~ Seminar 1 ~

alfabet = mulțime finită și nevidă de simboluri

cuvânt peste un alfabet Σ = secvență finită de simboluri din Σ

limbaj formal peste un alfabet Σ = mulțime (finită sau infinită) de **cuvinte** (deci *lungimea* cuvintelor este finită, dar numărul de cuvinte din limbaj poate fi infinit)

$|\boldsymbol{w}|$ = lungimea cuvântului *w* (numărul de simboluri) (***ex:*** $|\lambda| = 0$, $|abac| = 4$)

$|\boldsymbol{w}|_{\boldsymbol{a}}$ = numărul de apariții ale simbolului *a* în cuvântul *w* (***ex:*** $|01101|_0 = 2$, $|cbcb|_a = 0$)

➢ Operații cu limbaje

Reuniune $L = L_1 \bigcup L_2$

$L = \{w \mid w \in L_1 \ sau \ w \in L_2\}$

Exemplu:
L_1 = {a, ab, abc}
L_2 = {a, bd, cd}
→ L = {a, ab, abc, bd, cd}

Concatenare $L = L_1 \cdot L_2$
$L = \{w_i w_j \mid w_i \in L_1 \ şi \ w_j \in L_2\}$ (concatenarea NU este comutativă !!)

Exemplu:
L_1 = {a, ab, abc}
L_2 = {a, bd, cd}
→ L = {aa, abd, acd, aba, abbd, abcd, abca, abcbd, abccd}

Stelare $L = L_1^* = \bigcup_{n \geq 0} \left(L_1^n\right) = \{\lambda\} \cup L_1 \cup (L_1)^2 \cup (L_1)^3 \cup ...$

$L_1^0 = \{\lambda\}$ (λ este cuvântul vid, de lungime 0)
$L_1^n = \{w_1 w_2 ... w_n \mid w_i \in L_1 \ pentru \ orice \ 1 \leq i \leq n\}$

Exemplu:
L_1 = {a, ab, abc}
→ $(L_1)^*$ = {λ ; a, ab, abc ; aa, aab, aabc, aba, abab, ababc, abca, abcab, abcabc ; …}

Obs: Cuvântul vid λ va aparţine limbajului stelat, indiferent dacă înainte aparţinea sau nu limbajului iniţial.

Ridicare la putere nenulă $L = L_1^+ = \bigcup_{n\geq 1} (L_1^n)$

$L^+ = L^* \setminus \{\lambda\} \Leftrightarrow \lambda \notin L$
$L^* = L^+ \cup \{\lambda\}$

Obs: Atenţie la ridicarea la putere a cuvintelor! *(Să nu distribuiţi puterea ca la înmulţire, ci concatenaţi cuvântul cu el însuşi de câte ori spune puterea.)*
$(abc)^2 = abcabc$; $(abc)^2 \neq aabbcc = a^2b^2c^2$

Obs: Cuvântul vid este element neutru la concatenare: $w \cdot \lambda = \lambda \cdot w = w$

➢ Definiție DFA și mod de funcționare

Automat Finit Determinist (AFD) / Deterministic Finite Automaton (DFA)

DFA = (Q, Σ, q_0, F, δ)
Q mulţimea de stări (mulţime finită şi nevidă)
Σ alfabetul de intrare (mulţime finită de simboluri)
$q_0 \in Q$ starea iniţială
$F \subseteq Q$ mulţimea de stări finale
$\delta : Q \times \Sigma \to Q$ funcţia de tranziţie („delta")

- ***Algoritm care verifică dacă un cuvânt este sau nu acceptat de un automat DFA:***
  - Pornim din starea inițială și avem cuvântul de intrare.
  - *Cât timp este posibil*, la fiecare pas încercăm să procesăm câte un simbol din cuvântul de intrare (de la stânga la dreapta) astfel:
    → conform funcției de tranziție (dacă $\delta(q_i, x) = q_j$), din starea curentă (q_i) citind simbolul curent (x) din cuvântul de intrare ajungem într-o anumită stare (q_j) (care va deveni noua stare curentă din care vom citi următorul simbol din cuvânt).
  - ***Algoritmul se termină în 3 cazuri:***
    a) dacă simbolul curent din cuvânt *nu poate fi procesat* (din cauză că nu există tranziție din starea curentă cu acel simbol), atunci cuvântul este ***respins***.
    b) dacă după procesarea întregului cuvânt s-a ajuns într-o *stare nefinală* (din mulțimea Q – F), atunci cuvântul este ***respins***.
    c) dacă după procesarea întregului cuvânt s-a ajuns într-o *stare finală* (din mulțimea F), atunci cuvântul este ***acceptat***.

- Pentru a scrie pas cu pas verificarea acceptării/respingerii unui cuvânt de un DFA folosim "***configurații***" (sau "descrieri instantanee") ale automatului, adică perechi formate din starea curentă și ce a mai rămas de citit din cuvântul de intrare.
  $(r_0, a_1a_2a_3 \dots a_n) \vdash (r_1, a_2a_3 \dots a_n) \vdash (r_2, a_3 \dots a_n) \vdash \cdots \vdash (r_n, \lambda), r_0 = q_0, r_n \in F$

- Limbajul acceptat de un DFA numit M:
  $L(M) = \{w \mid (q_0, w) \vdash^* (p, \lambda), p \in F\}$ sau
  $L(M) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$ (unde $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ este funcția de tranziție extinsă la cuvinte)

➢ Definiție NFA și mod de funcționare

Automat Finit Nedeterminist (AFN) / Nondeterministic Finite Automaton (NFA)

NFA = (Q, Σ, q_0, F, δ)
Q mulţimea de stări (mulţime finită şi nevidă)
Σ alfabetul de intrare (mulţime finită de simboluri)
$q_0 \in Q$ starea iniţială
$F \subseteq Q$ mulţimea de stări finale
$\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ funcţia de tranziţie („delta")

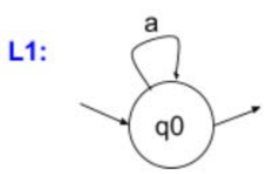
- Limbajul acceptat de un NFA numit M:
  $L(M) = \{w \mid (q_0, w) \vdash^* \{(p_1, \lambda), \dots, (p_k, \lambda)\},\ \{p_1, \dots, p_k\} \cap F \neq \emptyset\}$
  sau $L(M) = \{w \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$

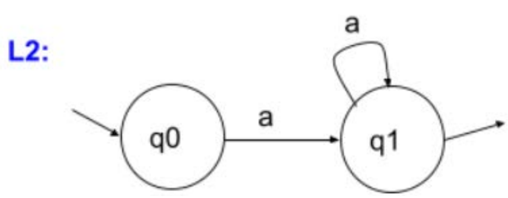
- ***Algoritm* care verifică dacă un cuvânt este sau nu acceptat de un automat NFA:**
  - Pornim din (mulțimea formată din) starea inițială și avem cuvântul de intrare.
  - *Cât timp este posibil*, aplicăm aceeași idee ca la DFA, doar că în loc să avem o singură stare curentă, la fiecare pas avem *o mulțime de stări curente*. Din fiecare stare din această mulțime încercăm să citim simbolul curent din cuvânt și ajungem într-o nouă mulțime de stări (din care vom încerca să citim simbolul următor din cuvânt).
    Formal, pentru mulțimea de stări curente *R* și simbolul curent *x* avem:
    $$\delta(R, x) = \bigcup_{q \in R} \delta(q, x)$$
  - ***Algoritmul se termină în 3 cazuri:***
    a) dacă simbolul curent din cuvânt *nu poate fi procesat* (din cauză că nu există tranziție *din niciuna dintre stările curente* cu acel simbol), atunci cuvântul este ***respins***.
    b) dacă după procesarea întregului cuvânt s-a ajuns într-o mulțime de stări R care nu conține *nicio stare finală* ($R \cap F = \emptyset$), atunci cuvântul este ***respins***.
    c) dacă după procesarea întregului cuvânt s-a ajuns într-o mulțime de stări R care conține *cel puțin o stare finală* ($R \cap F \neq \emptyset$), atunci cuvântul este ***acceptat***.

Obs: La DFA și NFA, $\lambda \in L \iff q_0 \in F$ (cuvântul vid este acceptat de automat dacă și numai dacă starea inițială este și stare finală).

➢ *Exerciții:* Desenați DFA / NFA pentru limbajele date

***L1* = a* = {aⁿ, n ≥ 0}** = $\{\lambda=a^0, a=a^1, aa=a^2, aaa=a^3, aaaa=a^4, \dots\}$
***L2* = a⁺ = {aⁿ, n ≥ 1}** = $\{a=a^1, aa=a^2, aaa=a^3, aaaa=a^4, \dots\}$





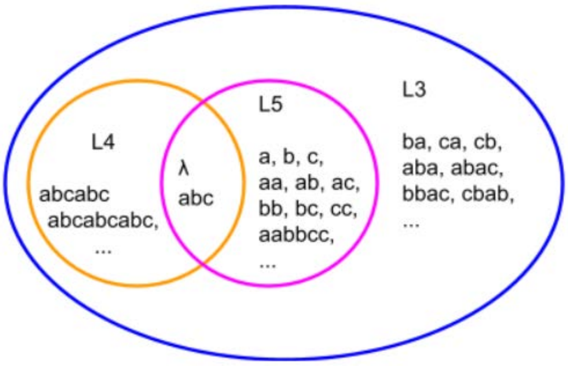
- Când folosim în automat: buclă / ciclu / stări noi ?

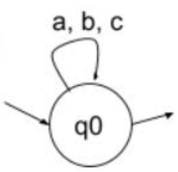
$\boldsymbol{L3} = \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}^* = \{\lambda, a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc,$
$aaa, aab, aac, aba, abb, abc, aca, acb, acc, baa, bab, \dots, caa, cab, \dots\}$

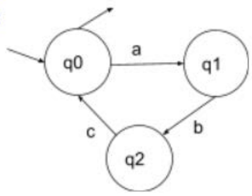
$\boldsymbol{L4} = (\boldsymbol{abc})^* = \{\lambda, abc, abcabc, abcabcabc, \dots\}$

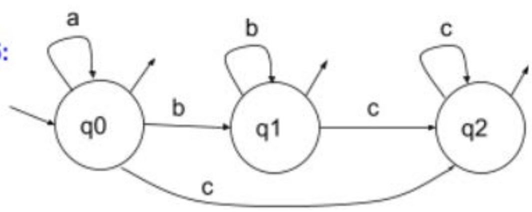
$\boldsymbol{L5} = \{\boldsymbol{a^n b^k c^p} \mid \boldsymbol{n \geq 0, k \geq 0, p \geq 0}\} = \{\lambda, a, a^2, a^3, \dots, b, b^2, b^3, \dots, c, c^2, c^3, \dots,$
$ab, ab^2, a^2b, ab^3, a^3b, a^2b^2, \dots, ac, ac^2, a^2c, ac^3, a^3c, a^2c^2, \dots, bc, bc^2, b^2c, bc^3, b^3c, b^2c^2, \dots,$
$abc, a^2bc, ab^2c, abc^2, \dots\ a^2b^2c^2, \dots\}$

Există vreo relație de incluziune / intersecție între unele dintre limbajele L3, L4, L5 ?
(Da: $L4 \subset L3$ și $L5 \subset L3$; $L4 \cap L5 = \{\lambda, abc\}$)



L3:


L4:


L5:


Observații:
→ L3 conține toate cuvintele posibile peste alfabetul {a,b,c}, cuvinte de lungime ≥ 0, în care literele pot fi *în orice ordine*. De aceea, punem toate simbolurile pe ***bucla aceleiași stări*** pentru a <u>*permite amestecarea*</u> lor.
→ L4 conține cuvinte obținute prin concatenarea cuvântului “abc” cu el însuși de n ≥ 0 ori. De aceea, folosim un ***ciclu*** în care avem câte o muchie pentru fiecare literă din cuvântul “abc”, exact în această ordine. Setăm stare finală doar pe cea în care ajungem după ce citim c, ultima literă din cuvânt.
→ L5 conține cuvinte de forma $a^n b^k c^p$ pe care le obținem dând orice valori numere naturale pentru n, k și p. Literele trebuie să fie *neamestecate* și *neapărat în această ordine*: întâi a-uri, apoi b-uri, apoi c-uri. Pentru fiecare literă (a, b, c) trebuie să folosim ***câte o buclă pe o stare diferită*** pentru a <u>*nu amesteca literele*</u>; când începem să citim o literă nouă (primul b sau c) *trebuie să mergem într-o **stare nouă*** și nu avem voie să avem muchii de întoarcere spre stări plecând din care citeam fostele litere, pentru a asigura ordinea corectă (niciun a după b și niciun a sau b după c).
Pentru k=0 (lipsă b-uri) adăugăm muchia cu c care sare din q0 direct in q2. Setăm *stările finale* q0 (pt a accepta cuvântul vid / cuvinte doar cu a), q1 (pt cuvinte doar cu b / cu a si b) și q2 (pt cuvinte doar cu c / cu a și c / cu b și c / cu a, b și c).

- Temă de gândire:

$L6 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$ (același număr de a-uri și b-uri, amestecate oricum)
$L7 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \subset L6$ (același număr de a-uri și b-uri, obligatoriu întâi a-uri, apoi b-uri)
versus
$L8 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \ mod\ 2 = |w|_b \ mod\ 2\}$ (aceeași paritate pt numărul de a-uri și b-uri)

- Putem să desenăm un DFA? Dar un NFA?
- Puteți să dați un exemplu de limbaj pentru care putem desena un NFA, dar nu un DFA?

Observații:
→ L6 și L7 nu sunt limbaje regulate (nu există niciun automat finit care să le accepte).
Argument intuitiv: nu putem să verificăm egalitatea dintre numărul total de a-uri și cel de b-uri pentru ***o infinitate de valori posibile*** ale lui n (orice număr natural) deoarece DFA / NFA au la dispoziție doar ***un număr finit de stări*** în care putem "memora" o cantitate finită de informații.

→ În schimb L8 este limbaj regulat pentru că există ***un număr finit de cazuri*** pentru paritatea numărului de a-uri și cel de b-uri.

Idee: Memorăm în indicii stărilor care sunt resturile împărțirii la 2 pentru numărul de a-uri și cel de b-uri citite (începând din starea inițială) până în acel moment; primul indice este pentru a-uri și al doilea pentru b-uri.