Pasat Ionuț-Vlăduț
Gr. 324CCa.

Ex 1

a) Algoritm de afișare a nr. pare dintr-o matrice până la întâlnirea unui nr. negativ.

Cod	cost	Nr. rep.
`void print_par(int a[m][n], int m, int n)`		
`{ int i=0;`	c_1	1
`int ok=0;`	c_2	1
`while (i<m && ok==0)`	c_3	$l+2$
`{ int j=0;`	c_4	$l+1$
`while (j<n && ok==0)`	c_5	$\sum_{i=0}^{l}(c+2)$
`{ if (a[i][j] < 0)`	c_6	$\sum_{i=0}^{l}(c+1)$
`ok==1;`	c_7	$X\ (0/1)$
`if(a[i][j] % 2 == 0 && ok==0)`	c_8	$\sum_{i=0}^{l}(c+1)$
`printf("%d ", a[i][j]);`	c_9	Y
`j++; }`	c_{10}	$\sum_{i=0}^{l}(c+1)$
`i++; }`	c_{11}	$l+1.$
`}`		

unde l este numărul liniei la care se găsește valoarea negativă și c este numărul coloanei

b) Calculați complexitatea algoritmului folosind metrica neomogenă.

1) Toate operațiile:

$$T(m,n) = c_1 + c_2 + c_3(l+2) + c_4(l+1) + c_5\sum_{i=0}^{l}(c+2) + c_6\sum_{i=0}^{l}(c+1) + c_7\cdot X + c_8\sum_{i=0}^{l}(c+1) + c_9 Y + c_{10}\sum_{i=0}^{l}(l+1) + c_{11}(l+1)$$

1i) <u>Cazul cel mai favorabil</u>

În acest caz considerăm că elementul negativ va fi pe prima poziție a matricei, iar algoritmul nu va printa nimic. $\Rightarrow l=0, c=0, x=1, y=0$

$$T(m,n) = c_1 + c_2 + 2c_3 + c_4 + 2c_5 + c_6 + c_7 + c_8 + c_{10} + c_{11}$$

$$\Rightarrow T(m,n) = \Theta(1)$$

1ii) <u>Cazul cel mai defavorabil</u>

În acest caz considerăm că toate elementele matricei sunt pozitive și pare.

$\Rightarrow l = m-1, c = n-1, x=0, y = m \cdot n$

$$T(m,n) = c_1 + c_2 + c_3(m+1) + c_4 m + c_5 \cdot m \cdot (n+1) + c_6 \cdot m \cdot n +$$

$$+ c_8 \cdot m \cdot n + c_9 \cdot m \cdot n + c_{10}\, m \cdot n + c_{11}\, m$$

$$= c_1 + c_2 + c_3 + (c_3 + c_4 + c_{11} + c_5) m + (c_5 + c_6 + c_8 + c_9 + c_{10}) m \cdot n$$

$$\Rightarrow T(m,n) = \Theta(m \cdot n).$$

1iii) <u>Cazul mediu</u>

În acest caz considerăm că elementul negativ se află la jumătatea matricei, iar jumătate dintre elementele verificate până acolo sunt și ele jumătate pare.

$\Rightarrow l = \frac{m}{2}, c = \frac{n}{2}, x = 1, y = \frac{m \cdot n}{4}$

$$T(m,n) = c_1 + c_2 + c_3\left(\frac{m}{2}+2\right) + c_4\left(\frac{m}{2}+1\right) + c_5\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+2\right)$$

$$+ c_6\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right) + c_7 + c_8\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right) + c_9 \frac{m \cdot n}{4} +$$

$$+ c_{10}\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right) + c_{11}\left(\frac{m}{2}+1\right)$$

$$T(m,n) = c_1 + c_2 + 2c_3 + c_4 + 2c_5 + c_6 + c_7 + c_8 + c_{10} + c_{11} +$$
$$+ \frac{1}{2}(c_3 + c_4 + 2c_5 + c_6 + c_8 + c_{10} + c_{11})\, m +$$
$$+ \frac{1}{2}(c_5 + c_6 + c_8 + c_{10})\, n + \frac{1}{4}(c_5 + c_6 + c_8 + c_9 + c_{10})\, m \cdot n$$
$$\Rightarrow T(m,n) = \Theta(m \cdot n)$$

2) Operații critice

2i) Cazul cel mai favorabil ($l=0, c=0, x=1, y=0$)

Operațiile critice: $c_1, c_2, c_4, c_6, c_7, c_8, c_{10}, c_{11}$.

$$T(m,n) = c_1 + c_2 + c_4 + c_6 + c_7 + c_8 + c_{10} + c_{11} = \Theta(1)$$

2ii) Cazul cel mai defavorabil ($l=m-1; c=n-1; x=0; y=m\cdot n$)

operațiile critice: $c_4, c_6, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}$

$$T(m,n) = c_4 m + c_6\, m \cdot n + c_8\, m \cdot n + c_9\, m \cdot n +$$
$$+ c_{10}\, m \cdot n + c_{11}\, m$$
$$= (c_4 + c_{11})m + (c_6 + c_8 + c_9 + c_{10})\, m \cdot n = \Theta(m \cdot n).$$

2ii) Cazul mediu ($l = \frac{m}{2}, c = \frac{n}{2}, y = \frac{m \cdot n}{4}, x = 1$)

Operațiile critice: $c_4, c_6, c_8, c_9, c_{10}, c_{11}$.

$$T(m,n) = c_4 \cdot \left(\frac{m}{2}+1\right) + c_6\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right) + c_8\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right) +$$
$$+ c_9 \frac{mn}{\ldots} + c_{10}\left(\frac{m}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}+1\right) + c_{11}\left(\frac{m}{2}+1\right).$$

$$T(m,n) = c_4 + c_6 + c_8 + c_{10} + c_{11} + \frac{1}{2}(c_4 + c_6 + c_8 + c_{10} + c_{11})\, m +$$

$$+ \frac{1}{2}(c_6 + c_8 + c_{10})\frac{n}{2} + \frac{1}{4}(c_6 + c_8 + c_9 + c_{10})\, m \cdot n$$

$$\Rightarrow T(m,n) = \Theta(m \cdot n).$$

Ex 2 a) Dați exemplu de o pereche (f, g), $f \neq g$ care îndeplinesc relațiile următoare și demonstrați că sunt adevărate:

i) $f_1 = O(g_1)$

Am ales $f_1 = n^2$ și $g_1 = n^2 + n$

Def

$$O(g(n)) = \{ f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^* \mid \exists c \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } f(n) \leq c \cdot g(n), \forall n \geq n_0 \}$$

, unde $f(n) = n^2$ și $g(n) = n^2 + n$

Fie $c = 1$

$n^2 \leq c(n^2 + n) \Rightarrow n^2 \leq n^2 + n \mid -n^2 \Rightarrow n \geq 0$

$\Rightarrow n_0 = 1$

Am demonstrat că există $c = 1 \in \mathbb{R}_+^*$ și $n_0 = 1 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $f(n) \leq c \cdot g(n)$, $\forall n \geq n_0$, unde $f(n) = n^2$ și $g(n) = n^2 + n$

Deci $n^2 = O(n^2 + n)$

ii) $f_2 = O(g_2)$

Am ales $f_2 = n^4 + n^2$ și $g_2 = n^4$

<u>Def</u>

$$\Omega(g(n)) = \{ f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^* \mid \exists c \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } f(n) \geq c \cdot g(n), \forall n \geq n_0 \}$$

, unde $f(n) = n^4 + n^2$ și $g(n) = n^4$

Fie $c = \frac{1}{2}$

$n^4 + n^2 \geq \frac{1}{2} n^4 \Rightarrow \frac{1}{2} n^4 + n^2 \geq 0 \mid : n^2 \Rightarrow \frac{1}{2} n^2 + 1 \geq 0 \mid \cdot 2$

$\Rightarrow n^2 + 2 \geq 0$ „Adevărat" pentru $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n_0 = 1$.

Am demonstrat că există $c = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}_+^*$ și $n_0 = 1 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $f(n) \geq c \cdot g(n)$, unde $f(n) = n^4 + n^2$ și $g(n) = n^4$

Deci $n^4 + n^2 = O(n^4)$.

iii) $f_3 = \Theta(g_3)$

Am ales $f_3 = n^2 + n^3$ și $g_3 = n^3$

Def

$\Theta(g(n)) = \{ f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^* \mid \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$

a.î. $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n), \forall n \geq n_0$

, unde $f(n) = n^2 + n^3$ și $g(n) = n^3$

Fie $c_1 = 1$ și $c_2 = 2$

$c_1(n^3) \leq n^2 + n^3 \leq c_2(n^3) \Rightarrow n^3 \leq n^2 + n^2 \leq 2n^3$,

Adevărat pt. $\forall n \geq 1$

$\Rightarrow n_0 = 1$

Am demonstrat că există $c_1 = 1$ și $c_2 = 2 \in \mathbb{R}_+^*$ și $n_0 = 1 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n, \forall n \geq n_0$, unde $f(n) = n^2 + n^3$ și $g(n) = n^3$

Deci $n^2 + n^3 = \Theta(n^3)$

iiii) $f_4 = \Theta(g_4)$

Am ales $f_4 = n^3$ și $g_4 = n^3 \log n$

Def

$\Theta(g(n)) = \{ f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^* \mid \forall c \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $f(n) < c \cdot g(n), \forall n \geq n_0 \}$, unde $f(n) = n^3$ și $g(n) = n^3 \log n$

Folosim proprietatea $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ și avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3 \log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\log n}_{\searrow \infty}} \overset{\frac{1}{\infty}}{=\!=} 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow n^3 = \Theta(n^3 \log n)$.

iiiii) $f_5 = \omega(g_5)$

Am ales $f_5 = n^3 \log n$ și $g_5 = n^3$

Def

$\omega(g(n)) = \{ f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^* \mid \forall c \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$

a.î. $f(n) > c \cdot g(n), \forall n \geq n_0 \}$

, unde $f(n) = n^3 \log n$ și $g(n) = n^3$

Folosim proprietatea $f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$ și avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3} \log n}{\cancel{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\nearrow \infty}{\log n}}{1} \overset{\frac{\infty}{1}}{=} \infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow n^3 \log n = \omega(n^3)$.

Ex 2b | Demonstrați că $O(n^3+n^2) = O(n^3)$

Def $O(g(n)) = \{ f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^* \mid \exists c \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$
a.î. $f(n) \le c \cdot g(n), \forall n \ge n_0 \}$

Arătăm că $n^3 = O(n^3+n^2)$, unde $f(n) = n^3$ și $g(n) = n^3+n^2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}(1+\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0})} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \ne \infty \Rightarrow n^3 = O(n^3+n^2)$$

Deoarece clasa de complexitate O nu are proprietatea de simetrie trebuie să arătăm și că $n^3+n^2 = O(n^3)$

$n^3+n^2 = O(n^3)$, unde $f(n) = n^3+n^2$ și $g(n) = n^3$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^3}(1+\overbrace{\tfrac{1}{n}}^{\to 0})}{\cancel{n^3}} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \ne \infty \Rightarrow n^3+n^2 = O(n^3)$$

Ne folosim de tranzitivitatea clasei de complexitate O și avem:

Fie $f(n) = O(n^3)$, $n^3 = O(n^3+n^2)$ $\xRightarrow{\text{tranz.}}$ $f(n) = O(n^3+n^2)$
$\Rightarrow O(n^3) \subseteq O(n^3+n^2)$ (1)

Fie $f(n) = O(n^3+n^2)$, $n^3+n^2 = O(n^3)$ $\xRightarrow{\text{tranz}}$ $f(n) = O(n^3)$
$\Rightarrow O(n^3+n^2) \subseteq O(n^3)$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow O(n^3+n^2) = O(n^3)$

Ex 2c

c1) Folosind definiția clasei Ω demonstrați reflexivitatea pentru Ω.

Def $\Omega(g(n)) = \{ f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^* \mid \exists c \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $f(n) \geq c \cdot g(n), \forall n \geq n_0 \}$.

Proprietatea de reflexivitate: $f(n) = \Omega(f(n))$

Arătăm că $f(n) = \Omega(f(n))$

$f(n) = \Omega(f(n)) = \{ f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^* \mid \exists c \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $f(n) \geq c \cdot f(n), \forall n \geq n_0 \}$.

Pentru $\forall c \in (0, 1]$ și $n \geq 1$ $(n_0 = 1)$ relația $f(n) \geq c \cdot f(n)$ este adevărată.

Am demonstrat că există $c \in (0, 1] \in \mathbb{R}_+^*$ și $n_0 = 1 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $f(n) \geq c \cdot f(n)$, $\forall n \geq n_0$

Deci $f(n) = \Omega(f(n))$.

c2) Folosind definiția cu c și n_0 sau definiția cu limită pentru clasa ω demonstrați tranzitivitatea pentru ω.

Def $\omega(g(n)) = \{ f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^* \mid \forall c \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $f(n) > c \cdot g(n), \forall n \geq n_0 \}$

Proprietatea de tranzitivitate:

$$\left.\begin{array}{l} f(n) = \omega(g(n)) \\ g(n) = \omega(h(n)) \end{array}\right| \Rightarrow f(n) = \omega(h(n))$$

$f(n) = \omega(g(n)) \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Rightarrow f(n) >> g(n)$ (1)

$g(n) = \omega(h(n)) \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \infty \Rightarrow g(n) >> h(n)$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow f(n) >> h(n) \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{f(n)}{h(n)} = \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow f(n) = \omega(h(n))$

C3) Folosind definiția clasei Θ demonstrați simetria pentru Θ.

<u>Def</u>

$$\Theta(g(n)) = \{ f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^* \mid \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \text{ a.î. } c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 g(n), \forall n \ge n_0 \}$$

Proprietatea de simetrie:

Dacă $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$.

Trebuie să arătăm că $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$

Dacă avem $f(n) = \Theta(g(n))$ relație adevărată $\Rightarrow$

$\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î. $c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n)$, $\forall n \ge n_0$

$$c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n) \Rightarrow \begin{cases} g(n) \le \frac{1}{c_1} f(n) \\ g(n) \ge \frac{1}{c_2} f(n) \end{cases}, \forall n \ge n_0.$$

Notăm $k_2 = \frac{1}{c_1}$ și $k_1 = \frac{1}{c_2}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$ pt. că $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ (deci sunt bine definite) și avem:

$$\begin{cases} g(n) \le k_2 f(n) \\ g(n) \ge k_1 f(n) \end{cases} \Rightarrow k_1 f(n) \le g(n) \le k_2 f(n), \forall n \ge n_0$$

Deci $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \ge n_0$ a.î. $k_1 f(n) \le g(n) \le k_2 f(n)$

$\Rightarrow f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$.

Ex 3 a | Rezolvați următoarea recurență folosind cele 4 metode: (O să notez $\log_2 n = \log n$)

$$T(n) = 3T(\lfloor n/3 \rfloor) + k_2,\ n > 1;\ T(1) = k_1;\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$$

I | Metoda iterativă

$$T(n) = 3T(\lfloor n/3 \rfloor) + k_2,\ n > 1;\ T(1) = k_1$$

$$\Rightarrow T(n) = 3T(n/3) + \Theta(1),\ T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = \cancel{3T(n/3)} + \Theta(1) \ \Big|\cdot 3^0$$

$$\cancel{T(n/3)} = \cancel{3T(n/3^2)} + \Theta(1) \ \Big|\cdot 3^1$$

$$\cancel{T(n/3^2)} = \cancel{3T(n/3^3)} + \Theta(1) \ \Big|\cdot 3^2$$

- - - - - - - - - - - - -

$$\cancel{T(n/3^k)} = 3T(n/3^{k+1}) + \Theta(1) \ \Big|\cdot 3^k$$

$$T(n) = 3^{k+1} \cdot T(n/3^{k+1}) + \sum_{i=0}^{k} 3^i \cdot \Theta(1) \Rightarrow$$

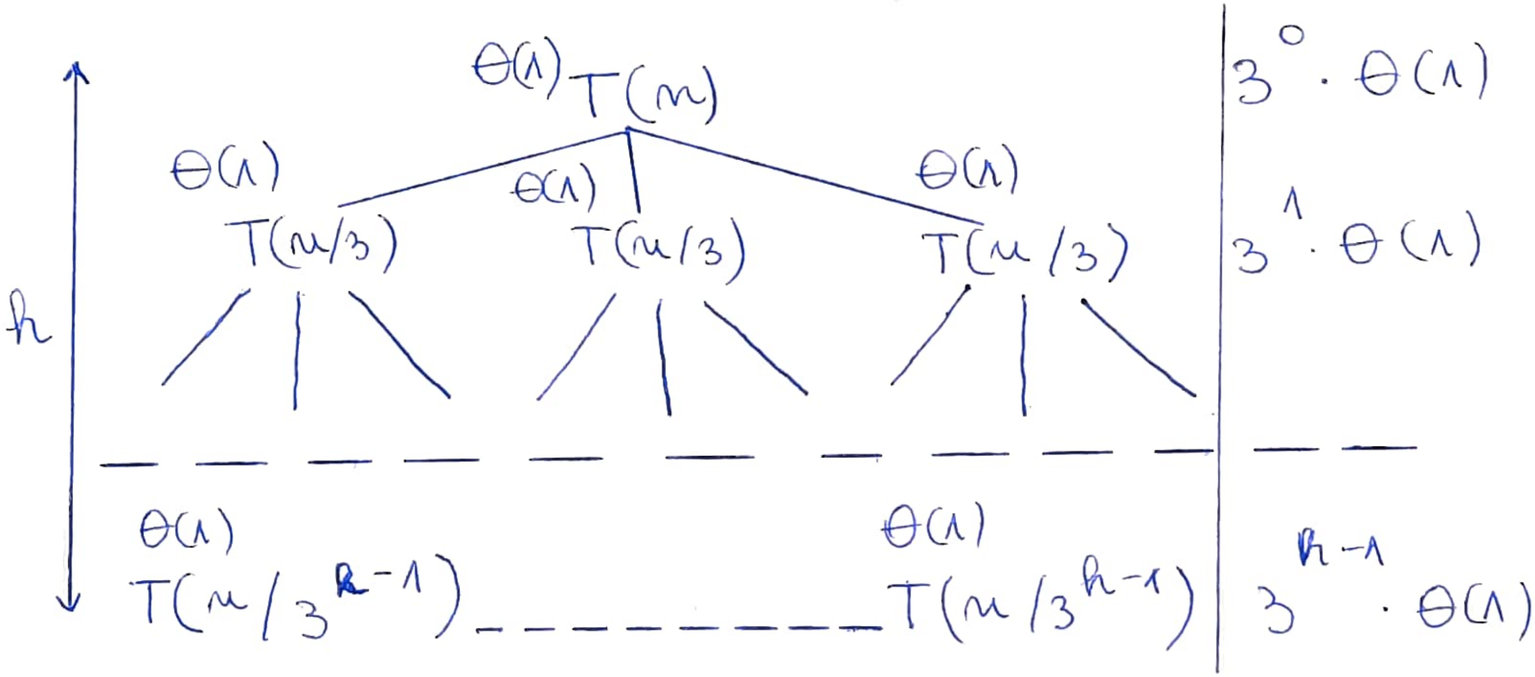
$$\Rightarrow n = 3^{k+1} \Rightarrow k+1 = \log_3 n \Rightarrow k = \log_3 n - 1$$

$$T(n) = n \cdot T(1) + \frac{3^{k+1} - 1}{2}\Theta(1) = nT(1) + \frac{n-1}{2}\Theta(1)$$

$$T(n) = \Theta(n) + \Theta\left(\frac{n-1}{2}\right) = \Theta\left(n + \frac{n-1}{2}\right) = \Theta(n)$$

II Metoda arborelui

$$T(n) = 3T(n/3) + \Theta(1), \quad T(1) = \Theta(1).$$



$$\overset{+}{\Longrightarrow} T(n) = \sum_{i=0}^{h-1} 3^i \, \Theta(1)$$

$$\sum_{i=0}^{h-1} 3^i = 3^0 + 3^1 + 3^2 + \ldots + 3^{h-1} = \frac{1\cdot(1-3^h)}{1-3} =$$

$$= \frac{3^h - 1}{2}$$

$$n = 3^{h-1} = \frac{1}{3}\cdot 3^h \Rightarrow h-1 = \log_3 n \Rightarrow h = \log_3 n - 1$$

$$\text{Deci } T(n) = \frac{3^h - 1}{2}\cdot\Theta(1) = \frac{3n-1}{2}\cdot\Theta(1) = \Theta\left(\frac{3n-1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n)$$

III | Metoda substituției

$$T(n) = 3T(n/3) + k_2, \quad T(1) = k_1$$

Alegem $T(n) = \theta\left(\frac{3n-1}{2}\right)$

$\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ și $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î.

$$c_1\left(\frac{3n-1}{2}\right) \le T(n) \le c_2\left(\frac{3n-1}{2}\right)$$

Demonstrăm prin inducție inegalitățile de mai sus:

Caz de bază

$n=1$: $c_1 \le k_1 \le c_2 \;(1) \Rightarrow n_0 = 1$

$n=2 \Rightarrow T(2) = 3T(0) + k_2 \Rightarrow c_1 \cdot \frac{5}{2} \le 3k_1 + k_2 \le c_2 \cdot \frac{5}{2} \;(2)$

Pas de inducție $n/3 \to n$

Ipoteza de inducție

$$c_1\left(\frac{n-1}{2}\right) \le T(n/3) \le c_2\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

Arătăm că $c_1\left(\frac{3n-1}{2}\right) \le T(n) \le c_2\left(\frac{3n-1}{2}\right)$

$$c_1\left(\frac{n-1}{2}\right) \le T(n/3) \le c_2\left(\frac{n-1}{2}\right) \quad \Big|\cdot 3 \quad \Big| + k_2$$

$$3c_1\left(\frac{n-1}{2}\right) + k_2 \le 3T(n/3) + k_2 \le 3c_2\left(\frac{n-1}{2}\right) + k_2$$

$$c_1\left(\frac{3n-1}{2} - 1\right) + k_2 \le T(n) \le c_2\left(\frac{3n-1}{2} - 1\right) + k_2$$

$$\underbrace{c_1\left(\frac{3n-1}{2}\right) + (k_2 - c_1)}_{\ge c_1\left(\frac{3n-1}{2}\right)} \le T(n) \le \underbrace{c_2\left(\frac{3n-1}{2}\right) + (k_2 - c_2)}_{\le c_2\left(\frac{3n-1}{2}\right)}$$

$$\to \begin{cases} k_2 - c_1 \ge 0 \\ k_2 - c_2 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 \ge c_1 \\ k_2 \le c_2 \end{cases} \Rightarrow c_1 \le k_2 \le c_2 \;(3)$$

Caz de bază:

$$c_1 \leq k_1 \leq c_2$$

$$\frac{5}{2}c_1 \leq 3k_1 + k_2 \leq \frac{5}{2}c_2$$

$n_0 = 1$.

Pas de inducție: $c_1 \leq k_2 \leq c_2$.

$\Rightarrow \exists\ c_1 = \min(k_1, 3k_1+k_2, k_2)$,

$c_2 = \max(k_1, 3k_1+k_2, k_2) \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists\ n_0 = 1 \in \mathbb{N}^*$

a.î. $c_1\left(\frac{3n-1}{2}\right) \leq T(n) \leq c_2\left(\frac{3n-1}{2}\right)$, $\forall\ n \geq n_0$

$\Rightarrow T(n) = \Theta\left(\frac{3n-1}{2}\right)$;

IV) Teorema Master

$$T(n) = 3T(n/3) + \Theta(1)$$

$$T(n) = aT(n/b) + f(n)$$

Ne încadrăm în cazul 1: Dacă $\exists\, \varepsilon > 0$ a.î.

$f(n) = O(n^{\log_b^a - \varepsilon})$ atunci $T(n) = \Theta(n^{\log_b^a})$.

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 3 \end{array}\right| \Rightarrow n^{\log_b^a} = n^1 = n$$

$$f(n) = \Theta(1) = \Theta(n^{1-1}) = \Theta(n^{\log_b^a - 1}) \xrightarrow[(\Theta,(O,\Omega))]{\text{proiecția}}$$

$$\Rightarrow f(n) = O(n^{\log_b^a - 1}) \Rightarrow \underline{\varepsilon = 1 > 0}$$

$$\xRightarrow{\text{caz } 1} T(n) = \Theta(n^{\log_b^a}) = \Theta(n^{\log_3^3}) = \Theta(n).$$

Ex 3b) Rezolvați recurența folosind cele 4 metode:

$$T(n) = 5T(\lceil n/2 \rceil) + k_2 n,\ n>1;\ T(1)=k_1;\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$$

I) Metoda iterativă

$$T(n) = 5T(\lceil n/2 \rceil) + k_2 n,\ n>1;\ T(1)=k_1$$

$$\Rightarrow T(n) = 5T(n/2) + \Theta(n),\ T(1) = \Theta(1)$$

$$T(n) = 5\cancel{T(n/2)} + \Theta(n) \qquad 1\cdot 5^0$$

$$\cancel{T(n/2)} = 5\cancel{T(n/2^2)} + \Theta(n/2) \qquad 1\cdot 5^1$$

$$\cancel{T(n/2^2)} = 5\cancel{T(n/2^3)} + \Theta(n/2^2) \qquad 1\cdot 5^2$$

$$\cancel{T(n/2^k)} = 5T(n/2^{k+1}) + \Theta(n/2^k) \qquad 1\cdot 5^k$$

$$T(n) = 5^{k+1}T(n/2^{k+1}) + \sum_{i=0}^{k} 5^i \Theta(n/2^i)$$

$$n = 2^{k+1} \Rightarrow k+1 = \log n \Rightarrow k = \log n - 1.$$

$$\sum_{i=0}^{k} 5^i \Theta(n/2^i) = \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{5}{2}\right)^i \Theta(n).$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^0 + \left(\frac{5}{2}\right)^1 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{5}{2}\right)^k = \frac{1\left(1-\left(\frac{5}{2}\right)^{k+1}\right)}{1-\frac{5}{2}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{k+1} - 1}{\frac{5}{2} - 1} = \frac{\frac{5^{k+1}}{2^k} - 2}{3}.$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{k} 5^i \Theta(n/2^i) = \frac{\frac{5^{k+1}}{2^k} - 2}{3}\Theta(n).$$

$$\Rightarrow T(n) = 5^{\log n} T(1) + \frac{\frac{5^{k+1}}{2^k} - 2}{3}\Theta(n).$$

$$\Rightarrow T(n) = 5^{\log n} T(1) + \frac{\frac{5^{\log n}}{n/2} - 2}{3}\Theta(n).$$

$$T(n) = \Theta(5^{\log n}) + \left(\frac{2 \cdot 5^{\log n}}{3n} - \frac{2}{3}\right) \cdot \Theta(n)$$

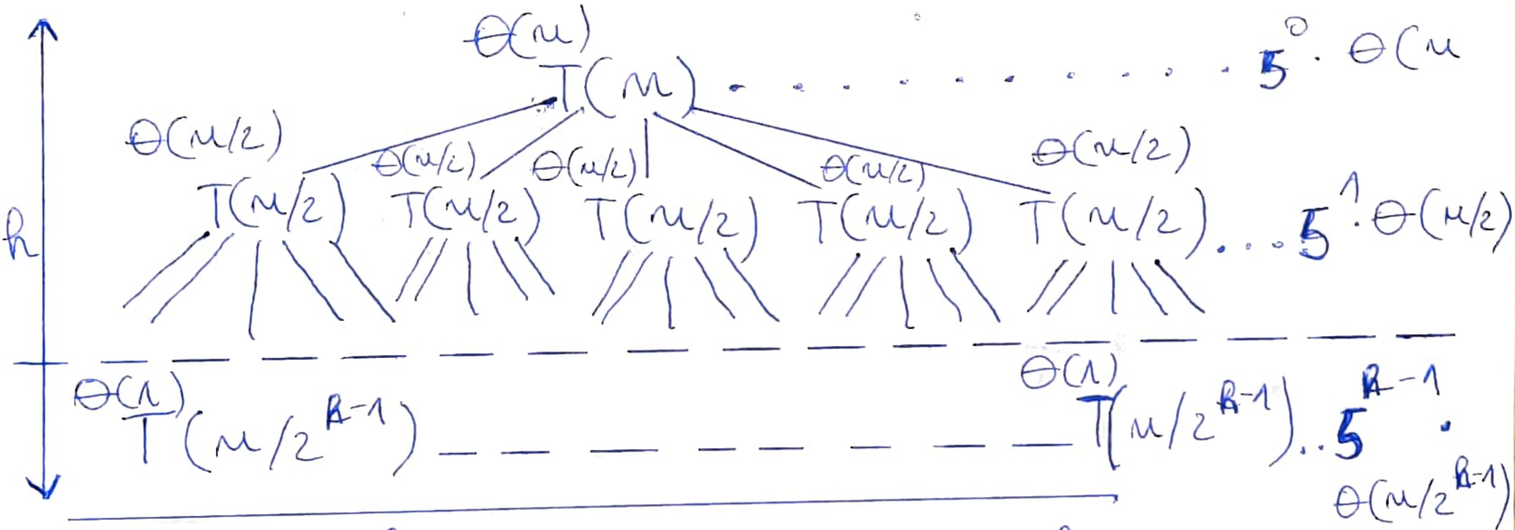
$$T(n) = \Theta(5^{\log n}) + \Theta\left(\frac{2}{3} \cdot 5^{\log n} - \frac{2}{3} n\right)$$

$$T(n) = \Theta\left(5^{\log n}\left(1 + \frac{2}{3}\right) - \frac{2}{3} n\right) = \Theta\left(5^{\log n} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3} n\right)$$

$$T(n) = \Theta\left(n^{\log 5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3} n\right) = \Theta\left(n^{\log 5}\right)$$

II | Metoda arborelui

$$T(n) = 5\,T(n/2) + \Theta(n), \quad T(1) = \Theta(1)$$



$$\Rightarrow T(n) = \sum_{i=0}^{h-1} 5^i \cdot \Theta(n/2^i) \; ; \; n = 2^{h-1} \Rightarrow h-1 = \log n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = \log n + 1$$

$$\sum_{i=0}^{h-1} 5^i \,\Theta(n/2^i) = \sum_{i=0}^{h-1} \left(\frac{5}{2}\right)^i \cdot \Theta(n)$$

$$= \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^h - 1}{\frac{3}{2}}\, \Theta(n) = \frac{\frac{5^h}{2^{h-1}} - 2}{3} \cdot \Theta(n)$$

$$T(n) = \left(\frac{1}{3} \frac{5^{\log n + 1}}{n} - \frac{2}{3}\right) \cdot \Theta(n) = \Theta\left(\frac{5}{3} \cdot 5^{\log n} - \frac{2}{3} n\right)$$

$$= \Theta\left(\frac{5}{3} n^{\log 5} - \frac{2}{3} n\right) = \Theta\left(n^{\log 5}\right).$$

III | Metoda substituției

$T(n) = 5T(n/2) + k_2 \cdot n$, $T(1) = k_1$

Alegem $T(n) = \Theta(n^{\log 5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3} n)$

$\exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ și $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^*$ a.î.

$$c_1 (n^{\log 5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3} n) \le T(n) \le c_2 (n^{\log 5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3} n)$$

Demonstrăm prin inducție inegalitățile de mai sus:

Caz de bază:

$n = 1$: $c_1 \le k_1 \le c_2 \; (1) \Rightarrow n_0 = 1$

Pas de inducție : $n/2 \to n$

Ipoteza de inducție

$$c_1 \left(\frac{n^{\log 5}}{\cancel{2^{\log 5}}} \cdot \cancel{\frac{5}{3}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{n}{2} \right) \le T(n/2) \le c_2 \left(\frac{n^{\log 5}}{\cancel{2^{\log 5}}} \cdot \cancel{\frac{5}{3}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{n}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow c_1 \left(\frac{n^{\log 5}}{3} - \frac{n}{3} \right) \le T(n/2) \le c_2 \left(\frac{n^{\log 5}}{3} - \frac{n}{3} \right),$$

pt. că $2^{\log 5} = 5^{\log 2} = 5$.

Arătăm că $c_1 (n^{\log 5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3} n) \le T(n) \le c_2 (n^{\log 5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \cdot n)$

$$c_1 \left(\frac{n^{\log 5}}{3} - \frac{n}{3} \right) \le T(n/2) \le c_2 \left(\frac{n^{\log 5}}{3} - \frac{n}{3} \right) \Big| \cdot 5 \; \Big| + k_2 \cdot n$$

$$5c_1 \left(\frac{n^{\log 5}}{3} - \frac{n}{3} \right) + k_2 n \le T(n) \le 5c_2 \left(\frac{n^{\log 5}}{3} - \frac{n}{3} \right) + k_2 \cdot n.$$

$$c_1 (n^{\log 5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3} n - n) + k_2 n \le T(n) \le c_2 (n^{\log 5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3} n - n) + k_2 n$$

$$c_1 (n^{\log 5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3} n) + n(k_2 - c_1) \le T(n) \le c_2 (n^{\log 5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3} n) + n(k_2 - c_2)$$

$\ge c_1 (n^{\log 5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3} n)$ $\qquad\qquad$ $\le c_2 (n^{\log} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3} n)$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_2 - c_1 \geq 0 \\ k_2 - c_2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 \geq c_1 \\ k_2 \leq c_2 \end{cases} \Rightarrow c_1 \leq k_2 \leq c_2 \ (2)$$

<u>Caz de bază:</u>

$c_1 \leq k_1 \leq c_2$, $n_0 = 1$

<u>Pas de inducție</u>: $c_1 \leq k_2 \leq c_2$

$\Rightarrow \exists\ c_1 = \min(k_1, k_2),\ c_2 = \max(k_1, k_2) \in \mathbb{R}_+^*$,

$\exists\ n_0 = 1 \in \mathbb{N}^*$ a.î.

$$c_1\left(n^{\log 5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3}n\right) \leq T(n) \leq c_2\left(n^{\log 5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3}n\right),\ \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta\left(n^{\log 5} \cdot \frac{5}{3} - \frac{2}{3}n\right)$$

IV | <u>Teorema Master</u>

$$T(n) = 5\,T(n/2) + \Theta(n)$$

$$T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$$

Ne încadrăm în cazul 1: Dacă $\exists\ \varepsilon > 0$ a.î.
$f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ atunci $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

$$\left.\begin{array}{l} a = 5 \\ b = 2 \end{array}\right| \Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log 5}$$

$$f(n) = \Theta(n) = \Theta\left(n^{\log 5 - \log \frac{5}{2}}\right) \xrightarrow[(\Theta, (O, \Omega))]{\text{proiecția}}$$

$$\Rightarrow f(n) = O\left(n^{\log 5 - \log \frac{5}{2}}\right) \Rightarrow \varepsilon = \log(5/2) > 0.$$

$$\xRightarrow{\text{Caz 1}} T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log 5}).$$