Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică-Informatică
Calculabilitate şi Complexitate
Examen, 29 Ianuarie, Nivelul I, Subiecte: A

Nume: ______________________

Puncte:26. Timp: 52 min

Data: 29-01-2024

Instrucțiuni I. Incercuiți rãspunsul/rãspunsurile corecte. Toate intrebãrile contează in mod egal. Puteți folosi marginile hârtiei drept ciornã, **dar nicun alt material**. O intrebare poate avea mai multe rãspunsuri corecte. Toate contează in mod egal. **Pe de altã parte, dacã alegeți un rãspuns greșit, punctajul vostru la intrebare este zero.**

1. Care din următoarele funcţii sunt primitiv recursive ?
   - (a) $f(x, y) = x + y$.
   - (b) bijecţia discutată la seminar intre $\mathbf{N}^2$ şi $\mathbf{N}$.
   - (c) Funcţiile calculabile de programe LOOP.
   - (d) niciunul dintre celelalte rãspunsuri nu este corect.
2. Care din următoarele sigur **nu** sunt funcţii primitiv recursive ?
   - (a) $f(n) = -1$.
   - (b) suma a două funcţii primitiv recursive.
   - (c) funcţia lui Ackermann.
   - (d) funcţia "busy beaver".
3. O funcţie parţial recursivă este primitiv recursivă dacă şi numai dacă...
   - (a) este obţinută prin minimizare.
   - (b) este definită in orice punct x.
   - (c) poate fi calculată de o maşină Turing.
   - (d) niciunul din rãspunsurile anterioare nu este corect.
4. Cum putem crea o funcţie care nu este recursivă ?
   - (a) enumerăm toate funcţiile primitiv recursive. Creăm o funcţie care pe inputul i returnează valoarea $f_i(i) + 1$.
   - (b) folosim operacţia de minimizare, dacă rezultatul nu este definit pentru toate inputurile i.
   - (c) prin suma a două funcţii primitiv recursive.
   - (d) Niciunul din rãspunsurile de mai sus nu este corect.

5. Dacã A este o mulţime recursivã (diferitã de mulţimea vidã şi Σ^*) iar B este problema de a testa dacã un numãr binar este prim, atunci
   (a) $A \leq_m B$ dar B nu se reduce la A.
   (b) $B \leq_m A$ dar A nu se reduce la B.
   (c) Ambele reduceri sunt adevãrate.
   (d) Nicio reducere nu e adevãratã.
6. Dacã A, B sunt probleme de decizie iar $A \oplus B = \{x0 | x \in A\} \cup \{y1 | y \in B\}$ atunci
   (a) $A \oplus B \leq_m A$.
   (b) $A \oplus B \leq_m B$.
   (c) Ambele reduceri sunt adevãrate.
   (d) Nicio reducere nu e adevãratã
7. Care din urmãtoarele modele de calcul pot calcula toate funcţiile parţial recursive ?
   (a) programe LOOP
   (b) automate celulare.
   (c) maşinã Turing cu mai multe benzi.
   (d) Toate modelele menţionate mai sus.
8. O maşinã Turing universalã ...
   (a) poate simula orice maşinã Turing deterministã.
   (b) acceptã un limbaj recursiv.
   (c) poate simula orice automat celular.
   (d) nu existã.
9. Care din problemele urmãtoare *nu* sunt recursive ?
   (a) problema opririi K.
   (b) problema de a decide dacã un numãr este prim.
   (c) problema satisfiabilitãţii.
   (d) Niciuna din problemele listate nu este recursivã.
10. Care din clasele urmãtoare de probleme de decizie sunt inchise la operaţia de complementare (dacã $A \in \mathcal{C}$ atunci $\overline{A} \in \mathcal{C}$) ?
    (a) clasa NP
    (b) clasa Σ_2^P.
    (c) clasa problemelor parţial recursive.
    (d) clasa problemelor recursive.

11. Care din problemele următoare **nu** sunt recursiv enumerabile ?

    (a) $K_1 = \{< x, y >: M_x(y)$ se opreşte intr-un pas$\}$

    (b) $K = \{< x, y >: M_x(y)$ se opreşte$\}$.

    (c) $\overline{K} = \{< x, y >: M_x(y)$ nu se opreşte$\}$

    (d) toate problemele sunt recursiv enumerabile.

12. Care din următoarele probleme sunt recursive ?

    (a) Fiind date o mulţime de tipuri de pavaje, problema dacă putem pava planul cu pavajele Wang date.

    (b) Fiind date o mulţime de tipuri de pavaje, problema dacă putem pava un pătrat 1000x1000 cu pavajele Wang date

    (c) Fiind dat un polinom cu coeficienţi intregi $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ există soluţii pentru ecuaţia $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ cu $|x_1|, \ldots, |x_n| \leq 1000$?

    (d) nicio problemă din cele de mai sus nu este recursivă.

13. Care din următoarele probleme poate fi rezolvată (in principiu) cu un SAT solver ?

    (a) problema opririi.

    (b) orice problemă din clasa P

    (c) orice problemă din clasa NP

    (d) niciuna din problemele de mai sus.

14. Fiind dată formula următoare: $x \vee y \vee t, \overline{y} \vee \overline{t}, \overline{x} \vee \overline{z} \vee \overline{t}$, care literali sunt puri ?

    (a) x

    (b) y

    (c) t

    (d) z

15. Când setez o clauză unitară intr-o formula CNF cu un algoritm de tip DPLL ...

    (a) unele clauze pot dispărea.

    (b) unele clauze pot scade in lungime cu 1.

    (c) pot obţine o clauză contradictorie.

    (d) pot satisface formula.

16. Care din următoarele afirmaţii sunt adevărate ?

    (a) Oricărui algoritm de tip DPLL, rulat pe o instanţă nesatisfiabilă, ii corespunde o demonstraţie prin rezoluţie cu acelaşi număr de paşi.

    (b) Pentru orice formulă nesatisfiabilă cu n variabile există o demonstraţie prin rezoluţie a nesatisfiabilităţii lui Φ cu $O(n^3)$ clauze.

    (c) Dându-se o formulă booleană in care toate variabilele sunt cuantificate, există un algoritm polinomial pentru a decide dacă fomulele sunt adevărate sau false.

    (d) Pentru o parte a răspunsurilor de mai sus nu se cunoaşte statutul lor de adevăr.

17. Care din urmãtoarele probleme **nu** sunt NP-complete, presupunând cã $P \neq NP$?
    (a) Horn-SAT
    (b) Independent set.
    (c) Problema de a decide dacã un numãr scris in baza 2 este sau nu o putere a lui 2.
    (d) Problema de a decide dacã un numãr scris in baza 10 este sau nu o putere a lui 2.
18. Care din urmãtoarele afirmaţii sunt adevãrate ?
    (a) Dacã $A \leq_m^P B$ şi $A \in P$ atunci $B \in P$.
    (b) Dacã $A \leq_m^P B$ şi $A \in NP$ atunci $B \in NP$.
    (c) Dacã $A \leq_m^P B$ şi A este NP-completã atunci B este NP-hard.
    (d) Niciuna din afirmaţiile precedente.
19. Care din urmãtoarele afirmaţii sunt cunoscute drept adevãrate ?
    (a) O formulã logicã in forma CNF cu cel mult un literal pozitiv in fiecare clauzã are demonstraţii prin rezoluţie de lungime polinomialã in n.
    (b) Formulele care codificã (in maniera naturalã) principiul cutiei (principiul lui Dirichlet) au demonstraţii prin rezoluţie de lungime polinomialã in n.
    (c) Problema SAT aparţine clasei de complexitate Σ_3^P.
    (d) Putem certifica satisfiabilitatea/nesatisfiabilitatea unei formule in timp polinomial in n.
20. Care din urmãtoarele probleme au algoritmi polinomiali (presupunând cã $P \neq NP$)?
    (a) Fiind dat un sistem de ecuaţii liniare peste $\mathbf{Z}_2$, are el soluţii ?
    (b) Fiind dat un sistem de ecuaţii pãtratice peste $\mathbf{Z}_2$, are el soluţii ?
    (c) Fiind dat un sistem de ecuaţii cubice peste $\mathbf{Z}_2$, are el soluţii ?
    (d) Niciuna din problemele de mai sus
21. Câte soluţii are urmãtoarea formulã logicã: $x_1 \vee x_2 \vee x_3, \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$
    (a) 3
    (b) 5
    (c) 6.
    (d) niciuna.
22. Care din urmãtoarele clase de complexitate este cunoscutã ca inchisã la complementare ?
    (a) co-NP.
    (b) toate clasele Σ_k^P din ierarhia polinomialã.
    (c) PSPACE.
    (d) Niciuna din clase.

23. Care din următoarele probleme este cunoscută ca fiind in clasa AC^0 ?
   (a) PARITY.
   (b) SAT.
   (c) QBF.
   (d) Niciuna din probleme.
24. Dacă $P = NP$ atunci ...
   (a) $NP = co - NP$.
   (b) Putem găsi in timp polinomial un martor pentru o instanţă pozitivă a unei probleme din NP.
   (c) Orice problemă NP-hard este in P
   (d) $P = PSPACE$.
25. Un algoritm nedeterminist care foloseşte, pe orice input x de lungime n un spaţiu $s(n)$ polinomial in n poate fi simulat de ...
   (a) un algoritm determinist care foloseşte, de asemenea, spaţiu polinomial in n.
   (b) Un algoritm pentru programarea liniară in numere intregi (ILP)
   (c) Un algoritm pentru problema SAT.
   (d) Niciun răspuns nu e corect.
26. O problemă de decizie A poate fi exprimată astfel: există un predicat P calculabil in timp polinomial şi un polinom q astfel incât pentru orice x:

$$x \in A \Leftrightarrow (\forall y_1, |y_1| \leq q(|x|))(\forall y_2, |y_2| \leq q(|x|))(\exists y_3, |y_3| \leq q(|x|))P(x, y_1, y_2, y_3).$$

   Care din următoarele afirmaţii sunt cunoscute drept adevărate ?
   (a) $A \in NP$
   (b) $A \in co - NP$
   (c) $A \in \Pi_P^2$
   (d) $A \in \Sigma_P^2$

Answer Key for Exam $\boxed{\text{A}}$

Instrucţiuni I. Incercuiţi rãspunsul/rãspunsurile corecte. Toate intrebãrile conteazã in mod egal. Puteţi folosi marginile hârtiei drept ciornã, **dar nicun alt material**. O intrebare poate avea mai multe rãspunsuri corecte. Toate conteazã in mod egal. **Pe de altã parte, dacã alegeţi un rãspuns greşit, punctajul vostru la intrebare este zero.**

1. (a), (b) , (c)
2. (a), (c) , (d)
3. (d)
4. (b)
5. (c)
6. (d)
7. (b), (c)
8. (a), (c)
9. (a)
10. (d)
11. (c)
12. (b), (c)
13. (b), (c)
14. (d)
15. (a), (b) , (c) , (d)
16. (a)
17. (a), (c) , (d)
18. (a), (c)
19. (a), (c)
20. (a)
21. (c)
22. (c)
23. (d)
24. (a), (b)
25. (a)
26. (c)