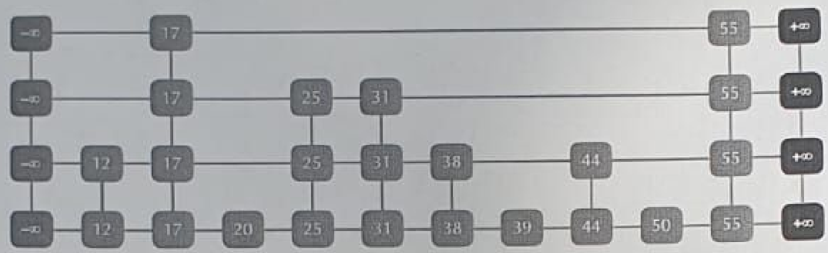
Nume:

Grupa:

Examen Algoritmi Avansaţi. 18.06.2024.

1. Dați exemplu de o problemă de decizie care să fie in clasa **NP** dar nu și in clasa **NP-hard.** Justificați! **(10p)**

2. Fie instanța de skip list din figura de mai jos. Să se insereze, pe rând, elementele 40, 23, 60. Când dăm cu banul obținem secventa H, T, H, H, H, H, H, T. Știm că promovăm un element atunci când avem H (heads) și ne oprim la T (tails). De asemenea lucrăm pe varianta in care fiecare inserție poate adăuga cel mult un singur nivel nou la structură. Să se deseneze cum arată structura de skip list după fiecare inserție. Pentru prima inserție indicați (eventual folosind niște săgeți) traseul parcurs pentru a ajunge la poziția pe care ați inserat primul element. **(10p)**



3. Numim *minimum degree spanning tree* pentru un graf conex G, un arbore partial cu proprietatea ca gradul maxim al nodurilor este minimizat.

Teoremă: Problema de decizie daca un graf conex admite un arbore partial cu noduri de grad cel mult 2 (lant hamiltonian) este **NP-Completă**.

Cerință: Aratati ca nu poate exista un algoritm aproximativ pentru problema gasirii unui *minimum degree spanning tree* pentru un graf conex cu factorul de aproximare $< 3/2$, in ipoteza că $P \neq NP$. **(10p)**

4. Fie $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \ldots, P_9\}$, unde $P_1 = (-4,1)$, $P_2 = (-3,0)$, $P_3 = (-2,1)$, $P_4 = (-1,-2)$, $P_5 = (1,-1)$, $P_6 = (2,0)$, $P_7 = (3,2)$, $P_8 = (4,0)$, $P_9 = (\alpha, \beta)$, cu $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$. Notăm cu $\mathcal{L}_i$ lista vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui $\mathcal{M}$, obţinută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew. (i) Pentru $\alpha = 6, \beta = 0$ detaliaţi cum evoluează $\mathcal{L}_i$ pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew. **(6p)** (ii) Determinaţi mulţimea $S = \{\alpha \mid \alpha > 0,$ pentru orice β punctul $P_9 = (\alpha, \beta) \in \mathcal{L}_i\}$. **(2p)** (iii) Daţi exemplu de pereche (α, β) pentru care $\mathcal{L}_i$ are un număr minim de puncte. **(2p)** Justificaţi!

5. Fie punctele $A = (8,5)$, $B = (7,2)$, $C = (3,2)$, $D = (6,8)$, $E = (10,4)$, $F = (7,6)$, $G = (6,-1)$. (i) Justificaţi că mulţimea $\{A, B, C, D, E, F, G\}$ este mulţimea vârfurilor unui poligon y-monoton $\mathcal{P}$. **(3p)** Se aplică pentru $\mathcal{P}$ algoritmul de triangulare a poligoanelor monotone în timp liniar. Indicaţi ce vârfuri corespund cazurilor 1, 2a, respectiv 2b, justificând, pe scurt, afirmaţiile făcute. **(4p)** Aplicaţi metoda din teorema galeriei de artă în cazul poligonului $\mathcal{P}$, indicând o posibilă amplasare a camerelor **(3p)**.

6. Daţi exemplu de mulţime $\mathcal{M}$ cu 6 elemente din $\mathbb{R}^2$ care să admită o triangulare ce conţine 7 feţe, una dintre submulţimile sale cu 5 elemente $\mathcal{N}_1$ să admită o triangulare ce conţine 3 feţe şi altă submulţime a lui $\mathcal{M}$ cu 5 elemente, $\mathcal{N}_2$, să admită o triangulare ce conţine 5 feţe. Justificaţi alegerea făcută. **(10p)**

7. Fie semiplanele $H_1 : -y - 2 \leq 0, H_2 : -x - 2 \leq 0$. (i) Alegeţi două semiplane H_3 şi H_4 astfel încât intersecţia $P = H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$ să fie un patrulater pentru care punctul $(2,2)$ este vârf al lui P **(3p)**. (ii) Fie $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$. Daţi exemplu de două funcţii obiectiv f_1 şi f_2 astfel ca problema de programare liniară dată de $\mathcal{H}$ şi f_1 să admită un unic punct de optim (punct de maxim), iar problema de programare liniară dată de $\mathcal{H}$ şi f_2 să aibă ca mulţime de puncte de optim (puncte de maxim) un segment. **(7p)**. Justificaţi şi desenaţi!

8. (a) Indicaţi cinci algoritmi menţionaţi la curs pentru care este utilizat sau este relevant testul de orientare. În fiecare caz descrieţi, foarte pe scurt, contextul şi modul în care este folosit. **(15p)**

(b) Care este complexitatea-timp necesară procesării tuturor evenimentelor în algoritmul lui Fortune? Justificaţi succint, punctând principalele idei! **(5p)**