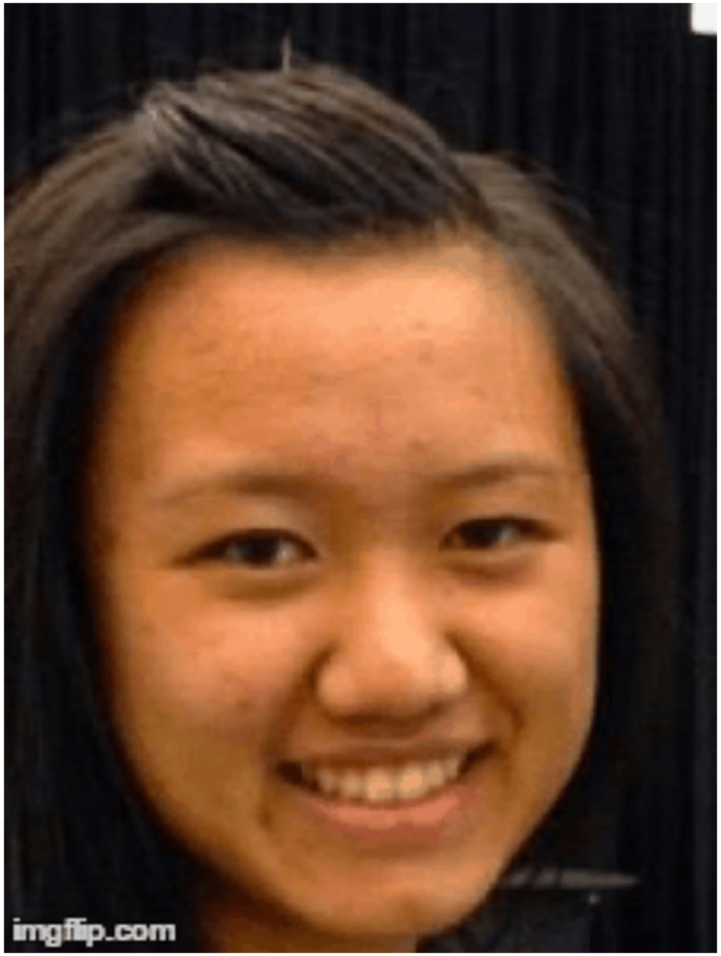




Morfarea a două fețe

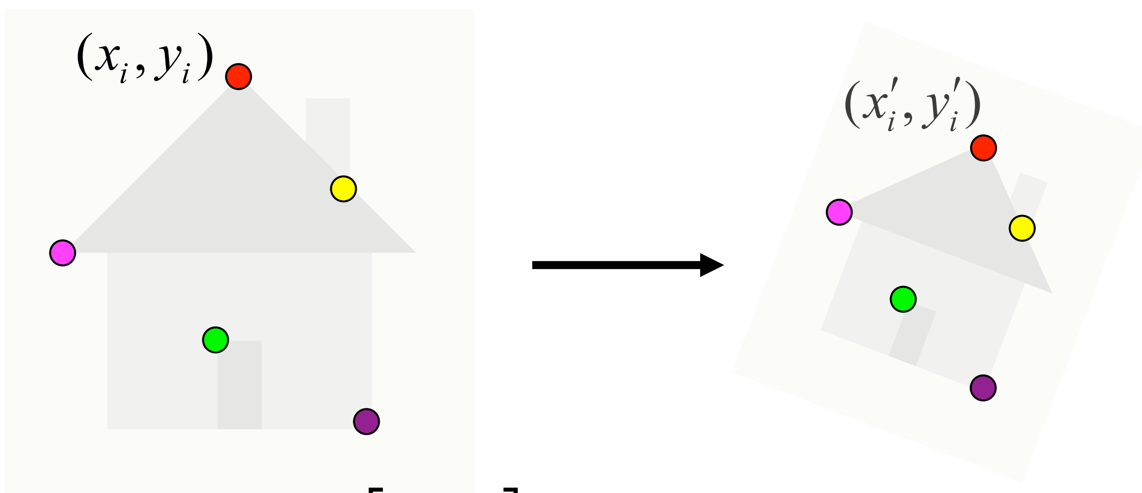
Animație GIF

Animație GIF – alte exemple



Determinarea unei transformări afine pe baza corespondențelor din imagini

- Avem perechi de puncte corespondente (posibil imperfecte)
- Cum calculăm matricea transformării afine?



$$\begin{bmatrix} x'_i \\ y'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinarea unei transformări afine pe baza corespondențelor din imagini

- Avem perechi de puncte corespondente (posibil imperfecte)
- Cum calculăm matricea transformării afine?

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ x_2' \\ \vdots \end{bmatrix}$$

- Folosim metoda celor mai mici pătrate (ca în cazul regresiei liniare multiple)

Regresia liniară multiplă

- $\vec{x} \in \mathbb{R}^n = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$,
- $\vec{w} \in \mathbb{R}^n = [w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n], w_0 \in \mathbb{R}$

$$\hat{y} = \mathrm{w}_0 + w_1 x_1 + w_2 \mathrm{x}_2 + \dots + \mathrm{w}_\mathrm{n} \mathrm{x}_\mathrm{n} = w_0 + \langle \vec{w}, \vec{x} \rangle$$

- Înlocuim termenul liber w_0 (bias-ul) făcând notațiile:

$$\vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} = [1 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]$$
$$\vec{w} \in \mathbb{R}^{n+1} = [w_0 \quad w_1 \quad w_2 \quad \dots \quad w_n]$$
$$\Longrightarrow$$
$$\hat{y} = \langle \vec{w}, \vec{x} \rangle$$

Regresia liniară multiplă

- Avem mulțimea de date de date de antrenare:

$$E = \{(\vec{x}^{(1)}, y^{(1)}), (\vec{x}^{(2)}, y^{(2)}), \dots, (\vec{x}^{(m)}, y^{(m)})\}, \vec{x}^{(i)} \in \mathbb{R}^n, y^{(i)} \in \mathbb{R}$$

$$\hat{y}^{(\mathrm{i})} = \langle \vec{w}, \vec{x}^{(i)} \rangle = \mathrm{w}_0 + w_1 x_1^{(\mathrm{i})} + w_2 x_2^{(\mathrm{i})} + \cdots + \mathrm{w_n} x_{\mathrm{n}}^{(\mathrm{i})}$$

- Folosim înmulțirea matricelor pentru a calcula predicțiile:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}^{(1)} \\ \hat{y}^{(2)} \\ \vdots \\ \hat{y}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} \\ 1 & x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_1^{(m)} & \dots & x_n^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \boldsymbol{\widehat{Y} = \mathrm{X}\mathrm{w}}$$

$$\mathcal{L}_E = \sum_{i=1}^{m} \left(y^{(i)} - \hat{y}^{(i)}\right)^2 = (Y - \hat{Y})^T (Y - \hat{Y}) \overset{\text{not}}{=} \boldsymbol{\left(Y - \widehat{Y}\right)^2}$$

Regresia liniară multiplă

$$\mathcal{L}_E = \left(Y - \hat{Y}\right)^2 = (Y - Xw)^2 = (Y - Xw)^T(Y - Xw)$$
$$= (Y^T - w^T X^T)(Y - Xw)$$
$$= Y^T Y - Y^T Xw - w^T X^T Y + w^T X^T Xw = Y^T Y - 2w^T X^T Y + w^T X^T Xw$$

- $Y^T Xw = [\ddots]_{1\times m}\,[\ddots]_{m\times n}\,[\ddots]_{n\times 1} = [\ddots]_{1\times 1}$ (scalar)
- $Y^T Xw = (w^T X^T Y)^{\mathrm{T}}$

Un scalar (un număr) este o matrice 1 x 1
Transpusa unui scalar este același scalar

Regresia liniară multiplă

$$\mathcal{L}_E = Y^T Y - 2w^T X^T Y + w^T X^T X w$$

- Minimizăm $\mathcal{L}_E$ în raport cu w = (w_0, w_1, …, w_n), toate derivatele partiale sunt 0:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial w} = 0 \Rightarrow -2X^T Y + 2X^T X w = 0 \Rightarrow X^T X w = X^T Y \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{w} = \left(\boldsymbol{X}^T \boldsymbol{X}\right)^{-1} \boldsymbol{X}^T \boldsymbol{Y}$$

- Matricea $X^T X$ trebuie să fie inversabilă

Determinarea unei transformări afine pe baza corespondențelor din imagini

- Presupunem că avem perechi de puncte corespondente
- Cum calculăm matricea transformării afine?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ x_2' \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}}$$

$$\begin{bmatrix} a^* \\ b^* \\ c^* \\ d^* \\ e^* \\ f^* \end{bmatrix} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}$$

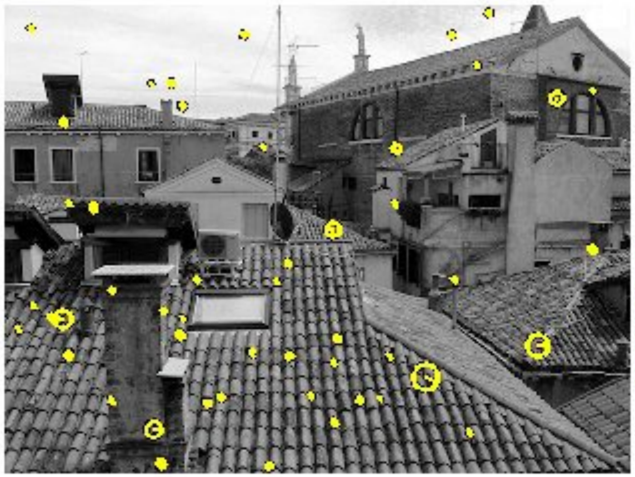
Determinarea unei transformări afine pe baza corespondențelor din imagini

- **Presupunem că avem perechi de puncte corespondente**
- **De unde le luăm?**

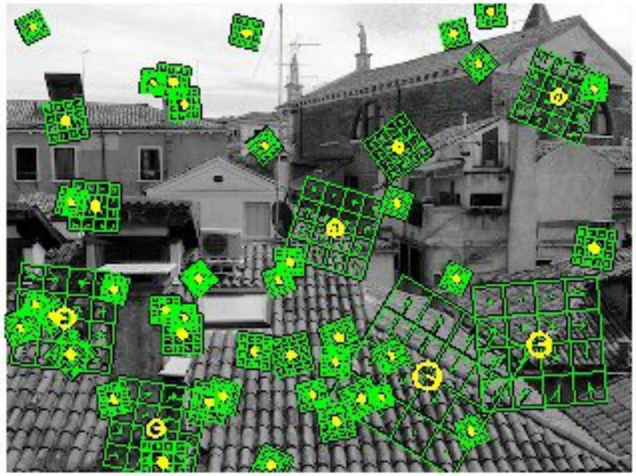
$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1' \\ y_1' \\ x_2' \\ \vdots \end{bmatrix}}_{\mathbf{Y}}$$

$$\begin{bmatrix} a^* \\ b^* \\ c^* \\ d^* \\ e^* \\ f^* \end{bmatrix} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}$$

Descriptorul SIFT [Lowe 2004]



Puncte de interes cu scalele și orientările asociate (selecție aleatoare de 50 de puncte)



Descriptori SIFT

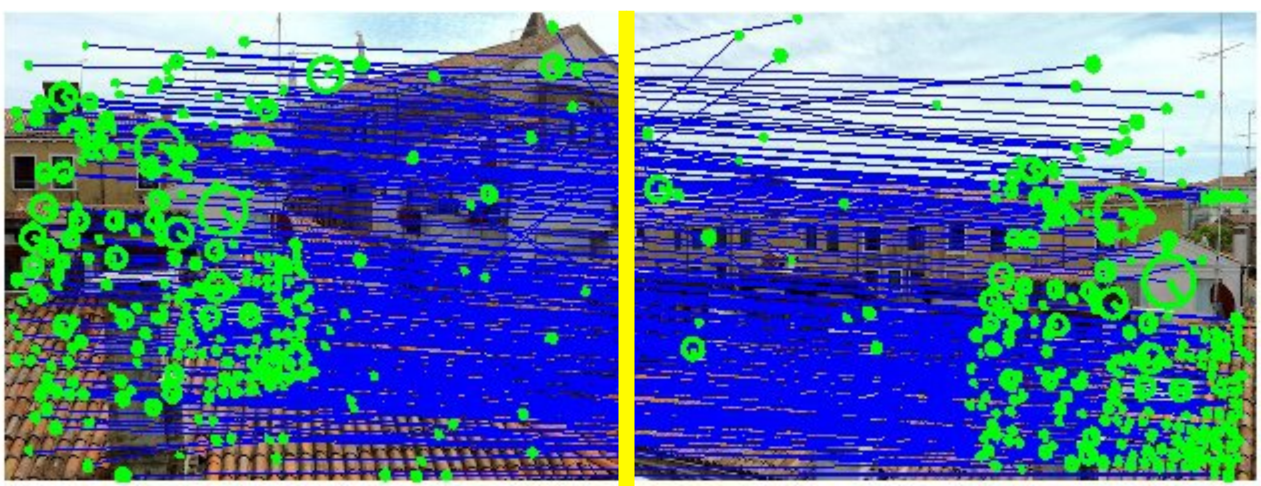
http://www.vlfeat.org/overview/sift.html

Corespondențe pe baza descriptorilor SIFT

img1

img2

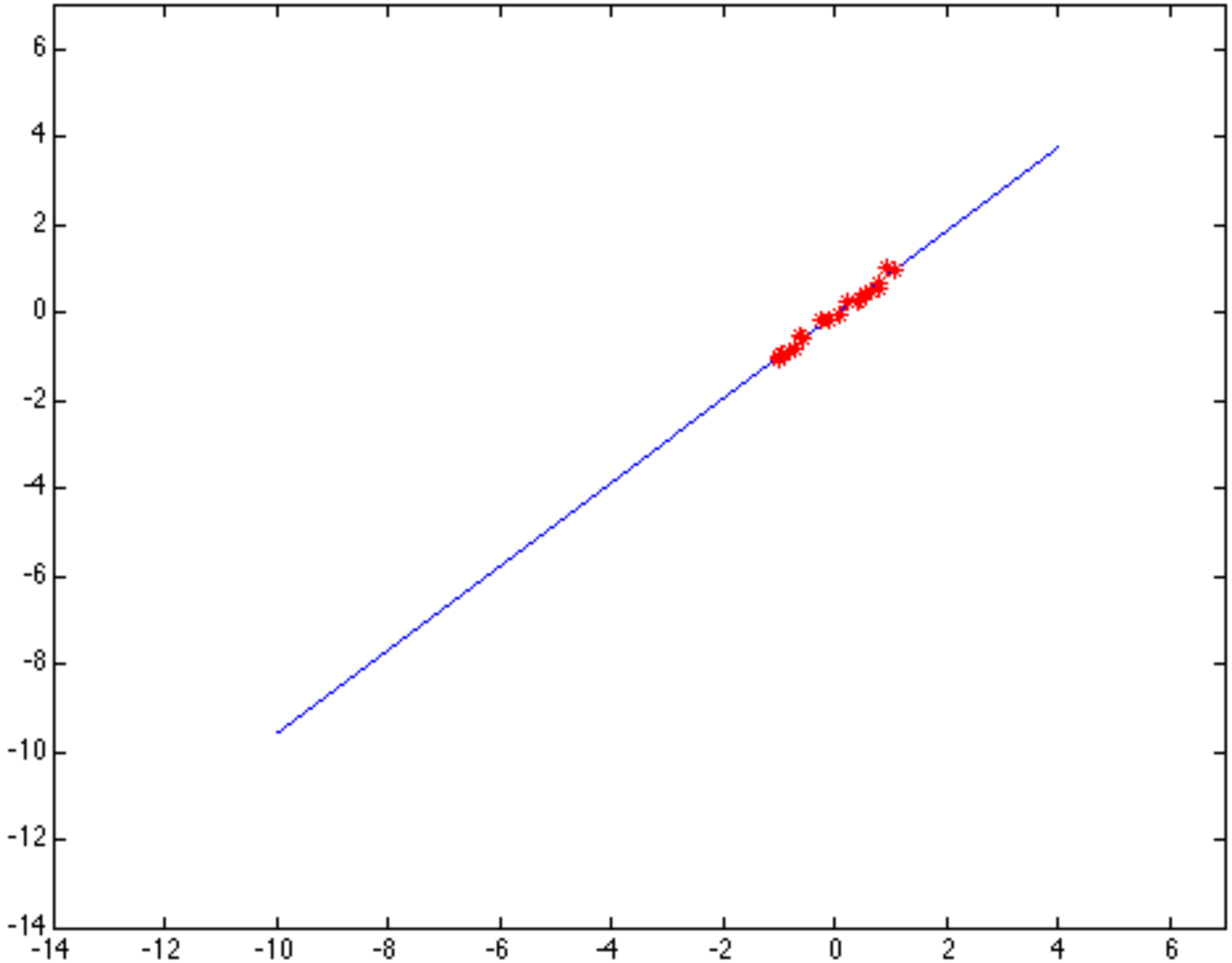
img1



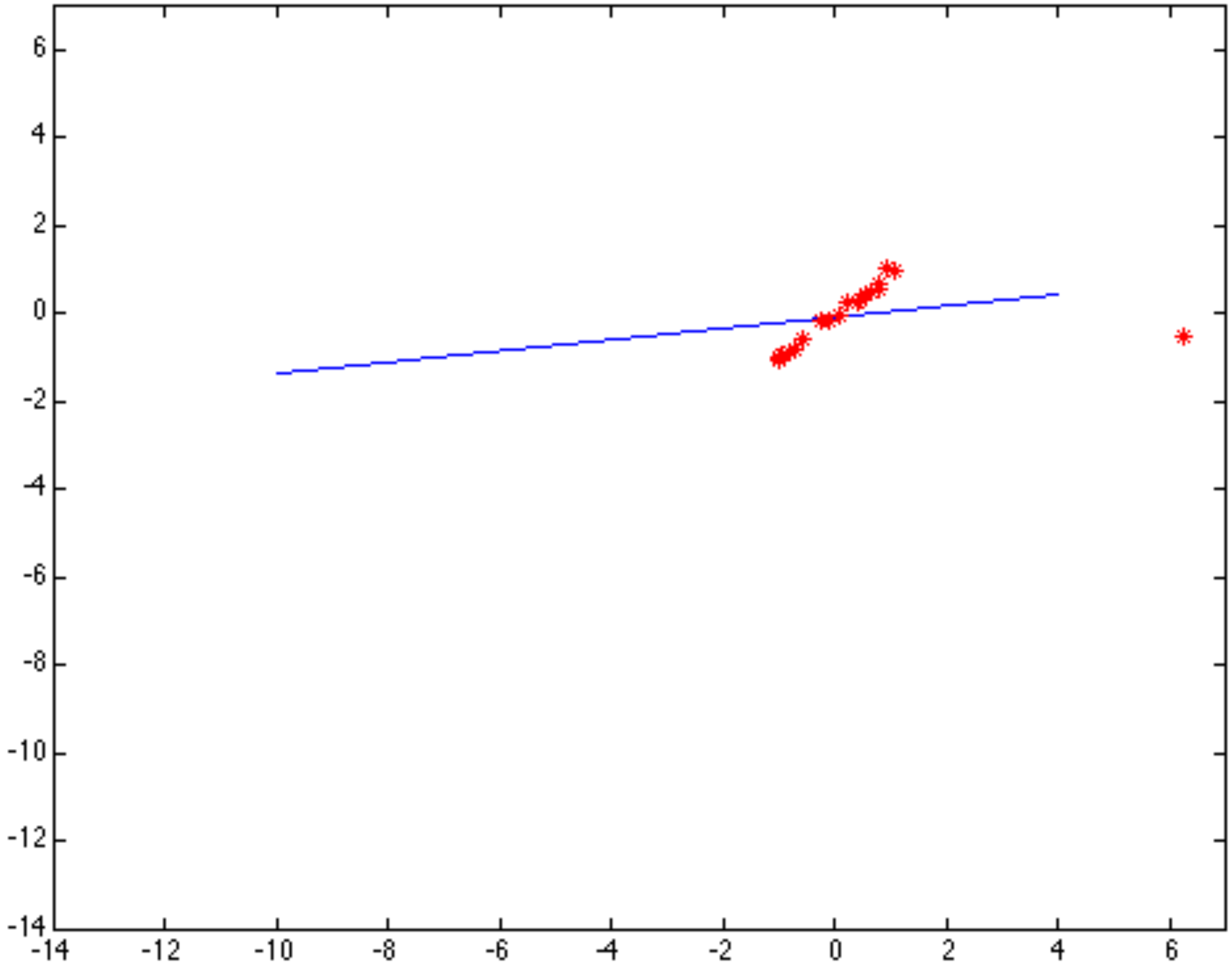
img2

Nu toate corespondențele sunt valide

Efectul punctelor outlier asupra metodei celor mai mici pătrate



Efectul punctelor outlier asupra metodei celor mai mici pătrate



RANSAC

- RANdom Sample Consensus

- vrem să evităm impactul punctelor outlier, vom încerca să căutăm puncte “inlier” (care susțin o ipoteză)

- dacă un punct outlier este folosit în estimarea curentă, atunci transformarea (afină) estimată nu va primi suport din partea celorlalte corespondențe

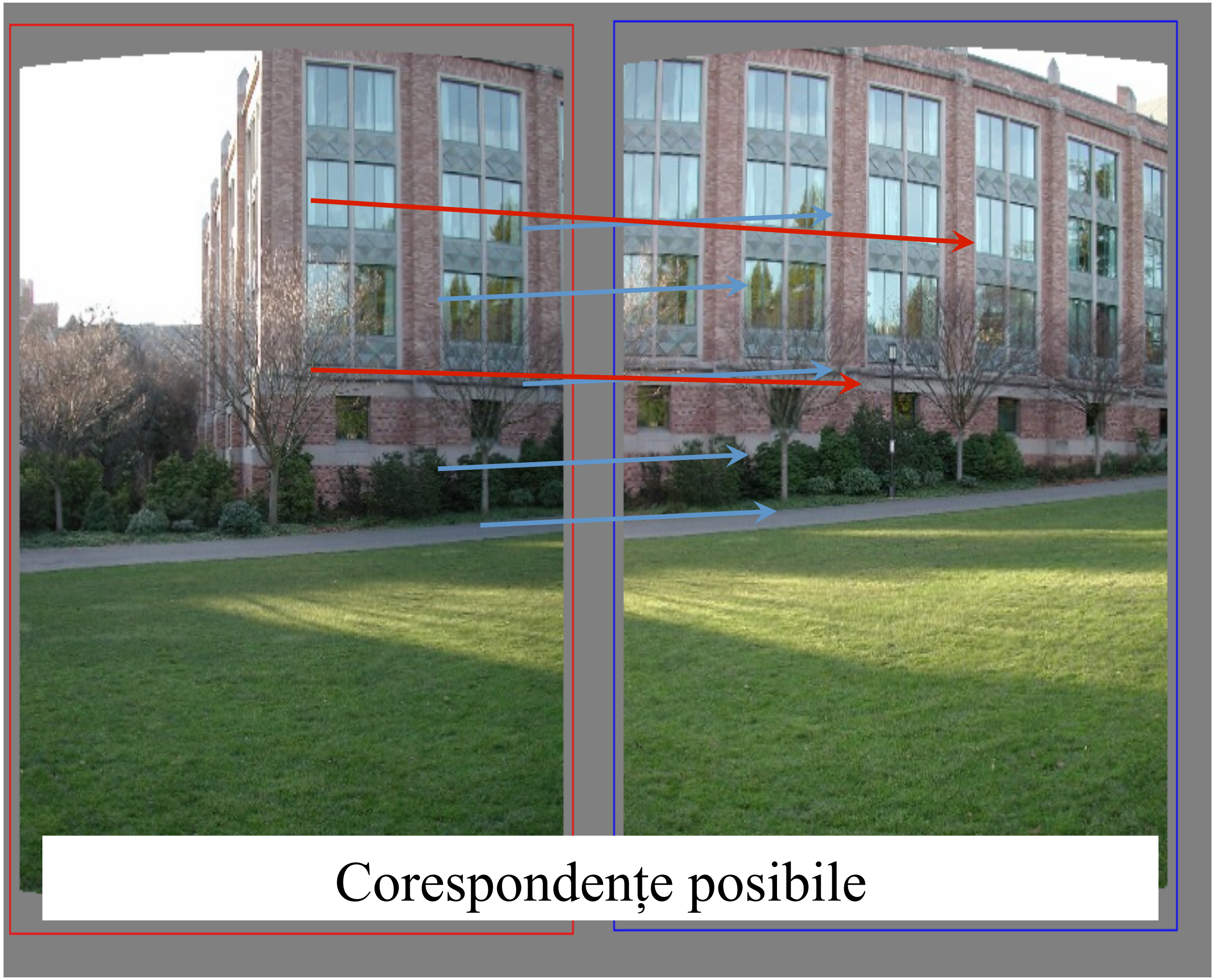
RANSAC: forma generală

O Iterație RANSAC:

1. Selectează aleator un grup de puncte corespondente (minim 3 corespondențe în cazul transformatei afine) pe baza căreia se calculează transformarea (afină)
2. Calculează transformarea (afină) **M** din grupul de puncte corespondente ales
3. Găseștele punctele inlier (reziduu(Mx_i, x'_i) < prag)
4. Dacă numărul de puncte inlier este suficient de mare recalculează matricea M pe baza tuturor punctelor inlier

Păstrează la final transformarea (afină) calculată pe baza celui mai mare număr de puncte

Exemplu RANSAC: Translație

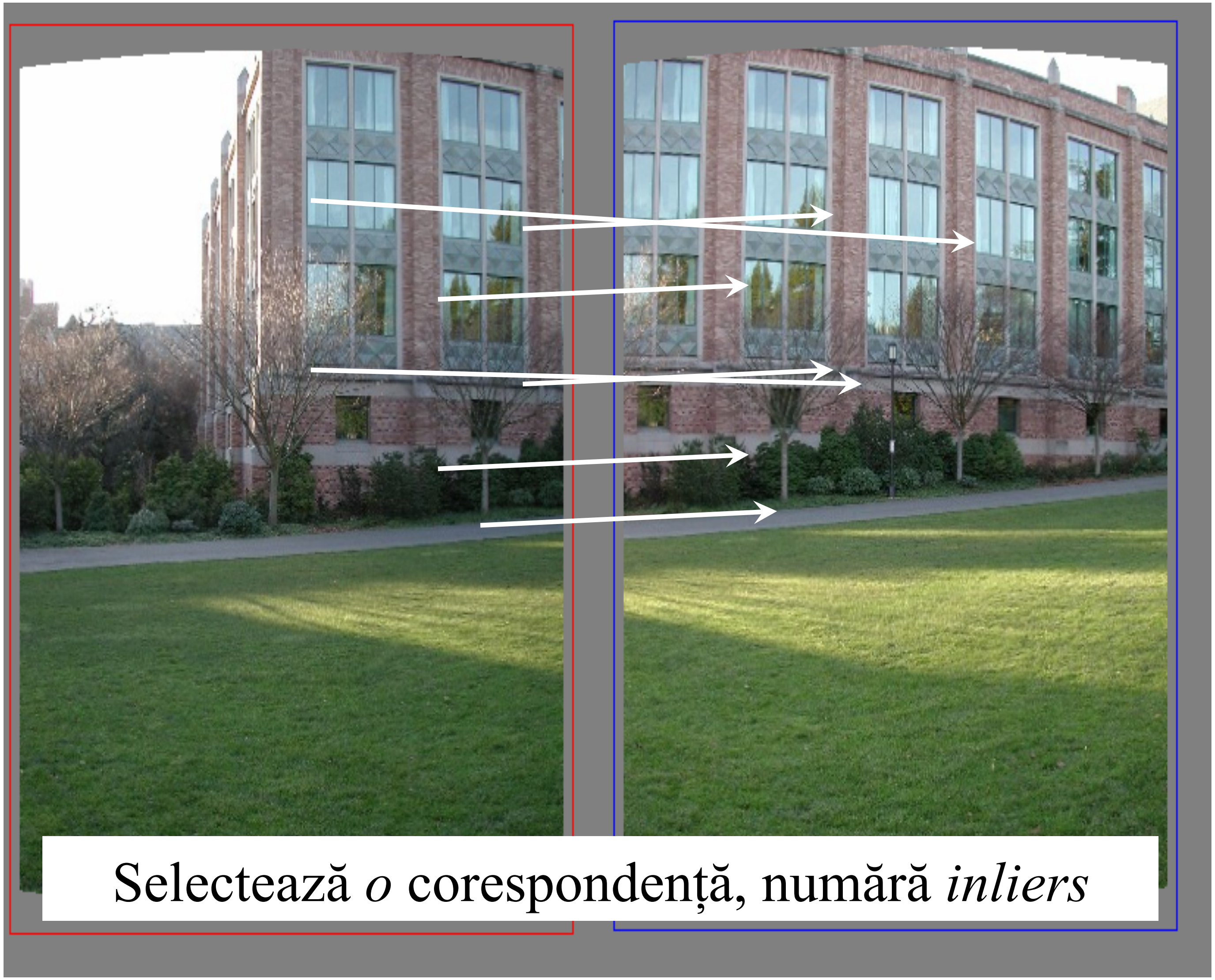


Corespondențe posibile

Exemplu RANSAC: Translație

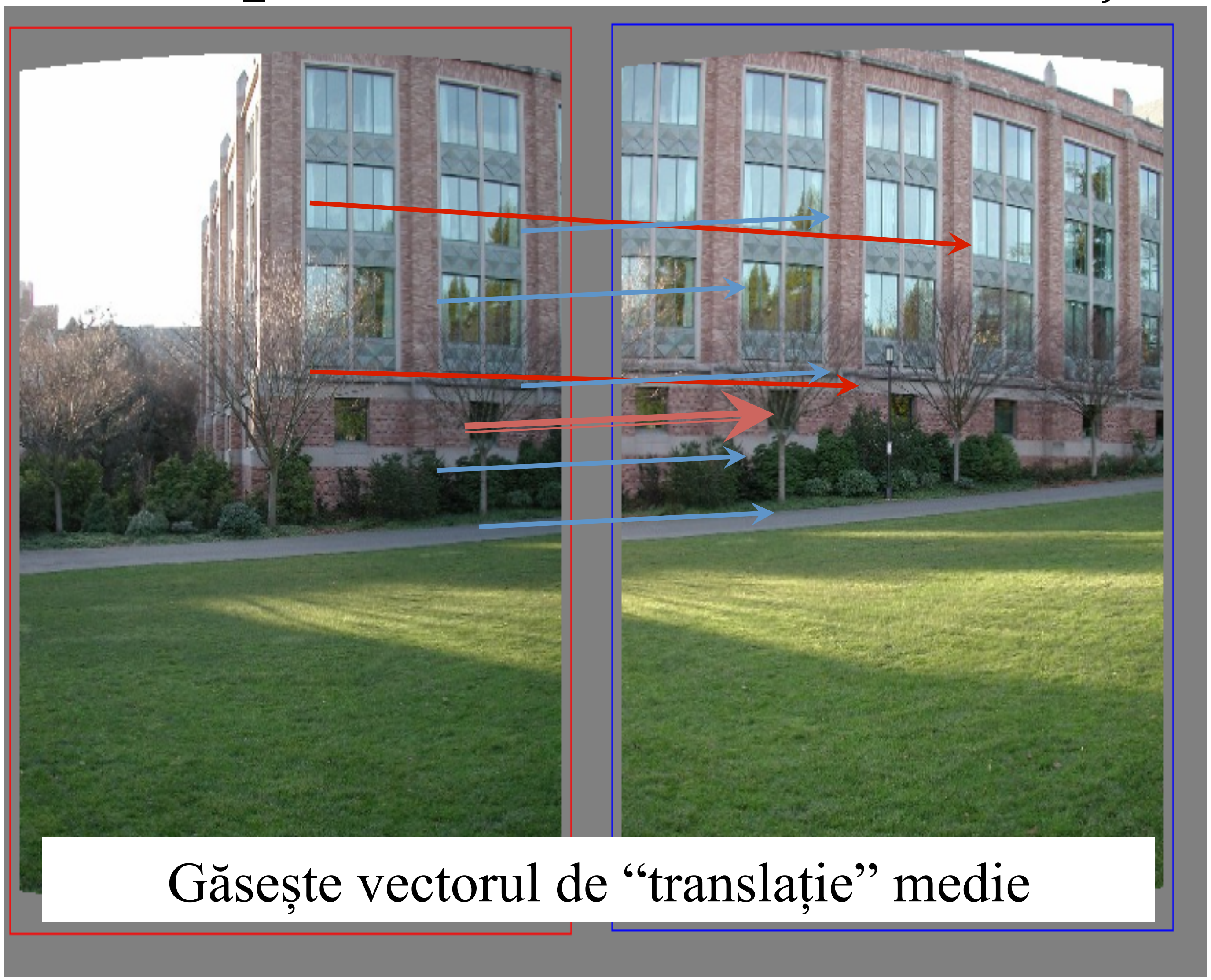
Selectează *o* corespondență, numără *inliers*

Exemplu RANSAC: Translație

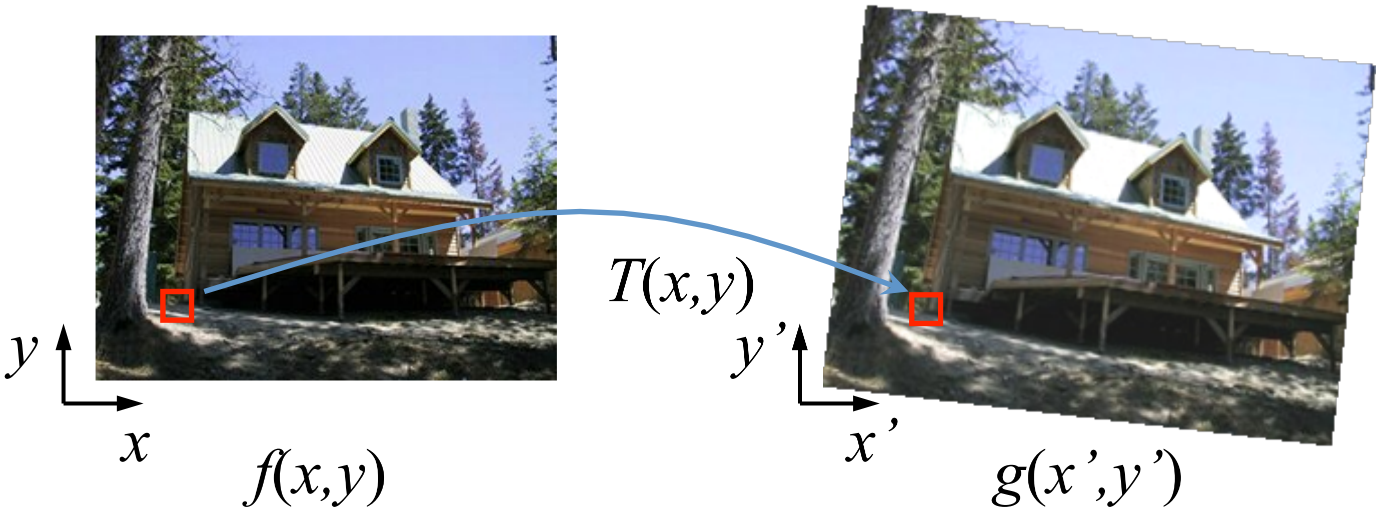


Selectează *o* corespondență, numără *inliers*

Exemplu RANSAC: Translație

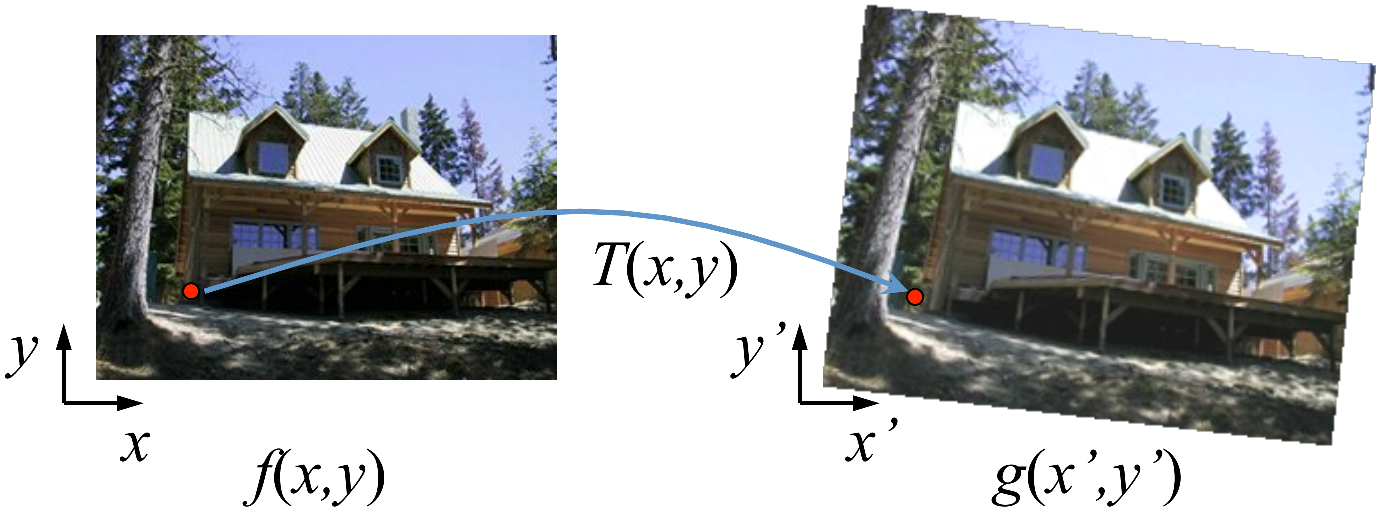


Aplicarea transformatei unei imagini



Dată o transformare geometrică T și o imagine sursă $f(x,y)$, cum calculăm imaginea rezultată g obținută după aplicarea lui T: $g(x',y') = f(T(x,y))$?

Aplicarea transformatei unei imagini

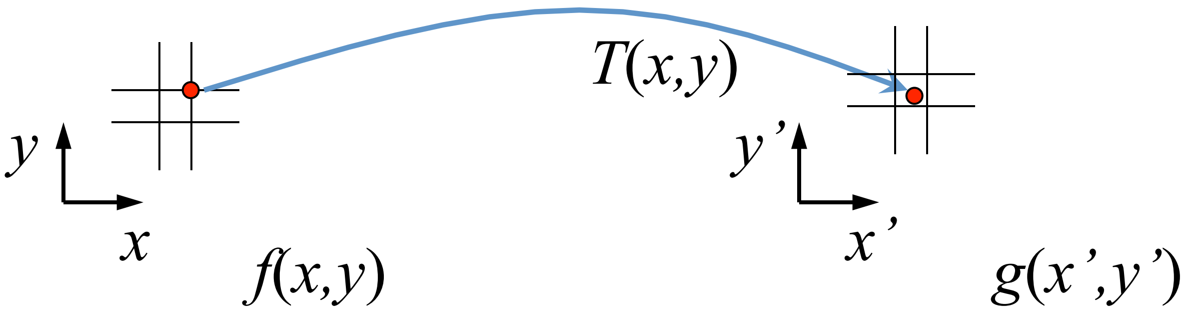


Mapăm fiecare pixel $f(x,y)$ în poziția corespunzătoare

$$(x',y') = T(x,y)$$

Ce se întâmplă dacă pixelul rezultat este mapat "între" doi pixeli?

Aplicarea transformatei unei imagini



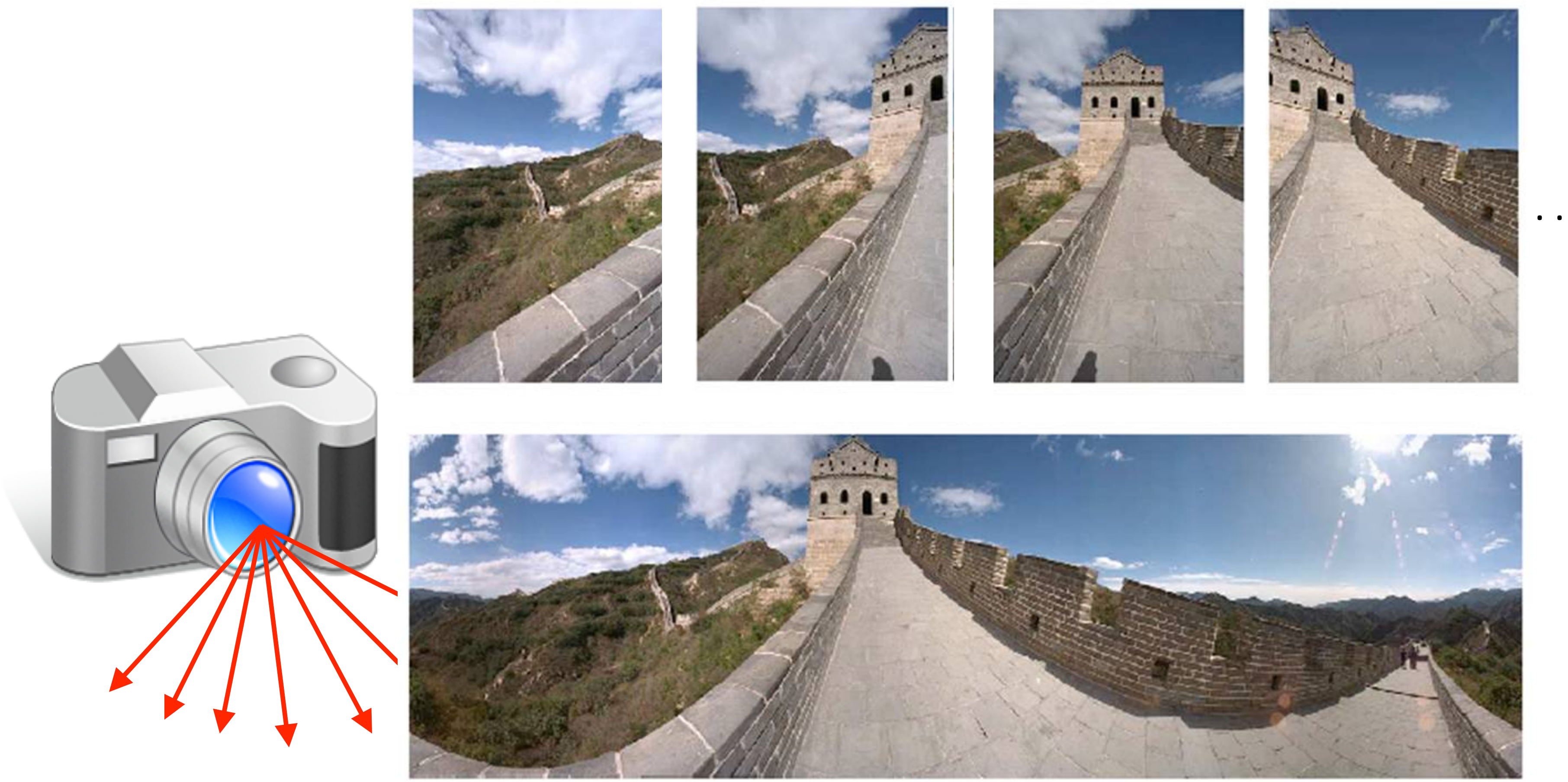
Mapăm fiecare pixel $f(x,y)$ în poziția corespunzătoare

$$(x',y') = T(x,y)$$

Ce se întâmplă dacă pixelul rezultat este mapat "între" doi pixeli?

Distribuim culoarea lui vecinilor pixelului (x',y')

Construcția de panorame



Obține o panoramă prin combinarea mai multor imagini

Transformările proiective (perspective)

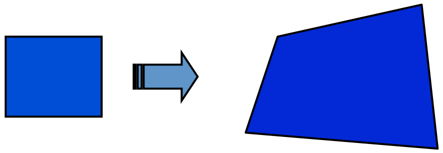
Transformările proiective sunt combinații de:

- transformări afine
- deformări proiective (projective warps)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

Proprietăți ale transformărilor proiective:

- nu duce neapărat originea O(0,0) în origine
- duce liniile în linii
- liniile paralele nu rămân neapărat paralele
- rapoartele de segmente nu sunt neapărat păstrate
- închisă la compunere: combinarea a două transformări afine este o transformare afină
- matricea proiectivă are 8 grade libertate (unul din 9 este pentru scală)



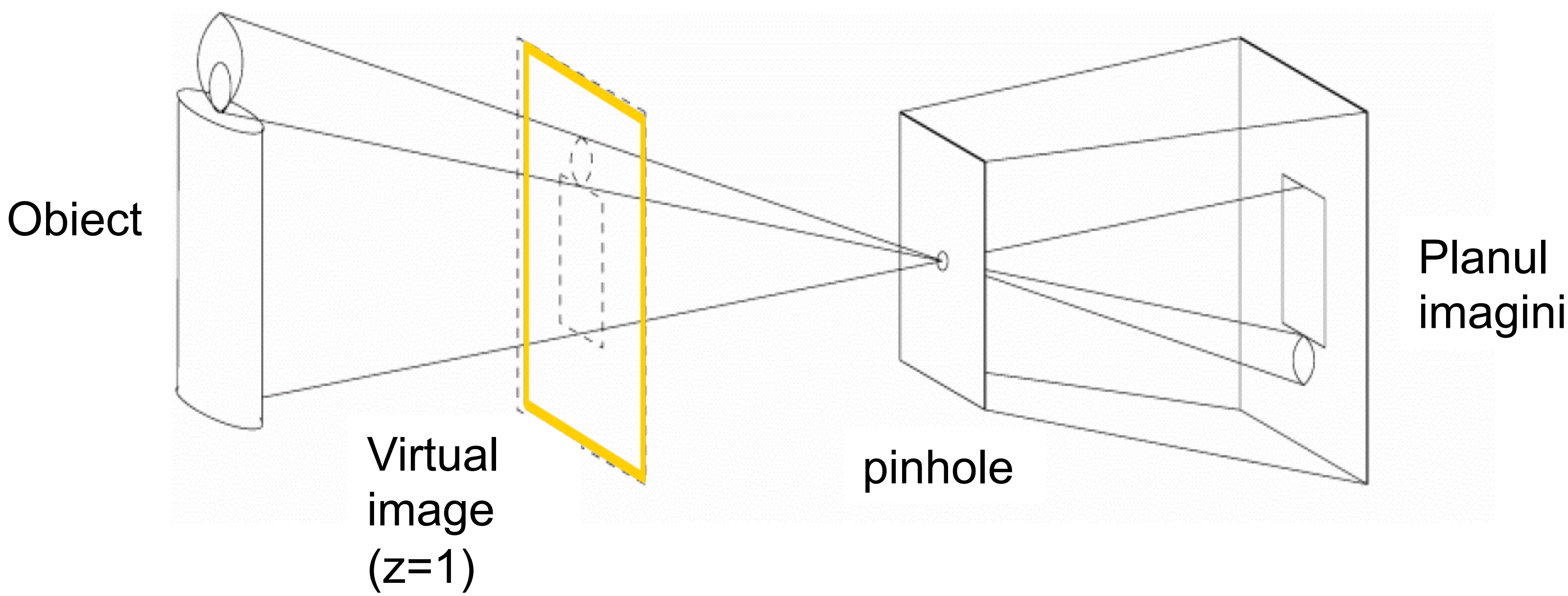
Cum obținem o panoramă?

- Procedura de bază:
  - obținem mai multe imagini ale scenei din aceeași poziție a camerei
    - rotim camera în jurul centrului optic al său
  - calculăm transformarea geometrică dintre prima și a doua imagine
  - transformăm a doua imagine astfel încât se suprapune cu prima
  - lipim (“blending”) cele două imagini pentru a crea panorama
  - (dacă sunt mai multe imagini în secvență, repetăm)

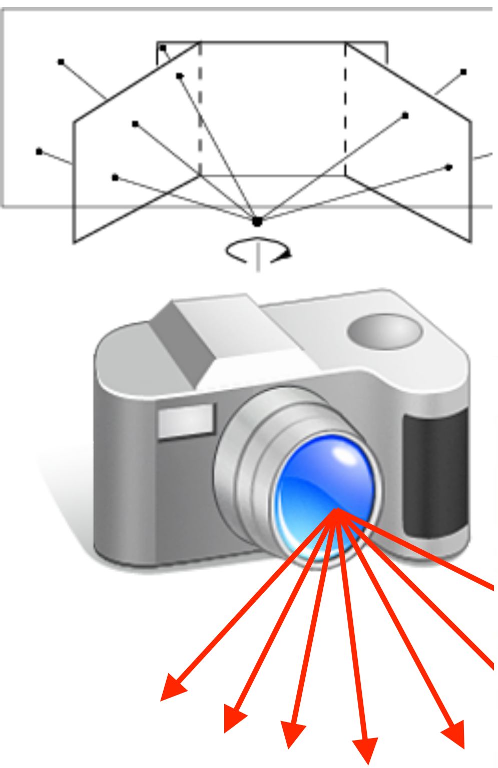
- Cum folosim geometria 3D a scenei?

Modelul Pinhole camera

- Pinhole camera = model simplu prin care aproximăm formarea imaginilor considerând că prin cameră trece un singur punct. O rază din lumea 3D se proiectează într-un singur punct pe planul imaginii.



Construcția de panorame

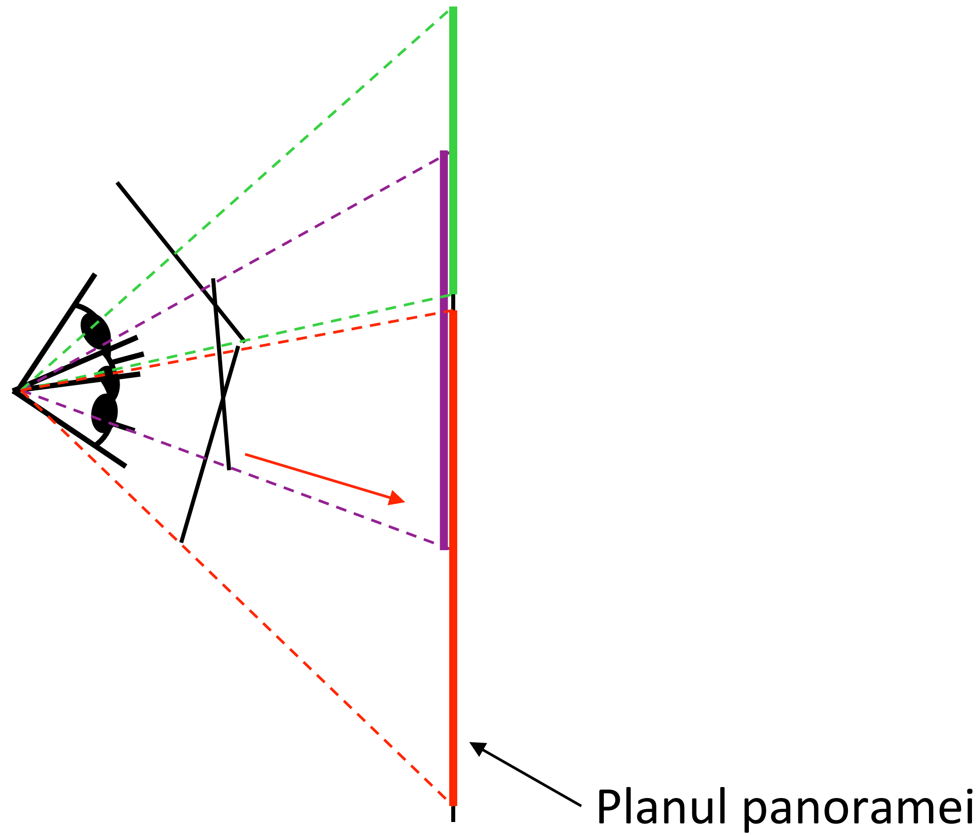


. . .

Obține o panoramă prin combinarea mai multor imagini

- obținem mai multe imagini ale scenei din aceeași poziție a camerei
    - rotim camera în jurul centrului optic al său

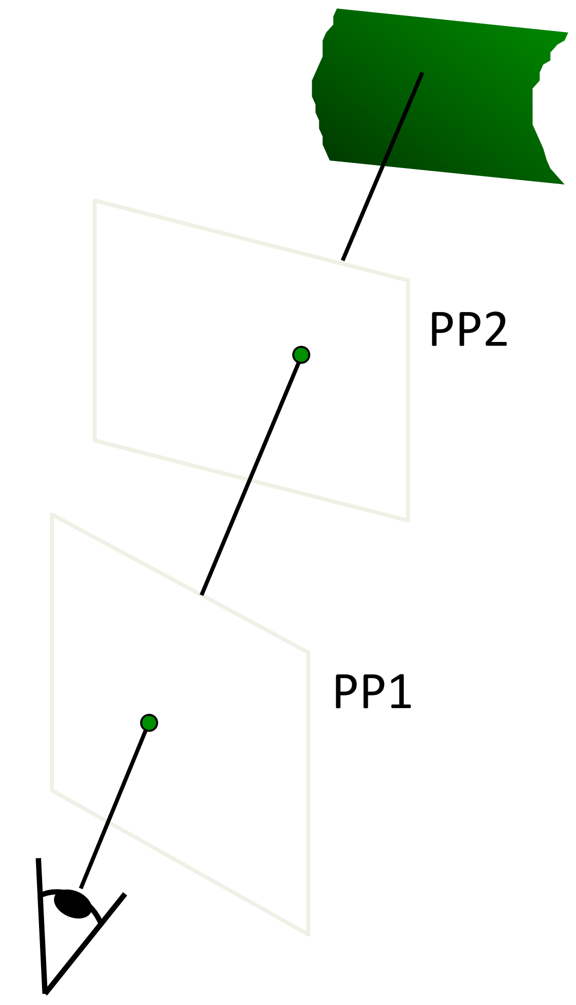
(Re)Proiecții ale imaginii



- Panorame are o interpretare naturală în spațiul 3D
  - imaginile sunt (re)proiectate pe un plan comun
  - panorama este formată în acest plan

(Re)Proiecții ale imaginii

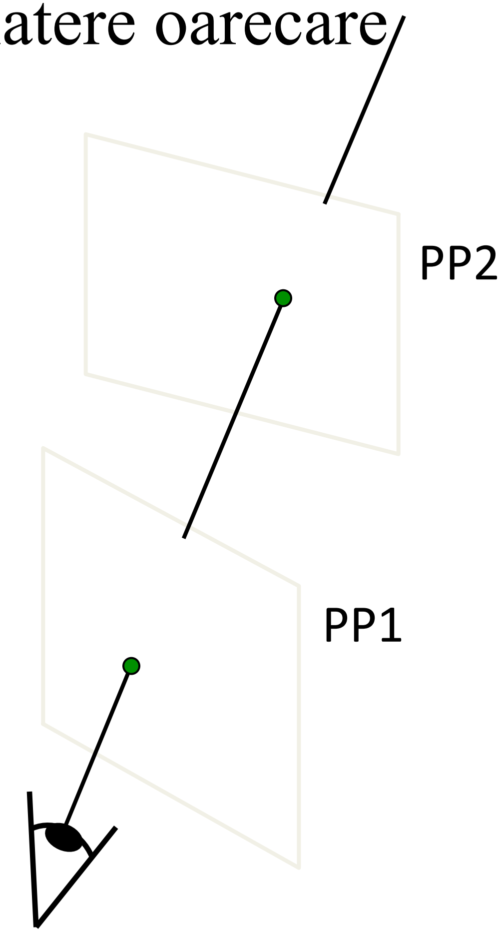
- care este legătura dintre două imagini în care camera are același centru?
- raza care unește centrul camerei din imaginea 1 intersectează imaginea 2
- găsește transformarea (proiectivă) care transformă imaginea 1 în imaginea 2.



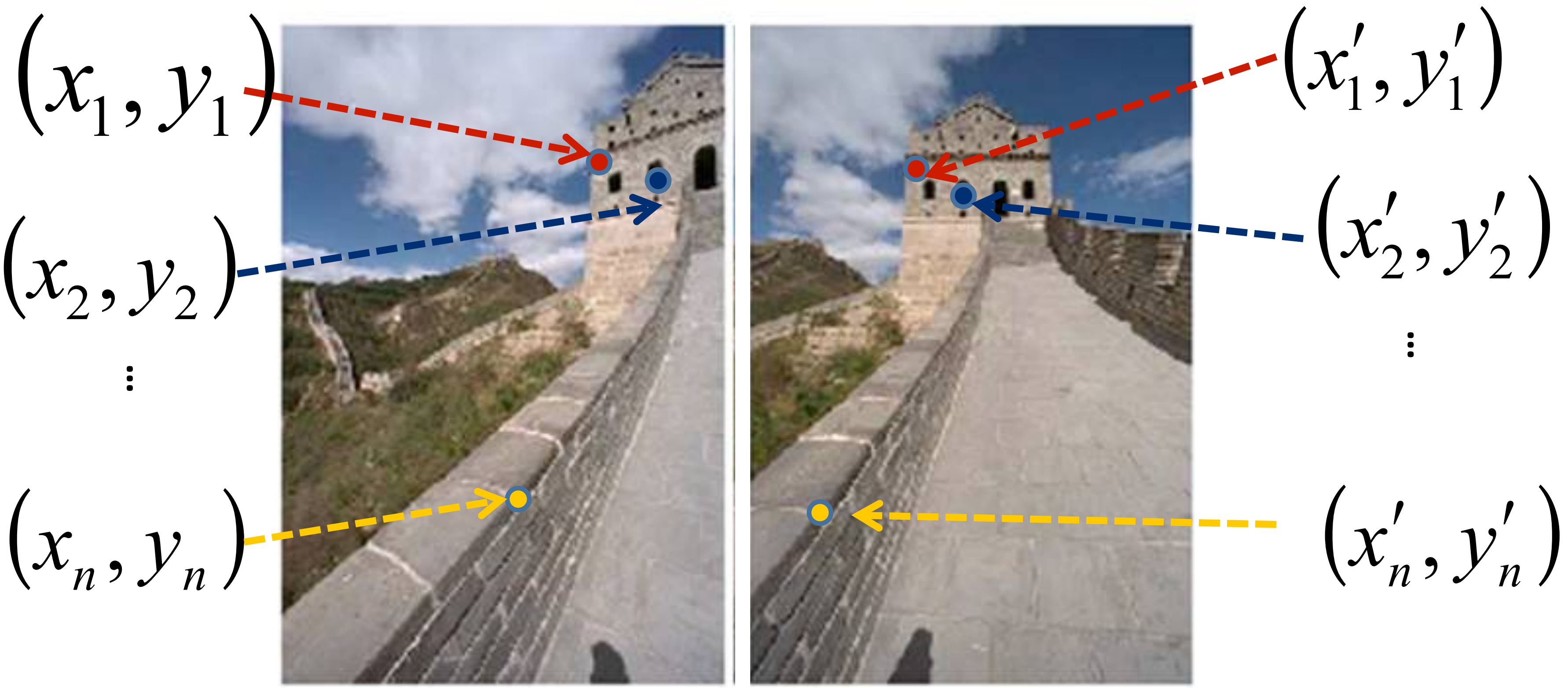
Homografii

- O transformare proiectivă este o transformare între orice două imagini obținute cu același centru de proiecție (al camerei)
  - dreptunghiurile sunt mapate în patrulatere oarecare
  - nu păstrează liniile paralele
  - păstrează liniile drepte
- Se mai numește **Homografie**

$$\underset{\mathbf{p'}}{\begin{bmatrix} wx' \\ wy' \\ w \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{H}}{\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{p}}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}}$$



Homografie



Pentru a calcula homografia între două imagini avem nevoie de cel puțin patru perechi de puncte corepondente. Vrem să formulăm un sistem de ecuații cu necunoscutele parametrii matricei H.

Găsirea homografiilor

$$\mathbf{p}' = \mathbf{H}\mathbf{p}$$

$$\begin{bmatrix} wx' \\ wy' \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- putem seta i = 1 (scala). Rămân 8 necunoscute. Formăm un sistem liniar de ecuații cu 8 necunoscute, la fel ca la transformarea afină.

$$\mathbf{Ah} = \mathbf{b}$$

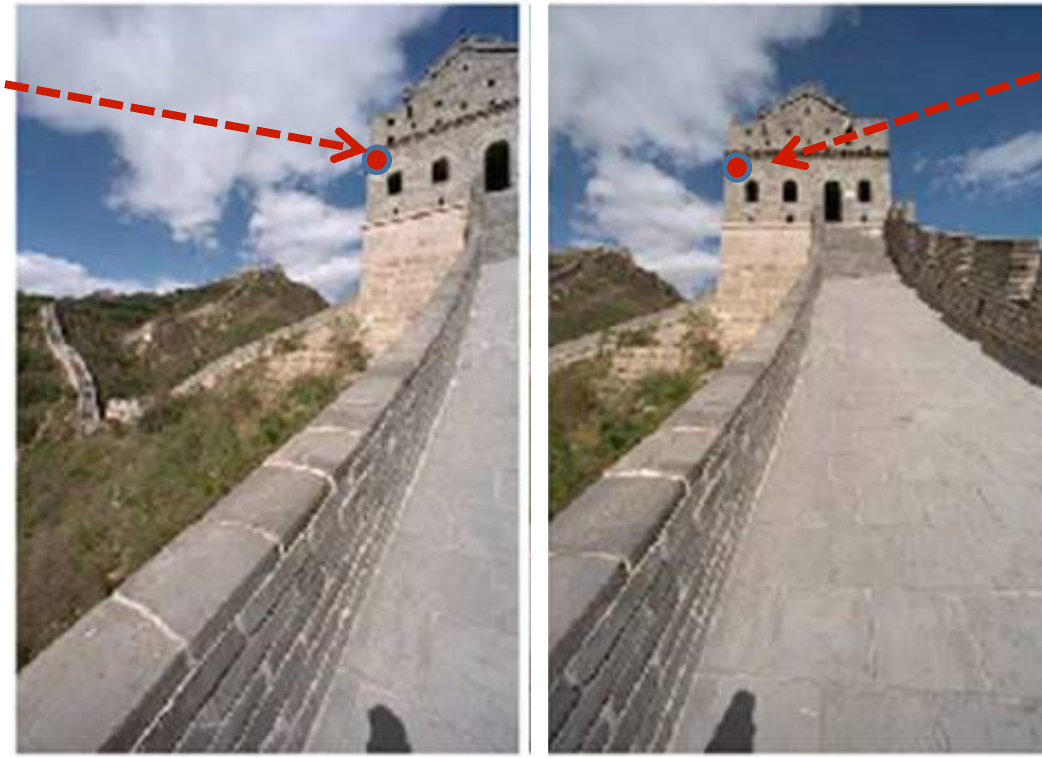
unde necunoscute sunt în vectorul h = $[a,b,c,d,e,f,g,h]^T$

- avem nevoie de cel puțin 8 ecuații (4 puncte corespondente), dar cu cât sunt mai multe cu atât mai bine
- aflăm soluția **h** folosind metoda celor mai mici pătrate:

$$\min \|Ah - b\|^2 = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

Aplicarea unei homografii

(x, y)



$$\left({}^{wx'}\!/_{w}, {}^{wy'}\!/_{w} \right) = (x', y')$$

Aplicăm o homografie H astfel:

- calculăm **p’** = **Hp**
- convertim **p’** din coordonate omogene în coordonate ale imaginii

$$\underbrace{\begin{bmatrix} wx' \\ wy' \\ w \end{bmatrix}}_{\mathbf{p'}} = \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{p}}$$

RANSAC: forma generală

O iterație RANSAC:

1. Selectează aleator un grup de puncte corespondente (minim 4 corespondențe în cazul homografiei) pe baza căreia se calculează transformarea (homografia)
2. Calculează transformarea (homografia) **M** din grupul de puncte corespondente ales
3. Găseștele punctele inlier (reziduu(Mx_i, x'_i) < prag)
4. Dacă numărul de puncte inlier este suficient de mare recalculează matricea M pe baza tuturor punctelor inlier

Păstrează la final transformarea (homografia) calculată pe baza celui mai mare număr de puncte